REPUBLIQUE DU NIGER
D.R.E.S MARADI
D.D.E.S VILLE DE MARADI

MATHS SERIE D

Dénombrements – Probabilités et Variables aléatoires

Cours et exercices corrigés

$$(1+x)^n = 1 + \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \cdots$$

Rédacteurs : Sani Ali C.E.S Ali Dan Sofo Maradi

Mamadou Tiemogo C.E.S Jinguile

Edition : 2018 Tel : 96290500 - 96286401

Sommaire

Chap. I : Les Dénombrements.....5 - 17

Chap. II : Les Calculs de Probabilités.....18 - 29

Chap. III : Les Variables aléatoires.....30 - 39

Série d'exercices.....40 - 56

Correction des exercices .....57 – 93

Exercices de recherche.....94 - 117

Avant-Propos

Les mathématiques sont un ensemble des connaissances abstraites, résultant des raisonnements logiques appliqués à des objets divers tels que les nombres, les formes, les structures…..

Bien que les résultats mathématiques soient des vérités purement formelles, ils trouvent cependant des applications dans les autres sciences et dans différents domaines de la technique. C'est ainsi qu'Eugene Wigner parle de « la déraisonnable efficacité des mathématiques dans les sciences de la nature ». Le philosophe Alain Badou évoque parfois que ‟ la pensée est asséchée'' devant la complexité des mathématiques mais ‟ quand on arrive à surmonter cet état, il y'a réellement une joie''. Francis Bacon (1561 – 1626) ajoute « si l'esprit d'un homme s'égare, faites-lui étudier les mathématiques car dans les démonstrations, pour peu qu'il s'écarte, il sera obligé de recommencer ».

Le présent document est une ébauche des cours du mathématique niveau terminal des séries scientifiques conformément au programme officiel des enseignements des mathématiques au Niger. Il se veut un document et un support aussi bien pour les élèves que pour les enseignants. Il énonce les cours sur les chapitres dénombrements, les probabilités et variables aléatoires complexes. Diverses activités sont proposées à chaque partie du cours et une panoplie d'exercices d'application corrigés pour consolider les acquis. A la fin une série de cinquante neufs (59) exercices corrigés et soixante-dix exercices de recherche dont des sujets du bac sont proposés.

Dédicace

Nous tenons à adresser nos remerciements à l'inspecteur pédagogique régional de Maradi **Mr. Lasseini Gonga** qui n'a ménagé aucun effort pour la réussite de cet Ouvrage. Il fut pour nous un conseiller, un encadreur et un guide. Il a toujours été présent à nos sollicitations et ses nombreuses remarques nous ont beaucoup illuminées. Nous ne trouvons pas assez des mots pour le remercier.

Dédicace spéciale au **Ministre de la jeunesse et des sports El Hadj Kassoum Maman** Moctar et à son Excellence Le **Ministre d'Etat El. Hadj Bazoum Mohamed**.

Dédicace à Mr. Illo Bija directeur régional des enseignements secondaires de la région de Maradi.

Dédicace aux directeurs et conseillers pédagogiques des mathématiques des DDES1 et DDES2 Maradi

Dédicace à mes autres frères Salissou Ali, Hamza Ali, Sabiou Ali, Oumarou Ali, Achirou Ali, Hamissou Ali, Ibrahim Ali, Souleymane Ali, Sanouchi Ali et Aboubacar Ali.

Dédicace à mes amis Sabiou Bako, Abdoul Karim Dan Lamso, Issaka Ada et Saminou Maman Issa

Dédicace à notre proviseure Mme Emilie Yatta Paul et les censeurs Mai Wassa et Amadou Sanouchi et l'ensemble des professeurs et élèves du C.E.S Ali Dan Sofo Maradi.

Chap. I : Les Dénombrements

Introduction

Dénombrer, c'est compter des objets. Ces objets sont créés à partir d'un ensemble E, formé d'éléments. A partir des éléments de cet ensemble, les objets que l'on peut former sont soit des listes d'éléments de E soit des sous-ensembles de E. A la différence des sous-ensembles, les listes peuvent utiliser plusieurs fois un même élément, et surtout, possèdent un ordre. Dans les exercices, les objets obtenus sont le résultat d'une expérience aléatoire, c'est à dire que le hasard intervient dans leur formation.

Le dénombrement de ces objets, lui, n'a rien d'aléatoire, il est un décompte organisé de tous les résultats possibles d'une telle expérience. Nous allons maintenant définir avec plus de précisions les différents objets que l'on peut rencontrer.

I. Cardinal d'un ensemble fini

a) Définition

On appelle cardinal d'un ensemble fini E le nombre d'éléments de cet ensemble.

Exemple :

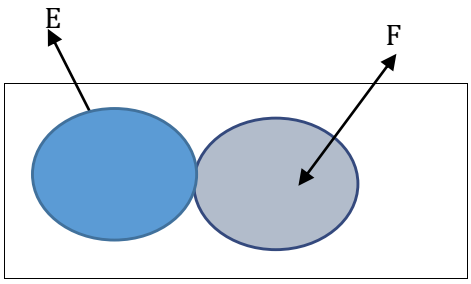
On considère l'ensemble E composé de 4 éléments : E = {a ; b ; c ; d}

Le nombre d'éléments de E est appelé cardinal de E et est noté card E = 4.

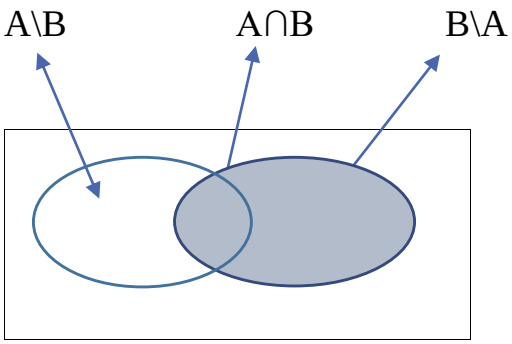
Les éléments de E sont 2 à 2 distincts, sinon card E $\neq$ 4.

b) Propriétés

Soient E et F deux parties d'un ensemble fini.



Si $A \cap B = 0$ alors card (AUB) = card(A) + card(B)



Si $A \cap B \neq 0$

Card(AUB) = Card(A\B) + Card(B\A) + Card(A∩B)

Or Card(A) = Card(A\B) + Card(A∩B)

Card(B) = Card(B\A) + Card(A∩B)

Donc Card(AUB) = Card(A) + Card(B) - Card(A∩B).

A\B : La partie de A ne contenant pas B

B\A : La partie de B ne contenant pas A

<u>Exemple</u> :

Les 50 élèves d'une classe de première A disposent de 2 options sportives, l'athlétisme et le football.27 élèves pratiquent l'athlétisme ; 29 élèves pratiquent le football et 5 élèves ne pratiquent aucun des deux sports.

- Combien d'élèves pratiquent uniquement l'athlétisme ?
- Combien d'élèves pratiquent uniquement le football ?
- Combien d'élèves pratiquent les deux spots ?

<u>Correction :</u>

Choix des données

Soit E l'ensemble des élèves de la classe de première A.

A l'ensemble des élèves pratiquant l'athlétisme.

B l'ensemble des élèves pratiquant le football.

AUB est l'ensemble des élèves pratiquant l'athlétisme ou le football.

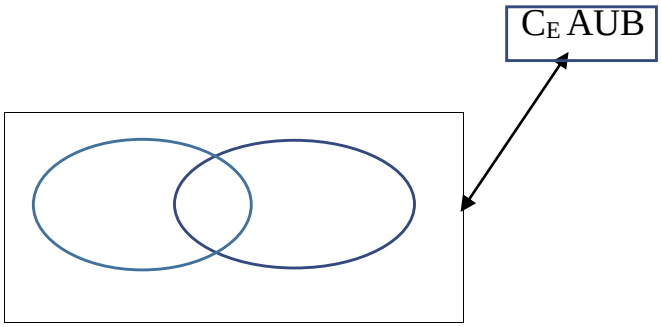
A∩B est l'ensemble des élèves pratiquant l'athlétisme et le football.

A\B est l'ensemble des élèves pratiquant uniquement l'athlétisme.

B\A est l'ensemble des élèves pratiquant uniquement le football.

C_E AUB est l'ensemble des élèves ne pratiquant aucun des deux sports.

Donc card(E)=50 ; card(A)=27 ; card(B)=29 ; card (C_E AUB)=5



Calcul

Card(AUB) = 50 – 5 = 45

Card(A∩B) = Card(A) + Card(B) - Card(AUB) = 27 + 29 – 45 = 11

Card(A\B) = Card(A) - Card(A∩B) = 27 – 11 = 16

Card(B\A) = Card(B) - Card(A∩B) = 29 – 11 = 18

Conclusion :

16 Elèves pratiquent uniquement l'athlétisme.

18 Elèves pratiquent uniquement le football.

11 Elèves pratiquent les deux spots.

18 Dénombrement de liste

1. Produit cartésien

a) Activité 1 :

On donne deux ensembles finis A et B tels que :

A = {a ; b ; c ; d ; e} B = {1 ; 2 ; 3 }

1) Déterminer l'ensemble C des couples (y, x) tels que $x \in$ A et $y \in$ B
2) Combien y a-t-il de couple ?

Solution

1) $C = \{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3),(c,1),(c,2),(c,3),(d,1),$

$(d,2),(d,3),(e,1),(e,2),(e,3)\}$

2) Card(A) = 5 ; card(B) = 3

$\text{Card}\ (A \times B) = 5 \times 3 = 15$

Il y a 15 couples en total

<u>Conclusion</u>

Les couples obtenus constituent les éléments du produit cartésien A x B

b) Définition :

Soit A et B deux ensembles finis non vides.

On appelle produit cartésien de A par B l'ensemble des couples dont le premier terme est élément de A et le second terme est élément de B.

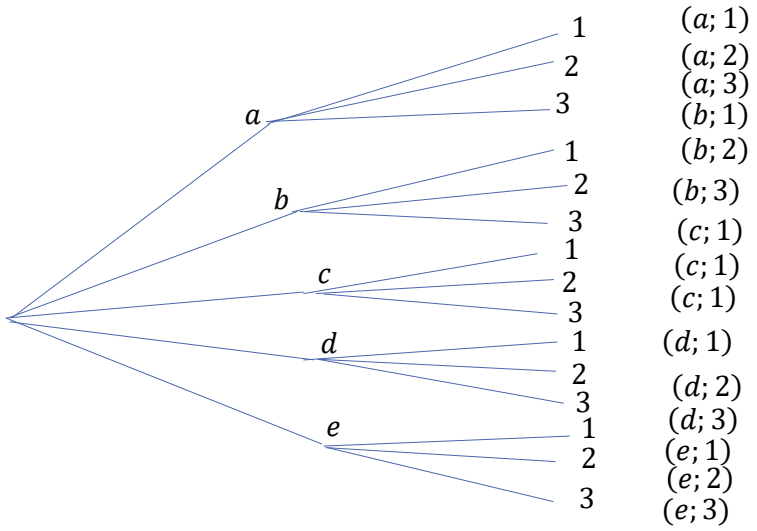
<u>Remarque</u> :

- Les éléments du produit cartésien peuvent être déterminés soit par un tableau à doubles entrée s'il s'agit du produit de deux ensembles ou par un arbre de choix s'il s'agit d'un produit de deux ou plusieurs ensembles.

<u>Tableau à double entrée</u>

A / B	a	b	c	d	e
1	(2 ; 1)	(b ; 1)	(c ; 1)	(d ; 1)	(e ; 1)
2	(a ; 2)	(b ; 2)	(c ; 2)	(d ; 2)	(e ; 2)
3	(a ; 3)	(b ; 3)	(c ; 3)	(d ; 3)	(e ; 3)

<u>Arbre de choix</u> (ou arbre pondéré)



- lorsque $A \neq B$ alors $A \times B \neq B \times A$

c) Propriété

Soit A et B deux ensembles fini non vide tel que

card $A = n$ et card $B = m$ alors card $(A \times B) =$ card $A \times$ card $B = m \times n$

2. P-liste

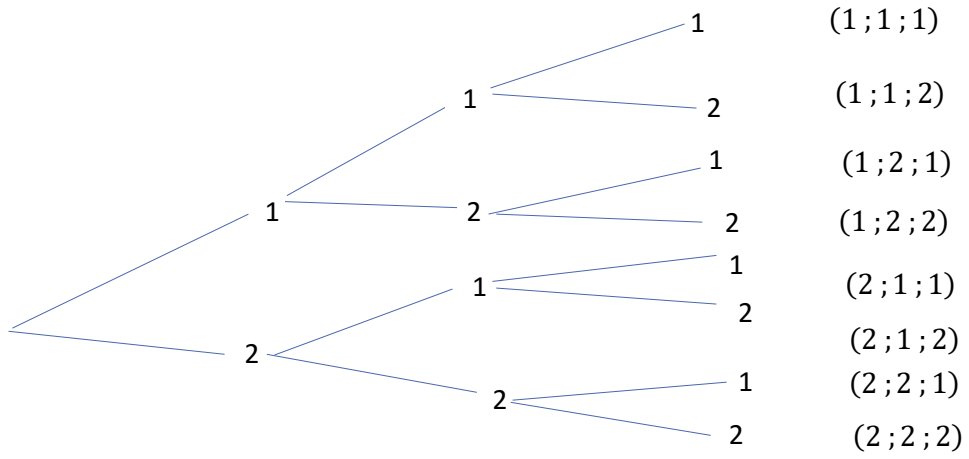
a. Activité 2 :

Soit E un ensemble fini tel que $E = \{1; 2\}$

1) Déterminer les éléments de $E \times E \times E$
2) Que remarque-t-on sur les éléments de $E \times E \times E$?

Restitution :

1) Déterminons les éléments de $E \times E \times E$ à partir d'un arbre pondéré



2) Nombre d'élément de $E \times E \times E$

$\text{Card}E = 2$

$\text{Card}(E \times E \times E) = \text{Card}E \times \text{Card}E \times \text{Card}E = \text{Card}(E^3) = 2^3 = 8$

On remarque que les éléments d'un triplet sont ordonnés et peuvent se répéter.

<u>Conclusion</u> : les éléments de $E \times E \times E$ sont appelés les 3listes d'éléments

b. Définition

Soit E un ensemble fini de n éléments ($n \geq 1$) et P un entier naturel ($P \geq 1$)

On appelle P-liste d'éléments de E, une suite ordonnée de P éléments de E non nécessairement distincts.

c. Nombre de P-liste

Soit E un ensemble fini non vide tel que card E=n et P un entier naturel non nul.

Le nombre de P-liste d'éléments de E est donné par la formule n^p

<u>Exemple</u> :

Soit un ensemble E = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ,5}

1) Combien y a-t-il de 2-listes d'éléments de E ?
2) Combien y a-t-il de 3-listes de E d'éléments de E ?
3) Combien y a-t-il de 4-listes d'éléments de E ?

Résolution

Card (E) = 5

1) Le nombre de 2-listes d'éléments de E : $(\text{card}(E))^2 = (5)^2 = 25$
2) Le nombre de 3-listes d'éléments de E est $(5)^3 = 125$
3) Le nombre de 4-listes d'éléments de E : $(5)^4 = 625$

Remarque :

Dans une épreuve ou il n'y a que deux résultats possibles, le nombre d'application est : 2^n

Exemple :

L'éclairage d'une grande salle est assuré par 5 ampoules commandées par un interrupteur. Combien y a-t-il de manières différentes d'éclairer cette salle par ces 5 ampoules?

Résolution

Soient a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 les 5 ampoules. Posons $A = \{a_1 ; a_2 ; a_3 ; a_4, a_5\}$.

L'état d'une ampoule est exprimé soit allumé que nous désignons par l'état 1, soit éteint que nous notons par 0.

Donc $E = \{0 ; 1\}$.

Le résultat est une 5-liste.On obtient alors $(\text{card}(E))^5 = 2^5$

Privé de l'unique état ou toutes les ampoules sont éteintes ($2^5 - 1$ nombres d'états possibles).

3- Arrangement

1. Activité 3 :

On donne $A = \{0 ,1 ,2 ,3 \}$

a) Déterminer les 2-listes de A
b) Parmi les 2-listes de A donner les couples dont les éléments sont distincts. Combien sont-ils ?

Quelle conclusion tirez-vous ?

Restitution :

a) Déterminons les 2-listes de A

$A_1 = \{(0\,;0); (0\,;1); (0\,;2); (0\,;3); (1\,;0); (1\,;1); (1\,;2); (1\,;3); (2\,;0);$

$(2\,;1)\,; (2\,;2); (2\,;3); (3\,;0); (3\,;1); (3\,;2); (3\,;3)\}$

$\mathrm{Card}(A_1) = 16$

b) Les 2-listes de A dont les éléments sont distincts.

$A_2 = \{(0\,;1); (0\,;2); (0\,;3); (1\,;0); (1\,;2); (1\,;3); (2\,;0); (2\,;1); (2\,;3);$

$(3\,;0); (3\,;1); (3\,;2)\}$

$\mathrm{Card}(A_2) = 12$

<u>Conclusion</u> :

Les éléments de A_2 sont aussi éléments des 2-listes dont les éléments sont distincts. Ils sont appelés des 2-arrangements.

2. Dénombrement d'arrangements

a. Activité 4 :

On tire successivement et sans remise trois objets d'un sac en contenant 10 objets. Combien y a-t-il de tirages possibles?

<u>Résolution</u>

Le nombre de tirage possible est un arrangement de 3 à 3 objets tirés successivement sans remise parmi les 10 objets. On peut expliquer le résultat de la manière suivante :

- Pour tirer le 1er objet on a 10 choix possibles.
- Pour tirer le 2eme objet on a 9 choix possibles
- Pour tirer le 3eme on a 8 choix possibles

Le nombre de tirage possible de ces 3 objets parmi les 10 sera $10 \times 9 \times 8 = 720$ tirages possibles.

b. Définition

Soit E un ensemble fini tel que $\mathrm{card}E = n$ $(n > 1)$.

Soit P un entier naturel $(1 < P \leq n)$, on appelle arrangement de P éléments de E ou (p-arrangement d'éléments de E) toute p-liste d'élément de E deux à deux distincts.

c. Propriété :

Soit E un ensemble fini tel que cardE = n (n > 1).

Soit P un entier naturel (1 < P ≤ n) le nombre de P-arrangements d'éléments de E est: $n(n-1)(n-2)\ldots\ldots\ldots.[(n-(p-1)]$.

Notation :

$A_n^p = n\,(n-1)\,(n-2)\ldots\ldots.[(n-(p-1)]$

Par convention : $A_n^1 = n$ et $A_n^0 = 1$

Exemple :

On donne E = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ,5}

Dénombrer les arrangements de 3 éléments de E.

Solution :

Le nombre d'arrangement de 3 éléments de E est :

$A_5^3 = \mathbf{5}\,(5-1)(5-2) = 5 \times 4 \times 3 = 60$ arrangements d'élémentsde E

3. Dénombrement de permutation

a. Définition :

Soit E un ensemble fini à n éléments $(n > 1)$

On appelle permutation de n éléments de E tout arrangement des n éléments de E.

b. Propriétés :

E étant un ensemble de n éléments $(n > 1)$, le nombre des permutations des éléments de E est : A_n^n

$A_n^n = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots\ldots.\times 2 \times 1 = n!$

Se lit « factorielle n »

Par convention $0! = 1$

Soient n et p des entiers naturels (1 < P ≤ n)

$n! = n(n-1)!$ ou $n! = n(n-1)(n-2)!$

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exercice :

Calculer $5!$; A_7^5 ; A_8^4

Solution :

Calculons

$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

$$A_7^5 = \frac{7!}{(7-5)!} = \frac{7!}{2!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 2520$$

$$A_8^4 = \frac{8!}{(8-4)!} = \frac{8!}{4!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!} = 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1680$$

Exercice d'application :

8 chevaux prennent le départ d'une course. Quel est le nombre d'arrivée possible sans exæquo ?

Résolution :

On constate dans cet exercice qu'il y a la notion d'ordre et sans répétition (exæquo).Il s'agit d'un arrangement de 8 chevaux parmi les 8 chevaux engagés dans la course.

Le résultat est : $8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40320$

4. Dénombrement de combinaisons

a. Activité :

On donne $A = \{0 ,1 ,2 ,3 \}$

Donner toutes les parties de E à :

a) 2 éléments
b) b) 3 éléments
c) c) 4 éléments

Déterminer le nombre d'éléments dans les cas a ; b et c précédents

Restitution :

a) Les parties de E à 2 éléments

$\{0 ; 1\}$; $\{0 ; 2\}$; $\{0 ; 3\}$; $\{1 ; 2\}$; $\{1 ; 3\}$; $\{2 ; 3\}$

b) Les parties de E à 3 éléments

$\{0 ; 1 ; 2\}$; $\{0 ; 1 ; 3\}$; $\{0 ; 2 ; 3\}$; $\{1 ; 2 ; 3\}$

c) Les parties de E à 4 éléments

$\{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$

Conclusion :

Les résultats possibles de cette expérience sont des sous-ensembles de E ou parties de E, possédant 2 éléments, 3 éléments et 4 éléments.

Un sous-ensemble de E comportant 3 éléments est appelé une combinaison de 3 éléments de E. Plus généralement, une partie de E possédant p éléments est appelée une combinaison de p éléments de E.

b. Définition :

E étant un ensemble non vide de n éléments, p un nombre entier naturel tel que $p \leq n$.

On appelle combinaison de p éléments de E toute partie de E ayant p éléments on dit aussi p-combinaison de cet ensemble.

c. Propriétés :

n et p sont des nombres entiers naturels tel que $P \leq n$; E un ensemble de n éléments. Le nombre de p-combinaisons d'éléments de E est : C_n^p

Remarque :

$$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

$$C_n^0 = 1 \quad ; \quad C_n^n = 1 \quad ; \quad C_n^1 = 1 \quad ; \quad C_n^p = C_n^{n-p} \quad ; \quad C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p \; ; \quad C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$$

Exercice :

1) Calculer

C_{10}^3 ; C_{11}^2 ; $C_8^7 + C_5^3$

2) Combien y a-t-il de combinaison à 11 éléments d'un ensemble à 18 éléments ?

Solution :

1) Calculons

$$C_{10}^{3} = \frac{10!}{3!\,(10-3)!} = \frac{10!}{3!\,7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{3!\,7!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 480$$

$$C_{11}^{2} = \frac{11!}{2!\,(11-2)!} = \frac{11!}{2!\,9!} = \frac{11 \times 10 \times 9!}{2!\,9!} = \frac{11 \times 10}{2 \times 1} = 55$$

$$C_{8}^{7} + C_{5}^{3} = \frac{8!}{7!\,1!} + \frac{5!}{3!\,2!} = 8 + 10 = 18$$

2) Nombre de combinaison à 11 éléments d'un ensemble à 18 éléments

$$C_{18}^{11} = \frac{18!}{11!\,(18-11)!} = \frac{18!}{11!\,7!} = 31824$$

19 Triangle de Pascal ou tableau des coefficients binomiaux

1. Triangle de Pascal

n \ P	0	1	2	3	4	5	6	0	1	2	3	4	5	6
0	C_0^0							1						
1	C_1^0	C_1^1						1	1					
2	C_2^0	C_2^1	C_2^2					1	2	1				
3	C_3^0	C_3^1	C_3^2	C_3^3				1	3	3	1			
4	C_4^0	C_4^1	C_4^2	C_4^3	C_4^4			1	4	6	4	1		
5	C_5^0	C_5^1	C_5^2	C_5^3	C_5^4	C_5^5		1	5	10	10	5	1	
6	C_6^0	C_6^1	C_6^2	C_6^3	C_6^4	C_6^5	C_6^6	1	6	15	20	15	6	1

2. Binôme de Newton

Soit a et b deux nombres réels on a :

$$(a+b)^1 = a + b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Théorème :

Pour tous réel a et b et pour tout entier naturel $n \geq 1$. On a :

$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^n a^0 b^n$

Exemple :

Développer $(a+b)^4$; $(x-y)^3$; $(1+2x)^2$

Solution :

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + b^4$

$(x-y)^3 = x^3 + 3x^2(-y) + 3x(-y)^2 + (-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

$(1+2x)^2 = 1 + 2(2x) + (2x)^2 = 1 + 4x + 4x^2$

IV-Tirage et dénombrements

Il existe 3 types de tirages :

a. Tirage successif sans remise

(Tirage avec ordre et sans répétition)

Le principe consiste à tirer p élément d'un ensemble à n éléments.

Le tirage se fait un à un en prenant soin de ne pas remettre l'élément déjà tiré ($P \leq n$). Le nombre de tirage possible est : A_n^p

b. Tirage successif avec remise

(Tirage avec ordre et répétition)

Le principe consiste à tirer p éléments d'un ensemble à n éléments.

Le tirage se fait un à un en remettant dans la boite l'élément déjà tiré avant d'effectuer le prochain tirage ($n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$).

Le nombre de tirage possible est : n^p

c. Tirage simultané

(Tirage sans ordre et sans répétition)

Le principe consiste à tirer p éléments d'un ensemble à n éléments en une seule prise(en même temps) ($p \leq n$)

Le nombre de tirage possible est : C_n^p

Chap. II : Calcul des probabilités

I. vocabulaire

a. Expérience aléatoire

On appelle expérience (ou épreuve) aléatoire, toute expérience dont les résultats ne sont pas connus d'avance. L'ensemble des résultats de cette expérience constitue un ensemble fini.

Exemple :

Le lancer d'un dé cubique à 6 faces numérotées de 1 à 6, le lancer d'une pièce de monnaie, le jeu des cartes, passer un examen……

b. Univers

C'est l'ensemble des résultats d'une expérience aléatoire. On le note soit par **Ω**, ou E, ou U……

Exemple :

Dans le lancer d'un dé $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Passer un examen $\Omega = \{\text{Echec}, \text{succès}\}$

c. Evènement

C'est une partie (sous-ensemble) de l'univers. Un évènement est défini soit par une phrase, soit en extension.

Exemple :

Dans le lancer d'un dé $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Soient les évènements A et B tels que :

A $''$Obtenir un chiffre impair$''$ défini par une phrase.

B $''$ Soit x tel que : $1 \leq x \leq 4$ $''$

Il existe plusieurs types d'évènements :

- Evènement élémentaire

C'est un évènement à un seul élément (singleton).

- Evènement impossible

Ø est l'ensemble vide

- Evènement certain ou plein

C'est l'univers

- Evènements incompatibles

Deux évènements A et B sont incompatibles, s'ils n'ont aucun élément en commun. D'où $A \cap B = \emptyset$

- Evènements contraires

C'est deux évènements qui n'ont rien en commun mais dont leur réunion est égale à l'univers.

On dit que deux évènements A et B sont contraires si et seulement si ;

$A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = \Omega$

- Evènements A et B : $A \cap B$
- Evènements A ou B : $A \cup B$
- Evènements A implique B : $A \subset B$

d. Eventualité

C'est le résultat possible lorsqu'on effectue une expérience aléatoire.

II. Notion de probabilité

Activité

On lance un de parfait et on note le numéro apparu sur la face supérieur.

1- Déterminer l'univers Ω de cette expérience.
2- Déterminer la chance d'apparition de chaque évènement élémentaire.
3- Déterminer la chance d'obtenir un nombre pair.
4- Déterminer la chance d'obtenir une face numérotée 7.

Restitution

1. Déterminons l'univers Ω de cette expérience

$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

2. Déterminons la chance d'apparition de chaque évènement élémentaire

Soit C_i cette chance avec i égal à l'évènement élémentaire. Alors :

$C_1 = \frac{1}{6}$; $C_2 = \frac{1}{6}$; $C_3 = \frac{1}{6}$; $C_4 = \frac{1}{6}$; $C_5 = \frac{1}{6}$ et $C_6 = \frac{1}{6}$

3. Déterminons la chance d'obtenir un nombre pair.

Soit k cet évènement $\Leftrightarrow$ $k = \{2; 4; 6\}$ alors $C_k = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

4. Déterminons la chance d'obtenir une face numérotée 7

Soit C_o cette chance $\Leftrightarrow$ $C_o = \frac{0}{6} = 0$

Conclusion : toutes les chances déterminées définissent les probabilités de leur évènement.

1. Définition

Soit Ω l'univers d'une experience aleatoire.

Une probabilité sur l'univers Ω est une application P de $P_{(\Omega)}$ (ensemble des événements de(Ω) vers [0,1] qui a toute partie A de Ω associe le nombre reel P(A) appelé probabilité de l'évènement A

Remarques

On note P : $p(\Omega) \to [0,1]$

$A \mapsto P(A)$

- $p(\Omega) = 1$, $P(\emptyset) = 0$
- La probabilité d'un évènement quelconque A est toujours comprise entre 0 et 1 c'est-à-dire $0 \leq P(A) \leq 1$
- Soit A un évènement tel que A= $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$

Alors P(A)= P(e_1) + P(e_2) + P(e_3) + P(e_4).

- La probabilité de l'évènement élémentaire $\{e_i\}$ est notée P(e_i)

2. Propriétés

Soit P une probabilité définie sur un univers Ω , A et B deux évènements. On a :

$-$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$-$ Si $A \cap B = \emptyset$ Alors $P(AUB) = P(A) + P(B)$

Soit $\overline{A}$ l'évènement contraire de A : $P(A) + P(\overline{A}) = 1$

Exercice d'application

Soit Ω = {a, b, c, d} l'univers d'une expérience aléatoire

On donne P(a) = P(b) = 2P(c) = P(d)

- Déterminer la probabilité des évènements élémentaire de Ω .
- Calculer la probabilité des évènements.

$A = \{a, c\}$; $B = \{b, c, d\}$; $A \cap B$ et $A \cup B$

Solution

Ω = {a, b, c, d} et P(a) = P(b) = 2P(c) = P(d)

- Déterminons la probabilité des évènements élémentaire de Ω .

$p(\Omega) = p(a) + p(b) + p(c) + p(d) = 1$

Exprimons ces probabilités en fonction de $p(a)$

$$p(a) + p(a) + \frac{1}{2}p(a) + p(a) = 1 \implies \frac{7}{2}p(a) = 1 \implies p(a) = \frac{2}{7}$$

$$p(b) = p(d) = \frac{2}{7} \quad \text{et} \quad p(c) = \frac{1}{7}$$

Calculons la probabilité des évènements

$$A = \{a, c\} \implies p(A) = p(a) + p(c) = \frac{3}{7}$$

$$B = \{b, c, d\} \implies p(B) = p(b) + p(c) + p(d) = \frac{5}{7}$$

$$A \cap B = \{c\} \implies p(A \cap B) = p(c) = \frac{1}{7}$$

$$A \cup B = \{c\} \implies p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{3}{7} + \frac{5}{7} - \frac{1}{7} = 1$$

III. Probabilité uniforme (ou équiprobabilité)

Soit Ω l'univers d'une experience aleatoire, P une probabilité définie sur Ω. On dit qu'il y a equiprobabilité sur Ω lorsque les évènements élémentaire de Ω ont la meme probabilité.

La probabilité ainsi obtenue est dite uniforme. Dans ce cas la probabilité d'un évènement quelconque A de Ω est donnée par la formule :

$$P(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

<u>Remarque :</u>

Les situations d'équiprobabilité sont généralement suggérées par des expressions comme : dé parfaite ; dé non pipé, boules indiscernables, pièce parfaite, cartes bien battues, tirage au hasard……..

<u>Exercice d'application</u>

Une cage contient 5 pigeons dont 3 mâles et 2 femelles, on prend au hasard et successivement deux pigeons de la cage sans remise

1- combien y-a-t-il de prélèvements possibles ?

2- calculer la probabilité des évènements :

A. « on a pris une femelle et un mâle dans cet ordre »

B. « on a pris un pigeon mâle en première position »

C. « on a pris des pigeons de même sexe »

<u>Solution</u> :

Tirage successif et sans remise de deux pigeons de la cage.

Soit Ω l'univers de cette expérience.

1- Nombre de prélèvements possibles.

$A_5^2 = 20 \implies card\Omega = 20$

1- calculons la probabilité des évènements A, B et C :

$$P(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega} = \frac{A_2^1 \times A_3^1}{20} = \frac{6}{20} \implies P(A) = \frac{3}{10}$$

$$\mathrm{P(B)} = \frac{\text{card B}}{\text{card }\Omega} = \frac{A_3^1 \times A_2^1 + A_3^1 \times A_2^1}{20} = \frac{12}{20} \quad \Longrightarrow \quad P(B) = \frac{3}{5}$$

$$\mathrm{P(C)} = \frac{\text{card C}}{\text{card }\Omega} = \frac{A_3^2 + A_2^2}{20} = \frac{8}{20} \quad \Longrightarrow \quad P(C) = \frac{2}{5}$$

IV. Probabilités conditionnelles

Activité

Une classe de terminale est constituée de 52 élèves dont 12 filles et 40 garçons. On demande des volontaires pour faire un groupe de travail. On obtient 8 filles et 28 garçons.

1) Parmi les 52 élèves, on choisit un (une) au hasard, Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

F : « l'élève choisi est une fille ».

V : « l'élevé choisit est un volontaire »

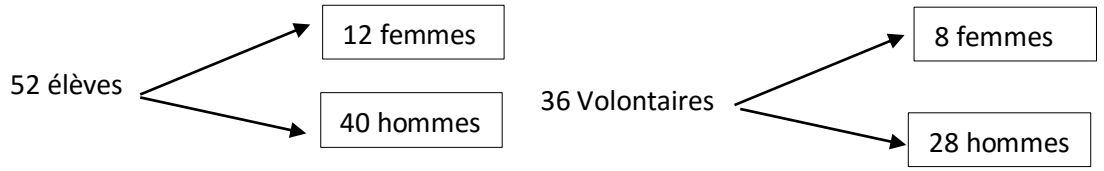
F∩V : « l'élève choisi est une fille volontaire »

2) Parmi les élèves, on choisit, une fille au hasard.

a. Quelle est la probabilité de l'évènement « la fille choisit est volontaire » ?

$b.$ Calculer le rapport : $\dfrac{p(F \cap V)}{p(F)}$

Restitution :



Soit Ω l'univers de cette expérience. $card\Omega = 52$

1) Calculons la probabilité des évènements F, V, et F∩V

$$\mathrm{P(F)} = \frac{12}{52} = \frac{3}{13} \quad ; \quad P(V) = \frac{36}{52} = \frac{9}{13} \quad ; \quad P(F \cap V) = \frac{8}{52} = \frac{2}{13}$$

2) Soit Ω' l'univers de cette nouvelle expérience. $card\Omega' = 12$

a. Calculons la probabilité de l'évènement « la fille choisit est volontaire ».

$$\mathrm{P}\left({}^{V}/_{F}\right) = \frac{\text{card } V_F}{\text{card }\Omega'} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

$b.$ Calculons le rapport : $\dfrac{p(F \cap V)}{p(F)}$

$$\frac{p(F \cap V)}{p(F)} = \frac{\frac{2}{13}}{\frac{3}{13}} = \frac{2}{13} \times \frac{13}{3} = \frac{2}{13}$$

Alors $P\left({}^{V}/_{F}\right) = \frac{p(F \cap V)}{p(F)}$

<u>Conclusion</u> :

Cette dernière probabilité est appelée probabilité conditionnelle, celle d'obtenir un volontaire sachant que c'est une fille.

1. Définition

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire et P une probabilité définie sur Ω. Soit A et B deux évènements définis sur Ω avec P(B) $\neq 0$.

On appelle probabilité de A conditionnée par B (ou probabilité de A sachant B) le réel note $P_B(A)$ ou P (A/B) tel que :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

<u>Remarque</u> :

- Si $P(A) \neq 0$ alors $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$
- $P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B) = P_A(B) \times P(A)$
- $P_A(\emptyset) = \frac{P(A \cap \emptyset)}{P(A)} = \frac{P(\emptyset)}{P(A)} = 0$
- $P_A(\Omega) = \frac{P(A \cap \Omega)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$

<u>Exercice d'application</u>

Une urne contient 5 jetons indiscernables au toucher numérotés de 1 à 5, on tire simultanément et au hasard 2jetons l'urne.

1- Combien y-a-t-il de tirages possibles ?

2- Soient A et B les évènements suivants :

A : « les deux jetons tirés ont des numéros de même parité »

B : « la somme des numéros des deux jetons est strictement supérieur à 5 »

Calculer P(A) et P(B)

3- Calculer la probabilité d'obtenir une somme > à 5 sachant que les jetons ont des numéros de même parité.

<u>Solution</u> :

Tirage simultané et au hasard de 2 jetons.

1) Nombre de tirages possibles

$C_5^2 = 10$

Donc $\Omega = \{\{1,2\},\{1,3\};\{1,4\};\{1,5\};\{2,3\};\{2,4\};\{2,5\};\{3,4\};\{3,5\};\{4,5\}\}$

2) Calculons P(A) et P(B)

$A = \{\{1,3\}\,;\,\{2,4\}\,;\,\{1,5\}\,;\,\{3,5\}\}$

$$p(A) = \frac{C_3^2 + C_2^2}{10} = \frac{3+1}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$B = \{\{1,5\}\,;\,\{2,4\}\,;\,\{2,5\}\,;\,\{3,4\}\,;\,\{3,5\}\,;\,\{4,5\}\}$

$$p(B) = \frac{C_1^1 \times C_1^1 + C_1^1 \times C_2^1 + C_1^1 \times C_2^1 + C_1^1 \times C_1^1}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

3) Calculons la probabilité d'obtenir une somme > à 5 sachant que les jetons ont des numéros de même parité

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{or} \quad P(A \cap B) = \frac{card(A \cap B)}{card\Omega} = \frac{C_1^1 \times C_1^1 + C_1^1 \times C_2^1}{10} = \frac{3}{10}$$

$$P_A(B) = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{4}{10}} = \frac{3}{4} \quad \Longrightarrow \quad P_A(B) = \frac{3}{4}$$

2. Evènements indépendants

a. Activité

On considère l'expérience aléatoire suivante :

On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes et on note sa couleur et sa valeur.

On désigne les évènements suivants :

A : « la carte tirée est un trèfle »

B : « la carte tirée est un roi »

C : « la carte tirée est un as noir »

1) Calculer $P_B(A)$; $P_A(B)$ $P_C(A)$; $P_A(C)$
2) Comparer P(A) et $P_B(A)$; P(B) et $P_A(B)$; $P(A \cap B)$ et P(A) x P(B)
   P(A) et $P_c(A)$; P(C) et $P_A(C)$; $P(A \cap C)$ et P(A) x P(C)

Restitution :

Soit Ω l'univers de cette expérience. $Card\Omega = 32$

$$p(A) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4} \quad ; \quad p(B) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8} \quad ; \quad p(C) = \frac{2}{32} = \frac{1}{16}$$

$$p(A \cap B) = \frac{1}{32} \quad ; \quad p(A \cap C) = \frac{1}{32}$$

1) Calculons $P_B(A)$; $P_A(B)$ $P_C(A)$; $P_A(C)$

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/32}{1/8} = \frac{1}{4} \quad ; \quad P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/32}{1/4} = \frac{1}{8}$$

$$P_C(A) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{1/32}{1/16} = \frac{1}{2} \quad ; \quad P_A(C) = \frac{P(A \cap C)}{P(A)} = \frac{1/32}{8/32} = \frac{1}{8}$$

2) Comparons

$P(A) = P_B(A)$; $P(B) = P_A(B)$; $P(A) \times P(B) = P(A \cap B)$

$P(A) < P_C(A)$; $P(C) < P_A(C)$; $P(A) \times P(C) < P(A \cap C)$

<u>Conclusion</u> : Les évènements A et B sont indépendants car :

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Les évènements A et C ne sont pas indépendants car $P(A \cap C) \neq P(A) \times P(C)$.

b. <u>Définition</u>

On dit que deux évènements A et B d'un univers sont indépendant en probabilité lorsque la probabilité de l'un n'est pas modifiée par la réalisation de l'autre c'est-à-dire

- $P_B(A) = P(A)$ (lorsque $P(B) \neq 0$)
- $P_A(B) = P(B)$ (lorsque $P(A) \neq 0$)
- $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

<u>Remarques</u>

$P(\emptyset \cap A) = P(\emptyset) \times P(A) = 0 \times P(A)$

$\emptyset$ est indépendant de tout élément A

$P(\Omega \cap A) = P(\Omega) \times P(A) = 1 \times P(A)$

Ω est indépendant de tout évènement de A

<u>Exercice d'application</u>

On lance un dé cubique parfait à 6 faces numérotées de 1 à 6, on considère les évènements :

A : « obtenir un chiffre impair »

B : « obtenir un multiple de 3 »

A et B sont-ils indépendants ?

<u>Solution</u> :

Soit Ω l'univers de cette expérience. $Card\Omega = 6$

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad ; \quad P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad ; \quad P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ alors A et B sont indépendants.

<u>Exercice de recherche</u> :

On lance successivement 3 pièces de monnaie parfaites.
On note F le côté Face et P le côté Pile

a. Déterminer l'univers de cette expérience.
b. Les évènements :

A : « la première pièce donne F »
B : « une seule des deux autres pièces donne F »
Sont-ils indépendants ?

3. Produit de deux espaces probabilisés

Activité

On lance successivement un dé parfait d1 tétraédrique dont les faces sont numérotées 0, 1,1,$\sqrt{3}$ puis un dé parfait d2 aussi tétraédrique dont les faces sont marquées $0, 0, 1, \sqrt{3}$.
Les deux jets sont indépendants.

1) soit Ω_1 l'univers des éventualités du dé d1 et Ω_2 l'univers des éventualités du dé d2.

Déterminer la probabilité induite sur chaque univers.

2) a. déterminer toutes les éventualités issues des deux lancers.

Soit Ω l'univers de ces éventualités.
b. déterminer la probabilité de chaque éventualité

3) vérifier que si P_1 est la probabilité d'une éventualité de Ω_1 et P_2 la probabilité d'une éventualité de Ω_2 telles $P_1 = \mathrm{P}(\mathrm{E}_1)$ et $\mathrm{P}_2 = \mathrm{P}(\mathrm{E}_2)$ alors la probabilité de P d'une éventualité de Ω est $\mathrm{P} = \mathrm{P}(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2) = P_1 \times P_2$.

Restitution :

$\Omega_1 = \{ 0 , 1 , \sqrt{3} \} \Longrightarrow \ card\Omega_1 = 4 \quad ; \quad \Omega_2 = \{ 0 , 1 , \sqrt{3} \} \Longrightarrow \ card\Omega_2 = 4$

1) Déterminons la probabilité induite sur Ω_1

$\mathrm{P}(0) = \frac{1}{4} \quad ; \quad P(1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad ; \quad P(\sqrt{3}) = \frac{1}{4}$

Déterminons la probabilité induite sur Ω_2

$\mathrm{P}(0) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad ; \quad P(1) = \frac{1}{4} \quad ; \quad P(\sqrt{3}) = \frac{1}{4}$

2) a. déterminons les éventualités issues des deux lancers.

$\Omega = \{(0,0) ; (0,1) ; (0, \sqrt{3}) ; (1,0) ; (1,1) ; (1, \sqrt{3}) ; (\sqrt{3}, 0) ; (\sqrt{3}, 1) ; (\sqrt{3}, \sqrt{3})\}$

$card\Omega = card\Omega_1 \times card\Omega_2 = 16$

$b.\ \mathrm{P}(0,0) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8} \quad ; \quad \mathrm{P}(0,1) = \frac{1}{16} \quad ; \quad \mathrm{P}(0, \sqrt{3}) = \frac{1}{16} \quad ; \quad \mathrm{P}(1,0) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

$P(1,1) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$; $p(\sqrt{3},0) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$; $P(1,\sqrt{3}) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$

$P(\sqrt{3},\sqrt{3}) = \frac{1}{16}$; $P(\sqrt{3},1) = \frac{1}{16}$

$d1$ \ $d2$	0	1	1	$\sqrt{3}$
0	(0,0)	(1,0)	(1,0)	$(\sqrt{3},0)$
0	(0,0)	(1,0)	(1,0)	$(\sqrt{3},0)$
1	(0,1)	(1,1)	(1,1)	$(\sqrt{3},1)$
$\sqrt{3}$	$(0,\sqrt{3})$	$(1,\sqrt{3})$	$(1,\sqrt{3})$	$(\sqrt{3},\sqrt{3})$

3) Vérification

$P(0,0) = P(0) \times P(0) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$; $P(0,1) = P(0) \times P(1) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

$P(0,\sqrt{3}) = P(0) \times P(\sqrt{3}) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

$P(1,0) = P(1) \times P(0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$

$P(1,1) = P(1) \times P(1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$; $P(1,\sqrt{3}) = P(1) \times P(\sqrt{3}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

$P(\sqrt{3},0) = P(\sqrt{3}) \times P(0) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$; $P(\sqrt{3},1) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

$P(\sqrt{3},\sqrt{3}) = P(\sqrt{3}) \times P(\sqrt{3}) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

<u>Conclusion</u> :

Lorsque deux expériences sont indépendantes, la probabilité des éventualités issues des deux jets est égale au produit des probabilités des éventualités induites sur chaque expérience.

a. <u>définition</u>

On appelle espace probabilisé fini l'ensemble $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ avec Ω l'univers de l'expérience, $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des éventualités de (Ω) et P une probabilité définie sur(Ω).

- Soient $(\Omega_1, \mathcal{P}(\Omega_1), P_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{P}(\Omega_2), P_2)$ deux espaces probabilisés finis auxquels on associe respectivement deux épreuves indépendantes E_1 et E_2. On appelle produit de deux espaces probabilisés finis, l'espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ défini par

- $\Omega = \Omega_1 \text{ x } \Omega_2$
- $\forall\ (E_1, E_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2$ on a $P(E_1, E_2) = P_1(E_1) \times P_2(E_2)$

b. Formule des probabilités totales

Activité

Dans une classe de TD, les trois quarts des élèves travaillent et sérieusement tout au long de l'année scolaire. Un candidat a une probabilité de 0,9 d'obtenir son bac s'il travaille sérieusement pendant l'année scolaire et une probabilité de 0.2 s'il ne travaille pas sérieusement pendant l'année scolaire.

On note les évènements suivants :

T : « le candidat a travaillé sérieusement »

$\bar{T}$: « le candidat n'a pas travaillé sérieusement »

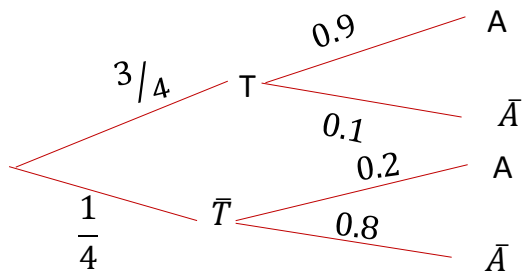
A : « le candidat est admis au bac »

$\bar{A}$: « Le candidat est refusé »

1) Construire l'arbre de probabilité.
2) Déterminer la probabilité pour que le candidat interrogé soit admis.

Restitution :

1) Arbre de choix



2) La probabilité pour que le candidat interrogé soit admis

$P(A) = P(T \cap A) + P(\bar{T} \cap A)$ or $P(T \cap A) = P_T(A) \times P(T)$

$P(\bar{T} \cap A) = P_{\bar{T}}(A) \times P(\bar{T})$ avec $P_{\bar{T}}(A) = 0.2$, $P(T) = \frac{3}{4}$, $P(\bar{T}) = \frac{1}{4}$

$P_T(A) = 0.9$

Alors $P(A) = \frac{3}{4} \times 0.9 + \frac{1}{4} \times 0.2 = \frac{2.7}{4} + \frac{0.2}{4} = \frac{2.9}{4} \iff P(A) = 0.725$

c. Propriété

Soit P une probabilité définie sur un univers Ω, soit A, B, C trois évènements de $\mathcal{P}(\Omega)$ tels que $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$, et $P(C) \neq 0$ alors pour tout évènement D on a :

$P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B) + P(D \cap C)$

$P(D) = P_A(D) \times P(A) + P_B(D) \times P(B) + P_C(D) \text{ x } P(C)$

$P(D) = P_A(D) \times P(A) + P_B(D) \times P(B) + P_C(D) \text{x } P(C)$est la formule de la probabilité totale.

Chap. III : Variables aléatoires

I. Notion de variable aléatoire

1. Activité 1 :

Une urne contient 3 boules rouges et 4 boules blanches. On tire deux boules simultanément et au hasard.
On gagne 100f par boule rouge tirée et on perd 50f par boule blanche tirée.

1. Quels sont les différents types de résultat possibles ?
2. Déterminer les différents gains possibles liés aux types de résultat.
3. Calculer la probabilité de chaque gain.

Restitution :

1. On peut tirer deux boules rouges, ou deux boules blanches ou une boule rouge et une boule blanche.
2. On sait que chaque boule rouge tirée rapporte 100f et chaque boule blanche tirée fait perdre 50f.

Alors lorsqu'on tire :

- Deux boules rouges tirées rapportent un gain de 200f.
- Deux boules blanches tirées rapportent un gain de -100f.
- Une boule rouge et une boule blanche rapportent un gain de 50f.

3. Désignons par X le gain obtenu

Soit Ω l'univers de l'expérience : $card\Omega = c_7^2 = 21$

Pour $X = 200$, la probabilité d'obtenir deux boules rouges est :

$$P_1 = \frac{c_3^2}{c_7^2} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$$

Pour $X = -100$, la probabilité d'obtenir deux boules blanches est :

$$P_2 = \frac{c_4^2}{c_7^2} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$$

Pour $X = 50$, la probabilité d'obtenir une boule rouge et une boule blanche est :

$$P_3 = \frac{c_3^1 c_4^1}{c_7^2} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$$

Conclusion :

- Chaque éventualité correspond à un nombre réel. Ce dernier est appelé variable aléatoire.

- L'ensemble variable aléatoire et sa probabilité définissent la loi de probabilité.

2. Définition :

On appelle variable aléatoire tout nombre réel qui correspond à une éventualité quelconque d'une expérience aléatoire. On la note X.

Remarque :

- L'ensemble des valeurs d'une expérience aléatoire d'un univers Ω est notée :

$X(\Omega) = \{x_1 ; x_2 ; x_3 \dots \dots\}$

- $X = x_i$ désigne l'évènement « X prend la valeur x_i ».
- $X \leq x_i$ désigne l'évènement « X prend une valeur inférieure ou égale à x_i ».

3. Loi de probabilité

On appelle loi de probabilité d'une variable aléatoire X sur un univers Ω, l'application qui à toute valeur x_i prise par X associe $P(X = x_i)$.

Remarque :

- Il est recommandé de représenter une loi de probabilité par un tableau.

x_i	x_1	x_2	…	x_n
$P_i = P(X = x_i)$	P_1	P_2	…	P_n

- Lorsqu'on vient de déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire, il est conseillé de vérifier que : $\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$

Exercice d'application :

Chaque lettre du mot NIGERIENNE est marquée sur un carré de carton. On met ces dix cartons dans un sac et on tire au hasard et simultanément 3 cartons. On suppose qu'il y'a équiprobabilité des tirages. On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de 3 cartons associe le nombre de lettres N marquées.

1. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X.
2. Déterminer la loi de probabilité de X.

Restitution :

Soit Ω l'univers de cette expérience

$Card\Omega = C_{10}^{3} = 120$

1. Déterminons l'ensemble des valeurs prises par X.

$X(\Omega) = \{0\,;1\,;2\,;3\}$

2. Déterminons la loi de probabilité de X.

$$P(X=0) = \frac{C_7^3}{120} = \frac{35}{120}$$

$$P(X=1) = \frac{C_7^2 C_3^1}{120} = \frac{63}{120}$$

$$P(X=2) = \frac{C_7^1 C_3^2}{120} = \frac{21}{120}$$

$$P(X=3) = \frac{C_3^3}{120} = \frac{1}{120}$$

x_i	0	1	2	3
$\mathrm{P}_i = \mathrm{P}(\mathrm{X} = x_i)$	$\frac{35}{120}$	$\frac{63}{120}$	$\frac{21}{120}$	$\frac{1}{120}$

II. Caractéristique d'une variable aléatoire

Activité 2 :

A partir de l'activité précédente calculer :

1. Calculer la somme des $x_i \times P_i$ que nous allons noter par E(X)
2. a) Calculer la somme des ${x_i}^2 \times P_i$

b) Calculer la différence $x_i^2 \times P_i - [E(X)]^2$ que nous allons noter par V(X)

3. Calculer la racine carrée de V(X) que nous allons noter par $\delta(X)$

Restitution :

x_i	-100	50	200
$\mathrm{P}_i = \mathrm{P}(\mathrm{X} = x_i)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

1. Calculons la somme des $x_i \times P_i$ notée E(X)

$$\mathrm{E(X)} = -100 \times \frac{2}{7} + 50 \times \frac{4}{7} + 200 \times \frac{1}{7} = \frac{-200 + 200 + 200}{7} = \frac{200}{7}$$

$$\mathrm{E(X)} = \frac{200}{7}$$

2. a) Calculons la somme des ${x_i}^2 \times P_i$

$$(-100)^2 \times \frac{2}{7} + 50^2 \times \frac{4}{7} + (200)^2 \times \frac{1}{7} = \frac{20000 + 10000 + 40000}{7} = 10000$$

b) Calculons la différence $x_i^2 \times P_i - [E(X)]^2$ que nous allons noter par V(X)

$$\mathrm{V(X)} = x_i^2 \times P_i - [E(X)]^2 = 10000 - \left(\frac{200}{7}\right)^2 = 1000 - \frac{40000}{49}$$

$$V(X) = \frac{490000 - 40000}{49} = \frac{450000}{49} \quad \Longrightarrow \quad V(X) = \frac{450000}{49}$$

3. Calculons la racine carrée de V(X) notée $\delta(X)$

$$\delta(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{450000}{49}} = \frac{300\sqrt{5}}{7} \qquad \Longrightarrow \qquad \delta(X) = \frac{300\sqrt{5}}{7}$$

<u>Conclusion</u> :

Le réel E(X) est appelé espérance mathématique de X.

Le réel V(X) est appelé variance de X.

Le réel $\delta(X)$ est appelé écart-type de X.

1. Espérance mathématique

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, x_2, \dots \dots x_n$ avec les probabilités $P_1, P_2, \dots \dots .. P_n$.

On appelle espérance mathématique de X, le nombre réel noté E(X) tel que :

$$\mathrm{E(X)} = \sum_{i=1}^{n} x_i \times P_i$$

Remarque :

- L'espérance mathématique de X correspond en statistique à la moyenne.
- Si E(X) > 0 on dit que le jeu est favorable au joueur.
- Si E(X) $= 0$ on dit que le jeu est équitable.
- Si E(X) < 0 on dit que le jeu est défavorable au joueur.

2. Variance et écart-type

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, x_2, \dots \dots x_n$ avec les probabilités respectives $P_1, P_2, \dots \dots .. P_n$.

- On appelle variance de X, le nombre réel positif noté V(X) tel que :

$$\mathrm{V(X)} = \sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 \times P_i - [E(X)]^2$$

- On appelle écart-type de X, le nombre réel positif noté $\delta(X)$ tel que :

$$\delta(X) = \sqrt{V(X)}$$

<u>Exercice d'application</u> :

Reprendre l'exercice précèdent et calculer l'Esperance mathématique, la variance et l'écart-type de X.

<u>Résolution</u> :

x_i	0	1	2	3
$\mathrm{P}_i = \mathrm{P}(\mathrm{X} = x_i)$	$\frac{35}{120}$	$\frac{63}{120}$	$\frac{21}{120}$	$\frac{1}{120}$

Calculons l'Esperance mathématique

$$\mathrm{E(X)} = 0 \times \frac{35}{120} + 1 \times \frac{63}{120} + 2 \times \frac{21}{120} + 3 \times \frac{1}{120} = \frac{63 + 42 + 3}{120} = \frac{108}{120} = \frac{9}{10}$$

Calculons la variance

$$\mathrm{V(X)} = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 \times P_i - [E(X)]^2$$

$$V(X) = 0^2 \times \frac{35}{120} + 1^2 \times \frac{63}{120} + 2^2 \times \frac{21}{120} + 3^2 \times \frac{1}{120} - \left[\frac{9}{10}\right]^2 = \frac{156}{120} - \frac{81}{100}$$

$$V(X) = \frac{130 - 81}{100} \quad \Longrightarrow \quad V(X) = \frac{49}{100}$$

Calculons l'écart-type de X

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{49}{100}} = \frac{7}{10} \qquad \Longrightarrow \qquad \delta(X) = \frac{7}{10}$$

III. Fonction de répartition

<u>Définition</u> :

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω de loi de probabilité :

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$\mathrm{P}_i = \mathrm{P}(\mathrm{X} = x_i)$	P_1	P_2	...	P_n

On appelle fonction de répartition de X, l'application F de $\mathbb{R}$ vers $[0\ ,1]$ définie par : $\mathrm{F(X)} = \mathrm{P}(\mathrm{X} \leq x)$ telle que :

- Pour $x < x_1$; $\mathrm{F(X)} = 0$
- Pour $x_1 \leq x < x_2$; $\mathrm{F(X)} = P_1$
- Pour $x_2 \leq x < x_3$; $\mathrm{F(X)} = P_1 + P_2$
- Pour $x_3 \leq x < x_4$; $\mathrm{F(X)} = P_1 + P_2 + P_3$
- Pour $x_n \leq x$; $\mathrm{F(X)} = P_1 + P_2 + P_3 + \cdots \ldots \ldots .. + P_n = 1$

<u>Exemple</u> :

Reprendre la première activité pour définir et construire la fonction de répartition F de X.

Solution :

x_i	-100	50	200
$\mathrm{P}_i = \mathrm{P}(\mathrm{X} = x_i)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

Définissons et construisons la fonction de répartition

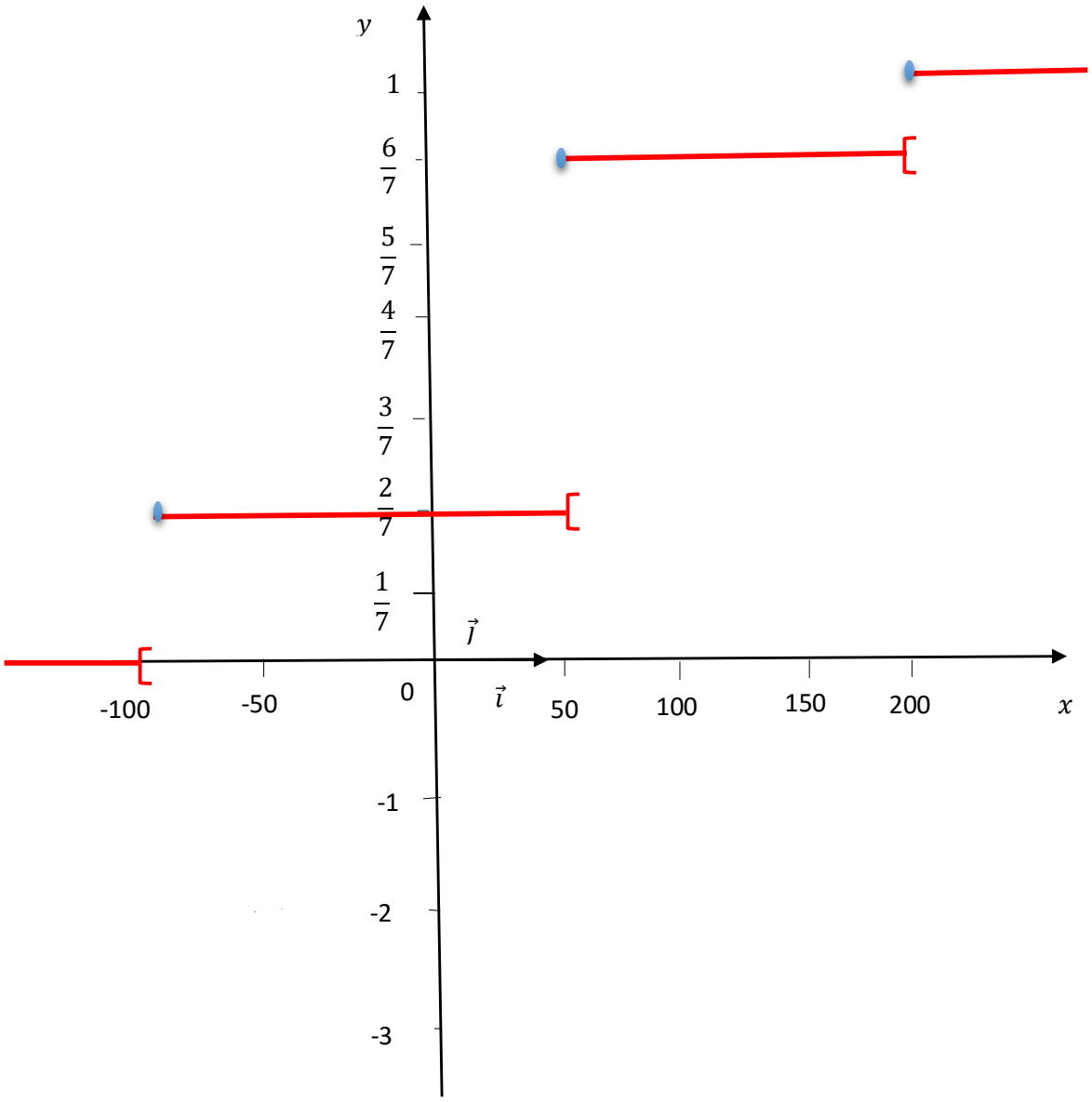
Soit F : $\begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow [0\,;1] \\ X \rightarrow F(X) = P(X \leq x_i) \end{cases}$ telle que :

$\forall x \in]-\infty\,;-100[\,;F(X) = 0$

$\forall x \in]-100\,;50[\ ;\ F(X) = \frac{2}{7}$

$\forall x \in]50\,;200[\ ;\ F(X) = \frac{2}{7} + \frac{4}{7} = \frac{6}{7}$

$\forall x \in]200\,;+\infty[\ ;\ F(X) = \frac{2}{7} + \frac{4}{7} + \frac{1}{7} = 1$



Remarque :

- F est une fonction croissante en escalier.
- La représentation graphique de F correspond en statistique à la courbe des fréquences cumulées croissantes.

IV. Loi binomiale

Activité :

On lance une pièce de monnaie parfaite à deux faces notée « pile et face »

1. Déterminer le nombre des résultats possibles.
2. On lance cette pièce de monnaie trois fois de suite et on note X la variable aléatoire égale aux nombres de face obtenue à l'issu des trois lancers.

Déterminer la loi de probabilité, l'Esperance mathématique, la variance et l'écart-type de X.

Vérifier les résultats précédents à l'aide des formules :

$\mathrm{P}(\mathrm{X}=k)=C_3^k p^k(1-p)^{3-k}$ Avec p la probabilité d'obtenir face.

$\mathrm{E}(\mathrm{X})=3p$; $V(X)=3p(1-p)$.

<u>Restitution</u> :

On lance une pièce de monnaie parfaite à deux faces notée « pile et face »

1. Déterminons le nombre des résultats possibles.

Il y'a deux résultats possibles « pile et face »

2. On lance cette pièce de monnaie trois fois de suite.

Les résultats possibles sont :

$\Omega=\{(\mathrm{P},\mathrm{P},\mathrm{P});(\mathrm{P},\mathrm{P},\mathrm{F});(\mathrm{P},\mathrm{F},\mathrm{P});(\mathrm{P},\mathrm{F},\mathrm{F});(\mathrm{F},\mathrm{F},\mathrm{F});(\mathrm{F},\mathrm{F},\mathrm{P});(\mathrm{F},\mathrm{P},\mathrm{F});(\mathrm{F},\mathrm{P},\mathrm{P})\}$

$Card\Omega=8$

Déterminons la loi de probabilité

$X(\Omega)=\{0\,;1\,;2\,;3\}$

$\mathrm{P}(\mathrm{X}=0)=\frac{1}{8}$; $\mathrm{P}(\mathrm{X}=1)=\frac{3}{8}$; $\mathrm{P}(\mathrm{X}=2)=\frac{3}{8}$; $\mathrm{P}(\mathrm{X}=3)=\frac{1}{8}$

x_i	0	1	2	3
$\mathrm{P}_i=\mathrm{P}(\mathrm{X}=x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Calculons l'Esperance mathématique

$$\mathrm{E}(\mathrm{X})=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}=\frac{0+3+6+3}{8}=\frac{12}{8}\implies \mathrm{E}(\mathrm{X})=\frac{3}{2}$$

Calculons la variance

$$\mathrm{V}(\mathrm{X})=0^2\times\frac{1}{8}+1^2\times\frac{3}{8}+2^2\times\frac{3}{8}+3^2\times\frac{1}{8}-\left[\frac{3}{2}\right]^2=\frac{24}{8}-\frac{9}{4}\implies \mathrm{V}(\mathrm{X})=\frac{3}{4}$$

Calculons l'écart-type de X

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \delta(X) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Vérifions les résultats précédents à l'aide des formules :

$$\mathrm{P(X = k)} = C_3^k (p)^k (1-p)^{3-k}$$

$\mathrm{E(X)} = 3\mathrm{p}$; $\mathrm{V(X)} = 3\mathrm{p}(1-p)$. Sachant que $\mathrm{k} = \{0, 1, 2, 3\}$ et $\mathrm{p} = \frac{1}{2}$

Donc pour la loi de probabilité on a :

$$P(X=0) = C_3^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(1-\frac{1}{2}\right)^3 = C_3^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$\mathrm{P(X = 1)} = C_3^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(1-\frac{1}{2}\right)^2 = C_3^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$$

$$\mathrm{P(X = 2)} = C_3^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(1-\frac{1}{2}\right)^1 = C_3^1 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{8}$$

$$\mathrm{P(X = 3)} = C_3^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(1-\frac{1}{2}\right)^0 = C_3^0 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{8}$$

Pour les caractéristiques :

$$\mathrm{E(X)} = 3\mathrm{p} = 3 \times \frac{1}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad E(X) = \frac{3}{2}$$

$$\mathrm{V(X)} = 3\mathrm{p}(1-p) = 3 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \qquad \Longrightarrow \qquad V(X) = \frac{3}{4}$$

<u>Conclusion</u> :

- L'expérience qui vient d'être réalisée ne comporte que deux résultats possibles. Elle est appelée expérience de Bernoulli (ou épreuve de Bernoulli)
- La loi de probabilité dans une expérience de Bernoulli est appelée Loi binomiale.

1. Epreuve de Bernoulli

On appelle Epreuve de Bernoulli, toute épreuve (ou expérience) ne comportant que deux types de résultats possibles qu'on appelle succès et échec de probabilité respective p et $q = 1 - p$.

<u>Remarque</u> :

Lorsqu'on effectue plusieurs épreuves de Bernoulli, on réalise ce qu'on appelle schéma de Bernoulli.

2. Loi binomiale

a. Définition :

Soit Ω l'univers d'une épreuve aléatoire admettant deux éventualités appelées succès et échec. On effectue n fois cette épreuve, les résultats étant indépendants les uns des autres.

On appelle loi binomiale, toute loi de probabilité de la variable aléatoire X qui associe le nombre k succès obtenus à l'issu des n épreuves.

Ainsi on a : $\mathrm{p} = \mathrm{P}\ (\text{succès})$ et $\mathrm{q} = \mathrm{Q}\ (\text{échec}) = 1 - p$

- L'Esperance mathématique $\mathrm{E(X)} = \mathrm{np}$
- La variance $\mathrm{V(X)} = \mathrm{np}(1 - p) = npq$
- L'écart type $\sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{\mathrm{V(X)}}$

Série d'exercices

Exercice 1

Une enquête sur la lecture des trois romans A ; B et C de la ville de Maradi a donné les résultats suivants.
Sur 1500 élèves du C.E.S Ali Dan Sofo interrogés :
900 lisent A ; 750 lisent B ; 750 lisent C ; 300 lisent B et C ; 450 lisent C et A ; 450 lisent A et B ; 100 lisent A ; B et C.

1) Combien d'élèves lisent deux romans et deux seulement ?
2) Combien d'élèves ne lisent aucun de ces romans ?

Exercice 2

E ; F et G sont les ensembles tels que :
$E = \{1 ; 2 ; 3\}$; $F = \{a ; b ; c ; d\}$; $G = \{m ; n\}$
Dénombrer les éléments du produit cartésien $E \times F \times G$

Exercice 3

Deux personnes A et B participent à un vote. Chacune d'elles à l'obligation de voter une seule fois en choisissant « oui » ou « non » ou « nul ».
Déterminer le nombre de résultat de vote possible.

Exercice 4

1) Dénombrer les numéros de trois chiffres qu'on peut avoir avec les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
2) Combien de nombres de trois chiffres peut-on former avec les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ?
3) Dénombrer les mots de huit lettres distinctes commençant par une voyelle et finissant par une consonne qu'on peut écrire avec les lettres du mot « équation ».

Exercice 5

1) Déterminer le nombre de permutations des lettres du mot : « AMOUR».
2) Déterminer le nombre de permutations des lettres du mot :

a) « ELEVE».
b) « MATHEMATIQUES».

Exercice 6

Combien de menus différents peut-on composer si on a le choix entre 3 entrées, 2 plats et 4 desserts ?

Exercice 7

Une femme a dans sa garde-robe 4 jupes, 5 chemisiers et 3 vestes. Elle choisit au hasard une jupe, un chemisier et une veste. De combien de façons différentes peut-elle s'habiller ?

Exercice 8

Deux équipes de hockeys de 12 et 15 joueurs échangent une poignée de main à la fin d'un match : chaque joueur d'une équipe serre la main de chaque joueur de l'autre équipe. Combien de poignées de main ont été échangées ?

Exercice 9

Un questionnaire à choix multiples, autorisant une seule réponse par question, comprend 15 questions. Pour chaque question, on propose 4 réponses possibles. De combien de façons peut-on répondre à ce questionnaire ?

Exercice 10

Raymond Queneau a écrit un ouvrage intitulé Cent mille milliards de poèmes. Il est composé de 10 pages contenant chacune 14 vers. Le lecteur peut composer son propre poème de 14 vers en prenant le premier vers de l'une des 10 pages puis le deuxième vers de l'une des 10 pages et ainsi de suite jusqu'au quatorzième vers. Justifier le titre de l'ouvrage.

Exercice 11

En informatique, on utilise le système binaire pour coder les caractères. Un bit (binary digit : chiffre binaire) est un élément qui prend la valeur 0 ou la valeur 1. Avec 8 chiffres binaires (un octet), combien de caractères peut-on coder ?

Exercice 12

Combien peut-on former de numéros de téléphone à 8 chiffres ?

Combien peut-on former de numéros de téléphone à 8 chiffres ne comportant pas le chiffre 0 ?

Exercice 13

A l'occasion d'une compétition sportive groupant 18 athlètes, on attribue une médaille d'or, une d'argent, une de bronze. Combien y-a-t-il de distributions possibles (avant la compétition, bien sûr…) ?

Exercice 14

Un groupe d'élèves de terminale constitue le bureau de l'association " Bal des Termes : le succès ". Ce bureau est composé d'un président, d'un secrétaire et d'un trésorier. Combien y a-t-il de bureaux possibles ? (il y a 24 élèves dans la classe)

Exercice 15

Six personnes choisissent mentalement un nombre entier compris entre 1 et 6.

1) Combien de résultats peut-on obtenir ?

2) Combien de résultats ne comportant pas deux fois le même nombre peut-on obtenir ?

Exercice 16

Soit A l'ensemble des nombres de quatre chiffres, le premier étant non nul.

1) Calculer le nombre d'éléments de A.

2) Dénombrer les éléments de A :

a) composés de quatre chiffres distincts

b) composés d'au moins deux chiffres identiques

c) composés de quatre chiffres distincts autres que 5 et 7

Exercice 17

Un clavier de 9 touches permet de composer le code d'entrée d'un immeuble, à l'aide d'une lettre suivie d'un nombre de 3 chiffres distincts ou non.

1) Combien de codes différents peut-on former ?

2) Combien y a-t-il de codes sans le chiffre 1 ?

3) Combien y a-t-il de codes comportant au moins une fois le chiffre 1 ?

4) Combien y a-t-il de codes comportant des chiffres distincts ?

5) Combien y a-t-il de codes comportant au moins deux chiffres identiques ?

1 2 3
4 5 6
A B C

Exercice 18

Le groupe des élèves de Terminale doit s'inscrire au concours par Minitel. Il faut établir une liste de passage. Combien y a-t-il de manières de constituer cette liste ? (il y a 24 élèves dans la classe)

Exercice 19

Les nombres 5, -1 et 3 constituent la solution d'un système de trois équations à trois inconnues.

Donner tous les triplets différents qui peuvent être la solution de ce système

Exercice 20

Combien y-a-t-il d'anagrammes du mot MATH ?

Exercice 21

1) Dénombrer les anagrammes du mot PATRICE

2) Dans chacun des cas suivants, dénombrer les anagrammes du mot PATRICE :

a) commençant et finissant par une consonne ;

b) commençant et finissant par une voyelle ;

c) commençant par une consonne et finissant par une voyelle

d) commençant par une voyelle et finissant par une consonne

Exercice 22

Combien y-a-t-il d'anagrammes du mot TABLEAU ?

Exercice 23

1) Combien peut-on réaliser de mots de n lettres comportant k lettres se répétant p1, p2,....pk fois?

2) Quel est le nombre d'anagrammes du mot « ANAGRAMME » ?

Exercice 24

Dénombrer toutes les anagrammes possibles du mot PRISÉE

1) En tenant compte de l'accent

2) En ne tenant pas compte de l'accent sur le « e »

Exercice 25

Un groupe de 3 élèves de Terminale doit aller chercher des livres au CDI. De combien de manières peut-on former ce groupe ? (il y a 24 élèves dans la classe)

Exercice 26

Un tournoi sportif compte 8 équipes engagées. Chaque équipe doit rencontrer toutes les autres une seule fois .Combien doit-on organiser de matchs ?

Exercice 27

Au loto, il y a 49 numéros. Une grille de loto est composée de 6 de ces numéros. Quel est le nombre de grilles différentes ?

Exercice 28

De combien de façons peut-on choisir 3 femmes et 2 hommes parmi 10 femmes et 5 hommes ?

Exercice 29

Dans une classe de 32 élèves, on compte 19 garçons et 13 filles. On doit élire deux délégués

1) Quel est le nombre de choix possibles ?

2) Quel est le nombre de choix si l'on impose un garçon et fille

3) Quel est le nombre de choix si l'on impose 2 garçons ?

Exercice 30

Christian et Claude font partie d'un club de 18 personnes. On doit former un groupe constitué de cinq d'entre elles pour représenter le club à un spectacle.

1) Combien de groupes de 5 personnes peut-on constituer ?

2) Dans combien de ces groupes peut figurer Christian ?

3) Christian et Claude ne pouvant se supporter, combien de groupes de 5 personnes peut-on constituer de telle façon que Christian et Claude ne se retrouvent pas ensemble ?

Exercice 31

Au service du personnel, on compte 12 célibataires parmi les 30 employés. On désire faire un sondage : pour cela on choisit un échantillon de quatre personnes dans ce service.

1) Quel est le nombre d'échantillons différents possibles ?

2) Quel est le nombre d'échantillons ne contenant aucun célibataire ?

3) Quel est le nombre d'échantillons contenant au moins un célibataire ?

Exercice 32

On constitue un groupe de 6 personnes choisies parmi 25 femmes et 32 hommes

1) De combien de façons peut-on constituer ce groupe de 6 personnes ?

2) Dans chacun des cas suivants, de combien de façons peut-on constituer ce groupe avec :

a) uniquement des hommes ;

b) des personnes de même sexe ;

c) au moins une femme et au moins un homme

Exercice 33

On extrait simultanément 5 cartes d'un jeu de 32. Cet ensemble de 5 cartes est appelé une "main"

1) Combien y a-t-il de mains différentes possibles ?

2) Dénombrer les mains de 5 cartes contenant :

a) un carré

b) deux paires distinctes

c) un full (trois cartes de même valeur, et deux autres de même valeurs.

Exemple : 3 rois et 2 as)

d) un brelan (trois cartes de même valeur, sans full ni carré

e) une quinte (5 cartes de même couleur, se suivant dans l'ordre croissant)

Exercice 34

Un portemanteau comporte 5 patères alignées. Combien a-t-on de dispositions distinctes (sans mettre deux manteaux l'un sur l'autre) :

a) pour 3 manteaux sur ces 5 patères ?

b) pour 5 manteaux ?

c) pour 6 manteaux ?

Exercice 35

Quatre garçons et deux filles s'assoient sur un banc.

1) Quel est le nombre de dispositions possibles ?

2) Même question si les garçons sont d'un côté et les filles de l'autre.

3) Même question si chaque fille est intercalée entre deux garçons.

4) Même question si les filles veulent rester l'une à côté de l'autre

Exercice 36

Dans chacune des situations décrites ci-dessous, énoncer l'événement contraire de l'événement donné.

1) Dans une classe, on choisit deux élèves au hasard. A : « Les deux élèves sont des filles ».
2) Dans un groupe de suisses et de belges, on discute avec une personne. B : « La personne est un homme belge ».
3) Au restaurant, Luc prend un plat et un dessert. C : « Luc prend une viande et une glace ».
4) A une loterie, Elise achète 3 billets.

D : « L'un des billets au moins est gagnant », E : « Deux billets au maximum sont gagnants.

Exercice 37

Une urne contient des boules blanches, noires et rouges. On tire une boule de l'urne. On note :

A : « Tirer une boule blanche ».

B : « Tirer une boule ni blanche ni rouge ».

C : Tirer une boule noire ou une boule rouge ».

1) A et B sont-ils incompatibles ?

2) B et C sont-ils incompatibles ?

3) Traduire par une phrase ne comportant pas de négation $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

Exercice 38

Lors d'un jet de deux dés cubiques, on s'intéresse aux événements suivants :

A : « La somme obtenue est au moins égale à 5 ».

B : « La somme obtenue est au plus égale à 5 ».

C : « La somme obtenue est strictement inférieure à 3 ».

1) A et B sont-ils contraires ?

2) $\overline{B}$ et C sont-ils incompatibles ?

3) Traduire par une phrase $\overline{C}$.

4) A et $\overline{C}$ sont-ils incompatibles ?

Exercice 39

On choisit une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. On note :

A l'événement : "La carte choisie est un pique".

B l'événement : "La carte choisie est rouge (cœur ou carreau)".

C l'événement : "La carte choisie est une figure (valet, dame, roi)".

1) Présenter un modèle mathématique décrivant l'expérience aléatoire.

2) Déterminer les probabilités des évènements :

A , B , C , $A \cap B$, $B \cap C$, $A \cup B$, $A \cup C$.

3) Déterminer la probabilité de l'événement D "La carte choisie n'est ni un pique ni une figure".

Exercice 40

On jette une pièce de monnaie 3 fois de suite.

1) Donner la liste de tous les résultats possibles en notant P pour Pile et F pour Face (exemple : PPF).

2) Donner la probabilité des événements suivants :

A « le tirage ne comporte que des Piles ».

B « le tirage comporte au moins une fois Face ».

Exercice 41

Une urne contient 10 bulletins indiscernables au toucher, de 3 sortes : 4 sont marqués « oui », 3 sont marqués « non » et 3 sont marqués « blanc ».

Un joueur tire simultanément deux bulletins de l'urne. Quelle est la probabilité qu'il obtienne un tirage de deux bulletins de sortes différentes.

Exercice 42

Un sac contient 5 jetons verts (numérotés de 1 à 5) et 4 jetons rouges (numérotés de 1 à 4).

1) On tire successivement et au hasard 3 jetons du sac, sans remettre le jeton tiré. Calculer les probabilités :

a) De ne tirer que 3 jetons verts ;

b) De ne tirer aucun jeton vert

c) De tirer au plus 2 jetons verts ;

d) De tirer exactement 1 jeton vert.

2) On tire simultanément et au hasard 3 jetons du sac. Reprendre alors les questions a), b), c) et d).

Exercice 43

Dans une assemblée de 250 personnes, on ne remarque que les hommes portant la cravate ou ayant les yeux bleus. Il y a 120 hommes qui portent la cravate, 85 hommes qui ont les yeux bleus, dont 50 portent la cravate.

On discute avec une personne choisie au hasard dans cette assemblée.

1) Quelle est la probabilité que ce soit un homme portant la cravate.

2) Quelle est la probabilité que ce soit un homme aux yeux bleus et portant la cravate.

3) Quelle est la probabilité que ce soit un homme aux yeux bleus ou portant la cravate.

4) Quelle est la probabilité de discuter avec une personne qui n'est ni un homme aux yeux bleus, ni un homme portant la cravate ?

Exercice 44

Lors d'un référendum, deux questions étaient posées.

65 % des personnes ont répondu « oui » à la première question, 51 % ont répondu « oui » à la seconde question, et 46 % ont répondu « oui » aux deux questions.

1) Quelle est la probabilité qu'une personne ait répondue « oui » à l'une ou l'autre des questions ?

2) Quelle est la probabilité qu'une personne ait répondue « non » aux deux questions ?

Exercice 45

On lance un dé à 6 faces. On note p_1 la probabilité de sortie de la face marquée i Ce dé est truqué de telle sorte que les probabilités de sortie des faces sont :

$p_1 = 0{,}1$; $p_2 = 0{,}2$; $p_3 = 0{,}3$; $p_4 = 0{,}1$; $p_5 = 0{,}15$.

Quelle est la probabilité de sortie de la face marquée 6 ?

Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair ?

Exercice 46

On lance un dé à 6 faces. On suppose que la probabilité d'apparition de chaque face est proportionnelle au numéro inscrit sur elle.

Calculer la probabilité d'apparition de chaque face.

Calculer la probabilité d'obtenir un nombre pair.

Exercice 47

Dans un magasin d'électroménager, on s'intéresse au comportement d'un acheteur potentiel d'un téléviseur et d'un magnétoscope. La probabilité pour qu'il achète un téléviseur est de 0,6.

La probabilité pour qu'il achète un magnétoscope quand il a acheté un téléviseur est de 0,4.

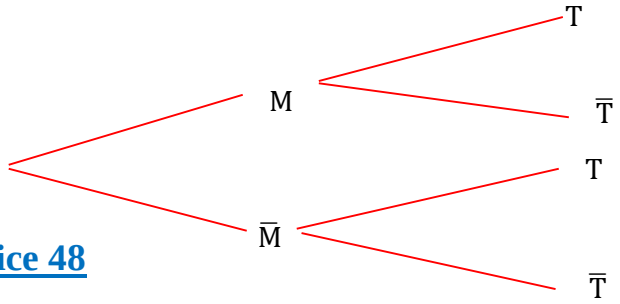
La probabilité pour qu'il achète un magnétoscope quand il n'a pas acheté de téléviseur est de 0,2.

1) Quelle est la probabilité pour qu'il achète un téléviseur et un magnétoscope ?

2) Quelle est la probabilité pour qu'il achète un magnétoscope ?

3) Le client achète un magnétoscope. Quelle est la probabilité qu'il achète un téléviseur ?

4) Compléter l'arbre de probabilité suivant :



Exercice 48

On dispose de deux urnes u_1 et u_2 . L'urne u_1 contient trois boules blanches et une boule noire. L'urne u_2 contient une boule blanche et deux boules noires.

On lance un dé non truqué. Si le dé donne un numéro d inférieur ou égal à 2, on tire une boule dans l'urne u_1. Sinon on tire une boule dans l'urne u_1.

(On suppose que les boules sont indiscernables au toucher).

1) Calculer la probabilité de tirer une boule blanche.

2) On a tiré une boule blanche. Calculer la probabilité qu'elle provienne de l'urne u_1

Exercice 49

Le quart d'une population a été vacciné contre une maladie contagieuse. Au cours d'une épidémie, on constate qu'il y a parmi les malades un vacciné pour quatre non vaccinés. On sait de plus qu'au cours de cette épidémie, il y avait un malade sur douze parmi les vaccinés.

a) Démontrer que la probabilité de tomber malade est égale à $\frac{5}{48}$

b) Quelle était la probabilité de tomber malade pour un individu non-vacciné ?

c) Le vaccin est-il efficace ?

Exercice 50

Le tableau suivant donne la répartition de 150 stagiaires en fonction de la langue choisie et de l'activité sportive choisie.

	Tennis	Equitation	Voile
Anglais	45	18	27
Allemand	33	9	18

1) Les événements « étudier l'allemand » et « pratiquer le tennis » sont-ils indépendants ?

2) Les événements « étudier l'anglais » et « pratiquer la voile » sont-indépendants ?

Exercice 51 (Bac Niger 1999)

A. Le tiercé est une forme de pari où l'on parie sur trois chevaux engagés dans une même course, en précisant l'ordre d'arrivée.

Le PMU-Niger annonce une course de 18 chevaux numérotés de 1 à 18. Tous les chevaux ont la même chance de gagner la course. Amadou choisit dans l'ordre les chevaux portant les numéros 15, 13 et 8. Tous les chevaux ayant pris part à la course, on demande de calculer la probabilité pour qu'Amadou gagne le tiercé :

a) Dans l'ordre
b) Dans le désordre

B. On considère un club de parieur comprenant les hommes et des femmes ; le nombre des hommes étant le double de celui des femmes. On suppose que 6% des femmes gagnent le tiercé dans l'ordre et 12% des hommes gagnent le tiercé dans l'ordre. On note respectivement O, H et F les évènements suivants :

O : « gagner le tiercé dans l'ordre »

H : « le parieur est un homme »

F : « le parieur est une femme »

1) Quelle est la probabilité pour que :
a) Un membre du club gagne le tiercé dans l'ordre ?
b) Un gagnant dans l'ordre de ce club soit un homme ?
2) On choisit au hasard 6 parieurs parmi les gagnants ; le nombre de gagnants est suffisamment grand pour que les choix puissent être assimilés à des choix successifs indépendants.

Déterminer la probabilité pour qu'il y ait exactement deux hommes parmi ces 6 parieurs.

Exercice 52 (Bac Niger 2001)

Pour élire leur conseiller départemental, les habitants du village de ZATA ont à choisir parmi 3 candidats : Ado, Bala et Kadri.

Chaque électeur vote pour un seul candidat.

A la fin du vote, on a constaté que 60% des habitants de ZATA ont effectivement voté. On suppose que la probabilité pour qu'un électeur choisisse Ado est égale à $\frac{3}{8}$, celle de Bala est égale à $\frac{1}{2}$ et celle de Kadri est égale à $\frac{1}{8}$, et ceci indépendamment des autres électeurs.

1. On prend au hasard et successivement 5 habitants de ZATA.

Quelle est la probabilité pour que ces 5 habitants aient effectivement voté.

2. Calculer la probabilité pour qu'un habitant quelconque de ZATA choisisse Bala
3. On prend au hasard 5 habitants de ZATA et on note X la variable aléatoire égale au nombre de voix obtenues par Bala.

Déterminer la loi de probabilité de X. Calculer son espérance mathématique $E(X)$ et sa variance$V(X)$.

4. Calculer la probabilité pour qu'un habitant de ZATA choisisse Kadri.
5. Soit n un entier supérieur ou égal à 1 et P_n la probabilité pour que, parmi n habitants qui votent, aucun ne choisissent Kadri. Calculer P_n.
6. Quel est le nombre minimum d'habitants qui doivent voter pour que Kadri obtienne au moins une voix avec une probabilité supérieure ou égale à $\frac{15}{16}$?

Exercice 53 (Bac Niger 2003)

Un sac contient trois boules indiscernables au toucher marquées 1, 2 et 3. Une épreuve consiste à prélever une première boule du sac dont le numéro sera noté a, puis sans la remettre dans le sac, une seconde boule dont le numéro sera noté b. Au résultat (a, b) d'une épreuve, on associe l'application du plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{U}, \vec{v})$ dans lui-même, qui à tout point M d'affixe $z = x + iy$ fait correspondre le point M' d'affixe $z' = x' + iy'$ tel que $z' = \alpha z$ avec $\alpha = \frac{a}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}b\right) + i\sin(\frac{\pi}{3}b)\right]$.

1) Quels sont les résultats (a, b) possibles ?
2) Soit A le point d'affixe $z_0 = \sqrt{3} + i$ et A' le point d'affixe $z_0' = az_0$, image de A par l'application associée au résultat d'une épreuve. Calculer le module et l'argument de z_0 et ceux de z_0' suivant les valeurs de (a, b).
3) Calculer la probabilité de l'événement E_1 : « O, A, A' sont alignés », puis celle de l'événement E_2 : « z_0' est imaginaire pur ».
4) Quelle est la loi de probabilité de l'aléa numérique X qui au résultat (a, b) d'une épreuve associe le module de z_0' ? Calculer l'Esperance mathématique de X.

Exercice 54 (Bac Niger 2005)

On lance un dé cubique dont les faces sont numérotés de 1 à 6 et une pièce dont on distingue les côtés pile (P) et face (F). A chaque lancer, on associe le nombre complexe $z = \rho e^{\frac{in\pi}{6}}$ défini de la manière suivante : $\rho = 1$ si face (F) apparait sur la pièce ; $\rho = 2$ si pile (P) apparait sur la pièce ; n est le nombre lu sur la face supérieure du dé.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) (unité : 2 cm). On note M le point d'affixe z et Y, son ordonnée.

1) La pièce et le dé ne sont pas truqués.

a) Déterminer l'ensemble des points M que l'on peut obtenir et les placer dans $(O, \vec{I}, \vec{J})$. (les points obtenus seront notés : A_n pour $\rho = 1$ et B_n pour $\rho = 2$, (n étant l'entier lu sur le dé).

b) Quelle est la probabilité pour que l'ordonnée Y soit égale à 1 ?

2) On remplace le dé par une deuxième pièce non truquée. Le jeu consiste à lancer les deux pièces non truquées. Avant de les lancer un joueur doit payer m francs. Si le lancer amène une seule face, le joueur gagne 5 F, si le lancer amène deux faces, il gagne 30 F. Sinon il perd la partie (c'est-à-dire il gagne 0 F). On appelle X le gain net obtenu, gain exprimé en fonction de m.

a) Déterminer la probabilité d'obtenir deux faces et celle d'obtenir une face.

b) Dresser la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

c) Calculer l'espérance mathématique de X.

d) Quel doit être le prix de la partie pour que ce jeu soit équitable.

e) On donne m = 10.

i. Calculer la variance et l'écart type de X.

ii. Définir la fonction de répartition de F de X et la tracer.

Exercice 55 (Bac Niger 2006)

En 2004, la campagne électorale pour les élections municipales a fait rage dans un village du Niger. Deux groupes de listes A et B s'affrontent par joutes oratoires quotidiennes. Chaque jour de campagne on interroge un lecteur pris au hasard et on définit les événements suivants :

A_n « l'électeur est favorable à la liste A au n^{ième} jour de campagne »

B_n « l'électeur est favorable à la liste B au n^{ième} jour de campagne »

On note p_n et q_n les probabilités respectives des événements A_n et B_n et on admet que chaque électeur ne se détermine que pour les listes A et B.

1) Donner une relation simple entre p_n et q_n.

2) Les arguments des uns et des autres sont si convaincants et les électeurs sont indécis qu'à l'issue de chaque jour de campagne, 20% des électeurs favorables à la liste A et 30% des électeurs favorables à la liste B changent d'avis pour le jour suivant.

a) Déterminer l'arbre des probabilités.

b) Donner $P(A_{n+1}/A_n)$ et $P(A_{n+1}/B_n)$.

c) Montrer que $P(A_{n+1} \cap A_n) = 0.8P_n$ et $P(A_{n+1} \cap B_n) = 0.3q_n$.

En déduire que $P(A_{n+1}) = 0.8P_n + 0.3q_n$; puis que $p_{n+1} = 0.5P_n + 0.3$.

Exercice 56 (Bac Niger 2007)

Une urne contient 5 jetons portant respectivement les chiffres 1, 1, 1, 2, 2. Les jetons portant des chiffres identiques sont indiscernables. On effectue trois tirages successifs d'un jeton en ne remettant pas à chaque fois le jeton tiré dans l'urne. Ces chiffres, dans l'ordre où ils sont tirés, sont appelés x, y, z.

1) Donner les éléments de **Ω** l'univers des éventualités.
2) On définit la probabilité d'un événement élémentaire $\{(x, y, z)\}$ par :

P $\{(x, y, z)\} = a(x + y + z) + b$ où a et b sont des réels.

Déterminer a et b en sachant que P est une probabilité et que les événements :

$A = \{(x, y, z)\epsilon\Omega,\ x = 1\}$ Et $B = \{(x, y, z)\epsilon\Omega,\ y = z\}$ satisfont la propriété : $P(A) - P(B) = \frac{4}{35}$

3) On suppose que $a = \frac{1}{10}$ $et\ b = -\frac{2}{7}$. On désigne par X la variable aléatoire qui prend la valeur 3 si les trois chiffres sont impairs, la valeur 1 si un chiffre est impair et les deux autres pairs, et prend la valeur -2 s'il y a un chiffre pair et deux chiffres impairs.

Déterminer la loi de probabilité de X. Calculer son espérance mathématique et son écart type.

Exercice 57 (Bac Niger 2009)

A) En notant $P(A/B)$ la probabilité de l'événement « A sachant B » et $\bar{B}$ l'événement contraire de B, démontrer que :

$P(A/\bar{B}) = \frac{\boldsymbol{P(A) - P(A/B) \times P(B)}}{\boldsymbol{1 - P(B)}}$ (Indication : écrire $A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$)

B) Lors d'une récente campagne d'abattage des chiens errants, on a pu établir les statistiques suivantes :

- 30% des chiens errants étaient enragés.
- Parmi les chiens abattus, 40% étaient enragés.

1) En désignant par b ($b \neq 1$) la probabilité pour qu'un chien errant soit abattu lors de la campagne d'abattage, calculer en fonction de b la probabilité p pour qu'un chien errant survivant soit enragé.
2) Quelle est la plus petite valeur de b pour laquelle p est inférieure ou égale à 0.1 ?
3) A l'issue de la campagne d'abattage, la probabilité pour qu'un territoire soit décontaminé de la rage est égale à $\frac{1}{3}$.

Une campagne d'abattage est divisée en 10 territoires et on désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de territoires décontaminés après la campagne d'abattage.

Quelle est dans les conditions précédentes, et en supposant que les résultats sont indépendants d'un territoire à l'autre, la probabilité d'avoir décontaminé au moins huit territoires sur les dix à l'issue de la campagne d'abattage.

Exercice 58 (Bac Niger 2011)

Une urne contient trois boules rouges, trois boules blanches et trois boules noires. On prélève simultanément trois boules de l'urne. Les prélèvements sont supposés équiprobables.

1. Calculer la probabilité d'un prélèvement unicolore c'est-à-dire composé d'une seule couleur.
2. Calculer la probabilité d'un prélèvement tricolore c'est-à-dire composé de trois couleurs.
3. Déduire des résultats précédents la probabilité d'un prélèvement bicolore c'est-à-dire composé de deux couleurs.
4. Quelle est la probabilité d'avoir exactement deux boules rouges sachant que le prélèvement est bicolore ?

Exercice 59 (Bac Niger 2015)

Une urne contient quatre boules roses, trois boules vertes et deux boules jaunes indiscernables au toucher. On tire simultanément trois boules de l'urne.

1) Déterminer la probabilité d'obtenir :
   a) Les trois couleurs
   b) Les deux boules jaunes
   c) Au moins une boule jaune
2) Soit X la variable aléatoire qui à tout tirage de trois boules associe le nombre de boules jaunes tirées.
   a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   b) Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de X.
   c) Définir la fonction de répartition de X.

Corrections des exercices

Exercice 1

Traduction des donnés en ensembles

E : L'ensemble des élèves interrogés

A : L'ensemble des élèves qui lisent le roman A

B : L'ensemble des élèves qui lisent le roman B

C : L'ensemble des élèves qui lisent le roman C

$A \cup B \cup C$: est L'ensemble des élèves qui lisent au moins l'un des 3 romans

$A \cap B$: est L'ensemble des élèves qui lisent les romans A et B

$B \cap C$: est L'ensemble des élèves qui lisent les romans B et C

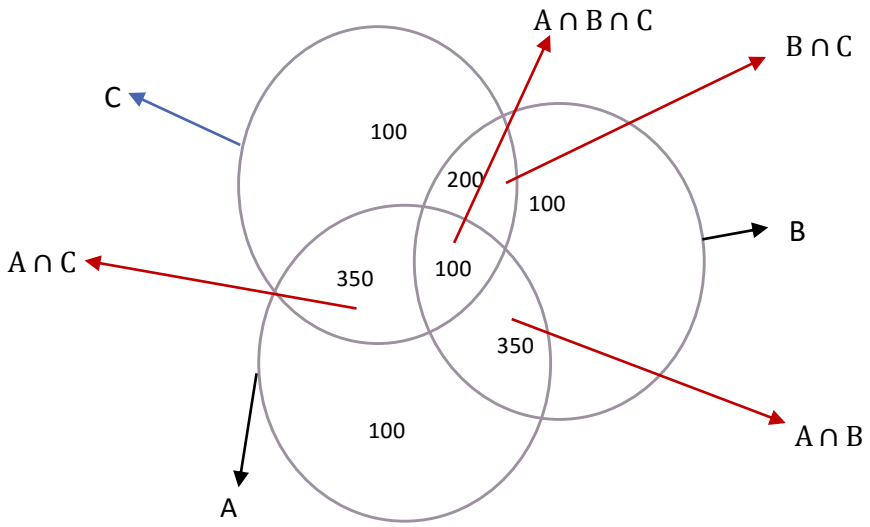
$A \cap C$: est L'ensemble des élèves qui lisent les romans A et C

$A \cap B \cap C$: est L'ensemble des élèves qui lisent les 3 romans A ; B et C

Donc $\text{Card}\ (E) = 1500$; $\text{Card}\ (A) = 900$; $\text{Card}\ (B) = 750$; $\text{Card}\ (C) = 750$

$\text{Card}\ (A \cap B) = 450$; $\text{Card}\ (A \cap C) = 450$; $\text{Card}\ (B \cap C) = 300$;

$\text{Card}\ (A \cap B \cap C) = 100$



1) Nombre d'élèves qui lisent A et B mais ne lisent pas C

$\text{Card}\ (\text{A} \cap \text{B}) - \text{Card}\ (\text{A} \cap \text{B} \cap \text{C}) = 450 - 100 = 350$

Nombre d'élèves qui lisent A et C mais ne lisent pas B

$\text{Card}\ (\text{A} \cap \text{C}) - \text{Card}\ (\text{A} \cap \text{B} \cap \text{C}) = 450 - 100 = 350$

Nombre d'élèves qui lisent B et C mais ne lisent pas A

$\text{Card}\ (\text{B} \cap \text{C}) - \text{Card}\ (\text{A} \cap \text{B} \cap \text{C}) = 300 - 100 = 200$

Nombre d'élèves qui lisent seulement deux romans

$350 + 350 + 200 = 900$

2) Nombre d'élèves qui lisent uniquement le roman A

$900 - (350 + 350 + 200) = 100$

Nombre d'élèves qui lisent uniquement le roman B

$750 - (350 + 350 + 200) = 100$

Nombre d'élèves qui lisent uniquement le roman C

$750 - (350 + 350 + 200) = 100$

Nombre d'élèves qui lisent au moins un de ces romans

$100 + 100 + 100 + 100 + 350 + 350 + 200 = 1300$

Nombre d'élèves qui ne lisent aucun de ces romans

$1500 - 1300 = 200$

Exercice 2

On a : $\text{Card}\ (\text{E}) = 3$; $Card\ (F) = 4\ \ etCard\ (G) = 2$

Les éléments du produit cartésien sont :

$\text{Card}\ (\text{E} \times \text{F} \times \text{G}) = 3 \times 4 \times 2 = 24$

Exercice 3

Un résultat de vote est une application de l'ensemble $\{\text{A}, \text{B}\}$ des deux personnes vers l'ensemble $\{\text{oui}\ ;\ \text{non}\ ; \text{nul}\}$ des trois choix qui s'offrent à chaque votant.

Le nombre de résultat de vote possibles est alors $3^2 = 9$

Exercice 4

1) Le nombre de numéros cherché est le nombre de 3-uplets d'éléments de l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. On a alors :

$n_1 = 10^3 = 1000$

2) L'effectif des nombres de trois chiffres cherché est :

$n_2 = 10^3 - 10^2 = 900$

Un numéro de trois chiffres commençant par 0 étant considéré comme un nombre de deux chiffres.

3) $n_3 = A_5^1 \times 6! \times A_3^1 = 10800$

Exercice 5

1) $n_1 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

2) a) $n_2 = \dfrac{5!}{3!} = 20$ car ELEVE est écrit avec 5 lettres dont 3 sont identiques

b) $n_3 = \dfrac{13!}{2!\,2!\,2!\,2!} = \dfrac{13!}{(2!)^4}$

Exercice 6

Notons E l'ensemble des trois entrées disponibles, E = {E1;E2 ; E3}.

Ainsi Card (E) = 3

Notons P l'ensemble des deux plats disponibles, P= {P1 ; P2}.

Ainsi Card (P) = 2

Notons D l'ensemble des quatre desserts disponibles :

D= {D1 ; D2 ; D3 ; D4}. Ainsi Card (D) = 4

Un menu est constitué d'un triplet ordonné de trois éléments choisis respectivement dans E, P et D.

On effectue donc le produit cartésien de ces trois ensembles.

Le nombre de menus que l'on peut composer est donc égal à :

$\text{Card (E)} \times \text{Card (P)} \times \text{Card (D)} = 3 \times 2 \times 4 = 24$

On peut donc composer 24 menus différents.

Exercice 7

Cette femme peut s'habiller de :$4 \times 5 \times 3 = 60$ façons

Exercice 8

Une poignée de main est un couple (une 2-liste) constitué d'un premier élément choisi dans l'ensemble constitué des 12 joueurs de la première équipe, et d'un deuxième élément choisi dans l'ensemble constitué des 15 joueurs de la deuxième équipe. Il y a donc :

$12 \times 15 = 180$ poignées de main

Exercice 9

Une réponse à ce QCM peut être désignée par une 15-liste de 15 chiffres choisis dans l'ensemble Ω = {1;2;3;4}.

Le nombre de ces 15-listes est donc de cardinal $(\mathrm{Card}(\Omega)))^{15} = 4^{15}$

Exercice 10

Un poème est une 14-liste de 14 nombres choisis parmi 10 (le premier nombre désignant le numéro de page où est sélectionné le premier vers, et ainsi de suite). Il y a donc 10^{14} poèmes possibles.

Exercice 11

En informatique, on utilise le système binaire pour coder les caractères.

Un bit (binary digit : chiffre binaire) est un élément qui prend la valeur 0 ou la valeur 1.

Avec 8 chiffres binaires (un octet), combien de caractères peut-on coder ?

Un octet est une 8-liste d'éléments choisis dans l'ensemble Ω = {0;1}.

L'ensemble de ces 8-listes est donc de cardinal $((\mathrm{Card}\ \Omega))^8 = 2^8 = 256$

Avec un octet, on peut donc coder jusqu'à 256 caractères.

Exercice 12

Un numéro de téléphone à 8 chiffres est une 8-liste d'éléments choisis dans l'ensemble Ω = {0;1;2;3;4;5;6;7;8;9}.

L'ensemble de ces 8-listes est donc de cardinal $((\mathrm{Card}\ \Omega))^8 = 10^8$

On peut ainsi former 10^8 numéros de téléphone à 8 chiffres

Un numéro de téléphone à 8 chiffres ne comportant pas le chiffre 0 est une 8-liste d'éléments choisis dans l'ensemble Ω'= {1;2;3;4;5;6;7;8;9} .

L'ensemble de ces $10-$ listes est donc : $\left((\text{ Card } \Omega')\right)^8 = 9^8 = 43046721$

On peut ainsi former 43046721 numéros de téléphone à 8 chiffres ne comportant pas le chiffre 0

Exercice 13

Un tel podium est un arrangement de 3 athlètes choisis parmi l'ensemble des 18 athlètes (l'ordre compte et il ne peut y avoir de répétition, un athlète ne pouvant remporter deux médailles simultanément). Il existe donc :

$$A_{18}^3 = \frac{18!}{(18-3)!} = \frac{18!}{15!} = 18 \times 17 \times 16 = 489 \text{ podiums différents}$$

Exercice 14

Le fait d'attribuer un rôle à chaque élève de terminale induit un ordre dans le choix des trois élèves. En effet, le choix (Pierre, Paul, Jacques) est différent de (Paul, Pierre, Jacques), car dans le premier cas, c'est Pierre qui est président, alors que c'est Paul dans le deuxième cas) Un bureau est donc un arrangement de 3 élèves choisis parmi l'ensemble des 24 élèves. Il existe donc :

$$A_{18}^3 = \frac{18!}{(18-3)!} = \frac{24!}{21!} = 24 \times 23 \times 22 = 12144 \text{ bureaux différents.}$$

Exercice 15

1) Un tel choix est donné par un 6-uplet (sextuplé) de 6 chiffres, chacun choisi entre 1 et 6. Pour connaître le nombre de choix, on effectue le produit cartésien de l'ensemble {1;2;3;4;5;6} six fois par lui-même. Il y donc :

$6^6 = 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 = 46656 \text{ choix possibles.}$

2) Si les six chiffres doivent être distincts, un tel choix sera donné par un arrangement de 6 chiffres choisis parmi 6, c'est à- dire une permutation des 6 chiffres.

Il aura donc $6\,! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$ choix possibles

Exercice 16

1) Les éléments de A sont tous les nombres de 1000 à 9999. Il y en a donc 9000. Ainsi Card (A) = 9000

2) a) Un nombre de A est un élément du produit cartésien :

- d'un élément de Ω_1 = {1;2;3;4;5;6;7;8;9} en guise de premier chiffre. Il y a 9 possibilités.

- Une fois cet élément choisi, il va falloir choisir les 3 chiffres restants parmi 9 seulement (aucun ne pouvant être égal au premier chiffre choisi). On doit donc choisir un arrangement de trois éléments pris dans un ensemble de 9 chiffres.

$$\text{Il y a donc } \mathrm{A}_9^3 = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!} = 9 \times 8 \times 7 = 504 \text{ arrangements.}$$

Le nombre d'éléments de A composés de quatre chiffres distincts vaut donc 9×504 = 4536

b) Le contraire de « au moins deux chiffres identiques » est « quatre chiffres distincts »

Le nombre d'éléments de A possédant « au moins deux chiffres identiques » est égal au nombre total d'éléments de A diminué du nombre d'éléments de A possédant leurs quatre chiffres distincts, nombre qui a été calculé dans la question précédente. Le nombre d'éléments de A possédant « au moins deux chiffres identiques » vaut donc : $9000 - 4536 = 4464$.

c) Un nombre de A composé de quatre chiffres distincts autres que 5 et 7 est un élément du produit cartésien :

- d'un élément de Ω_2= {1;2;3;4;6;8;9} en guise de premier chiffre. Il y a 7 possibilités.

- Une fois cet élément choisi, il va falloir choisir les 3 chiffres restants parmi 7 seulement (aucun ne pouvant être égal au premier chiffre choisi, ni égal à 5 ou 7). On doit donc choisir un arrangement de trois éléments pris dans un ensemble de de 7 chiffres.

$$\text{Il y a donc } \mathrm{A}_7^3 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = 7 \times 6 \times 5 = 210 \text{ arrangements.}$$

Le nombre d'éléments de A composés de quatre chiffres distincts autres que 5 et 7 vaut donc : $7 \times 210 = 1470$

Exercice 17

1) Un code est un élément du produit cartésien entre un élément de l'ensemble {A ; B ; C}, de cardinal 3, et de l'ensemble des 3-listes d'éléments de {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}, de cardinal $6^3 = 216$.

Il y a donc : $3 \times 6^3 = 3 \times\ 216 = 648$ codes possibles.

2) Si le code ne doit pas contenir de chiffre 1, alors les 3-listes sont constituées d'éléments de {2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}. Il y en a donc : $5^3 = 125$, et le nombre de codes vaut alors: $3 \times 5^3 = 3 \times 125 = 375$.

3) Le contraire de « le code contient au moins une fois le chiffre 1 » est « le code ne contient aucun chiffre 1 ». Le nombre de codes contenant au moins une fois le chiffre 1 est donc égal au nombre total de codes diminué du nombre de codes ne contenant pas le chiffre 1. Ces deux nombres ayant été calculés dans les deux questions précédentes, on conclut que le nombre de codes contenant au moins une fois le chiffre 1 est donc égal à $648 - 375 = 273$.

4) un code comportant des chiffres distincts sera un élément du produit cartésien entre un élément de l'ensemble {A ; B ; C}, de cardinal 3, et de l'ensemble des arrangements de 3 éléments pris parmi $\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\}$. Ces arrangements sont au nombre de :

$$A_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = 6 \times 5 \times 4 = 120.$$

Il y a donc : $3 \times A_6^3 = 3 \times 120 = 360$ codes possibles.

5) Le contraire de « le code contient au moins deux chiffres identiques» étant « le code ne contient que des chiffres distincts », le nombre de codes contenant au moins deux chiffres identiques est égal au nombre total de codes diminué du nombre de codes ne contenant que des chiffres distincts, soit 648 – 360 = 288 codes possibles.

Exercice 18

Une liste de passage des 24 élèves est une permutation des 24 éléments de l'ensemble classe. Il y a donc $24!$ Listes possibles.

Exercice 19

L'ordre dans lequel on énonce le triplet solution est important.

En effet si on énonce $S = \{(5\,;-1\,;3)\}$, cela signifie $x = 5\,;\ y = -1$ et $z = 3$.

Tandis que si $S = \{(5\,;\ 3\,;-1)\}$, cela signifie que $x = 5\,;\ y = 3$ et $z = -1$

Les triplets différents qui peuvent être la solution de ce système sont donc constitués de toutes les permutations de ces trois nombres, à savoir :

S= {(5 ;-1 ; 3) ; (5 ; 3 ;-1) ; (-1 ; 5 ; 3) ; (-1 ; 3 ; 5) ; (3 ; 5 ;-1) ; (3 ;-1 ; 5)}

Exercice 20

Le mot « MATH » étant vu comme une liste ordonnée des 4 lettre (M, A, T, H), une anagramme du mot « MATH » est une permutation de ces quatre lettres.

Il y en a donc $4! = 4 \times 3 \times\ 2 \times 1 = 24$. Il y a 24 anagrammes du mot MATH

Exercice 21

1) Il y a : $7! = 5040$ anagrammes du mot PATRICE

2) a) Pour constituer un mot commençant et finissant par une consonne, il faut d'abord choisir les deux consonnes parmi les quatre que contient ce mot. L'ordre est important car un mot commençant par P et finissant par T n'est pas identique à un mot commençant par T et finissant par P.

Il y a donc $A_4^2 = \dfrac{4!}{(4-2)} = 4 \times 3 = 12$ choix possibles.

Une fois ce choix effectué, il reste 5 !=120 façons de permuter les 5 autres lettres.

Il aura donc : $A_4^2 \times 5\,! = 12 \times 120 = 1440$ anagrammes du mot PATRICE commençant et finissant par une consonne.

b) Suivant le même raisonnement, il aura $A_3^2 \times 5! = 720$ anagrammes du mot PATRICE commençant et finissant par une voyelle.

c) Pour constituer un mot commençant par une consonne et finissant par une voyelle, il faut d'abord choisir le couple (consonne, voyelle), qui est un élément du produit cartésien entre l'ensemble des consonnes et l'ensemble des voyelles.

Il y aura donc $4 \times 3\ = 12$ tels choix

Une fois ce choix effectué, il y aura $5! = 120$ façons de permuter les 5 autres lettres.

Il aura donc $4 \times 3 \times 5! = 12 \times 120 = 1440$ anagrammes du mot PATRICE commençant par une consonne et finissant par une voyelle.

d) La consonne et la voyelle figurant à l'extrémité du mot jouant des rôles parfaitement symétriques, il y aura $3 \times 4 \times 5! = 12 \times 120 = 1440$ anagrammes du mot PATRICE commençant par une voyelle et finissant par une consonne.

Exercice 22

Une anagramme du mot TABLEAU est une permutation des 7 lettres de ce mot. Il y en a donc, a priori : 7 !

Mais si au sein de ces anagrammes, on « permute » les deux lettres A, on retombe sur le même mot. Autrement dit, au sein des 7 ! Anagrammes, sont comptées deux fois les mots où se permutent les deux lettres A.

Pour éviter de compter ces anagrammes deux fois, on doit diviser 7 ! Par le nombre de permutations possibles des deux lettres A, soit 2 ! =2.

Le nombre d'anagrammes différentes du mot TABLEAU est donc égal à :

$$\frac{7!}{2!} = 2520 \text{ anagrammes différentes du mot TABLEAU}$$

Exercice 23

1) Une anagramme d'un mot de n lettres est une permutation des n éléments de ce mot. Il y en a donc, a priori : $n!$

Mais si un groupe de lettres se répète p_1 fois au sein de ce mot, alors les permutations de ces p_1 lettres, qui sont au nombre de $p_1!$ Ne changent pas le mot, de sorte que l'on a compté, dans les n ! Anagrammes, $p_1!$ fois trop d'anagrammes. Il faut donc diviser $n!$ Par $p_1!$ pour ne pas compter trop d'anagrammes.

On procède de même avec le deuxième groupe de mots se répétant p_2 fois. Et ainsi de suite. Le nombre d'anagrammes de mots de n lettres comportant k groupes lettres se répétant p_1 ; p_2 ;... p_k fois est donc égal à :

$$\frac{n!}{p_1\,;p_2\,;\ldots p_{k!}}$$

2) Dans le mot ANAGRAMME figurent :

- un groupe de trois lettres A se répétant,

- un groupe de 2 lettres M se répétant.

Le nombre d'anagrammes du mot ANAGRAMME vaut donc :

$$\frac{9!}{3!\,2!} = 30240 \text{ anagrammes du mot ANAGRAMME}$$

Exercice 24

1) Si on tient compte de l'accent, les six lettres du mot PRISÉE sont donc toutes différentes. Le nombre d'anagrammes du mot PRISÉE est donc égal à 6 !=720

2) Si on ne tient pas compte de l'accent, le mot PRISEE contient donc 6 lettres, dont 2 identiques.

$$\text{Il engendrera donc } \frac{6!}{2!} = 360 \text{ anagrammes.}$$

Exercice 25

L'ordre dans lequel on choisit les 3 élèves n'a, ici, pas d'importance. En effet, que l'on ait choisi « dans cet ordre » (Pierre, Paul, Jacques) ou (Paul, Pierre, Jacques), c'est l'ensemble constitué de ces trois élèves qui devra aller chercher les livres au CDI. Ces deux « choix » sont donc identiques.

La désignation de ces trois élèves correspond donc à un choix simultané (sans ordre, sans répétition possible) de 3 élèves parmi 24. Il y a donc :

$$C_{24}^{3} = \frac{24!}{(24-3)\times 3!} = \frac{24\times 23\times 22}{3\times 2\times 1} = 2024 \text{ choix différents.}$$

Exercice 26

Une rencontre est déterminée par le choix de deux équipes parmi 8.

Comme il n'y a qu'un match entre deux équipes (pas d'aller-retour), le choix (équipe A, équipe B) est identique au choix (équipe B, équipe A). Il y a donc :

$$C_{8}^{2} = \frac{8!}{2!\,6!} = 28 \text{ rencontres possibles}$$

Exercice 27

Un tirage correspondant au choix simultané (sans ordre, sans répétition possible) de 6 boules parmi 49, il y a :

$$C_{49}^{6} = \frac{49!}{6!\,(49-6)!} = \frac{49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45 \times 44 \times 43!}{6!\,43!} = 13983816$$

combinaisons différentes.

Exercice 28

Un choix de 3 femmes et 2 hommes parmi 10 femmes et 5 hommes est un élément du produit cartésien entre :

- l'ensemble des choix simultanés de 3 hommes parmi 10, de cardinal $C_{10}^{3} = 120$

- l'ensemble des choix simultanés de 2 femmes parmi 5, est $C_{5}^{2} = 10$

L'ensemble des choix de 3 femmes et 2 hommes parmi 10 femmes et 5 hommes vaut donc $C_{10}^{3} \times C_{5}^{2} = 120 \times 10 = 1200$

Exercice 29

Les délégués sont choisis sans ordre

1) Les choix simultanés de 2 délégués parmi les 32 élèves sont au nombre de :

$$C_{10}^{3} = \frac{10!}{3!\,(10-3)!} = 496 \text{ choix possibles}$$

2) Si on impose d'avoir un garçon et une fille, alors le choix des deux délégués est un élément du produit cartésien entre :

– l'ensemble des choix simultanés de 1 délégué parmi les 19 garçons, soit :

$C_{19}^{1} = 19$ choix

- l'ensemble des choix simultanés de 1 délégué parmi les 13 filles, soit $C_{13}^{1} = 13$ choix

L'ensemble des choix est donc de cardinal $C_{19}^{1} \times C_{13}^{1} = 19 \times 13 = 247$

3) Si on impose d'avoir 2 garçons comme délégués, le nombre de choix des deux délégués est donc « réduit » au nombre de choix de 2 délégués parmi les 19 garçons, au nombre de $C_{19}^{1} = 171$

Exercice 30

1) Le nombre de choix de 5 personnes parmi les 18 est égal à :

$$C_{18}^{5} = \frac{18!}{5!\,13!} = 8568 \text{ choix}$$

2) Le nombre de groupes dans lequel figure Christian est égal (une fois lui choisit) au nombre de groupes de 4 personnes choisies parmi 17, soit :

$$C_{17}^{4} = \frac{17!}{4!\,13!} = 2380 \text{ choix}$$

3) Afin que Christian et Claude ne se retrouvent pas ensemble, il faut :

- constituer un groupe de 5 personnes contenant Christian mais pas Claude. Le nombre de groupes dans lequel figure

Christian mais pas Claude est égal (une fois lui choisit) au nombre de groupes de 4 personnes choisies parmi 16 (pour ne pas qu'y figure Claude), soit :

$$C_{16}^{4} = \frac{16!}{4!\,12!} = 1820 \text{ choix} \quad \text{OU}$$

- constituer un groupe de 5 personnes contenant Claude mais pas Christian. De façon analogue à ce qui précède (Christian et Claude jouent des rôles similaires), il y a :

$$C_{16}^{4} = \frac{16!}{4!\,12!} = 1820 \text{ possibilités}$$

Il y a donc $C_{16}^{4} + C_{16}^{4} = 3640$ répondant à cette condition.

Exercice 31

1) Le nombre de d'échantillons différents est égal au nombre de choix de 4 personnes parmi les 30, soit C_{30}^{4} = 27405
2) Le nombre d'échantillons ne contenant aucun célibataires est égal au nombre de choix de 4 personnes parmi les 30- 12=18 non célibataires, soit $C_{18}^{4} = 3060$

3) Le contraire de « au moins un célibataire » est « aucun célibataire ».

Le nombre d'échantillons contenant au moins un célibataire est égal au nombre total d'échantillons diminué du nombre d'échantillons ne contenant aucun célibataire. Ces deux nombres ayant été déterminés

dans les deux questions précédentes, on conclut que le nombre d'échantillons contenant au moins un célibataire est égal à :

$C_{30}^{4} - C_{18}^{4} = 27405 - 3060 = 24345$

Exercice 32

1) Le nombre de choix de 6 personnes parmi les 25+32=57 est égal à :

$C_{57}^{6} = 36288252 \text{ choix}$

2) a) Le nombre de groupes constitués uniquement d'hommes s'apparente au nombre de choix de 6 hommes parmi 32, soit à :

$C_{32}^{6} = 906192 \quad \text{choix.}$

b) Le nombre de groupes de 6 personnes de même sexe est égal au nombre de groupes constitués uniquement d'hommes (déterminé précédemment) augmenté du nombre de groupes constitués uniquement de femmes, que l'on évalue de manière identique à ce qui précède à

$C_{25}^{6} \text{ groupes.}$

Le nombre de groupes constitué de personnes de même sexe est donc égal à :

$C_{32}^{6} + C_{25}^{6} = 1083292 \text{ groupes.}$

C) Le contraire de « au moins une femme et au moins un homme » est « uniquement des femmes ou uniquement des hommes », c'est à dire « »un groupe unisexe ». Le nombre de groupes constitués d'au moins une femme et d'au moins un homme est donc égal au nombre total de groupes, $C_{57}^{6} = 36288252 \text{ diminué du nombre de groupes constitués de personnes du même sexe, calculé ci} - \text{dessus, } C_{32}^{6} + C_{25}^{6} = 1083292 \text{ groupes}$

Le nombre de groupes constitués d'au moins une femme et d'au moins un homme est donc égal à : 36288252 – 1083292 = 35204960

Exercice 33

1) Le nombre de choix simultané de 5 cartes parmi 32 est égal à :

$C_{32}^{5} = 201376$

2) a) Pour constituer une main contenant un carré, il faut choisir le carré (8 possibilités) et compléter la main par une 5ème carte choisie parmi 28. Il y a donc $8 \times C_{28}^{1} = 224$ mains différentes contenant un carré.

b) Pour constituer une main contenant deux paires distinctes, il faut choisir les deux hauteurs distinctes des deux paires (il y a $C_8^2 = 28$ combinaisons), choisir deux fois deux cartes parmi les quatre de chaque hauteur, et enfin compléter la main par une cinquième carte choisie parmi 24 (pour n'avoir que deux paires et pas risquer d'obtenir un brelan donc un Full). Il y a donc $C_8^2 \times C_4^2 \times C_4^2 \times C_{41}^2 = 24192$ mains répondant à ce critère.

C Pour constituer une main contenant un full, il faut choisir les deux hauteurs distinctes correspondant au brelan et à la paire, mais en tenant compte de l'ordre (2 As , 3 Rois n'est pas identique à 2 Rois ,3 As), soit $\mathrm{A}_8^2 = 28$ couples de hauteurs possibles), choisir 2 cartes parmi 4 pour constituer la paire, et 3 cartes parmi 4 pour constituer le brelan Il y a donc : $\mathrm{A}_8^2 \times C_4^2 \times C_4^3 = 1344$ mains répondant à ce critère

d) Pour constituer une main contenant un brelan (sans full ni carré), il faut choisir une hauteur pour le brelan, choisir les 3 cartes parmi 4 pour constituer ce brelan, et compléter la main par 2 cartes parmi 28. Mais on s'expose alors à la possibilité d'obtenir, grâce à ces deux cartes supplémentaires, une autre paire, ce qui constituerait un full

On devra donc soustraire le nombre de mains obtenus dans la question 2c)

Il y aura donc : $8 \times C_4^3 \times C_{28}^2 = 10752$ mains répondant à ce critère.

e) Pour constituer une main de 5 cartes de même couleur, se suivant dans l'ordre croissant, il faut choisir parmi les 4 possibilités de couleur, les 4 possibilités de suite croissante : (7,8,9,10,V) , (8,9,10,V,D) , (9,10,V,D,R) ou (10,V,D,R,As).

Il y aura donc 4×4 =16 mains répondant à ce critère.

Exercice 34

a) Supposons les 5 patères numérotées (de 1 à 5). Une disposition de trois manteaux sur le portemanteau est une 3-liste ordonnée (sans répétition) des 3 numéros de patères.

En effet (2, 3, 5) signifiera que le premier manteau est accroché sur la patère 2 et ainsi de suite. Une disposition des trois manteaux est donc un arrangement de 3 chiffres parmi 5.

Il y en a $A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 60$

b) Si on doit disposer les cinq manteaux sur les cinq patères, une disposition sera donc donnée par toute permutation des cinq chiffres correspondant aux numéros de patères.

Il a donc $5! = 120$ dispositions différentes.

c) Il est impossible de disposer 6 manteaux sur 5 patères sans que deux ne se chevauchent. Il n'y a donc aucune disposition possible.

Exercice 35

Désignons par G = {G1;G2 ; G3;G4} l'ensemble des 4 garçons et F = {F1, F2} l'ensemble des 2 filles.

1) L'ensemble des dispositions possibles de ces 6 personnes sur les six places d'un banc correspond à l'ensemble des permutations des six éléments de l'ensemble F U G.

Il a donc 6 !=720 dispositions différentes.

2) Si les garçons sont d'un côté et les filles de l'autre, il y a deux « configurations possibles » :

4 Garçons	2 Filles

Ou

2 Filles	4 garçons

Pour chaque configuration, il y a 2! = 2 manières de permuter les 2 filles, et 4 !=24 manières de permuter les 4 garçons.

Il y aura au total $2 \times 4! \times 2! = 96$ manières de placer ainsi ces six personnes

3) Si chaque fille est intercalée entre deux garçons, il y a trois configurations possibles

G	F	G	F	G	G

Ou

G	G	F	G	F	G

Ou

G	F	G	G	F	G

Une fois la configuration « choisie », il y a 2 ! = 2 manières de permuter les 2 filles, et 4 ! = 24 manières de permuter les 4 garçons.

Il y aura au total 3×2!× 4! = 144 manières de placer ainsi ces six personnes

3) Si les filles veulent rester l'une à côté de l'autre, il y a cinq configurations possibles :

F	F	G	G	F	G

G	F	G	G	F	G

G	G	F	F	G	G

G	G	G	F	F	G

G	G	G	G	F	F

Une fois la configuration « choisie », il y a 2 ! = 2 manières de permuter les 2 filles, et 4 ! = 24 manières de permuter les 4 garçons.

Il y aura au total $5 \times 2 \times 4! = 240$ manières de placer ces six personnes

Exercice 36

1) L'événement $\overline{A}$ est « au moins un des deux élèves est un garçon ».

2) L'événement $\overline{B}$ est « La personne est soit une femme, soit un suisse ».

3) L'événement $\overline{C}$ est « Luc ne prend pas de viande ou ne prend pas de glace ».

4) L'événement $\overline{D}$ est « aucun billet n'est gagnant ».

5) L'événement $\overline{E}$ est « les trois billets sont gagnants ».

Exercice 37

1) A et B sont incompatibles car une boule ne peut être simultanément blanche et non blanche.

2) B et C ne sont pas incompatibles car le tirage d'une boule noire les réalise simultanément.

3) L'événement $\overline{A}$ est « tirer une boule noire ou rouge ».

4) L'événement $\overline{B}$ est « tirer une boule blanche ou rouge ».

Exercice 38

1) A et B ne sont pas contraires car une somme égale à 5 les réalise simultanément.

2) $\overline{B}$ et C sont incompatibles car la somme ne peut être simultanément strictement supérieure à 5 (événement $\overline{B}$) et strictement inférieure à 3 (événement C).

3) L'événement $\overline{C}$ est « La somme est supérieure ou égale à 3 ».

4) A et $\overline{C}$ ne sont pas incompatibles car ils sont simultanément réalisés par une somme supérieure ou égale à 5.

Exercice 39

On choisit une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.

1) On note Ω l'univers des possibles, ensemble des 32 cartes du jeu.
Ainsi *Card* (Ω) = 32. Il y a équiprobabilité des tirages de cartes.

2) $p(A) = \dfrac{Card\ (A)}{Card\ (\Omega)} = \dfrac{8}{32} = \dfrac{1}{4}$; $p(B) = \dfrac{Card\ (B)}{Card\ (\Omega)} = \dfrac{16}{32} = \dfrac{1}{2}$

$p(C) = \dfrac{Card\ (C)}{Card\ (\Omega)} = \dfrac{3 \times 4}{32} = \dfrac{3}{8}$; $p(B \cap C) = \dfrac{Card(B \cap C)}{Card\ (\Omega)} = \dfrac{6}{32} = \dfrac{3}{16}$

$p(A \cap B) = 0$ car une carte ne peut être simultanément rouge et pique.

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 0 = \frac{3}{4}$$

$$p(A \cup C) = p(A) + p(C) - p(A \cap C) = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} - \frac{3}{32} = \frac{17}{32}$$

3) On cherche $p(\overline{A \cup C}) = 1 - p(A \cup C) = 1 - \frac{17}{32} = \frac{15}{32}$

Remarque : on a $p(\overline{A \cup C}) = p(\bar{A} \cap \bar{C})$

Exercice 40

1) $\Omega = \{PPP; PPF; PFP; PFF; FPP; FPF; FFP\} \Longrightarrow Card\ (\Omega) = 8$
2) Les tirages étant équiprobables, on a :

$$p(A) = \frac{Card\ (A)}{Card\ (\Omega)} = \frac{1}{8}$$

On remarque que B = $\bar{A}$ donc $p(B) = p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

Exercice 41

L'univers est constitué de l'ensemble des combinaisons de 2 éléments pris parmi 10

$$C_{10}^{2} = \frac{10!}{2! \times (10-2)!} = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} = 45$$

Notons A l'événement « d'obtenir deux bulletins de sortes différentes ».

<u>Méthode 1</u> :

Il y a trois possibilités (1 bulletin « oui » et 1 bulletin « non », 1 bulletin

« Oui » et 1 bulletin « blanc », ou 1 bulletin « non » et 1 bulletin « blanc ».

$$Card\ (A) = C_4^1 \times C_3^1 + C_4^1 \times C_3^1 + C_3^1 \times C_3^1 = 4 \times 3 + 4 \times 3 + 3 \times 3 = 33$$

$$p(A) = \frac{Card\ (A)}{Card\ (\Omega)} = \frac{33}{45} = \frac{11}{15}$$

<u>Méthode 2</u> :

On raisonne avec l'événement contraire $\bar{A}$ qui est « obtenir deux bulletins identique ».

Il y a 3 possibilités (2 bulletins « oui », 2 bulletins « non », 2 bulletins « blanc ».

$$Card\ (\bar{A}) = C_4^2 + C_3^2 + C_3^2 = \frac{4 \times 3}{2} + \frac{3 \times 2}{2} + \frac{3 \times 2}{2} = 12$$

$$p(\bar{A}) = \frac{Card\ (A)}{Card\ (\Omega)} = \frac{4}{15} \quad \Leftrightarrow \quad p(A) = 1 - p(A) = 1 - \frac{4}{15} = \frac{11}{15}$$

Exercice 42

1) Tirages successifs sans remise de 3 jetons parmi 9.

$$Card\ (\Omega) = A_9^3 = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6!} = 504 \text{ possibilités}$$

a) La probabilité de l'évènement A « ne tirer que 3 jetons verts »

$$p(A) = \frac{A_5^3}{A_9^3} = \frac{5 \times 4 \times 3}{504} = \frac{5}{42}$$

b) La probabilité de l'évènement B « Ne tirer aucun jeton vert »

$$p(B) = \frac{A_4^3}{A_9^3} = \frac{4 \times 3 \times 2}{504} = \frac{1}{21}$$

c) La probabilité de l'évènement C « Tirer au plus 2 jetons verts »

<u>Méthode 1</u> :

$$p(C) = p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{5}{42} = \frac{37}{42}$$

<u>Méthode 2</u> :

$$p(C) = \frac{A_4^3 + 3 \times A_5^1 \times A_4^2 + 3 \times A_5^2 \times A_4^1}{A_9^3} = \frac{24 + 180 + 240}{504} = \frac{444}{504} = \frac{37}{42}$$

A_4^3 : « Ne tirer aucun jeton vert »

$3 \times A_5^1 \times A_4^2$: « Tirer exactement 1 vert ; choix de la place du jeton vert ; choix d'un vert et 2 rouges».

$3 \times A_5^2 \times A_4^1$: « Tirer exactement 2 verts »

d) La probabilité de l'évènement D « tirer exactement 1 jeton vert ».

$$p(D) = \frac{3 \times A_5^2 \times A_4^1}{A_9^3} = \frac{240}{504} = \frac{5}{14}$$

2) Tirage simultané de 3 jetons parmi 9.

$$Card\ (\Omega') = C_9^3 = \frac{9!}{3!\,(9-3)!} = 84 \text{ possibilités}$$

a) La probabilité de l'évènement A « ne tirer que 3 jetons verts »

$$p(A) = \frac{C_5^3}{C_9^3} = \frac{5}{42}$$

b) La probabilité de l'évènement B « Ne tirer aucun jeton vert »

$$p(B) = \frac{C_4^3}{C_9^3} = \frac{1}{21}$$

c) La probabilité de l'évènement C « Tirer au plus 2 jetons verts »

Méthode 1 :

$$p(C) = p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{5}{42} = \frac{37}{42}$$

Méthode 2 :

$$p(C) = \frac{C_4^3 + C_5^1 \times C_4^2 + C_5^2 \times C_4^1}{C_9^3} = \frac{37}{42}$$

d) La probabilité de l'évènement D « tirer exactement 1 jeton vert ».

$$p(D) = \frac{C_5^2 \times C_4^1}{C_9^3} = \frac{240}{504} = \frac{5}{14}$$

Commentaire:

Selon toute logique, on doit retrouver les mêmes résultats dans les deux parties. En effet, tirer successivement sans remise 3 boules ou les tirer simultanément revient au même. Que l'on traite un tirage comme un arrangement ou comme un sous-ensemble, les questions a) et b) nous fournissent le même résultat si on a conservé l'ordre jusqu'au bout (numérateurs et dénominateurs des fractions) le même mode de comptage. En ce qui concerne la question c), si on travaille avec des arrangements, on induit ainsi un ordre. Il ne faut donc pas oublier de multiplier par 3, c'est à dire de choisir d'abord une place pour le jeton vert. Ce problème ne se pose pas avec des combinaisons.

Conclusion : Il est plus facile de travailler avec des combinaisons.

Cette dernière remarque est valable car le type d'événements étudié ne fait pas intervenir d'ordre.

Exercice 43

Le tableau suivant permet de dénombrer les différentes catégories :

	Cravate (Evènement C)	Pas de cravate (Evènement $\bar{C}$)	Total
Yeux bleus (Evènement B)	50	35	85
Yeux non bleus (Evènement $\bar{B}$)	70	95	165
Total	120	130	250

On note Ω l'univers des possibles, ensemble des 250 personnes. Ainsi
$Card\ (\Omega)\ = 250$

1) La probabilité que ce soit un homme portant la cravate.

$$p(C) = \frac{Card\ (C)}{Card\ (\Omega)} = \frac{120}{250} \quad \Longrightarrow \quad p(C) = \frac{12}{25}$$

2) La probabilité que ce soit un homme aux yeux bleus et portant la cravate.

$$p(B \cap C) = \frac{Card\ (B \cap C)}{Card\ (\Omega)} = \frac{50}{250} \quad \Longrightarrow \quad p(B \cap C) = \frac{1}{5}$$

3) La probabilité que ce soit un homme aux yeux bleus ou portant la cravate.

$$p(B \cup C) = \frac{Card\ (B \cup C)}{Card\ (\Omega)} = \frac{50 + 70 + 35}{250} \quad \Longrightarrow \quad p(B \cup C) = \frac{31}{50}$$

4) L la probabilité de discuter avec une personne qui n'est ni un homme aux yeux bleus, ni un homme portant la cravate

$$p(\bar{B} \cap \bar{C}) = p(\overline{B \cup C}) = 1 - p(B \cup C) = 1 - \frac{31}{50} = \frac{19}{50}$$

Exercice 44

Si on note A l'événement « la personne a répondu oui à la première question.

B l'événement « la personne a répondu oui à la deuxième question »

$p(A) = 0.65 \quad ; \quad p(B) = 0.51 \quad ; \quad p(A \cap B) = 0.46$

1) La probabilité qu'une personne répond « oui » à l'une ou l'autre des questions

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0{,}65 + 0{,}51 - 0{,}46 = 0{,}7$

2) La probabilité qu'une personne répond « non » aux deux questions

$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$

Exercice 45

On lance un dé à 6 faces. On note p_1 la probabilité de sortie de la face marquée i
Ce dé est truqué de telle sorte que les probabilités de sortie des faces sont :

$p_1 = 0{,}1$; $p_2 = 0{,}2$; $p_3 = 0{,}3$; $p_4 = 0{,}1$; $p_5 = 0{,}15$.

La probabilité de sortie de la face marquée 6

$p_6 = 1 - (p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5) = 1 - 0.85 = 0.15$

La probabilité d'obtenir un nombre pair

L'événement A « obtenir un nombre pair » étant $A = \{2; 4; 6\}$

$p(A) = p_2 + p_4 + p_6 = 0.2 + 0.1 + 0.15 = 0.45$

Exercice 46

Si on note p la probabilité d'apparition du chiffre 1, les probabilités d'apparition des autres faces sont respectivement égales à $2p,\ 3p,\ 4p,\ 5p,\ 6p$, puisque proportionnelles au numéro de chaque face.

Calculons la probabilité d'apparition de chaque face.

Etant donné que la somme des probabilités des événements élémentaires vaut 1.

on a : $p + 2p + 3p + 4p + 5p + 6p = 1$ donc $21p = 1 \implies p = \dfrac{1}{21}$

$p_1 = \dfrac{1}{21}$; $p_2 = \dfrac{2}{21}$; $p_3 = \dfrac{3}{21}$; $p_4 = \dfrac{4}{21}$; $p_5 = \dfrac{5}{21}$; $p_6 = \dfrac{6}{21}$

Calculons la probabilité d'obtenir un nombre pair.

L'événement A « obtenir un nombre pair » étant $A = \{2; 4; 6\}$

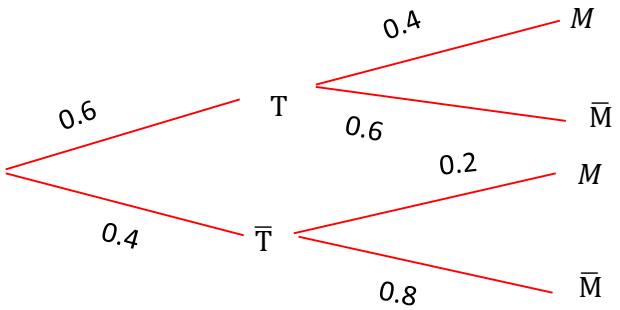
$p(A) = \dfrac{2}{21} + \dfrac{4}{21} + \dfrac{6}{21} = \dfrac{12}{21} \implies p(A) = \dfrac{4}{7}$

Exercice 47

On note T l'événement « le client achète un téléviseur » et M l'événement « le client achète un magnétoscope ».

$P(T) = 0.6$; $P(\bar{T}) = 1 - 0.6 = 0.4$; $P_T(M) = 0.4$; $P_T(\bar{M}) = 1 - 0.4 = 0.6$

$P_{\bar{T}}(M) = 0.2$; $P_{\bar{T}}(\bar{M}) = 1 - 0.2 = 0.8$



1) La probabilité pour qu'il achète un téléviseur et un magnétoscope

$P_T(M) = \dfrac{P(T \cap M)}{P(T)} \implies P(T \cap M) = P_T(M) \times P(T) = 0.4 \times 0.6 = 0.24$

2) La probabilité pour qu'il achète un magnétoscope (Probabilité totale)

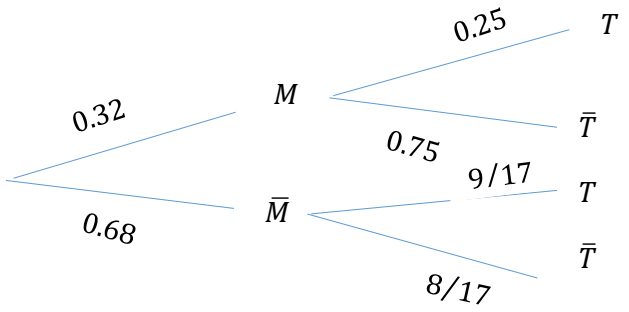
$P(M) = P(T \cap M) + P(\bar{T} \cap M) = P_T(M) \times P(T) + P_{\bar{T}}(M) \times P(\bar{T})$

$P(M) = 0.4 \times 0.6 + 0.4 \times 0.2 = 0.32$

3) La probabilité d'acheter un téléviseur en ayant un magnétoscope

$$P_M(T) = \frac{P(T \cap M)}{P(M)} = \frac{0.6 \times 0.4}{0.32} = 0.75$$

4) Complétons l'arbre de probabilité suivant :



$P(M) = 0.32 \Longrightarrow P(\bar{M}) = 1 - 0.32 = 0.68$; $P_M(T) = 0.75 \Longrightarrow P_M(\bar{T}) = 0.25$

$$P_{\bar{M}}(T) = \frac{P(T \cap \bar{M})}{P(\bar{M})} = \frac{0.6 \times 0.6}{0.68} = \frac{0.36}{0.68} = \frac{9}{17} \quad \Longrightarrow \quad P_{\bar{M}}(\bar{T}) = 1 - \frac{9}{17} = \frac{8}{17}$$

Exercice 48

Notons Ω l'ensemble des résultats possibles du jet de dé. On a *Card* (Ω) = 6.

Notons u_1 l'événement « Le tirage s'effectue dans l'urne u_1 » et u_2 l'événement « Le tirage s'effectue dans l'urne u_2 ».

$$P_{u_1}(B) = \frac{3}{4} \Longrightarrow P_{u_1}(\bar{B}) = \frac{1}{4} \quad ; \quad P_{u_2}(B) = \frac{1}{3} \Longrightarrow P_{u_2}(\bar{B}) = \frac{2}{3}$$

Puisqu'il y a équiprobabilité dans les résultats du lancer de dé, on a :

$$P(u_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad P(u_2) = \frac{2}{3}$$

1) Calculons la probabilité de tirer une boule blanche.
En appliquant la formule de la probabilité totale

$P(B) = P(u_1 \cap B) + P(u_2 \cap B) = P(u_1) \times P_{u_1}(B) + P(u_2) \times P_{u_2}(B) =$

$$P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{2}{9} = \frac{17}{36}$$

2) On a tiré une boule blanche. Calculons la probabilité qu'elle provienne de l'urne u_1

$$P_B(u_1) = \frac{P(u_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{3}{4}}{\frac{17}{36}} = \frac{1}{4} \times \frac{36}{17} = \frac{9}{17}$$

Exercice 49

Notons V l'événement « être vacciné » et M l'évènement « être malade ».

On a : $P(V) = \frac{1}{4} \quad \Longrightarrow \quad P(\bar{V}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$P_M(\bar{V}) = 4 \times P_M(V)$. On sait que $P_M(\bar{V}) + P_M(V) = 1$

Donc $P_M(V) = \frac{1}{5}$ et $P_M(\bar{V}) = \frac{4}{5}$. On a $P_V(M) = \frac{1}{12}$ donc $P_V(\bar{M}) = \frac{11}{12}$

a) Démontrons que la probabilité de tomber malade est égale à $\frac{5}{48}$

Appliquons la formule de la probabilité totale

$$P(M) = P(V \cap M) + P(\bar{V} \cap M) = P(V) \times P_V(M) + P(\bar{V}) \times P_V(\bar{M})$$

Or $P_{\bar{V}}(M) = \frac{P(\bar{V} \cap M)}{P(\bar{V})} = \frac{P(M) \times P_M(\bar{V})}{\frac{3}{4}} = \frac{P(M) \times \frac{4}{5}}{\frac{3}{4}} = \frac{16}{15} P(M)$

Aussi $P(M) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{12} + \frac{3}{4} \times \frac{16}{15} P(M) \Longrightarrow P(M) - \frac{12}{15} P(M) = \frac{1}{48}$

Donc $P(M)\left(1 - \frac{12}{15}\right) = \frac{1}{48} \quad \Longrightarrow \quad P(M) = \frac{1}{48} \times \frac{15}{3} = \frac{5}{48}$

b) La probabilité de tomber malade pour un individu non-vacciné

$$P_{\bar{V}}(M) = \frac{16}{15} P(M) = \frac{16}{15} \times \frac{5}{48} = \frac{1}{9}$$

c) L'efficace

D'après les calculs précédents, en moyenne, 1 individu sur 9 non vaccinés tombe malade, contre 1 individu sur 12 vaccinés.

Exercice 50

Le tableau suivant donne la répartition de 150 stagiaires en fonction de la langue choisie et de l'activité sportive choisie.

	Tennis	Equitation	Voile
Anglais	45	18	27
Allemand	33	9	18

1) Les événements « étudier l'allemand » et « pratiquer le tennis » sont-ils indépendants ?

2) Les événements « étudier l'anglais » et « pratiquer la voile » sont-indépendants ?

Exercice 51 (Bac Niger 199)

A) L'univers Ω est l'ensemble des arrangements des 18 chevaux trois à trois.
D'où card $\Omega = A_{18}^{3} = 4896$

a) Soit l'évènement A' 'Amadou gagne le tiercé dans l'ordre''

$$cardA = 1 \Leftrightarrow p(A) = \frac{1}{4896}$$

b) Soit l'évènement B' 'Amadou gagne le tiercé dans le désordre''

$$cardB = 3! - 1 = 5 \Leftrightarrow p(B) = \frac{5}{4896}$$

B) Soit les évènements suivants :

O' 'gagner le tiercé dans l'ordre''

H'' Le parieur est un homme''

F'' Le parieur est une femme''

Comme le nombre des hommes est le double de celui des femmes, alors :

$$p(F) = \frac{1}{3} \text{ et } p(H) = \frac{2}{3}$$

On sait que 6% des femmes gagnent le tiercé dans l'ordre et 12% des hommes le gagnent dans l'ordre. Ce qui se traduit par :

$$p(O/F) = 0.06 \; et \; p(O/H) = 0.12$$

1) a) Soit l'évènement C : « un membre du club gagne le tiercé dans l'ordre ».

$$p(C) = p(O \cap F) + p(O \cap H) = p(O/F) \times p(F) + p(O/H) \times p(H)$$

$$p(C) = \frac{6}{100} \times \frac{1}{3} + \frac{12}{100} \times \frac{2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad p(C) = \frac{1}{10}$$

b) Soit l'évènement D : « un gagnant dans l'ordre de ce club soit un homme».

$$p(D) = p(H/C) = \frac{p(H \cap C)}{p(C)} = \frac{p(O \cap H)}{p(C)} = \frac{p(O/H) \times p(H)}{p(C)}$$

$$\Leftrightarrow p(D) = \frac{0.12 \times \frac{2}{3}}{0.1} = 0.8 \quad \Leftrightarrow \quad p(D) = \frac{4}{5}$$

2) Dit l'évènement E : « il y'a exactement deux hommes parmi les 6 parieurs gagnants »

$$p(E) = C_6^2 \left(\frac{4}{5}\right)^2 \left(\frac{1}{5}\right)^4 \Leftrightarrow p(E) = 0.01536$$

Exercice 52 (Bac Niger 2001)

On note les événements suivants :

A « un électeur a choisi ADO »

B « un électeur a choisi BALA »

K « un électeur a choisi KADRI »

Z « un habitant de ZATA a voté ».

On donne les probabilités suivantes :

$P(A/Z) = \frac{3}{8}$; $P(B/Z) = \frac{1}{2}$; $P(K/Z) = \frac{1}{8}$; $P(z) = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$

1) La probabilité pour que 5 habitants de ZATA aient voté est égale à :

$$P_1 = \left(\frac{3}{5}\right)^5 = \frac{243}{3125} = 0.077$$

2) La probabilité pour qu'un habitant de ZATA choisisse BALA est égale à :

$$P_2 = P(B \cap Z) = P(B/Z) \times P(z) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} \quad \text{donc} \quad P_2 = \frac{3}{10} = 0.3$$

Exercice 53 (Bac Niger 2003)

1) Soit Ω l'univers des possibles associé à l'expérience aléatoire.

$\Omega = \{(1,2), (1,3), (2,1), (2,3), (3,1), (3,2)\} \Rightarrow card\Omega = A_3^2 = 6$

2) Calcul du module et argument de z_0 et $z_0{}'$

$z' = \alpha z \qquad avec \quad \alpha = \frac{a}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}b\right) + isin\left(\frac{\pi}{3}b\right)\right]$

Soit A le point d'affixe $z_0 = \sqrt{3} + i$ et A' le point d'affixe $z_0{}' = \alpha z_0$

$$|z_0| = \sqrt{3+1} = 2 \;\; et \;\; \arg(z_0) = \begin{cases} cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ sin\theta = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{6}$$

Calcul du module et de l'argument de $z_0{}'$ suivant les valeurs de (a, b)

- Pour $(a, b) = (1,2)$

$$z_0{}' = \left[\frac{1}{2}; \frac{2\pi}{3}\right].\left[2; \frac{\pi}{6}\right] \;\; donc \; |z_0{}'| = \frac{1}{2} \times 2 = 1 \;\; et \;\; \arg(z_0{}') = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

- Pour $(a, b) = (1,3)$

$$z_0{}' = \left[\frac{1}{2}; \pi\right].\left[2; \frac{\pi}{6}\right] \;\; donc \; |z_0{}'| = \frac{1}{2} \times 2 = 1 \;\; et \;\; \arg(z_0{}') = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$$

- Pour $(a, b) = (2,1)$

$$z_0{}' = \left[1; \frac{\pi}{3}\right].\left[2; \frac{\pi}{6}\right] \;\; donc \; |z_0{}'| = 1 \times 2 = 2 \;\; et \;\; \arg(z_0{}') = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$$

- Pour $(a, b) = (2,3)$

$$z_0{}' = [1; \pi].\left[2; \frac{\pi}{6}\right] \;\; donc \; |z_0{}'| = 1 \times 2 = 2 \;\; et \;\; \arg(z_0{}') = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$$

- Pour $(a, b) = (3,1)$

$$z_0{}' = \left[\frac{3}{2}; \frac{\pi}{3}\right].\left[2; \frac{\pi}{6}\right] \;\; donc \; |z_0{}'| = \frac{3}{2} \times 2 = 3 \;\; et \;\; \arg(z_0{}') = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$$

- Pour $(a, b) = (3,2)$

$$z_0{}' = \left[\frac{3}{2}; \frac{2\pi}{3}\right].\left[2; \frac{\pi}{6}\right] \;\; donc \; |z_0{}'| = \frac{3}{2} \times 2 = 3 \;\; et \;\; \arg(z_0{}') = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

3) Calcul des probabilités

Pour l'évènement E_1 « les points O, A et A' sont alignés ».

OAA' sont alignés si et seulement si $\frac{z_0{}'}{z_0}$ ou $\frac{z_0}{z_0{}'}$ est réel et $arg\left(\frac{z_0{}'}{z_0}\right)$ ou $arg\left(\frac{z_0}{z_0{}'}\right)$ est égal à $2k\pi \; ou \; (2k+1)\pi \; avec \; k \in \mathbb{Z}$

Donc $(a,b) = (1,3)$ ou $(a,b) = (2,3)$. Alors $card\ E_1 = 2$.

Comme $card\Omega = 6$, donc $p(E_1) = \frac{1}{3}$

Pour l'évènement E_2 «$z_0{}'$ est imaginaire pur ».

$z_0{}'$, est imaginaire pur si et seulement si $\arg(z_0{}') = \pm\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

Donc $(a,b) = (3,1)$ ou $(a,b) = (2,1)$. Alors $card\ E_2 = 2$.

Comme $card\Omega = 6$, donc $p(E_2) = \frac{1}{3}$

Exercice 54 (Bac Niger 2005)

On lance un dé cubique dont les faces sont numérotés de 1 à 6 et une pièce dont on distingue les côtés pile (P) et face (F). A chaque lancer, on associe le nombre complexe $z = \rho e^{\frac{in\pi}{6}}$ défini de la manière suivante : $\rho = 1$ si face (F) apparait sur la pièce ; $\rho = 2$ si pile (P) apparait sur la pièce ; n est le nombre lu sur la face supérieure du dé.

1) La pièce et le dé ne sont pas truqués.

a) Déterminons l'ensemble des points M que l'on peut obtenir et plaçons les dans $(O, \vec{I}, \vec{J})$. (les points obtenus seront notés : A_n pour $\rho = 1$ et B_n pour $\rho = 2$, (n étant l'entier lu sur le dé).

■ Si $\rho = 1$; on a : $M_1 \to z_1 = e^{\frac{i\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$; alors $A_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$

Si $\rho = 1$; on a : $M_2 \to z_3 = e^{\frac{i\pi}{3}} = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$; alors $A_2\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Si $\rho = 1$; on a : $M_3 \to z_3 = e^{\frac{i\pi}{2}} = i$; alors $A_3(0\,;1)$

Si $\rho = 1$; on a : $M_4 \to z_4 = e^{\frac{i2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$; alors $A_4\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Si $\rho = 1$; on a : $M_5 \to z_5 = e^{\frac{i5\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$; alors $A_5\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$

Si $\rho = 1$; on a : $M_6 \to z_6 = e^{i\pi} = -1$; alors $A_6(-1\,;0)$

■ Si $\rho = 2$; on a : $M_1' \to z_1' = 2e^{\frac{i\pi}{6}} = \sqrt{3} + i$; alors $B_1(\sqrt{3}\,;1)$

Si $\rho = 2$; on a : $M_2' \to z_2' = 2e^{\frac{i\pi}{3}} = 1 + i\sqrt{3}$; alors $B_2\left(1\,;\sqrt{3}\right)$

Si $\rho = 2$; on a : $M_3' \to z_3' = 2e^{\frac{i\pi}{2}} = 2i$; alors $B_3(0\,;2)$

Si $\rho = 2$; on a : $M_4' \to z_4' = 2e^{\frac{i2\pi}{3}} = -1 + i\sqrt{3}$; alors $B_4\left(-1\,;\sqrt{3}\right)$

Si $\rho = 2$; on a : $M_5' \to z_5' = 2e^{\frac{i5\pi}{3}} = -\sqrt{3} + i$; alors $B_5\left(-\sqrt{3}\,;1\right)$

Si $\rho = 2$; on a : $M_6' \to z_6' = 2e^{i\pi} = -2$; alors $B_6(-2\,;0)$

Alors l'ensemble des points M est :

$S = \{\, A_1\,, A_2\,, A_3\,, A_4\,, A_5\,, A_6\,, B_1\,, B_2\,, B_3\,, B_4\,, B_5\,, B_6\,\}$

b) Calculons la probabilité pour que l'ordonnée Y soit égale à 1

$$Y = 1 \iff \left(A_3(0\,;1)\,;\, B_1\left(\sqrt{3}\,;1\right)\,;\, B_5\left(-\sqrt{3}\,;1\right)\right) \implies P = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

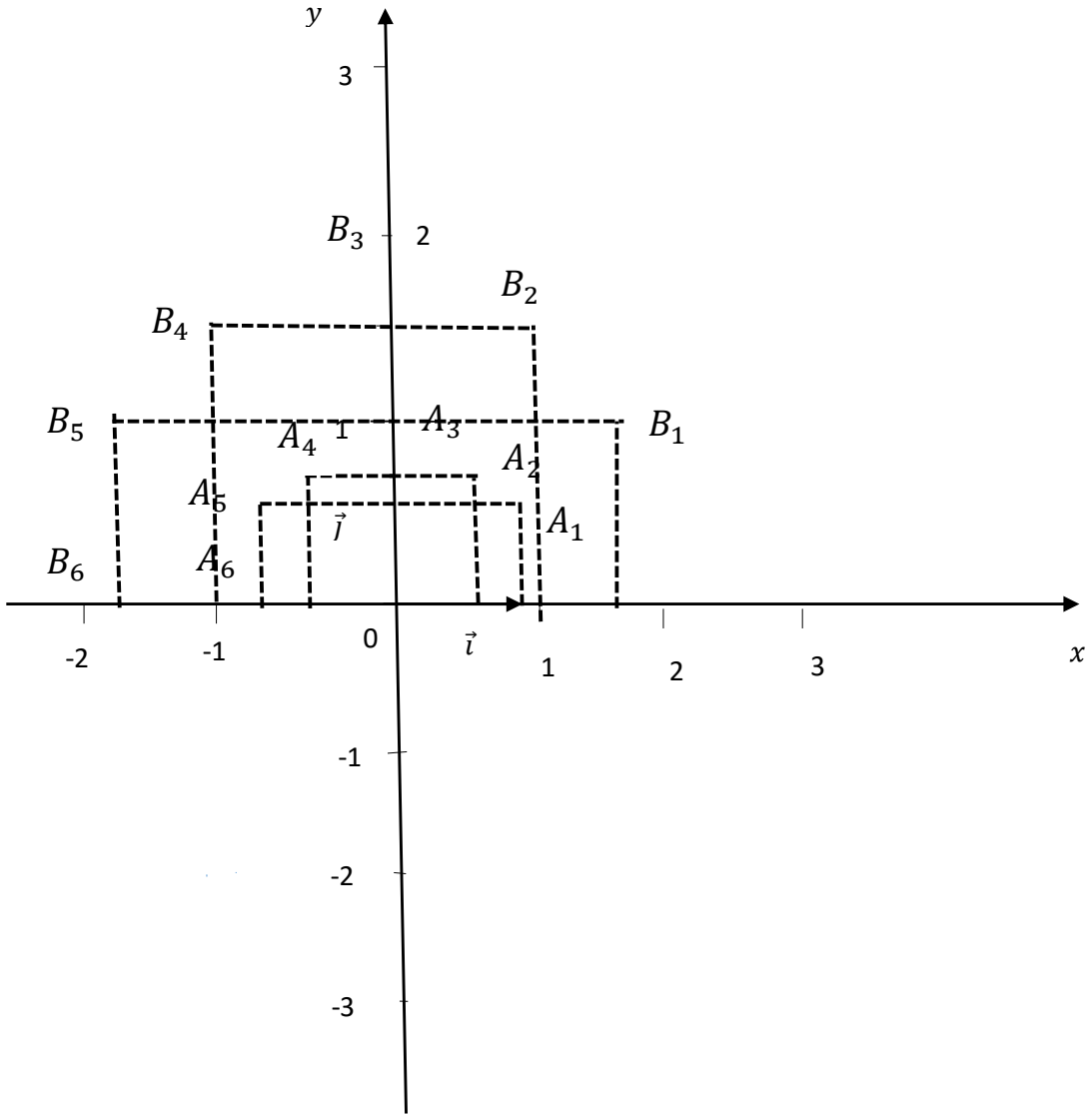
2) On remplace le dé par une deuxième pièce non truquée. Le jeu consiste à lancer les deux pièces non truquées. Avant de les lancer un joueur doit payer m francs. Si le lancer amène une seule face, le joueur gagne 5 F, si le lancer amène deux faces, il gagne 30 F. Sinon il perd la partie (c'est-à-dire il gagne 0 F). On appelle X le gain net obtenu, gain exprimé en fonction de m.

a) Déterminons la probabilité d'obtenir deux faces et celle d'obtenir une face.

D_2 \ D_1	P	F
P	(P,P)	(F,P)
F	(P,F)	(F,F)

La probabilité d'obtenir deux faces est : $P_1 = \frac{1}{4}$

La probabilité d'obtenir une face est : $P_2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$



b) Dressons la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

$X(\Omega) = \{5 - m; 30 - m; -m\}$

$P(X = 5 - m) = \frac{1}{2}$; $P(X = -m) = \frac{1}{4}$; $P(X = 30 - m) = \frac{1}{4}$

x_i	$-m$	$5-m$	$30-m$
P_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

c) Calculons l'espérance mathématique de X.

$$E(X) = -m \times \frac{1}{4} + (5-m)\frac{1}{2} + (30-m)\frac{1}{4} = \frac{-m+10-2m+30-m}{4}$$

$$= \frac{40-4m}{4} \quad \Longrightarrow \quad E(X) = 10-m$$

d) Le prix de la partie pour que ce jeu soit équitable.

Pour que le jeu soit équitable, il faut que $E(X)$ soit nulle

$$E(X) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 10-m = 0 \quad \Longrightarrow \quad m = 10$$

e) On donne m = 10.

i. Calculons la variance et l'écart type de X.

$$V(X) = \sum_{x=i}^{n} {x_i}^2 P_i - \left((E(X)\right)^2 = \frac{100}{4} + \frac{25}{2} + \frac{400}{4} - 0 = \frac{100+50+400}{4}$$

$$= \frac{550}{4} \quad \Longrightarrow \quad V(X) = 137.50$$

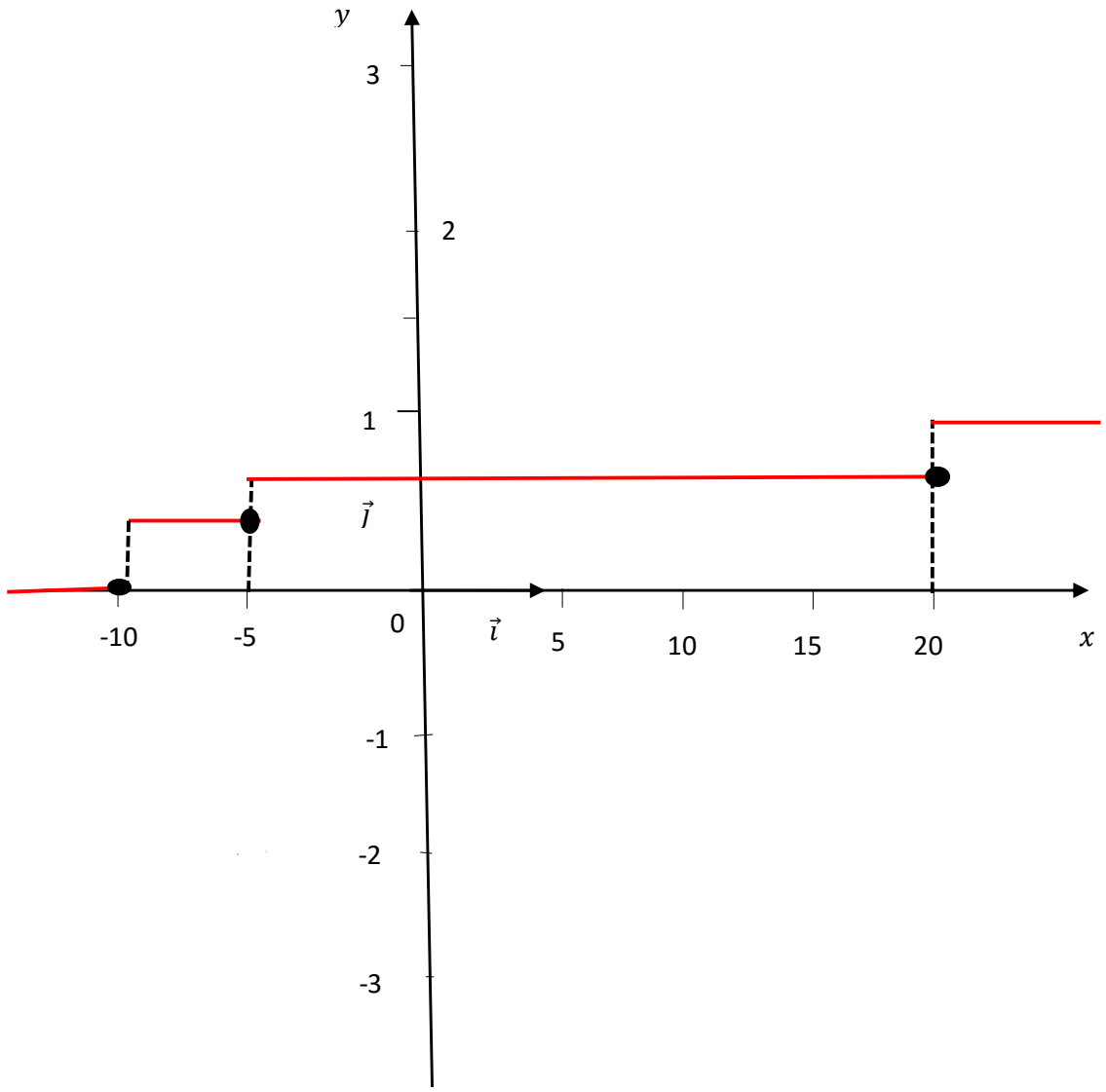
$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{137.50} = 11.726 \quad \Longrightarrow \quad \sigma(X) = 11.726$$

ii. Définissons la fonction de répartition de F de X.

Soit $F : \begin{cases} \mathbb{R} \to [\,0;1\,] \\ X \longmapsto F(X) = P(X \geq x_i) \end{cases}$ $tel\ que$:

$$\forall x \in]-\infty, -10[\ ;\ F(x) = 0 \qquad ; \qquad \forall x \in]-10, -5[\ ;\ F(x) = \frac{1}{4}$$

$$\forall x \in]-5\,, 20[\ ;\ F(x) = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4} \quad ; \quad \forall x \in]20\,, +\infty[\ ;\ F(x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$$



Exercice 55 (Bac Niger 2006)

On considère les évènements suivants :

A_n « l'électeur est favorable à la liste A au n^{ième} jour de campagne »

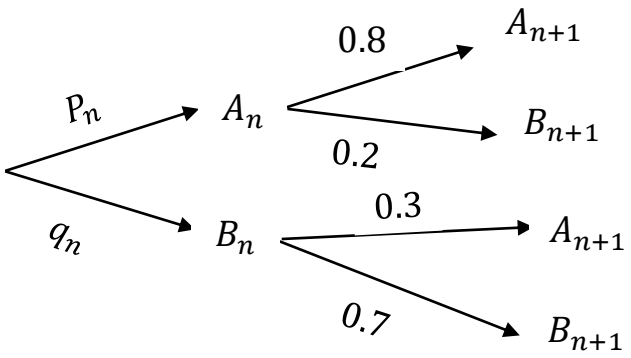
B_n « l'électeur est favorable à la liste B au n^{ième} jour de campagne »

On note p_n et q_n les probabilités respectives des événements A_n et B_n et on admet que chaque électeur ne se détermine que pour les listes A et B.

1) Relation simple entre p_n et q_n.

$p_n + q_n = 1$

2) a) Détermination de l'arbre des probabilités.



b) Calcul de $P(A_{n+1}/A_n)$ et $P(A_{n+1}/B_n)$.

$P(A_{n+1}/A_n) = 0.8$, et $P(A_{n+1}/B_n) = 0.3$ (Lecture sur l'arbre des probabilités)

a) Montrons que $P(A_{n+1} \cap A_n) = 0.8P_n$ et $P(A_{n+1} \cap B_n) = 0.3q_n$.

$On\ a\ P(A_{n+1}/A_n) = \dfrac{P(A_{n+1} \cap A_n)}{p(A_n)} \Leftrightarrow P(A_{n+1} \cap A_n) = P(A_{n+1}/A_n) \times p(A_n)$

$= 0.8p(A_n) = 0.8P_n$, comme $P_n = p(A_n)$

$P(A_{n+1}/B_n) = \dfrac{P(A_{n+1} \cap B_n)}{p(B_n)} \quad \Leftrightarrow \quad P(A_{n+1} \cap B_n) = P(A_{n+1}/B_n) \times p(B_n)$

$0.3p(B_n) = 0.3q_n$, comme $p(B_n) = q_n$.

Déduisons que $P(A_{n+1}) = 0.8P_n + 0.3q_n$; puis que $p_{n+1} = 0.5P_n + 0.3$.

$P(A_{n+1}) = P(A_{n+1}/A_n) + P(A_{n+1}/B_n) = 0.8P_n + 0.3q_n$

$P_{n+1} = P(A_{n+1}) = 0.8P_n + 0.3q_n\ or\ p_n + \ q_n = 1 \ \Leftrightarrow \ q_n = 1 - p_n$

$\Leftrightarrow P_{n+1} = P(A_{n+1}) = 0.8P_n + 0.3(1 - p_n)\ donc\ P_{n+1} = 0.5P_n + 0.3$

3) Soit la suite(U_n) de terme général $U_n = P_n - 0.6$

a) Montrons que (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

$U_{n+1} = P_{n+1} - 0.6 = 0.5P_n + 0.3 - 0.6 = 0.5P_n - 0.3 = 0.5(P_n - 0.6)$

Donc $U_{n+1} = 0.5U_n$. Alors (U_n) est une suite géométrique de raison 0.5

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} (P_n - 0.6) = 0$$

b) Déduisons la limite de P_n

$$\lim_{n\to+\infty} P_n = \lim_{n\to+\infty} (U_n + 0.6) = 0 + 0.6 = 0.6$$

Exercice 56 (Bac Niger 2007)

1) Déterminons les éléments de l'univers des éventualités
$\Omega = \{(1,1,1); (1,1,2); (1,2,1); (2,1,1); (1,2,2)(2,1,2); (2,2,1)\}$

2) Déterminons a et b sachant que $p(x, y, z) = a(x + y + z) + b$
$p(1,1,1) = 3a + b$; $p(1,1,2) = 4a + b$; $p(1,2,1) = 4a + b$; $p(2,1,1) = 4a + b$

$p(1,2,2) = 5a + b$; $p(2,1,2) = 5a + b$; $p(2,2,1) = 5a + b$

$A = \{(1,1,1) ; (1,1,2) ; (1,2,1) ; (1,2,2)\}$

$p(A) = p(1,1,1) + p(1,1,2) + p(1,2,1) + p(1,2,2) \Leftrightarrow p(A) = 16a + 4b$

$B = \{(1,1,1) ; (2,1,1) ; (1,2,2)\}$

$p(B) = p(1,1,1) + p(2,1,1) + p(1,2,2) \Leftrightarrow p(B) = 12a + 3b$

$$\begin{cases} p(\Omega) = 1 \\ p(A) - p(B) = \frac{4}{35} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 30a + 7b = 1 \\ 4a + b = \frac{4}{35} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{10} \\ b = -\frac{2}{7} \end{cases}$$

3) Déterminons la loi de probabilité de X
$X(\Omega) = \{-2 ; 1 ; 3\}$

$$p(X = -2) = p(1,1,2) + p(1,2,1) + p(2,1,1) = \frac{12}{35} = \frac{24}{70}$$

$$p(X = 1) = p(1 ,2 ,2) + p(2 ,1 ,2) + p(2 ,2 ,1) = \frac{9}{14} = \frac{45}{70}$$

$$p(X = 3) = p(1 ,1 ,1) = \frac{1}{70}$$

Calcul de l'Esperance mathématique et de la variance

$$E(X) = \frac{-2 \times 24 + 1 \times 45 + 3 \times 1}{70} = \frac{-48 + 45 + 3}{70} = 0$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{E(X^2)} = \sqrt{\frac{(-2)^2 \times 24 + (1)^2 \times 45 + (3)^2 \times 1}{70}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sigma(X) = \sqrt{\frac{96+45+9}{70}} = \sqrt{\frac{15}{7}}$$

Exercice 57 (Bac Niger 2009)

A) En notant $P(A/B)$ la probabilité de l'événement « A sachant B » et $\bar{B}$ l'événement contraire de B, démontrons que :

$$P(A/\bar{B}) = \frac{P(A) - P(A/B) \times P(B)}{1 - P(B)}$$

$$P(A/\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A \cap \bar{B})}{1 - P(B)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)}$$

$$\Rightarrow \quad P(A/\bar{B}) = \frac{P(A) - P(A/B) \times P(B)}{1 - P(B)}$$

B) 1) Calculons en fonction de b la probabilité p pour qu'un chien errant survivant soit enragé.

Soit A l'évènement « le chien errant soit abattu » ; alors $\bar{A}$ l'évènement « le chien errant est survivant ». Soit E l'évènement « le chien errant est enragé ».

Donc p = p (chien enragé / chien errant survivant) = $P(E/\bar{A})$

$$P(E/\bar{A}) = \frac{P(E) - P(E/A) \times P(A)}{1 - P(A)}$$

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1 \;\; or \;\; P(A) = b \;\; donc \;\; P(\bar{A}) = 1 - b$$

$$P(E/A) = \frac{40}{100} \; et \; P(E) = \frac{30}{100} \; donc \; P(E/\bar{A}) = \frac{\frac{30}{100} - \frac{40}{100} \times b}{1 - b} = \frac{0.3 - 0.4b}{1 - b}$$

$$\Rightarrow \quad P(E/\bar{A}) = \frac{0.3 - 0.4b}{1 - b}$$

2) Calculons la plus petite valeur de b pour laquelle p est inférieur ou égale à 0.1

$$P(E/\bar{A}) < 0.1 \quad \Rightarrow \quad \frac{0.3 - 0.4b}{1 - b} < 0.1 \quad \Rightarrow \quad 0.3 - 0.4b < 0.1 - 0.1b$$

$$\Rightarrow \; 0.3 - 0.1 < 0.4b - 0.1b \; \Rightarrow \; 0.2 < 0.3b \; \Rightarrow \; \frac{0.2}{0.3} < b \; \Rightarrow \; \frac{2}{3} < b \; \Rightarrow b > \frac{2}{3}$$

Ainsi la plus petite valeur de b est $\frac{2}{3}$

1) Calculons la probabilité d'avoir décontaminé au moins huit territoires sur les dix à l'issue de la campagne d'abattage

$$p(x \geq 8) = p(x = 8) + p(x = 9) + p(x = 10)$$

$$p(x \geq 8) = C_{10}^{8}\left(\frac{1}{3}\right)^{8} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{2} + C_{10}^{9}\left(\frac{1}{3}\right)^{9} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{1} + C_{10}^{10}\left(\frac{1}{3}\right)^{10} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{0}$$

$$p(x \geq 8) = C_{10}^{8}\left(\frac{1}{3^8} \times \frac{4}{3^2}\right) + C_{10}^{9}\left(\frac{1}{3^9} \times \frac{2}{3^1}\right) + \frac{1}{3^{10}}$$

$$p(x \geq 8) = \frac{1}{3^{10}}(45 \times 4 + 10 \times 2 + 1)$$

$$p(x \geq 8) = \frac{201}{3 \times 3^9} = \frac{67}{3^9} \quad \Rightarrow \quad p(x \geq 8) \approx 0.0034$$

Exercice 58 (Bac Niger 2011)

1. Calcul de la probabilité d'un prélèvement unicolore

$$P(A) = \frac{C_3^3 + C_3^3 + C_3^3}{C_9^3} = \frac{1+1+1}{84} = \frac{3}{84} = \frac{1}{28} \quad \Rightarrow \quad P(A) = \frac{1}{28}$$

2. Calcul de la probabilité d'un prélèvement tricolore

$$P(B) = \frac{C_3^1 C_3^1 C_3^1}{C_9^3} = \frac{3 \times 3 \times 3}{84} = \frac{27}{84} = \frac{9}{28} \quad \Rightarrow \quad P(B) = \frac{9}{28}$$

3. Déduction de la probabilité d'un prélèvement bicolore

$$P(C) = \frac{3C_3^2 C_6^1}{C_9^3} = \frac{3 \times 3 \times 6}{84} = \frac{54}{84} = \frac{18}{28} \quad \Rightarrow \quad P(C) = \frac{9}{14}$$

4. La probabilité d'avoir exactement deux boules rouges sachant que le prélèvement est bicolore

$$P(D) = \frac{(P_{2\,boules\,rouges} \cap P_{bicolore})}{C_9^3} = \frac{\frac{C_3^2 C_6^1}{C_9^3}}{\frac{3C_3^2 C_6^1}{C_9^3}} = \frac{\frac{18}{84}}{\frac{9}{14}} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad P(D) = \frac{1}{3}$$

Exercice 59 (Bac Niger 2015)

Une urne contient quatre boules roses, trois boules vertes et deux boules jaunes indiscernables au toucher. On tire simultanément trois boules de l'urne.

1) Déterminons la probabilité d'obtenir :

a) Les trois couleurs

$$P_1 = \frac{C_4^1 \times C_3^1 \times C_2^1}{C_9^3} = \frac{24}{84} = \frac{2}{7} \quad \Longrightarrow \quad P_1 = \frac{2}{7}$$

b) Les deux boules jaunes

$$P_2 = \frac{C_2^2 \times C_7^1}{C_9^3} = \frac{7}{84} = \frac{1}{12} \quad \Longrightarrow \quad P_2 = \frac{1}{12}$$

c) Au moins une boule jaune

$$P_3 = \frac{C_2^1 \times C_7^2 + C_2^2 \times C_7^1}{C_9^3} = \frac{42 + 7}{84} = \frac{49}{84} \quad \Longrightarrow \quad P_3 = \frac{49}{84}$$

Exercices d'approfondissement

Exercice 1:

On pose E = {0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9}.

1) Donner :

- Trois arrangements de 2 éléments de E (2-arrangement) ;
- Trois arrangements de 3 éléments de E (3-arrangement) ;
- Trois arrangements de 4 éléments de E (4-arrangement) ;
- Trois arrangements de 5 éléments de E (5-arrangement).

2) Parmi les 4-listes d'éléments de E, dire ceux qui sont des 4-arrangements (et ceux qui ne le sont pas) : (5 ; 2 ; O ; 7) ; (3 ; 1 ; 0 ; 1) ; (1 ; 1 ; 1 ; 1) ; (2 ; 5 ; 4 ; 3) ; (0 ; 1 ; 2 ; 3) ; (1 ; 0 ; 0 ; 0).

Exercice 2 :

On pose E = {r ; s ; t ; u ; v ; w}. Donner :

- Toutes les combinaisons de 2 éléments de E ;
- Toutes les combinaisons de 3 éléments de E ;
- Toutes les combinaisons de 4 éléments de E ;
- Toutes les combinaisons de 5 éléments de E ;

Combien de combinaison de 6 éléments de E peut-on former ?

Exercice 3 :

1) Calculer les nombres suivants :

A_3^2 ; A_5^3 ; A_{10}^5 ; A_{1000}^2.

2) Exprimer en fonction de n et p les nombres suivants :

$\frac{A_n^p}{A_{n-1}^p}$; $\frac{A_n^p}{A_n^{p-1}}$

3) Calculer les nombres suivants :

C_3^2 ; C_5^3 ; C_{10}^5 ; C_4^4 ; C_{17}^3

4) Calculer le plus simplement possible :

$C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5$.

Exercice 4 :

On lance simultanément deux dés non truqués dont les faces sont numérotées de1 à 6.
On note les deux numéros sur les faces supérieurs.

1) Dénombrer tous les cas possibles.
2) Dénombrer les cas où :

a) La somme des numéros obtenus est égale à 6.
b) La somme des numéros obtenus est impaire.
c) La somme des numéros obtenus est paire.
d) La somme des numéros obtenus est supérieure à 8.
e) La somme des numéros obtenus est inférieure ou égale à 4.

Exercice 5 :

Dans une urne il Ya 5 jetons blancs, 6 jetons rouges et 3 jetons verts. On tire simultanément 3 jetons.

1) Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2) Combien y a-t-il de tirages :

a) Unicolores ?
b) Tricolores ?
c) Bicolores ?
d) Avec exactement un jeton rouge ?
e) Avec au moins un jeton rouge ?

Exercice 6 :

Une urne contient 12 boules blanches et 8 boules noires.

1) On tire simultanément et au hasard 5 boules de l'urne. Déterminer :

a) Le nombre de tirage possibles.
b) Le nombre de tirage contenant 2 boules noires et 3 boules blanches.
c) Le nombre de tirage contenant des boules de même couleur.

2) On tire successivement 5 boules, la boule tirée étant remise dans l'urne après chaque tirage.

a) Combien a- t- on de tirage possible ?
b) Combien a-t-on de tirage contenant 2 boules noires et 3 boules blanches dans cet ordre ?

Exercice 7 :

Lors d'une course hippique, 20chevaux prennent le départ. 4 parmi ces chevaux sont favoris.

1) On décide d'observer l'ensemble des trois premiers chevaux. On dit que l'on s'intéresse «au tiercé dans le désordre»

a) Quel est l'ensemble Ω1 des résultats possibles ? Quel est son cardinal ?
b) Déterminer le cardinal de chacun des ensembles suivants :

A : «parmi les trois premiers figurent deux favoris»
B : «parmi les trois premiers figurent au moins deux favoris»

2) On décide d'observer le cheval qui arrive le premier, puis le deuxième, puis le troisième. On dit que l'on s'intéresse «au tiercé dans l'ordre».

a) Quel est l'ensemble Ω2 des résultats possibles ? Quel est son cardinal ?
b) Déterminer le cardinal de l'ensemble A défini ci-dessus.

Exercice 8 :

1) Dans une urne contenant cinq boules blanches, trois noires et sept rouges, on tire successivement trois boules. Déterminer le nombre de tirages possibles :

a) Si le tirage s'effectue avec remise de la boule tirée.
b) Si le tirage s'effectue sans remise.
2) Maintenant on tire simultanément trois boules de l'urne.
a) Déterminer le nombre de tirages possibles.
b) Déterminer le cardinal de chacun des ensembles suivants :
A : «le tirage contient au moins une boule noire»
B : «le tirage contient au plus deux boules blanches»
C : «le tirage contient exactement une boule rouge»
D : «le tirage ne contient que des boules de la même couleur »

Exercice 9 :

On dispose d'un jeu de 32 cartes. On en prend simultanément 8, ce qui constitue une «main».

a) Combien y a-t-il de mains de possibles ?

Dénombrer les mains contenant :

b) Exactement deux as ;
c) Aucun as ;
d) Au moins un as ;
e) Exactement deux cœurs et trois piques ;
f) Exactement deux cœurs, trois piques et un trèfle ;
g) Au plus deux dames.

Exercice 10 :

On met les lettres du mot PARAMILITAIRE dans un sac. Ces lettres sont supposées indiscernables au toucher. On tire successivement et sans remise 6 lettres du sac. De combien de façon différentes peut –on obtenir :

a) Le mot PLAIRE
b) Le mot LIMITE

- les lettres du mot étant tirées dans le bon ordre ?
- Les lettres du mot étant tirées dans l'ordre ou dans le désordre ?

Exercice 11 :

Pour ouvrir un coffre-fort, on doit composer un code secret de quatre chiffres sur un tableau informatique de dix chiffres : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9.

1) Déterminer le nombre de codes possibles.
2) Combien y a-t-il de codes commençant par 2 ?
3) Combien y a-t-il de codes ne contenant pas 0 ?

Exercice 12 :

Sur 8224 voitures vendues par une société commerciale, 5243 sont équipées d'un lecteur de cassettes tandis que 4932 sont équipées d'une climatisation et 1927 voitures ne possèdent ni lecteur de cassettes, ni climatisation.
Combien de voitures sont à la fois équipées d'un lecteur de cassettes et d'une climatisation ?

Exercice 13 :

Monsieur DIOP possède dans son armoire quatre pantalons dont deux noirs et deux bleus, six chemises dont trois blanches, et deux bleues et une jaune. Au moment de s'habiller, survient une panne d'électricité. Monsieur DIOP, pressé, enfile un pantalon et une chemise sans se préoccuper de la couleur de ses vêtements.

1) Combien a-t-il de manières différentes de s'habiller ?
2) Combien a-t-il de manière de s'habiller sachant qu'il porte :

a) Une chemise blanche ?
b) Un pantalon noir ?
c) Un pantalon bleu et une chemise jaune ?

Exercice 14 :

Lors de son anniversaire Abdou a invité sept de ses camarades, Bintou, Kamel, Habib, Koffi, Paul, Fatimata et Aîssatou. Aucun n'a promis avec assurance qu'il viendrait.
Quel est le nombre des possibilités différentes auxquelles Abdou sera confronté ?

Exercice 15 :

En supposant qu'il n'y a pas de répétition,

a) Combien de nombre de 3 chiffres peut-on former à l'aide des chiffres : 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 7 ; 9 ?
b) Combien de ces nombres sont inférieurs à 400 ?
c) Combien sont-ils pairs ?
d) Combien sont-ils multiples de 5 ?

Exercice 16 :

Dans un Lycée, on demande aux élèves de la première s'ils ont lu Marx, Sartre et Freud.

- 18 ont lu Marx, 11 ont lu Sartre et 17Freud ;
- 9 n'ont lu aucun des auteurs ;
- 5 ont lu Marx et Sartre, 8 ont lu Sartre et Freud, 9 ont lu Freud et Marx ;
- 3 ont lu les 3 auteurs.

a) Faire un diagramme.
b) Quel est l'effectif de cette classe ?
c) Combien d'élèves ont lu exactement 2 des 3 auteurs ?

d) Combien d'élèves n'ont lu que Freud ?
e) Combien d'élèves ont lu Sartre ou Marx ?
f) Combien d'élèves ont lu au plus un auteur ?

Exercice 17 :

Dans une classe de première, sont étudiées les langues suivantes : anglais, allemand, espagnol.
Chaque élève étudie au moins une langue ; 5 étudient les trois langues, 7 l'anglais et l'allemand, 8 l'anglais et l'espagnol, 9 l'allemand et l'espagnol.
Enfin 20 étudient (seulement) l'anglais, 15 l'allemand, 18 l'espagnol. Quel est l'effectif de la classe ?

Exercice 18 :

1. On tire simultanément trois jetons d'une boîte en contenant 7.

Combien y-a-t-il de tirages différents possibles ?

2. On considère 8 points du plan distincts deux à deux.

a) Quel est le nombre de segments que l'on peut former ?

b) Quel est le nombre de triangles que l'on peut former ?

3. On trace 4 droites horizontales et 5 droites verticales.

a) De combien de manières peut-on choisir deux droites horizontales ?

Deux droites verticales ?

b) Combien y a-t-il de rectangles sur la figure ?

4. On tire simultanément six pièces d'un jeu de dominos.

Combien existe-t-il de tirages différents ?

Indication : un jeu de dominos comporte 28 pièces.

5. Le foyer du Lycée a besoin d'une équipe de 3 personnes pour l'animer.

Quel est le nombre d'équipes différentes que l'on peut former à l'aide des 631 élèves du Lycée ?

6. On tire simultanément trois cartes dans un jeu de 52.

Combien de "mains" peut-on ainsi former ?

Une main est un tirage de trois cartes du jeu.

8. Dans une classe de 27 élèves, combien a-t-on de façons de choisir deux délégués ?

9.a) Combien d'équipes féminines de basket peut-on former avec les 12 filles de la classe de Terminale A ?

b) Combien d'équipes contiennent Julie ? (Julie est l'une des 12 filles de la classe de Terminale A.)

Exercice 19 :

On tire simultanément cinq cartes d'un jeu de 32 cartes, elles forment une "main" de cinq cartes.

1. Combien de mains différentes peut-on obtenir ?

2. Combien de mains respectant les contraintes ci-dessous peut-on obtenir :

a) contenant le roi de carreau ?

b) contenant un roi exactement ?

c) Contenant deux carreau exactement ?

Exercice 20

Un libraire propose 30 titres différents d'un même auteur :

L 5 de ces livres ont une couverture plastifiée et coûtent 9 € ;

L2 ont une couverture toilée et coûtent 6 € ;

Les autres sont cartonnés et coûtent 3 €.

Un client vient acheter 3 livres de cet auteur sans préciser de titre particulier.

Le libraire prend au hasard et simultanément 3 livres de sa collection.

1. Combien y a-t-il de choix possibles ?

2. Combien y a-t-il de façons de choisir :

a) 3 livres ayant une couverture plastifiée ?

b) trois livres ayant même couverture ?

c) trois livres pour un montant exact de 15 €.

Exercice 21

Dans une classe de 25 élèves, 15 élèves s'intéressent à la musique, 8 élèves s'intéressent au jeu d'échecs et 3 élèves s'intéressent à la fois à la musique et au jeu d'échecs.

Compléter le diagramme suivant :

1. Combien d'élèves ne s'intéressent ni à la musique, ni au jeu d'échecs ?

2. On choisit un groupe de quatre élèves de la classe.

Combien de groupes peut-on former au total ?

3. Combien de groupes comportent :

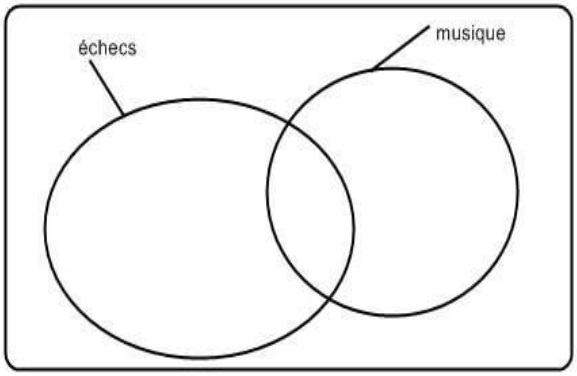
b) 4 élèves qui s'intéressent à la musique.

c) 2 élèves exactement qui s'intéressent à la musique.

d) 3 élèves exactement qui ne s'intéressent ni à la musique, ni aux échecs.

e) 3 élèves exactement qui s'intéressent à la musique et 1 élève exactement s'intéressent au jeu d'échec.

Indication : d'abord on étudiera le cas où le joueur d'échec est également musicien.



Exercice 22

Dans son porte-monnaie, Jean possède 3 pièces de 2 € ; 4 pièces de 4 € et 4 pièces de 0,50 €.Il prend au hasard cinq pièces de son porte-monnaie.

1. Combien y a-t-il de tirages différents possibles ?

2. Combien y a-t-il de tirages comportant :

a) 1 pièce de 2 €, deux pièces de 1 € et deux pièces de 0,50 € ?
b) Deux pièces de 1 € ?
c) Au moins une pièce de 2 € ?
d) Correspondant à une somme de 4 € ?
e) Correspondant à une somme strictement supérieure à 6 € ?

Exercice 23

Un touriste revient de vacances avec 15 films :

2 films de photographies d'Italie ;

8 films de photographies de Grèce ;

5 films de photographies de Turquie.

Aucune marque distinctive ne permet d'identifier les films. Pour des raisons financières, le touriste ne fait développer, à son retour, que 11 de ces films.

1. Combien y a-t-il de choix différents possibles de 11 films parmi les 15 ?

2. On tire au hasard 11 de ces films.

Combien y a-t-il de tirages contenant :

a) tous les films sur la Grèce ?

b) aucun film sur l'Italie ?

c) autant de films sur la Grèce que sur la Turquie ?

d) deux fois plus de films sur la Turquie que sur l'Italie ?

Exercice 24

Sur les bords d'un étang, un homme a pêché, au cours de la journée, 10 poissons qu'il garde dans un panier .Pour chaque espèce, un règlement impose aux pêcheurs de ne garder que les poissons dont la longueur dépasse un certain seuil. Les autres, ne possédant pas la dimension réglementaire, doivent impérativement être remis à l'eau sous peine d'amende (les contrôles étant effectués quotidiennement) .Dans son panier, se trouvent : 5 anguilles (dont 3 n'ont pas la dimension réglementaire) ,2 brochets (tous les deux de dimensions réglementaire) et 3 carpes (dont 1 n'a pas la dimension réglementaire).

1. Le pêcheur rencontre un garde-pêche qui examine ses prises en tirant simultanément et au hasard un lot de Trois poissons du panier.

a) Combien y a-t-il de lots différents ?

b) Combien de lots comportent exactement deux anguilles ?

c) Combien de lots ne comportent aucun brochet ?

d) Combien de lots comportent au moins un brochet ?

e) Combien de lots comportent trois poissons de la même espèce ?

2. Le contrôle pratiqué par le garde-pêche impose une amende de 50 € si, dans un lot de trois poissons tirés simultanément et au hasard dans le panier d'un pêcheur, se trouve au moins un poisson dont la taille n'est pas réglementaire.

a) Combien de lots correspondent à une amende ?

b) Quel est la probabilité que le pêcheur n'ait aucune amende ?

Exercice 25

Dans une urne se trouvent : cinq boules marquées du numéro 10 ; quatre boules marquées du numéro 15 ; trois boules marquées du numéro 20 ; deux boules marquées du numéro 0 .On tire simultanément quatre boules de cette urne.

1. Quel est le nombre de tirages possibles ?

2. Déterminer le nombre de tirages :

a) comportant exactement une boule marquée 15.

b) ne comportant aucune boule marquée 10.

c) comportant au moins une boule marquée 20.

d) comportant quatre numéros différents.

e) comportant quatre boules avec des numéros identiques.

Exercice 26

Lors d'un voyage, un groupe de six personnes doit se déplacer en voiture .Ils font appel à une agence de location de voitures qui ne dispose que de véhicules offrant un maximum de cinq places .Sachant qu' ils ont tous le permis de conduire et qu'ils disposent de deux voitures , on cherchent le nombre de façons d'organiser le voyage .

1. Premier cas : on décide de séparer le groupe en 2 (c'est-à-dire 3 personnes dans chaque voiture). Cela revient donc à compter le nombre de façons de former un groupe de 3 parmi ces six personnes Albert (a), Bernard (b) , Camille (c) , David (d) , Emilie (e) et Françoise (f) .Déterminer le nombre de dispositions possibles .

2. Deuxième cas : on décide de former un groupe de 2 et un groupe de 4.

Déterminer le nombre de façons de choisir un groupe de 2 personnes parmi les six.

Exercice 27

Calculer :

$$5! \quad ; \quad 8! \quad ; \quad \frac{5!}{4!} \quad ; \quad \frac{9!}{7!} \quad ; \quad \frac{1000!}{998!}$$

Exercice 28

Un questionnaire à choix multiple (Q.C.M) est constitué de 8 questions. Pour chacune d'elles, 4 réponses sont proposées dont une seule réponse est exacte. Un candidat répond au hasard.

1) Déterminer le nombre de réponses possibles à ce Q.C.M
2) a) Déterminer le nombre de cas où les réponses du candidat aux 6 premières questions sont exactes et aux deux autres fausses.

b) Calculer la probabilité pour que le candidat réponde correctement à exactement 6 questions.

3) Quelle est la probabilité que le candidat soit reçu si on lui demande de donner au moins 6 réponses justes ?

Exercice 29

Une urne contient 6 boules blanches et 4 noires. On appelle « tirage », la prise simultanée de 2 boules dans cette urne, et l'on admet que tous les tirages sont équiprobables.

1) On procède à un tirage unique. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A « On obtient une boule blanche »

B « On obtient deux boules noires »

C « On obtient deux boules de couleurs différentes »

Quelle est la somme de ces trois probabilités ?

2) On procède à deux tirages successifs, en remettant dans l'urne, après le premier tirage, les 2 boules tirées. On appelle « succès » la sortie de 2 boules blanches lors d'un même tirage. Calculer la probabilité d'obtenir : 2 succès ; 1 succès seul ; 0 succès. Quelle est la somme de ces 3 probabilités ?

Exercice 30

Dans un jeu de 32 cartes, on choisit au hasard cinq cartes (qui constituent une main). Quelle est la probabilité d'avoir des mains contenant :

1) au moins un as.
2) deux as et trois rois.
3) deux as et un cœur.
4) un carré.

Exercice 31

Un cube de bois a 4 cm d'arête ; il est peint en rouge. On le débite par des traits de scie parallèles aux plans des faces, en petits cubes de 1 cm d'arête. Ces petits cubes étant placés dans une urne. On tire au hasard 4 cubes de cette urne. Quelle est la probabilité d'avoir 4 cubes contenant :

1) 3 faces coloriées ?
2) 2 faces coloriées ?
3) en tout 6 faces coloriées ?

Exercice 32 (BAC D – Niger 1987)

1) Soient deux personnes prises au hasard. Quelle est la probabilité pour qu'elles soient nées un même jour de la semaine ?
2) Dans un groupe de 4 personnes, quelle est la probabilité pour qu'elles soient nées à des jours différents de la semaine ? Est-ce alors un pari gagnant que d'affirmer que deux d'entre elles au moins, sont nées le même jour de la semaine ?

3) Quelle est la probabilité pour que parmi n personnes, l'une au moins soit née un Lundi ? combien doit-il y avoir de personnes dans un groupe pour que l'affirmation « au moins l'un d'entre vous est né un lundi » soit un pari gagnant ?

N.B : « Faire un pari gagnant » signifie que l'événement choisi à une probabilité supérieure ou égale à ½.

Exercice 33 (BAC D – Niger 1992)

On dispose de 5 cartons où sont inscrites les lettres du mot NIGER et on les place dans une urne.

1) On extrait au hasard un à un ces cartons sans remise.

a) Quelle est la probabilité d'obtenir dans l'ordre le mot NIGER ?

b) Quelle est la probabilité d'obtenir les deux premières lettres du mot NIGER dans l'ordre et les trois autres dans le désordre ?

2) Reprendre les questions a) et b) du 1) dans le cas d'un tirage avec remise.

Exercice 34

On dispose d'un dé cubique dont les faces portent les numéros 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6. On désigne par P1, P2, P3, P4, P5, P6 leurs probabilités respectives d'apparaître. Ce dé a été pipé de telle sorte que :

a) toutes les faces n'ont pas la même probabilité d'apparaître ?

b) les nombres P1, P2, P3, P4, P5, P6 dans cet ordre, forment une suite arithmétique ;

c) les P3 ; P5, P6, dans cet ordre, forment une suite géométrique ;

1) Déterminer les réels P1, P2, P3, P4, P5, P6.

2) On lance une fois ce dé. Calculer la probabilité de faire apparaitre un nombre pair, de faire apparaitre un multiple de 3.

Exercice 35

Un sac contient 15 boules : 13 boules rouges et 2 noires. On tire simultanément k boules. En supposant les tirages équiprobables :

1) Calculer la probabilité pk d'amener au moins une boule noire.

2) Déterminer les valeurs de k pour lesquelles $p_k \geq \frac{6}{7}$

Exercice 36

Un sac contient 10 objets : n noirs, les autres blancs. On extrait simultanément 2 objets du sac. Les tirages étant équiprobables, déterminer les probabilités d'obtenir :

1) 2 objets de couleurs différentes

2) 2 objets noirs

3) 2 objets blancs. Calculer n pour que cette dernière probabilité soit $\frac{7}{15}$

Exercice 37

Une urne contient 12 boules blanches et 8 boules noires. On effectue des tirages dans cette urne, chacune des 20 boules ayant la même probabilité d'être tirée.

1) On tire simultanément 5 boules. Quelle est la probabilité d'obtenir :

a) 3 boules blanches et 2 boules noires ?

b) des boules de couleurs différentes ?

2) On tire successivement 5 boules, la boule tirée étant remise dans l'urne après chaque tirage. Quelle est la probabilité d'obtenir :

a) 3 boules blanches et 2 boules noires dans cet ordre ?

b) 3 boules blanches et 2 noires dans un ordre quelconque ?

3) On tire successivement 3 boules en remettant la boule tirée après chaque tirage si elle blanche, en ne la remettant pas si elle est noire. Quelle est la probabilité de tirer :

- exactement une boule blanche ?
- au moins une boule blanche ?

Exercice 38

Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. Les boules portant les numéros 1, 2, 3, 4 et 5 sont blanches, celles portant les 6, 7 e 8 bleues, celles portant les numéros 9 et 10 sont vertes. On tire simultanément 2 boules de l'urne. On admet que tous les tirages possibles sont équiprobables. On considère les événements suivants :

E1 : « les 2 boules tirées portent des numéros pairs »

E2 : « les 2 boules tirées sont de même couleur »

E3 : « les 2 boules tirées sont de couleurs différentes »

E4 : « les 2 boules tirées portent des numéros pairs et sont de couleurs différentes »

E5 : « sachant que les deux boules tirées sont de couleurs différentes, elles portent des nombres pairs »

1) E1 et E2 sont-ils indépendants ?

2) Calculer p(E3), p(E4). En déduire p(E5).

Exercice 39

Soit U1 et U2 deux urnes contenant respectivement 5 boules rouges et 4 boules noires, 3 boules rouges et 6 boules noires. On tire au hasard une des urnes et, ensuite dans l'urne choisie, une boule.

1) Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge ?

2) Sachant que l'on a tiré une boule rouge, quelle probabilité a-t-on, de l'avoir tirée de U1 ?

Exercice 40

On tire successivement 4 jetons d'une urne où l'on a placé 4 jetons d'une urne où l'on a placé 26 jetons sur lesquels sont inscrites les 26 lettres de l'alphabet français. En considérant deux cas suivant que le tirage est effectué avec ou sans remise, déterminer les probabilités :

1) On obtient le mot DAME
2) On obtient les lettres du mot DAME
3) On obtient les lettres du mot FEES
4) On obtient 4 voyelles
5) On obtient au moins une consonne
6) On obtient dans l'ordre, une voyelle et 3 consonnes
7) On obtient 2 voyelles et 2 consonnes
8) On obtient au plus 4 voyelles
9) On obtient 3 voyelles.

Exercice 41

On dispose de quatre urnes désignées par les lettres A, B, C et D. La première A contient 30 boules blanches, la deuxième B contient 40 boules noires, la troisième C contient 10 boules blanches et 25 rouges, la quatrième D contient 5 boules blanches, 3 boules bleues et 2 rouges. On choisit l'une des quatre urnes, au hasard, et de cette urne, on prélève une boule, au hasard. Quelle est la probabilité pour que la boule tirée soit blanche ?

Exercice 42

On jette deux dés réguliers à 6 faces. Considérons les événements ci-après :

A : « le premier dé donne un chiffre pair »

B : « le deuxième dé donne un chiffre pair »

C : « la somme des chiffres donnés par les deux dés est paire »

1) Calculer p(A), p(B) et p(C).
2) Montrer que $A \cap C = B \cap C = A \cap B$. En déduire que A, B et C sont 3 événements indépendants deux à deux.
3) Calculer p (A∩∩BC). En déduire que A, B, C ne sont pas indépendants dans leur ensemble.

Exercice 43

On dispose de 4 urnes, désignées par les lettres A, B, C et D. La première A contient 30 boules blanches, la deuxième B contient 40 boules blanches, la troisième C contient 10 boules blanches et 25 boules rouges, la quatrième D contient 5 boules blanches, 3 boules bleues et 2 boules rouges.
On choisit l'une des quatre urnes, au hasard, et de cette urne, on prélève une boule, au hasard. Quelle est la probabilité pour que la boule tirée soit blanche ?

Exercice 44 (BAC D – Niger 1991)

Au cours d'une kermesse, un stand propose le jeu suivant : le joueur doit tirer successivement sur quatre boîtes de dimensions de plus en plus réduites : B1, B2, B3, B4, dans cet ordre. Pour chaque cible visée, le joueur ne dispose que d'un essai : en cas de succès (la boîte est atteinte,) le joueur tire sur la boîte suivante, ainsi de suite jusqu'à la quatrième boîte et en cas d'échec, le jeu s'arrête immédiatement. Un joueur A se présente avec les probabilités $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{5}$ et $\frac{1}{5}$ de toucher respectivement les boîtes B1, B2, B3 et B4.

1) Décrire toutes les éventualités du jeu de A (par exemple : A atteint B1, puis B2, mais rate B3). On notera ω_1, ω_2, ω_3, ……. ces éventualités et on calculera la probabilité de chacune d'elles.
2) Lorsque le joueur tire sur une boîte et l'atteint, il gagne 1000 F ; lorsqu'il tire sur une boîte et la rate, il perd 1000 F. A chacune des éventualités décrites au 1), on associe le gain en fin de partie. On définit ainsi une variable aléatoire X.

- Quelle est la loi de probabilité de X ?
- Quelle est son espérance mathématique ?

3) Le joueur A s'engage, en cas de succès à verser la moitié de son gain total à un fonds de solidarité. Calculer la probabilité pour que A verse au moins 500 F au dit fonds.

Exercice 45

Une première urne contient 3 boules bleues, 3 blanches et 3 rouges. On extrait au hasard 3 boules à la fois et on les introduit dans une seconde urne qui contient déjà 6 boules blanches. De la seconde urne, on extrait ensuite au hasard 3 boules à la fois. Quelle probabilité a-t-on d'obtenir ainsi un tirage tricolore ?

Exercice 46

Un sac contient 10 jetons portant respectivement les lettres A, B, C, D, E, F, G, H, I, J. les lettres A, B, C, D, E sont marquées en rouge ; les lettres F, G, H sont bleu ; les lettres I et J en jaune. On tire simultanément 3 jetons de l'urne (tirages équiprobables). Calculer la probabilité pour que les trois jetons tirés portent :

1) 3 consonnes
2) 3 lettres de la même couleur
3) 3 lettres toutes de couleurs différentes
4) 3 consonnes de même couleur
5) 3 consonnes toutes de couleurs différentes
6) 2 consonnes d'une même couleur et une voyelle d'une autre couleur.

Reprendre les mêmes questions ave un tirage successif de 3 jetons, avec ou sans remise.

Exercice 47

Soit le nombre 1234. On utilise les quatre chiffres de ce nombre et, en les permutant au hasard, on obtient un nombre de quatre chiffres. On dit qu'il y a coïncidence chaque fois qu'un chiffre retrouve sa place initiale. Ainsi, par exemple, si on compose le nombre 4213, il y a une coïncidence car le chiffre 2 a retrouvé sa place ; si on compose le nombre 1324, il y a deux coïncidences ; si on compose ne nombre 1234, il y a quatre coïncidences, etc.

1) Combien de nombres peut-on ainsi obtenir ?
2) a) Existe-t-il de nombres présentant exactement trois coïncidences ?

b) Combien de nombres présentant exactement deux coïncidences ?

c) Dresser la liste des nombres qui présentent exactement une coïncidence. En déduire, combien de nombres ne présentent aucune coïncidence.

3) On suppose que toutes les compositions de nombres sont équiprobables. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque nombre formé associe le nombre de coïncidences observées.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.
b) Calculer l'espérance mathématique de X.

Exercice 48 (BAC D – Niger 1989)

Un couple souhaite avoir n enfants ($n \in IN^*$). On considère qu'à chaque naissance, il ne vient qu'un enfant (garçon noté G ou fille notée F). La probabilité d'avoir une fille est double de celle d'avoir un garçon. Les naissances sont indépendantes les unes des autres. Soit Yj la variable aléatoire associée à la jème naissance et prenant la valeur 0 pour G et 1 pour F et X = X1 + X2 +….. + Xn.

1) Dans cette partie $n = 4$.

a) Donner la loi de probabilité de X.
b) Construire la fonction de répartition de X.
c) Calculer l'espérance mathématique E(X) et la variance V(X) de X.

2) Déterminer n pour que la probabilité de ne pas avoir de garçon soit strictement inférieure à $\frac{1}{100}$. .

Exercice 49

Soit le système $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ ax - by = c \end{cases}$ où x et y sont les inconnues réelles et a, b et c sont éléments de $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.

On lance trois fois un dé cubique dont les 6 faces sont numérotées de 1 à 6. Les trois numéros obtenus sont dans l'ordre : a, b et c. Calculer la probabilité des événements suivants :

A : le système a une infinité de solutions.

B : le système n'a pas de solutions.

C : le système a une unique solution.

D : le système a la solution unique (3 ; 0).

Exercice 50

Trois dés cubiques sont placés dans une urne. Deux de ces dés sont normaux : leurs faces sont numérotées de 1 à 6. Le troisième est spécial : trois de ces faces sont numérotées 6, les trois autres sont numérotées 1. On tire de l'urne, simultanément et au hasard, deux dés parmi les trois et on les lance. On note A l'événement : « les deux tirées sont normaux » et B l'événement : « les deux faces supérieures sont numérotées 6 »

1) a Définir l'événement contraire de A, qu'on notera $\overline{A}$.

b) Calculer les probabilités de A et de $\overline{A}$.

2) a) Calculer P (B/A), probabilité de B sachant que A est réalisé, puis P (B∩A).

b) Calculer P(B).

3) Calculer P (A/B), probabilité de A sachant que B est réalisé.

Exercice 51

Un club sportif comporte 80 inscrits en natation, 95 en athlétisme et 125 en gymnastique. Chaque inscrit pratique un et un seul sport. Parmi les inscrits en natation, 45% sont des filles. De même, 20% des inscrits en natation sont des filles et 68% des inscrits en gymnastique sont des filles. On choisit un inscrit.

1) Quelle est la probabilité pour que l'inscrit choisi soit une fille ?

Sachant que l'inscrit choisi est une fille, quelle est la probabilité pour qu'elle pratique

Exercice 52

Un questionnaire à choix multiple (Q.C.M) est constitué de 8 questions. Pour chacune d'elles, 4 réponses sont proposées dont une seule réponse est exacte. Un candidat répond au hasard.

4) Déterminer le nombre de réponses possibles à ce Q.C.M
5) a) Déterminer le nombre de cas où les réponses du candidat aux 6 premières questions sont exactes et aux deux autres fausses.

b) Calculer la probabilité pour que le candidat réponde correctement à exactement 6 questions.

6) Quelle est la probabilité que le candidat soit reçu si on lui demande de donner au moins 6 réponses justes ?

Exercice 53

Une urne contient 6 boules blanches et 4 noires. On appelle « tirage », la prise simultanée de 2 boules dans cette urne, et l'on admet que tous les tirages sont équiprobables.

3) On procède à un tirage unique. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A « On obtient une boule blanche »

B « On obtient deux boules noires »

C « On obtient deux boules de couleurs différentes »

Quelle est la somme de ces trois probabilités ?

4) On procède à deux tirages successifs, en remettant dans l'urne, après le premier tirage, les 2 boules tirées. On appelle « succès » la sortie de 2 boules blanches lors d'un même tirage. Calculer la probabilité d'obtenir : 2 succès ; 1 succès seul ; 0 succès. Quelle est la somme de ces 3 probabilités ?

Exercice 54

Dans un jeu de 32 cartes, on choisit au hasard cinq cartes (qui constituent une main). Quelle est la probabilité d'avoir des mains contenant :

5) au moins un as.
6) deux as et trois rois.
7) deux as et un cœur.
8) un carré.

Exercice 55

Un cube de bois a 4 cm d'arête ; il est peint en rouge. On le débite par des traits de scie parallèles aux plans des faces, en petits cubes de 1 cm

d'arête. Ces petits cubes étant placés dans une urne. On tire au hasard 4 cubes de cette urne. Quelle est la probabilité d'avoir 4 cubes contenant :

4) 3 faces coloriées ?
5) 2 faces coloriées ?
6) en tout 6 faces coloriées ?

Exercice 56 (BAC D – Niger 1987)

4) Soient deux personnes prises au hasard. Quelle est la probabilité pour qu'elles soient nées un même jour de la semaine ?
5) Dans un groupe de 4 personnes, quelle est la probabilité pour qu'elles soient nées à des jours différents de la semaine ? Est-ce alors un pari gagnant que d'affirmer que deux d'entre elles au moins, sont nées le même jour de la semaine ?
6) Quelle est la probabilité pour que parmi n personnes, l'une au moins soit née un Lundi ? combien doit-il y avoir de personnes dans un groupe pour que l'affirmation « au moins l'un d'entre vous est né un lundi » soit un pari gagnant ?

N.B : « Faire un pari gagnant » signifie que l'événement choisi à une probabilité supérieure ou égale à ½.

Exercice 57 (BAC D – Niger 1992)

On dispose de 5 cartons où sont inscrites les lettres du mot NIGER et on les place dans une urne.

3) On extrait au hasard un à un ces cartons sans remise.
c) Quelle est la probabilité d'obtenir dans l'ordre le mot NIGER ?
d) Quelle est la probabilité d'obtenir les deux premières lettres du mot NIGER dans l'ordre et les trois autres dans le désordre ?
4) Reprendre les questions a) et b) du 1) dans le cas d'un tirage avec remise.

Exercice 58

On dispose d'un dé cubique dont les faces portent les numéros 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6. On désigne par P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 leurs probabilités respectives d'apparaître. Ce dé a été pipé de telle sorte que :

d) toutes les faces n'ont pas la même probabilité d'apparaître ?
e) les nombres P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 dans cet ordre, forment une suite arithmétique ;
f) les P_3 ; P_5, P_6, dans cet ordre, forment une suite géométrique ;
3) Déterminer les réels P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6.

4) On lance une fois ce dé. Calculer la probabilité de faire apparaitre un nombre pair, de faire apparaitre un multiple de 3.

Exercice 59

Un sac contient 15 boules : 13 boules rouges et 2 noires. On tire simultanément k boules. En supposant les tirages équiprobables :

3) Calculer la probabilité pk d'amener au moins une boule noire.
4) Déterminer les valeurs de k pour lesquelles $p_k \geq \frac{6}{7}$

Exercice 60

Un sac contient 10 objets : n noirs, les autres blancs. On extrait simultanément 2 objets du sac. Les tirages étant équiprobables, déterminer les probabilités d'obtenir :

4) 2 objets de couleurs différentes
5) 2 objets noirs
6) 2 objets blancs. Calculer n pour que cette dernière probabilité soit $\frac{7}{15}$

Exercice 61

Une urne contient 12 boules blanches et 8 boules noires. On effectue des tirages dans cette urne, chacune des 20 boules ayant la même probabilité d'être tirée.

4) On tire simultanément 5 boules. Quelle est la probabilité d'obtenir :

c) 3 boules blanches et 2 boules noires ?
d) des boules de couleurs différentes ?

5) On tire successivement 5 boules, la boule tirée étant remise dans l'urne après chaque tirage. Quelle est la probabilité d'obtenir :

c) 3 boules blanches et 2 boules noires dans cet ordre ?
d) 3 boules blanches et 2 noires dans un ordre quelconque ?

6) On tire successivement 3 boules en remettant la boule tirée après chaque tirage si elle blanche, en ne la remettant pas si elle est noire. Quelle est la probabilité de tirer :

- exactement une boule blanche ?
- au moins une boule blanche ?

Exercice 62

Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. Les boules portant les numéros 1, 2, 3, 4 et 5 sont blanches, celles portant les 6, 7 e 8 bleues, celles portant les numéros 9 et 10 sont vertes. On tire simultanément 2

boules de l'urne. On admet que tous les tirages possibles sont équiprobables. On considère les événements suivants :
E_1 : « les 2 boules tirées portent des numéros pairs »
E_2 : « les 2 boules tirées sont de même couleur »
E_3 : « les 2 boules tirées sont de couleurs différentes »
E_4 : « les 2 boules tirées portent des numéros pairs et sont de couleurs différentes »
E_5 : « sachant que les deux boules tirées sont de couleurs différentes, elles portent des nombres pairs »

3) E_1 et E_2 sont-ils indépendants ?
4) Calculer $p(E_3)$, $p(E_4)$. En déduire $p(E_5)$.

Exercice 63

Soit U_1 et U_2 deux urnes contenant respectivement 5 boules rouges et 4 boules noires, 3 boules rouges et 6 boules noires. On tire au hasard une des urnes et, ensuite dans l'urne choisie, une boule.

3) Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge ?
4) Sachant que l'on a tiré une boule rouge, quelle probabilité a-t-on, de l'avoir tirée de U_1 ?

Exercice 64

On tire successivement 4 jetons d'une urne où l'on a placé 4 jetons d'une urne où l'on a placé 26 jetons sur lesquels sont inscrites les 26 lettres de l'alphabet français. En considérant deux cas suivant que le tirage est effectué avec ou sans remise, déterminer les probabilités :

10) On obtient le mot DAME
11) On obtient les lettres du mot DAME
12) On obtient les lettres du mot FEES
13) On obtient 4 voyelles
14) On obtient au moins une consonne
15) On obtient dans l'ordre, une voyelle et 3 consonnes
16) On obtient 2 voyelles et 2 consonnes
17) On obtient au plus 4 voyelles
18) On obtient 3 voyelles.

Exercice 65

On dispose de quatre urnes désignées par les lettres A, B, C et D. La première A contient 30 boules blanches, la deuxième B contient 40 boules noires, la troisième C contient 10 boules blanches et 25 rouges, la

quatrième D contient 5 boules blanches, 3 boules bleues et 2 rouges. On choisit l'une des quatre urnes, au hasard, et de cette urne, on prélève une boule, au hasard. Quelle est la probabilité pour que la boule tirée soit blanche ?

Exercice 66

On jette deux dés réguliers à 6 faces. Considérons les événements ci-après :

A : « le premier dé donne un chiffre pair »

B : « le deuxième dé donne un chiffre pair »

C : « la somme des chiffres donnés par les deux dés est paire »

4) Calculer p(A), p(B) et p(C).
5) Montrer que $A \cap C = B \cap C = A \cap B$. En déduire que A, B et C sont 3 événements indépendants deux à deux.
6) Calculer p(A∩ **B** ∩C). En déduire que A, B, C ne sont pas indépendants dans leur ensemble.

Exercice 67

On dispose de 4 urnes, désignées par les lettres A, B, C et D. La première A contient 30 boules blanches, la deuxième B contient 40 boules blanches, la troisième C contient 10 boules blanches et 25 boules rouges, la quatrième D contient 5 boules blanches, 3 boules bleues et 2 boules rouges.

On choisit l'une des quatre urnes, au hasard, et de cette urne, on prélève une boule, au hasard. Quelle est la probabilité pour que la boule tirée soit blanche ?

Exercice 68

Une première urne contient 3 boules bleues, 3 blanches et 3 rouges. On extrait au hasard 3 boules à la fois et on les introduit dans une seconde urne qui contient déjà 6 boules blanches. De la seconde urne, on extrait ensuite au hasard 3 boules à la fois. Quelle probabilité a-t-on d'obtenir ainsi un tirage tricolore ?

Exercice 69

Un sac contient 10 jetons portant respectivement les lettres A, B, C, D, E, F, G, H, I, J. les lettres A, B, C, D, E sont marquées en rouge ; les lettres F, G, H sont bleu ; les lettres I et J en jaune. On tire simultanément 3 jetons de l'urne (tirages équiprobables). Calculer la probabilité pour que les trois jetons tirés portent :

7) 3 consonnes
8) 3 lettres de la même couleur
9) 3 lettres toutes de couleurs différentes
10) 3 consonnes de même couleur
11) 3 consonnes toutes de couleurs différentes
12) 2 consonnes d'une même couleur et une voyelle d'une autre couleur.

Reprendre les mêmes questions ave un tirage successif de 3 jetons, avec ou sans remise.

Exercice 70

Soit le nombre 1234. On utilise les quatre chiffres de ce nombre et, en les permutants au hasard, on obtient un nombre de quatre chiffres. On dit qu'il y a coïncidence chaque fois qu'un chiffre retrouve sa place initiale. Ainsi, par exemple, si on compose le nombre 4213, il y a une coïncidence car le chiffre 2 a retrouvé sa place ; si on compose le nombre 1324, il y a deux coïncidences ; si on compose ne nombre 1234, il y a quatre coïncidences, etc.

4) Combien de nombres peut-on ainsi obtenir ?
5) a) Existe-t-il de nombres présentant exactement trois coïncidences ?
b) Combien de nombres présentant exactement deux coïncidences ?
c) Dresser la liste des nombres qui présentent exactement une coïncidence. En déduire, combien de nombres ne présentent aucune coïncidence.
6) On suppose que toutes les compositions de nombres sont équiprobables. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque nombre formé associe le nombre de coïncidences observées.
c) Déterminer la loi de probabilité de X.
d) Calculer l'espérance mathématique de X.

Sani Ali Prof de Maths C.E.S ADS Maradi

Master II en ingénierie de l'eau et environnement

Ingénieur et Technicien supérieur en mines et géologie appliquée

Tel : 96290500