



FICHE n°5 : SUITES NUMERIQUES

Exercice 1

I// Soit la suite numérique (U_n) définie pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$ par $U_1 = 1$ et $U_{n+1} = aU_n + bn + c$ où a, b et c désignent trois coefficients réels.

1) Calcule a, b et c sachant que $U_2 = 3, U_3 = 4$ et $U_4 = 3$.

2) On suppose que $U_{n+1} = 2U_n - 3n + 4$.

a) Soit (V_n) la suite numérique, définie pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$ par : $V_n = U_n - 3n + 1$.

Démontre que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera, la raison et le premier terme.

b) Calcule V_n en fonction de n , puis U_n en fonction de n et $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

II// Soit (U_n) une suite géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $U_1 = 2$.

1) Calcule U_n en fonction de n .

2) Calcule $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$ puis en déduis S_7 .

Exercice 2

Soit la suite numérique (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 2$ et pour tout entier naturel n par : $U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n + \frac{1}{3}n + 1$.

1) a) Calcule U_1, U_2, U_3 et U_4 (on peut donner les résultats à 10^{-2} près).

b) Formule une conjecture sur le sens de variation de cette suite (U_n) .

2) a) Démontre que, pour tout entier naturel $n, U_{n+1} - U_n = \frac{1}{3}(n + 3 - U_n)$.

b) Démontre que, pour tout entier naturel $n, U_n \leq n + 3$.

c) Déduis-en une validation de la conjecture précédente.

3) On désigne par (V_n) la suite définie par sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = U_n - n$.

a) Détermine la nature de la suite (V_n) et sa raison.

b) Déduis-en que pour tout entier naturel $n, U_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$.

c) Détermine la limite de la suite (U_n) .

Exercice 3

Soit la suite $(u_n); n \in \mathbb{N}^*$ à termes positifs tel que : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ (u_{n+1})^2 = u_n \times e \end{cases}$

1) Calcule puis Exprime u_1, u_2 et u_3 en fonction de e^k où $k \in \mathbb{R}$.

2) On pose $v_n = \ln(u_n) - a$ où $a \in \mathbb{R}^*$.

a) Détermine le réel a pour que (v_n) soit une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme v_1 .

b) Calcule la limite de v_n puis celle de u_n en $+\infty$.

Exercice 4

Soit la suite (U_n) définie dans $\mathbb{N}^*$ par : $\begin{cases} U_1 = 3 \\ U_{n+1} = U_n + n \end{cases}$. On considère la suite (V_n) définie par $V_n = U_{n+1} - U_n$ (1).

1) Exprime V_n en fonction de n et montre que (V_n) est une suite arithmétique dont on déterminera le 1^{er} terme et la raison.

2) Calcule $S_n = V_1 + V_2 + \dots + V_n$.

3) Utilise la relation (1) pour trouver une autre expression de S_n . En déduis U_n en fonction de n . Calcule la limite de U_n .

Exercice 5

On considère deux suites (U_n) et (V_n) définies pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 2U_n + 1 \end{cases}$ et $V_n = U_{n+1} - U_n$.

1) Montre que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

2) Exprime, pour tout entier naturel n, V_n en fonction de n .

3) Soit la somme $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_{n-1}$.

a) Montre que pour tout entier naturel $n, S_n = U_n - U_0$.

b) Calcule S_n en fonction de n , puis U_n en fonction de n .

Exercice 6

On considère les suites u_n et v_n définies pour tout entier naturel n par définies par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{3} \\ u_{n+1} = \frac{3}{2}(u_n)^2 \end{cases}$ et $v_n = \ln\left(\frac{3}{2}u_n\right)$.

1) Calcule v_0 .

2) Démontre que v_n est une suite géométrique de raison 2.

3) Exprime v_n en fonction de n .

4) Calcule la limite de v_n .

- 5) Exprime u_n en fonction de v_n puis en déduis la limite de u_n .
- 6) Pour tout entier naturel n , on pose : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$ et $T_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_{n-1}$.
- a) Démontre que : $S_n = (1 - 2^n) \ln 2$.
- b) Justifie que $T_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{S_n}$ puis en déduis T_n en fonction de n .

Exercice 7

Soient les nombres complexes $z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = -\sqrt{3} + i$.

- 1) Ecris z_1 , z_2 et $\frac{z_2}{z_1}$ sous forme trigonométrique.
- 2) Montre qu'il existe deux suites géométrique (U) et (V) telles que $U_2 = V_2 = z_1$ et $U_4 = V_4 = z_2$ dont on déterminera les premiers termes U_0 et V_0 et la raison de chacune d'elles.

Exercice 8

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on donne l'équation d'inconnue complexe z :

$$(E) : z^3 - (3 + 2i)z^2 + (1 + 5i)z + 2 - 2i = 0.$$

- 1) Résous l'équation (E) sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure z_0 et une solution réelle z_1 .
On désigne z_2 par la 3^{ème} solution.
- 2) Ecris z_0 et z_1 sous forme trigonométrique.
- 3) Vérifie que z_0 , z_1 et z_2 sont dans cet ordre les trois premiers termes consécutifs d'une suite géométrique complexe (U_n) dont on précisera la raison.
- 4) Ecris U_4 et U_7 sous forme trigonométrique.

Exercice 9

On considère la suite numérique U définie par :
$$\begin{cases} U_1 = \frac{3}{2} \\ U_{n+1} = \frac{2}{3-U_n}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

- 1) Calcule U_2 , U_3 et U_4 . La suite U est-elle arithmétique ? Est-elle géométrique ?
- 2) a) Montre que pour tout entier naturel n différent de zéro, $1 < U_n < 2$.
b) Démontre que la suite U est décroissante.
- 3) Soit V la suite numérique définie par : $V_n = \frac{U_n - 1}{2 - U_n}$, pour tout entier naturel n non nul.
- a) Montre que la suite V est bien définie pour tout n de $\mathbb{N}^*$.
- b) Montre que V est une suite géométrique.
- c) Exprime, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, V_n en fonction de n .
- d) Calcule, en fonction de n , la somme $S_n = V_1 + V_2 + \dots + V_{n-1}$.
- e) Détermine la limite de V_n et celle de S_n .

Exercice 10

En 2014, la foire gastronomique d'une commune a enregistré 6000 visiteurs. Une étude montre que chaque année, 80% des visiteurs de l'année précédente reviennent tandis que 2000 nouveaux visiteurs sont enregistrés.

On note U_0 le nombre de visiteurs en 2014 et U_n le nombre de visiteurs en 2014 + n ($n \in \mathbb{N}$).

- 1) Justifie qu'en 2015 le nombre de visiteurs U_1 est 6800.
- 2) Calcule le nombre de visiteurs en 2016.
- 3) On admet que, pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = 0,8U_n + 2000$.
On pose, pour tout entier naturel n , $V_n = U_n - 10000$.
- a) Démontre que la suite (V_n) est une suite géométrique de raison 0,8 et de premier terme -4000 .
- b) Exprime, pour tout entier naturel n , V_n en fonction de n .
- c) Justifie que, pour tout entier naturel n , $U_n = 10000 - 4000(0,8)^n$.
- 4) a) Détermine le plus petit nombre entier naturel n pour lequel : $10000 - 4000(0,8)^n > 9000$.
b) Détermine l'année à partir de laquelle le nombre de visiteurs dépassera 9000.

Exercice 11

Après les élections présidentielles 2013 au Mali, l'analyse des résultats a montré que le 1^{er} candidat élu avait obtenu v_1 voies, le 2^e avait obtenu v_2 voies, ainsi de suite jusqu'au dernier des n candidats qui avait obtenu v_n voies.

De plus on a constaté que le $k^{\text{ième}}$ candidat avec ($k \geq 1$) avait obtenu le double de voies de son successeur immédiat $(k+1)^{\text{ième}}$ du classement ; définissant ainsi une suite numérique $(v_n)_{n \geq 1}$.

- 1) Prouve que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison q .
- 2) Le nombre total de votants appelé suffrage exprimé est $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$.
Un candidat est élu président dès le 1^{er} tour, lorsque son nombre de voies v_1 dépasse la moitié de S_n .
- a) Détermine en fonction de n et v_1 le suffrage exprimé S_n .
- b) Examine si un deuxième tour à cette élection eut été nécessaire.

3) En effet le nombre total des votants fut 945 et le candidat fut élu par ses 480 voies.

Détermine alors le nombre nn de candidats qui avaient postulés.

Exercice 12

M. Yacouba signe, le 1^{er} janvier 2015, un contrat de travail de 12 ans avec l'une des sociétés **A** et **B** qui lui font les offres suivantes :

La société **A** propose un salaire annuel net de 1.200.000 F et une augmentation de 40.000 F par an à compter du 1^{er} janvier de chaque année.

La société **B** propose également un salaire annuel net de 1.200.000 F mais avec une augmentation 3% de par an à compter du 1^{er} janvier de chaque année.

On désigne par U_n le salaire annuel net proposé par la société **A** pour l'année $(2015 + n)$ et V_n le salaire net proposé par la société **B**. On note que $U_0 = V_0 = 1.200.000$ F.

1) Calcule U_1, U_2, V_1 et V_2 .

2) Montre que (U_n) est une suite arithmétique et (V_n) une suite géométrique. On précisera la raison de chacune d'elle.

3) On suppose que M. Yacouba a signé le contrat avec la société qui la meilleure proposition de salaire durant les 12 années de contrat. Trouve la société avec laquelle M. Yacouba a signé le contrat (La réponse doit être justifiée par des calculs).

Exercice 13

Une entreprise du secteur « Bâtiments et Travaux Publics » doit réduire la quantité de déchets qu'elle rejette pour respecter une nouvelle norme environnementale. Elle s'engage, à terme, à rejeter moins de 30 000 tonnes de déchets par an. En 2007, l'entreprise rejetait 40 000 tonnes de déchets.

Depuis cette date, l'entreprise réduit chaque année de 5% la quantité de déchets qu'elle rejette par rapport à la quantité rejetée l'année précédente, mais elle produit par ailleurs 200 tonnes de nouveaux déchets par an en raison du développement de nouvelles activités.

Pour tout entier naturel n , on note r_n la quantité, en tonnes, de déchets pour l'année $(2007+n)$. On a alors $r_0 = 40\,000$.

1) a) Calcule r_1 et r_2 .

b) Justifie que pour tout entier naturel n , on a : $r_{n+1} = 0,95r_n + 200$.

2) Soit (S_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $S_n = r_n - 4\,000$.

a) Démontre que la suite (S_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Pour tout entier naturel n , exprime (S_n) en fonction de n . En déduis que, pour tout entier naturel n , on a :

$$r_n = 36\,000 \times 0,95^n + 4\,000.$$

c) La quantité de déchets rejetée diminue-t-elle d'une année sur l'autre ? Justifie.

d) Détermine la limite de la suite (r_n) quand n tend vers l'infini.

e) Calcule une estimation, en tonnes et à une tonne près, de la quantité de rejets en 2011.

Exercice 14

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$ où unité est 1 cm.

On pose $\begin{cases} z_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n \end{cases}$ et on note A_n le point d'affixe de z_n .

1) a) Calcule z_1 et z_2 .

b) Place les points A_0, A_1 et A_2 dans le plan complexe.

2) On considère la suite (U_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = |z_{n+1} - z_n|$.

a) Justifie que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \frac{\sqrt{2}}{2} |z_n|$.

b) Démontre que la suite (U_n) est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de premier terme $\sqrt{2}$.

c) Exprime U_n en fonction de n .

3) Détermine la nature exacte du triangle OA_nA_{n+1} .

4) On désigne par $A_0A_1 + A_1A_2 + \dots + A_{n-1}A_n$ la longueur de la ligne brisée $A_0A_1A_2 \dots A_{n-1}A_n$.

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ell_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \dots + A_{n-1}A_n$.

a) Calcule ℓ_n .

b) Etudie la convergence de la suite (ℓ_n) .

Exercice 15

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$ où unité est 1 cm.

On considère les points M_0, M_1 et M_2 d'affixes respectives $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$ et $1 + i\sqrt{3}$.

S est la similitude directe de centre O , d'angle $-\frac{\pi}{3}$ et de rapport 2.

1) a) Détermine l'écriture complexe de S .

b) Justifie que $S(M_0) = M_1$ et $S(M_1) = M_2$.

2) soit M_n un point du plan d'affixe z_n . On pose pour tout nombre entier naturel $n, M_{n+1} = S(M_n)$.

Justifie que $z_{n+1} = (1 + i\sqrt{3})z_n$ où z_{n+1} est l'affixe de M_{n+1} .

3) On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout nombre entier naturel n par $u_n = |z_n|$.

a) Démontre que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on déterminera la raison et premier terme.

b) Justifie que la distance $OM_{12} = 2048$.

Exercice 16

1) Soit (U_n) , $n \in \mathbb{N}$, une suite arithmétique de raison r ($r \neq 0$).

On définit la suite (V_n) , $n \in \mathbb{N}$, par $V_n = \frac{1}{4}e^{-2U_n}$.

a) Montre que (V_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme V_0 (on exprimera V_0 en fonction de U_0).

b) Etudie suivant les valeurs de r la convergence de la suite V_n .

2) Soit (W_n) $n \in \mathbb{N}$, la suite définie par $W_n = \int_0^n \frac{1}{4}e^{-2x} dx$.

a) Calcule W_n en fonction de n .

b) Montre que W_n converge vers un nombre réel ℓ que l'on précisera.

c) On pose $S_n = W_1 + W_2 + \dots + W_n - \frac{n}{8}$. Calcule S_n en fonction de n puis en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

Exercice 17

1) Soit la suite (U_n) définie par :
$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2-U_n}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

a) Calcule U_1, U_2 et U_3 .

b) Compare les quatre premiers termes de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aux quatre premiers termes de la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$W_n = \frac{n}{n+1}.$$

c) Démontre par récurrence que pour tout entier naturel n , $U_n = W_n$.

2) Soit $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de terme général V_n définie par : $V_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$.

a) Montre que $V_1 + V_2 + V_3 = -\ln 4$.

b) Exprime la somme $S_n = V_1 + V_2 + \dots + V_n$ en fonction de n .

Détermine la limite de la suite S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 18

Soit (U_n) et (V_n) les suites définies pour tout entier naturel n par :
$$\begin{cases} U_0 = 9 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n - 3 \end{cases} \text{ et } V_n = U_n + 6.$$

1) a) Montre que (V_n) est une suite géométrique à termes positifs.

b) Calcule la somme $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$ en fonction de n et en déduis la somme $S'_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$ en fonction de n .

c) Détermine $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} S'_n$.

2) On définit la suite (w_n) par $w_n = \ln V_n$ pour tout n entier naturel.

a) Montre que (w_n) est une suite arithmétique

b) Calcule $S''_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$ en fonction de n et détermine $\lim_{n \rightarrow +\infty} S''_n$.

c) Calcule le produit $P_n = V_0 \times V_1 \times \dots \times V_n$ en fonction de n et détermine $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$.

Exercice 19

Pour limiter la hausse des températures moyennes de la planète, une diminution des émissions de gaz à effet de serre s'avère nécessaire. Dans ce but les plus hautes autorités d'un pays se sont données comme objectif de diviser par quatre les émissions de gaz à effet de serre dans ce pays de 2006 à 2050.

En 2006, les émissions de gaz à effet de serre dans ce pays s'élevaient à 547 millions de tonnes d'équivalent CO_2 .

On suppose que les émissions de gaz à effet de serre dans ce pays baisseront chaque année de 9,3 millions de tonnes à partir de 2006.

Soit n un entier naturel. On note U_n les émissions de gaz à effet de serre au cours de l'année $2006 + n$. Ainsi $U_0 = 547$.

1) Calcule les émissions de gaz à effet de serre au cours des années 2007, 2008 et 2010.

2) Quelle est la nature de la suite (U_n) ? Précise sa raison.

3) Exprime U_n en fonction de n .

4) Détermine à partir de quelle année les émissions deviendront inférieures à 100 millions de tonnes si la tendance se poursuit au-delà de 2050.