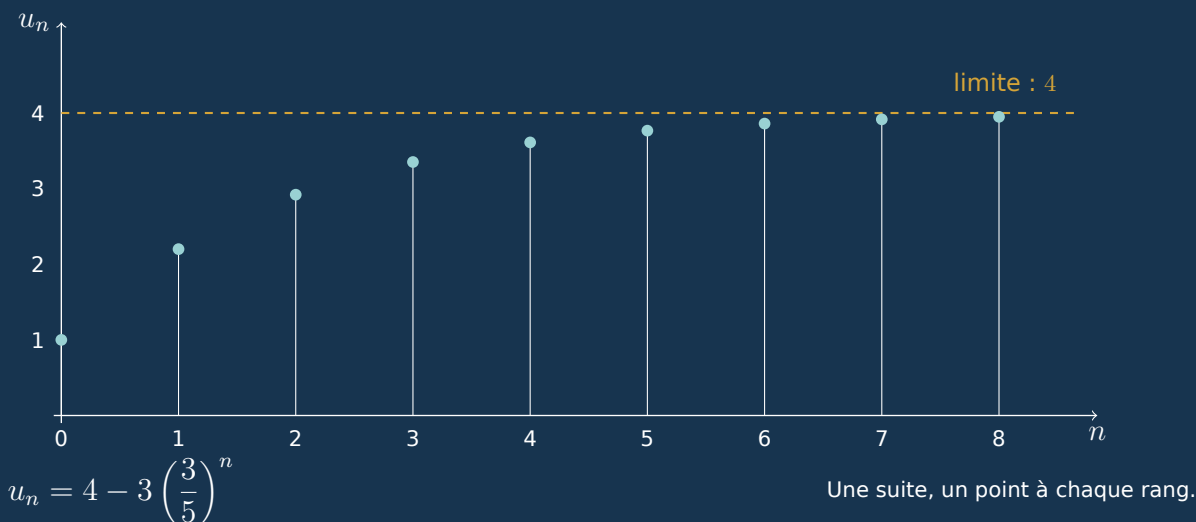


SUITES NUMÉRIQUES

2^e Bac Sciences Physiques

Comprendre · S'entraîner · Progresser

PAS À PAS, VERS LA LIMITE



90

QCM

18

SÉRIES

30

PAGES

Questions progressives · Réponses uniques · Corrigés courts

BIEN UTILISER CE LIVRET

Un parcours en 18 séries

Une seule bonne réponse par question

Choisir A, B, C ou D. Justifier son choix au brouillon, puis consulter la grille page 22 et les corrigés pages 23 à 30.

Trois gestes pour progresser

1. **Chercher.** Faire une série de cinq questions sans regarder les réponses.
2. **Comprendre.** Lire le corrigé même si la réponse est juste.
3. **Reprendre.** Refaire les questions manquées le lendemain.

Sommaire

Série et thème	p.	Série et thème	p.
01 Lire les indices et calculer	4	10 Limites usuelles	13
02 Suites arithmétiques	5	11 Limites géométriques	14
03 Sommes arithmétiques	6	12 Convergence et comparaison	15
04 Suites géométriques	7	13 Récurrences affines	16
05 Sommes géométriques	8	14 Récurrences avec une racine	17
06 Comprendre une récurrence	9	15 Récurrences homographiques	18
07 Étudier la monotonie	10	16 Précision et seuils	19
08 Encadrer une suite	11	17 Sommes télescopiques	20
09 Raisonner par récurrence	12	18 Applications et synthèse	21

Conventions. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Sauf indication contraire, les suites commencent au rang 0 et les limites sont prises quand $n \rightarrow +\infty$.

Les séries « approfondissement » demandent davantage de raisonnement. Questions originales d'entraînement, avec des explications volontairement courtes.

FICHE MÉTHODE

Les réflexes essentiels

1 · Reconnaître une suite

Arithmétique : $u_{n+1} = u_n + r$ et $u_n = u_p + (n - p)r$.

Géométrie : $u_{n+1} = qu_n$ et $u_n = u_p q^{n-p}$.

Du rang p au rang n : $n - p$ passages, mais $n - p + 1$ termes.

2 · Additionner sans oublier un terme

Arithmétique : $\sum_{k=p}^n u_k = (n - p + 1) \frac{u_p + u_n}{2}$.

Géométrie, $q \neq 1$: $\sum_{k=p}^n u_k = u_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$.

Si $q = 1$, la somme vaut $(n - p + 1)u_p$.

3 · Étudier les variations et les bornes

Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$. Si $u_n > 0$, on peut aussi comparer u_{n+1}/u_n à 1.

Pour transmettre un encadrement par récurrence : vérifier le premier rang, puis montrer que l'encadrement au rang n entraîne celui au rang $n + 1$.

4 · Conclure sur une limite

$|q| < 1 \Rightarrow q^n \rightarrow 0$; $q > 1 \Rightarrow q^n \rightarrow +\infty$; $q = 1 \Rightarrow q^n = 1$.

Une suite croissante et majorée, ou décroissante et minorée, converge. Deux bornes de même limite permettent d'utiliser le théorème des gendarmes.

Si $u_{n+1} = f(u_n)$, **prouver d'abord la convergence**. Si f est continue au point limite ℓ , alors $\ell = f(\ell)$.

5 · Transformer ou simplifier

Récurrence affine $u_{n+1} = au_n + b$, $a \neq 1$: poser $v_n = u_n - \ell$, où $\ell = b/(1 - a)$. Alors $v_{n+1} = av_n$.

Somme télescopique : écrire quelques termes et repérer les compensations. Précision : résoudre une inégalité sur $|u_n - \ell|$.

À éviter : confondre u_{n+1} avec $u_n + 1$, oublier le premier rang ou annoncer une limite sans prouver qu'elle existe.

SÉRIE 01 / 18 · BASES

Lire les indices et calculer

Identifier le premier rang et suivre la définition.

Q1 On pose $u_n = 3n - 2$ pour $n \in \mathbb{N}$. Calculer u_4 .

- A.** 14 **B.** 7
C. 12 **D.** 10

Q2 $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + 3$. Quel est u_2 ?

- A.** 8 **B.** 13
C. 11 **D.** 5

Q3 Dans la liste $u_0, u_1, \dots, u_n$, combien de termes figurent ?

- A.** $2n$ **B.** n
C. $n + 1$ **D.** $n - 1$

Q4 Si $u_n = n^2 + 1$, alors u_{n+1} est égal à :

- A.** $n^2 + 2n + 2$ **B.** $n^2 + 2n + 1$
C. $n^2 + 2$ **D.** $2n^2 + 2$

Q5 $u_1 = 5$ et $u_{n+1} = u_n - 2$ pour $n \geq 1$. Quel est u_4 ?

- A.** -1 **B.** 3
C. -3 **D.** 1

Score : _____ / 5

À revoir : _____

SÉRIE 02 / 18 · BASES

Suites arithmétiques

Ajouter une même raison à chaque étape.

Q6 Une suite arithmétique vérifie $u_0 = 4$ et a pour raison 3. Alors :

A. $u_n = 4 \times 3^n$

B. $u_n = 3 + 4n$

C. $u_n = 4 + 3(n - 1)$

D. $u_n = 4 + 3n$

Q7 Une suite arithmétique vérifie $u_3 = 11$ et $u_7 = 23$. Sa raison est :

A. 12

B. 4

C. 3

D. $\frac{23}{11}$

Q8 Une suite arithmétique vérifie $u_1 = 7$ et a pour raison -2 . Quel est u_6 ?

A. 3

B. -1

C. -3

D. -5

Q9 Une suite arithmétique de raison $r < 0$ est :

A. strictement décroissante

B. strictement croissante

C. constante

D. toujours positive

Q10 Pour une suite arithmétique, on sait que $u_5 = 18$. Que vaut $u_4 + u_6$?

A. 9

B. 36

C. 18

D. 54

Score : _____ / 5

À revoir : _____

SÉRIE 03 / 18 · MÉTHODES

Sommes arithmétiques

Compter les termes avant de calculer la somme.

Q11 Calculer $1 + 2 + \dots + 20$.

A. 190

B. 210

C. 420

D. 200

Q12 Pour $u_n = 2 + 3n$, calculer $u_0 + u_1 + \dots + u_{10}$.

A. 176

B. 352

C. 187

D. 170

Q13 Calculer $u_3 + u_4 + \dots + u_8$ pour la suite $u_n = 2n + 1$.

A. 84

B. 96

C. 72

D. 60

Q14 Pour $n \geq 1$, la somme $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$ vaut :

A. $n(n + 1)$

B. $2n^2$

C. n^2

D. $n^2 - 1$

Q15 On note $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$. Pour $n \geq 1$, on a :

A. $u_n = S_n - S_{n+1}$

B. $u_n = \frac{S_n}{n}$

C. $u_n = S_n + S_{n-1}$

D. $u_n = S_n - S_{n-1}$

Score : _____ / 5

À revoir : _____

SÉRIE 04 / 18 · BASES

Suites géométriques

Multiplier par une même raison à chaque étape.

Q16 Une suite géométrique vérifie $u_0 = 3$ et a pour raison 2. Alors :

- A.** $u_n = 3 \times 2^n$
- B.** $u_n = 3 \times 2^{n-1}$
- C.** $u_n = 2 \times 3^n$
- D.** $u_n = 3 + 2n$

Q17 Une suite géométrique à termes strictement positifs vérifie $u_2 = 8$ et $u_4 = 32$. Sa raison est :

- A.** 4
- B.** $\frac{1}{2}$
- C.** -2
- D.** 2

Q18 Une suite géométrique vérifie $u_1 = 81$ et $q = 1/3$. Quel est u_4 ?

- A.** 27
- B.** 3
- C.** 1
- D.** 9

Q19 Une suite géométrique a pour premier terme $u_0 > 0$ et pour raison $0 < q < 1$. Elle est :

- A.** positive et strictement croissante
- B.** constante
- C.** négative et décroissante
- D.** positive et strictement décroissante

Q20 Pour $u_n = 2(-3)^n$, quel est le couple $(u_2; u_3)$?

- A.** $(-18; 54)$
- B.** $(-18; -54)$
- C.** $(18; -54)$
- D.** $(18; 54)$

Score : _____ / 5

À revoir : _____

SÉRIE 05 / 18 · MÉTHODES

Sommes géométriques

Repérer le premier terme, la raison et le nombre de termes.

Q21 Calculer $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^5$.

A. 31

B. 32

C. 63

D. 64

Q22 Pour $n \geq 0$, la somme $\sum_{k=0}^n 3(1/2)^k$ vaut :

A. $6(1 - (1/2)^{n+1})$

B. $6(1 - (1/2)^n)$

C. $3(1 - (1/2)^n)$

D. $3(n + 1)$

Q23 Calculer $2 + 6 + 18 + 54 + 162$.

A. 484

B. 242

C. 162

D. 240

Q24 Pour $u_n = 5$ à tout rang, la somme $u_0 + \dots + u_n$ vaut :

A. 5^n

B. $5(n + 1)$

C. $5n$

D. 0

Q25 Pour $S_n = \sum_{k=0}^n (1/3)^k$, quelle est $\lim S_n$?

A. 3

B. $+\infty$

C. $\frac{3}{2}$

D. 1

Score : _____ / 5

À revoir : _____

SÉRIE 06 / 18 · MÉTHODES

Comprendre une récurrence

Distinguer une formule explicite d'une relation de récurrence.

Q26 Quelle suite est arithmétique de raison 5 ?

A. $u_n = 5^n$

B. $u_{n+1} = 5u_n$ avec $u_0 = 1$

C. $u_n = n^2 + 5$

D. $u_{n+1} = u_n + 5$

Q27 Quelle suite est géométrique de raison $1/2$?

A. $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n$ avec $u_0 = 3$

B. $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}$

C. $u_n = \frac{n}{2}$

D. $u_n = \frac{1}{n+2}$

Q28 $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 3u_n + 2$. Quel est u_3 ?

A. 24

B. 80

C. 8

D. 26

Q29 $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n/(1 + u_n)$. Quel est u_2 ?

A. $\frac{2}{7}$

B. $\frac{2}{5}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{2}{3}$

Q30 Pour $u_n = 2n + 1$, une relation de récurrence avec la bonne initialisation est :

A. $u_0 = 1, \quad u_{n+1} = u_n + 1$

B. $u_0 = 1, \quad u_{n+1} = u_n + 2$

C. $u_0 = 0, \quad u_{n+1} = u_n + 2$

D. $u_0 = 1, \quad u_{n+1} = 2u_n$

Score : _____ / 5

À revoir : _____

SÉRIE 07 / 18 · MÉTHODES

Étudier la monotonie

Choisir entre différence, quotient et fonction associée.

Q31 Pour $u_n = n/(n+1)$, calculer $u_{n+1} - u_n$.

A. $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$

B. $-\frac{1}{(n+1)(n+2)}$

C. $\frac{1}{n+1}$

D. 0

Q32 La suite $u_n = 5 - 2/(n+1)$ est :

A. ni croissante ni décroissante

B. strictement décroissante

C. strictement croissante

D. constante

Q33 La suite $u_n = (-1)^n$ est :

A. strictement décroissante

B. ni croissante ni décroissante

C. constante

D. strictement croissante

Q34 Pour une suite strictement positive, si $u_{n+1}/u_n > 1$ à chaque rang, alors :

A. la suite est strictement décroissante

B. la suite est majorée par 1

C. la suite est strictement croissante

D. la suite converge nécessairement

Q35 Pour $u_n = n^2 - 4n$, la suite est :

A. décroissante jusqu'au rang 2, puis croissante

B. décroissante jusqu'au rang 4, puis croissante

C. croissante à tous les rangs

D. décroissante à tous les rangs

Score : _____ / 5

À revoir : _____

SÉRIE 08 / 18 · MÉTHODES

Encadrer une suite

Donner des bornes valables pour tous les rangs.

Q36 Pour $u_n = n/(n+1)$ et $n \geq 0$, quel encadrement est vrai à tout rang ?

- A.** $0 \leq u_n < 1$ **B.** $1 < u_n < 2$
C. $0 < u_n < 1$ **D.** $-1 < u_n < 0$

Q37 Pour $u_n = 3 + 2/(n+1)$, le plus petit majorant est :

- A.** 5 **B.** 6
C. 3 **D.** 4

Q38 La suite $u_n = (-1)^n + 1/(n+1)$ est bornée. Quel encadrement convient à tous les rangs ?

- A.** $0 \leq u_n \leq 2$ **B.** $1 \leq u_n \leq 2$
C. $-1 \leq u_n \leq 1$ **D.** $-1 < u_n \leq 2$

Q39 $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = (u_n + 3)/2$. Quel intervalle contient tous les termes ?

- A.** $]0; 3[$ **B.** $[-1; 1]$
C. $[3; +\infty[$ **D.** $[0; 3[$

Q40 Quelle suite est à la fois majorée et minorée ?

- A.** $u_n = n$ **B.** $u_n = \frac{2n+1}{n+1}$
C. $u_n = -n$ **D.** $u_n = (-2)^n$

Score : _____ / 5

À revoir : _____

SÉRIE 09 / 18 · RAISONNEMENT

Raisonner par récurrence

Initialiser, transmettre et conclure.

Q41 Pour démontrer une propriété $P(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, quelles étapes suffisent ?

- A.** vérifier seulement $P(0)$ et $P(1)$
- B.** $P(0)$, puis $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ pour tout $n \geq 0$
- C.** supposer $P(n)$ vraie pour tout n
- D.** montrer seulement $P(n+1) \Rightarrow P(n)$

Q42 $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + 1$. Quelle formule est correcte ?

- A.** $u_n = 2^n - 1$
- B.** $u_n = 2^{n+1} - 1$
- C.** $u_n = 3^n$
- D.** $u_n = 2n + 1$

Q43 $u_0 = 1$, $u_{n+1} = (u_n + 4)/3$ et l'on suppose $u_n \leq 2$. Quelle inégalité prouve l'hérédité ?

- A.** $u_{n+1} \leq \frac{2+4}{3} = 2$
- B.** $u_{n+1} = 2$ nécessairement
- C.** $u_{n+1} \geq 2$
- D.** $u_{n+1} \leq u_n - 1$

Q44 Pour $n \geq 0$, quelle inégalité est vraie à tout rang ?

- A.** $2^n \leq n$
- B.** $2^n < n + 1$
- C.** $2^n = n + 1$
- D.** $2^n \geq n + 1$

Q45 Les cinq premiers termes d'une suite sont positifs. Peut-on en déduire que tous ses termes sont positifs ?

- A.** oui, cinq termes suffisent
- B.** non, une justification générale est nécessaire
- C.** oui, si les cinq termes sont distincts
- D.** oui, si le premier terme vaut 1

Score : _____ / 5

À revoir : _____

SÉRIE 10 / 18 · MÉTHODES

Limites usuelles

Comparer les termes dominants et simplifier.

Q46 Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+3}{n+1}$.

A. 3

C. 2

B. 0

D. $+\infty$

Q47 Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n+1}$.

A. 0

C. 2

B. $+\infty$

D. 1

Q48 Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n+1}{n^2+2}$.

A. $\frac{1}{2}$

C. $+\infty$

B. 3

D. 0

Q49 Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2+n} - n)$.

A. $+\infty$

C. 1

B. $\frac{1}{2}$

D. 0

Q50 Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(4 - \frac{3}{n+1}\right)$.

A. 4

C. $+\infty$

B. 1

D. 0

Score : _____ / 5

À revoir : _____

SÉRIE 11 / 18 · MÉTHODES

Limites géométriques

Le comportement dépend de la raison et de son signe.

Q51 Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (3/4)^n$.

A. 0

B. 1

C. $+\infty$

D. $\frac{3}{4}$

Q52 Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1/2)^n$.

A. -1

B. la limite n'existe pas

C. $+\infty$

D. 0

Q53 Quel est le comportement de la suite $u_n = (-2)^n$?

A. elle n'a pas de limite, même infinie

B. elle tend vers $+\infty$

C. elle tend vers $-\infty$

D. elle tend vers 0

Q54 Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} -3 \times 2^n$.

A. $-\infty$

B. $+\infty$

C. 0

D. -3

Q55 Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (4 - 5(4/5)^n)$.

A. 0

B. 4

C. -1

D. 5

Score : _____ / 5

À revoir : _____

SÉRIE 12 / 18 · RAISONNEMENT

Convergence et comparaison

Vérifier les hypothèses avant d'appliquer un théorème.

Q56 Une suite croissante et majorée :

- A.** est nécessairement constante
- B.** tend toujours vers son premier terme
- C.** converge vers un réel
- D.** tend toujours vers $+\infty$

Q57 Quelle suite montre qu'être bornée ne suffit pas pour converger ?

- A.** $u_n = (-1)^n$
- B.** $u_n = n/(n+1)$
- C.** $u_n = 1/(n+1)$
- D.** $u_n = 2$

Q58 Une suite croissante converge vers L . Pour tout n , on a nécessairement :

- A.** $u_n < 0$
- B.** $u_n = L$
- C.** $u_n > L$
- D.** $u_n \leq L$

Q59 Pour $n \geq 1$, calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

- A.** 1
- B.** la limite n'existe pas
- C.** -1
- D.** 0

Q60 Pour $n \geq 1$, on sait que $2 - 1/n \leq u_n \leq 2 + 3/n$. Alors :

- A.** on ne peut pas conclure
- B.** $u_n \rightarrow 2$
- C.** $u_n \rightarrow 3$
- D.** $u_n \rightarrow 0$

Score : _____ / 5

À revoir : _____

SÉRIE 13 / 18 · MÉTHODES

Réurrences affines

Soustraire le point fixe pour obtenir une suite géométrique.

Q61 On a $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$. Quel changement donne une suite géométrique de raison $1/2$?

A. $v_n = u_n - 6$

B. $v_n = 2u_n + 3$

C. $v_n = u_n + 6$

D. $v_n = u_n - 3$

Q62 $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = (u_n + 4)/3$. Quelle formule est correcte ?

A. $u_n = 2 + 5(1/3)^n$

B. $u_n = 2 + 3n$

C. $u_n = 2 + 3(1/3)^n$

D. $u_n = 5(1/3)^n$

Q63 $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + 3$. Quelle est l'expression de u_n ?

A. $2^n + 3$

B. $4 \times 2^n - 3$

C. $4 \times 2^n + 3$

D. $1 + 3n$

Q64 $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = (4u_n + 10)/5$. Quelle est la limite de u_n ?

A. 2

B. 10

C. $+\infty$

D. 5

Q65 Pour $u_{n+1} = au_n + b$, avec $a \neq 1$, le point fixe à soustraire est :

A. $\ell = \frac{b}{a-1}$

B. $\ell = \frac{b}{1-a}$

C. $\ell = a + b$

D. $\ell = \frac{a}{1-b}$

Score : _____ / 5

À revoir : _____

SÉRIE 14 / 18 · RAISONNEMENT

Réurrences avec une racine

Encadrer et prouver la convergence avant de calculer la limite.

Q66 $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$. Quel est u_2 ?

A. $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$

B. $\sqrt{2}$

C. $\sqrt{2 + 2\sqrt{2}}$

D. 2

Q67 $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$. Quel encadrement est valable à tout rang ?

A. $1 \leq u_n < 3$

B. $u_n < 0$

C. $3 \leq u_n \leq 6$

D. $0 \leq u_n \leq 1$

Q68 $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ et l'on sait que $0 \leq u_n < 2$. Quelle est la monotonie de la suite ?

A. strictement croissante

B. constante

C. ni croissante ni décroissante

D. strictement décroissante

Q69 $u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$. On a prouvé que la suite est croissante et que $1 \leq u_n < 3$. Sa limite vaut :

A. 6

B. -2

C. 3

D. 2

Q70 Pour une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, trouver une solution de $\ell = f(\ell)$ suffit-il à prouver sa convergence ?

A. non, il faut d'abord établir la convergence

B. oui, dès qu'un point fixe existe

C. oui, si f est continue

D. oui, si $u_0 \geq 0$

Score : _____ / 5

À revoir : _____

SÉRIE 15 / 18 · APPROFONDISSEMENT

Réurrences homographiques

Transformer un quotient pour révéler une suite géométrique.

Q71 $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n/(1 + u_n)$. Pour $v_n = 1/u_n$, quelle relation obtient-on ?

A. $v_{n+1} = v_n - 1$

B. $v_{n+1} = 2v_n$

C. $v_{n+1} = 1/(1 + v_n)$

D. $v_{n+1} = v_n + 1$

Q72 $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = u_n/(1 + u_n)$. Quelle est l'expression de u_n ?

A. $3(1/4)^n$

B. $\frac{1}{3n+1}$

C. $\frac{3}{3n+1}$

D. $\frac{3}{n+1}$

Q73 $u_0 = 0$, $u_{n+1} = (3u_n + 2)/(u_n + 2)$ et $v_n = (u_n - 2)/(u_n + 1)$. On admet $0 \leq u_n < 2$. Alors :

A. $v_{n+1} = 4v_n$

B. $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$

C. $v_{n+1} = \frac{1}{4}v_n$

D. $v_{n+1} = v_n + 1$

Q74 $u_{n+1} = (2u_n + 1)/(u_n + 2)$. On a établi la convergence vers un réel $\ell \geq 1$. Quelle est cette limite ?

A. 0

B. 1

C. 2

D. -1

Q75 Si $u_{n+1} = (4u_n + 3)/(u_n + 2)$ et $u_n \geq 0$, alors $3 - u_{n+1}$ est égal à :

A. $\frac{3 + u_n}{u_n + 2}$

B. $\frac{3 - u_n}{u_n + 2}$

C. $3 - u_n$

D. $\frac{u_n - 3}{u_n + 2}$

Score : _____ / 5

À revoir : _____

SÉRIE 16 / 18 · MÉTHODES

Précision et seuils

Mesurer l'écart à la limite et chercher le premier rang.

Q76 $u_n = 5 - 3/2^n$. Quel est le plus petit entier $n \geq 0$ tel que $|u_n - 5| \leq 0,01$?

A. 10

B. 8

C. 9

D. 7

Q77 Pour $u_n = 2 + 4(1/3)^n$, quelle est l'erreur exacte par rapport à la limite 2 ?

A. $|u_n - 2| = \frac{2}{3^n}$

B. $|u_n - 2| = 4n$

C. $|u_n - 2| = \frac{4}{3^{n+1}}$

D. $|u_n - 2| = \frac{4}{3^n}$

Q78 On sait que $|u_n - L| \leq 6/2^n$. Quel est le plus petit rang garantissant $|u_n - L| \leq 0,1$ à partir de cette borne ?

A. 5

B. 4

C. 6

D. 7

Q79 $u_n = 3 - 2/(n+1)$. Quel est le plus petit entier n tel que $u_n \geq 2,9$?

A. 20

B. 29

C. 19

D. 18

Q80 On sait que $|u_0 - L| = 9$ et $|u_{n+1} - L| \leq \frac{1}{3}|u_n - L|$. Quelle borne obtient-on après trois étapes ?

A. $|u_3 - L| \leq \frac{1}{9}$

B. $|u_3 - L| \leq 3$

C. $|u_3 - L| \leq 0$

D. $|u_3 - L| \leq \frac{1}{3}$

Score : _____ / 5

À revoir : _____

SÉRIE 17 / 18 · APPROFONDISSEMENT

Sommes télescopiques

Faire apparaître des termes qui se compensent.

Q81 Pour $n \geq 1$, calculer $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$.

A. $\frac{1}{n+1}$

C. $\frac{n}{n+1}$

B. n

D. $\frac{n+1}{n}$

Q82 Pour $n \geq 0$, calculer $\sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right)$.

A. $\frac{n}{n+1}$

C. $\frac{n+1}{n+2}$

B. $\frac{1}{n+2}$

D. 0

Q83 Pour $n \geq 1$, calculer $\sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$.

A. $\sqrt{n}$

C. $\sqrt{n+1}$

B. $n(\sqrt{2} - 1)$

D. $\sqrt{n+1} - 1$

Q84 $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 1$. Quelle est l'expression de u_n ?

A. $u_n = n^2 + 2$

C. $u_n = n^2 + 3$

B. $u_n = n(n+1) + 3$

D. $u_n = 2n + 3$

Q85 Pour toute suite (u_n) , la somme $\sum_{k=0}^n (u_{k+1} - u_k)$ vaut :

A. $u_n - u_1$

C. $u_{n+1} + u_0$

B. $u_n - u_0$

D. $u_{n+1} - u_0$

Score : _____ / 5

À revoir : _____

SÉRIE 18 / 18 · RAISONNEMENT

Applications et synthèse

Traduire une situation par une suite et interpréter le résultat.

Q86 Un appareil vaut initialement 8 000 DH et perd 10 % de sa valeur chaque année. Quelle est sa valeur après deux années ?

A. 6 480 DH

B. 7 920 DH

C. 6 400 DH

D. 7 200 DH

Q87 Un compte contient 5 000 DH au départ. Sans intérêts, on y ajoute 200 DH à la fin de chaque mois. Quel est le solde après six versements ?

A. 7 000 DH

B. 6 000 DH

C. 5 200 DH

D. 6 200 DH

Q88 Une cuve contient u_n litres au début du jour n . On retire 20 % de cette eau, puis on ajoute 30 litres. Quelle relation traduit l'évolution ?

A. $u_{n+1} = 0,8u_n + 30$

B. $u_{n+1} = 0,8(u_n + 30)$

C. $u_{n+1} = u_n - 0,2 + 30$

D. $u_{n+1} = 0,2u_n + 30$

Q89 Une épargne comporte 12 versements : le premier est de 100 DH et chaque suivant dépasse le précédent de 10 DH. Quelle somme totale est versée ?

A. 1 800 DH

B. 1 920 DH

C. 1 320 DH

D. 1 860 DH

Q90 $u_0 = 0$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$ et $S_n = u_0 + \dots + u_n$. Quelle formule est correcte ?

A. $S_n = 2^n - n - 1$

B. $S_n = 2^{n+1} - 2$

C. $S_n = 2^{n+1} - n - 1$

D. $S_n = 2^{n+1} - n - 2$

Score : _____ / 5

À revoir : _____

VÉRIFIER SES CHOIX

Grille des réponses

Une seule réponse correcte pour chaque question. Les justifications se trouvent aux pages suivantes.

Série	Question : réponse				
01	1 : D	2 : B	3 : C	4 : A	5 : A
02	6 : D	7 : C	8 : C	9 : A	10 : B
03	11 : B	12 : C	13 : C	14 : C	15 : D
04	16 : A	17 : D	18 : B	19 : D	20 : C
05	21 : C	22 : A	23 : B	24 : B	25 : C
06	26 : D	27 : A	28 : D	29 : B	30 : B
07	31 : A	32 : C	33 : B	34 : C	35 : A
08	36 : A	37 : A	38 : D	39 : D	40 : B
09	41 : B	42 : B	43 : A	44 : D	45 : B
10	46 : C	47 : B	48 : D	49 : B	50 : A
11	51 : A	52 : D	53 : A	54 : A	55 : B
12	56 : C	57 : A	58 : D	59 : D	60 : B
13	61 : A	62 : C	63 : B	64 : B	65 : B
14	66 : A	67 : A	68 : A	69 : C	70 : A
15	71 : D	72 : C	73 : C	74 : B	75 : B
16	76 : C	77 : D	78 : C	79 : C	80 : D
17	81 : C	82 : C	83 : D	84 : C	85 : D
18	86 : A	87 : D	88 : A	89 : D	90 : D

Transformer une erreur en méthode

Pour chaque question manquée, noter une ligne : « J'ai oublié... » ou « La bonne méthode est... ». Puis refaire le calcul sans regarder le corrigé.

Mon score total : _____ / 90

Date : _____

COMPRENDRE EN QUELQUES LIGNES

Corrigés 1 à 12

Q1 Réponse D. On remplace l'indice n par 4 : $u_4 = 3 \times 4 - 2 = 10$.

Q2 Réponse B. On calcule successivement $u_1 = 2 \times 1 + 3 = 5$, puis $u_2 = 2 \times 5 + 3 = 13$.

Q3 Réponse C. Les indices vont de 0 à n , bornes comprises. Il y a donc $n - 0 + 1 = n + 1$ termes.

Q4 Réponse A. $u_{n+1} = (n + 1)^2 + 1 = n^2 + 2n + 2$. Remplacer n par $n + 1$ est différent d'ajouter 1 à u_n .

Q5 Réponse A. De u_1 à u_4 , il y a trois passages : 5, 3, 1, -1.

Q6 Réponse D. Pour une suite arithmétique indexée à partir de 0, $u_n = u_0 + nr$.

Q7 Réponse C. $u_7 - u_3 = (7 - 3)r$, donc $r = (23 - 11)/4 = 3$.

Q8 Réponse C. Le premier rang est 1 : $u_6 = u_1 + (6 - 1)r = 7 - 10 = -3$.

Q9 Réponse A. $u_{n+1} - u_n = r < 0$ à chaque rang. Les termes diminuent strictement.

Q10 Réponse B. Les termes voisins sont $u_5 - r$ et $u_5 + r$. Leur somme vaut $2u_5 = 36$.

Q11 Réponse B. Il y a 20 termes, de moyenne $(1 + 20)/2$. La somme vaut $20 \times 21/2 = 210$.

Q12 Réponse C. Il y a 11 termes. Les extrémités sont $u_0 = 2$ et $u_{10} = 32$, donc la somme vaut $11(2 + 32)/2 = 187$.

COMPRENDRE EN QUELQUES LIGNES

Corrigés 13 à 24

Q13 Réponse C. Il y a $8 - 3 + 1 = 6$ termes, de premier terme 7 et de dernier terme 17. La somme est $6(7 + 17)/2 = 72$.

Q14 Réponse C. Il y a n nombres impairs, de moyenne $(1 + 2n - 1)/2 = n$. La somme vaut n^2 .

Q15 Réponse D. Dans la différence $S_n - S_{n-1}$, tous les termes de u_0 à u_{n-1} se compensent ; il reste u_n .

Q16 Réponse A. Pour une suite géométrique indexée à partir de 0, $u_n = u_0 q^n$.

Q17 Réponse D. $u_4/u_2 = q^2 = 4$. La raison est positive car tous les termes le sont ; donc $q = 2$.

Q18 Réponse B. $u_4 = u_1 q^{4-1} = 81(1/3)^3 = 3$.

Q19 Réponse D. $u_n = u_0 q^n > 0$ et $u_{n+1} = q u_n < u_n$, puisque $0 < q < 1$.

Q20 Réponse C. $u_2 = 2 \times 9 = 18$ et $u_3 = 2 \times (-27) = -54$. La raison négative alterne les signes.

Q21 Réponse C. Il y a 6 termes. La somme vaut $(2^6 - 1)/(2 - 1) = 63$.

Q22 Réponse A. La formule donne $3[1 - (1/2)^{n+1}]/(1 - 1/2) = 6[1 - (1/2)^{n+1}]$.

Q23 Réponse B. C'est une somme géométrique de premier terme 2, de raison 3 et de 5 termes : $2(3^5 - 1)/(3 - 1) = 242$.

Q24 Réponse B. La raison géométrique est $q = 1$: on additionne directement $n + 1$ termes égaux à 5.

COMPRENDRE EN QUELQUES LIGNES

Corrigés 25 à 36

Q25 Réponse C. $S_n = \frac{3}{2}[1 - (1/3)^{n+1}]$. Comme $(1/3)^{n+1} \rightarrow 0$, la limite vaut $3/2$.

Q26 Réponse D. Le critère est une différence constante : $u_{n+1} - u_n = 5$.

Q27 Réponse A. Chaque terme est la moitié du précédent. Une addition constante caractérise une suite arithmétique, pas cette suite géométrique.

Q28 Réponse D. On calcule $u_1 = 2$, $u_2 = 8$, puis $u_3 = 3 \times 8 + 2 = 26$.

Q29 Réponse B. $u_1 = 2/3$, puis $u_2 = (2/3)/(1 + 2/3) = 2/5$.

Q30 Réponse B. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} - u_n = 2(n+1) + 1 - (2n+1) = 2$.

Q31 Réponse A. Réduire au même dénominateur : $[(n+1)^2 - n(n+2)]/[(n+1)(n+2)] = 1/[(n+1)(n+2)]$.

Q32 Réponse C. $u_{n+1} - u_n = 2/[(n+1)(n+2)] > 0$ pour tout $n \geq 0$.

Q33 Réponse B. Ses termes sont $1, -1, 1, -1, \dots$: ils alternent entre deux valeurs.

Q34 Réponse C. Multiplier l'inégalité par $u_n > 0$ donne $u_{n+1} > u_n$. La positivité est indispensable à cette méthode.

Q35 Réponse A. $u_{n+1} - u_n = 2n - 3$ est négatif pour $n = 0, 1$ et positif pour $n \geq 2$. Le minimum est $u_2 = -4$.

Q36 Réponse A. $u_n = 1 - 1/(n+1)$ et $u_0 = 0$. La borne inférieure doit donc être large.

COMPRENDRE EN QUELQUES LIGNES

Corrigés 37 à 48

Q37 Réponse A. $2/(n+1) \leq 2$, donc $u_n \leq 5$. L'égalité est atteinte au rang 0, ce qui impose le majorant minimal 5.

Q38 Réponse D. On utilise $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ et $0 < 1/(n+1) \leq 1$. La valeur 2 est atteinte en $n = 0$.

Q39 Réponse D. $u_0 = 0$. Si $0 \leq u_n < 3$, alors $0 \leq (u_n + 3)/2 < 3$; l'encadrement se transmet.

Q40 Réponse B. $u_n = 2 - 1/(n+1)$ appartient à $[1; 2[$. Les trois autres suites ne sont pas bornées.

Q41 Réponse B. Une récurrence exige une initialisation et une hérédité. Quelques essais numériques ne démontrent pas une propriété à tous les rangs.

Q42 Réponse B. Au rang 0, la formule vaut 1. Si $u_n = 2^{n+1} - 1$, alors $u_{n+1} = 2(2^{n+1} - 1) + 1 = 2^{n+2} - 1$.

Q43 Réponse A. Le coefficient de u_n est positif : l'inégalité $u_n \leq 2$ garde son sens lorsqu'on ajoute 4 puis divise par 3.

Q44 Réponse D. Au rang 0, on a $1 = 1$. Si $2^n \geq n + 1$, alors $2^{n+1} \geq 2n + 2 \geq n + 2$ puisque $n \geq 0$.

Q45 Réponse B. Un nombre fini de vérifications ne contrôle pas les rangs suivants. Une formule ou une récurrence peut fournir une preuve générale.

Q46 Réponse C. On divise par n : $(2 + 3/n)/(1 + 1/n) \rightarrow 2$.

Q47 Réponse B. Le quotient vaut $n/(1 + 1/n)$. Le dénominateur tend vers 1 et le numérateur vers $+\infty$.

Q48 Réponse D. Après division par n^2 , on obtient $(3/n + 1/n^2)/(1 + 2/n^2) \rightarrow 0$.

COMPRENDRE EN QUELQUES LIGNES

Corrigés 49 à 60

Q49 Réponse B. La conjuguée donne $n/(\sqrt{n^2+n}+n) = 1/(\sqrt{1+1/n}+1) \rightarrow 1/2$.

Q50 Réponse A. Le terme $3/(n+1)$ tend vers 0, donc la suite tend vers 4.

Q51 Réponse A. La raison vérifie $|3/4| < 1$. Ses puissances tendent vers 0.

Q52 Réponse D. Le signe alterne, mais la valeur absolue vaut $(1/2)^n \rightarrow 0$. Donc la suite tend vers 0.

Q53 Réponse A. Les termes pairs valent $4^k \rightarrow +\infty$ et les termes impairs valent $-2 \times 4^k \rightarrow -\infty$. Les comportements sont incompatibles.

Q54 Réponse A. Comme $2 > 1$, on a $2^n \rightarrow +\infty$. Multiplier par -3 donne $-\infty$.

Q55 Réponse B. Le terme géométrique $(4/5)^n$ tend vers 0 ; il reste 4.

Q56 Réponse C. Le théorème de convergence monotone assure une limite finie. Celle-ci est la borne supérieure de l'ensemble des termes.

Q57 Réponse A. $(-1)^n$ reste entre -1 et 1 , mais alterne sans se rapprocher d'une seule valeur. Les autres suites convergent.

Q58 Réponse D. Si un terme dépassait L , tous les termes suivants le dépasseraient aussi, ce qui empêcherait la convergence vers L .

Q59 Réponse D. La valeur absolue vaut $1/n \rightarrow 0$. Les oscillations n'empêchent donc pas la convergence.

Q60 Réponse B. Les deux bornes tendent vers 2. Le théorème des gendarmes donne $u_n \rightarrow 2$.

COMPRENDRE EN QUELQUES LIGNES

Corrigés 61 à 72

Q61 Réponse A. Le point fixe vérifie $\ell = \ell/2 + 3$, donc $\ell = 6$. Alors $u_{n+1} - 6 = (u_n - 6)/2$.

Q62 Réponse C. Poser $v_n = u_n - 2$ donne $v_{n+1} = v_n/3$ et $v_0 = 3$. Ainsi $u_n = 2 + 3(1/3)^n$.

Q63 Réponse B. Le point fixe est -3 . La suite $v_n = u_n + 3$ vérifie $v_{n+1} = 2v_n$ et $v_0 = 4$, d'où la formule.

Q64 Réponse B. On obtient $u_n = 10 - 10(4/5)^n$. Cette formule prouve la convergence vers 10.

Q65 Réponse B. Résoudre $\ell = a\ell + b$ donne $(1 - a)\ell = b$. Avec $v_n = u_n - \ell$, on obtient $v_{n+1} = av_n$.

Q66 Réponse A. On calcule d'abord $u_1 = \sqrt{2}$, puis on le remplace dans la formule : $u_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$.

Q67 Réponse A. Le rang 0 convient. Si $1 \leq u_n < 3$, alors $\sqrt{7} \leq u_{n+1} < 3$, donc l'encadrement se transmet.

Q68 Réponse A. $u_{n+1} - u_n = \frac{(2 - u_n)(u_n + 1)}{\sqrt{2 + u_n} + u_n} > 0$, car tous les facteurs utiles sont positifs.

Q69 Réponse C. La suite converge car elle est croissante et majorée. Sa limite vérifie $\ell = \sqrt{6 + \ell}$, donc $(\ell - 3)(\ell + 2) = 0$. Comme $\ell \geq 1$, on garde 3.

Q70 Réponse A. Contre-exemple : $u_0 = 0$, $u_{n+1} = 1 - u_n$. Les termes alternent entre 0 et 1, bien que $f(x) = 1 - x$ soit continue et ait le point fixe $1/2$.

Q71 Réponse D. Tous les termes sont positifs. En inversant, $1/u_{n+1} = (1 + u_n)/u_n = 1 + 1/u_n$.

Q72 Réponse C. La suite $v_n = 1/u_n$ est arithmétique de raison 1 et de premier terme $1/3$. Donc $v_n = n + 1/3$, puis $u_n = 3/(3n + 1)$.

COMPRENDRE EN QUELQUES LIGNES

Corrigés 73 à 84

Q73 Réponse C. On trouve $u_{n+1} - 2 = (u_n - 2)/(u_n + 2)$ et $u_{n+1} + 1 = 4(u_n + 1)/(u_n + 2)$. Leur quotient donne $v_n/4$.

Q74 Réponse B. La continuité du quotient en $\ell \geq 1$ donne $\ell(\ell + 2) = 2\ell + 1$, donc $\ell^2 = 1$. La condition $\ell \geq 1$ impose $\ell = 1$.

Q75 Réponse B. Réduire au même dénominateur : $[3(u_n + 2) - (4u_n + 3)]/(u_n + 2) = (3 - u_n)/(u_n + 2)$.

Q76 Réponse C. La condition équivaut à $2^n \geq 300$. Or $2^8 = 256 < 300$ et $2^9 = 512 \geq 300$, donc le premier rang est 9.

Q77 Réponse D. On soustrait la limite : $u_n - 2 = 4(1/3)^n > 0$. La valeur absolue est donc $4/3^n$.

Q78 Réponse C. Il suffit que $6/2^n \leq 0,1$, soit $2^n \geq 60$. Comme $2^5 = 32 < 60 \leq 64 = 2^6$, le premier rang garanti est 6.

Q79 Réponse C. $3 - 2/(n + 1) \geq 2,9$ équivaut à $n + 1 \geq 20$, donc $n \geq 19$.

Q80 Réponse D. Les bornes successives sont 9, 3, 1, puis $1/3$. Ainsi $|u_3 - L| \leq 9(1/3)^3 = 1/3$.

Q81 Réponse C. $1/[k(k + 1)] = 1/k - 1/(k + 1)$. La somme se réduit à $1 - 1/(n + 1) = n/(n + 1)$.

Q82 Réponse C. Les termes intermédiaires se compensent. Il reste $1 - 1/(n + 2) = (n + 1)/(n + 2)$.

Q83 Réponse D. Dans $(\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{n + 1} - \sqrt{n})$, il reste $\sqrt{n + 1} - 1$.

Q84 Réponse C. Additionner les différences : $u_n - u_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (2k + 1) = n^2$. Donc $u_n = n^2 + 3$.

COMPRENDRE EN QUELQUES LIGNES

Corrigés 85 à 90

Q85 Réponse D. On développe : $(u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \cdots + (u_{n+1} - u_n)$. Seuls les deux termes extrêmes restent.

Q86 Réponse A. Chaque année, la valeur est multipliée par 0,9. Après deux années : $8\,000(0,9)^2 = 6\,480$ DH.

Q87 Réponse D. Le solde forme une suite arithmétique : $u_6 = 5\,000 + 6 \times 200 = 6\,200$ DH.

Q88 Réponse A. Retirer 20 % laisse 80 %, soit $0,8u_n$ litres. Les 30 litres sont ajoutés ensuite.

Q89 Réponse D. Le douzième versement vaut $100 + 11 \times 10 = 210$ DH. La somme est $12(100 + 210)/2 = 1\,860$ DH.

Q90 Réponse D. On trouve $u_n = 2^n - 1$. Ainsi $S_n = \sum_{k=0}^n 2^k - (n+1) = 2^{n+1} - 1 - (n+1) = 2^{n+1} - n - 2$.

Avant de tourner la page

Je sais...

- ☐ choisir entre une formule explicite et une récurrence ;
- ☐ reconnaître une suite arithmétique ou géométrique ;
- ☐ compter les termes et calculer une somme ;
- ☐ prouver une monotonie et transmettre un encadrement ;
- ☐ justifier la convergence avant de calculer la limite ;
- ☐ transformer une récurrence et déterminer un seuil.

Un calcul juste. Une justification claire. Un progrès à la fois.