

TD Suites numériques. TSEXP

Généralité sur les suites.

1 Etudie la convergence des suites suivantes :

1) $u_n = 2^n$ 2) $v_n = \sqrt{n^2 + n - 2}$; 3) $w_n = \frac{1}{3^{n+1}} - 1$

2 Soient les suites u_n et v_n définies pour tout entiers n par :

$$u_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et}$$
$$v_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Démontre par récurrence les égalités données par les suites u_n et v_n

3 Soit la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par $u_n = \frac{1}{n}(2 + \sin \sqrt{n})$

- 1) Démontre que $\forall n \geq 1$, on a : $\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{3}{n}$. Que peux-tu conclure ?
- 2) En déduire que la suite (u_n) est convergente puis précise sa limite

4 Soit la suite $u_n (n \in \mathbb{N})$ définie par : $5u_{n+1} = u_n + 16$
Démontre que u_n est minorée par 4 et décroissante.

5 Soit la suite u_n définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - 1 \end{cases}$
Place dans le repère les termes u_0 ; u_1 ; u_2 et u_3 .

Suites arithmétiques — Suites géométriques.

6 Soient u_n et v_n deux suites définies par : $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1 - u_n} \end{cases}$ et $v_n = \frac{u_n + 1}{u_n}$

- 1) Calcule u_2 et v_1 .
- 2) Demontre que v_n est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.
- 3) Exprime v_n puis u_n en fonction de n .
- 4) On pose $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$
a-Exprime S_n en fonction de n
b- Calcule la somme des 10 premiers termes de la suite v_n
- 5) Etudie la convergence de v_n ; u_n et S_n

7 Soient u_n et v_n deux suites définies par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{-7u_n - 8}{2u_n + 1} \end{cases}$ et $v_n = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}$

- 1) Calcule u_1 et v_0 .
- 2) Montre que v_n est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.
- 3) Exprime v_n puis u_n en fonction de n .
- 4) On pose $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

- a-Exprime S_n en fonction de n
- b- Calcule la somme des 10 premiers termes de la suite v_n
- 5) Etudie la convergence de u_n ; v_n et S_n

8

Soient u_n et v_n deux suites définies par : $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{3}{2} u_n + 1 \end{cases}$ et $v_n = u_n + 2$

- 1) Calcule u_2 et v_1 .
- 2) Montre que v_n est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
- 3) Exprime v_n puis u_n en fonction de n .
- 4) On pose $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$
 - a-Exprime S_n en fonction de n
 - b- Calcule la somme des 10 premiers termes de la suite v_n
- 5) Etudie la convergence de u_n ; v_n et S_n

9

Soient u_n et v_n deux suites définies par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$ et $v_n = u_{n+1} - u_n$

- 1) Montre que v_n est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
- 2) Exprime v_n en fonction de n .
- 3) On pose $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$
 - a- Montre que $S_n = u_n - u_0$
 - b- Calcule S_n en fonction de n puis en déduis l'expression de u_n en fonction de n .

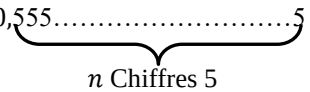
10

Détermine une suite arithmétique u_n sachant que la somme de ces n premiers termes est égale à $3n^2 + 4n$ où $n \in \mathbb{N}$

11

Exprime en fonction de n chacune des suites suivantes

1) $u_n = 2 + 2 \times 2 + 2 \times 2 \times 2 + \dots + 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \dots \times 2$ où $n \in \mathbb{N}$

2) $u_n = 0,555\dots5$ où $n \in \mathbb{N}^*$.


3) $u_n = 1111\dots111$ où $n \in \mathbb{N}^*$.


4) $u_n = 1 + 11 + 111 + \dots + 11 \dots 1$ où $n \in \mathbb{N}$.

12

1) Soit (u_n) , $n \in \mathbb{N}$, une suite arithmétique de raison r ($r \neq 0$).

On définit la suite (v_n) , $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = \frac{1}{4} e^{-2u_n}$.

- a- Montre que (v_n) , est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme v_0 (on exprimera v_0 en fonction de u_0).
- b- Etudie suivant les valeurs de r la convergence de la suite v_n
- 2) Soit w_n ($n \in \mathbb{N}$), la suite définie par $w_n = \int_0^n \frac{1}{4} e^{-2x} dx$.
 - a- Calcule w_n en fonction de n .
 - b- Montre que w_n converge vers un nombre réel l que l'on précisera.

c- On pose $S_n = w_1 + w_2 + \dots + w_n - \frac{n}{8}$. Calcule S_n en fonction de n puis en déduis $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

13 Soient u_n et v_n deux suites définies par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{3} \\ u_{n+1} = \frac{3}{2}(u_n)^2 \end{cases}$ et $v_n = \ln\left(\frac{3}{2}u_n\right)$

- 1) Calcule u_1 et v_0 .
- 2) Démontre que v_n est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme
- 3) Exprime v_n puis u_n en fonction de n .
- 6) On pose : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$ et $T_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_{n-1}$
- a- Démontre que : $S_n = (1 - 2^{n+1})\ln 2$ et $T_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{S_n}$
- b- Etudie la convergence de v_n ; u_n ; S_n et T_n

14 On considère la suite numérique u_n définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = e^{2n-1}$

- 1) a) Calcule $u_0, u_1 ; u_2 ; u_3$ et u_{n+1}
- b) Démontre que la suite u_n est une suite géométrique dont on précisera la raison.
- c) Exprime en fonction de n la somme $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$
En déduis $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$
- d) Trouve la valeur minimum de n telle que $S_n \geq 10$
- 2) Soit la suite v_n définie par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \ln(u_n)$
 - a) Exprime la somme $S'_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ en fonction de n
 - b) Exprime le produit $P_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n$ en fonction de n

15 Soient u_n et v_n deux suites définies par : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ (u_{n+1})^2 = u_n \times e \end{cases}$ et $v_n = \ln(u_n) - a$ ($a \in \mathbb{R}^*$).

- 1) a- Exprime $u_1 ; u_2$ et u_3 en fonction de e^k où $k \in \mathbb{R}$ et
b- En déduis une écriture simplifiée de $v_1 ; v_2$ et v_3 en fonction de a .
- 2) Détermine le réel a pour que v_n soit une suite géométrique (on précisera la raison et le premier terme)
- 3) Exprime v_n puis u_n en fonction de n .
- 4) On pose $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$
 - a- Exprime S_n en fonction de n
 - b- Calcule la somme des 30 premiers termes de la suite v_n
- 5) Etudie la convergence de $u_n ; v_n$ et S_n

16 Soit la suite u_n définie par son premier terme u_0 et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{4}{4 - u_n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

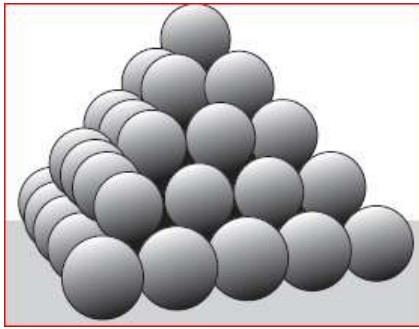
- 1) a- Détermine u_0 pour que u_n soit constante.
- b- Démontre que si $u_n < 2$ alors $u_n < u_{n+1} < 2$ ($n \in \mathbb{N}$)
En déduire que si $u_0 < 2$ alors pour tout entier naturel on a : $u_n < 2$ et que la suite est monotone.
- 2) On suppose maintenant que $u_0 = 5 - 1$
 - a) Calcule $u_1 ; u_2 ; u_3$.
 - b) Soit la suite v_n définie par $v_n = \frac{1}{u_n - 2}$. Démontre que v_n est une suite arithmétique dont on déterminera le premier terme et la raison.
 - c) Calcule u_n en fonction de n puis étudie sa limite en $+\infty$.

Progression arithmétiques – Progression géométriques.

- 17** Trouve 3 nombres consécutifs a ; b et c d'une suite en progression arithmétique sachant que : $\begin{cases} a + b + c = 3 \\ 3a - 6b + c = 6 \end{cases}$
- 18** Soient a et b deux réels tel que : $(a ; a + 4b ; 5a + 2b)$ et $(b + 3 ; 3a + 1 ; 6a + b)$ soient des termes consécutifs de suite respectivement arithmétique et géométrique. Trouve a et b .
- 19** Quatre entiers strictement positifs a ; b ; c et d forment dans cet ordre une suite géométrique dont la raison q est un entier premier avec le réel a . Trouve ces nombres sachant qu'ils vérifient en outre la relation $10a^2 = d - b$.
- 20** Soient Z_1 ; Z_2 et Z_3 trois nombres complexes dont le produit est $8i$, les arguments respectifs α_1 ; α_2 et α_3 forment une suite arithmétique de raison $\frac{\pi}{3}$ et les modules r_1 ; r_2 et r_3 une suite géométrique de raison 2. Sachant que $0 < \alpha_1 < \frac{2\pi}{3}$.
Ecris Z_1 ; Z_2 et Z_3 sous forme trigonométrique
- 21** Soit u_n une suite dans laquelle les dix premiers termes de la suite sont en progression arithmétique de raison r et à partir de u_{10} les termes sont en progression géométrique de raison q .
On donne : $u_1 = 0$; $u_{16} = -\frac{1}{27}$ et $qr = 1$
1) Calcule q ; r ; u_{10} et u_{11}
2) Calcule la somme S_n des n premiers termes de la suite u_n dans les deux cas suivants :
a) $n \leq 10$; b) $n > 10$

Suites d'optimisation

- 22** Un ours a établi sa tanière à 20 m des ruches d'un apiculteur, situées en ligne droite à partir de son antre et espacées de 2 m. L'ours dispose de pots de miel de taille respectable, et ne peut en porter deux simultanément.
Quelle distance parcourt l'ours s'il prélève un pot de miel dans chacune des 30 ruches de l'apiculteur ?
- 23** Afin de s'entraîner pour un championnat, un sportif décide de courir 2 km le 1^{er} Avril puis d'augmenter chaque jour sa distance de 400 m pour se perfectionner.
1) Calcule la distance parcourue le 10 Avril ; le 20 Avril ; le 30 Avril.
2) Calcule la distance totale parcourue en Avril.
- 24** 1) On considère les suites u_n et v_n définies par :
 $u_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ et $v_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
a) Calcule u_1 ; u_2 ; u_3 ; v_1 ; v_2 ; v_3 .
b) Compare $(u_1 \text{ et } v_1)$; $(u_2 \text{ et } v_2)$; $(u_3 \text{ et } v_3)$
2) On forme une pyramide d'orange à base carrée comme l'illustre la figure suivante :



Les oranges sont disposées de la manière suivante :

Chaque côté du carré de la base compte 15 oranges et les oranges d'un étage sont intercalées entre celles de l'étage inférieur ; le côté du carré compte donc une orange de moins que celui de l'étage inférieur et ainsi de suite jusqu'au dernier étage qui n'en compte qu'une.

En utilisant la question 1), détermine le nombre total d'orange qui forme la pyramide ?

25

Après les élections présidentielles 2013 au Mali, l'analyse des résultats a montré que le candidat élu avait obtenu v_1 voies, le 2^e avait obtenu v_2 voies, ainsi de suite jusqu'au dernier des n candidats qui avait obtenu v_n voies. De plus on a constaté que le $k^{\text{ième}}$ candidat avec ($k \geq 1$) avait obtenu le double de voies de son successeur immédiat ($k + 1$)^{ième} du classement ; définissant ainsi une suite numérique $(v_n)_{n \geq 1}$

1) Prouve que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison q .

2) Le nombre total de votants appelé suffrage exprimé est $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$.

Un candidat est élu président dès le 1^{er} tour, lorsque son nombre de voies v_1 dépasse la moitié de S_n .

a) Détermine en fonction de n et v_1 le suffrage exprimé S_n .

b) Examine si un deuxième tour à cette élection eut été nécessaire.

3) En effet le nombre total des votants fut 945 et le candidat fut élu par ses 480 voies.

Détermine alors le nombre n de candidats qui avaient postulés.

26

On ajoute une certaine dose d'un antibiotique à un bouillon de culture contenant des microbes sensibles à cet antibiotique. Un ordinateur compte et indique à chaque heure le nombre de microbes vivants dans le bouillon ; on s'aperçoit qu'à chaque heure, le nombre de microbes vivants est la moitié du nombre de microbes à l'heure précédente.

1) a- Sachant qu'à 6 heures le bouillon contenait N microbes, calcule le nombre de microbes vivants aux heures suivantes : 7h ; 8h ; 9h ; 10h.

b) Montre que ces nombres sont en progression géométrique ; calcule pour un entier positif n la somme S_n des n premiers termes de cette progression.

2) A 12heures, on ajoute au bouillon un produit qui annule l'effet de l'antibiotique. On constate alors que le nombre de microbes vivants dans le bouillon augmente de 25% par heure.

Calcule le nombre de microbes vivants dans le bouillon à 14h si $N = 10^{10}$.

27

Une étude scientifique au Mali a montré que le nombre malade due au CORONA VIRUS « COVID-19 » à initialement débuté au Mali avec 12 cas confirmés en une semaine.

Dès lors ce taux ne cesse d'augmenter de 66% chaque semaine.

On désigne par p_n le nombre de cas confirmés au bout de n semaines.

1) Quel serait le nombre de cas positifs au bout de 1 semaines ? Au bout de 21 jours ?

- 2) a- Exprime p_{n+1} en fonction de p_n .
b- En déduis la nature et les éléments caractéristiques de la suite p_n .
- 3) a- Exprime p_n en fonction n .
b- En déduis le nombre de personnes contaminées au bout de 77 jours.
- 4) Au bout de combien de semaines le nombres personnes contaminées atteindra 12.000 ?

28

Le 25 Mars 2020 fut l'apparition des premiers cas de CORONAVIRUS au Mali avec 12 cas confirmés en une semaine.

On a remarqué que ce taux augmente d'une part de 3% chaque semaine puis on enregistre d'autre part 15 autres cas confirmés chaque semaine hors des services de santé.

On désigne par p_n le nombre de cas confirmés au bout de n semaines.

- 1) Exprime p_{n+1} en fonction de p_n .
- 2) On pose $v_n = p_n + 500$.
a- Quelle est la nature de la suite v_n ?
b- Exprime v_n puis p_n en fonction n .
c- Calcule p_{11} puis interprète ce résultat.
d- Au bout de combien de semaines le nombres cas confirmés atteindra 1000 ?
- 3) On pose $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$ et $S'_n = p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_n$.
a- Exprime S_n puis S'_n en fonction n .
b- En déduis S'_{53} puis interprète ce résultat.