

TRAVAUX DIRIGES DE MATHÉMATIQUES : Suites numériques

Réalisé par Koffimath (Tél : 60 62 93 65)

Exercice 1

Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1-u_n} \end{cases}$. (v_n) est la suite

définie par : $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$

1. Exprime v_{n+1} en fonction de v_n
2. Dédus-en la nature de la suite (v_n)
3. Exprime v_n en fonction de n puis u_n en fonction de n
4. On pose $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$
 - a) Exprime S_n en fonction de n .
 - b) Calcule la somme des 30 premiers termes de la suite (v_n) .

Exercice 2

On considère la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = e^{2n-1}$

1.
 - a) Calcule $u_0 ; u_1 ; u_2 ; u_3$ et u_{n+1}
 - b) Démontre que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison
 - c) Exprime en fonction de n la somme $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$
 - d) Calcule $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.
 - e) Trouve la valeur minimum de n telle que $S_n \geq 10$
2. Soit la suite (v_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \ln(u_n)$.
On pose $T_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.
Exprime le produit $P_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n$ en T_n

Exercice 3

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n+3}{u_n+4}.$$

1. Calcule u_1 et u_2
2.
 - a) Démontre que pour tout entier naturel non nul n , $0 < u_n < 1$
 - b) Démontre que la suite (u_n) est croissante
 - c) Que pouvez-vous en déduire ?
3. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+3}$
 - a) Démontre que la suite (v_n) est géométrique
 - b) Calcule pour tout entier n , u_n en fonction de n
 - c) Démontre que la suite (u_n) est convergente et détermine sa limite.

Exercice 4

Un paysant possède un champ où il plante des arbres fruitiers. Pour mieux les entretenir il décide de vendre chaque année les 5% des pieds existants et planter 3.000 nouveaux. Il démarre avec 50.000 pieds en 2015. En désignant par X_n le nombre de pieds d'arbres se trouvant dans le champ au cours de l'année $(2015 + n)$.

1.
 - a) Déterminez le nombre d'arbres qu'il aura en 2016 et en 2017
 - b) Exprimez X_{n+1} en fonction de X_n
2. On considère la suite (U_n) définie par $U_n = 60.000 - X_n$
 - a) Montrez que la suite (U_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le 1^{er} terme.
 - b) Exprimez U_n en fonction de n et en déduire X_n en fonction de n

TRAVAUX DIRIGES DE MATHÉMATIQUES : Suites numériques

Réalisé par Koffimath (Tél : 60 62 93 65)

Exercice 5

Soient les nombres complexes $z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = -\sqrt{3} + i$

1. Ecrire z_1 , z_2 et $\frac{z_2}{z_1}$ sous forme trigonométrique
2. Montrer qu'il existe deux suites géométriques (U) et (V) telles que :
 $U_2 = V_2 = z_1$ et $U_4 = V_4 = z_2$ dont on déterminera les premiers termes U_0 et V_0 et la raison de chacune d'elles.

Exercice 6

Soit la suite (u_n) définie par $u_1 = \frac{3}{2}$ et pour tout $n \geq 1$: $u_{n+1} = \frac{3+u_n}{2}$

1. Calcule u_2 et u_3 .
 (u_n) est-elle une suite arithmétique ? est-elle une suite géométrique ?
2. Pour tout $n \geq 1$, on pose $v_n = 3 - u_n$
 - a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique
 - b) Exprimer v_n en fonction de n . En déduire u_n en fonction de n
 - c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Exercice 7

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = e^{2n+1}$

1. Calcule u_0 ; u_1 et u_2
2. Précise la nature et la raison de la suite (u_n)
3. Calcule en fonction de n la somme $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

Exercice 8

Une observation faite par un journal sur ses abonnés a permis de constater, pour chaque année un taux de réabonnement de 80% ainsi que l'apparition d'environ 5.000 nouveaux abonnés. On note a_n le nombre des abonnés après n années et on précise $a_0 = 10.000$

1. Expliquez pourquoi, pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = 0,8a_n + 5.000$
2. Soit la suite (u_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 25.000 - a_n$
 - a) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n
 - b) En déduire que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le 1^{er} terme.
 - c) soit $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_n en fonction de n . En déduire l'expression de a_n en fonction de n .
3.
 - a) Résoudre pour $x \in \mathbb{R}$, l'inéquation $25.000 - 15.000x(0,8)^x > 22.000$
 - b) En déduire le nombre d'années nécessaires pour que le nombre d'abonnés dépasse 22.000

Exercice 9

1. On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{2^{n+1}}{3^n}$ et $v_n = \ln(u_n)$
 - a) Calcule u_0 ; u_1 ; u_2 ; v_0 ; v_1 et v_2
 - b) Déterminer la nature et la raison de chacune des suites.
 - c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ et en déduire la limite de v_n en $+\infty$
2. Un examen comporte deux épreuves : une épreuve de biologie et une épreuve de chimie. Il y a 20 questions en biologie et 15 questions en chimie. Chaque question est marquée par un

TRAVAUX DIRIGES DE MATHEMATIQUES : Suites numériques

Réalisé par Koffimath (Tél : 60 62 93 65)

.....
numéro et ces numéros sont placés dans deux sacs distincts, un contenant les questions de chimie et l'autre les questions de biologie. Tout candidat à cet examen doit tirer au hasard une question en biologie et une question en chimie. Sera déclaré directement admis tout candidat qui aura répondu vrai aux deux questions.

- Un candidat à cet examen a combien de choix possibles ?
- Un candidat C_1 se présente à cet examen en ignorant 8 questions de biologie et 5 questions de chimie ; un autre candidat C_2 se présente en ignorant 5 questions de biologie et 8 questions de chimie. Lequel des deux candidats a plus de chance de réussir ?
- Quel est le pourcentage de réussite du candidat le moins chanceux parmi les deux ?
- Le jury décide de repêcher tout candidat qui aura répondu vrai à la question de chimie et raté la question de biologie ; dans ces conditions :
 - Quelle est la probabilité que C_1 soit repêché, que C_2 soit repêché ?
 - Quelle est la probabilité pour chacun d'être admis à l'examen ?

Exercice 10

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :
$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$$

On considère la suite (v_n) définie par : $v_n = u_{n+1} - u_n$ (1)

- Exprime v_n en fonction de n et montrer que (v_n) est une suite arithmétique dont on déterminera le 1^{er} terme et la raison.
- Calcule $S_n = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n$
- Utiliser la relation (1) pour trouver une autre expression de S_n . En déduire u_n en fonction de n .

- Calcule la limite de u_n .

Exercice 11

- (u_n) est une suite arithmétique définie par $u_3 = 2$ et $u_7 = 14$
 - Déterminer la raison r de cette suite puis exprimer u_n en fonction de n
 - Calcule $S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{20}$
- Une urne contient 5 boules rouges et 7 boules blanches indiscernables au toucher. On tire simultanément et au hasard 5 boules de l'urne. Déterminer le nombre de tirages contenant :
 - 3 boules rouges et 2 boules blanches
 - 3 boules blanches et 2 boules rouges
- Résoudre dans $\mathbb{N}$, l'équation : $4C_n^4 - 5C_n^{n-3} = 0$

Exercice 12

On considère la suite numérique (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$

- Prouver que, pour tout n , on a : $u_n > 0$
- On introduit la suite (v_n) , $n \in \mathbb{N}$ de terme général : $v_n = \frac{1}{u_n}$
 - Prouver que la suite (v_n) est une suite arithmétique
 - En déduire v_n en fonction de n , puis u_n en fonction de n
 - Déterminer le comportement à l'infini de la suite (u_n)
 - Pour quelles valeurs de x a-t-on : $e^{\ln(x+1)} \times e^{-\ln(2-x)} = u_0$?

TRAVAUX DIRIGES DE MATHÉMATIQUES : Suites numériques

Réalisé par Koffimath (Tél : 60 62 93 65)

Exercice 13

(u_n) est une suite géométrique de raison 3 $u_1 = 2$

- Calculer u_n en fonction de n
- Calculer la somme $u_1 + u_2 + \dots + u_7$
- (v_n) est une suite arithmétique de raison r et $v_1 = 2$. Exprimer v_n en fonction de n puis calculer : $v_{30} + v_{31} + v_{32}$

Exercice 14

- Simplifier l'expression : $E = \frac{e^{2x+1}}{e^{2x-1}}$
- On considère la suite numérique (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = e^{2x-1}$
 - Calculer $u_0 ; u_1 ; u_2 ; u_3 ; u_{n+1}$
 - Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
 - Exprimer en fonction de n , la somme :
 $s_n = \sum_{i=0}^n u_i = u_0 + u_1 + \dots + u_n$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$
 - Trouver la valeur minimum de n telle que $s_n \geq 10$

NB : On donne : $e = 2,7 ; e^2 = 7,3 ; e^3 = 19,7$ et $\ln 171 = 5,14$
- Soit (v_n) la suite numérique définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln(u_n)$
 - Exprimer la somme $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ en fonction de n
 - Exprimer le produit $P_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n$ en fonction de n

Exercice 15

On considère la suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_0 = 2$ et

$$2u_{n+1} = u_n + 1$$

- Montrer que la suite de terme général $v_n = u_n - 1$ est une suite géométrique dont on précisera le 1^{er} terme v_0 la raison q .
- Exprimer u_n en fonction de n et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$
- Calculer $\sum_{i=0}^n u_i$

Exercice 16

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par son terme général

$$u_n = \frac{(-1)^n \times 5}{2^n}$$

- Calcule $u_1 ; u_2 ; u_3 ; u_4$ et u_5
- Démontre que cette suite est une suite géométrique dont on précisera la raison
- Exprime u_n en fonction de u_1 et n
- Calculer $\sum_{i=0}^9 u_i$ et donner une valeur approchée à 10^{-2} près.