

EXERCICE 1

Soit (U_n) une suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} U_0 = 5 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 4 \end{cases}$

1- Calculez U_1 et U_2

On définit une seconde suite (V_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = U_n - 8$

2- Montrez que (V_n) est une suite géométrique, précisera la raison et le premier terme

3- Ecrire la formule explicite V_n en fonction de n

4- En déduire U_n en fonction de n

5- Etudie la convergence des suites (V_n) et (U_n)

6- Calculez la somme $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$ puis en déduire la somme $S'_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$

Calcule S'_{10} et S_{10}

EXERCICE 2

Soit (X_n) une suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} X_0 = 2 \\ X_{n+1} = \frac{3X_n + 7}{4} \end{cases}$

1- Calculez X_1 et X_2

2- Soit la suite (V_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = X_n - 7$

a- Calcule V_0 et V_1

b- Montrez que (V_n) est une suite géométrique

c- Détermine l'expression du terme général V_n en fonction de n puis en déduire X_n en fonction de n

d- Etudie la convergence des suites (V_n) et (U_n)

e- Calculez la somme $S = U_0 + U_1 + \dots + U_{20}$ et $S' = X_0 + X_1 + \dots + X_{20}$

EXERCICE 3

Soit (U_n) une suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} U_1 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{n+1}{n}U_n \end{cases}$

1- Calculez U_2 et U_3

2- Démontre que $\forall n > 1$, la suite (U_n) est décroissante

3- Soit la suite (V_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = \frac{U_n}{n}$

a) Montrez que (V_n) est une suite géométrique, précisera la raison et le premier terme

b) Exprime la formule explicite V_n en fonction de n

c) En déduire U_n en fonction de n

d) Etudie la convergence de la suite (V_n)

EXERCICE 4

Le nombre d'arbre d'une forêt, en milliers d'unités est modélisé par la suite (U_n) où U_n une désigne le nombre d'arbres en millier au cours de l'année $(2010 + n), n \in \mathbb{N}$

En 2010 la forêt possède 50 000 arbres. Afin d'entretenir cette forêt vieillissante, un organisme régional décide d'abattre chaque année 5% des arbres existants et de replanter 3000 arbres.

1- Montrer que la situation peut être modélisé par $\begin{cases} U_0 = 50 \\ U_{n+1} = 0,95U_n + 3 \end{cases}$

Déterminez le nombre d'arbre de cette forêt en 2011 et 2012

2- On définit une seconde suite (V_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = 60 - U_n$

a- Montrez que (V_n) est une suite géométrique, précisera la raison et le premier terme.

b- En déduire $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = 60 - 10 \times (0,95)^n$

3- a- Vérifiez que pour tout entier naturel $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} - U_n = 0,5 \times (0,95)^n$

b- En déduire le sens de variation de la suite (U_n)

- 4- Déterminez l'année à partir de laquelle le nombre d'arbre aura dépassé de 5% le nombre d'arbres en 2010
- 5- Déterminez la limite de la suite (U_n) puis interprétez

EXERCICE 5

L'étude sur une population de singes a montré que suite à une maladie, leur nombre baisse de 15 % chaque année.

PARTIE A : Au 1er janvier 2004, la population était estimée à 25 000 singes.

A l'aide d'une suite, on modélise la population au 1er janvier de chaque année. Pour tout entier naturel n , le terme u_n de la suite représente le nombre de singes au 1er janvier de l'année 2004 + n . On a ainsi $u_0 = 25000$.

1. Calculer l'effectif de cette population de singes :
 - a. au 1er janvier 2005 ;
 - b. au 1er janvier 2006, en arrondissant à l'entier.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n , on a $u_n = 25000 \times (0,85)^n$.

3. Au bout de combien d'années après le 1er janvier 2004 le nombre de singes sera inférieur à 5 000.

PARTIE B : Au 1er janvier 2014, une nouvelle étude a montré que la population de cette race de singes, dans la réserve naturelle, ne comptait plus que 5 000 individus. La maladie prenant de l'ampleur, on met en place un programme de soutien pour augmenter le nombre de naissances. À partir de cette date, on estime que, chaque année, un quart des singes disparaît et qu'il se produit 400 naissances.

On modélise la population de singes dans la réserve naturelle à l'aide d'une nouvelle suite. Pour tout entier naturel n , le terme v_n de la suite représente le nombre de singes au 1er janvier de l'année 2014 + n . On a ainsi $v_0 = 5000$.

1. a. Calculez v_1 et v_2 .
- b. justifiez que, pour tout entier naturel n , on a $v_{n+1} = 0,75 \times v_n + 400$.
2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = v_n - 1600$.
 - a. Montrez que (w_n) est une suite géométrique de raison 0,75. Préciser la valeur de w_0 .
 - b. Pour tout entier naturel n , exprimez w_n en fonction de n .
 - c. En déduire que pour tout entier naturel n , on a $v_n = 1600 + 3400 \times (0,75)^n$.
 - d. Calculez la limite de la suite (v_n) et interpréter ce résultat.

EXERCICE 6

Soient (V_n) et (U_n) deux suites numériques définies par : $\begin{cases} U_{n+1} = 3U_n + 2V_n \\ V_{n+1} = 2U_n + 3V_n \end{cases}$ et $\begin{cases} U_0 = 1 \\ V_0 = 2 \end{cases}$

- 1- Calculer U_1 , V_1 puis U_2 et V_2
- 2- On définit deux suites numériques (X_n) et (Y_n) définies par : $X_n = U_n + V_n$ et $Y_n = U_n - V_n$
 - a- Montrer que la suite (X_n) est une suite géométrique, préciser sa raison et calculer X_0 (1pts)
 - b- Montrer que (Y_n) est une suite constante.
- 3- Exprimer les formules explicites X_n et Y_n en fonction de n (on rappelle qu'une suite constante est une suite géométrique de raison $q = 1$ ou même une suite arithmétique de raison $r = 0$).
- 4- En déduire les formules explicites U_n et V_n en fonction de n .

EXERCICE 7

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = e^{1-2n}$

- 1- a- Montrer que (u_n) est une suite géométrique. En préciser le premier terme et la raison
- b- Justifier que la suite (v_n) , définie par $v_n = \ln(u_n)$ existe et est arithmétique.
- 2- On pose $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$ et $t_n = u_0 \times u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n$
 - a- Exprimer S_n et t_n en fonction de n .
 - b- Déterminer le comportement à l'infini de S_n , et celui de t_n .