

3 : Rappel de Cours

Outil N° 1 :

Suite majorée ou minorée :

- Si $(u_n)_n$ est croissante et majorée c-à-d $(u_n \leq M)$ Alors $(u_n)_n$ est convergente vers un $l \in \mathbb{R}$
- Si $(u_n)_n$ est décroissante et minorée c-à-d $(u_n \geq m)$ Alors $(u_n)_n$ est convergente vers un $l \in \mathbb{R}$
- Si $(u_n)_n$ est croissante et non majorée Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = +\infty$
- Si $(u_n)_n$ est décroissante et non minorée Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = -\infty$

Outil N° 2 :

Monotonie d'une suite numérique :

$$\begin{aligned} (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} &\geq u_n \Leftrightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est } \nearrow \\ (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} &\leq u_n \Leftrightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est } \searrow \\ (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} &= u_n \Leftrightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est cte} \end{aligned}$$

Outil N° 3 : Suite arithmétique :

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow u_{n+1} &= u_n + r ; r \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow u_n &= u_p + (n-p)r ; p \in \mathbb{N} \\ \Leftrightarrow u_p + \dots + u_n &= \left(\frac{n-p+1}{2} \right) (u_p + u_n) ; p \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Outil N° 4 : Suite géométrique :

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow u_{n+1} &= q u_n ; q \in \mathbb{R}^* \\ \Leftrightarrow u_n &= u_p \times q^{n-p} ; n \geq p \\ \Leftrightarrow u_p + \dots + u_n &= \left(\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} \right) u_p ; n \geq p \end{aligned}$$

Outil N° 5 :

Limite d'une suite par définition :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) &= +\infty \\ \Leftrightarrow (\forall A > 0) (\exists N \in \mathbb{N}) (\forall n \geq N) : u_n &> A \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) &= -\infty \\ \Leftrightarrow (\forall A > 0) (\exists N \in \mathbb{N}) (\forall n \geq N) : u_n &< -A \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) &= l \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) (\exists N \in \mathbb{N}) (\forall n \geq N) : |u_n - l| &< \varepsilon \end{aligned}$$

Outil N° 6 :

La suite $(n^\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$; $\alpha \in \mathbb{Q}^*$

$$\begin{aligned} \blacksquare \alpha > 0 &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (n^\alpha) = +\infty \\ \blacksquare \alpha < 0 &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (n^\alpha) = 0 \end{aligned}$$

Outil N° 7 : l'unicité de la limite :

La limite d'une suite numérique, quand elle existe, est unique.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Outil N° 8 : convergente ► bornée

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = l \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow (\exists M \in \mathbb{R}^+) (\forall n \in \mathbb{N}) : |u_n| \leq M$$

Outil N° 9 : limites et ordre :

- $\begin{cases} u_n \leq v_n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n) = +\infty$
- $\begin{cases} u_n \leq v_n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n) = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = -\infty$
- $\begin{cases} v_n \leq u_n \leq w_n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (w_n) = l \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = l$
- $\begin{cases} u_n > a \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = l \end{cases} \Rightarrow l \geq a$
- $\begin{cases} u_n < a \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = l \end{cases} \Rightarrow l \leq a$
- $\begin{cases} u_n < v_n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = l \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n) = l' \end{cases} \Rightarrow l \leq l'$

Outil N° 10 : limite de $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$

- si $q > 1$ Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} (q^n) = +\infty$
- si $q = 1$ Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} (q^n) = 1$
- si $-1 < q < 1$ Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} (q^n) = 0$
- si $q \leq -1$ Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} (q^n)$ n'existe pas

Outil N° 11 : La suite $u_{n+1} = f(u_n)$:

$$\left. \begin{array}{l} u_{n+1} = f(u_n) \\ f \text{ continue sur } I \subseteq \mathbb{R} \\ f(I) \subseteq I ; u_0 \in I \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = l \in I \end{array} \right| \Rightarrow f(l) = l$$

Outil N° 12 :**La suite récurrente $v_n = f(u_n)$:**

$$\left. \begin{array}{l} v_n = f(u_n) \\ f \text{ conti en } l \\ l = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) \end{array} \right| \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)\right)$$

Outil N° 13 : suites adjacentes :

$$\left((u_n)_n \text{ et } (v_n)_n \right. \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} (u_n) \text{ est } \nearrow \\ (v_n) \text{ est } \searrow \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - v_n) = 0 \end{array} \right)$$

$$\left((u_n)_n \text{ et } (v_n)_n \right. \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n) = l$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

4 : Série d'exercices

Exercice N° 1 :

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{4u_n - 9}{u_n - 2} & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 5 \end{cases}$$

On pose $v_n = \frac{1}{u_n - 3} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- 1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad u_n > 3$
- 2) Montrer que (u_n) est décroissante.
- 3) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad 3 < u_n \leq 5$
- 4) Montrer que $(v_n)_n$ est arithmétique.
- 5) Écrire v_n puis u_n en fonction de n
- 6) Calculer : $S = v_1 + v_2 + \dots + v_{2020}$

Exercice N° 2 :

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3 - \frac{9}{4u_n} & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 3 \end{cases}$$

- 1) Calculer u_1
- 2) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad u_n \neq \frac{3}{2}$
- 3) Étudier la monotonie de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$
- 4) On pose $v_n = \frac{2}{2u_n - 3} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad u_n = \frac{3n+6}{2n+2}$

- 6) Calculer en fonction de n la somme :

$$S_n = \frac{1}{2u_0 - 3} + \frac{1}{2u_1 - 3} + \dots + \frac{1}{2u_n - 3}$$

Exercice N° 3 :

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{5}{3} & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

On pose $v_n = u_n - \frac{5}{2} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- 1) calculer les termes : $u_1 \quad ; \quad v_0 \quad ; \quad v_1$
- 2) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad u_n < \frac{5}{2}$
- 3) Étudier la monotonie de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$
- 4) Montrer que $(v_n)_n$ est géométrique.
- 5) Écrire v_n puis u_n en fonction de n
- 6) Calculer en fonction de n les sommes :

$$\begin{cases} \blacksquare S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n \\ \blacksquare T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n \end{cases}$$

- 7) Calculer la limite : $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n)$

Exercice N° 4 :

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 2} & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

- 1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad 0 < u_n < 2$

- 2) Mq : $u_{n+1} - u_n = \frac{(1+u_n)(2-u_n)}{(2+u_n)}$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence. It's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

3) En déduire la monotonie de $(u_n)_n$

Et que : $\forall n \in \mathbb{N} : 1 \leq u_n < 2$

4) On pose $v_n = \frac{u_n + 1}{u_n - 2} ; \forall n \in \mathbb{N}$

Montrer que $(v_n)_n$ est géométrique.

5) Écrire v_n en fonction de n

6) déduire : $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n = \frac{4^{n+1} - 1}{1 + 2 \times 4^n}$

7) Calculer en fonction de n la somme :

$$S_n = \sum_{k=2}^{k=n} v_k$$

Exercice N° 5 :

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{12 + u_n} & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 0 \end{cases}$$

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* ; 3 \leq u_n \leq 4$

2) Mq : $\forall n \in \mathbb{N} ; (4 - u_{n+1}) \leq \frac{1}{4}(4 - u_n)$

3) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^* ; 4 - u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

4) Déterminer la limite de la suite (u_n)

Exercice N° 6 :

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{\pi u_n}{\pi + 2u_n} + \cos\left(\frac{\pi^2}{u_n}\right) & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 2\pi \end{cases}$$

1) Mq : $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{\pi^2}{u_n} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \text{ et } u_n > 0$

2) Mq la suite $(v_n) = \left(\frac{1}{u_n}\right)$ est arithmétique

3) En déduire u_n en fonction de n

4) Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$

Exercice N° 7 :

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + n^2 - n & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = -2 \end{cases}$$

1) Montrer que : $\forall n > 3 ; u_n > n$

2) En déduire la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$

3) Écrire u_n en fonction de n

On pourra utiliser les sommes suivantes :

$$\sum_{k=1}^{k=n} k = \frac{n(n+1)}{2} \text{ et } \sum_{k=1}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercice N° 8 :

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par :

$$u_{n+1} = 2u_n + 1 - n ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1) soit $u_0 = 0$, Calculer les six premiers termes de la suite (u_n) .

2) conjecturer une formule donnant l'expression de u_n en fonction de n .

3) Démontrer cette formule par récurrence

4) Soit $u_0 = 1$, Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} ; u_n = 2^n + n$$

Exercice N° 9 :

Soit $(v_n)_n$ la suite définie par :

$$\begin{cases} v_{n+1} = \sqrt{2 + v_n} & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ v_0 = 1 \end{cases}$$

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} ; 0 \leq v_n \leq 2$

2) Montrer que (v_n) est croissante.

3) Déterminer la limite : $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n)$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence. It's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

5 : Mes propositions de correction

Solution N° 1 :

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $P(n)$ définie ainsi : $P(n) : u_n > 3$

L'initialisation :

On a : $u_0 = 5 > 3$
Donc l'instance $P(0)$ est vraie

L'hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $P(n)$ soit vraie. C-à-d $u_n > 3$

$$\begin{aligned} \blacksquare u_{n+1} - 3 &= \frac{4u_n - 9}{u_n - 2} - 3 \\ &= \frac{4u_n - 9 - 3u_n + 6}{u_n - 2} \\ &= \frac{u_n - 3}{u_n - 2} > 0 \\ &= \frac{\text{strict positif}}{\text{strict positif}} = \text{strict positif} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow u_{n+1} - 3 &> 0 \\ \Rightarrow u_{n+1} &> 3 \\ \Rightarrow P(n+1) &\text{ est vraie} \end{aligned}$$

La conclusion :

$$\begin{cases} P(0) \text{ est vraie} \\ P(n) \Rightarrow P(n+1) \end{cases} ; \forall n \in \mathbb{N}$$

C-à-d que : $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n > 3$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$, On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{4u_n - 9}{u_n - 2} - \frac{u_n(u_n - 2)}{u_n - 2} \\ &= \frac{-(u_n^2 - 6u_n + 9)}{u_n - 2} \\ &= \frac{-(u_n - 3)^2}{u_n - 2} \leq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} - u_n &\leq 0 \\ \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} &\leq u_n \\ \Rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}} &\text{ est décroissante} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) (u_n)_{n \in \mathbb{N}} &\text{ est décroissante} \\ \Rightarrow u_n &\leq u_{n-1} \leq u_{n-2} \leq \dots \leq u_0 \\ \Rightarrow u_n &\leq u_0 ; \forall n \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_n &\leq 5 \rightsquigarrow (1) \end{aligned}$$

Or on a selon la question 1) :

$$\forall n \in \mathbb{N} ; u_n > 3 \rightsquigarrow (2)$$

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow 3 < u_n \leq 5 ; \forall n \in \mathbb{N}$$

4) soit $n \in \mathbb{N}$ On a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{u_{n+1} - 3} - \frac{1}{u_n - 3} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{4u_n - 9}{u_n - 2}\right) - 3} - \frac{1}{u_n - 3} \\ &= \frac{u_n - 2}{u_n - 3} - \frac{1}{u_n - 3} = \frac{u_n - 3}{u_n - 3} = 1 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; v_{n+1} = v_n + 1$$

Donc (v_n) est une suite arithmétique de raison 1

5) comme (v_n) est arithmétique alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad ; \quad v_n = v_p + 1(n - p)$$

On choisit $p = 0$ Alors :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad v_n &= v_0 + 1(n - 0) \\ \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad v_n &= \frac{1}{2} + 1(n - 0) \\ \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad v_n &= \frac{1}{2} + n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{On a encore} \quad : \quad v_n &= \frac{1}{u_n - 3} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad u_n &= \frac{1}{v_n} + 3 = \frac{6n + 5}{2n + 1} \end{aligned}$$

$$6) S = v_1 + v_2 + \dots + v_{2020}$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{2020 - 1 + 1}{2} \right) (v_1 + v_{2020}) \\ &= (1010) \left(\frac{3}{2} + \frac{4041}{2} \right) = 2042220 \end{aligned}$$

Solution N° 2 :

$$1) u_1 = 3 - \frac{9}{4u_0} = \frac{9}{4}$$

2) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition (P_n) définie ainsi : $(P_n) : u_n \neq \frac{3}{2}$

L'initialisation :

On a : $u_0 = 3 \neq \frac{3}{2}$

Donc l'instance (P_0) est vraie

L'hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance (P_n) soit vraie. C-à-d $u_n \neq \frac{3}{2}$

$$\blacksquare (P_n) \text{ est vraie} \Rightarrow u_n \neq \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 4u_n \neq 6$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4u_n} \neq \frac{1}{6} \quad ; \quad u_n \neq 0 \text{ facile}$$

$$\Rightarrow 3 - \frac{9}{4u_n} \neq 3 - \frac{9}{6}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \neq \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow (P_{n+1}) \text{ est vraie}$$

La conclusion :

$$\begin{cases} (P_0) \text{ est vraie} \\ (P_n) \Rightarrow (P_{n+1}) \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad u_n \neq \frac{3}{2}$

Remarque : Pour montrer que $u_n \neq 0$

On peut le faire par l'absurde :

Si $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = 0$

On aurait u_{n+1} n'existe pas

$$\text{Car } u_{n+1} = 3 - \frac{9}{4u_n}$$

3) D'abord on aurait besoin de montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad u_n > \frac{3}{2}$

1^{ère} Méthode :

$$u_n \neq \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} \text{ou bien } u_n < \frac{3}{2} \\ \text{ou bien } u_n > \frac{3}{2} \end{cases}$$

Si $u_n < \frac{3}{2}$ Alors $u_0 = 3 < \frac{3}{2}$

Et c'est une contradiction claire

Donc la deuxième alternative est retenue

$$C - \text{à} - d : \forall n \in \mathbb{N} ; u_n > \frac{3}{2}$$

2^{ème} Méthode :

On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $Q(n)$ définie ainsi : $Q(n) : u_n > \frac{3}{2}$

L'initialisation :

On a : $u_0 = 5 > \frac{3}{2}$

Donc l'instance $Q(0)$ est vraie

L'hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $Q(n)$ soit vraie. C-à-d $u_n > \frac{3}{2}$

$$\blacksquare Q(n) \text{ est vraie} \Rightarrow u_n > \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 4u_n > 6$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{4u_n} > \frac{-1}{6}$$

$$\Rightarrow 3 - \frac{9}{4u_n} > 3 - \frac{9}{6}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} > \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow Q(n+1) \text{ est vraie}$$

La conclusion :

$$\begin{cases} Q(0) \text{ est vraie} \\ Q(n) \Rightarrow Q(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n > \frac{3}{2}$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Revenons maintenant pour étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Soit $n \in \mathbb{N}$ on a alors :

$$\begin{aligned} \blacksquare u_{n+1} - u_n &= 3 - \frac{9}{4u_n} - u_n \\ &= \frac{12u_n - 9 - 4u_n^2}{4u_n} \\ &= \frac{-(4u_n^2 - 12u_n + 9)}{4u_n} \\ &= \frac{-(2u_n - 3)^2}{4u_n} < 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} - u_n < 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} < u_n$$

$$\Rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante}$$

4) soit $n \in \mathbb{N}$ on procède comme suit :

$$\begin{aligned} \blacksquare v_{n+1} - v_n &= \frac{2}{2u_{n+1} - 3} - \frac{2}{2u_n - 3} \\ &= \frac{2}{2\left(3 - \frac{9}{4u_n}\right) - 3} - \frac{2}{2u_n - 3} \\ &= \frac{8u_n}{12u_n - 18} - \frac{2}{2u_n - 3} \\ &= \frac{4u_n}{3(2u_n - 3)} - \frac{2 \times 3}{3(2u_n - 3)} \\ &= \frac{2(2u_n - 3)}{3(2u_n - 3)} = \frac{2}{3} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; v_{n+1} - v_n = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; v_{n+1} = v_n + \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow (v_n) \text{ est arithmétique de raison } \frac{2}{3}$$

5) comme (v_n) est arithmétique alors :

$$\begin{matrix} \forall n \in \mathbb{N} \\ \forall p \in \mathbb{N} \end{matrix} ; \quad v_n = v_p + \frac{2}{3}(n - p)$$

On choisit $p = 0$ Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} ; \quad v_n = v_0 + \frac{2}{3}(n - 0)$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; \quad v_n = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}(n - 0)$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; \quad v_n = \frac{2}{3}(n + 1)$$

$$\text{Et comme : } v_n = \frac{2}{2u_n - 3} ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Alors : } u_n = \frac{1}{v_n} + \frac{3}{2} ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{3}{2(n+1)} + \frac{3(n+1)}{2(n+1)} = \frac{3n+6}{2n+2}$$

$$6) S_n = \frac{1}{2u_0 - 3} + \frac{1}{2u_1 - 3} + \dots + \frac{1}{2u_n - 3}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{2u_0 - 3} + \frac{2}{2u_1 - 3} + \dots + \frac{2}{2u_n - 3} \right)$$

$$= \frac{1}{2} (v_0 + v_1 + \dots + v_n)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{n - 0 + 1}{2} \right) (v_0 + v_n)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{2} \right) \left(\frac{2}{3} + \frac{2n}{3} + \frac{2}{3} \right)$$

$$= \frac{(n+1)(2n+4)}{12}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{6}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Solution N° 3 :

1) Calcul de quelques termes :

$$u_1 = \frac{1}{3}u_0 + \frac{5}{3} = 2$$

$$v_0 = u_0 - \frac{5}{2} = \frac{-3}{2}$$

$$v_1 = u_1 - \frac{5}{2} = \frac{-1}{2}$$

2) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $P(n)$ définie ainsi : $P(n) : u_n < \frac{5}{2}$

L'initialisation :

$$\text{On a : } u_0 = 1 < \frac{5}{2}$$

Donc l'instance $P(0)$ est vraie

L'hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $P(n)$ soit vraie. C-à-d $u_n < \frac{5}{2}$

$$\blacksquare P(n) \text{ est vraie} \Rightarrow u_n < \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}u_n < \frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}u_n + \frac{5}{3} < \frac{5}{6} + \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} < \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow P(n+1) \text{ est vraie}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

La conclusion :

$$\begin{cases} P(0) \text{ est vraie} \\ P(n) \Rightarrow P(n+1) \end{cases} ; \forall n \in \mathbb{N}$$

C-à-d que : $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n < \frac{5}{2}$

3) Soit $n \in \mathbb{N}$ on procède comme suit :

$$\begin{aligned} \blacksquare u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{3}u_n + \frac{5}{3} - u_n \\ &= \frac{-2}{3}u_n + \frac{5}{3} \\ &= \frac{-2}{3}\left(u_n - \frac{5}{2}\right) > 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} > u_n$$

$$\Rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante}$$

4) soit $n \in \mathbb{N}$ et on procède comme suit :

$$\begin{aligned} \blacksquare \frac{v_{n+1}}{v_n} &= \left(\frac{u_{n+1} - \frac{5}{2}}{u_n - \frac{5}{2}} \right) = \left(\frac{\frac{1}{3}u_n + \frac{5}{3} - \frac{5}{2}}{u_n - \frac{5}{2}} \right) \\ &= \left(\frac{\frac{1}{3}u_n - \frac{5}{6}}{u_n - \frac{5}{2}} \right) \\ &= \frac{\frac{1}{3}\left(u_n - \frac{5}{2}\right)}{\left(u_n - \frac{5}{2}\right)} = \frac{1}{3} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$$

$$\Rightarrow (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est géométrique de raison } \frac{1}{3}$$

5) comme (v_n) est géométrique alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad \forall p \leq n \quad ; \quad v_n = v_p \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-p}$$

On choisit $p = 0$ Alors :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad v_n &= v_0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-0} \\ \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad v_n &= \frac{-3}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{aligned}$$

$$\text{On a encore : } v_n = u_n - \frac{5}{2} ; \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_n = v_n + \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_n = \frac{-3}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{5}{2}$$

$$6) \quad S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

$$= \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-0+1}}{1 - \frac{1}{3}} \right) v_0$$

$$= \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} \right) \times \frac{-3}{2}$$

$$= \frac{-9}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \right)$$

$$T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

$$= \left(v_0 + \frac{5}{2}\right) + \left(v_1 + \frac{5}{2}\right) + \dots + \left(v_n + \frac{5}{2}\right)$$

$$= (v_0 + v_1 + \dots + v_n) + (n+1) \cdot \frac{5}{2}$$

$$= \frac{-9}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \right) + \frac{5(n+1)}{2}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$7) \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{S}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-9}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{n+1} \right)$$

$$= \frac{-9}{4} (1 - 0) = \frac{-9}{4}$$

Solution N° 4 :

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $P(n)$ définie ainsi : $P(n) : u_n > 0$

L'initialisation :

On a : $u_0 = 1 > 0$
Donc l'instance $P(0)$ est vraie

L'hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $P(n)$ soit vraie. C-à-d $u_n > 0$

$$\blacksquare P(n) \text{ est vraie} \Rightarrow u_n > 0$$

$$\Rightarrow 3u_n + 2 > 0 \quad \text{et} \quad u_n + 2 > 0$$

$$\Rightarrow \frac{3u_n + 2}{u_n + 2} > 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} > 0$$

$$\Rightarrow P(n+1) \text{ est vraie}$$

La conclusion :

$$\begin{cases} P(0) \text{ est vraie} \\ P(n) \Rightarrow P(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\text{C-à-d que : } \forall n \in \mathbb{N} ; u_n > 0 \rightsquigarrow (1)$$

On démontrera encore par récurrence la véracité de la proposition $Q(n)$ définie ainsi : $Q(n) : u_n < 2$

L'initialisation :

On a : $u_0 = 1 < 2$
Donc l'instance $Q(0)$ est vraie

L'hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $Q(n)$ soit vraie. C-à-d $u_n < 2$

$$\blacksquare u_{n+1} - 2 = \frac{3u_n + 2}{u_n + 2} - 2$$

$$= \frac{u_n - 2}{u_n + 2} < 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - 2 < 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} < 2$$

$$\Rightarrow Q(n+1) \text{ est vraie}$$

La conclusion :

$$\begin{cases} Q(0) \text{ est vraie} \\ Q(n) \Rightarrow Q(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\text{C-à-d que : } \forall n \in \mathbb{N} ; u_n < 2 \rightsquigarrow (2)$$

De (1) et (2) on déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N} ; 0 < u_n < 2$$

$$2) u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + 2}{u_n + 2} - u_n$$

$$= \frac{3u_n + 2 - u_n(u_n + 2)}{u_n + 2}$$

$$= \frac{-u_n^2 + u_n + 2}{u_n + 2}$$

$$= \frac{-x^2 + x + 2}{x + 2} ; \text{ avec } x = u_n$$

$$\blacksquare \Delta = 9 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{-2} = \{2; -1\}$$

$$\Rightarrow \frac{-x^2 + x + 2}{x + 2} = \frac{-(x - 2)(x + 1)}{x + 2}$$

$$\Rightarrow \frac{(2 - x)(x + 1)}{(x + 2)} ; x = u_n$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{(2 - u_n)(u_n + 1)}{(u_n + 2)}$$

3) comme : $\forall n \in \mathbb{N} ; 0 < u_n < 2$

$$\text{Alors : } \begin{cases} \text{Et } (1 + u_n) > 0 \\ \text{Et } (2 + u_n) > 0 \\ \text{Et } (2 - u_n) > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; \frac{(2 - u_n)(u_n + 1)}{(u_n + 2)} > 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} > u_n$$

$$\Rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante}$$

$$\Rightarrow u_n \geq u_{n-1} \geq u_{n-2} \geq \dots \geq u_0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_n \geq u_0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_n \geq 1$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; 1 \leq u_n < 2$$

4) soit $n \in \mathbb{N}$ et on procède comme suit :

$$\blacksquare \frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(\frac{u_{n+1} + 1}{u_{n+1} - 2} \right) \times \left(\frac{u_n - 2}{u_n + 1} \right)$$

$$= \left(\frac{\frac{3u_n + 2}{u_n + 2} + 1}{\frac{3u_n + 2}{u_n + 2} - 2} \right) \times \left(\frac{u_n - 2}{u_n + 1} \right)$$

$$= \left(\frac{4u_n + 4}{u_n + 2} \right) \times \left(\frac{u_n + 2}{u_n - 2} \right) \times \left(\frac{u_n - 2}{u_n + 1} \right)$$

$$= \frac{4(u_n + 1)(u_n + 2)(u_n - 2)}{(u_n + 2)(u_n - 2)(u_n + 1)} = 4$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} = 4v_n$$

$$\Rightarrow (v_n) \text{ est géométrique de raison } 4$$

5) comme (v_n) est géométrique alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} ; \forall p \leq n ; v_n = v_p \times 4^{n-p}$$

On choisit $p = 0$ Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} ; v_n = v_0 \times 4^n$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; v_n = -2 \cdot 4^n$$

$$6) \text{ On a : } v_n = \frac{u_n + 1}{u_n - 2} ; \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; v_n \cdot u_n - 2v_n = u_n + 1$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; v_n \cdot u_n - u_n = 1 + 2v_n$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; (v_n - 1)u_n = 1 + 2v_n$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_n = \frac{1 + 2v_n}{v_n - 1} = \frac{1 - 2 \cdot 2 \cdot 4^n}{-2 \cdot 4^n - 1}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; u_n = \frac{1 - 4^{n+1}}{-2 \cdot 4^n - 1} = \frac{4^{n+1} - 1}{1 + 2 \cdot 4^n}$$

$$7) S_n = \sum_{k=2}^{k=n} v_k = v_2 + v_3 + \dots + v_n$$

$$= \left(\frac{1 - 4^{n-2+1}}{1 - 4} \right) v_2$$

$$= \frac{-1}{3} (1 - 4^{n-1}) (-32)$$

$$= \frac{32}{3} (1 - 4^{n-1})$$

Solution N° 5 :

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $P(n)$ définie ainsi : $P(n) : u_n \leq 4$

L'initialisation :

On a : $u_1 = \sqrt{12} \leq 4$

Donc l'instance $P(1)$ est vraie

L'hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé et on suppose que l'instance $P(n)$ soit vraie. C-à-d $u_n \leq 4$

■ $P(n)$ est vraie $\Rightarrow u_n \leq 4$

$$\Rightarrow u_n + 12 \leq 16$$

$$\Rightarrow \sqrt{u_n + 12} \leq 4$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \leq 4$$

$$\Rightarrow P(n+1) \text{ est vraie}$$

La conclusion :

$$\begin{cases} P(1) \text{ est vraie} \\ P(n) \Rightarrow P(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n \in \mathbb{N}^* ; u_n \leq 4 \rightsquigarrow (1)$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

On démontrera maintenant par récurrence la véracité de la proposition $Q(n)$ définie ainsi : $Q(n) : u_n \geq 3$

L'initialisation :

On a : $u_1 = \sqrt{12} \geq 3$

Donc l'instance $Q(1)$ est vraie

L'hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé et on suppose que l'instance $Q(n)$ soit vraie. C-à-d $u_n \geq 3$

■ $Q(n)$ est vraie $\Rightarrow u_n \geq 3 > -3$

$$\Rightarrow u_n \geq -3$$

$$\Rightarrow 12 + u_n \geq 9$$

$$\Rightarrow \sqrt{12 + u_n} \geq 3$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \geq 3$$

$$\Rightarrow Q(n+1) \text{ est vraie}$$

La conclusion :

$$\begin{cases} Q(1) \text{ est vraie} \\ Q(n) \Rightarrow Q(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

C-à-d que : $\forall n \in \mathbb{N}^* ; u_n \geq 3 \rightsquigarrow (2)$

De (1) et (2) on tire finalement que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* ; 3 \leq u_n \leq 4$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

2) soit f la fonction définie ainsi :

$$f(x) = \sqrt{x+12}$$

Cette fonction est définie et est continue sur l'intervalle $[-12, +\infty[$ Donc on peut appliquer le TAF sur l'intervalle $[u_n, 4]$ Alors :

$$\exists c \in]u_n, 4[\quad ; \quad \frac{f(4) - f(u_n)}{4 - u_n} = f'(c)$$

$$\Rightarrow u_n < c < 4 \text{ et } \left(\frac{4 - u_{n+1}}{4 - u_n} \right) = \frac{1}{2\sqrt{c+12}}$$

$$\text{On a : } \begin{cases} u_n < c < 4 \\ u_n \geq 3 \end{cases} \Rightarrow c \geq 3 > -8$$

$$\Rightarrow c \geq -8$$

$$\Rightarrow c + 12 \geq 4$$

$$\Rightarrow \sqrt{c+12} \geq 2$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{c+12} \geq 4$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{c+12}} \leq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{4 - u_{n+1}}{4 - u_n} \right) \leq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow (4 - u_{n+1}) \leq \frac{1}{4}(4 - u_n)$$

3) **1^{ère} Méthode** (la méthode descendante)

$$\text{On a : } (4 - u_{n+1}) = \frac{1}{4}(4 - u_n) \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Pour $(n-1) \in \mathbb{N}^*$ on aurait :

$$(4 - u_n) \leq \frac{1}{4}(4 - u_{n-1})$$

$$\Rightarrow (4 - u_n) \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}(4 - u_{n-2})$$

$$\Rightarrow (4 - u_n) \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}(4 - u_{n-3})$$

$$\Rightarrow (4 - u_n) \leq \left(\frac{1}{4}\right)^4 (4 - u_{n-4})$$

$$\Rightarrow \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$\Rightarrow (4 - u_n) \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n (4 - u_{n-n})$$

$$\Rightarrow (4 - u_n) \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n 4 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow (4 - u_n) \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

2^{ème} Méthode : la récurrence
(à vous de voir comment procéder)

$$4) \text{ Comme : } 0 \leq 4 - u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$\text{Et comme } \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0$$

Alors d'après le critère de comparaison on en déduit que : $\lim(4 - u_n) = 0$

$$\text{Ainsi : } \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = 4$$

Solution N° 6 :

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $P(n)$ définie ainsi : $P(n) : \frac{\pi^2}{u_n} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

L'initialisation :

$$\text{On a : } u_0 = 2\pi \text{ et } \frac{\pi^2}{2\pi} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

Donc l'instance $P(0)$ est vraie

You're not supposed to create new methods or new techniques, just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

L'hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $P(n)$ soit vraie. C-à-d $\frac{\pi^2}{u_n} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

$$\blacksquare P(n) \text{ est vraie} \Rightarrow \frac{\pi^2}{u_n} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi^2}{u_n}\right) = 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} = \frac{\pi u_n}{\pi + 2u_n}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi^2}{u_{n+1}} = \frac{\pi^2}{u_n} \left(\frac{\pi + 2u_n}{\pi} \right)$$

$$\text{On a } \frac{\pi^2}{u_n} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \Rightarrow \frac{\pi^2}{u_n} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\Rightarrow \frac{2u_n}{\pi} = \frac{4}{1+4k} ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi + 2u_n}{\pi} = \frac{4k+5}{1+4k} ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\pi^2}{u_{n+1}} &= \frac{\pi^2}{u_n} \left(\frac{\pi + 2u_n}{\pi} \right) = \left(\frac{\pi + 4k\pi}{2} \right) \left(\frac{4k+5}{1+4k} \right) \\ &= \frac{\pi(4k+1)(4k+5)}{2(4k+1)} \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{2} (4k+5) = \frac{5\pi}{2} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

$$= \frac{\pi}{2} + 2(k+1)\pi ; (k+1) \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi^2}{u_{n+1}} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \Rightarrow P(n+1) \text{ est vraie}$$

La conclusion :

$$\begin{cases} P(0) \text{ est vraie} \\ P(n) \Rightarrow P(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$C - \text{à} - d : \forall n \in \mathbb{N} ; \frac{\pi^2}{u_n} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

On démontrera maintenant par récurrence la véracité de la proposition $Q(n)$ définie ainsi : $Q(n) : u_n > 0$

L'initialisation :

$$\text{On a : } u_0 = 2\pi > 0$$

Donc l'instance $Q(0)$ est vraie

L'hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $Q(n)$ soit vraie. C-à-d $u_n > 0$

$$\blacksquare Q(n) \text{ est vraie} \Rightarrow u_n > 0$$

$$\Rightarrow \pi u_n > 0 \text{ et } \pi + 2u_n > 0$$

$$\Rightarrow \frac{\pi u_n}{\pi + 2u_n} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{\pi u_n}{\pi + 2u_n} + 0 > 0$$

$$\Rightarrow \frac{\pi u_n}{\pi + 2u_n} + \cos\left(\frac{\pi^2}{u_n}\right) > 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} > 0$$

$$\Rightarrow Q(n+1) \text{ est vraie}$$

La conclusion :

$$\begin{cases} Q(0) \text{ est vraie} \\ Q(n) \Rightarrow Q(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$C - \text{à} - d : \forall n \in \mathbb{N} ; u_n > 0$$

2) soit $n \in \mathbb{N}$ et procède ainsi :

$$\blacksquare \quad v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{\pi + 2u_n}{\pi u_n} - \frac{1}{u_n}$$

$$= \frac{\pi + 2u_n - \pi}{\pi u_n} = \frac{2}{\pi} \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; v_{n+1} = v_n + \frac{2}{\pi}$$

$$\Rightarrow (v_n) \text{ est arithmétique de raison } \frac{2}{\pi}$$

3) comme (v_n) est arithmétique alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad ; \quad v_n = v_p + \frac{2}{\pi}(n - p)$$

On choisit $p = 0$ Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad v_n = v_0 + \frac{2}{\pi}(n - 0)$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad v_n = \frac{1}{2\pi} + \frac{2n}{\pi} = \frac{1}{2\pi}(4n + 1)$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad u_n = \frac{1}{v_n} = \frac{2\pi}{4n + 1}$$

$$4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2\pi}{4n + 1} \right) = 0$$

Solution N° 7 :

1) On démontrera maintenant par récurrence la véracité de la proposition $P(n)$ définie ainsi : $P(n) : u_n > n$

L'initialisation :

On a : $u_4 = 6 > 4$

Donc l'instance $P(4)$ est vraie

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

L'hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$; $n > 3$ fixé et on suppose que l'instance $P(n)$ soit vraie. C-à-d $u_n > n$

$$\blacksquare \quad P(n) \text{ est vraie} \Rightarrow u_n > n \text{ et } n > 3$$

$$\Rightarrow u_n > n \text{ et } n > 3 \text{ et } n - 1 > 2$$

$$\Rightarrow u_n > n \text{ et } n(n - 1) > 6 > 1$$

$$\Rightarrow u_n > n \text{ et } n(n - 1) > 1$$

$$\Rightarrow u_n > n \text{ et } n^2 - n > 1$$

$$\Rightarrow u_n + n^2 - n > n + 1$$

$$\Rightarrow u_{n+1} > n + 1$$

$$\Rightarrow P(n + 1) \text{ est vraie}$$

La conclusion :

$$\begin{cases} P(4) \text{ est vraie} \\ P(n) \Rightarrow P(n + 1) \quad ; \quad \forall n > 3 \end{cases}$$

$$C - \grave{a} - d : \quad \forall n > 3 \quad ; \quad u_n > n$$

2) comme : $\forall n > 3 \quad ; \quad u_n > n$

Et comme $\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$

Alors d'après le critère de comparaison on en déduit que : $\lim(u_n) = +\infty$

3) par la méthode descendante on a :

$$\hookrightarrow u_n - u_{n-1} = (n - 1)^2 - (n - 1)$$

$$\hookrightarrow u_{n-1} - u_{n-2} = (n - 2)^2 - (n - 2)$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\hookrightarrow u_3 - u_2 = 2^2 - 2$$

$$\hookrightarrow u_2 - u_1 = 1^2 - 1$$

$$\hookrightarrow u_1 - u_0 = 0^2 - 0$$

On additionne ces égalités côte à côte on obtient après des éliminations éventuelles :

$$u_n - u_0 = \sum_{k=0}^{n-1} k^2 - \sum_{k=0}^{n-1} k$$

$$\Rightarrow u_n + 2 = \sum_{k=0}^{n-1} k^2 - \sum_{k=0}^{n-1} k$$

$$\Rightarrow u_n + 2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} - \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{n(n-1)(2n-4)}{6} - 2 ; \forall n \geq 3$$

Solution N° 8 :

1) calcul de quelques termes de la suite :

u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7
0	1	2	3	4	5	6	7

2) d'après ce petit tableau en dessus on peut facilement conjecturer le prédicat suivant : $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n = n$ à démontrer par la machine récurrence.

3) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $P(n)$ définie ainsi : $P(n) : u_n = n$

L'initialisation :

On a : $u_0 = 0$

Donc l'instance $P(0)$ est vraie

L'hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $P(n)$ soit vraie. C-à-d $u_n = n$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

■ $P(n)$ est vraie $\Rightarrow u_n = n$

$$\Rightarrow 2u_n = 2n$$

$$\Rightarrow 2u_n + 1 - n = 2n + 1 - n$$

$$\Rightarrow u_{n+1} = n + 1$$

$$\Rightarrow P(n+1) \text{ est vraie}$$

La conclusion :

$$\begin{cases} P(0) \text{ est vraie} \\ P(n) \Rightarrow P(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$C - \text{à} - d : \forall n \in \mathbb{N} ; u_n = n$$

4) soit maintenant $u_0 = 1$

On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $Q(n)$ définie ainsi : $Q(n) : u_n = 2^n + n$

L'initialisation :

On a : $u_0 = 1 = 2^0 + 0$

Donc l'instance $Q(0)$ est vraie

L'hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $Q(n)$ soit vraie. C-à-d $u_n = 2^n + n$

■ $Q(n)$ est vraie $\Rightarrow u_n = 2^n + n$

$$\Rightarrow 2u_n + 1 - n = 2(2^n + n) + 1 - n$$

$$\Rightarrow u_{n+1} = 2^{n+1} + n + 1$$

$$\Rightarrow Q(n+1) \text{ est vraie}$$

La conclusion :

$$\begin{cases} Q(0) \text{ est vraie} \\ Q(n) \Rightarrow Q(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$C - \grave{a} - d : \forall n \in \mathbb{N} ; u_n = 2^n + n$$

Solution N° 9 :

1) On démontrera par récurrence la véracité de la proposition $P(n)$ définie ainsi : $P(n) : v_n \geq 0$

L'initialisation :

$$\text{On a : } v_0 = 1 \geq 0$$

Donc l'instance $P(0)$ est vraie

L'hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $P(n)$ soit vraie. C-à-d $v_n \geq 0$

$$\begin{aligned} \blacksquare P(n) \text{ est vraie} &\Rightarrow v_n \geq 0 \\ &\Rightarrow 2 + v_n \geq 2 > 0 \\ &\Rightarrow \sqrt{2 + v_n} > 0 \\ &\Rightarrow \sqrt{2 + v_n} \geq 0 \\ &\Rightarrow v_{n+1} \geq 0 \\ &\Rightarrow P(n+1) \text{ est vraie} \end{aligned}$$

La conclusion :

$$\begin{cases} P(0) \text{ est vraie} \\ P(n) \Rightarrow P(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$C - \grave{a} - d : \forall n \in \mathbb{N} ; v_n \geq 0 \rightsquigarrow (1)$$

On démontrera maintenant par récurrence la véracité de la proposition $Q(n)$ définie ainsi : $Q(n) : v_n \leq 2$

L'initialisation :

$$\text{On a : } v_0 = 1 \leq 2$$

Donc l'instance $Q(0)$ est vraie

L'hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé et on suppose que l'instance $Q(n)$ soit vraie. C-à-d $v_n \leq 2$

$$\blacksquare Q(n) \text{ est vraie} \Rightarrow v_n \leq 2$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 2 + v_n \leq 4 \\ &\Rightarrow \sqrt{2 + v_n} \leq 2 \\ &\Rightarrow v_{n+1} \leq 2 \\ &\Rightarrow Q(n+1) \text{ est vraie} \end{aligned}$$

La conclusion :

$$\begin{cases} Q(0) \text{ est vraie} \\ Q(n) \Rightarrow Q(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$C - \grave{a} - d : \forall n \in \mathbb{N} ; v_n \leq 2 \rightsquigarrow (2)$$

De (1) et (2) on déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N} ; 0 \leq v_n \leq 2$$

2) soit $n \in \mathbb{N}$ et on procède comme suit :

$$\begin{aligned} \blacksquare v_{n+1} - v_n &= \sqrt{2 + v_n} - v_n \\ &= \frac{(\sqrt{2 + v_n})^2 - (v_n)^2}{\sqrt{2 + v_n} + v_n} \\ &= \frac{-(v_n)^2 + v_n + 2}{\sqrt{2 + v_n} + v_n} \\ &= \frac{-(v_n - 2)(v_n + 1)}{\sqrt{2 + v_n} + v_n} \geq 0 \\ &\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; v_{n+1} \geq v_n \\ &\Rightarrow (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante} \end{aligned}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. It's not about intelligence. It's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$3) \text{ On : } v_{n+1} = \sqrt{2 + v_n} = f(v_n)$$

Avec $f(x) = \sqrt{2 + x}$ continue sur $\mathbb{R}^+$

Et on : $f(\mathbb{R}^+) \subseteq \mathbb{R}^+$ et $v_0 = 1 \in \mathbb{R}^+$

La suite (v_n) est convergente car croissante et étant majorée par 2.

On a encore $\lim(v_n) \in \mathbb{R}^+$

Car : $0 \leq v_n \leq 2$

Donc la limite $l = \lim(v_n)$ vérifie l'équation $f(l) = l$

$$\Rightarrow \sqrt{2 + l} = l$$

$$\Rightarrow 2 + l = l^2$$

$$\Rightarrow l^2 - l - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (l - 2)(l + 1) = 0 ; \Delta = 9$$

$$\Rightarrow l \in \{2; -1\}$$

$$\Rightarrow l = 2 \text{ car : } 0 \leq l \leq 2$$