



Exercice 1

On considère la suite (U_n) définie par:
$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{6 - U_n}{4 - U_n}, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- ①
 - a Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n < 2$.
 - b Montrer que pour tout entier naturel n , $U_{n+1} - U_n = \frac{(U_n - 2)(U_n - 3)}{4 - U_n}$
 - c Montrer alors que la suite (U_n) est croissante.
 - d Dédire que (U_n) est convergente.
- ② Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par: $V_n = \frac{2U_n - 6}{U_n - 2}$.
 - a Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison 2.
 - b Exprimer (V_n) en fonction de n .
 - c Dédire que $U_n = \frac{6[1 - (\frac{1}{2})^n]}{3 - 2(\frac{1}{2})^n}$.
 - d Calculer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.



Exercice 2

Soit (U_n) la suite définie par
$$\begin{cases} U_0 = \frac{3}{2} \\ U_{n+1} = \frac{2U_n}{2U_n + 5} \end{cases}; n \in \mathbb{N}$$

- ① calculer U_1
- ② Montre, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n > 0$
- ③
 - a Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}), 0 < U_{n+1} \leq \frac{2}{5}U_n$
 - b en déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}), 0 < U_n \leq \frac{3}{2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n$
 - c calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$
 - d Soit $n \in \mathbb{N}$, on considère $V_n = \frac{4u_n}{2u_n + 3}$
- ④
 - a Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{5}$
 - b Exprimer V_n puis U_n en fonction de n
 - c Retrouver $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$



Exercice 3

① Soit la suite réelle (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{4U_n}{1+U_n} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- a Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 < U_n < 3$
- b Montrer que la suite (U_n) est croissante.
- c En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

② Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \frac{U_n - 3}{U_n}$.

- a Montrer que la suite (V_n) est géométrique.
- b Exprimer V_n puis U_n en fonction de n .
- c Retrouver alors la limite de la suite (U_n) .

③ Soit la suite (W_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $W_n = \frac{3}{U_n}$ et on pose $S_n = \sum_{k=0}^n W_k$

- a Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $W_n = 1 - V_n$
- b Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $S_n = n + 1 + \frac{8}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1} \right)$ puis

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n}$



Exercice 4

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par:

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n^2 + u_n}{u_n^2 + 1} \\ u_0 = \frac{3}{2} \end{cases} ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- ① Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > 1$
- ② Étudier la monotonie de la suite (u_n)
- ③ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); (u_{n+1} - 1) < \frac{1}{2} (u_n - 1)$
- ④ Déduire : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < u_n - 1 < \left(\frac{1}{2} \right)^n$

- ⑤ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$n < \sum_{k=0}^{k=n-1} u_k < n + 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right)$$

- ⑥ En déduire la limite : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^{k=n-1} u_k \right)$



Exercice 5

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par:

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{8(u_n - 1)}{u_n + 2} ; & \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 3 \end{cases}$$

- ① Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}) : 3 \leq u_n < 4$
- ② Étudier la monotonie de la suite (u_n) Puis en déduire qu'elle est convergente
- ③ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; (4 - u_{n+1}) \leq \frac{24}{25} (4 - u_n)$
- ④ En déduire : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; (4 - u_n) \leq \left(\frac{24}{25} \right)^n$, puis déterminer la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$
- ⑤ On pose $v_n = \frac{u_n - 4}{u_n - 2} ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Montrer que la suite (v_n) est géométrique

- ⑥ Exprimer v_n et u_n en fonction de n
- ⑦ Déterminer $\lim (u_n)$ à nouveau
- ⑧ Exprimer $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$
- ⑨ En déduire la limite : $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n)$



Exercice 6

Soit $(u_n)_n$ la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}u_n^2 + 2}$.

- ①
 - a Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > 2$.
 - b Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
- ②
 - a Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - 2 = \frac{(u_n - 2)(u_n + 2)}{2(u_{n+1} + 2)}$.

b En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} - 2 \leq \frac{3}{4}(u_n - 2)$.

c En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n - 2 \leq 2 \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

d Prouver que la suite $(u_n)_n$ converge vers un réel que l'on précisera.

③ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n ku_k$.

a Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 \leq S_n - n(n+1) \leq 6n \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right]$.

b Calculer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n^2}$