

**Suites arithmétiques** :  $u_{n+1} = u_n + r$  ;  $u_n = u_p + (n - p)r$  ;  $s_n = \frac{n+1-p}{2} (u_p + u_n)$  ;  
 $r = \text{la raison}$  et  $u_p = 1^{\text{er}} \text{ terme}$ .

**Suites géométriques** :  $u_{n+1} = q \times u_n$  ;  $u_n = u_p \times q^{n-p}$  ;  $s_n = u_p \frac{1-q^{n+1-p}}{1-q}$   
 $q = \text{la raison}$  et  $u_p = 1^{\text{er}} \text{ terme}$ .

**Exercice 1 :**

- 1) Trouve la progression arithmétique de quatre termes dont le premier terme est 5 et le quatrième terme est 14
- 2) Trouve la progression géométrique de cinq termes dont le deuxième est 7, le quatrième est 63 et tous les termes sont positifs.
- 3) Trouve trois nombres réels positifs a, b, c constituants dans cet ordre une progression arithmétique croissante et vérifiant simultanément les deux conditions suivantes :  
 $a + b + c = 12$  et  $a^2, 3b, c^2$  constituent dans cet ordre une progression géométrique.

**Exercice2 :**

Soit la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = \sqrt{3 + u_n}$

- 1) Démontre par récurrence que , on :  $0 \leq u_n \leq 3$ .
- 2) Démontre que la suite  $(u_n)$  est strictement croissante.
- 3) Dédus en que la suite  $(u_n)$  est convergente.

**Exercice 3 :**

On considère la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par : 
$$\begin{cases} u_0 = 1 + \sqrt{2} \\ u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n^2 - 2u_n + 4} \end{cases}$$

- 1) Calculer  $u_1$  et  $u_2$ .
- 2) Justifier que  $\forall n > 1; u_n \geq 1$ .
- 3) On pose  $v_n = (u_n - 1)^2$ .
  - a) Montrer que  $(v_n)$  est une suite arithmétique.
  - b) Calculer  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$ .
  - c) Calculer  $T_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$  en fonction de  $n$ .
  - d) Déterminer les limites des suites  $(u_n)$  ;  $(v_n)$  ;  $(T_n)$ .

**Exercice 4 :**

Soit la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = -2$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = u_n + (n + 1)$

- 1) Calcule  $u_1, u_2, u_3$  et  $u_4$ .
- 2) On pose la suite  $(v_n)$  pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_n = u_{n+1} - u_n$ 
  - a) Calcule  $v_0, v_1, v_2$  et  $v_3$ .
  - b) Détermine  $v_{n+1} - v_n$  et déduis en le sens de variation de la suite  $(v_n)$ . Quelle est la nature et la raison de la suite  $(v_n)$  ?
  - c) Calcule la somme  $S = v_0 + v_1 + \dots + v_{23}$ .

**Exercice 5 :**

On considère la suite  $(u_n)$  définie par : 
$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3 \end{cases}$$

- 1)  $(u_n)$  est-elle une suite arithmétique ? justifie la réponse.
- 2) Calcule  $u_4$
- 3) Représente graphiquement les cinq premiers termes de la suite  $(u_n)$  sur l'axe des abscisses.
- 4) On pose  $v_n = u_n - 4$ . Démontre que  $(v_n)$  est une suite géométrique dont on précisera la raison  $q$  et le premier terme.
- 5) Exprime  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$ . Déduis en les limites des deux suites  $(v_n)$  et  $(u_n)$ .
- 6) Calcule  $S_n = v_1 + \dots + v_n$  puis  $S'_n = u_1 + \dots + u_n$
- 7) Calcule les limites de  $S_n$  et  $S'_n$ .

**Exercice 6 :**

On considère la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par : 
$$\begin{cases} u_0 = -4 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 1 \end{cases}$$

- 1) Représente graphiquement les cinq premiers termes de la suite  $(u_n)$  sur l'axe des abscisses.
- 2) On pose  $v_n = u_n - \alpha$ ; ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ).
- a) Détermine  $\alpha$  pour que  $(v_n)$  soit une suite géométrique.
- b) Exprime  $v_n$  en fonction  $n$  puis déduis en que  $\forall n \in \mathbb{N}; u_n = 4 - 8\left(\frac{3}{4}\right)^n$  ;
- c)  $\forall n \in \mathbb{N}$  ; on note  $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$  et  $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ . Trouve l'expression de  $S_n$  puis de  $S'_n$  en fonction  $n$ .
- d) Détermine les limites des suites  $(u_n)$  ;  $(v_n)$ ;  $(S_n)$  et  $(S'_n)$ .

**Exercice 7 :**

Soit  $(u_n)$  une suite arithmétique croissante telle que : 
$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 9 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 35 \end{cases}$$

- 1) Calcule le premier terme  $u_0$  et la raison  $r$  de cette suite, puis exprime le terme général  $u_n$  en fonction de  $n$ .
- 2) Soit  $(v_n)$  la suite définie par :  $v_n = 2^{u_n}$ .
  - a) Montre que  $(v_n)$  est une suite géométrique dont on déterminera  $v_0$  et  $q$ .
  - b) Calcule :  $P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$ .

**Exercice 8 :**

- I. On considère la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $U_0 = e$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $U_{n+1} = \sqrt{U_n}$ . On pose, pour tout entier naturel  $n$ ,  $V_n = \ln U_n$ 
  - 1) Montre que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n$  en déduit que  $V_n$  est le terme général d'une suite géométrique dont on précisera la raison et premier le terme. Donne l'expression de  $V_n$  en fonction de  $n$ . En déduit celle de  $U_n$  en fonction de  $n$
  - 2) Pour tout entier naturel on pose  $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n$  et  $P_n = \prod_{i=0}^n U_i$ 
    - a) Montre que  $P_n = e^{S_n}$
    - b) Exprime  $S_n$  en fonction de  $n$
    - c) En déduit l'expression de  $P_n$  en fonction de  $n$ . Détermine la limite de la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ; en déduit celle de la suite  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$

II. Trouve trois réels  $a, b, c$  positif ( $a \leq b \leq c$ ) constituant dans cet ordre les trois termes d'une suite arithmétique et vérifiant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} a + b + c = 12 \\ a^2, 3b, c^2 \text{ dans cet ordre les termes d'une suite géométrique} \end{cases}$$

III. Soit  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :  $U_n = \ln 2^n$

- 1) Calcule  $U_0; U_1; U_2$
- 2) Donne la nature de la suite  $(U_n)$  et la somme des  $n$  premiers termes
- 3) Soit  $(V_n)$  la suite définie par  $V_n = e^{U_n}$ . Donne la nature la suite  $(V_n)$  et calcule la somme des  $n$  premiers termes.

IV. On considère la suite  $(U_n)$  définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}: \begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n + 2n + 3 \end{cases}$

- 1) Précise le sens de variation de la suite  $(U_n)$
- 2) Démontre pour tout entier naturel  $n, U_n > n^2$ , en déduit la limite de la suite  $(U_n)$
- 3) Conjecture une expression de  $U_n$  en fonction de  $n$  puis démontre la propriété ainsi conjecturée.

### Exercice9 :

I. On considère la suite  $(U_n)$  définie par  $\begin{cases} U_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{1}{2 - U_n} \end{cases}$

- 1) Calcule  $U_1; U_2; U_3$  sous forme de fractions irréductibles
- 2) Compare les quatre premiers termes de la suite  $(U_n)$  aux quatre premiers termes de la suite  $(w_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $w_n = \frac{n}{n+1}$
- 3) A l'aide d'un raisonnement par récurrence démontre que, pour tout entier naturel  $n, U_n = w_n$
- 4) Soit  $(V_n)$  la suite définie par  $V_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$ 
  - a) Montre que  $V_1 + V_2 + V_3 = -\ln 4$
  - b)  $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n$ . Exprime  $S_n$  en fonction de  $n$ . Détermine la limite de  $S_n$

### Exercice 10.....(6 pts)

On considère la suite numérique  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $U_n = e^{2n-1}$ .

1. a. Calcule  $U_0, U_1, U_2, U_3$  et  $U_{n+1}$ .
- b. Démontre que  $(U_n)$  est une suite géométrique dont on précisera la raison.
- c. Exprime en fonction de  $n$  la somme  $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$ .
- d. Calcule  $\lim_{x \rightarrow +\infty} S_n$ .
- e. Trouve la valeur minimum de telle que  $S_n \geq 10$ .
2. Soit la suite  $(V_n)$  définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = \ln(U_n)$ . On pose  $T_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$ . Exprime le produit  $P_n = U_0 \times U_1 \times \dots \times U_n$  en fonction de  $T_n$ .

### Exercice11 : .....(5 pts)

Soit  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite géométrique de 1<sup>er</sup> terme  $U_0 = 4$  et de raison  $\frac{1}{2}$ .

Soit  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite arithmétique de 1<sup>er</sup> terme  $V_0 = \frac{\pi}{4}$  et de raison  $\frac{\pi}{2}$ .

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $Z_n$  le nombre complexe de module  $U_n$  et dont un argument est  $V_n$ .

- 1) a) Exprime  $U_n$  et  $V_n$  en fonction de  $n$  ;
- b) Déduis-en  $Z_n$ .

2) Démontre que  $(Z_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{2}i$  et de premier terme

$$Z_0 = 2\sqrt{2} + i2\sqrt{2}.$$

**Exercice 12 :**

M<sup>me</sup> Tranquille souhaite avoir une activité physique, elle choisit la marche. Elle décide de marcher 15 *minutes* le 1<sup>er</sup> jour, 30 *minutes* le 2<sup>ème</sup> jour, 45 *minutes* le 3<sup>ème</sup> jour et ainsi de suite. Son apport énergétique journalier avant toute activité physique est  $u_1 = 8\,500\text{ kJ}$ . Sachant que 15 *minutes* de marche consomme 250 *kJ*, elle augmente son apport nutritionnel en correspondance avec son activité.

- 1) Calculer les apports nutritionnels journaliers :  $u_2$  et  $u_3$  correspondants à 15 et 30 *minutes* de marche.
- 2) Donner en justifiant la nature de la suite formée par les nombre  $u_1$ ;  $u_2$  et  $u_3$ .
- 3) Déterminer à l'aide d'un tableau ou d'une calculatrice l'apport nutritionnel correspondant à 2h 30 *mns* et à 5h 00 de marche.

**EXERCICE13** Dans une usine, la production d'une certaine matière libère une grande quantité de vapeur d'eau, dans un bâtiment A. on veut utiliser cette vapeur pour le chauffage d'un bâtiment administratif B. Pour cela il faut recueillir la vapeur et la conduire dans les tuyauteries bien isolées jusqu'au bâtiment B. On peut considérer que la température diminue de 1% par mètre de tuyauteries parcourues. La vapeur étant recueillie à une température de 100°C, on pose  $t_0 = 100$  et  $t_n$  désigne alors la température de la vapeur après qu'elle ait parcourue  $n$  mètres.

- 1°) Calculer  $t_1$ ,  $t_2$  et  $t_3$ .
- 2°) Déterminer  $t_n$  en fonction de  $n$ . démontrer que la suite  $(t_n)$  est décroissante.
- 3°) Quelle est la distance maximale qu'il faudra faire parcourir à la vapeur si l'on veut la recueillir au bâtiment B à une température au pions égale à 60°C ?

NB : On donne  $(0,99)^{52} = 0,6$ .

**Exercice 14 :**

Mr Diarra dispose au 1er janvier 2015 d'un capital  $C_0 = 1\,000\,000\text{F}$  qu'il place à la BOA à un taux de 6% l'an. Au bout de chaque année le capital est augmenté des intérêts qu'il produit. On désigne par  $C_n$  la valeur du capital au bout de  $n$  années.

- 1) Calculer  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$ .
- 2) Démontrer que  $(C_n)$  est une suite géométrique puis exprimer  $C_n$  en fonction de  $n$ .
- 3) Au bout de combien de temps  $n$  le capital aura-t-il doublé ?
- 4) En supposant le prix du marché stable, en quelle année ce fonctionnaire pourra t-il s'offrir une voiture dont le prix est 25 000 000F ?

**Exercice 15 :**

On suppose que la longueur d'un boa augmente de 40% chaque année et ceci pendant ces douze premières années. Sa longueur à la naissance est de 10 *Centimètres*.

Soit  $I_n$  sa longueur en centimètres au bout de  $n$  **années** ( $0 \leq n \leq 12$ ).

- 1) Calculer  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$ .
- 2) Exprime  $I_{n+1}$  en fonction de  $I_n$ . Déduis en la nature la suite  $(I_n)$  puis exprime  $I_n$  en fonction de  $n$ .
- 3) Calcule, en mètre, la longueur du boa au bout de dix années.

4) A partir de quel âge le boa aura-t-il dépassé un mètre ?

**Exercice 16 :**

Le prix d'une voiture Toyota est de 16 625 000F à la date du 1<sup>er</sup> janvier 2014.

Ce prix augmente 10% l'an.

- 1) On pose  $v_n$  le prix de cette voiture au 1<sup>er</sup> janvier  $(2014 + n), n \in \mathbb{N}$ .
  - a) Calcule les prix de la voiture en 2015, 2016 et 2017.
  - b) Définis de façon récurrente la suite  $(v_n)$  ; précise sa nature et donne sa raison.
  - c) Exprime  $v_n$  en fonction de  $n$  puis déduis en les prix de la voiture en 2024 et en 2027.
  - d) A partir de quelle année le prix de la Toyota aura-t-il doublé ?
- 2) Le salaire mensuel d'un ouvrier de l'usine Toyota est supposé 997 500F au 1<sup>er</sup> janvier 2014. Il est supposé augmenter de 15% par an.

On pose  $w_n$  le salaire de l'ouvrier au 1<sup>er</sup> janvier  $(2014 + n)$ . Exprime  $w_n$  en fonction de  $n$ . Précise la nature de  $(w_n)$  et donne sa raison.

- 3) A partir de quelle année le salaire de l'ouvrier sera suffisant à l'achat d'une voiture Toyota ?

**Exercice 17 :**

On ajoute une certaine dose d'un antibiotique à un bouillon de culture contenant des microbes sensibles à cet antibiotique. Un ordinateur compte et indique à chaque heure le nombre de microbes vivants dans le bouillon ; on s'aperçoit qu'à chaque heure, le nombre de microbes vivants est la moitié du nombre de microbes à l'heure précédente.

- 1) Sachant qu'à 6 heures le bouillon contenait  $N$  microbes, calculer le nombre de microbes vivants aux heures suivantes : 7h ; 8h ; 9h ; 10h.

Montrer que ces nombres sont en progression géométrique. Calculer pour un entier positif  $n$  la somme  $S_n$  des  $n$  premiers termes de cette progression.

- 2) À 12 heures, on ajoute au bouillon un produit qui annule l'effet de l'antibiotique. On constate alors que le nombre de microbes vivants dans le bouillon augmente de 25% par heure. Calculer le nombre de microbes vivants dans le bouillon à 14h si  $N=1010$

**Exercice 18 :**

L'étude de la production intérieure brute, au Mali (en milliard de francs) a donné le résultat suivant : Si  $P_n$  désigne la production intérieure de l'année numérotée  $n$ , ( $n \in \mathbb{N}$ ), le rapport :  $\frac{P_{n+1}-P_n}{P_n} = 0,11$  constant. On suppose  $P_0 = 140$ .

- 1) a) calculer  $P_{n+1}$  en fonction de  $P_n$  puis préciser la nature de la suite  $(P_n)$ .  
b) calculer  $P_1$  et  $P_2$ .  
c) calculer  $P_n$  en fonction de  $P_0$  et  $n$ . En déduire  $P_{10}$ . (On arrondira au milliard supérieur).
- 2) A partir de quelle année la production sera-t-elle supérieure ou égale à  $3 \times P(0)$  ?
- 3) A partir de quelle année la production sera-t-elle supérieure ou égale à 14.000 (c'est à dire 140 000 milliard de francs) ?

**Exercice 19 :**

Une société Forestière décide de créer un bosquet (Petit bois, touffe d'arbres) à chaque kilomètre entre deux villes A et B distant de 300 Km.

-Au premier kilomètre le bosquet compte 15 arbres

-Au second kilomètre le bosquet compte 22 arbres et à chaque kilomètre qui suit le bosquet compte 7 arbres de plus que le précédent.

Ma réussite est proportionnelle à mon courage ! **M.Moungoro /65-63-06-33/70-40-15-41**

- a) Préciser la nature, le 1<sup>er</sup> terme et la raison de la suite en question.
- b) Quel est le nombre d'arbres que compte le dernier bosquet ?
- c) Quel est le nombre total d'arbres que la société doit planter ?

**Exercice 20 / [5 points]**

Un paysan possède un champ où il plante des arbres fruitiers. Pour mieux les entretenir il décide de vendre chaque année les 5% des pieds existants et planter 3 000 nouveaux. Il démarre avec 50 000 pieds en 2015. En désignant par  $X_n$  le nombre de pieds d'arbres se trouvant dans le champ au cours de l'année  $(2015 + n)$

1°/ a) Déterminez le nombre d'arbres qu'il aura en 2016 et en 2017. **(0,5pt)**

b) Exprimez  $X_{n+1}$  en fonction de  $X_n$ . **(1pt)**

2°/ On considère la suite  $(U_n)$  définie par  $U_n = 60\,000 - X_n$

a) Montrez que la suite  $(U_n)$  est une suite géométrique dont on donnera la raison et le 1<sup>er</sup> terme. **(1pt)**

b) Exprimer  $U_n$  en fonction de  $n$ , en déduire  $X_n$  en fonction de  $n$  **(1pt)**

c) Ce paysan aura combien d'arbres fruitiers dans 20 ans ? **(1pt)**

d) Calculer la limite de la suite  $(X_n)$ . Conclure **(0,5pt)**

**Exercice 21 :..... (5 points)**

Une entreprise du secteur « Bâtiments et Travaux Publics » doit réduire la quantité de déchets qu'elle rejette pour respecter une nouvelle norme environnementale. Elle s'engage, à terme, à rejeter moins de 30 000 tonnes de déchets par an.

En 2007, l'entreprise rejetait 40 000 tonnes de déchets.

Depuis cette date, l'entreprise réduit chaque année de 5% la quantité de déchets qu'elle rejette par rapport à la quantité rejetée l'année précédente, mais elle produit par ailleurs 200 tonnes de nouveaux déchets par an en raison du développement de nouvelles activités.

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $r_n$  la quantité, en tonnes, de déchets pour l'année  $(2007 + n)$ . On a alors  $r_0 = 40\,000$ .

1-/ a-/ Calculer  $r_1$  et  $r_2$ . **(0,5pt)**

b-/ Justifier que pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $r_{n+1} = 0,95 r_n + 200$ . **(0,5pt)**

2-/ Soit  $(S_n)$  la suite définie pour tout entier naturel  $n$  par  $S_n = r_n - 4\,000$

a-/ Démontrer que la suite  $(S_n)$  est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme. **(1 pt)**

b-/ Pour tout entier naturel  $n$ , exprimer  $(S_n)$  en fonction de  $n$ . En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $r_n = 36\,000 \times 0,95^n + 4\,000$ . **(1 pt)**

c-/ La quantité de déchets rejetée diminue-t-elle d'une année sur l'autre ? Justifier. **(1 pt)**

d-/ Déterminer la limite de la suite  $(r_n)$  quand  $n$  tend vers l'infini. **(1 pt)**

e-/ Calculer une estimation, en tonnes et à une tonne près, de la quantité de rejets en 2011. **(0,5pt)**