maxi. maths

Exercices résolus

Mathématiques

2ème Année Baccalauréat

Sciences Expérimentales et ses filières

Sciences et Technologies Industrielles et ses filières

- Résumés de Cours
- Exercices variés et progressifs
- Problèmes de synthèse
- Extraits de sujets du bac

Tome 1

2ème Bac

EDITIONS Plus
إديسيون بلوس

1 Activités préliminaires

1 Les identités remarquables

Développement ⇄ Factorisation

1. $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$
2. $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$
3. $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$
4. $a^3 + 3a^3b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3$
5. $a^3 - 3a^3b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)^3$
6. $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$
7. $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 - b^3$
8. $(a-b)(a+b)(a^2+b^2) = a^4 - b^4$

Remarque :

Toutes ces égalités sont à connaître dans les deux sens!

2 Les fractions

a, b, c et sont des nombres réels

1. Diviser par un nombre non nul, c'est multiplier par son inverse : $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$; avec $b \neq 0$
2. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc$; (conditions : $b \neq 0$ et $d \neq 0$)
3. $\frac{a}{b} = 0 \iff a = 0$; (condition : $b \neq 0$)
4. $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$; (condition : $b \neq 0$)
5. Pour additionner ou soustraire deux (ou plusieurs) fractions, il faut d'abord réduire au même dénominateur :
   $\frac{a}{b} \mp \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \mp \frac{cb}{bd} = \frac{ad \mp cb}{bd}$; (conditions : $b \neq 0$ et $d \neq 0$)
6. Pour multiplier deux fractions, il n'est pas nécessaire de rendre au même dénominateur : $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ (conditions : $b \neq 0$ et $d \neq 0$).

7 $\dfrac{\frac{a}{b}}{c} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{1}{c} = \dfrac{a}{bc}$ (conditions : $b \neq 0$ et $c \neq 0$)

inverse

8 $\dfrac{a}{\frac{b}{c}} = a \times \dfrac{c}{b} = \dfrac{ac}{b}$ (condition : $b \neq 0$ et $c \neq 0$)

inverse

9 $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{d}{c} = \dfrac{ad}{bc}$ (condition : $b \neq 0$, $c \neq 0$ et $d \neq 0$)

inverse

Exemples : $\left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{3}{2x-1} = \dfrac{x(2x-1)-3(x-1)}{(x-1)(2x-1)} = \dfrac{2x^2-4x+3}{(x-1)(2x-1)}\right)$

3 Les puissances

1 $\underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ fois}} = a^n$; $n \in \mathbb{N}^*$; $a^1 = a$ (Attention : $\underbrace{a + a + \ldots + a}_{n \text{ fois}} = na$)

2 Pour tout réel non nul : $a^0 = 1$

(Exemples : $(-5)^0 = 1$; $\pi^0 = 1$; $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)^0 = 1\ 10^0 = 1$)

3 $\begin{cases} \dfrac{1}{a^n} = a^{-n} ; a^n \times a^m = a^{n+m} ; (a^n)^m = a^{nm} = (a^m)^n ; \dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m} = \dfrac{1}{a^{m-n}} \\ a^n \times b^n = (ab)^n ; \dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n \end{cases}$

4 Les puissances de 10 : $10^1 = 10$; $10^3 = 1\underbrace{000}_{3 \text{ zéros}}$; $10^n = 1\underbrace{000\ldots0}_{n \text{ zéros}}$; où $n \in \mathbb{N}^*$

Exemples : $10^{-1} = 0,1$; $10^{-3} = \underbrace{0,00}_{3 \text{ zéros}}1$; $10^{-n} = \underbrace{0,00\ldots0}_{n \text{ zéros}}1$; $n \in \mathbb{N}^*$

Remarque :

- $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \dfrac{1}{2^{n+1}}$
- $7^{n+2} - 7^{n+1} = 7^{n+1}(7-1) = 6 \times 7^{n+1}$

4 Les racines carrées

Soit a un réel positif

On appelle racine carrée de a et on note $\sqrt{a}$, l'unique nombre positif b tel que : $b^2 = a$ (et on écrit : $b = \sqrt{a}$)

1 $\sqrt{0} = 0$; $\sqrt{1} = 1$; $\sqrt{x^2} = |x|$; $\begin{cases} \sqrt{x^2} = x \text{ si } x \geq 0 \\ \sqrt{x^2} = -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$

2 $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$; (conditions : $a \geq 0$ et $b \geq 0$)

3 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$; (conditions : $a \geq 0$ et $b > 0$)

4 $\sqrt{ab} = \sqrt{|a|} \times \sqrt{|b|}$; (conditions : a et b de même signe : $a \times b \geq 0$)

5 $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{|a|}}{\sqrt{|b|}}$; (conditions : a et b de même signe ; $b \neq 0$)

6 $\begin{cases} \sqrt{a} = \sqrt{b} \iff a = b \\ \sqrt{a} < \sqrt{b} \iff a < b \end{cases}$ (conditions : $a \geq 0$ et $b \geq 0$)

7 si $a > 0$; alors : $x^2 = a \iff (x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a})$

8 ▸ Le conjugué de $\sqrt{A} + B$ est $\sqrt{A} - B$ et on a :

$(\sqrt{A} - B)(\sqrt{A} + B) = A - B^2$

▸ Le conjugué de $\sqrt{x^2 - 2x + 3} - x + 2$ est $\sqrt{x^2 - 2x + 3} + x - 2$; leur produit est : $x^2 - 2x + 3 - (x - 2)^2$

5 Les valeurs absolues : x, y, a, b et r sont des réels.

1 $|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$ $(|x| = x \iff x \geq 0 ; |x| = -x \iff x \leq 0)$

2 $|x| = 0 \iff x = 0$

3 $|x| \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

4 $|x| = |y| \iff (x = y$ ou $x = -y)$

5 si $a \geq 0$; alors : $|x| = a \iff (x = a$ ou $x = -a)$

6 $|a \times b| = |a| \times |b|$; $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$ avec $b \neq 0$; $|a^n| = |a|^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Attention ! : $|a+b| \leq |a|+|b|$ (Inégalité triangulaire)

7 $|x-a| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x-a \leq r$

8 $|x-a| \geq r \Leftrightarrow x-a \leq -r$ ou $x-a \geq r$

9 $x^2 \leq r \Leftrightarrow -\sqrt{r} \leq x \leq \sqrt{r}$

10 $x^2 \geq r \Leftrightarrow x \leq -\sqrt{r}$ ou $x \geq \sqrt{r}$

} (condition : $r \geq 0$)

6 Signe de $ax+b$ - Inéquations (avec produit ou quotient)

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$	signe de		0	signe de $-a$	

Exemples :

1

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$	

2

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$-3x+2$		$+$	0	$-$	

3

x	$-\infty$		-3		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$			$+$
$-2x+1$		$+$		$+$	0		$-$
$(x+3)(-2x+1)$		$-$	0	$+$	0		$-$

4

x	$-\infty$		-3		4		$+\infty$
$-x+4$		$+$		$+$	0		$-$
$x+3$		$-$	0	$+$			$+$
$\frac{-x+4}{x+3}$		$-$	‖	$+$	0		$-$

Pour résoudre des inéquations «produit» $(ax+b)(cx+d) \geq 0$ (ou « > 0 » ou « ≤ 0 » ou « < 0 »)

ou «quotient» : $\frac{ax+b}{cx+d}$ on utilise un tableau de signe.

Exemples : pour $(x+3)(-2x+1) > 0$: $S =]-3;\frac{1}{2}[$ (voir tableau (3))

pour : $\frac{-x+4}{x+3} \leq 0$: $S =]-\infty;-3[\cup [4;+\infty[$ (voir tableau (4))

7 Le second degré : ax^2+bx+c avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $(b;c) \in \mathbb{R}^2$

1 Comment résoudre une équation du second degré $(E): ax^2+bx+c=0$? $(a \neq 0)$

Méthode classique : calculer le discriminant $\Delta = b^2-4ac$.

- Si $\Delta > 0$, alors l'équation admet 2 solutions distinctes : $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet une solution unique $x = \frac{-b}{2a}$
- Si $\Delta < 0$, alors $S_{\mathbb{R}} = \phi$ (Pas de solution dans $\mathbb{R}$)

Autres méthodes et astuces :

1 Forme canonique : $ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}$ puis factoriser si possible...

2 Si $c=0$, alors $ax^2+bx=0 \iff x(ax+b)=0$

$\iff x=0$ ou $x=-\frac{b}{a}$

(Donc si $c=0$, alors 0 et $-\frac{b}{a}$ sont les solutions de (E)

3 Si $a+b+c=0$, alors 1 et $\frac{c}{a}$ sont les solutions de (E)

4 Si $a-b+c=0$, alors -1 et $-\frac{c}{a}$ sont les solutions de (E)

5 Si α est une solution évidente de (E) alors l'autre solution est β telle que:

$\alpha \times \beta = \frac{c}{a} \Longrightarrow \beta = \frac{c}{a\alpha}$ (ou $\alpha+\beta = -\frac{b}{a} \Longrightarrow \beta = -\frac{b}{a} - \alpha$)

6 Comment déterminer le signe de ax^2+bx+c ; $(a \neq 0)$?

- Commencer par calculer le discriminant $\Delta = b^2-4ac$

- Si $\Delta < 0$; alors $ax^2 + bx + c$ est du signe de a sur $\mathbb{R}$
- Si $\Delta = 0$; alors $ax^2 + bx + c$ est du signe de a pour tout $x \neq -\frac{b}{2a}$
- Si $\Delta > 0$; alors $ax^2 + bx + c$ est du signe de a à l'extérieur des racines x_1 et x_2 et du signe contraire de a entre les racines.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$ax+b$	signe de a		0	signe de $-a$	0	signe de a	

8 Signe d'expressions avec racines carrées

1 Comment déterminer le signe de $\sqrt{A} - B$? (où $A \geq 0$ et $B \neq 0$)

- Si $B < 0$; alors $-B > 0$ et $\sqrt{A} \geq 0$, donc $\sqrt{A} - B > 0$
- Si $B > 0$; on multiplie et on divise par le conjugué $\sqrt{A} + B$:

$$\sqrt{A} - B = \frac{(\sqrt{A} - B)(\sqrt{A} + B)}{\sqrt{A} + B} = \frac{A - B^2}{\sqrt{A} + B}$$

alors le signe de $\sqrt{A} - B$ est celui de $A - B^2$

2 Comment déterminer le signe de $\sqrt{A} + B$? (où $A \geq 0$ et $B \neq 0$)

- Si $B > 0$; alors $\sqrt{A} + B > 0$
- Si $B < 0$; on multiplie et non divise par le conjugué $\sqrt{A} - B$:

$$\sqrt{A} + B = \frac{(\sqrt{A} + B)(\sqrt{A} - B)}{\sqrt{A} - B} = \frac{A - B^2}{\sqrt{A} - B}$$

comme $\sqrt{A} - B > 0$; alors le signe de $\sqrt{A} + B$ est celui de $A - B^2$.

3 Comment déterminer le signe de $\sqrt{A} - \sqrt{B}$? (où $A > 0$ et $B > 0$)

on a : $\sqrt{A} - \sqrt{B} = \frac{A - B}{\sqrt{A} + \sqrt{B}}$

Donc le signe de $\sqrt{A} - \sqrt{B}$ est celui de $A - B$.

9 Ensemble de définition d'une fonction

Soit f une fonction numérique et D_f son ensemble de définition.

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \text{ existe}\}$

Techniques pour chercher l'ensemble de définition d'une fonction :

Soient P et Q deux fonctions polynômes et f une fonction numérique.

Expression de la fonction f	Détermination de l'ensemble de définition de f
$f(x) = P(x)$	$D_f = \mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$	$x \in D_f \iff Q(x) \neq 0$. Donc D_f est $\mathbb{R}$ privé des solutions de l'équation : $Q(x) = 0$
$f(x) = \sqrt{P(x)}$	$x \in D_f \iff P(x) \geq 0$. Donc D_f est l'ensemble des solutions de l'inéquation: $P(x) \geq 0$
$f(x) = \dfrac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}}$	$x \in D_f \iff Q(x) > 0$. Donc D_f est l'ensemble des solutions de l'inéquation: $Q(x) > 0$
$f(x) = \sqrt{\dfrac{P(x)}{Q(x)}}$	$x \in D_f \iff \dfrac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$ et $Q(x) \neq 0$. Donc D_f est l'ensemble des solutions de l'inéquation $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$ privé des solutions de l'équation $Q(x) = 0$
$f(x) = \dfrac{P(x)}{\sqrt{Q(x)} - a}$ avec $a > 0$	$x \in D_f \iff Q(x) \geq 0$ et $\sqrt{Q(x)} - a \neq 0$. Donc D_f est l'ensemble des solutions de l'inéquation $Q(x) \geq 0$ privé des solution de l'équation $Q(x) = a^2$

- Si $h = \sqrt{f}$; alors : $x \in D_h \iff x \in D_f$ et $f(x) \geq 0$
- Si $h = \dfrac{f}{\sqrt{g}}$; alors : $x \in D_h \iff x \in (D_g \cap D_f)$ et $g(x) > 0$
- Si $h = \dfrac{f}{\sqrt{g} + \varphi}$; alors : $x \in D_h \iff x \in (D_g \cap D_f \cap D_\varphi)$ et $g(x) \geq 0$

et $\sqrt{g(x)} + \varphi(x) \neq 0$

- Si $h = \dfrac{\sqrt{f}}{\sqrt{g}}$; alors : $x \in D_h \iff x \in (D_g \cap D_f)$ et $f(x) \geq 0$ et $g(x) > 0$
- Si $h = \sqrt{\dfrac{f}{g}}$; alors : $x \in D_h \iff x \in (D_f \cap D_g)$ et $g(x) \neq 0$ et $\dfrac{f(x)}{g(x)} \geq 0$

10 Limites de fonctions

1. Limites usuelles

a. Au voisinage de ∞

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ où $n \in \mathbb{N}^*$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ où $n \in \mathbb{N}^*$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- Si n est pair, alors $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = +\infty$
- Si n est impair, alors $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty$

b. Au voisinage de 0

- $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$
- Si n est pair, alors $\lim\limits_{x\to0} \frac{1}{x^n} = +\infty$
- Si n est impair, alors $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$

2. Limites de fonctions polynômes et rationnelles en un point a et en ∞.

Soient P et Q deux fonctions polynômes et a un réel.

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ avec $a_n \neq 0$

$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$ avec $b_m \neq 0$

- $\lim\limits_{x\to a} P(x) = P(a)$
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} a_n x^n$ (Limite du terme du plus haut degré)
- Si $Q(a) \neq 0$; alors $\lim\limits_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$

3. Limite de la fonction $\sqrt{f}$

Soit f une fonction positive et ℓ un réel positif :

- Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$; alors $\lim\limits_{x\to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\ell}$ où $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$
- Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$; alors $\lim\limits_{x\to a} \sqrt{f(x)} = +\infty$

4. Opérations sur les limites

Limite d'une somme, d'un produit et d'un quotient :

a désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

ℓ et ℓ' désignent des réels.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x)$	$\lim\limits_{x\to a} (fg)(x)$
ℓ	ℓ'	$\ell + \ell'$	$\ell \times \ell'$
$\ell \neq 0$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$ si $\ell > 0$
			$-\infty$ si $\ell < 0$
$\ell \neq 0$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$ si $\ell > 0$
			$+\infty$ si $\ell < 0$
0	$+\infty$	$+\infty$	?
0	$-\infty$	$-\infty$	?
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\lim\limits_{x\to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$
ℓ	$\ell' \neq 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$
$\ell > 0$	0^+	$+\infty$
	0^-	$-\infty$

$\ell < 0$	0^+	$-\infty$
	0^-	$+\infty$
0	0	?
$\ell \geq 0$	$+\infty$	0^+
	$-\infty$	0^-
$\ell \leq 0$	$+\infty$	0^-
	$-\infty$	0^+
∞	∞	?

Formes indéterminées :

1. $(+\infty)+(-\infty)$: Pour la somme.
2. $0 \times \infty$: Pour le produit.
3. $\frac{0}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$: Pour le quotient.

5. Limites du type $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ où $f(a) = g(a) = 0$ et $a \in \mathbb{R}$:

a. Cas où $f(x)$ et $g(x)$ sont des polynômes.

On factorise $f(x)$ et $g(x)$ par $(x-a)$ puis on simplifie :

$f(x) = (x-a)f_1(x)$ et $g(x) = (x-a)g_1(x)$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \frac{f_1(a)}{g_1(a)} \text{ si } g_1(a) \neq 0$$

b. Cas où $f(ou\ g)$ est de la forme $\sqrt{h} \pm k$:

Dans ce cas on multiplie le numérateur et le dénominateur par l'expression conjuguée.

Exemple : Calculons $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{3x+1}-2}{1-\sqrt{x}}$:

$x > 0$ et $x \neq 1$; $\dfrac{\sqrt{3x+1}-2}{1-\sqrt{x}} = \dfrac{(\sqrt{3x+1}-2)(\sqrt{3x+1}+2)(1+\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})(\sqrt{3x+1}+2)}$

$$= \frac{(3x+1-4)(1+\sqrt{x})}{(1-x)(\sqrt{3x+1}+2)}$$

$$= \frac{3(x-1)(1+\sqrt{x})}{-(x-1)(\sqrt{3x+1}+2)}$$

$$= \frac{-3(1+\sqrt{x})}{\sqrt{3x+1}+2}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{3x+1}-2}{1-\sqrt{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{-3(1+\sqrt{x})}{\sqrt{3x+1}+2} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

c. Cas $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$:

Si f est une fonction dérivable en a, alors : $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$

Exemple : Calculons $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{(3x+5)^{2017}+1}{x+2}$:

La fonction $f : x \longmapsto (3x+5)^{2017}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier en -2 et on a :

$f(-2) = (-1)^{2017} = -1$

et $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; f'(x) = 2017(3x+5)^{2016} \times 3 = 6051(3x+5)^{2016}$

$$f'(-2) = 6051(-1)^{2016} = 6051$$

Donc : $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{(3x+5)^{2017}+1}{x+2} = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)} = f'(-2) = 6051$

6. Limites usuelles de fonctions trigonométriques

Soit a un réel.

1. $\lim\limits_{x\to a} \sin x = \sin(a)$
2. $\lim\limits_{x\to a} \cos x = \cos(a)$
3. $\lim\limits_{x\to a} \tan x = \tan(a)$ si $a \neq \dfrac{\pi}{2} + K\pi$ où $K \in \mathbb{Z}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(ax)}{x} = a$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$
7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

7. Limites et ordre

Soient f, g et h des fonctions numériques définies sur un intervalle I et $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$

- Si $f(x) \geq g(x)$ au voisinage de a et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$ $\Big\}$ alors : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$
- Si $f(x) \leq h(x)$ au voisinage de a et $\lim\limits_{x \to a} h(x) = -\infty$ $\Big\}$ alors : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$
- Si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ au voisinage de a et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = \ell$ ($o\grave{u}$ $\ell \in \mathbb{R}$) $\Big\}$ alors : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$
- Si $|f(x) - \ell| \leq g(x)$ au voisinage de a et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ $\Big\}$ alors : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$

8. Type $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{ax^2 + bx + c} + \alpha x + \beta)$ avec $a > 0$ et $\alpha \neq 0$

Comment factoriser par x l'expression $\sqrt{ax^2 + bx + c} + \alpha x + \beta$?

$$x > 0 \; ; \; (\sqrt{ax^2 + bx + c} + \alpha x + \beta) = \sqrt{x^2\left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}\right)} + \alpha x + \beta$$

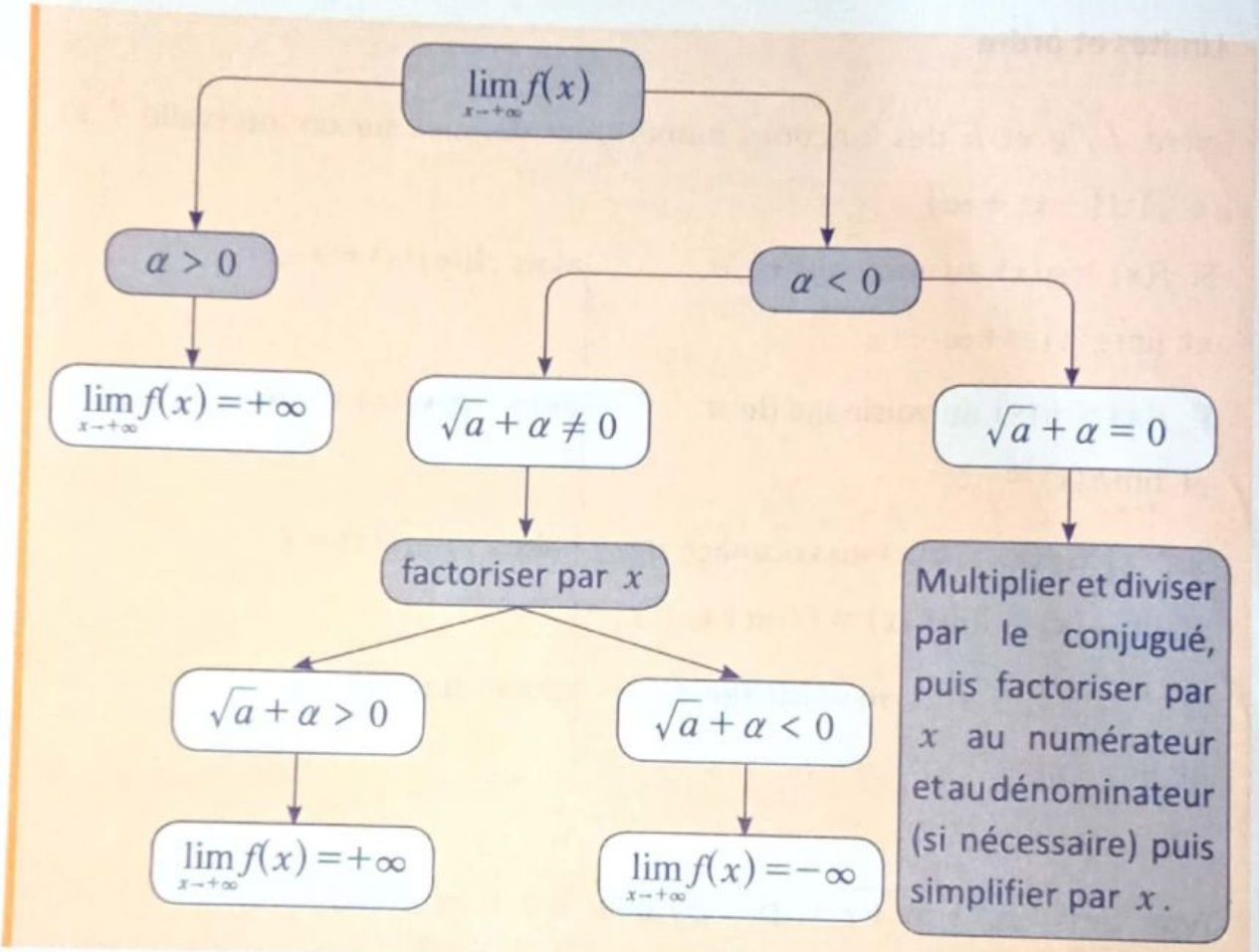
$$= \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}} + x\left(\alpha + \frac{\beta}{x}\right)$$

$$= |x| \sqrt{a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}} + x\left(\alpha + \frac{\beta}{x}\right)$$

$$= x\left[\sqrt{a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}} + \alpha + \frac{\beta}{x}\right] \quad (x > 0 \; ; \text{ donc } |x| = x)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}} + \alpha + \frac{\beta}{x}\right) = \sqrt{a} + \alpha$$

On pose $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c} + \alpha x + \beta$



Exemple 1 :

Calculons: $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-3x+2)$

On a : $a=1$ et $\alpha=-3$ (donc $\alpha<0$)

comme $\sqrt{a}+\alpha=-2\neq 0$, il suffit de factoriser par x :

$x>0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-3x+2)=x\left[\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-3+\frac{2}{x}\right]$

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-3+\frac{2}{x}\right)=-2\end{cases}\Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} x\left[\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-3+\frac{2}{x}\right]=-\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-x+1}-3x+2=-\infty$

Exemple 2 :

Calculons: $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2+3x-1}-2x+5)$

On a : $a=4$ et $\alpha=-2$ (donc : $\alpha<0$)

Comme $\sqrt{a}+\alpha=0$, on utilise le conjugué :

$$(\sqrt{4x^2+3x-1}-2x+5)=\sqrt{4x^2+3x-1}-(2x-5)$$
$$=\frac{[\sqrt{4x^2+3x-1}-(2x-5)][\sqrt{4x^2+3x-1}+(2x-5)]}{\sqrt{4x^2+3x-1}+(2x-5)}$$
$$=\frac{4x^2+3x-1-(2x-5)^2}{\sqrt{4x^2+3x-1}+(2x-5)}$$
$$=\frac{23x-26}{\sqrt{4x^2+3x-1}+(2x-5)}$$
$$=\frac{x\left(23-\frac{26}{x}\right)}{x\left[\sqrt{4+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}+2-\frac{5}{x}\right]}$$
$$=\frac{23-\frac{26}{x}}{\sqrt{4+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}+2-\frac{5}{x}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(23-\frac{26}{x}\right)=23\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4+3x-\frac{1}{x^2}}+2-\frac{5}{x}\right)=4\end{array}\right\}\Longrightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{23-\frac{26}{x}}{\sqrt{4+3x-\frac{1}{x^2}}+2-\frac{5}{x}}=\frac{23}{4}$$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2+3x-1}-2x+5)=\frac{23}{4}$

9. Type $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{ax^2+bx+c}+\alpha x+\beta)$ avec $a>0$ et $\alpha\neq 0$

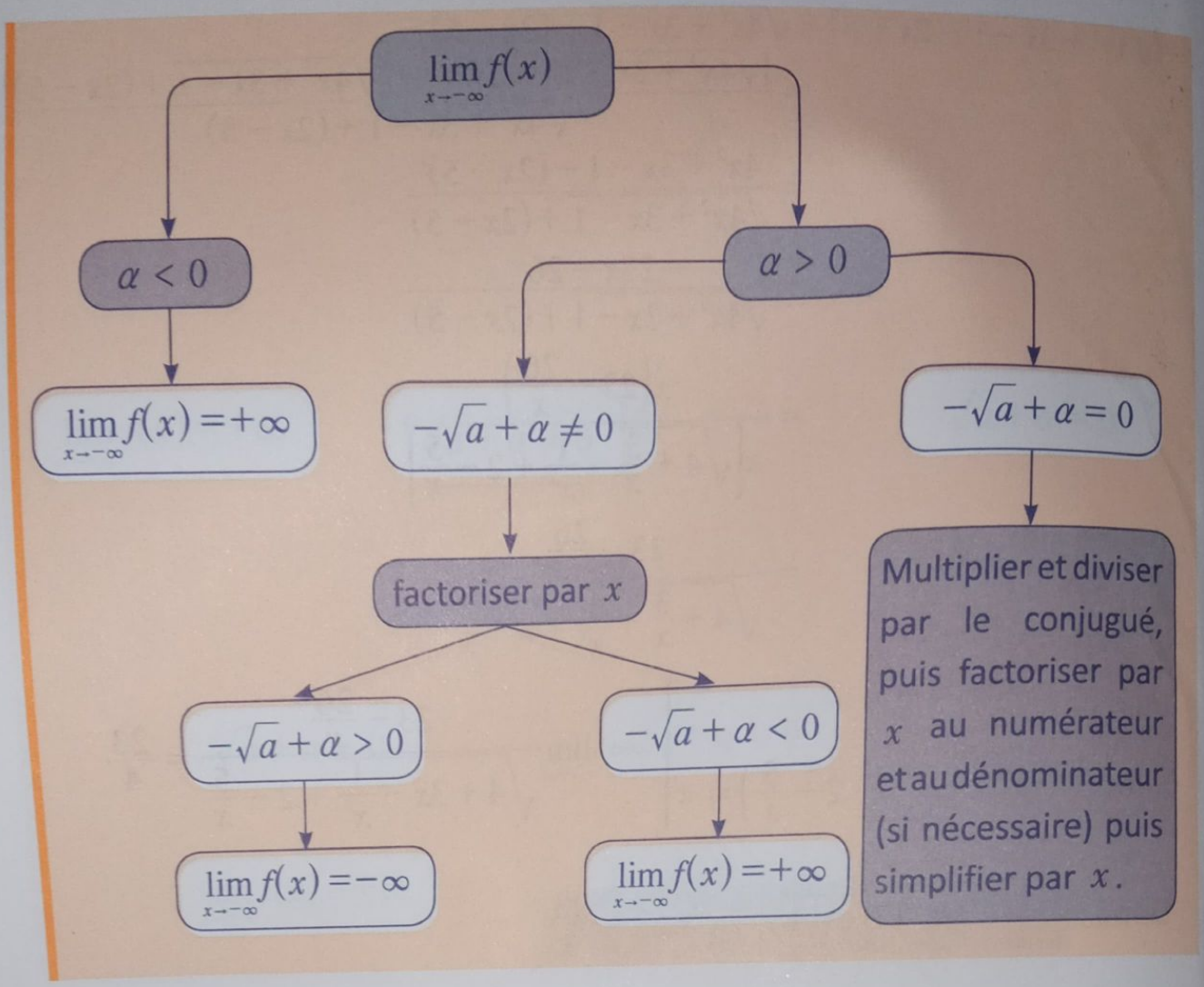
Comment factoriser par x l'expression $(\sqrt{ax^2+bx+c}+\alpha x+\beta)$?

$x<0$;

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{ax^2+bx+c}+\alpha x+\beta=|x|\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}+x\left(\alpha+\frac{\beta}{x}\right)$$
$$=-x\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}+x\left(\alpha+\frac{\beta}{x}\right);\ (x<0 \text{ donc: } |x|=-x)$$
$$=x\left[-\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}+\alpha+\frac{\beta}{x}\right]$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}+\alpha+\frac{\beta}{x}\right)=-\sqrt{a}+\alpha$$

On pose $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}+\alpha x+\beta$; $a>0$ et $\alpha\neq 0$



Exemple 1 :

Calculons: $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{2x^2-3x+1}+x-2)$

On a : $a=2$ et $\alpha=1$

Comme $-\sqrt{a}+\alpha = 1-\sqrt{2}(<0)$; alors il suffit de factoriser par x

$x<0$; $\sqrt{2x^2-3x+1}+x-2 = x\left[-\sqrt{2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+1-\frac{2}{x}\right]$

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x}}+1-\frac{2}{x}\right) = -\sqrt{2}+1<0\Big\}$ donc:

$\lim\limits_{x\to-\infty} x\left[-\sqrt{2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+1-\frac{2}{x}\right] = +\infty$

D'où : $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{2x^2-3x+1}+x-2) = +\infty$

Exemple 2 :

Calculons: $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{9x^2-2}+3x-4)$

On a : $a=9$ et $\alpha=3$

Comme $-\sqrt{a}+a=0$, alors on utilise le conjugué :

$$x<0\ ;\ \sqrt{9x^2-2}+3x-4=\frac{(\sqrt{9x^2-2}+3x)(\sqrt{9x^2-2}-3x)}{\sqrt{9x^2-2}-3x}-4$$
$$=\frac{9x^2-2-9x^2}{\sqrt{9x^2-2}-3x}-4$$
$$=\frac{-2}{\sqrt{9x^2-2}-3x}-4$$

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{9x^2-2}-3x)=+\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2}{\sqrt{9x^2-2}-3x}=0$

D'où : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2}{\sqrt{9x^2-2}-3x}-4=-4$ Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{9x^2-2}+3x-4)=-4$

Exercices

Exercice 1

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1 $f(x)=\frac{x^2+\sqrt{2}x-1}{6}$ 2 $f(x)=\frac{3x}{9(x-1)^2-1}$ 3 $f(x)=\frac{5x-1}{x^3-3x^2+2x}$

Exercice 2

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1 $f(x)=\frac{\sqrt{1-2x}}{x^2-2x-8}$ 2 $f(x)=\sqrt{\frac{3x-4}{2-x}}$ 3 $f(x)=\sqrt{\frac{x^2-2x-15}{x^2-x-2}}$

Exercice 3

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1 $f(x)=\frac{x^2+1}{3-|x-1|}$ 2 $f(x)=\frac{2x+1}{\sqrt{|x|-1}}$ 3 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{|x-5|-3}-1}$

Exercice 4

Calculer les limites suivantes :

1 a. $\lim\limits_{x\to-1}x^2-x+1$ b. $\lim\limits_{x\to3}\frac{x-3}{2x+2}$ c. $\lim\limits_{x\to1}\sqrt{\frac{1-2x}{x-2}}$

2 a. $\lim\limits_{x\to1}\frac{3x-5}{(x-1)^2}$ b. $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x^2-x-3}{x^2+2x-3}$ c. $\lim\limits_{x\to4^+}\frac{x}{2-\sqrt{x}}$

Exercice 5

Calculer les limites suivantes :

1 a. $\lim\limits_{x\to-\infty}(3x^5-x+1)$ b. $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3-\sqrt{2}x^3+x+1$ c. $\lim\limits_{x\to+\infty}(-3x^5+x+1)^3$

2 a. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^3-7x}{x-x^2}$ b. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+x+3}{(x+1)^3}$ c. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2-7x+1}{2x^2-(2x+1)^2}$

3 a. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^3-x}$ b. $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\dfrac{2x^2-x+1}{8x^2+3}}$ c. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{1}{2x-3}}$

Exercice 6

Calculer les limites suivantes :

1 a. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{x^2-2x}$ b. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-5x+6}{9-x^2}$ c. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^3+3x^2+4x+3}{x^2+3x+2}$

2 a. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}$ b. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-x-6}{\sqrt{x+6}-3}$ c. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+5}-3}$

Exercice 7

Calculer les limites suivantes :

1 a. $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x}+3x$ b. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+3}-x)$ c. $\lim\limits_{x\to+\infty}x-\sqrt{x}+2x\sqrt{x}$

2 a. $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{16x^2+1}+4x$ b. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ c. $\lim\limits_{x\to+\infty}x-\sqrt{x^2+x+1}$

Exercice 8

Calculer les limites suivantes :

1 a. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{x}+1}{x+2}$ b. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}}{x+2}$ c. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-3}}$

2 a. $\lim\limits_{x\to2}(x-2)\left(1-\dfrac{5}{x^2-4}\right)$ b. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

c. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x\sqrt{x}}(-3x^2+x+1)$

Exercice 9

1 a. Etudier la limite de la fonction f en 0 telle que : $f(x)=\dfrac{x^2+|x|}{x}$

b. Etudier la limite de la fonction f en 1 telle que: $\begin{cases} f(x)=-x+1 ; x\leq 1 \\ f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1} ; x>1 \end{cases}$

2 Soit f la fonction numérique définie sur IR par: $\begin{cases} f(x)=-3x+b \ ; \ x\geq 1 \\ f(x)=2x+5 \ \ ; \ x<1 \end{cases}$

Déterminer b sachant que f admet une limite finie au point 1.

Exercice 10

1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{3x}$ 2 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\sin 6x}$ 3 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{4x^2}$

4 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x^2+2x}$ 5 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\sin x\cos x}{x^3}$ 6 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sin x}$

Exercice 11

soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{2+\sin x}{x}$

Montrer que: $(\forall x\in IR_+^*);\dfrac{1}{x}\leq f(x)\leq\dfrac{3}{5}$. en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

Exercice 12

1 En utilisant un encadrement convenable, calculer les limites suivantes:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{\sin\sqrt{x}}{x^2+1}-\sqrt{2}\right]$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\cos x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-\cos x)$

2 Montrer que : $(\forall x\in\ ]-\infty;0[);\dfrac{2-x}{x}\leq\dfrac{\cos(x)-x+1}{x}\leq -1$.

En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\cos x-x+1}{x}$

Exercice 13

En utilisant un encadrement convenable, calculer la limite suivante :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x^2+\cos x-x\sin x}{3x^2+1}$

Exercice 14

h est une fonction numérique définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et vérifie :
$(\forall x \in]0;+\infty[); x^3 - 3x^2 < h(x) < x^3 + x^2$
Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{h(x)}{x^3}\right]$
(justifier vos réponses).

Solutions

Exercice 1

1 On a : $f(x) = \dfrac{x^2 + x\sqrt{2} - 1}{6}$ qui s'écrit : $f(x) = \dfrac{1}{6}x^2 + \dfrac{\sqrt{2}}{6}x - \dfrac{1}{6}$

Donc f est une fonction polynôme d'où $D_f = IR$ (D_f est l'ensemble de définition de f)

2 **Déterminons l'ensemble de définition de f où :** $f(x) = \dfrac{3x}{9(x-1)^2 - 1}$

Soit D_f l'ensemble de définition de f, et soit x un réel.

On a : $x \in D_f \iff 9(x-1)^2 - 1 \neq 0$

▸ **Résolvons l'équation** $9(x-1)^2 - 1 = 0$

On a : $9(x-1)^2 - 1 = 0 \iff 9(x-1)^2 = 1$

$\iff (x-1)^2 = \dfrac{1}{9}$

$\iff x - 1 = \dfrac{1}{3}$ ou $x - 1 = -\dfrac{1}{3}$

$\iff x = \dfrac{4}{3}$ ou $x = \dfrac{2}{3}$

Donc : $D_f = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{2}{3}; \dfrac{4}{3}\right\}$ c'est-à-dire $D_f =]-\infty; \dfrac{2}{3}[\cup]\dfrac{2}{3}; \dfrac{4}{3}[\cup]\dfrac{4}{3}; +\infty[$

3 **Déterminons l'ensemble de définition de f où :** $f(x) = \dfrac{5x-1}{x^3 - 3x^2 + 2x}$

Soit D_f l'ensemble de définition de f et soit x un réel.

On a: $x \in D_f \iff x^3 - 3x^2 + 2x \neq 0$

▸ Résolvons l'équation $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$

On a : $x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \iff x(x^2 - 3x + 2) = 0$

$\iff x = 0$ ou $x^2 - 3x + 2 = 0$

Les deux solutions de l'équation $x^2 - 3x + 2 = 0$ sont 1 et 2 (à vérifier en utilisant Δ).

Donc: $D_f = IR - \{0;1;2\}$ (D_f est IR privé des solutions de $(x^3 - 3x^2 + 2x = 0)$

D'où : $D_f =]-\infty;0[\cup]0;1[\cup]1;2[\cup]2;+\infty[$

Exercice 2

1 Déterminons l'ensemble de définition de la fonction f telle que :

$$f(x) = \frac{\sqrt{1-2x}}{x^2-2x-8}$$

Soit D_f l'ensemble de définition de f :

On a : $D_f = \{x \in IR / 1-2x \geq 0 \text{ et } x^2-2x-8 \neq 0\}$

Remarque: On résoud l'équation $(E): x^2-2x-8=0$ et l'inéquation:

$(I): 1-2x \geq 0$;

Si S_I est l'ensemble des solutions de l'inéquation (I) et S_E est l'ensemble de solutions de l'équation (E) ; alors : $D_f = S_I - S_E$

Soit x un réel, résolvons l'inéquation : $1-2x \geq 0$

On a : $1-2x \geq 0 \iff 2x \geq -1$

$\iff 2x \leq 1$

$\iff x \leqslant \frac{1}{2}$

Donc : $S_1 = \left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$

Résolvons l'équation : $x^2-2x-8=0$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times (1) \times (-8)$

$\Delta = 36$

Donc les solutions de (E) sont $x_1 = \frac{2+6}{2} = 4$ et $x_2 = \frac{2-6}{2} = -2$

D'où : D_f est S_1 privé de -2 et de 4 (On remarque que $4 \notin S_1$)

C'est-à-dire : $D_f =]-\infty;-2[\cup \left]-2;\frac{1}{2}\right]$

2 Déterminons l'ensemble de définition de la fonction f telle que:

$$f(x) = \sqrt{\frac{3x-4}{2-x}}$$

On a : $D_f = \left\{x \in IR / \frac{3x-4}{2-x} \geq 0 \text{ et } 2-x \neq 0\right\}$

$2-x \neq 0 \iff x \neq 2$

▸ Tableau de signes de : $\frac{3x-4}{2-x}$

Soit x un réel,

▸ On a : $3x-4=0 \Leftrightarrow x=\frac{4}{3}$ et $2-x=0 \Leftrightarrow x=2$

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		2		$+\infty$
$3x-4$		$-$	0	$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{3x-4}{2-x}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	

Donc : $\frac{3x-4}{2-x} \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{4}{3}, 2\right[$

D'où : $D_f = \left[\frac{4}{3}; 2\right[$

3 Déterminons l'ensemble de définition de la fonction f telle que :

$f(x) = \sqrt{\frac{x^2-2x-15}{x^2-x-2}}$

Soit x un réel, on a : $x \in D_f \Leftrightarrow \left(\frac{x^2-2x-15}{x^2-x-2} \geq 0 \text{ et } x^2-x-2 \neq 0\right)$

Résolvons l'inéquation : $\frac{x^2-2x-15}{x^2-x-2} \geq 0$

Résolvons d'abord les deux équations :

$(E) : x^2-2x-15=0$ et $(F) : x^2-x-2=0$

infos:

$(E) : ax^2+bx+c=0$

Si $a \neq 0$ et $a-b+c=0$

alors -1 et $-\frac{c}{a}$ sont les solutions de (E)

Puis dressons le tableau de signe de : $\frac{x^2-2x-15}{x^2-x-2}$

L'équation (F) admet deux solutions : -1 et 2.

Résolvons : $x^2-2x-15=0 \quad (F)$

On a : $\Delta = (-2)^2-4\times1\times(-15)$

$= 64$

L'équation (F) admet deux solutions : $x_1=\frac{2+8}{2}=5$ et $x_2=\frac{2-8}{2}=-3$

Tableau de signes de $\frac{x^2-2x-15}{x^2-x-2}$:

x	$-\infty$		-3		-1		2		5	$+\infty$
$x^2-2x-15$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$
x^2-x-2		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{x^2-2x-15}{x^2-x-2}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	‖	$-$	0	$+$

Donc : $D_f =]-\infty ; -3]\cup]-1 ; 2[\cup[5 , +\infty[$

Exercice 3

1 **Déterminons l'ensemble de définition de f telle que:** $f(x) = \dfrac{x^2+1}{3-|x-1|}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 3-|x-1| \neq 0\}$

Résolvons l'équation : $3-|x-1| = 0$

Soit x un réel, on a : $3-|x-1| = 0 \iff |x-1| = 3$

$\iff x-1 = 3$ ou $x-1 = -3$

$\iff x = 4$ ou $x = -2$

Donc : $D_f = \mathbb{R} - \{-2 ; 4\}$

D'où : $D_f = [-\infty ; -2[\cup]-2 ; 4[\cup]4 ; +\infty[$

2 **Déterminons l'ensemble de définition de la fonction f telle que :**

$f(x) = \dfrac{2x+1}{\sqrt{|x|-1}}$

Soit x un réel, on a : $x \in D_f \iff |x|-1 > 0$

$\iff |x| > 1$

$\iff x > 1$ ou $x < -1$

Donc : $D_f =]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$

3 **Déterminons l'ensemble de définition de la fonction f telle que :**

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x-5|-3}-1}$

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $x \in D_f \iff |x-5|-3 \geq 0$ et $\sqrt{|x-5|-3}-1 \neq 0$

Résolvons l'inéquation : (I): $|x-5|-3 \geq 0$

On a : $|x-5|-3 \geq 0 \iff |x-5| \geq 3$ ou $x-5 \leq -3$

$\iff x \geq 8$ ou $x \leq 2$

D'où : $S_1 =]-\infty ; 2]\cup[8 ; +\infty[$ (I).

Résolvons l'équation : $\sqrt{|x-5|-3}-1=0$

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $\sqrt{|x-5|-3}-1=0 \iff \sqrt{|x-5|-3}=1$

$\iff |x-5|-3=1$

$\iff |x-5|=4$

$\iff x-5=4$ ou $\iff x-5=-4$

$\iff x=9$ ou $x=1$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) est : $S_E=\{1;9\}$

D'où : $D_f=S_f-S_E$

Donc : $D_f=]-\infty;1[\cup]1;2]\cup[8;9[\cup]9;+\infty[$

Exercice 4

1 a. On a : $\lim\limits_{x\to-1} x^2-x+1=(-1)^2-(-1)+1=3$ (car f est une fonction polynôme)

b. **Calculons** $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{2x+2}$:

La fonction $x\mapsto\dfrac{x-3}{2x+2}$ est une fonction rationnelle définie en 3.

Donc : $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{2x+2}=\dfrac{3-3}{8}=0$

D'où : $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{2x+2}=0$

c. **Calculons** $\lim\limits_{x\to1}\sqrt{\dfrac{1-2x}{x-2}}$:

on a : $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-2x}{x-2}=\dfrac{-1}{-1}=1$

Donc : $\lim\limits_{x\to1}\sqrt{\dfrac{1-2x}{x-2}}=\sqrt{1}=1$

D'où : $\lim\limits_{x\to1}\sqrt{\dfrac{1-2x}{x-2}}=1$

2 **Limites de:** $x\mapsto\dfrac{f(x)}{g(x)}$ **en** a **cas où:** $f(a)\neq0$ **et** $g(a)=0$**).**

a. **Calculons:** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x-5}{(x-1)^2}$ on a : $\lim\limits_{x\to1}2x-5=-3$ et $\lim\limits_{x\to1}(x-1)^2=0$

Puisque : $(x-1)^2>0$ pour $x\neq1$ et $-3<0$ alors : $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x-5}{(x-1)^2}=-\infty$

b. **Calculons** $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-x-3}{x^2+2x-3}$:

On a : $\lim\limits_{x\to 1^-} x^2-x-3=-3$ (1) et $\lim\limits_{x\to 1} x^2+2x-3=0$

Étudions le signe de x^2+2x-3 au voisinage 1.

Les solutions de l'équation $x^2+2x-3=0$ sont 1 et -3.

D'où le tableau de signes de x^2+2x-3 :

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
x^2+2x-3		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $\lim\limits_{x\to 1^-} x^2+2x-3=0^-$ (2) (x^2+2x-3) est négative à gauche de 1).

De (1) et (2) on déduit que : $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-x-3}{x^2+2x-3}=+\infty$

c. **Calculons** $\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{x}{2-\sqrt{x}}$:

On a : $\lim\limits_{x\to 4^+} x=4$ (1) et $\lim\limits_{x\to 4} 2-\sqrt{x}=0$

Étudions le signe de $2-\sqrt{x}$ à droite de 4.

Soit x un réel, on a : $x>4 \iff \sqrt{x}>2$

$\iff 2-\sqrt{x}<0$

Donc : $\lim\limits_{x\to 4^+} 2-\sqrt{x}=0^-$ (2) $(2-\sqrt{x}<0)$ à droite de 4).

De (1) et (2) on déduit que : $\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{x}{2-\sqrt{x}}=-\infty$

Exercice 5

1 Limites de fonctions polynômes au voisinage de ∞ :

a. On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}(3x^5-x+1)=\lim\limits_{x\to-\infty}3x^5=-\infty$

b. On a : $x^3-\sqrt{2}\,x^3+x+1=(1-\sqrt{2})x^3+x-1$.

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3-\sqrt{2}x^3+x+1=\lim\limits_{x\to-\infty}(1-\sqrt{2})x^3$

Puisque : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ et $1-\sqrt{2}<0$

Alors : $\lim\limits_{x\to-\infty}(1-\sqrt{2})x^3=+\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3-\sqrt{2}x^3+x+1=+\infty$

c. **Calculons** $\lim\limits_{x\to+\infty}(-3x^3+x+1)^3$:

Méthode 1 :

Le terme du plus haut degré du polynôme $(-3x^3+x+1)^3$ est $(-3x^3)^3$

c'est-à-dire: $-27x^9$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}(-3x^3+x+1)^3 = \lim\limits_{x\to+\infty} -27x^9$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^9 = +\infty$ et $-27 < 0$

Alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}(-3x^3+x+1)^3 = -\infty$

Méthode 2 :

On calcule d'abord $\lim\limits_{x\to+\infty} -3x^3+x+1$ puis on en déduit $\lim\limits_{x\to+\infty}(-3x^3+x+1)^3$

2 Limites de fonctions rationnelles au voisinage de ∞ :

a. On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^3-7x}{x-x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^3}{-x^2}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} -4x$

$= -\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^3-7x}{x-x^2} = -\infty$

b. On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+x+3}{(x+1)^3} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2}{x^3}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x} = 0$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+x+3}{(x+1)^3} = 0$

c. On a : $2x^2-(2x+1)^2 = 2x^2-4x^2-4x-1$

$= -2x^2-4x-1$

D'où : $\dfrac{2x^2-7x+1}{2x^2-(2x+1)^2} = \dfrac{2x^2-7x+1}{-2x^2-4x-1}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2-7x+1}{-2x^2-4x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2}{-2x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{-2} = -1$

Alors : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2-7x+1}{2x^2-(2x+1)^2} = -1$

3 Limites de fonctions de la forme $\sqrt{f}$ au voisinage de ∞ où f est une fonction rationnelle positive.

a. On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3-x = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^3-x} = +\infty$

b. On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2-x+1}{8x^2+3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2}{8x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{8}=\dfrac{1}{4}$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\dfrac{2x^2-x+1}{8x^2+3}}=\sqrt{\dfrac{1}{4}}=\dfrac{1}{2}$

c. On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2x-3}=0^+$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{1}{2x-3}}=0$

Exercice 6

1 a. Calculons $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{x^2-2x}$

On a : $x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$ et $x^2-2x=x(x-2)$

Donc : $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{x^2-2x}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+2x+4}{x}=6$

D'où : $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{x^2-2x}=6$

b. Calculons $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-5x+6}{9-x^2}$

On a : $x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$ et $9-x^2=-(x-3)(x+3)$ pour tout x un réel,

Donc : $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-5x+6}{9-x^2}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-2}{-(x+3)}=-\dfrac{1}{6}$

D'où : $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-5x+6}{9-x^2}=-\dfrac{1}{6}$

c. Calculons $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2+3x^2+4x+3}{x^2+3x+2}$

On a : $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$ (1)

Éffectuons la division euclidienne de $2x^3+3x^2+4x+3$ par $x+1$.

$2x^3+3x^2+4x+3$	$x+1$
$-2x^3-2x^2$	$2x^2+x+3$
x^2+4x+3	
$-x^2-x$	
$3x+3$	
$-3x-3$	
0	

Donc : $2x^3+3x^2+4x+3=(x+1)(2x^2+x+3)$ (2)

De (1) et (2) on déduit que : $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^3+3x^2+4x+3}{x^2+3x+2}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+x+3}{x+2}=4$

2 a. **Calculons** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}$

On a: $\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}=\dfrac{(\sqrt{x^2+4}-2)(\sqrt{x^2+4}+2)}{x(\sqrt{x^2+4}+2)}$

$=\dfrac{x^2}{x(\sqrt{x^2+4}+2)}$

$=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}+2}$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}+2}=0$

D'où : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}=0$

b. **Calculons** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{\sqrt{x+6}-3}$

On a : $\dfrac{x^2-x-6}{\sqrt{x+6}-3}=\dfrac{(x-3)(x+2)(\sqrt{x+6}+3)}{(\sqrt{x+6}-3)(\sqrt{x+6}-3)}$

$=\dfrac{(x-3)(x+2)(\sqrt{x+6}+3)}{x-3}$

$=(x+2)(\sqrt{x+6}+3)$

Donc : $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{\sqrt{x+6}-3}=\lim\limits_{x\to 3}(x+2)(\sqrt{x+6}+3)$

$=5\times(\sqrt{9}+3)$

$=30$

D'où : $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{\sqrt{x+6}-3}=30$

c. **Calculons** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+5}-3}$

On a : $\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+5}-3}=\dfrac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x+5}+3)}{(\sqrt{x+5}-3)(\sqrt{x+5}+3)(\sqrt{x}+2)}$

$=\dfrac{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$

$=\dfrac{\sqrt{x+5}+3}{\sqrt{x}+2}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x+5}+3}{\sqrt{x}+2}=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}$

Alors : $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+5}-3}=\dfrac{3}{2}$

Remarque :

On peut écrire $\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+5}-3}$ sous la forme : $\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+5}-3}=\dfrac{\dfrac{x-4}{\sqrt{x}+2}}{\dfrac{x-4}{\sqrt{x+5}+3}}$

(On utilise le conjugué du dénominateur et le conjugué du numérateur).

Exercice 7

a. **Calculons** $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x}+3x$

Soit x un réel de l'intervalle $]-\infty;-1]$.

On a : $\sqrt{x^2+x}+3x = \sqrt{x^2(1+\frac{1}{x})}+3x=|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}+3x$

$= -x\sqrt{1+\frac{1}{x}}+3x=x(3-\sqrt{1+\frac{1}{x}})$ (car $x<0$)

Puisque : $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}3-\sqrt{1+\frac{1}{x}}=2$ (car $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$)

Alors : $\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(3-\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)=-\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x}+3x=-\infty$

b. **Calculons** $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+3}-x$

Soit $x>0$, on a : $\sqrt{x+3}-x = \sqrt{x^2\left(\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}-x=|x|\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}-x$

$= x\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}-x=x\left(\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}-1\right)$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}-1=-1$

(Car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$)

alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}-1\right)=-\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+3}-x=-\infty$

c. **Calculons** $\lim\limits_{x\to+\infty}x-\sqrt{x}+2x\sqrt{x}$

On a : $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)\ ; x-\sqrt{x}+2x\sqrt{x}=x\sqrt{x}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}+2\right)$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}+2=2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}x\sqrt{x}=+\infty$

Alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}x\sqrt{x}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}+2\right)=+\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\sqrt{x}+2x\sqrt{x}=+\infty$

2 a. Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{16x^2+1}+4x)$:

On a : $\sqrt{16x^2+1}+4x = \dfrac{16x^2+1-(4x)^2}{\sqrt{16x^2+1}-4x}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{16x^2+1}-4x}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{16x^2+1}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}-4x=+\infty$

alors : $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{16x^2+1}-4x=+\infty$

donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\sqrt{16x^2+1}-4x}=0$

D'où : $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{16x^2+1}+4x=0$

b. Calculons : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

Soit $x>0$

On a : $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$ (on utilise le conjugué)

Donc: $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}+1+\sqrt{x}}=0$,d'où: $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=0$

c. Calculons : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2+x+1})$

Soit x de $]0;+\infty[$

On a : $x-\sqrt{x^2+x+1} = \dfrac{(x-\sqrt{x^2+x+1})(x+\sqrt{x^2+x+1})}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$

$= \dfrac{x^2-x^2-x-1}{x+\sqrt{x^2+x+1}} = \dfrac{-x-1}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$

$= \dfrac{x(-1-\frac{1}{x})}{x+\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}} = \dfrac{x(-1-\frac{1}{x})}{x+|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}$

Puisque : $|x|=x$ (car $x>0$)

alors : $x-\sqrt{x^2+x+1}=\dfrac{x(-1-\frac{1}{x})}{x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)}=\dfrac{-1-\frac{1}{x}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2+x+1})=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1-\frac{1}{x}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$

alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1-\frac{1}{x}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}=-\frac{1}{2}$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}x-\sqrt{x^2+x+1}=-\frac{1}{2}$

Exercice 8

1 a. Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{x}+1}{x+2}$:

Soit x un réel strictement positif, on a : $\frac{x\sqrt{x}+1}{x+2}=\frac{x(\sqrt{x}+\frac{1}{x})}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}=\frac{\sqrt{x}+\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}}$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{x}+1}{x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$

alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}}=+\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{x}+1}{1+\frac{2}{x}}=+\infty$

b. Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}}{x+2}$:

Méthode 1 :

Soit x un réel de $]0;+\infty[$, on a : $\frac{\sqrt{x+1}}{x+2}=\frac{\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}}{x(1+\frac{2}{x})}=\frac{\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{2}{2x}}$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}}{x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}}}{1+\frac{2}{x}}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)=1$

alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}}}{1+\frac{2}{x}}=0$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}}{x+2}=0$

Méthode 2 :

$x>0$; $\frac{\sqrt{x+1}}{x+2}=\frac{x+1}{(x+2)\sqrt{x+1}}=\frac{1+\frac{1}{x}}{\left(x+\frac{2}{x}\right)\sqrt{x+1}}$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$; $\lim\limits_{x\to+\infty}1+\frac{2}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}=+\infty$

donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\left(x+\frac{2}{x}\right)\sqrt{x+1}}=0$; d'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}}{x+2}=0$

Méthode 3 :

$x>0$; $\frac{\sqrt{x+1}}{x+2}=\frac{\sqrt{x+1}}{(x+2)^2}=\sqrt{\frac{x+1}{(x+2)^2}}$

or : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{(x+2)^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x+1}{(x+2)^2}}=0$

d'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}}{x+2}=0$

c. **Calculons** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-3}}$:

Soit x un réel l'intervalle $]-\infty;-\sqrt{3}[$

On a : $\frac{x}{\sqrt{x^2-3}}=\frac{x}{\sqrt{x^2(1-\frac{3}{x^2})}}=\frac{x}{|x|\sqrt{1-\frac{3}{x^2}}}$

d'où : $\frac{x}{\sqrt{x^2-3}}=\frac{x}{-x\sqrt{1-\frac{3}{x^2}}}$ (car $x<0$)

D'où : $=\frac{1}{-\sqrt{1-\frac{3}{x^2}}}$

or $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1-\frac{3}{x^2}}=1$; donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{-\sqrt{1-\frac{3}{x^2}}}-1$

d'où : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-3}}=-1$

2 a. **Calculons** $\lim\limits_{x\to2}(x-2)\left(1-\frac{5}{x^2-4}\right)$:

On a : $(x-2)\left(1-\frac{5}{x^2-4}\right)=x-2-\frac{5(x-2)}{(x^2-2)(x+2)}=x-2-\frac{5}{x+2}$

donc : $\lim\limits_{x\to2}(x-2)\left(1-\frac{5}{x^2-4}\right)=\lim\limits_{x\to2}x-2-\frac{5}{x+2}$

$=2-2-\frac{5}{2+2}=-\frac{5}{4}$

Donc : $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)\left(1-\frac{5}{x^2-4}\right)=-\frac{5}{4}$

b. Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+2}}\left(x+\frac{1}{x}\right)$:

Méthode 1 :

Soit x un réel de $]0;+\infty[$, on a : $\frac{1}{\sqrt{x+2}}\left(x+\frac{1}{x}\right)=\frac{x}{\sqrt{x+2}}+\frac{1}{x\sqrt{x+2}}$

$$=\sqrt{\frac{x^2}{x+2}}+\frac{1}{x\sqrt{x+2}}$$

car : $(\forall x\in IR_+^*);\ \frac{x}{\sqrt{x+2}}=\frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x+2}}=\sqrt{\frac{x^2}{x+2}}$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}x\sqrt{x+2}=+\infty$, d'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x+2}}=0$ (1)

et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$, d'où: $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2}{x+2}}=+\infty$ (2)

De (1) et (2) on déduit que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2}{x+2}}+\frac{1}{x\sqrt{x+2}}=+\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+2}}\left(x+\frac{1}{x}\right)=+\infty$

Méthode 2 :

On a : $(\forall x\in]0;+\infty[);\frac{1}{\sqrt{x+2}}\left(x+\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2+1}{x\sqrt{x+2}}=\frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{2}{x}}}$

$$=\frac{\sqrt{x}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}}$$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}+2}\left(x+\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}}\right)$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}}=1$

alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}}=+\infty$, d'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+2}}\left(x+\frac{1}{x}\right)=+\infty$

c. Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x}}\left(3x^2+x+\frac{1}{x}\right)$:

Soit x un réel $]0;+\infty[$, on a : $\frac{1}{x\sqrt{x}}\left(-3x^2+x+\frac{1}{x}\right)=-3\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2\sqrt{x}}$

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x}}\left(-3x^2+x+\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}-3\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2\sqrt{x}}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2\sqrt{x}}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}-3\sqrt{x}=-\infty$

alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}-3\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2\sqrt{x}}=-\infty$

d'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x}}(-3x^2+x+\frac{1}{x})=-\infty$

Exercice 9

1 a. Étudions la limite de la fonction f en 0 où : $f(x)=\frac{x^2+|x|}{x}$

Soit x un réel non nul.

Si $x>0$ alors : $f(x)=\frac{x^2+x}{x}=x+1$ et si $x<0$ alors : $f(x)=\frac{x^2-x}{x}=x-1$

Donc : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}x+1=1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}x-1=-1$

D'où : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}f(x)=-1$

Donc f n'admet pas de limite en 0.

b. Étudions la limite de f en 1; où : $\begin{cases}f(x)=-x+1 & ;\ x\le1\\ f(x)=\frac{x^3-3x+2}{x-1} & ;\ x>1\end{cases}$

On a : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}-x+1=0$

et on a : $(\forall x\in]1;+\infty[);\frac{x^3-3x+2}{x-1}=\frac{(x-1)(x^2+x-2)}{x-1}=x^2+x-2$

(En utilisant la division euclidienne de x^3-3x+2 par $x-1$)

Donc : $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}x^2+x-2=0$

D'où : $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=0$

et par suite f admet une limite en 1: $\lim\limits_{x\to1}f(x)=0$

2 Déterminons b tel que f admet une limite finie en 1.

On a : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} -3x+b = -3+b$

et on a : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} 2x+5 = 7$

Pour que f admette une limite en 1, il faut que: $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)$

C'est-à-dire : $7 = -3+b$ donc : $b = 10$

Exercice 10

1 Calculons $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{3x}$:

On a : $(\forall x \in IR^*)\ ; \dfrac{\sin 2x}{3x} = \dfrac{1}{3}\dfrac{\sin 2x}{x}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{x} = 2$, alors : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{3x} = \dfrac{1}{3}\times 2 = \dfrac{2}{3}$

d'où : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{3x} = \dfrac{2}{3}$

2 Calculons $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 2x}{\sin 6x}$:

Soit x un réel tel que $\tan 2x$ est définie et $\sin 6x \neq 0$

On a : $\dfrac{\tan 2x}{\sin 6x} = \dfrac{\dfrac{\tan 2x}{x}}{\dfrac{\sin 6x}{x}}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 6x}{x} = 6$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 2x}{x} = 2$

alors : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{\tan 2x}{x}}{\dfrac{\sin 6x}{x}} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$ d'où : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 2x}{\sin 6x} = \dfrac{1}{3}$

3 Calculons $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{4x^2}$:

On a : $(\forall x \in IR^*)\ ; \dfrac{1-\cos x}{4x^2} = \dfrac{1}{4}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ et on sait que : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{4x^2} = \dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8}$ d'où : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{4x^2} = \dfrac{1}{8}$

4 Calculons $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{x^2+2x}$:

Soit x un réel non nul , on a : $\dfrac{\sin 2x}{x^2+2x} = \dfrac{\sin 2x}{x}\times\dfrac{x}{x^2+2x}$

$= \dfrac{\sin 2x}{x}\times\dfrac{1}{x+2}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{x} = 2$

Alors : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x^2+2x} = 2\times\dfrac{1}{2} = 1$, donc : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x^2+2x} = 1$

5 **Calculons** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - \sin x\cos x}{x^3}$:

Soit x un réel non nul , on a : $\dfrac{\sin x - \sin x\cos x}{x^3} = \dfrac{\sin x(1-\cos x)}{x^3}$

$= \dfrac{\sin x}{x}\times\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

Alors : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - \sin x\cos x}{x^3} = 1\times\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$, donc : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - \sin x\cos x}{x^3} = \dfrac{1}{2}$

6 **Calculons** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sin x}$:

Soit x un réel non nul tel que $x > -1$

On a : $\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sin x} = \dfrac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}+1)\sin x}$

$= \dfrac{x}{(\sqrt{x+1}+1)\sin x}$

$= \dfrac{x}{\sin x}\times\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1}$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}\times\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x} = 1$ (car $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$)

et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \dfrac{1}{2}$ alors : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sin x} = 1\times\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

Exercice 11

Montrons que : $(\forall x\in IR_+^*)$; $\dfrac{1}{x}\le f(x)\le\dfrac{3}{x}$

Soit x un réel strictement positif $(x\in\mathbb{R}^{+*})$

On a : $f(x) = \dfrac{2+\sin x}{x}$ Puisque : $-1\le\sin x\le 1$ et $x > 0$

alors : $\dfrac{2-1}{x}\le\dfrac{2+\cos x}{x}\le\dfrac{2+1}{x}$

donc : $\dfrac{1}{x}\le f(x)\le\dfrac{3}{x}$

Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = 0$ et $\dfrac{1}{x}\le f(x)\le\dfrac{3}{x}$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Exercice 12

Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{\sin\sqrt{x}}{x^2+1}-\sqrt{2}\right]$:

Soit x de $\mathbb{R}_+^*$

On a : $-1\leq\sin\sqrt{x}\leq 1$ et $x^2+1>0$ donc : $\frac{-1}{x^2+1}<\frac{\sin\sqrt{x}}{x^2+1}\leq\frac{1}{x^2+1}$

d'où : $\frac{-1}{x^2+1}-\sqrt{2}\leq\frac{\sin\sqrt{x}}{x^2+1}-\sqrt{2}\leq\frac{1}{x^2+1}-\sqrt{2}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2+1}-\sqrt{2}=-\sqrt{2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{x^2+1}-\sqrt{2}=-\sqrt{2}$

alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin\sqrt{x}}{x^2+1}-\sqrt{2}=-\sqrt{2}$ (d'après la propiété des limites et ordre)

Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-\cos x)$:

Soit x un réel

On a : $-1\leq\cos x\leq 1$ donc : $-1\leq-\cos x\leq 1$

d'où : $x-1\leq x-\cos x\leq x+1$ donc : $(\forall x\in\mathbb{R})\,;x-\cos x\geq x-1$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\cos x)=+\infty$

On a d'après ce qui précède : $(x\in\mathbb{R})\,;x-\cos x\leq x+1$

Puisque : $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)=-\infty$ alors : $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-\cos x)=-\infty$ (d'après la propiété des limites et ordre)

2 Montrons que : $(\forall x\in]-\infty;0[)\,;\frac{2-x}{x}\leq\frac{\cos(x)-x+1}{x}\leq-1$

Soit x un réel strictement négatif

On a : $-1\leq\cos x\leq 1$ d'où : $-1-x+1\leq\cos(x)-x+1\leq 1-x+1$

c'est-à-dire: $-x\leq\cos(x)-x+1\leq 2-x$

Puisque : $x\in]-\infty;0[$ alors : $\frac{2-x}{x}\leq\frac{\cos(x)-x+1}{x}\leq\frac{-x}{x}$

c'est-à-dire : $\frac{2-x}{x}\leq\frac{\cos(x)-x+1}{x}\leq-1$

Déduisons $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\cos(x)-x+1}{x}$:

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}(-1)=-1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2-x}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}-1=-1$

et $(\forall x\in\mathbb{R}^{-*})\,;\frac{2-x}{x}\leq\frac{\cos(x)-x+1}{x}\leq-1$ donc :

$\lim_{x\to-\infty}\frac{\cos(x)-x+1}{x}=-1$. (d'après la propiété des limites et ordre

Exercice 13

Soit x un réel strictement positif $(x>0)$

On a : $-1\le\sin x\le 1$ et $-1\le\cos x\le 1$ donc : $-x\le x\sin x\le x$ $(*)$

$$(*)\Longrightarrow -x\le -x\sin x\le x$$
$$\Longrightarrow -1-x\le\cos x-x\sin x\le 1+x$$
$$\Longrightarrow 6x^2-x-1\le 6x^2+\cos x-x\sin x\le 6x^2+x+1$$

Puisque : $3x^2+1>0$

alors : $\frac{6x^2-x-1}{3x^2+1}\le\frac{6x^2+\cos x-x\sin x}{3x^2+1}\le\frac{6x^2+x+1}{3x^2+1}$

Puisque : $\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^2+x+1}{3x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^2}{3x^2}=\lim_{x\to+\infty}2=2$

et $\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^2-x-1}{3x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^2}{3x^2}=\lim_{x\to+\infty}2=2$

alors : $\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^2+\cos x-x\sin x}{3x^2+1}=2$

Exercice 14

- **Calculons** $\lim_{x\to0^+}h(x)$:

On a : $(\forall x\in]0;+\infty[);x^3-3x^2<h(x)<x^3+x^2$

On a : $\lim_{x\to0^+}x^3+x^2=0$ et $\lim_{x\to0^+}x^3-3x^2=0$ donc d'après les propriétés des limites et l'ordre, $\lim_{x\to0^+}h(x)=0$

- **Calculons** $\lim_{x\to+\infty}h(x)$:

On a : $(\forall x\in]0;+\infty[);h(x)>x^3-3x^2$ et $\lim_{x\to+\infty}x^3-3x^2=\lim_{x\to+\infty}x^3=+\infty$ donc d'après les propriétés des limites et l'ordre, on a : $\lim_{x\to+\infty}h(x)=+\infty$

- **Calculons** $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{h(x)}{x^3}\right]$:

Soit x un réel strictement positif

On a : $x^3-3x^2<h(x)<x^3+x^2$ Donc : $1-\frac{3}{x}<\frac{h(x)}{x^3}<1+\frac{1}{x}$

Puisque : $\lim_{x\to+\infty}1+\frac{1}{x}=1$ et $\lim_{x\to+\infty}1-\frac{3}{x}=1$ donc d'après les propriétés des limites et l'ordre, on a : $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{h(x)}{x^3}\right)=1$

2 Continuité d'une fonction numérique

1 Continuité d'une fonction en un point

Définitions:

- Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle de la forme $]a-\alpha;a+\alpha[$ où $\alpha>0$.

  (f est continue en a) $\Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

- Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle de la forme $[a;a+\alpha[$ où $\alpha>0$.

  (f est continue à droite en a) $\Longleftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=f(a)$

- Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle de la forme $]a-\alpha;a]$ où $\alpha>0$.

  (f est continue à gauche en a) $\Longleftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=f(a)$

Propriété:

Soit f la fonction numérique définie sur un intervalle de la forme $]a-\alpha;a+\alpha[$ où $\alpha>0$.

(f est continue en a) $\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} f \text{ est continue à droite en } a \\ \text{et} \\ f \text{ est continue à gauche en } a \end{cases}$

Exercices

Exercice 1

Soit f la fonction numérique définie par: $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3} \; ; x\neq 3 \\ f(3)=6 \end{cases}$

Étudier la continuité de f en 3.

Exercice 2

Soit f une fonction numérique définie par: $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}-x}{x-2} \; ; x\neq 2 \\ f(2)=-\dfrac{3}{4} \end{cases}$

Étudier la continuité de f en 2.

Exercice 3

Soit f la fonction numérique définie par: $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} \; ; x\neq 1 \\ f(1)=0 \end{cases}$

Étudier la continuité de f à droite en 1.

Exercice 4

Soit f la fonction numérique définie par : $\begin{cases} f(x) = x^3 + \sqrt{x} - 2 \; ; x \geq 0 \\ f(x) = 1 - 3x \; ; x < 0 \end{cases}$

Étudier la continuité de f en $x_0 = 0$.

Exercice 5

Soit f la fonction numérique définie par:

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 8x + 12} & ; x > -2 \\ f(x) = \dfrac{\sqrt{x+6} - 2}{x + 2} & ; -6 \leqslant x < -2 \\ f(-2) = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Montrer que la fonction f est continue en $x_0 = -2$.

Exercice 6

Soit f la fonction numérique définie par:

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x-1}{x^2 + x - 2} & ; x \neq -2 \text{ et } x \neq 1 \\ f(1) = a & ; \text{avec } a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Déterminer la valeur de a pour que la fonction f soit continue en 1.

Exercice 7

Soit f une fonction numérique définie par : $\begin{cases} f(x) = 3x^2 + bx + 1 \; ; x < 1 \\ f(x) = \sqrt{x-1} + 2 \; ; x \geq 1 \end{cases}$

avec $b \in \mathbb{R}$

Déterminer la valeur de b pour que la fonction f soit continue en 1.

Solutions

Exercice 1

On a : $f(3) = 6$

Calculons $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$

On a : $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3} (x+3) = 6 = f(3)$

Puisque: $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3)$; alors f est continue en 3.

Exercice 2

On a : $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}-x}{x-2}$ si $x\neq 2$ et $f(2)=-\dfrac{3}{4}$

Calculons $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

infos

$\sqrt{\dfrac{1}{A}}=\dfrac{1}{\sqrt{A}}$

Soit x de $[-2;2[\cup]2;+\infty[$

On a : $$f(x)=\frac{\sqrt{x+2}-x}{x-2}$$

$$=\frac{x+2-x^2}{(x-2)(\sqrt{x+2}+x)}=\frac{(x-2)(-x-1)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+x)}$$

$$=\frac{-x-1}{\sqrt{x+2}+x}$$

Donc : $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-x-1}{\sqrt{x+2}+x}=\dfrac{-3}{4}=f(2)$

Puisque : $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$ alors f est continue en 2.

Exercice 3

On a : $f(1)=0$ $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ et $x\geq 0$ et $x\neq 0$

Calculons $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)$:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}$$

Puisque : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)\neq f(1)$,

Alors f n'est pas continue à droite en 1.

Exercice 4

On a : $f(0)=-2$ (On remplace dans l'expression où on a $x\geq 0$)

et $$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^3+\sqrt{x}-2=-2=f(0)$$

et on a : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} 1-3x=1$ c'est-à-dire : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)\neq f(0)$

Donc f est continue à droite en zéro et non continue à gauche en zéro.

D'où f n'est pas continue en zéro.

Exercice 5

On a: $f(-2)=\frac{1}{4}$

Calculons $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} f(x)$ **et** $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} f(x)$

On a : $(\forall x\in]-2;+\infty[)\ ;\ f(x)=\frac{(x+2)(x+3)}{(x+2)(x+6)}=\frac{x+3}{x+6}$

Donc : $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}}\frac{x+3}{x+6}=\frac{1}{4}=f(-2)$

C'est-à-dire: $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} f(x)=f(-2)$

D'où f est continue à droite en -2 (1)

On a : $(\forall x\in]-6;-2[)\ ;\ f(x)=\frac{\sqrt{x+6}-2}{x+2}$

$$=\frac{(\sqrt{x+6}-2)(\sqrt{x+6}+2)}{(x+2)(\sqrt{x+6}+2)}$$

$$=\frac{(x+2)}{(x+2)(\sqrt{x+6}+2)}=\frac{1}{\sqrt{x+6}+2}$$

Alors : $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}}\frac{1}{\sqrt{x+6}+2}=\frac{1}{4}$

Donc : $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} f(x)=f(-2)$

Par suite f est continue à gauche de -2 (2)

De (1) et (2) on déduit que f est continue en -2 .

Exercice 6

Rappelons que f est continue en 1 si et seulement si : $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$

pour : $x\neq -2\ ;\ x\neq 1$ on a: $f(x)=\frac{x-1}{x^2+x-2}$

$$=\frac{x-1}{(x-1)(x+2)}=\frac{1}{x+2}$$

Donc : $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{3}$

et on a : $f(1)=a$

Donc : f est continue en 1 si et seulement si $a=\frac{1}{3}$.

Exercice 7

f est continue en 1 si et seulement si : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = f(1) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)$

- On a : $f(1) = 2$ (on a remplacé dans la deuxième expression : $x \geq 1$)
- $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \sqrt{x-1} + 2 = 2 = f(1)$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} 3x^2 + bx + 1 = 4 + b$

Donc : (f est continue en 1) $\iff \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

$\iff 4 + b = 2$

$\iff b = -2$

Par suite f est continue en 1 si et seulement si $b = -2$

2 Continuité sur un intervalle

Définition:

- f est continue sur $]a;b[\iff f$ est continue en tout point de $]a;b[$
- f est continue sur l'intervalle $[a;b] \iff \begin{cases} f \text{ est continue sur }]a;b[\\ f \text{ est continue à droite en } a \\ f \text{ est continue à gauche en } b \end{cases}$

Propriétés:

- Opérations sur les fonctions continues.

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et k un nombre réel.

- Les fonctions $f+g$ et ; $f \times g$ et kf sont continues sur I.
- Si la fonction g ne s'annule pas sur I alors: $\frac{f}{g}$ est continue sur I.
- Toute fonction polynômes est continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $\sin$ et la fonction $\cos$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle est continue sur chaque intervalle inclus dans son ensemble de définition.
- La fonction $\tan$ est continue sur chaque intervalle de la forme:

$]-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi[$ où: $k\in\mathbb{Z}$.

- La fonction $x\longmapsto\sqrt{x}$ est continue sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

Propriétés de la composée:

- Si f est une fonction continue sur un intervalle I et g est une fonction continue sur un intervalle J tel que $f(I)\subset J$ alors la fonction gof est continue sur I.
- Si f est une fonction continue sur l'intervalle I et positive sur I, alors la fonction: $x\longmapsto\sqrt{f(x)}$ est continue sur I.

Exercices

Exercice 8

Étudier la continuité de la fonction f sur l'intervalle I dans chacun des cas suivants:

1. $f:x\longmapsto -3x^4+5x^2-x+2$; $I=[-1;+\infty[$
2. $f:x\longmapsto\frac{5x^2-x+1}{x+3}$; $I=]-\infty;-4]$
3. $f:x\longmapsto\frac{\cos x}{x^2+1}$; $I=\mathbb{R}$
4. $f:x\longmapsto\sqrt{x}+\frac{1}{x}$; $I=]0;5]$
5. $f:x\longmapsto\sqrt{x}\sin x$; $I=[1;+\infty[$

Exercice 9

Soit f la fonction numérique définie par : $\begin{cases} f(x)=\frac{3x^2+2x-1}{x^2-1}; x<-1 \\ f(x)=5x^2+x-2; x\geq -1 \end{cases}$

1. Déterminer D l'ensemble de définition f.
2. Étudier la continuité de f sur D.

Exercice 10

Soit f la fonction numérique définie par: $\begin{cases} f(x)=2\sqrt{x-1}+x+3 & ; x>1 \\ f(x)=-\frac{x^2+x+2}{x-2} & ; x<1 \\ f(1)=4 \end{cases}$

1. Déterminer D l'ensemble de définition f.
2. Étudier la continuité de f sur D.

Solutions

Exercice 8

1 $f : x \longmapsto -3x^4 + 5x^2 - x + 2$

La fonction f est une fonction polynôme donc elle est continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur l'intervalle $I = [-1; +\infty[$.

2 $f : x \longmapsto \dfrac{5x^2 - x + 1}{x + 3}$

La fonction f est une fonction rationnelle donc elle est continue en tout point de : $\mathbb{R} - \{-3\}$; et en particulier sur l'intervalle $I =]-\infty; -4]$.

3 $f : x \longrightarrow \sqrt{x} + \dfrac{1}{x}$

La fonction f est continue sur l'intervalle $I =]0; 5]$ car c'est la somme de deux fonctions continues qui sont u et v tel que:

- $u : x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ (fonction usuelle) et en particulier sur l'intervalle $]0; 5]$.
- $v : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur chaque intervalle inclus dans son ensemble de définition ($\mathbb{R}^*$ car c'est une fonction rationnelle) et en particulier sur $]0; 5]$.

4 $f : x \longmapsto \dfrac{\cos x}{x^2 + 1}$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est le quotient de deux fonctions continues u et v sur $\mathbb{R}$ $\left(f = \dfrac{u}{v}\right)$ qui sont :

- $u : x \mapsto \cos x$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- $v : x \mapsto x^2 + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

5 $f : x \longmapsto \sqrt{x} \sin x$

La fonction f est continue sur $[1; +\infty[$ car c'est le produit de deux fonctions continues u et v $(f = uv)$ qui sont:

- $u : x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0; +\infty[$ et en particulier sur $[1; +\infty[$ (fonction usuelle).
- $v : x \mapsto \sin x$ est continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $[1; +\infty[$.

Exercice 9

1 Déterminons D

Soit x de $\mathbb{R}$,

On a : $x \in D \Leftrightarrow (x^2-1 \neq 0 \text{ et } x < -1) \text{ ou } (x \geq -1)$

$\Leftrightarrow (x \neq -1 \text{ et } x \neq 1 \text{ et } x < -1) \text{ ou } (x \geq -1)$

$\Leftrightarrow x < -1 \text{ ou } x \geq -1$

$\Leftrightarrow x \in]-\infty; -1[\cup [-1; +\infty[$

Donc : $D = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

2 Étudions la continuité de f sur $\mathbb{R}$:

- Sur l'intervalle $]-\infty; -1[$, f est continue, car c'est la restriction d'une fonction rationnelle qui est continue en tout point de $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$.
- Sur l'intervalle $[-1; +\infty[$, f est continue car, c'est la restriction d'une fonction polynôme qui est continue sur $\mathbb{R}$.
- Étudions la continuité de f à gauche en -1:

  - On a : $f(-1) = 2$ (On a remplacé dans la deuxième expression : $x \geq -1$)

  - Calculons $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$

Soit x de $]-\infty; -1[$; On a : $f(x) = \dfrac{3x^2+2x-1}{x^2-1}$

$= \dfrac{(x+1)(3x-1)}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{3x-1}{x-1}$

Alors : $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \dfrac{3x-1}{x-1} = 2 = f(-1)$

Donc f est continue à gauche en -1.

On a : f est continue sur $]-\infty; -1[$ et sur $[-1; +\infty[$ et continue à gauche en -1: Donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10

1 Déterminons D :

Soit x de $\mathbb{R}$, on a :

$x \in D \Leftrightarrow (\underline{x-1 \geq 0 \text{ et } x > 1}) \text{ ou } (\underline{x-2 \neq 0 \text{ et } x < 1})$

$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x < 1 \text{ ou } x > 1$

$\Leftrightarrow x \in]1; +\infty[\cup]-\infty; 1[\cup \{1\}$

$\Leftrightarrow x \in]-\infty; +\infty[$

Donc : $D = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

2 **Étudions la continuité de f sur D :**

▸ Sur l'intervalle $]1;+\infty[$: $f(x) = 2\sqrt{x-1} + x + 3$

- La fonction : $x \mapsto x-1$ est continue et positive sur $]1;+\infty[$

Donc la fonction $u : x \mapsto \sqrt{x-1}$ est continue sur $]1;+\infty[$.

- La fonction : $v : x \mapsto x+3$ est continue sur $\mathbb{R}$ (fonction affine)

et en particulier sur $]1;+\infty[$.

Donc : $f = 2u + v$ est continue sur l'intervalle $]1;+\infty[$.

info:

▸ Si f est continue sur I et positive sur I, alors $\sqrt{f}$ est continue sur I.

▸ Sur l'intervalle $]-\infty;1[$: $f(x) = -\dfrac{x^2+x+2}{x-2}$

f est continue sur l'intervalle $]-\infty;1[$ (restriction d'une fonction rationnelle)

▸ **Étudions la continuité de f en 1.**

On a : $f(1) = 4$

On a : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} 2\sqrt{x-1} + x + 3$

$= 4$

$= f(1)$

Donc f est continue à droite en 1.

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} -\dfrac{x^2+x+2}{x-2}$

$= 4$

$= f(1)$

Donc f est continue à gauche en 1.

Par suite f est continue en 1.

Et puisque f est continue sur $]1;+\infty[$ et sur $]-\infty;1[$

alors f est continue sur $\mathbb{R}$.

3 Image d'un intervalle par une fonction continue

Propriétés:

▸ L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

▸ L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone

▸ Si f est une fonction continue sur $[a,b]$ alors $f([a,b]) = [m,M]$ où m est la valeur minimale de f et M est la valeur maximale de f sur $[a;b]$

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors le tableau suivant permet de déterminer la forme de l'intervalle $f(I)$.

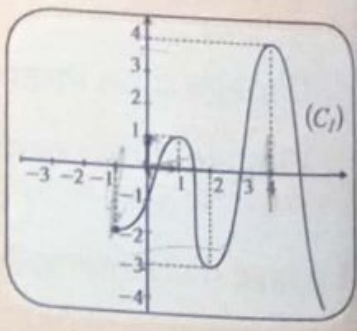
L'intervalle I	L'intervalle $f(I)$	
	f est strictement croissante sur I	f est strictement décroissante sur I
$[a;b]$	$[f(a)\,;f(b)]$	$[f(b);f(a)]$
$]a;b]$	$]\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\,;f(b)]$	$[f(b)\,;\lim\limits_{x\to a^+} f(x)[$
$[a;b[$	$[f(a)\,;\lim\limits_{x\to b^-} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\,;f(a)]$
$]a;b[$	$]\lim\limits_{x\to a^+} f(x);\lim\limits_{x\to b^-};f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\,;\lim\limits_{x\to a^+} f(x)[$
$[a;+\infty[$	$[f(a);\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x);f(a)]$
$]a;+\infty[$	$]\lim\limits_{x\to a^+} f(x);\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\,;\lim\limits_{x\to a^+} f(x)[$
$]-\infty;b]$	$]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x);f(b)]$	$[f(b);\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)[$
$]-\infty;b[$	$]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\,;\lim\limits_{x\to b^-} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to b^-} f(x);\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)[$
$]-\infty+\infty[$	$]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\,;\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x);\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)[$

Exercices

Exercice 11

(Lecture graphique)

La figure ci-contre représente la courbe d'une fonction numérique f



1 Déterminer D l'ensemble de définition de f.
Est-ce que f est continue sur D ?

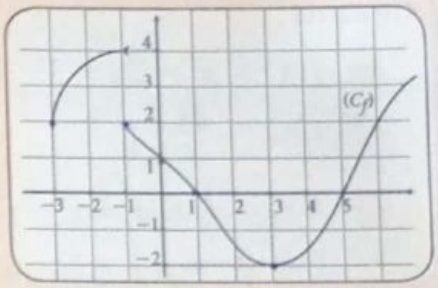
2 Déterminer l'image par la fonction f de chacun des intervalles suivants:
$]-1;4[$; $]0;4]$; $[-1;3[$; $[-1;1]$ et $[-1;+\infty[$

Exercice 12 Lecture graphique

La courbe ci-contre est celle d'une fonction f numérique.

1. Déterminer D l'ensemble de définition f
2. f est-elle continue sur D ?
3. Déterminer $f([-3;-1[)$; $f]-3;-1]$

$f([-1;5])$ et $f([-3;3])$ et $f([-3;+\infty[)$



Exercice 13 Lecture d'un tableau de variations.

Le tableau de variations suivant est celui d'une fonction f continue sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
f	5	↘	-4	↗	0	↘	-2

Déterminer : $f([3;+\infty[)$; $f([-2;3])$; $f(]-\infty;3])$; $f(]-\infty;-2[)$; $f(\mathbb{R})$

Exercice 14

Soit f une fonction continue sur $]-\infty;1[$ et sur $]1;+\infty[$,

et son tableau de variations est le suivant :

x	$-\infty$		-4		0		1		2		3		5		$+\infty$
f		↘	-3	↗	-2	↗	2	↘	$-\infty$	‖ $+\infty$	↘	-1	↗	0	↗ $+\infty$

1. Déterminer: $f([0;1[)$; $f(]-\infty;0])$; $f(]1;+\infty[)$; $f(]-\infty;1[)$ et $f(]1;3])$
2. Encadrer $f(x)$ dans chacun des cas suivants :

a. $-4 \leq x \leq 0$ b. $x \in [2;3[$ c. $2 < x \leq 5$

Exercices 15 La détermination algébrique de l'image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone :

Déterminer l'image de l'intervalle I_k par la fonction f dans chacun des cas suivants:

1. $f(x)=x^2-2x+3$; $I_1=[1;+\infty[$; $I_2=]-\infty;1]$
2. $f(x)=\dfrac{2x+3}{x+1}$; $I_1=[0;3]$; $I_2=]-1;+\infty[$; $I_3=]-\infty;-2]$
3. $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2-2x$; $I_1=]-\infty;-2]$; $I_2=]-2;1]$
   $I_3=]1;+\infty[$; $I_4=[-2;+\infty[$; $I_5=]-\infty;1[$; $I_6=\mathbb{R}$
4. $f(x)=x\sqrt{x+1}$; $I_1=[0;+\infty[$; $I_2=\left[-1;\dfrac{2}{3}\right]$

Solutions

Exercice 11

1. $D=[-1;+\infty[$

la fonction f est continue sur $[-1,+\infty[$ (sa courbe est une ligne continue)

2. $f([-1;1])=[-2;1]$; $f([-1;3[)=[-3;1]$
   $f(]0;4])=[-3;4]$; $f(]-1;4[)=[-3;4[$
   $f([-1;+\infty[)=]-\infty;4]$

Exercice 12

1. $D=[-3;+\infty[$
2. f n'est pas continue sur D, car n'est pas continue en -1. (car f est continue à droite en -1 et n'est pas continue à gauche -1).
3. $f([-3;-1[)=[2;4[$; $f(]-3;-1])=[2;4[$
   $f([-1;5])=[-2;2]$; $f([-3;3])=[-2;4[$
   $f(]-3;+\infty[)=[-2;+\infty[$

Exercice 13

On a f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[-2,3]$

Donc : $f([-2;3])=[f(-2),f(3)]$; d'où : $f([-2;3])=[-4,0]$

On a : f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[3;+\infty[$

Donc : $f([3;+\infty[)=\left]\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),f(3)\right]$; d'où : $f([3;+\infty[)=]-2;0]$

de même $f(]-\infty;-2[)=]-4;5[$;

$f(]-\infty;3])=[-4;5[$;

et $f(\mathbb{R})=[-4;5[$

-4 est la valeur minimale de f sur $]-\infty,3]$.

Exercice 14

1 ▸ $f(]-\infty;0]) =]-3;2]$

▸ $f(]1;3]) = [-2;+\infty[$

▸ $f(]1;+\infty[) = [-2;+\infty[$

▸ $f([0;1[) =]-\infty;2]$

▸ $f(]-\infty;1[) =]-\infty;2]$

2 a. $-4 \leq x \leq 0 \Longrightarrow f(-4) \leq f(x) \leq f(0)$ (car f est croissante sur $[-4;0]$)

$\Longrightarrow -2 \leq f(x) \leq 2$

b. $x \in [2;3[\Longrightarrow 2 \leq x < 3$ (car f est strictement décroissante sur $[2;3]$)

$\Longrightarrow f(2) \geq f(x) > f(3)$

$\Longrightarrow -1 \geq f(x) > -2$

$\Longrightarrow -2 < f(x) \leq -1$

c. Sur l'intervalle $]2;5]$; on a : f est continue mais non monotone.

On a : $f(]2;5]) = [-2;0]$

(-2 est la valeur minimale de f sur $]2:5]$ et 0 est la valeur maximale de f sur l'intervalle $]2:5]$)

Donc : $x \in]2;5] \Longrightarrow -2 \leq f(x) \leq 0$

Exercice 15

1 $f(x) = x^2 - 2x + 3$

- Continuité:

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme;

- variations:

On a: $(\forall x \in IR)$; $f'(x) = 2x - 2 = 2(x-1)$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

▸ Détermination de $f([1;+\infty[)$

Sur l'intervalle $[1;+\infty[$, la fonction f est continue et strictement croissante

Donc : $f([1;+\infty[) = [f(1); \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)[$

$= [2;+\infty[$

▸ Détermination de $f(]-\infty;1])$

Sur l'intervalle $]-\infty;1]$, on a f est continue et strictement décroissante.

Donc : $f(]-\infty;1]) = [f(1) ; \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)[$

$= [2;+\infty[$

Remarque : On peut lire $f([1;+\infty[)$ et $f(]-\infty;1])$ directement à partir du tableau des variations (voir exercices 2 et 4).

2 $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+1}$

- **Continuité:**

La fonction f est continue sur tout intervalle de son ensemble de définition $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty]$.

- **Variation :**

On a : $(\forall x \in \mathbb{R}-\{-1\})$; $f'(x) = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{(x+1)^2} = \dfrac{-1}{(x+1)^2}$

$(\forall x \in \mathbb{R}-\{-1\})$; $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]-\infty;-1[$ et sur $]-1;+\infty[$.

▸ Détermination des images des intervalles; on a : $f([0;3]) = [f(3); f(0)]$

$= \left[\dfrac{9}{4};3\right]$

(car f est continue et strictement décroissante sur $[0;3]$)

On a : $f(]-1;+\infty[) = \left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x); \lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ x>-1}} f(x)\right[$

Or : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+3}{x+1}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} 2 = 2$

et : $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-1} 2x+3 = 1 \\ \lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ x>-1}} x+1 = 0^+ \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ x>-1}} f(x) = +\infty$

Donc : $f(]-1;+\infty[) =]2;+\infty[$

On a: $f(]-\infty;-2]) = [f(-2); \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)[= [1;2[$ $\left|\begin{array}{l} \text{car : } f(-2) = 1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2 \end{array}\right.$

3 $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - 2x$

Continuité:

La fonction f est continue sur tout intervalle de son ensemble de définition $\mathbb{R}$ (f est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme).

Variation :

et : $(\forall x \in IR); f'(x) = x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	$\frac{10}{3}$	↘	$-\frac{7}{6}$	↗	$+\infty$

Image des intervalles :

- $f(]-\infty;-2]) =]-\infty;\frac{10}{3}]$
- $f(]-2;1]) = [-\frac{7}{6};\frac{10}{3}[$
- $f(]1;+\infty[) =]-\frac{7}{6};+\infty[$
- $f([-2;+\infty[) = [-\frac{7}{6};+\infty[$
- $f(]-\infty;1[) =]-\infty;\frac{10}{3}]$
- $f(\mathbb{R}) =]-\infty;+\infty[= \mathbb{R}$

4 $f(x) = x\sqrt{x+1}$

Continuité:

- La fonction $x \longmapsto x+1$ est continue et positive sur $[-1;+\infty[$; donc la fonction $u: x \longmapsto \sqrt{x+1}$ est continue sur l'intervalle $[-1;+\infty[$.
- La fonction $v: x \longmapsto x$ est continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $[-1;+\infty[$.

Donc : la fonction $f = uv$ est continue sur $[-1;+\infty[$.

et on a : $(\forall x \in]-1;+\infty[); f'(x) = \sqrt{x+1} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$

$$= \frac{2(\sqrt{x+1})^2 + x}{2\sqrt{x+1}}$$

$$= \frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$$

La ligne de $f'(x)$ est celui de $3x+2$.

(car : $(\forall x \in]-1;+\infty[); 2\sqrt{x+1} > 0$)

de plus
- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x+2 = 0$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$$

- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 3x+2 > 0$

$$\Leftrightarrow x > -\frac{2}{3}$$

Le tableau de variations de f est le suivant :

x	-1		$-\frac{2}{3}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
f	0	↘	$\frac{-2\sqrt{3}}{9}$	↗	0	↗	$+\infty$

$$f\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{2}{3}\sqrt{-\frac{2}{3}+1}=-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{-2}{3\sqrt{3}}=\frac{-2\sqrt{3}}{9}$$

Image des intervalles :

- $f([0;+\infty[)=[f(0);\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)[=[0;+\infty[$ (car f est continue et strictement croissante sur $[0;+\infty[$)
- $f\left(\left[-1;-\frac{2}{3}\right]\right)=\left[f\left(-\frac{2}{3}\right);f(-1)\right]=\left[-\frac{2\sqrt{3}}{9};0\right]$ (car f est continue et strictement décroissante sur $\left[-1;-\frac{2}{3}\right]$)

4 Théorème des valeurs intermédiaires

Propriétés:

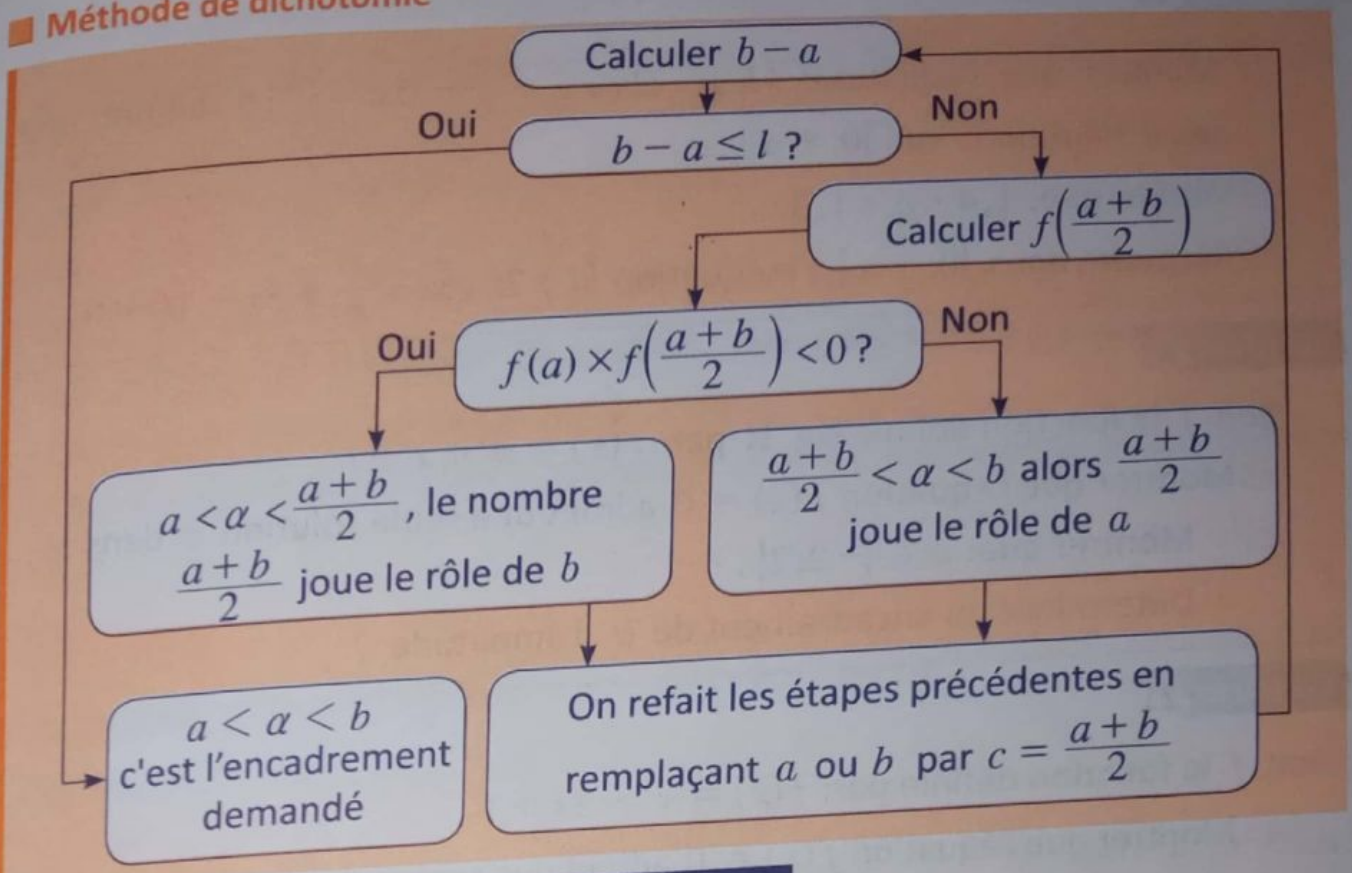
- Si f est une fonction continue sur $[a;b]$; alors pour tout réel β compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel α de $[a;b]$ telle que : $f(\alpha)=\beta$
- Si f est continue sur $[a;b]$ et $f(a)\times f(b)<0$ alors l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution sur $]a;b[$.
- Si f est continue sur $[a;b]$ et strictement monotone sur $[a;b]$ et $f(a)\times f(b)<0$ alors l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution sur $]a;b[$.
- Si f est une fonction continue et strictement monotone sur I, alors pour tout k de $f(I)$ il existe un réel unique α de I telle que: $f(\alpha)=k$

5 Dichotomie

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $[a;b]$ et $f(a).f(b)<0$ alors il existe un unique réel α de $]a;b[$ solution de l'équation: $f(x)=0$.

- On détermine un encadrement de α d'amplitude ℓ, on utilise la méthode de dichotomie.

Méthode de dichotomie



Exercices

Exercice 16

Soit f la fonction définie par : $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 4x + 1$

1 Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet au moins une solution sur $[0;1]$.

2 Montrer que l'équation $f(x) = -7$ admet au moins une solution sur $[-1;0]$.

3 Montrer que la courbe de f coupe l'axe des abscisses au moins en un point dont l'abscisse appartient à l'intervalle $[-1;0]$.

Exercice 17

1 Montrer que l'équation: $(E_1): 2x\sqrt{x+3} - x^2 - 3x + 5 = 0$ admet au moins une solution sur $[3;4]$.

2 Montrer que l'équation: $(E_2): 3|x+1| + \sqrt{x+2} - x^3 = 4$ admet au moins une solution sur $[1;2]$.

3 Montrer que l'équation: $(E_3): \sqrt{x^2+1} - 2x^3 = x$ admet au moins une solution sur $[0;1]$.

Exercice 18

1 Montrer que l'équation: $x^5 + 4x^3 + 5x - 7 = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que: $0 < \alpha < 1$.

2 Vérifier que: $0,840 < \alpha < 0,841$

Exercices 19

1 Montrer que l'équation: $(E): -2x\sqrt{x} + \frac{1}{x} - 5x = -10$ admet une seule solution a sur $]0; +\infty[$.

2 Vérifier que: $1,4 < a < 1,5$.

3 Résoudre dans $]0; +\infty[$ l'inéquation $(I): 2x\sqrt{x} - \frac{1}{x} + 5x - 10 < 0$.

Exercices 20

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = x^3 + x + 1$

1 Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α dans $\mathbb{R}$.

2 a. Montrer que: $\alpha \in]-2; 2[$.

b. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 2.

Exercices 21

Soit f la fonction définie par: $f(x) = x^3 - 3x + 1$

1 Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α sur $]-1; 1[$.

2 Déterminer un encadrement de α d'amplitude 25×10^{-2}.

Solutions

Solution 16

1 Montrons que l'équation $f(x) = 2$ admet au moins une solution sur l'intervalle $[0; 1]$.

▸ La continuité: $f: x \mapsto 3x^3 - 5x^2 + 4x + 1$

f est une fonction polynôme définie et continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $[0; 1]$.

▸ Calcul de $f(0)$ et $f(1)$.

On a : $f(0) = 1$ et $f(1) = 3 - 5 + 4 + 1 = 3$.

Alors : $f(0) \leq 2 \leq f(1)$; donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 2$ admet au moins une solution sur $[0; 1]$.

2 Montrer que l'équation $f(x) = -7$ admet au moins une solution sur $[-1; 0]$.

- La fonction f est continue sur $[-1; 0]$ (car c'est une fonction polynôme).
- et on a : $f(0) = 1$ et $f(-1) = -11$.

Alors : $f(-1) \leq -7 \leq f(0)$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = -7$ admet

au moins une solution sur l'intervalle $[-1;0]$.

3 Montrons que la courbe de f coupe l'axe (Ox) au moins une fois sur l'intervalle $[-1;0]$.

- La fonction f est continue sur $[-1;0]$.
- et : $f(0) = 1$; $f(-1) = -11$

Donc : $f(-1) < 0 < f(0)$

D'où d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur $[-1;0]$.

Donc la courbe de la fonction f coupe l'axe des abscisses au moins une fois sur $[-1;0]$.

Exercice 17

1 On pose: $f(x) = 2x\sqrt{x+3} - x^2 - 3x + 5$; $x \geq -3$

l'équation (E_1) devient: $f(x) = 0$

▸ La continuité:

La fonction: $x \mapsto x + 3$ est continue et positive sur $[-3; +\infty[$, donc la fonction $u: x \longrightarrow \sqrt{x+3}$ est continue sur $[-3; +\infty[$, et en particulier $[3;4]$.

Les deux fonctions: $v: x \mapsto 2x$ et $w: x \mapsto -x^2 - 3x + 5$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur l'intervalle $[3;4]$ (fonctions polynômes).

Donc la fonction $f = uv + w$ est continue sur $[3;4]$.

- Calcul de $f(3)$ et $f(4)$.

On a : $f(3) = 6\sqrt{6} - 9 - 9 + 5$

$= -13 + 6\sqrt{6} \simeq 1,7$

et $f(4) = 8\sqrt{7} - 16 - 12 + 5$

$= -23 + 8\sqrt{7} \simeq -1,8$

On a : $f(3) > 0$ et $f(4) < 0$.

Donc : $f(3) \times f(4) < 0$

D'où d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation, $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur $[3;4]$.

2 On pose: $g(x) = 3|x+1| + \sqrt{x+2} - x^3$; $x \geq -2$

On a : l'équation (E_2) équivaut à $g(x) = 4$.

▸ Continuité:

- La fonction $x \mapsto x + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme), donc la fonction $u: x \longrightarrow |x+1|$ est continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $[1;2]$.

- La fonction $x \mapsto x+2$ est continue et positive sur $[-2;+\infty[$; donc $v: x \mapsto \sqrt{x+2}$ est continue sur $[-2;+\infty[$ et en particulier sur $[1;2]$.

- La fonction $w: x \longmapsto -x^3$ est continue sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme), en particulier sur l'intervalle $[1;2]$.

Donc la fonction: $g = 3u + v + w$ est continue sur l'intervalle $[1;2]$.

▸ Calcul de $g(1)$ et $g(2)$:

On a : $g(1) = 3|2| + \sqrt{3} - 1$

$= 5 + \sqrt{3} \simeq 6,7$

et : $g(2) = 3|3| + \sqrt{5} - 8$

$= 1 + \sqrt{5} \simeq 3,2$

Donc: $g(2) < 4 < g(1)$ (4 est compris entre $g(2)$ et $g(1)$).

D'où d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 4$ admet au moins une solution sur l'intervalle $[1;2]$.

Remarque :

Si on pose : $g(x) = 3|x+1| + \sqrt{x+2} - x^3 - 4$

On aura : $(E_2) \Longleftrightarrow g(x) = 0$

3 On a : $\sqrt{x^2+1} - 2x^3 = x \Longleftrightarrow \sqrt{x^2+1} - 2x^3 - x = 0$

On pose : $h(x) = \sqrt{x^2+1} - 2x^3 - x \ ; x \in \mathbb{R}$

On a : $h(x) = 0 \Longleftrightarrow (E_3)$

▸ **Continuité:**

- La fonction $x \mapsto x^2 + 1$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$.

Donc la fonction $u: x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur l'intervalle $[0;1]$.

- La fonction: $v: x \to -2x^3 - x$ est continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur l'intervalle $[0;1]$.

Donc la fonction: $h = u + v$ est continue sur $[0;1]$.

▸ **Calcul de $h(0)$ et $h(1)$:**

On a : $h(0) = 1$ et $h(1) = \sqrt{2} - 3 \simeq -1,6$

Donc : $h(1) < 0 < h(0)$; c'est-à-dire $h(0) \times h(1) < 0$

D'où d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $h(x) = 0$ admet au moins une solution sur l'intervalle $[0;1]$.

Donc l'équation: $\sqrt{x^2+1} - 2x^3 = x$ admet au moins une solution sur l'intervalle $[0;1]$.

Exercice 18

1 On pose : $f(x) = x^5 + 4x^3 + 5x - 7$

▸ La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ (car c'est une fonction polynôme).

▸ On a : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = 5x^4 + 12x^2 + 5$

puisque : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; x^2 \geq 0$ et $x^4 \geq 0$, alors : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; 5x^4 + 12x^2 + 5 > 0$

c'est-à-dire : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) > 0$

donc : f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

▸ L'image de $\mathbb{R}$ par f :

On a : f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

donc : $f(\mathbb{R}) = f(]-\infty; +\infty[) =]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x); \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[$

$=]-\infty; +\infty[$

$\left| \begin{array}{l} \text{car: } \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^5 = -\infty \\ \text{et } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^5 = +\infty \end{array} \right|$

On a : $0 \in f(\mathbb{R})$

Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

2 Vérifions que : $0{,}840 < \alpha < 0{,}841$

On a : $f(0{,}840) \simeq -0{,}01$

$f(0{,}841) \simeq 0{,}005$

donc : $f(0{,}840) < 0 < f(0{,}841)$

c'est-à-dire : $f(0{,}840) < f(\alpha) < f(0{,}841)$

Or f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc : $0{,}840 < \alpha < 0{,}841$.

Exercice 19

1 On considère la fonction f définie par:

$f(x) = -2x\sqrt{x} + \frac{1}{x} - 5x + 10 \; ; x > 0$

On a : $(E) \Longleftrightarrow f(x) = 0$.

▸ **La continuité:**

- La fonction: $u : x \longmapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0;+\infty[$ et en particulier sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

- La fonction : $v : x \longmapsto -2x$ est continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $]0;+\infty[$.

- La fonction: $w: x \longmapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]0;+\infty[$ (car w est une fonction rationnelle de définition $\mathbb{R}^*$ et $]0;+\infty[\subset \mathbb{R}^*$).

- La fonction: $t: x \longmapsto -5x+10$ est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur l'intervalle $]0;+\infty[$ (fonction polynôme).

Donc la fonction $f = uv + w + t$ est continue sur $]0;+\infty[$.

▸ **Variations:**

On a : $(\forall x \in]0;+\infty[) ; f'(x) = -2\sqrt{x} - 2x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} - 5$

$= -2\sqrt{x} - \sqrt{x} - 5$

$= -3\sqrt{x} - 5$

Puisque : $(\forall x \in]0;+\infty[) ; f'(x) < 0$

Donc la fonction f est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

▸ **Déterminons l'image de $]0;+\infty[$ par f :**

On a : f est une fonction continue et strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

Alors: $f(]0;+\infty[) =]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x); \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)[$

Or $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty}(-2x\sqrt{x} - 5x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} + 10 = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

et $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(-2x\sqrt{x} - 5x + 10) = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$

donc : $f(]0;+\infty[) =]-\infty;+\infty[$

puisque: $0 \in f(]0;+\infty[)$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution a sur $]0;+\infty[$.

D'où l'équation: $-2x\sqrt{x} + \frac{1}{x} - 5x = 10$ admet une seule solution a sur $]0;+\infty[$.

2 Vérifions que : $1,4 < a < 1,5$

On a : $f(1,4) \simeq 0,4$ et $f(1,5) \simeq -0,58$

donc : $f(1,5) < 0 < f(1,4)$

c'est-à-dire : $f(1,5) < f(a) < f(1,4)$

donc : $1,4 < a < 1,5$ (car f est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$).

2 Résolvons dans $]0;+\infty[$ l'inéquation (I): $2x\sqrt{x}-\frac{1}{x}+5x-10<0$

Soit x un réel de $]0;+\infty[$,

On a : $2x\sqrt{x}-\frac{1}{x}+5x-10<0 \iff -2x\sqrt{x}+\frac{1}{x}-5x+10>0$

$\iff f(x)>0$

$\iff f(x)>f(a)$ (car: $f(a)=0$)

$\iff 0<x<a$

(car f est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$)

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation (I) est: $S=]0;a[$

Exercice 20

1 Montrons que l'équation $f(x)=0$ admet une seule solution α sur $\mathbb{R}$.

Comme la fonction f est une fonction polynôme, alors f est continue sur $\mathbb{R}$.

De plus : $f'(x)=3x^2+1$ pour tout réel x.

On a f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. (car: $3x^2+1>0$ pour tout réel x)

et on a : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$; donc : $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$

donc 0 admet un seul antécédent dans $\mathbb{R}$ par f.

l'équation $f(x)=0$ admet donc une seule solution dans $\mathbb{R}$.

2 a. Montrons que : $\alpha\in]-2;2[$

On a : $f(2)=11$ et $f(-2)=-9$

donc : $f(2)\times f(-2)<0$ donc d'après théorème des valeurs intermédiaires:

$\alpha\in]-2;2[$

b. Déterminons un encadrement de α d'amplitude 2.

- Le centre de l'intervalle $[-2;2]$ est $\frac{-2+2}{2}=0$; $f(0)=1$ et $f(-2)=-9$.

donc : $\alpha\in[-2;0]$ (car $f(0)>0$ et $f(-2)<0$)

D'où l'encadrement $-2\leq\alpha\leq 0$ pour d'amplitude 2.

Exercice 21

1 Montrons que l'équation $f(x)=0$ admet une seule solution α sur l'intervalle $]-1;1[$ avec $f(x)=x^3-3x+1$.

- la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme) en particulier sur $[-1;1]$.
- $f(-1)=3$ et $f(1)=-1$ donc : $f(1)\times f(-1)<0$

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un réel α de $]-1;1[$ tel que : $f(\alpha)=0$.

C'est-à-dire l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution α sur $]-1;1[$.

▸ Unicité de α sur $]-1;1[$.

On a : $(\forall x\in\mathbb{R})\,;f'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)$

Dans l'intervalle $[-1;1]$ on a : $f'(x)\le 0$ et $f'(x)=0\iff x=1$ ou $x=-1$

Donc f est strictement décroissante sur $[-1;1]$ d'où α est unique.

2 Déterminons un encadrement de α d'amplitude 25×10^{-2}.

On utilise la méthode de Dichotomie:

- Le centre de l'intervalle $[-1;1]$ est $\frac{-1+1}{2}=0$; $f(0)=1$ et $f(1)=-1$.

Donc : $\alpha\in[0;1]$ (car $f(0)>0$ et $f(1)<0$).

l'amplitude de l'encadrement $0\le\alpha\le1$ est 1. $(1>25\times10^{-2})$.

- Le centre de l'intervalle $[0;1]$ est $\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$; $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}$ et $f(0)=1$

Donc : $\alpha\in\left[0;\frac{1}{2}\right]$ (car $f\left(\frac{1}{2}\right)<0$ et $f(0)>0$).

L'amplitude de l'encadrement $0\le\alpha\le\frac{1}{2}$ est $\frac{1}{2}-0=0,5$. $(0,5>25\times10^{-2})$

- Le centre de l'intervalle $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ est $\frac{0+\frac{1}{2}}{2}=\frac{1}{4}$; $f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{17}{64}$ et $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}$

Donc : $\alpha\in\left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]$ (car $f\left(\frac{1}{4}\right)>0$ et $f\left(\frac{1}{2}\right)<0$).

L'amplitude de l'encadrement $\frac{1}{4}\le\alpha\le\frac{1}{2}$ est $0,25$ c'est-à-dire: 25×10^{-2}

Donc : $\frac{1}{4}\le\alpha\le\frac{1}{2}$.

6 Fonction réciproque

Propriété 1:

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors elle admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle $J=f(I)$, et on a : $\begin{cases}f(x)=y\\x\in I\end{cases}\iff\begin{cases}f^{-1}(y)=x\\y\in J\end{cases}$

Propriété 2:

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors sa fonction réciproque f^{-1} est continue et strictement monotone sur l'intervalle $f(I)$ et vraie dans le même sens que f sur I.

Propriété 3:

Les courbes représentatives de f et f^{-1} dans un repère orthonormé sont symétriques par rapport à la droite (D) d'équation $y = x$.

Exercices

Exercice 22

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Dans chacun des cas suivants:

a. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

b. Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x de J:

1. $f(x) = 3 - \frac{1}{x}$ et $I =]0; +\infty[$
2. $f(x) = \sqrt{x+1}$ et $I = [-1; +\infty[$
3. $f(x) = \frac{3x+7}{x+2}$ et $I =]-2; +\infty[$
4. $f(x) = -2(x-1)^2 + 5$ et $I = [1; +\infty[$

Exercice 23

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Dans chacun des cas suivants:

a. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

b. Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x de J :

1. $f(x) = -3x^2 + 3x + 1$ et $I =]-\infty; 0[$
2. $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ et $I =]-\infty; -1]$
3. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$ et $I = [2; +\infty[$
4. $f(x) = x + \sqrt{-x} - 1$ et $I = \left[-\frac{1}{4}; 0\right]$

Exercice 24

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Dans chacun des cas suivants:

a. Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

b. Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x de J:

1. $f(x) = (x+1)\sqrt{x+1} - 1$ et $I =]-1; +\infty[$

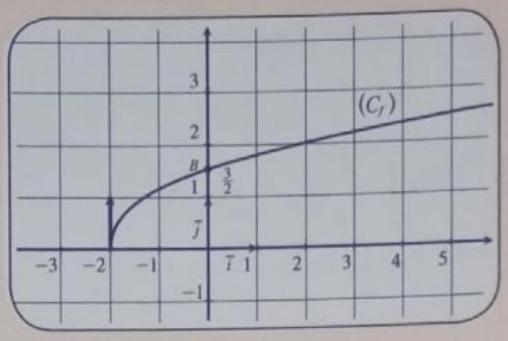
2 $f(x) = x - 2 + 2\sqrt{x+1}$ et $I =]-1; +\infty]$

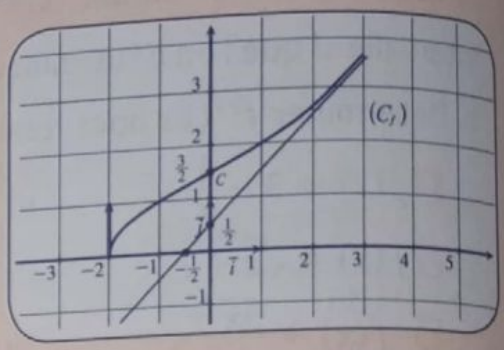
3 $f(x) = \sqrt{x-2} + x + 1$ et $I = [2; +\infty[$

4 $f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x^2 + 3}$ et $I =]-\infty; 0]$

Exercice 25

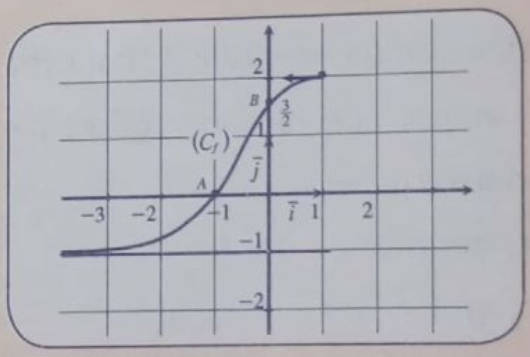
Construire dans le même repère orthonormé la courbe représentative de la fonction réciproque de la fonction f, dans chacun des cas suivants:





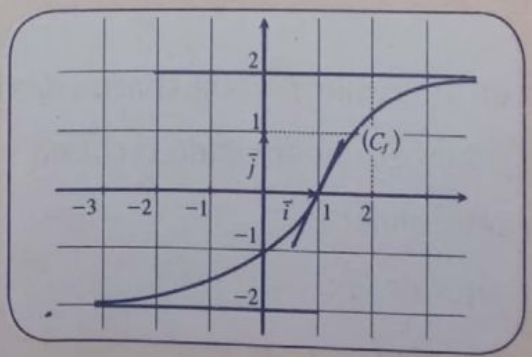
Exercice 26

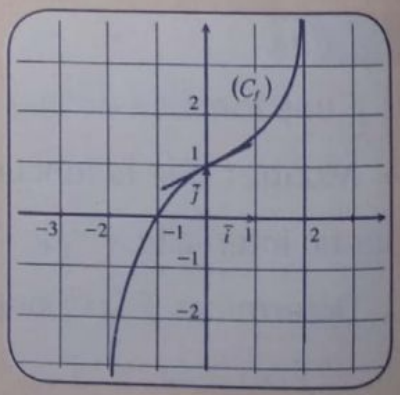
Construire dans le même repère orthonormé la courbe de la fonction f^{-1}.



Exercice 27

Construire dans le même repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, la courbe représentative de la fonction f^{-1} pour chacune des deux courbes suivantes:





Solutions

Exercice 22

1 a. On a : $f(x) = 3 - \frac{1}{x}$; $I =]0; +\infty[$

▸ **La continuité :**

La fonction f est continue $]0; +\infty[$ (car c'est la restriction la fonction rationnelle : $x \longmapsto \frac{3x-1}{x}$)

infos:

$\begin{cases} f \text{ est continue et} \\ \text{strictement} \\ \text{monotone sur} \\ \text{intervalle } I : \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f \text{ admet une fonction} \\ \text{réciproque } f^{-1} \text{ définie} \\ \text{sur un intervalle } J \\ \text{avec: } J = f(I) \end{cases}$

▸ $\begin{cases} f^{-1}(x) = y \\ x \in J \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases}$

▸ **La monotonie:**

On a : $(\forall x \in]0; +\infty[)\ ; f'(x) = \frac{1}{x^2}$ Donc : $(\forall x \in]0; +\infty[)\ ; f'(x) > 0$

D'où f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Puisque f est continue et strictement croissante sur l'intervalle I

Alors elle admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur J avec:

$J = f(]0; +\infty[)$

et on a : $J =]\lim\limits_{x \to 0^+} f(x); \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)[=]-\infty; 3[$

b. Déterminons $f^{-1}(x)$ pour tout x de J.

Soit x un élément $]-\infty; 3[$ et y un élément de $]0; +\infty[$; tel que: $y = f^{-1}(x)$

On a : $f^{-1}(x) = y \Longleftrightarrow f(y) = x$

$\Longleftrightarrow 3 - \frac{1}{y} = x$

$\Longleftrightarrow -\frac{1}{y} = x - 3$

$\Longleftrightarrow y = \frac{1}{3-x}$

D'où : $(\forall x \in]-\infty; 3[)\ ; f^{-1}(x) = \frac{1}{3-x}$

2 $f(x) = \sqrt{x+1}$; $I = [-1; +\infty[$

a. Montrons que f admet une fonction réciproque.

▸ **La continuité :**

La fonction: $x \mapsto x + 1$ est continue et positive sur l'intervalle $[-1; +\infty[$ donc

f est continue sur $[-1;+\infty[$.

▸ **la monotonie de f :**

On a : $(\forall x \in]-1;+\infty[)\ ; f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$

alors : $(\forall x \in]-1;+\infty[)\ ; f'(x) > 0$

donc f est strictement croissante sur $[-1;+\infty[$.

D'où f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle $J = f([-1;+\infty[)$.

$J = f([-1;+\infty[) = [f(-1); \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[= [0;+\infty[$

b. Déterminons $f^{-1}(x)$ pour tout x de J :

Soit x un élément de $J = [0;+\infty[$ et y un élément de $I = [-1;+\infty[$ tel que: $f^{-1}(x) = y$

On a : $f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x$

$\iff \sqrt{y+1} = x$

$\iff y+1 = x^2$

$\iff y = x^2 - 1$

Donc : $(\forall x \in [0;+\infty[)\ ; f^{-1}(x) = x^2 - 1$

3 $I = f(x) = \dfrac{3x+7}{x+2}$; $]-2;+\infty[$

a. Montrons que f admet une fonction réciproque:

▸ **La continuité :**

La fonction f est continue sur $]-2;+\infty[$ car c'est la restriction d'une fonction rationnelle.

▸ **la monotonie :**

On a : $(\forall x \in]-2;+\infty[); f'(x) = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{(x+2)^2} = \dfrac{-1}{(x+2)^2}$

alors: $(\forall x \in]-2;+\infty[)\ ; f'(x) < 0$; donc f est strictement décroissante sur $]-2;+\infty[$.

puisque f est continue et strictement décroissante sur $]-2;+\infty[$.

alors elle admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle J avec: $J=f(I)$.

et on a : $J=f(I)=f(]-2;+\infty[)$

$$=\left]\lim_{x\to+\infty}f(x);\lim_{x\to-2^+}f(x)\right[=]3;+\infty[$$ Donc : $J=]3;+\infty[$

b. Déterminons $f^{-1}(x)$ pour tout x de J :

Soit x un élément de $J=]3;+\infty[$; y un élément de $I=]-2;+\infty[$ telle que: $f^{-1}(x)=y$

On a : $f^{-1}(x)=y \iff f(y)=x$

$$\iff \frac{3y+7}{y+2}=x$$
$$\iff 3y+7=x(y+2)$$
$$\iff 3y-xy=-7+2x$$
$$\iff (3-x)y=-7+2x$$
$$\iff y=\frac{-7+2x}{3-x}$$

Donc: $(\forall x\in]3;+\infty[)\ ; f^{-1}(x)=\frac{-7+2x}{3-x}$

4 $f(x)=-2(x-1)^2+5$; $I=[1;+\infty[$

a. Montrons que f admet une fonction réciproque.

Continuité :

La fonction f est continue sur l'intervalle $[1;+\infty[$ car c'est la restriction la fonction polynôme : $x\longmapsto -2x^2+4x+3$

La monotonie :

On a : $(\forall x\in[1;+\infty[)\ ; f'(x)=-4(x-1)$

et on a : $x\geq 1 \Longrightarrow x-1\geq 0$

$$\Longrightarrow -4(x-1)\leq 0$$
$$\Longrightarrow f'(x)\leq 0$$

alors : $(\forall x\in[1;+\infty[)\ ; f'(x)\leq 0$ et $f'(x)=0\iff x=1$

c'est-à-dire f est strictement décroissante sur $[1;+\infty[$.

Donc la fonction f est continue et strictement décroissante sur $I=[1;+\infty[$

d'où f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle J avec $J = f(I)$.

et on a : $J = f(I) = f([1;+\infty[)$

$=]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x); f(1)[=]-\infty;5]$

b. Déterminons $f^{-1}(x)$ pour tout x de J :

Soit x un élément de $J =]-\infty;5]$. et y un élément de $I = [1;+\infty[$ avec : $f^{-1}(x) = y$

On a : $f^{-1}(x) = y \Longleftrightarrow f(y) = x$

$\Longleftrightarrow -2(y-1)^2 + 5 = x$

$\Longleftrightarrow (y-1)^2 = \dfrac{5-x}{2}$

$\Longleftrightarrow \sqrt{(y-1)^2} = \sqrt{\dfrac{5-x}{2}}$

$\Longleftrightarrow |y-1| = \sqrt{\dfrac{5-x}{2}}$

$\Longleftrightarrow y-1 = \sqrt{\dfrac{5-x}{2}}$; (on a : $y \geq 1$ donc : $|y-1| = y-1$)

$\Longleftrightarrow y = 1 + \sqrt{\dfrac{5-x}{2}}$

Donc : $(\forall x \in]-\infty;5]) ; f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{\dfrac{5-x}{2}}$

Exercice 23

1 $f(x) = -3x^2 + 3x + 1 ; =]-\infty;0[$

a. Montrons que f admet une fonction réciproque.

▸ **Continuité :**

La fonction f est continue sur $]-\infty;0]$ car c'est la restriction d'une fonction polynôme.

▸ **Monotonie :**

▸ on a : $(\forall x \in]-\infty;0]); f'(x) = -6x + 3$

on a : $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow -6x = -3$

$\Longleftrightarrow x = \dfrac{1}{2} \notin]-\infty;0]$

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$-6x+3$		$+$		0		$-$	
$f'(x)$	$+$						

on a : $(\forall x \in]-\infty;0]) ; f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]-\infty;0]$.

Puisque f est continue et strictement croissante sur $I =]-\infty;0]$, alors elle admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle J avec : $J = f(I)$.

On a : $J = f(I) = f(]-\infty;0]) =]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x); f(0)] =]-\infty;1]$

b. **Déterminons $f^{-1}(x)$ pourtout x de J :**

Soit x un élément de $J =]-\infty;1]$ et y un élément de $I =]-\infty;0]$; avec: $f^{-1}(x) = y$

on a : $f^{-1}(x) = y \Longleftrightarrow f(y) = x$

$\Longleftrightarrow -3y^2 + 3y + 1 = x$

Méthode 1: (utilisation de la forme canomique)

On a : $f^{-1}(x) = y \Longleftrightarrow -3y^2 + 3y = x - 1$

$\Longleftrightarrow -3(y^2 - y) = x - 1$

$\Longleftrightarrow \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = \frac{1-x}{3}$

$\Longleftrightarrow \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{7-4x}{12}$

$\left(y \le 0 \Rightarrow y - \frac{1}{2} \le 0 \right.$

$\left. \Rightarrow \left|y - \frac{1}{2}\right| = -\left(y - \frac{1}{2}\right) \right)$

donc : $f^{-1}(x) = y \Longleftrightarrow \left|y - \frac{1}{2}\right| = \sqrt{\frac{7-4x}{12}}$

$\Longleftrightarrow -\left(y - \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{7-4x}{12}}$

$\Longleftrightarrow y = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{7-4x}{12}}$

Donc : $f^{-1}(x) = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{7-4x}{12}}$ pour tout $x \le 1$.

Méthode 2: (On calcule le discriminant Δ)

On a : $f^{-1}(x) = y \Longleftrightarrow -3y^2 + 3y + 1 - x = 0$

On a : $c = 1 - x$ et $b = 3$ et $a = -3$

alors : $\Delta = b^2 - 4ac$

$= 9 - 4(-3)(1-x)$

$= 9 + 12 - 12x$

$= 21 - 12x$

On a : $\Delta > 0$ car : $x \leq 1 \Rightarrow -12x \geq -12$

$\Rightarrow 21 - 12x \geq 9$

$\Rightarrow \Delta > 0$

Donc l'équation admet deux solutions :

$y_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3+\sqrt{21-12x}}{-6} = \dfrac{3-\sqrt{21-12x}}{6}$

et $y_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3+\sqrt{21-12x}}{6}$

donc : $f^{-1}(x) = y_1$ ou $f^{-1}(x) = y_2$

Recherche de l'expression adéquate :

On a : $f(0) = 1$ donc : $f^{-1}(1) = 0$

On remplace x par 1 dans l'expression de y_1 : on obtient :

$y_1 = \dfrac{3-\sqrt{21-12}}{6} = \dfrac{3-\sqrt{9}}{6} = 0$

On remplace x par 1 dans l'expression de y_2 : on obtient :

$y_2 = \dfrac{3+\sqrt{21-12}}{6} = \dfrac{6}{6} = 1$

or $1 \neq 0$ donc y_2 n'est pas la bonne solution.

donc : $f^{-1}(x) = y_1$

d'où : $\forall x \in]-\infty; 0]\ ; f^{-1}(x) = \dfrac{3-\sqrt{21-12x}}{6}$

vérifier que : $f^{-1}(x)$ s'écrit aussi : $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{2} - \sqrt{\dfrac{7-4x}{12}}$

2 $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$; $I =]-\infty; -1]$

a. **Montrons que f admet une fonction réciproque.**

▸ Continuté :

On a f est continue sur l'intervalle $]-\infty; -1]$ car c'est la restriction d'une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}$.

▸ Variations de f :

On a : $(\forall x \in]-\infty; -1])\ ; f'(x) = \dfrac{2(x^2+1) - 2x \times 2x}{(x^2+1)^2}$

$= \dfrac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-2(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$

Le tableau de signes de f' est le suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$-2x^2+2$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$					

On a : $(\forall x \in]-\infty;-1])\ ; f'(x) \leq 0$; (f' s'annule uniquement en -1)

alors f est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty;-1]$

donc la fonction f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty;-1]$, par conséquent elle admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle J

avec: $J = f(I)$

On a : $J = f(]-\infty;-1])$

$= [f(-1); \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)[= [-1;0[$ (car : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2}{x} = 0$)

Donc : $J = [-1;0[$

b. **Déterminons $f^{-1}(x)$ avec x de J :**

Soit x un élément de $J = [-1;0[$ et y un élément de $I =]-\infty;-1]$ avec :

$f^{-1}(x) = y$

On a : $f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x$

$\iff \frac{2y}{y^2+1} = x$

$\iff xy^2 + x = 2y$

$\iff xy^2 - 2y + x = 0$

On calcule Δ le discriminant du trinôme précédent d'inconnu le réel y (car $x \neq 0$)

On a : $\begin{cases} a = x \\ b = -2 \\ c = x \end{cases}$ alors : $\Delta = b^2 - 4ac$

$= 4 - 4x^2$

$= 4(1-x^2)$

(On a : $(\forall x \in [-1;0[)\ ; \Delta \geq 0$)

Donc : $y_1 = \frac{2-\sqrt{4(1-x^2)}}{2x} = \frac{1}{x} - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

ou $y_2 = \frac{2+\sqrt{4(1-x^2)}}{2x} = \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

donc : $f^{-1}(x) = y_1$ ou $f^{-1}(x) = y_2$

Déterminons l'expression adéquate :

On a : $f^{-1}(-1)=-1$ n'est pas un bon contre exemple car avec cette valeur: y_1 et y_2 donnent le même résultat.

On choisit dans ce cas une autre valeur sur I.

Par exemple : $f(-2)=\frac{-4}{5} \Rightarrow f^{-1}\left(\frac{-4}{5}\right)=-2$

On peut aussi calculer la limite en 0^- .on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0^- \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} f^{-1}(x)=-\infty$

On a : $y_1=\frac{1}{x}-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

$$=\frac{(1-\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})}{x(1+\sqrt{1-x^2})}$$

$$=\frac{x^2}{x(1+\sqrt{1-x^2})}$$

$$=\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0^-} y_1=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}=0$

On a : $\lim\limits_{x\to 0^-} y_1\neq-\infty$; donc : $f^{-1}(x)\neq y_1$ (y_1 n'est pas la solution adéquate)

D'où : $f^{-1}(x)=y_2$

Donc : $(\forall x\in[-1;0[)\ ; f^{-1}(x)=\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$

3 $(\forall x\in[2;+\infty[)\ ; f(x)=\frac{x}{\sqrt{x-1}}$

a. **Montrons que f admet une fonction réciproque.**

▸ Continuité:

On a : f est continue sur $[2;+\infty[$ comme quotient de deux fonctions continues sur $[2;+\infty[$ à savoir : $u:x\mapsto x$ et $v:x\mapsto\sqrt{x-1}$: $f=\frac{u}{v}$

(car la fonction $x\mapsto x-1$ est continue et strictement positive sur $[2;+\infty[$).

▸ Variations de f :

On a : $(\forall x\in[2;+\infty[)\ ; f'(x)=\frac{\sqrt{x-1}-\frac{x}{2\sqrt{x-1}}}{x-1}$

$$=\frac{\frac{2(x-1)-x}{2\sqrt{x-1}}}{x}=\frac{x-2}{2x\sqrt{x-1}}$$

$x \geq 2 \Rightarrow x-2 \geq 0$ et $2x\sqrt{x-1} > 0$

$\Rightarrow f'(x) \geq 0$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

donc f est strictement croissante sur $[2; +\infty[$.

Puisque f est continue et strictement croissante sur $[2; +\infty[$ alors f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle J, avec : $J = f(I)$

On a : $J = f(I)$

$= f([2; +\infty[)$

$= [f(2); \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)[$

$= [2; +\infty[$; (car $f(x) = \sqrt{\frac{x^2}{x-1}} = \sqrt{\frac{x}{1-\frac{1}{x}}}$)

Donc : $J = I = [2; +\infty[$

b) **Déterminons $f^{-1}(x)$; avec x de J :**

Soit x un élément de $J = [2; +\infty[$ et y un élément de $I = [2; +\infty[$ avec: $f^{-1}(x) = y$

On a : $f^{-1}(x) = y \Longleftrightarrow f(y) = x$

$\Longleftrightarrow \frac{y}{\sqrt{y-1}} = x$

$\Longleftrightarrow y = x\sqrt{y-1}$

$\Longleftrightarrow y^2 = x^2(y-1)$

$\Longleftrightarrow y^2 - x^2 y + x^2 = 0$

On a : $c = x^2$ et $b = -x^2$ et $a = 1$

On calcul le discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$

$= x^2(x^2-4)$

$\Delta = x^2(x-2)(x+2)$

On a $\Delta \geq 0$ (car: $x \geq 2$) et : $\sqrt{x^2} = |x| = x$ (car: $x \geq 2$)

donc : $y_1 = \frac{x^2 + x\sqrt{x^2-4}}{2}$ et $y_2 = \frac{x^2 - x\sqrt{x^2-4}}{2}$

D'où : $f^{-1}(x) = y_1$ ou $f^{-1}(x) = y_2$

Déterminons l'expression adéquate de $f^{-1}(x)$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f^{-1}(x) = +\infty$

or : $\lim\limits_{x\to+\infty} y_1 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+x\sqrt{x^2-4}}{2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} y_2 = \dfrac{1}{2}$

Donc : $f^{-1}(x) = y_1 = \dfrac{x^2+x\sqrt{x^2-4}}{2}$

Donc : $(\forall x \in [2;+\infty[)\ ; f^{-1}(x) = \dfrac{x^2+x\sqrt{x^2-4}}{2}$

4 $f(x) = x + \sqrt{-x} - 1\ ;\ I = \left[-\frac{1}{4};0\right]$

a. Montrons que f admet une fonction réciproque :

Continuité:

La fonction f est continue sur I car c'est la somme de deux fonctions u et v continues sur I.

$u : x \mapsto x - 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur I.

et $x \mapsto -x$ est continue et positive sur I. d'où : $v : x \mapsto \sqrt{-x}$ est continue sur I.

Variation de f :

on a : $\left(\forall x \in \left[-\frac{1}{4};0\right[\right)\ ; f'(x) = 1 - \dfrac{1}{2\sqrt{-x}} = \dfrac{2\sqrt{-x}-1}{2\sqrt{-x}}$

Le signe de $f'(x)$ est le signe du numérateur $2\sqrt{-x} - 1$

car : $\left(\forall x \in \left[-\frac{1}{4};0\right[\right)\ ; 2\sqrt{-x} > 0$

Méthode 1: (résolution de l'équation et l'inéquation)

$f'(x) = 0 \iff 2\sqrt{-x} - 1 = 0$

$\iff \sqrt{-x} = \dfrac{1}{2}$

$\iff -x = \dfrac{1}{4}$

$\iff x = -\dfrac{1}{4}$

$f'(x) > 0 \iff 2\sqrt{-x} - 1 > 0$

$\iff \sqrt{-x} > \dfrac{1}{2}$

$\iff -x > \dfrac{1}{4}$

$\iff x < -\dfrac{1}{4}$

or : $-\frac{1}{4} \in \left[-\frac{1}{4};0\right[$

donc : $\left(\forall x \in \left[-\frac{1}{4};0\right[\right)\ ; f'(x) \leq 0$

Méthode 2: (Encadrement)

$x \in \left[-\frac{1}{4};0\right[\Rightarrow -\frac{1}{4} \leqslant x < 0$

$\Rightarrow 0 < -x \leqslant \frac{1}{4}$

$\Rightarrow 0 < \sqrt{-x} \leqslant \sqrt{\frac{1}{4}}$

$\Rightarrow 0 < 2\sqrt{-x} \leqslant 1$

$\Rightarrow -1 < 2\sqrt{-x} - 1 \leqslant 0$

$\Rightarrow f'(x) \leqslant 0$

Donc f est strictement décroissante sur $\left[-\frac{1}{4};0\right]$.

Puisque la fonction f est continue et strictement décroissante sur $I = \left[-\frac{1}{4};0\right]$ alors elle admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle J avec: $J = f(I)$.

On a : $J = f(I)$

$= f\left(\left[-\frac{1}{4};0\right]\right)$

$= \left[f(0);f\left(-\frac{1}{4}\right)\right]$ (car f est décroissante)

$= \left[-1;-\frac{3}{4}\right]$

b. **Déterminons l'expression $f^{-1}(x)$ avec x de J :**

Soit x un élément de $J = \left[-1;-\frac{3}{4}\right]$ et y un élément de $\left[-\frac{1}{4};0\right]$ tel que: $y = f^{-1}(x)$

on a : $f^{-1}(x) = y \Longleftrightarrow f(y) = x$

$\Longleftrightarrow y + \sqrt{-y} - 1 = x$

$\Longleftrightarrow -(\sqrt{-y})^2 + \sqrt{-y} - 1 = x$

$\Longleftrightarrow -[(\sqrt{-y})^2 - \sqrt{-y}] = x + 1$

$\Longleftrightarrow -\left[\left(\sqrt{-y} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] = x + 1$

$\Longleftrightarrow \left(\sqrt{-y} - \frac{1}{2}\right)^2 = -x - 1 + \frac{1}{4}$

$\Longleftrightarrow \left|\sqrt{-y} - \frac{1}{2}\right| = \sqrt{-x - \frac{3}{4}}$

$\Longleftrightarrow \sqrt{-y} - \frac{1}{2} = -\sqrt{-x - \frac{3}{4}}$

car: $-\frac{1}{4} \le y \le 0 \Rightarrow 0 \le -y \le \frac{1}{4}$

$\Rightarrow 0 \le \sqrt{-y} \le \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \sqrt{-y} - \frac{1}{2} \le 0$

$\Rightarrow \left|\sqrt{-y} - \frac{1}{2}\right| = -\left(\sqrt{-y} - \frac{1}{2}\right)$

On a donc : $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{-y} = \frac{1}{2} - \sqrt{-x - \frac{3}{4}}$

$\Leftrightarrow -y = \left(\frac{1}{2} - \sqrt{-x - \frac{3}{4}}\right)^2$

$\Leftrightarrow y = -\left(\frac{1}{2} - \sqrt{-x - \frac{3}{4}}\right)^2$

d'où : $\left(\forall x \in \left[-1; -\frac{3}{4}\right]\right); f^{-1}(x) = -\left(\frac{1}{2} - \sqrt{-x - \frac{3}{4}}\right)^2$

Remarque: on peut calculer le discriminant Δ en posant $Y = \sqrt{-y}$ et l'équation devient : $Y^2 - Y - x - 1 = 0$

Exercice 24

1 $f(x) = (x+1)\sqrt{x+1} - 1 \; ; I =]-1; +\infty[$

a. Montrons que f admet une fonction réciproque.

Continuité:

La fonction f est continue sur l'intervalle I, comme somme et produit des fonctions continues sur I à savoir:

$u: x \mapsto x + 1$ est continue et positive sur l'intervalle I.

donc la fonction: $v: x \mapsto \sqrt{x+1}$ est continue sur I.

La fonction: $w: x \longrightarrow -1$ est continue sur I (fonction constante).

Donc : $f = uv + w$ est continue sur I.

Variations de f :

On a : $(\forall x \in]-1; +\infty[); f'(x) = \sqrt{x+1} + (x+1) \times \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$

$= \sqrt{x+1} + \frac{1}{2}\sqrt{x+1}$

$= \frac{3}{2}\sqrt{x+1}$

Donc : $(\forall x \in]-1; +\infty[); f'(x) > 0$

infos: $A > 0; \frac{A}{\sqrt{A}} = \sqrt{A}$

d'où f est strictement croissante sur $[-1;+\infty[$.

Puisque f est continue et strictement croissante sur $I=[-1;+\infty[$ alors f admet une fonction numérique f^{-1} définie sur l'intervalle J, avec: $J=f(I)$

On a : $J=f(I)$

$=f([-1;+\infty[)$

$=[f(-1);\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)[$

$=[-1;+\infty[=I$

b. Déterminons $f^{-1}(x)$ pour tout x de J :

Soit x un élément de $J=[-1;+\infty[$ et y un élément de $I=[-1;+\infty[$ avec: $f^{-1}(x)=y$

On a : $f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow f(y)=x$

$\Leftrightarrow (y+1)\sqrt{y+1}-1=x$

$\Leftrightarrow (y+1)\sqrt{y+1}=x+1$

$\Leftrightarrow (y+1)^2(y+1)=(x+1)^2$

$\Leftrightarrow (y+1)^3=(x+1)^2$

$\Leftrightarrow y+1=\sqrt[3]{(x+1)^2}$

$\Leftrightarrow y=-1+\sqrt[3]{(x+1)^2}$

On a : $x\in[1;+\infty[$ et $y\in[-1;+\infty[$ d'où: $y+1\geq 0$ et $x+1\geq 0$

Donc : $(\forall x\in[-1;+\infty[); f^{-1}(x)=-1+\sqrt[3]{(x+1)^2}$

2 $f(x)=x-2+2\sqrt{x+1}$; $I=[-1;+\infty[$

a. Montrons que f admet une fonction réciproque :

▸ **Continuité:** la fonction f est continue sur I comme somme de deux fonctions continues sur I qui sont:

- $u: x\mapsto x-2$ est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur I (fonction affine).
- $v: x\mapsto\sqrt{x+1}$ est continue sur I car $x\mapsto x+1$ est continue et positive sur I.

et on a : $f=u+2v$

▸ **Variations:**

On a : $(\forall x\in]-1;+\infty[)\ ; f'(x)=1+2\times\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}=1+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$

D'où : $(\forall x\in]-1;+\infty[); f'(x)>0$

donc f est strictement croissante sur $I=[-1;+\infty[$.

Puisque f est continue strictement croissante sur l'intervalle I, alors f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $J=f(I)$.

On a : $J = f(I) = f([-1;+\infty[) = [f(-1); \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[= [-3;+\infty[$

b. Déterminons $f^{-1}(x)$ pour tout x de J :

Soit x un élément de $J = [-3;+\infty[$ et y un élément de $I = [-1;+\infty[$ avec: $f^{-1}(x) = y$

on a : $f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x$

$$\iff y - 2 + 2\sqrt{y+1} = x$$
$$\iff y + 1 + 2\sqrt{y+1} = x + 3$$
$$\iff (\sqrt{y+1})^2 + 2\sqrt{y+1} + 1 = x + 4$$
$$\iff (\sqrt{y+1} + 1)^2 = x + 4$$
$$\iff \sqrt{y+1} + 1 = \sqrt{x+4}$$
$$\iff \sqrt{y+1} = -1 + \sqrt{x+4}$$
$$\iff y + 1 = (-1 + \sqrt{x+4})^2$$
$$\iff y = -1 + (-1 + \sqrt{x+4})^2$$

Donc : $(\forall x \in [-3;+\infty[)\ ; f^{-1}(x) = -1 + (-1 + \sqrt{x+4})^2$

3 $f(x) = \sqrt{x-2} + x + 1\ ;\ I = [2;+\infty[$

a. Montrons que f admet une fonction réciproque.

Continuité:

La fonction f est continue sur $I = [2;+\infty[$ comme somme de deux fonctions continues sur I qui sont :

- $u : x \mapsto x + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur I (fonction affine).
- $v : x \mapsto \sqrt{x-2}$ est continue sur I (car $x \mapsto x - 2$ est continue et positive sur I).

Variation:

On a : $(\forall x \in]2;+\infty[)\ ; f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-2}} + 1$

alors: $(\forall x \in]2;+\infty[)\ ; f'(x) > 0$

d'où f est strictement croissante sur $I = [2;+\infty[$.

Puisque f est continue et strictement croissante sur I ; alors f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle $J = f(I)$.

$J = f(I) = f([2;+\infty[) = [f(2); \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[= [3;+\infty[$ (car f est décroissante)

b. Expression de $f^{-1}(x)$ pour tout x de J :

Soit x un élément de $J = [3;+\infty[$. et y un élément de $I = [2;+\infty[$ telle que: $f^{-1}(x) = y$

On a : $f^{-1}(x)=y \iff f(y)=x$

$\iff \sqrt{y-2}+y+1=x$

$\iff \sqrt{y-2}+y-2=x-3$

$\iff (\sqrt{y-2})^2+\sqrt{y-2}=x-3$

$\iff \left(\sqrt{y-2}+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=x-3$

$\iff \left(\sqrt{y-2}+\frac{1}{2}\right)^2=x-\frac{11}{4}$

$\iff \sqrt{y-2}+\frac{1}{2}=\sqrt{x-\frac{11}{4}}$

$\iff \sqrt{y-2}=-\frac{1}{2}+\sqrt{x-\frac{11}{4}}$

$\iff y-2=\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{x-\frac{11}{4}}\right)^2$

$\iff y=2+\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{x-\frac{11}{4}}\right)^2$

Infos:

$X^2+aX=\left(X+\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2$

$X^2-aX=\left(X-\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2$

Donc: $(\forall x\in[3;+\infty[)\ ; f^{-1}(x)=2+\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{x-\frac{11}{4}}\right)^2$

Remarque:

On peut utiliser le discriminant Δ au lieu de la forme canonique.

On pose: $Y=\sqrt{y-2}$, on aura: $Y^2+Y+3-x=0$

$a=1$ et $b=1$ et $c=3-x$ ...

4 $f(x)=\frac{x^2-2}{x^2+3}\ ; I=]-\infty;0]$

a. **Montrons que f admet une fonction réciproque :**

Continuité: la fonction f est continue sur I car c'est la restriction d'une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}$.

Variation: on a: $(\forall x\in]-\infty;0])\ ; f'(x)=\frac{2x(x^2+3)-2x(x^2-2)}{(x^2+3)^2}=\frac{10x}{(x^2+3)^2}$

donc : $(\forall x\in]-\infty;0])\ ; f'(x)\le 0$ et on a : $f'(x)=0\iff x=0$

donc f est strictement décroissante sur I.

Puisque la fonction f est continue et strictement décroissante sur I, alors f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle J avec: $J=f(I)$

On a: $J=f(I)=f(]-\infty;0])$

$=[f(0);\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)[$ (car f est décrois sante)

$=\left[-\frac{2}{3};1\right[$

$\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}1=1\right)$

b. Déterminons $f^{-1}(x)$ pour tout x de J :

Soit x un élément de l'intervalle $J=\left[-\frac{2}{3};1\right[$ et y un élément de l'intervalle $I=]-\infty;0]$ tel que : $f^{-1}(x)=y$

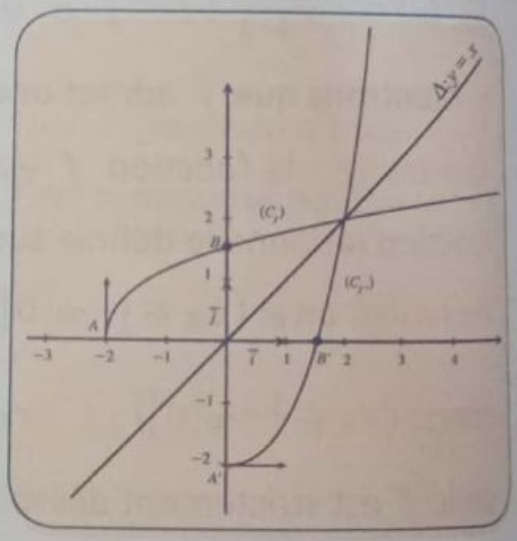
On a : $f^{-1}(x)=y \iff f(y)=x$

$$\iff \frac{y^2-2}{y^2+3}=x$$
$$\iff y^2-2=xy^2+3x$$
$$\iff y^2-xy^2=2+3x$$
$$\iff (1-x)y^2=2+3x$$
$$\iff y^2=\frac{2+3x}{1-x}$$
$$\iff \sqrt{y^2}=\sqrt{\frac{2+3x}{1-x}}$$
$$\iff |y|=\sqrt{\frac{2+3x}{1-x}}$$
$$\iff y=-\sqrt{\frac{2+3x}{1-x}} \quad \text{(car: } y\leq 0 \Rightarrow |y|=-y\text{)}$$

Donc : $\left(\forall x\in\left[-\frac{2}{3};1\right[\right);f^{-1}(x)=-\sqrt{\frac{2+3x}{1-x}}$

Exercice 25

La courbe de f^{-1} est le symétrique de la courbe de f par rapport à la droite d'équation $y=x$ dans un repère orthonormé.



1 On a : $f([-2;+\infty[)=[0;+\infty[$

Donc : $D_{f^{-1}}=[0;+\infty[$

- On a : (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.

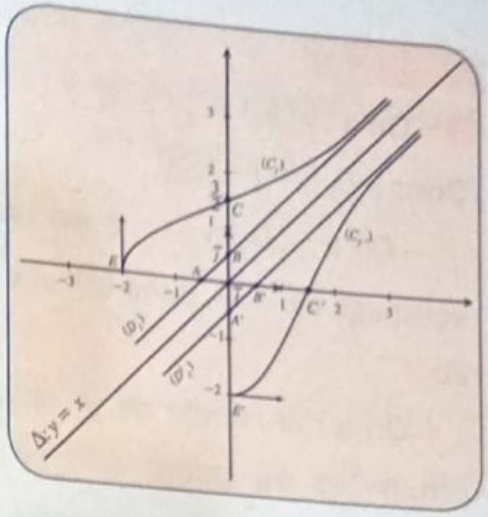
Donc la courbe f^{-1} admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

- On a : $f(0)=\frac{3}{2}$ d'où : $f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)=0$
- On a : (C_f) admet une demi-tangente verticale au point $A(-2;0)$, donc la courbe de f^{-1} admet une demi-tangente horizontale au point $A'(0;-2)$.

2 - On a : $f([-2;+\infty[) = [0;+\infty[$

donc : $D_{f^{-1}} = [0;+\infty[$

- On a : (C_f) admet une asymptote oblique (D_1) au voisinage de $+\infty$ passant par les deux points $A\left(-\frac{1}{2};0\right)$ et $B\left(0;\frac{1}{2}\right)$ (son équation est : $y = x + \frac{1}{2}$).



Donc la courbe de f^{-1} admet une asymptote oblique (D'_1) au voisinage de $+\infty$ passant par les deux points $A'\left(0;-\frac{1}{2}\right)$ et $B'\left(\frac{1}{2};0\right)$ (son équation $y = x - \frac{1}{2}$)

- La courbe de f coupe l'axe des ordonnées au point $C\left(0;\frac{3}{2}\right)$ donc la courbe de f^{-1} coupe l'axe des abscisses au point $C'\left(\frac{3}{2};0\right)$

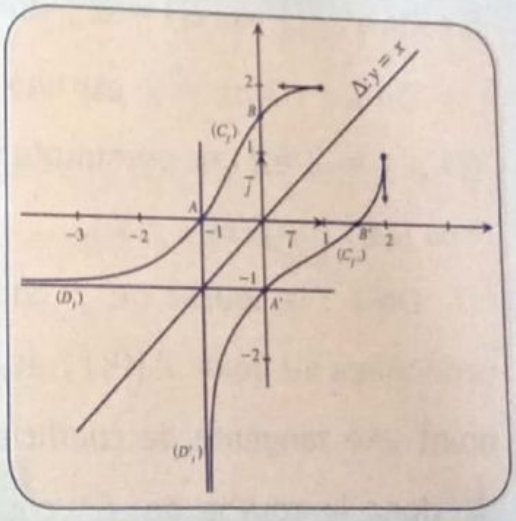
- La courbe f admet une demi-tangente verticale au point $E(-2;0)$ donc la courbe de f^{-1} admet une demi-tangente horizontale au point $E'(0;-2)$.

Exercice 26

On a : $f(]-\infty;1]) =]-1;2]$

Donc : $D_{f^{-1}} =]-1;2]$

On a : la courbe de f admet une asymptote horizontale au voisinage de $-\infty$ d'équation $y = -1$.



Donc la courbe de f^{-1} admet une asymptote verticale (D'_1) d'équation $x = -1$.

On a : la courbe (C_f) coupe l'axe des abscisses au point $A(-1;0)$, donc la courbe de f^{-1} coupe l'axe des ordonnées au point $A'(0;-1)$.

On a : la courbe de (C_f) coupe l'axe des ordonnées au point $B\left(0;\frac{3}{2}\right)$ donc la courbe de f^{-1} coupe l'axe des abscisses au point $B'\left(\frac{3}{2};0\right)$.

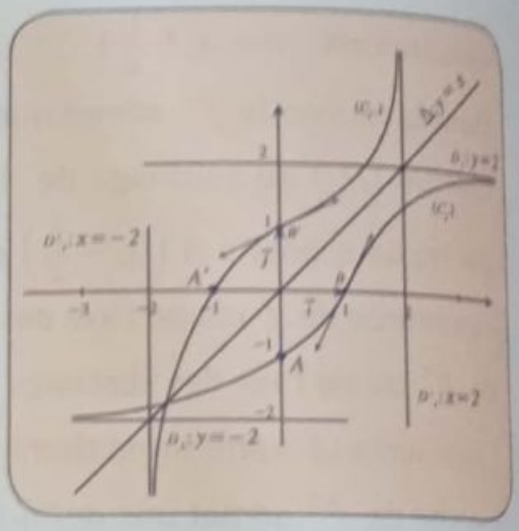
On a : la courbe de (C_f) admet une demi-tangente horizontale au point $C(1;2)$ donc la courbe de f^{-1} admet une demi-tangente verticale au point $C'(2;1)$.

Exercice 27

1) On a : $f(\mathbb{R}) =]-2;2[$

Donc : $D_{f^{-1}} =]-2;2[$

- On a : $(D_2): y = -2$ est une asymptote horizontale à la courbe de f au voisinage de $-\infty$, donc $(D'_2): x = -2$ est une asymptote verticale à la courbe de f^{-1}.

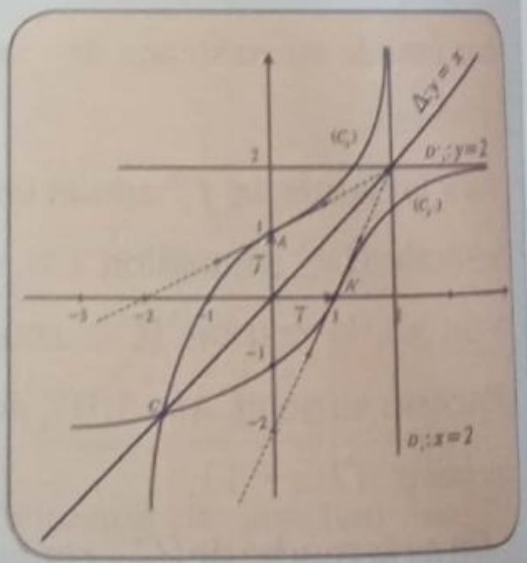


- On a : la courbe de f coupe l'axe des ordonnées au point $A(0;-1)$ donc la courbe f^{-1} coupe l'axe au point $A'(-1;0)$.

- On a : la courbe de f coupe l'axe des abscisses au point $B(1;0)$, et admet en ce point une tangente de coefficient directeur $\frac{2}{1} = 2$, donc la courbe de f^{-1} coupe l'axe des ordonnées au point $B'(0;1)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur $\frac{1}{2}$ (voir figure).

2) On a : $f(]-\infty;2[) = \mathbb{R}$, donc : $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

- On a : $(D_1): x = 2$ est une asymptote verticale à la courbe de f, donc $(D'_1): y = 2$ est une asymptote horizontale à la courbe de f^{-1} au voisinage de $+\infty$ (car: $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$).



- On a : la courbe de f coupe l'axe des ordonnées au point $A(0;1)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur $\frac{1}{2}$ donc la courbe de f^{-1} coupe l'axe des abscisses au point $A'(1;0)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur 2.

- On a : la courbe de f admet une branche parabolique de direction (Oy) au voisinage de $-\infty$ donc $(C_{f^{-1}})$ admet une branche parabolique de direction (Ox) au voisinage de $-\infty$ (car: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$).

- On a : la courbe de f coupe l'axe des abscisses au point $B(-1;0)$ donc la

courbe de f^{-1} coupe l'axe des ordonnées au point $B'(0;-1)$.

▸ On a : la courbe de f coupe l'axe de symétrie (Δ) au point C donc la courbe de f^{-1} coupe aussi l'axe de symétrie au point C. (voir figure)

7 Fonction $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$; $n \in \mathbb{N}^*$

Définitions :

La fonction $x \longmapsto x^n$ (tel que $n \in \mathbb{N}^*$) est continue et strictement croissante sur l'intervalle $I = [0;+\infty[$, sa fonction réciproque f^{-1} est définie sur $[0,+\infty[$ par $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$.

On a : $\begin{cases} y = x^n \\ x \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \sqrt[n]{y} \\ y \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$

Propriétés :

Soient x et y de $\mathbb{R}^+$.

1 $\sqrt[n]{x^n} = x$

2 $(\sqrt[n]{x})^n = x$

3 $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Longleftrightarrow x = y$

4 $\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y} \Longleftrightarrow x < y$

5 $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[nm]{x}$

6 $\sqrt[n]{x} = \sqrt[mn]{x^m}$

7 Si $y \neq 0$ donc $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$

8 $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y}$

Puissance rationnelle d'un nombre réel strictement positif.

▸ Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$ et x un réel strictement positif.

$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

$x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p} = (\sqrt[q]{x})^p$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

Exercices

Exercice 28

1 Écrire dans l'ordre croissant les nombres suivants: $\sqrt[4]{2}$; $\sqrt{2}$ et $\sqrt[5]{2}$.

2 Écrire dans l'ordre décroissant les nombres suivants: $\sqrt[4]{3}$; $\sqrt[3]{2}$ et $\sqrt{5}$.

3 Simplifier les nombres: $A = \frac{\sqrt[10]{2^5} \times \sqrt[12]{8^8}}{\sqrt[4]{4^3} \times \sqrt{\sqrt[4]{16}} \times \sqrt[6]{2^{15}}}$, et

$B = \sqrt{2}\left(\sqrt[4]{7+4\sqrt{3}} - \sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}\right)$

4 Montrer que: $(a+b)^{\frac{5}{2}} = (a^5 + ba^4)^{\frac{1}{2}} + 2(a^3b^2 + a^2b^3)^{\frac{1}{2}} + (ab^4 + b^5)^{\frac{1}{2}}$ avec $a > 0$ et $b > 0$.

Exercice 29

1. Déterminer les nombres a et b tel que :

$(\forall x \in \mathbb{R}); x^3 - 3x - 18 = (x-3)(x^2+ax+b)$

2. Soit t le réel défini par: $t = \sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$

   a. Montrer que t est une solution de l'équation: $x^3 - 3x - 18 = 0$ dans $\mathbb{R}$.

   b. En déduire que : $t = 3$.

Exercice 30

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{R}$ les deux équations suivantes:

   a. $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = 12$

   b. $\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6} = \sqrt[3]{2x+11}$

2. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\sqrt{x-1} - \sqrt[3]{x-2} > 1$

Exercice 31

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x - \sqrt[3]{x^2}}{x}$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x}$
3. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt[3]{3x+2}-2}$
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} x - \sqrt[3]{2x-1}$
5. $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 - 3x - \sqrt[3]{1-x})$
6. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{4x+4}-2}$
7. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^3+x^2+2} - x$
8. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^3+x^2+2} - 2x$

Exercice 32

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^2-3x+1}$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt[3]{4-3x}$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x} - 2x$
4. $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \dfrac{-3x^2+x+1}{\sqrt[3]{x}-1}$

Exercice 33

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{x}$
2. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x}-3x}{2+\sqrt[3]{x}}$
4. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt[3]{2x+4}-2}{x-2}$

Exercice 34

Calculer les deux limites suivantes :

1 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{x-1}$

2 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x}-5\sqrt[3]{x}}$

Exercice 35

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

a. Montrer dans chacun des deux cas que f admet une fonction réciproque f^{-1}.

b. Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x de J.

1 $f(x)=x^3+1$ et $I=\mathbb{R}$

2 $f(x)=x^3+3x^2+3x-1$ et $I=\mathbb{R}$

Exercice 28

1 Ordonnons les nombres: $\sqrt[4]{2}$ et $\sqrt{2}$ et $\sqrt[5]{2}$:

On pose : $a=\sqrt[4]{2}$ et $b=\sqrt{2}$ et $c=\sqrt[5]{2}$.

Les nombres a; b et c sont positifs, pour les ranger, il suffit de «se débarasser» des notations $\sqrt[4]{\ }$ et $\sqrt{\ }$ et $\sqrt[5]{\ }$ pour cela, il suffit d'ordonner a^{20} et b^{20} et c^{20} (car 20 est le plus petit multiple commun de 4, 2 et 5).

On a : $a^{20}=(\sqrt[4]{2})^{20}=(\sqrt[4]{2^4})^5=2^5$

$b^{20}=(\sqrt{2})^{20}=(\sqrt{2^2})^{10}=2^{10}$

$c^{20}=(\sqrt[5]{2})^{20}=(\sqrt[5]{2^5})^4=2^4$

infos:
$\sqrt[n]{x}=\sqrt[np]{x^p}$ avec $x\geq 0$ et n et p de $\mathbb{N}^*$.

puisque: $c^{20}<a^{20}<b^{20}$, donc: $c<a<b$, d'où: $\sqrt[5]{2}<\sqrt[4]{2}<\sqrt{2}$ (car la fonction $x\mapsto\sqrt[20]{x}$ est strictement croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$).

2 Ordonnons les nombres: $\sqrt[4]{3}$ et $\sqrt[3]{2}$ et $\sqrt{5}$:

On a le plus petit multiple commun de 4; 3 et 2 est 12.

On pose: $a=\sqrt[4]{3}$; $b=\sqrt[3]{2}$ et $c=\sqrt{5}$.

Pour comparer les nombres a; b et c; on va utiliser une méthode différente de celle de la 1ère question:

On a: $a=\sqrt[4]{3}=\sqrt[4\times 3]{3^3}=\sqrt[12]{27}$

$b=\sqrt[3]{2}=\sqrt[3\times 4]{2^4}=\sqrt[12]{16}$

$c=\sqrt{5}=\sqrt[2\times 6]{5^6}=\sqrt[12]{15625}$

infos:
$\sqrt[n]{x^p}=x^{\frac{p}{n}}$ avec $x>0$ et n et p de $\mathbb{N}^*$.

On a : $15625>27>16$, et la fonction $x\mapsto\sqrt[12]{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$,

alors : $\sqrt[12]{15625} > \sqrt[12]{16} > \sqrt[12]{16}$, c'est-à-dire: $c > a > b$, donc: $\sqrt{5} > \sqrt[4]{3} > \sqrt[3]{2}$.

3 Simplifions les expressions A et B:

▸ Pour l'expression A, on a :

$$A = \frac{\sqrt[10]{2^5} \times \sqrt[12]{8^8}}{\sqrt[4]{4^3} \times \sqrt{\sqrt[4]{16}} \times \sqrt[6]{2^{15}}} = \frac{2^{\frac{5}{10}} \times 8^{\frac{8}{12}}}{4^{\frac{3}{4}} \times \left(16^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{15}{6}}} = \frac{2^{\frac{1}{2}} \times (2^3)^{\frac{2}{3}}}{(2^2)^{\frac{3}{4}} \times (2^4)^{\frac{1}{8}} \times 2^{\frac{5}{2}}}$$

$$= \frac{2^{\frac{1}{2}} \times 2^2}{2^{\frac{3}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{5}{2}}} = \frac{2^2}{2^{\frac{3}{2}+\frac{5}{2}}} = 2^{2-4} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

▸ Pour l'expression B, on a:

$$B = \sqrt{2}\left(\sqrt[4]{7+2\times 2\sqrt{3}} - \sqrt[4]{7-2\times 2\sqrt{3}}\right) = \sqrt{2}\left(\sqrt[4]{4+3+2\times 2\sqrt{3}} - \sqrt[4]{4+3-2\times 2\sqrt{3}}\right)$$
$$= \sqrt{2}\left(\sqrt[4]{(2+\sqrt{3})^2} - \sqrt[4]{(2-\sqrt{3})^2}\right) = \sqrt{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}}\right)$$

car: $2-\sqrt{3} > 0$ et $2+\sqrt{3} > 0$ et $\sqrt[4]{X^2} = \sqrt{X}$ pour tout $X \geq 0$.

d'où: $B = \sqrt{2(2+\sqrt{3})} - \sqrt{2(2-\sqrt{3})} = \sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}$
$$= \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = |\sqrt{3}+1| - |\sqrt{3}-1| = \sqrt{3}+1-\sqrt{3}+1 = 2$$

Donc: $B = 2$

4 Montrons que: $(a+b)^{\frac{5}{2}} = (a^5+ba^4)^{\frac{1}{2}} + 2(a^3b^2+a^2b^3)^{\frac{1}{2}} + (ab^4+b^5)^{\frac{1}{2}}$ pour a et b de $\mathbb{R}^{*+}$:

Soient a et b des réels strictement positifs, on a :

$$(a^5+ba^4)^{\frac{1}{2}} + 2(a^3b^2+a^2b^3)^{\frac{1}{2}} + (ab^4+b^5)^{\frac{1}{2}} = \left[a^4(a+b)\right]^{\frac{1}{2}} + 2\left[a^2b^2(a+b)\right]^{\frac{1}{2}} + \left[b^4(a+b)\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$= a^2(a+b)^{\frac{1}{2}} + 2ab(a+b)^{\frac{1}{2}} + b^2(a+b)^{\frac{1}{2}}$$
$$= (a+b)^{\frac{1}{2}}(a^2+2ab+b^2)$$
$$= (a+b)^{\frac{1}{2}}(a+b)^2 = (a+b)^{\frac{1}{2}+2} = (a+b)^{\frac{5}{2}}$$

Exercice 29

1 Déterminons a et b pour que: $(\forall x \in \mathbb{R}); x^3 - 3x - 18 = (x-3)(x^2+ax+b)$

Soit x de $\mathbb{R}$;

On a : $(x-3)(x^2+ax+b) = x^3+(a-3)x^2+(b-3a)x-3b$

donc : $x^3+(a-3)x^2+(b-3a)x-3b = x^3-3x-18$ pour tout réel x.

si et seulement si : $-3b = 18$; $b-3a = -3$ et $a-3 = 0$

si et seulement si : $b = 6$ et $a = 3$

Donc : $(\forall x \in IR)$; $x^3 - 3x - 18 = (x-3)(x^2+3x+6)$

2 a. Montrons que t est une solution de l'équation: $x^3 - 3x - 18 = 0$

On a :

$$t^3 = (\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}})^3$$
$$= (\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}})^3 + 3(\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}})^2.(\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}) + 3\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}.(\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}})^2 + (\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}})^3$$
$$= 9+4\sqrt{5}+9-4\sqrt{5} + 3\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}\underbrace{(\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}})}_{t}$$
$$= 18 + 3\sqrt[3]{81-80} \times (t)$$
$$= 18 + 3t$$

d'où : $t^3 - 3t - 18 = 0$; ainsi t est solution de l'équation $x^3 - 3x - 18 = 0$.

b. Montrons que : $t = 3$

On a : $t^3 - 3t - 18 = 0 \Leftrightarrow (t-3)(t^2+3t+6) = 0$

$\Leftrightarrow t = 3$ ou $t^2 + 3t + 6 = 0$

$\Leftrightarrow t = 3$

(car le discriminant Δ de l'équation $t^2 + 3t + 6 = 0$ est négatif), donc:

$$\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}} = 3$$

Exercice 30

1 a. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation: (E_1): $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = 12$

L'ensemble de définition de l'équation (E_1) est: $D = [0; +\infty[$

Soit x un élément de $[0; +\infty[$,

On a : $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = 12 \Leftrightarrow \sqrt[6]{x^3} + \sqrt[6]{x^2} = 12$

$\Leftrightarrow (\sqrt[6]{x})^3 + (\sqrt[6]{x})^2 - 12 = 0$

posons: $t = \sqrt[6]{x}$, avec $t \geq 0$

On a : $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = 12 \Leftrightarrow (\sqrt[6]{x})^3 + (\sqrt[6]{x})^2 - 12 = 0$

$\Leftrightarrow t^3 + t^2 - 12 = 0$

$\Leftrightarrow t^3 - 8 + t^2 - 4 = 0$

$\Leftrightarrow (t-2)(t^2+2t+4) + (t-2)(t+2) = 0$

$\Leftrightarrow (t-2)(t^2+3t+6) = 0$

$\Leftrightarrow t = 2$ ou $t^2 + 3t + 6 = 0$

Puisque le discriminant du trinôme $t^2 + 3t + 6$ est $\Delta = -15$, alors :

$t^2 + 3t + 6 \neq 0$ pour t de $\mathbb{R}$,

d'où : $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = 12 \Leftrightarrow \sqrt[6]{x} = 2$

$\Leftrightarrow x = 2^6 = 64$

Donc : $S = \{64\}$.

b. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation: (E_2): $\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6} = \sqrt[3]{2x+11}$

Soit D l'ensemble de définition de l'équation (E_2); on a :

$x \in D \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $2x + 11 \geq 0$ et $x + 6 \geq 0$ et $x + 5 \geq 0$

$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $x \geq -\frac{11}{2}$ et $x \geq -6$ et $x \geq -5$

$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $x \geq -5$

donc : $D = [-5; +\infty[$

Soit x un élément de $[-5; +\infty[$, on a :

$\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6} = \sqrt[3]{2x+11} \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6}\right)^3 = \left(\sqrt[3]{2x+11}\right)^3$

$\Leftrightarrow x + 5 + x + 6 + 3\sqrt[3]{x+5}\sqrt[3]{x+6}\left(\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6}\right) = 2x + 11$

$\Leftrightarrow 2x + 11 + 3\sqrt[3]{x+5}\sqrt[3]{x+6}\left(\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6}\right) = 2x + 11$

$\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{x+5}\sqrt[3]{x+6}\left(\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x+5} = 0$ ou $\sqrt[3]{x+6} = 0$ ou $\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6} = 0$

puisque: $x \geq 5$, alors: $\sqrt[3]{x+5} \geq 0$, et $\sqrt[3]{x+6} \geq 1$, d'où:

$\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6} \geq 1$ c'est-à-dire : $\sqrt[3]{x+6} + \sqrt[3]{x+5} \neq 0$

ainsi : $\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6} = \sqrt[3]{2x+11} = 0 \Leftrightarrow x = -5$ ou $x = -6$

or : $-6 \notin D$ et $-5 \in D$, donc : $S = \{-5\}$.

2 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation: (E_3): $\sqrt{x-1} - \sqrt[3]{x-2} > 1$

Soit D l'ensemble de définition de l'inéquation (E_3) :

Soit : $x \in \mathbb{R}$; $x \in D \Leftrightarrow x - 1 \geq 0$ *et* $x - 2 \geq 0$

$\Leftrightarrow x \geq 1$ *et* $x \geq 2$

$\Leftrightarrow x \geq 2$

Donc : $D = [2; +\infty[$

Soit x un élément de D, posons: $X = \sqrt[3]{x-2}$ avec : $X \geq 0$

On a : $X = \sqrt[3]{x-2} \Leftrightarrow X^3 = x - 2$

$\Leftrightarrow X^3 + 1 = x - 1$

d'où : $\sqrt{x-1} - \sqrt[3]{x-2} > 1 \Leftrightarrow \sqrt{X^3+1} - X > 1$ et $X \geq 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{X^3+1} > X + 1$ et $X \geq 0$

$\Leftrightarrow X^3 + 1 \geq (X+1)^2 > 0$ et $X \geq 0$

$\Leftrightarrow (X+1)(X^2 - X + 1) - (X+1)^2 > 0$ et $X \geq 0$

$\Leftrightarrow (X+1)(X^2-X+1-X-1)>0$ et $X \geq 0$

$\Leftrightarrow X(X+1)(X-2)>0$ et $X \geq 0$

$\Leftrightarrow X>2$

et on a : $X>2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x-2}>2$

$\Leftrightarrow x-2>8$

$\Leftrightarrow x>10$

$\Leftrightarrow x \in]10;+\infty[$

Donc: $\sqrt{x-1}-\sqrt[3]{x-2}>1 \Leftrightarrow x \in]10;+\infty[$, d'où : $S=]10;+\infty[$

Exercice 31

1 Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\sqrt[3]{x^2}}{x}$:

Soit x de $]0;+\infty[$, on a : $\dfrac{x-\sqrt[3]{x^2}}{x}=\dfrac{x}{x}-\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{x}=1-\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x^3}}=1-\sqrt[3]{\dfrac{1}{x}}$

or : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ et : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-\sqrt[3]{x^2}}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\sqrt[3]{\dfrac{1}{x}}\right)=1$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\sqrt[3]{x^2}}{x}=1$

2 Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x}$:

Soit x de $]-\infty;0[$, on a : $x=-(-x)=-\left(\sqrt[3]{(-x)^3}\right)$

d'où : $\dfrac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x}=\dfrac{\sqrt[3]{1-x^3}}{-\sqrt[3]{(-x)^3}}=-\sqrt{\dfrac{1-x^3}{-x^3}}$

Or: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-x^3}{-x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x^3}{-x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}1=1$, donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x}=-1$

3 Calculons $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt[3]{3x+2}-2}$

infos:

Soient a et b de $\mathbb{R}^{+*}$ on a :

$\sqrt{a}-\sqrt{b}=\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; $a-b=\dfrac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$

Soit x de $[0;4]$, on a :

et on a : $\sqrt{x+2}-2=\dfrac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{\sqrt{x+2}+2}=\dfrac{x+2-4}{\sqrt{x+2}+2}=\dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}+2}$

$$\sqrt[3]{3x+2}-2=\frac{(\sqrt[3]{3x+2})^3-(2)^3}{(\sqrt[3]{3x+2})^2+2\sqrt[3]{3x+2}+(2)^2}$$

$$=\frac{3x-6}{(\sqrt[3]{3x+2})^2+2\sqrt[3]{3x+2}+4}$$

$$=\frac{3(x-2)}{(\sqrt{3x+2})^2+2\sqrt[3]{3x+2}+4}$$

Donc : $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt[3]{3x+2}-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}+2}\times\dfrac{(\sqrt[3]{3x+2})^2+2\sqrt[3]{3x+2}+4}{3(x-2)}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(\sqrt[3]{3x+2})^2+2\sqrt[3]{3x+2}+4}{3(\sqrt{x+2}+2)}=\dfrac{4+4+4}{12}=1$

4 **Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt[3]{2x-1})$:**

Soit x de $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$,

On a : $x-\sqrt[3]{2x-1}=x\left(1-\dfrac{\sqrt[3]{2x-1}}{x}\right)=x\left(1-\sqrt[3]{\dfrac{2x-1}{x^3}}\right)=x\left(1-\sqrt[3]{\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}\right)$

puisque: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}\right)=0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\sqrt[3]{\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}\right)=1$

Alors: $\lim\limits_{x\to+\infty}x-\sqrt[3]{2x-1}=+\infty$

5 **Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-3x-\sqrt[3]{1-x})$:**

Soit x de $]-\infty;0[$,

On a: $x^2-3x-\sqrt[3]{1-x}=x^2\left(1-\dfrac{3}{x}-\dfrac{\sqrt[3]{1-x}}{x^2}\right)$

$=x^2\left(1-\dfrac{3}{x}-\sqrt[3]{\dfrac{1-x}{x^6}}\right)$ (car: $\sqrt[3]{x^6}=x^2$)

$=x^2\left(1-\dfrac{3}{x}-\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^6}-\dfrac{1}{x^5}}\right)$

puisque : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x^6}-\dfrac{1}{x^5}\right)=0$ alors : $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^6}-\dfrac{1}{x^5}}=0$

et on a : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)=1$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$, donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-3x-\sqrt[3]{1-x})=+\infty$

6 **Calculons $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{4x+4}-2}$:**

Soit x de $[0;2]$, on a :

on a : $\sqrt[3]{x}-1=\dfrac{(\sqrt[3]{x})^3-(1)^3}{(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}+1}=\dfrac{x-1}{(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}+1}$

donc :

$\sqrt[3]{4x+4}-2=\dfrac{(\sqrt[3]{4x+4})^3-(2)^3}{(\sqrt[3]{4x+4})^2+2.\sqrt[3]{4x+4}+(2)^2}=\dfrac{4(x-1)}{(\sqrt[3]{4x+4})^2+2\sqrt[3]{4x+4}+4}$

d'où : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{4x+4}-2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}+1}\times\dfrac{(\sqrt[3]{4x+4})^2+2\sqrt[3]{4x+4}+4}{4(x-1)}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(\sqrt[3]{4x+4})^2+2.\sqrt[3]{4x+4}+4}{4((\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}+1)}=\dfrac{12}{12}=1$

Donc : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{4x+4}-2}=1$

7 Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+x^2+2}-x$:

Soit x de $]0;+\infty[$,

on a : $\sqrt[3]{x^3+x^2+2}-x=\dfrac{(\sqrt[3]{x^3+x^2+2})^3-x^3}{(\sqrt[3]{x^3+x^2+2})^2+x.\sqrt[3]{x^3+x^2+2}+x^2}$

$$=\frac{x^2+2}{\left(\sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}\right)}\right)^2+x.\sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}\right)}+x^2}$$

$$=\frac{x^2+2}{\left(x.\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}}\right)^2+x^2.\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}}+x^2}$$

$$=\frac{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left[\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}}\right)^2+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}}+1\right]}$$

puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}1+\dfrac{2}{x^2}=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^3}\right)=1$

alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^3}}\right)^2=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^3}}=1$

donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\dfrac{2}{x^2}}{\left[\left(\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^3}}\right)^2+\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}}+1\right]}=\dfrac{1}{3}$

d'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+2}-x\right)=\dfrac{1}{3}$

8 Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+x^2+2}-2x$:

Soit x de $]0;+\infty[$,

on a : $\sqrt[3]{x^3+x^2+2}-2x=\sqrt[3]{x^3\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^3}\right)}-2x$

$$=x\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}}-2\right)$$

puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^3}\right)=1$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^3}}=1$

donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^3}}-2\right)=-\infty$

d'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+x^2+2x}-2x)=-\infty$

Exercice 32

1 **Calculons** $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^2-3x+1}$:

on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-3x+1=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^2-3x+1}=+\infty$

2 **Calculons** $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[5]{4-3x}$:

on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} 4-3x=+\infty$, Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[5]{4-3x}=+\infty$

3 **Calculons** $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}-2x$:

Méthode 1:

Soit : $x>0$; $\sqrt[3]{x}-2x=\sqrt[3]{x}-2(\sqrt[3]{x})^3$

$=\sqrt[3]{x}(1-2(\sqrt[3]{x})^2)$

donc : $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1-2(\sqrt[3]{x})^2=-\infty\end{array}\right\}\Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}-2x=-\infty$

Méthode 2:

Soit : $x>0$

on a : $\sqrt[3]{x}-2x=x\left(\dfrac{\sqrt[3]{x}}{x}-2\right)$

$=x\left(\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^3}}-2\right)$

$=x\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-2\right)$

donc : $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-2=-2\end{array}\right\}\Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}-2x=-\infty$

4 **Calculons** $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\dfrac{-3x^2+x+1}{\sqrt[3]{x}-1}$

on a : $\left(\begin{array}{l}x>1\Longleftrightarrow\sqrt[3]{x}>1\\ \Longleftrightarrow\sqrt[3]{x}-1>0\end{array}\right)$

donc : $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^+}-3x^2+x+1=-1\\ \lim\limits_{x\to1^+}\sqrt[3]{x}-1=0^+\end{array}\right\}\Longrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\dfrac{-3x^2+x+1}{\sqrt[3]{x}-1}=-\infty$

Exercice 33

1 Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{x}$:

Méthode 1:

Soit : $x>0$

on a : $\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{x}\left(\dfrac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x}}-1\right)$

$=\sqrt[3]{x}\left(\dfrac{\sqrt[12]{x^3}}{\sqrt[12]{x^4}}-1\right)$

$=\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[12]{\dfrac{x^3}{x^4}}-1\right)$

$=\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[12]{\dfrac{1}{x}}-1\right)$

donc : $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[12]{\dfrac{1}{x}}-1=-1\end{array}\right\}\Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{x}=-\infty$

Méthode 2:

Soit : $x>0$

on a : $\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{4}}-x^{\frac{1}{3}}$

$=x^{\frac{1}{4}}\left[1-\dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{4}}}\right]$

$=x^{\frac{1}{4}}\left[1-x^{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}\right]$

$=x^{\frac{1}{4}}\left[1-x^{\frac{1}{12}}\right]$

on a : $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{4}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[4]{x}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}1-x^{\frac{1}{12}}=\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\sqrt[12]{x})=-\infty\end{array}\right\}$, donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{x}=-\infty$

Méthode 3: (avec un changement de variable)

Soint $x>0$, on a : $\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{x}=\sqrt[12]{x^3}-\sqrt[12]{x^4}$

$=(\sqrt[12]{x})^3-(\sqrt[12]{x})^4$

On pose : $X=\sqrt[12]{x}$

on a : $\lim\limits_{X\to+\infty}X=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[12]{x}=+\infty$, donc : $(x\longrightarrow+\infty\Longrightarrow X\longrightarrow+\infty)$

d'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{x}=\lim\limits_{X\to+\infty}X^3-X^4$

$=\lim\limits_{X\to+\infty}-X^4=-\infty$ (fonction polynôme)

2 **Calculons** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$:

infos:

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$a-b=\dfrac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$

On pose : $a=\sqrt[3]{x}$ et $b=1$

donc : $\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}=\dfrac{a-b}{a^3-b^3}$

$=\dfrac{a-b}{(a-b)(a^2+ab+b^2)}$

$=\dfrac{1}{a^2+ab+b^2}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}$

donc : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[2]{x}+1}=\dfrac{1}{3}$; d'où : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}=\dfrac{1}{3}$

3 **Calculons** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x}-3x}{2+\sqrt[3]{x}}$:

on pose : $X=\sqrt[3]{x}$ alors : $x=X^3$

on a : $\lim\limits_{X\to+\infty}X=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}=+\infty$ (donc : $x\longrightarrow+\infty\Longrightarrow X\longrightarrow+\infty$)

d'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x}-3x}{2+\sqrt[3]{x}}=\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{X-3X^3}{2+X}$

$=\lim\limits_{X\to+\infty}-\dfrac{3X^3}{X}=\lim\limits_{X\to+\infty}-3X^2=-\infty$

donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x}-3x}{2+\sqrt[3]{x}}=-\infty$

4 **Calculons** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{2x+4}-2}{x-2}$:

on a : $\sqrt[3]{2x+4}-2=\dfrac{(\sqrt[3]{2x+4})^3-2^3}{\sqrt[3]{(2x+3)^2}+2\sqrt[3]{2x+3}+2^2}$

$=\dfrac{2x+4-8}{\sqrt[3]{(2x+4)^2}+2\sqrt[3]{2x+4}+4}$

$=\dfrac{2(x-2)}{\sqrt[3]{(2x+4)^2}+2\sqrt[3]{2x+4}+4}$

donc : $\dfrac{\sqrt[3]{2x+4}-2}{x-2}=\dfrac{\dfrac{2(x-2)}{\sqrt[3]{(2x+4)^2}+2\sqrt[3]{2x+4}+4}}{x-2}$

$=\dfrac{2}{\sqrt[3]{(2x+4)^2}+2\sqrt[3]{2x+4}+4}$

D'où : $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{2x+4}-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2}{\sqrt[3]{(2x+4)^2}+2\sqrt[3]{2x+4}+4}=\dfrac{2}{12}=\dfrac{1}{6}$

donc : $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{2x+4}-2}{x-2}=\dfrac{1}{6}$

Solution 34

infos:

$a^4-b^4=(a^2+b^2)(a^2-b^2)$
$=(a^2+b^2)(a-b)(a+b)$

1 Calculons $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{x-1}$:

Soit : $x>0$; $x-1=(\sqrt[4]{x})^4-1^4$
$=((\sqrt[4]{x})^2+1)(\sqrt[4]{x}-1)(\sqrt[4]{x}+1)$
$=(\sqrt{x}+1)(\sqrt[4]{x}-1)(\sqrt[4]{x}+1)$

alors : $\dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{x-1}=\dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt[4]{x}-1)(\sqrt[4]{x}+1)}$
$=\dfrac{1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt[4]{x}+1)}$

donc : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt[4]{x}+1)}$
$=\dfrac{1}{4}$

Donc : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}=\dfrac{1}{4}$

2 Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x}-5\sqrt[3]{x}}$:

Méthode 1:

Soit : $x>0$; on a : $\dfrac{\sqrt[3]{x}-2\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x}-5\sqrt[3]{x}}=\dfrac{\sqrt[3]{x}\left(1-2\dfrac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x}}\right)}{\sqrt[3]{x}\left(\dfrac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x}}-5\right)}=\dfrac{1-2\dfrac{\sqrt[12]{x^3}}{\sqrt[12]{x^4}}}{\dfrac{\sqrt[12]{x^3}}{\sqrt[12]{x^4}}-5}$

$=\dfrac{1-2\dfrac{1}{\sqrt[12]{x}}}{\dfrac{1}{\sqrt[12]{x}}-5}$

puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{2}{\sqrt[12]{x}}\right)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt[12]{x}}-5=-5$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x}-5\sqrt[3]{x}}=-\dfrac{1}{5}$

Méthode 2:

Soit : $x > 0$

on a : $\dfrac{\sqrt[3]{x} - 2\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x} - 5\sqrt[3]{x}} = \dfrac{\sqrt[12]{x^4} - 2\sqrt[12]{x^3}}{\sqrt[12]{x^3} - 5\sqrt[12]{x^4}}$

$= \dfrac{(\sqrt[12]{x})^4 - 2(\sqrt[12]{x})^3}{(\sqrt[12]{x})^3 - 5(\sqrt[12]{x})^4}$

infos:

$n \in \mathbb{N}^*$

$p \in \mathbb{N}^* ; \sqrt[n]{x} = \sqrt[n \times p]{x^p}$

posons : $X = \sqrt[12]{x}$; $x \longrightarrow +\infty \Longrightarrow X \longrightarrow +\infty$

donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 2\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x} - 5\sqrt[3]{x}} = \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{X^4 - 2X^3}{X^3 - 5X^4}$

$= \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{X^4}{-5X^4}$

$= \lim\limits_{X \to +\infty} -\dfrac{1}{5}$

$= -\dfrac{1}{5}$

d'où : $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 2\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x} - 5\sqrt[3]{x}} = -\dfrac{1}{5}$

Exercice 35

1 $f(x) = x^3 + 1 ; I = \mathbb{R}$

a. Montrons que f admet une fonction réciproque.

Continuité: la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme.

Variation: on a : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = 3x^2$ d'où : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f'(x) \geq 0$

donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. $(f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0)$

puisque f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc, f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $J = f(\mathbb{R})$.

On a : $J = f(\mathbb{R})$

$= f(]-\infty; +\infty[)$

$= \left]\lim\limits_{x \to -\infty} f(x); \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\right[$

$=]-\infty ; +\infty[$

$= \mathbb{R}$

b. Déterminons l'expression $f^{-1}(x)$ pour tout x de J :

Soit x un élément de $J = \mathbb{R}$.

et y un élément de $I = \mathbb{R}$ avec $f^{-1}(x) = y$

on a : $f^{-1}(x) = y \Longleftrightarrow f(y) = x$

$\Longleftrightarrow y^3 + 1 = x$

$\Longleftrightarrow y^3 = x - 1$

puisque 3 est impaire, alors: $x-1$ et y ont le même signe :

- Si : $x \leq 1$ alors : $x - 1 \leq 0$ et $y \leq 0$
- Si : $x > 1$ alors : $x - 1 > 0$ et $y > 0$

Donc :

- Si : $x > 1$ alors : $x - 1 > 0$ et $y > 0$

d'où : $y^3 = x - 1 \Longleftrightarrow y = \sqrt[3]{x-1}$

- Si : $x \leq 1$ alors : $x - 1 \leq 0$ et $y \leq 0$

D'où : $y^3 = x - 1 \Longleftrightarrow -y^3 = -(x-1)$

$\Longleftrightarrow (-y)^3 = 1 - x$

$\Longleftrightarrow -y = \sqrt[3]{1-x}$

$\Longleftrightarrow y = -\sqrt[3]{1-x}$

Conclusion : $\begin{cases} f^{-1}(x) = -\sqrt[3]{1-x} & ; \ x \leq 1 \\ f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1} & ; \ x > 1 \end{cases}$

2 $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 1 \ ; \ I = \mathbb{R}$

a. **Montrons que f admet une fonction réciproque.**

Continuité:

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme.

Variation:

f est une fonction polynôme, donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

et on a : $(\forall x \in \mathbb{R}) \ ; f'(x) = 3x^2 + 6x + 3$

$= 3(x^2 + 2x + 1)$

$= 3(x+1)^2$

On a : $(\forall x \in \mathbb{R}) \ ; \ f'(x) \geq 0$ (f' s'annule uniquement en -1)

Donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Puisque f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$; alors f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $J = f(\mathbb{R})$

On a : $J = f(IR)$

$= f(]-\infty ; +\infty[)$

$$= \left]\lim_{x\to-\infty} f(x) ; \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[$$
$$=]-\infty ; +\infty[$$
$$= \mathbb{R}$$

b. Exprimons $f^{-1}(x)$ pour tout x de $J = \mathbb{R}$:

Soit x un élément de J (on a : $I = J = \mathbb{R}$)

et y un élément de I avec $f^{-1}(x) = y$

On a : $f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x$

$$\iff y^3 + 3y^2 + 3y - 1 = x$$
$$\iff y^3 + 3y^2 + 3y + 1 = x + 2$$
$$\iff (y+1)^3 = x + 2$$

La puissance est impaire donc $y+1$ et $x+2$ ont le même signe :

- Si : $x + 2 > 0$ alors $x > -2$ d'où : $y + 1 > 0$

ainsi : $(y+1)^3 = x+2 \iff y+1 = \sqrt[3]{x+2}$

$$\iff y = -1 + \sqrt[3]{x+2}$$

- Si : $x + 2 \leq 0$ alors $x \leq -2$ et $y + 1 \leq 0$

d'où : $(y+1)^3 = x+2 \iff -(y+1)^3 = -x-2$

$$\iff (-y-1)^3 = -x-2$$
$$\iff -y-1 = \sqrt[3]{-x-2}$$
$$\iff y = -1 - \sqrt[3]{-x-2}$$

Conclusion :
$$\begin{cases} f^{-1}(x) = -1 + \sqrt[3]{x+2} ; x > -2 \\ f^{-1}(x) = -1 - \sqrt[3]{-x-2} ; x \leq -2 \end{cases}$$

3 La dérivation et ses applications Étude de fonctions

1 Dérivabilité

Définition:

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle de type $]x_0-\alpha;x_0+\alpha[$, où $\alpha>0$ et $x_0\in\mathbb{R}$.

On dit que f est dérivable au point x_0 (ou en x_0), si et seulement si : il existe un réel ℓ tel que : $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\ell$ ou $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Le nombre ℓ est appelé le nombre dérivé de la fonction f en x_0, et on écrit $\ell=f'(x_0)$

On a : dans ce cas : $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)$.

probriété:

- Si f est dérivable en x_0, alors: f est continue en x_0. (la réciproque est fausse)

2 Dérivabilité à droite - Dérivabilité à gauche en point

Définition 1:

- Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle de type $[x_0,x_0+\alpha[$ où $x_0\in\mathbb{R}$ et $\alpha>0$

On dit que f est dérivable à droite en x_0 si et seulement si $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\in\mathbb{R}$

et on écrit : $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'_d(x_0)$

Remarque :

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Le nombre $f_d'(x_0)$ est appelé le nombre dérivé de la fonction f à droite en x_0.

Définition 2:

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle de type $]x_0-\alpha\,;x_0$

où $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$.

On dit que f est dérivable à gauche en x_0 si et seulement si:

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \in \mathbb{R}$, et on écrit : $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f_g'(x_0)$

et on a dans ce cas : $\lim\limits_{\substack{h\to x_0\\ h<x_0}} = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f_g'(x_0)$

Le nombre $f_g'(x_0)$ est appelé le nombre dérivé de la fonction f à gauche en x_0

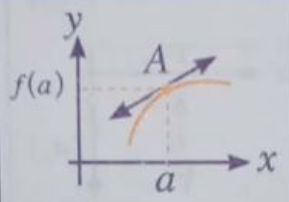
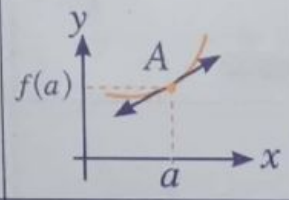
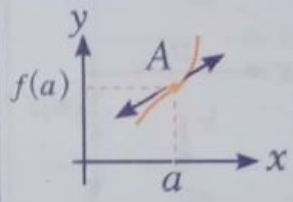
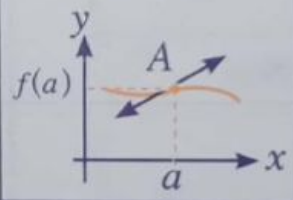
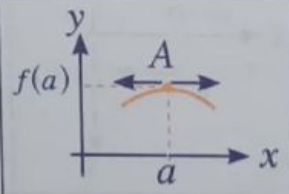
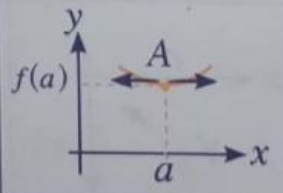
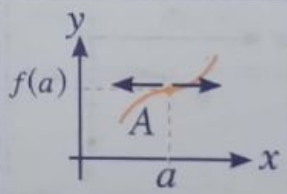
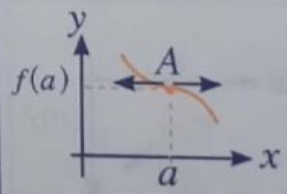
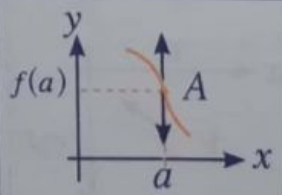
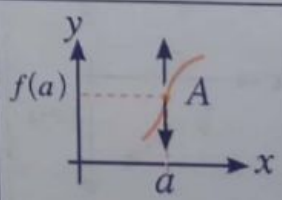
Propriété:

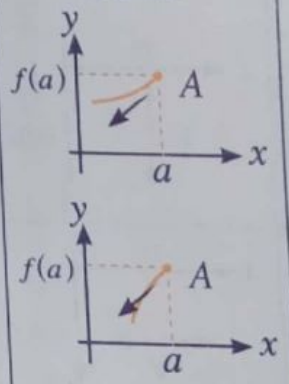
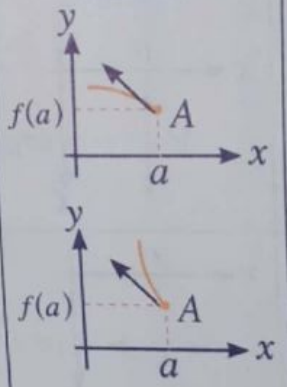
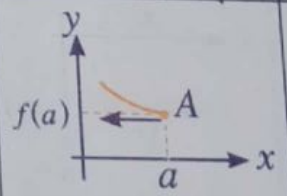
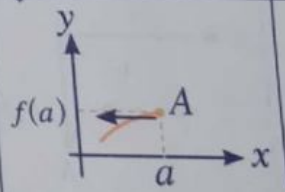
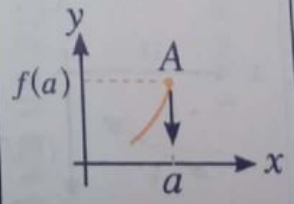
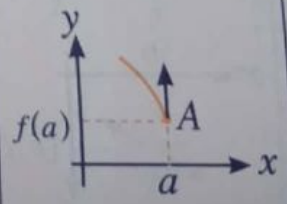
f est dérivable en $x_0 \iff$
- f est dérivable à droite en x_0
- f est dérivable à gauche en x_0
- $f_d'(x_0) = f_g'(x_0)$

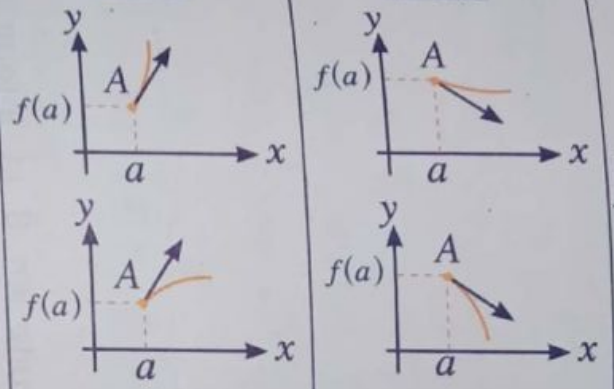
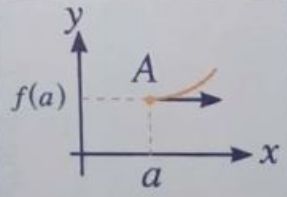
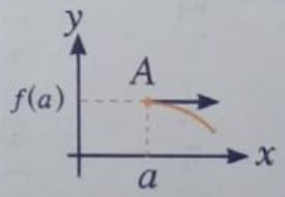
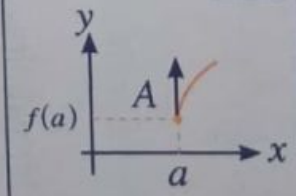
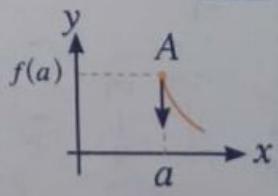
3 Interprétation géométrique de la derivabilité en un point

Propriété:

- Si f est dérivable en x_0, alors $f'(x_0)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse x_0.
- L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse x_0 est : $y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

		Dérivabilité de f	Interprétation géométrique	Figure (suivant la position de la courbe par rapport à sa tangente)		Equation de la tangente (ou demi-tangente)
$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=$	$\ell\in\mathbb{R}^*$	f est dérivable en a	(C_f) admet une tangente de coefficient directeur ℓ au point $A(a;f(a))$	 	 	$y=\ell(x-a)+f(a)$
	0	f est dérivable en a	(C_f) admet une tangente horizontale au point $A(a;f(a))$	 	 	$y=f(a)$
	$\mp\infty$	f n'est pas dérivable en a	(C_f) admet une tangente verticale au point $A(a;f(a))$			$x=a$

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$	$\ell \in \mathbb{R}^*$	f est dérivable à gauche en a	(C_f) admet une demi-tangente de coefficient directeur ℓ au point $A(a;f(a))$	$\ell > 0$ 	$\ell < 0$ 	$\begin{cases} y = \ell(x-a)+f(a) \\ x \le a \end{cases}$
	0	f est dérivable à gauche en a	(C_f) admet une demi-tangente horizontale au point $A(a;f(a))$			$\begin{cases} y = f(a) \\ x \le a \end{cases}$
	$\mp\infty$	f n'est pas dérivable à gauche en a	(C_f) admet une demi-tangente verticale au point $A(a;f(a))$	$+\infty$ 	$-\infty$ 	$+\infty$ $\begin{cases} x = a \\ y \le f(a) \end{cases}$ $-\infty$ $\begin{cases} x = a \\ y \ge f(a) \end{cases}$

<table>
<tr><td rowspan="3">$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$</td><td>$\ell \in \mathbb{R}^*$</td><td>$f$ est dérivable à droite en a</td><td>(C_f) admet une demi-tangente de coefficient directeur ℓ au point $A(a;f(a))$</td><td>$\ell > 0$
  </td><td>$\ell < 0$
</td><td>$\begin{cases} y = \ell(x-a)+f(a) \\ x \geq a \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>f est dérivable à droite en a</td><td>(C_f) admet une demi-tangente horizontale au point $A(a;f(a))$</td><td>  </td><td>  </td><td>$\begin{cases} y = f(a) \\ x \geq a \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>$\mp\infty$</td><td>f n'est pas dérivable à droite en a</td><td>(C_f) admet une demi-tangente verticale au point $A(a;f(a))$</td><td>$+\infty$
  </td><td>$-\infty$
  </td><td>$+\infty$ $\begin{cases} x = a \\ y \geq f(a) \end{cases}$
$-\infty$ $\begin{cases} x = a \\ y \leq f(a) \end{cases}$</td></tr>
</table>

Exercices

Exercice 1

Étudier (en utilisant la définition) la dérivabilité de f en a dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = x^2 - 3x + 2$ et $a = -1$
2. $f(x) = \dfrac{2-x}{x+3}$ et $a = 0$
3. $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x+2} \; ; x \neq -2 \text{ et } a = -2 \\ f(-2) = -3 \end{cases}$
4. $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} \; ; x \geq 0 \; x \neq 1 \text{ et } a = 1 \\ f(1) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Exercice 2

Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0 et interpréter géométriquement le résultat où : $f(x) = x\sqrt{x}$

Exercice 3

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \sqrt{2-x}$

Étudier la dérivabilité de la fonction f à gauche en 2, puis interpréter géométriquement le résultat.

Exercice 4

Soit f la fonction numérique définie par : $\begin{cases} f(x) = x^2 - 3x - 1 \; ; x < 0 \\ f(x) = x\sqrt{x} + x - 1 \; ; x \geq 0 \end{cases}$

1. Étudier la continuité de la fonction f en 0.
2. Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en -1 et interpréter géométriquement le résultat.

Exercice 5

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = -x + 1 + \dfrac{\sqrt{x+1}}{x-2}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Étudier la continuité de la fonction f sur D_f.
3. Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en -1, et interpréter géométriquement le résultat.

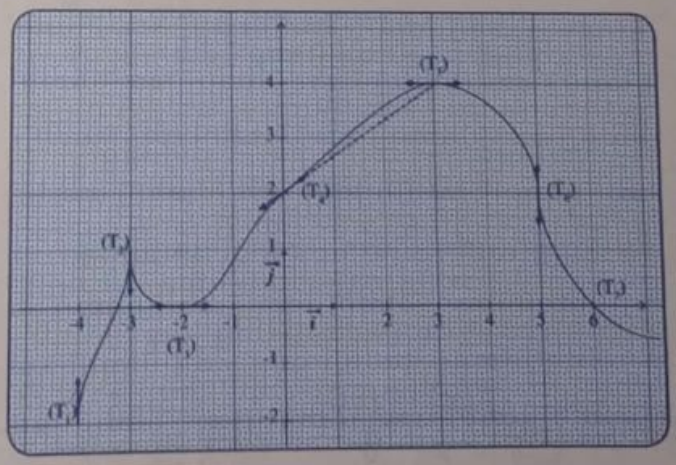
Exercice 6

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f
2. Étudier la continuité de la fonction f sur D_f.
3. Étudier la dérivabilité de f à gauche en -4, et interpréter géométriquement le résultat.
4. Étudier la dérivabilité de f à droite en 0, et interpréter géométriquement le résultat.

Exercice 7

La figure ci-contre représente la courbe de la fonction f à partir de cette courbe:



1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer $f'(-2)$ et $f'(0)$ et $f'(3)$.
3. Déterminer l'équation de chacune des tangentes suivantes: (T_3); (T_4) et (T_5).
4. Est-ce que f est dérivable en -3 ? en 5 ? à droite en -4 ?
5. Déterminer les limites suivantes:
   a. $\lim\limits_{x \to -3^-} \dfrac{f(x)-1}{x+3}$ et $\lim\limits_{x \to -3^+} \dfrac{f(x)-1}{x+3}$
   b. $\lim\limits_{x \to 5^-} \dfrac{f(x)-2}{x-5}$ et $\lim\limits_{x \to 5^+} \dfrac{f(x)-2}{x-5}$

Exercice 1

1 Étudions la dérivabilité de la fonction f en -1; où : $f(x)=x^2-3x+2$

on a : $f(-1)=6$

soit $x \neq -1$; on a : $$\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \frac{x^2-3x+2-6}{x+1} = \frac{x^2-3x-4}{x+1} = \frac{(x+1)(x-4)}{x+1} = x-4$$

donc : $\lim\limits_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1} x-4 = -5$

D'où f est dérivable en -1 et $f'(-1)=-5$

2 Étudions la dérivabilité de la fonction f en zéro; où : $f(x)=\frac{2-x}{x+3}$

On a : $f(0)=\frac{2}{3}$

Soit $x\neq 0$ et $x\neq -3$; on a : $$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{2-x}{x+3}-\frac{2}{3}}{x} = \frac{\frac{3(2-x)-2(x+3)}{3(3+3)}}{x} = \frac{-5x}{3x(x+3)} = \frac{-5}{3x+9}$$

donc : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{-5}{3x+9} = -\frac{5}{9}$

D'où : f est dérivable en 0 et $f'(0)=-\frac{5}{9}$.

3 Étudions la dérivbilité de la fonction f en -2:

où : $\begin{cases} f(x)=\frac{x^2+x-2}{x+2} \; ; x\neq -2 \\ f(-2)=-3 \end{cases}$

soit $x \neq -2$; on a : $\dfrac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)} = \dfrac{\dfrac{x^2+x-2}{x+2}+3}{x+2}$

$$= \frac{\dfrac{x^2+x-2+3x+6}{x+2}}{x+2}$$

$$= \frac{\dfrac{x^2+x-2+3x+6}{x+2}}{x+2}$$

$$= \frac{x^2+4x+4}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{(x+2)^2}{(x+2)^2} = 1$$

donc : $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)} = \lim\limits_{x\to -2} 1 = 1$ et $1 \in \mathbb{R}$

D'où : f est dérivable en -2, et $f'(-2) = 1$.

4 Étudions la dérivabilité de la fonction f en 1:

où : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} \\ f(1) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$; $x \geq 0$ et $x \neq 1$

Soit $x \geqslant 0$ et $x \neq 1$, on a : $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

$$= \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

D'où : $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{1}{2}}{x-1}$

$$= \frac{\dfrac{2-\sqrt{x}-1}{2(\sqrt{x}+1)}}{x-1}$$

$$= \frac{1-\sqrt{x}}{2(x-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \frac{-(\sqrt{x}-1)}{2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \frac{-1}{2(\sqrt{x}+1)^2}$$

Donc : $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-1}{2(\sqrt{x}+1)^2} = -\dfrac{1}{8}$

Par suite f est dérivable en 1, et $f'(1) = -\frac{1}{8}$.

Exercice 2

On a : $x \geq 0 ; f(x) = x\sqrt{x}$ et $f(0) = 0$

Soit $x > 0$, on a : $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x\sqrt{x}}{x}$

$= \sqrt{x}$

D'où : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$ et $0 \in \mathbb{R}$

donc f est dérivable à droite en 0.

et $f'_d(0) = 0$

Interprétation géométrique :

La courbe de la fonction f admet une demi-tangente horizontale au point $O(0;0)$.

Exercice 3

On a : $f(x) = \sqrt{2-x}$; $x \leq 2$ et $f(2) = 0$

Soit $x < 2$, on a : $\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{\sqrt{2-x}-0}{x-2} = \frac{\sqrt{2-x}}{-(2-x)}$

$= -\frac{1}{\sqrt{2-x}}$

Donc : $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} \frac{-1}{\sqrt{2-x}} = -\infty$

D'où f n'est pas dérivable à gauche de 2.

Infos:

$A > 0 ; \frac{\sqrt{A}}{A} = \frac{\sqrt{A}}{(\sqrt{A})^2} = \frac{1}{\sqrt{A}}$

Interprétation géométrique :

La courbe de f admet une demi-tangente verticale (parallèle à l'axe des ordonnées) au point $A(2;0)$ dirigée vers le haut.

Exercice 4

1 Étudions la continuité de la fonction f en zéro.

On a : $f(0) = -1$ (On remplace dans la deuxième expression où $x \geq 0$).

et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} x^2 - 3x - 1 = -1 = f(0)$

et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} (x\sqrt{x}+x-1) = -1 = f(0)$

Donc f est continue à droite et à gauche de 0, d'où f est continue en 0.

2 Étudions la dérivabilité de la fonction f en 0:

On a : $f(0) = 1$

Étudions la dérivabilité de f à gauche en 0.

Soit : $x < 0$, on a : $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{x^2-3x-1+1}{x}$

$$= \frac{x^2-3x}{x}$$

$$= x-3$$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} x-3 = -3$

D'où f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = -3$

Étudions la dérivabilité f à droite en 0:

Soit $x > 0$, on a : $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{x\sqrt{x}+x-1+1}{x}$

$$= \frac{x\sqrt{x}+x}{x}$$

$$= \sqrt{x}+1$$

donc : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}+1 = 1$

d'où f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 1$.

Puisque : $f'_g(0) \neq f'_d(0)$ alors f n'est pas dérivable en 0.

Interprétation géométrique:

La courbe de f admet deux demi-tangentes au point $A(0;-1)$, l'un est (T_1), de coefficient directeur -3, l'autre est (T_2) de coefficient directeur 1.

(Le point $A(0:-1)$ est un point anguleux de (C_f)).

On peut donner si c'est demandé les équations de (T_1) et (T_2) :

(T_1): $\begin{cases} y = -3x \\ x \leq 0 \end{cases}$

(T_2): $\begin{cases} y = x \\ x \geq 0 \end{cases}$

infos:

L'équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse a est :

$y = f'(a)(x-a)+f(a)$

Exercice 5

1 Déterminons l'ensemble de définition de la fonction f

Soit x de $\mathbb{R}$,

on a : $x \in D_f \iff x+1 \geq 0$ et $x-2 \neq 0$

$\iff x \geq -1$ et $x \neq 2$

$\iff x \in ([-1;+\infty[-\{2\})$

Donc : $D_f = [-1;2[\cup]2;+\infty[$

2 Étudions la continuité de f sur D_f :

On a :

- La fonction : $u : x \longmapsto -x+1$ est continue sur $\mathbb{R}$ (fonction affine), et en particulier sur chacun des intervalles $I=[-1;2[$ et $J=]2;+\infty[$.
- La fonction $v : x \longmapsto x-2$ est continue sur $\mathbb{R}$ (fonction affine), et en particulier sur I et J et ne s'annule ni sur I ni sur J.
- La focntion : $x \longmapsto x+1$ est continue et positive sur les intervalles I et J, donc la fonction : $w : x \longmapsto \sqrt{x+1}$ est continue sur I et J.

Par suite la fonction : $f = u + \frac{w}{v}$ est continue sur $[-1;2[$ et $]2;+\infty[$.

3 Étudions la dérivabilité de la fonction f à droite en -1 :

On a : $f(-1)=2$

soit $x \in D_f - \{-1\}$, on a :

$$\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \frac{-x+1+\frac{\sqrt{x+1}}{x-2}-2}{x+1}$$

$$= \frac{-x-1+\frac{\sqrt{x+1}}{x-2}}{x+1}$$

$$= \frac{-(x+1)}{x+1} + \frac{\sqrt{x+1}}{(x+1)(x-2)} = -1 + \frac{1}{(x-2)\sqrt{x+1}}$$

donc : $\lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ x>-1}} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ x>-1}} \left(-1+\frac{1}{(x-2)\sqrt{x+1}}\right) = -\infty$

D'où f n'est pas dérivable à droite en -1.

Interprétation géométrique :

On a : $\lim\limits_{x\to -1^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = -\infty$

Donc la courbe de f admet une demi-tangente verticale (parallèle à l'axe des ordonnées) au point $A(-1;2)$ dirigée vers le bas.

Exercice 6

1 Déterminons l'ensemble de définition de la fonction f :

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $x \in D_f \iff x^2+4x \geq 0$

$\iff x(x+4) \geq 0$

$\iff x \leq -4$ ou $x \geq 0$

x	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
x^2+4x		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $D_f =]-\infty ; -4] \cup [0; +\infty[$

2 Étudions la continuité de f sur $I =]-\infty; -4]$ et $J = [0; +\infty[$:

- La fonction : $u : x \longmapsto x+1$ est continue sur IR (fonction affine), et en particulier sur les deux intervalles I et J.
- La fonction : $x \longmapsto x^2+4x$ est continue et positive sur I et J, donc la fonction : $x \longmapsto \sqrt{x^2+4x}$ est continue sur I et J.

Par suite, la fonction: $f = u+v$ est continue sur I et J, donc f est continue sur D_f.

3 Étudions la dérivabilité de f à gauche en -4:

On a : $f(-4) = -3$, et soit $x < -4$;

$$\text{on a : } \frac{f(x)-f(-4)}{x-(-4)} = \frac{x+1+\sqrt{x^2+4x}+3}{x+4}$$

$$= 1+\frac{\sqrt{x(x+4)}}{x+4}$$

$$= 1+\frac{x(x+4)}{(x+4)\sqrt{x(x+4)}}$$

$$= 1+\frac{x}{\sqrt{x(x+4)}}$$

$$\text{on a : } \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\longrightarrow -4 \\ x<-4}} x = -4 \\ \lim\limits_{\substack{x\longrightarrow -4 \\ x<-4}} \sqrt{x(x+4)} = 0^+ \end{cases} \Rightarrow \lim_{\substack{x\longrightarrow -4 \\ x<-4}} \frac{x}{\sqrt{x(x+4)}} = -\infty$$

$$\text{donc : } \lim_{\substack{x\longrightarrow -4 \\ x<-4}} \frac{f(x)-f(-4)}{x+4} = -\infty$$

D'où f n'est pas dérivable à gauche en -4.

Interprétation géométrique:

On a : $\lim\limits_{x\to -4^-}\dfrac{f(x)-f(-4)}{x+4}=-\infty$

Donc la courbe de f admet une demi-tangente verticale (parallèle à l'axe des ordonnées) au point $A(-4;-3)$ dirigée vers le haut.

4 Étudions la dérivabilité de f à droite en 0:

On a : $f(0)=1$, et soit $x>0$; $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{x+1+\sqrt{x^2+4x}-1}{x}$

$$=1+\frac{\sqrt{x^2+4x}}{x}$$

$$=1+\frac{x(x+4)}{x\sqrt{x(x+4)}}$$

$$=1+\frac{x+4}{\sqrt{x(x+4)}}$$

on a : $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}x+4=4\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\sqrt{x(x+4)}=0^+\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x+4}{\sqrt{x(x+4)}}=+\infty$

donc : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=+\infty$

d'où f n'est pas dérivable à droite en 0.

Interprétation géométrique:

on a : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=+\infty$

Donc la courbe de f admet une demi-tangente verticale (parallèle à l'axe des ordonnées) au point $B(0;1)$ dirigée vers le haut.

Exercice 7

1 L'ensemble de définition de la fonction f est : $Df=[-4;+\infty[$

2 On a : ▸ $f'(-2)=0$ (tangente horizontale)

▸ $f'(0)=\dfrac{2}{3}$

▸ $f'(3)=0$ (tangente horizontale)

3 L'équation de (T_3) :

On a : (T_3): $y=f'(-2)(x+2)+f(-2)$

et puisque : $f(-2)=0$ et $f'(-2)=0$

Alors : $(T_3): y = 0$

- Equation de (T_4) :

on a : $(T_4): y = f'(0)(x-0) + f(0)$

puisque : $f(0) = 2$ et $f'(0) = \frac{2}{3}$; alors : $(T_4): y = \frac{2}{3}x + 2$

- Equation de (T_5) :

on a : $f'(3) = 0$ et $f(3) = 4$; donc : $(T_5): y = 4$

4 f n'est pas dérivable en -3, car la courbe de f admet au point d'abscisse -3 une demi-tangente verticale.

- f n'est pas dérivable en 5, car la courbe de f admet au point d'abscisse 5 une demi-tangente verticale.

- f n'est pas dérivable à droite de -4, car la courbe de f admet au point d'abscisse -4 une demi-tangente verticale.

5 a. Calculons : $\lim\limits_{x \to -3^-} \frac{f(x) - f(-3)}{x+3}$

Puisque (Cf) admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse -3 ,

alors : $\lim\limits_{x \to -3^-} \frac{f(x) - f(-3)}{x+3} = \infty$

Pour connaître le signe ($+\infty$ ou $-\infty$) on a deux façons:

Méthode 1:

On a : f est croissante sur $[-4, -3]$.

Donc : $x < -3 \Rightarrow f(x) < f(-3)$

$\Rightarrow f(x) - f(-3) < 0$ et $x + 3 < 0$

$\Rightarrow \frac{f(x) - f(-3)}{x+3} > 0$

Donc : $\lim\limits_{x \to -3^-} \frac{f(x) - f(-3)}{x+3} = -\infty$

Méthode 2:

On a : $x \longrightarrow -3^-$ (à gauche)

On a la demi-tangente est dirigée vers le bas.

Donc : $\lim\limits_{x \to -3^-} \frac{f(x) - f(-3)}{x+3} = +\infty$

- $\lim\limits_{x \to -3^+} \frac{f(x) - 1}{x+3} = \lim\limits_{x \to -3^+} \frac{f(x) - f(-3)}{x - (-3)} = -\infty$

b. **Calculons** $\lim\limits_{x\to 5^-}\dfrac{f(x)-2}{x-5}$

- $\lim\limits_{x\to 5^-}\dfrac{f(x)-2}{x-5}=\lim\limits_{x\to 5^-}\dfrac{f(x)-f(5)}{x-5}=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{f(x)-2}{x-5}=\lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{f(x)-f(5)}{x-5}=+\infty$

4 Opérations sur les fonctions dérivées

1. Fonctions dérivées de fonctions usuelles : Rappel

Fonction f	Fonction f'	f est dérivable sur l'intervalle
$x\mapsto a;(a\in IR)$	$x\mapsto 0$	$]-\infty;+\infty[$
$x\mapsto x$	$x\mapsto 1$	$]-\infty;+\infty[$
$x\mapsto x^n;n\in \mathbb{N}^*-\{1\}$	$x\mapsto nx^{n-1}$	$]-\infty;+\infty[$
$x\mapsto \dfrac{1}{x}$	$x\mapsto -\dfrac{1}{x^2}$	$]0;+\infty[$ et $]-\infty;0[$
$x\mapsto \sqrt{x}$	$x\mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$x\mapsto \sin x$	$x\mapsto \cos x$	$]-\infty;+\infty[$
$x\mapsto \cos x$	$x\mapsto -\sin x$	$]-\infty;+\infty[$
$x\mapsto \tan x$	$x\mapsto 1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi\,;\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[;k\in\mathbb{Z}$
$x\mapsto \sin(ax+b)$	$x\mapsto a\cos(ax+b)$	$]-\infty;+\infty[$
$x\mapsto \cos(ax+b)$	$x\mapsto -a\sin(ax+b)$	$]-\infty;+\infty[$

2. Opérations sur les fonctions dérivées : Rappel

Propriétés:

- Si f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k un nombre réel, alors: $f+g$ et kf et $f\times g$ sont dérivables sur l'intervalle I, et on a:

$(f+g)'=f'+g'$ $(f-g)'=f'-g'$	$(kf)'=kf'$	$(fg)'=f'g+fg'$

- Si f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I et g ne s'annule pas sur l'intervalle I (c'est-à-dire $(\forall x\in I);g(x)\neq 0$) alors les fonctions $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont dérivables sur l'intervalle I,

on a :

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$	$\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$

5 Dérivée de la composée de deux fonctions

Propriétés:

Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur les intervalles I et J, tels que : $f(I) \subset J$, et x_0 un élément de I.

- Si la fonction f est dérivable en x_0, et g est dérivable en $f(x_0)$, alors la fonction gof est dérivable en x_0.

et on a : $(gof)'(x_0) = g'(f(x_0)) \times f'(x_0)$.

- Si la fonction f est dérivable sur l'intervalle I et g est dérivable sur l'intervalle J, alors la fonction gof est dérivable sur I,

et on a : $(\forall x \in I)\ ;\ (gof)'(x) = (g'of)(x) \times f'(x)$

Conséquences:

- Si la fonction f est dérivable sur l'intervalle I, alors la fonction f^n est dérivable sur I et on a : $(f^n)' = n\, f'\, f^{n-1}$; pour $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$.
- Si la fonction f est dérivable et strictement positive sur l'intervalle I, alors la fonction $\sqrt{f}$ est dérivable sur I et on a : $(\sqrt{f})' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$

6 Dérivée de la fonction réciproque

Propriété 1:

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et f une fonction continue et strictement monotone sur I, et x_0 un élément de I.

- Si la fonction f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) \neq 0$, alors la fonction f^{-1} est dérivable en $f(x_0)$.

et on a : $(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$

- Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I, telle que sa fonction dérivée ne s'annule pas sur I (c'est-à-dire : $(\forall x \in I); f'(x) \neq 0$)

alors la fonction f^{-1} est dérivable sur l'intervalle $f(I)$,

et on a : $(\forall y \in f(I)); \quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}_{(y)})}$.

Dérivée de la fonction : $x \mapsto \sqrt[n]{x}$

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. La fonction $u: x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

et on a : $(\forall x \in]0; +\infty[) \quad ; u'(x) = \dfrac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \dfrac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$

Propriété 2:

Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$, alors la fonction : $g: x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ est dérivable sur I, et on a :

$$(\forall x \in I); g'(x) = \frac{u'(x)}{n(\sqrt[n]{u(x)})^{n-1}} = \frac{1}{n}.u'(x).(u(x))^{\frac{1}{n}-1}$$

Exercices

Remarque : De l'exercice 8 à l'exercice 16, la recherche de l'ensemble de définition D_f de la fonction dérivée $D_{f'}$ n'est pas demandée.

Exercice 8

Calculer $f'(x)$ dans chacun des cas suivants:

1. $f(x) = 3x - 7$
2. $f(x) = x + \sqrt{2}$
3. $f(x) = \dfrac{5x-2}{3}$
4. $f(x) = x^2 - 3x - 2$
5. $f(x) = -5x^3 + 7x^2 - 6x + 3$
6. $f(x) = -x^{2014} + x^{2015} - 1$
7. $f(x) = (1-\sqrt{2})x^5 - \sqrt{3}x^7 + \dfrac{3}{2}x^6 - \dfrac{5}{3}x^3 + x^2 - \pi$

Exercice 9

Calculer $f'(x)$ dans chacun des cas suivants:

1. $f(x) = x^3 + \sqrt{x}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x} - 4x^7$
3. $f(x) = \cos x + x^2$
4. $f(x) = \sin x - 3x^4$
5. $f(x) = \cos x - \sin x$

Exercice 10

Calculer $f'(x)$ dans chacun des cas suivants:

1. $f(x) = -\dfrac{7}{x}$
2. $f(x) = x\sqrt{x}$
3. $f(x) = x \sin x$
4. $f(x) = (3x^2 - 5x + 1)\sqrt{x}$
5. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

Exercice 11

Calculer $f'(x)$ dans chacun des cas suivants:

1. $f(x)=\frac{1}{x^2}$
2. $f(x)=\frac{1}{x^5}$
3. $f(x)=\frac{1}{x^n}$; $n\in\mathbb{N}^*$
4. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$
5. $f(x)=\frac{1}{\cos x}$
6. $f(x)=\frac{1}{\sin x}$
7. $f(x)=\frac{1}{x^3-5x^2+x-3}$
8. $f(x)=\frac{-7}{x^2+1}$
9. $f(x)=\frac{\sqrt{3}}{x^4}$
10. $f(x)=\frac{1-\sqrt{2}}{x^4+\sqrt{x}}$

Exercice 12

Calculer $f'(x)$ dans chacun des cas suivants:

1. $f(x)=\frac{2x+1}{3-5x}$
2. $f(x)=\frac{7x}{3x+5}$
3. $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x^2+7}$
4. $f(x)=\frac{-3x^2+x-2}{\sqrt{x}+1}$
5. $f(x)=\frac{\sqrt{x}-x}{\cos x+2}$
6. $f(x)=\frac{2\sqrt{x}+3x-1}{x+\sqrt{x}}$
7. $f(x)=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$

Exercice 13

Calculer $f'(x)$ dans chacun des cas suivants:

1. $f(x)=(5x-2)^4$
2. $f(x)=(1-2x)^{2015}$
3. $f(x)=(-3x^2+2x-1)^2$
4. $f(x)=\left(\sqrt{x}-\frac{3}{x}\right)^3$
5. $f(x)=\frac{1}{(x^2+x+1)^3}$
6. $f(x)=\sin^7 x$

Exercice 14

Calculer $f'(x)$ dans chacun des cas suivants:

1. $f(x)=\sqrt{3x-1}$
2. $f(x)=\sqrt{1-2x}$
3. $f(x)=\sqrt{x^2+3x+5}$
4. $f(x)=\sqrt{\cos x+2}$
5. $f(x)=\sqrt{\frac{2x-1}{3x+5}}$
6. $f(x)=\sqrt{\frac{x^2+3x-1}{2-x}}$

Exercice 15

Calculer $f'(x)$ dans chacun des cas suivants:

1. $f(x) = \tan\left(\frac{1}{x}\right)$
2. $f(x) = \cos(x^2+1)$
3. $f(x) = \sin(\sqrt{x^2+1})$
4. $f(x) = \sqrt{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}$

Exercice 16

Calculer $f'(x)$ dans chacun des cas suivants:

1. $f(x) = \sqrt{\sqrt{1+x^2}}$
2. $f(x) = \sqrt[3]{x^2+x+1}$
3. $f(x) = x\sqrt[3]{x} + x^3\sqrt{x} \quad (x>0)$

Exercice 17

Calculer $f'(x)$ dans chacun des cas suivants:

1. $f(x) = \cos(x^2+x+1)$
2. $f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{x}\right)$
3. $f(x) = \sin(\sqrt{x^2+3})$

Solutions

Exercice 8

1. On a : $f(x) = 3x - 7$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; f'(x) = 3$

2. On a : $f(x) = x + \sqrt{2}$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; f'(x) = 1$

3. On a : $f(x) = \frac{5x-2}{3} = \frac{5}{3}x - \frac{2}{3}$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; f'(x) = \frac{5}{3}$

4. On a : $f(x) = x^2 - 3x - 2$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; f'(x) = 2x - 3$

5. On a : $f(x) = -5x^3 + 7x^2 - 6x + 3$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; f'(x) = -15x^2 + 14x - 6$

infos:

Dans le cas général:
$(ax+b)' = a$

6 On a : $f(x) = -x^{2014} + x^{2015} - 1$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = -2014x^{2013} + 2015x^{2014}$

7 On a : $f(x) = (1-\sqrt{2})x^5 - \sqrt{3}x^7 + \frac{3}{2}x^6 - \frac{5}{3}x^3 + x^2 - \pi$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = 5(1-\sqrt{2})x^4 - 7\sqrt{3}x^6 + 9x^5 - 5x^2 + 2x$

Exercice 9

1 On a : $f(x) = x^3 + \sqrt{x}$

infos: $x > 0 ; (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Donc: $(\forall x \in]0; +\infty[) ; f'(x) = 3x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}} = 3x^2 + \frac{\sqrt{x}}{2x}$

2 On a : $f(x) = \frac{1}{x} - 4x^7$

infos: $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

Donc: $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; f'(x) = -\frac{1}{x^2} - 28x^6$

3 On a : $f(x) = \cos x + x^2$

Donc: $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = -\sin x + 2x$

4 On a : $f(x) = \sin x - 3x^4$

infos:
- $\cos'(x) = -\sin x$
- $\sin'(x) = \cos x$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = \cos x - 12x^3$

5 On a : $f(x) = \cos x - \sin x$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = -\sin x - \cos x$

Exercice 10

1 On a : $f(x) = -\frac{7}{x}$

Donc : $f'(x) = -7 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$f'(x) = \frac{7}{x^2}$

2 On a : $f(x) = x\sqrt{x}$

Donc : $f'(x) = x'\sqrt{x} + x(\sqrt{x})'$

$= 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$= \sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x}$

$= \frac{3}{2}\sqrt{x}$

3 On a : $f(x) = x\sin x$

Donc : $f'(x) = 1 \times \sin x + x \times \cos x$

$= \sin x + x\cos x$

4 On a : $f(x) = (3x^2 - 5x + 1)\sqrt{x}$

Donc : $f'(x) = (6x - 5)\sqrt{x} + (3x^2 - 5x + 1) \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$= (6x - 5)\sqrt{x} + \dfrac{(3x^2 - 5x + 1)\sqrt{x}}{2x}$

$= \left(\dfrac{12x^2 - 10x}{2x} + \dfrac{3x^2 - 5x + 1}{2x}\right)\sqrt{x}$

$= \left(\dfrac{15x^2 - 15x + 1}{2x}\right)\sqrt{x}$

5 On a : $f(x) = \dfrac{\sin x}{x} = \sin x \times \dfrac{1}{x}$

Donc : $f'(x) = (\cos x)\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}\sin x$

$= \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$

Exercice 11

1 On a : $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

Donc : $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2)^2} = \dfrac{-2x}{x^4} = \dfrac{-2}{x^3}$

2 On a : $f(x) = \dfrac{1}{x^5}$

Donc : $f'(x) = \dfrac{-5x^4}{x^{10}}$

$f'(x) = \dfrac{-5}{x^6}$

3 On a : $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$; $n \in \mathbb{N}^*$

Donc : $f'(x) = \dfrac{-nx^{n-1}}{(x^n)^2}$

$f'(x) = \dfrac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = \dfrac{-n}{x^{n+1}}$

4 On a : $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Donc : $f'(x) = \dfrac{-\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(\sqrt{x})^2}$

$$f'(x) = \frac{-1}{2x\sqrt{x}}$$
$$= \frac{-\sqrt{x}}{2x^2}$$

5 On a : $f(x) = \frac{1}{\cos x}$

Donc : $f'(x) = \frac{-(-\sin x)}{\cos^2 x}$
$$= \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

6 On a : $f(x) = \frac{1}{\sin x}$

Donc : $f'(x) = \frac{-\cos x}{\sin^2 x}$

7 On a : $f(x) = \frac{1}{x^3 - 5x^2 + x - 3}$

Donc : $f'(x) = \frac{-(3x^2 - 10x + 1)}{(x^3 - 5x^2 + x - 3)^2}$

8 On a : $f(x) = \frac{-7}{x^2 + 1}$

Donc : $f'(x) = \frac{-7(-2x)}{(x^2 + 1)^2}$
$$= \frac{14x}{(x^2 + 1)^2}$$

9 On a : $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{x^4}$

Donc : $f'(x) = \frac{\sqrt{3}(-4x^3)}{x^8} = \frac{-4\sqrt{3}}{x^5}$

10 On a : $f(x) = \frac{1 - \sqrt{2}}{x^4 + \sqrt{x}}$

Donc : $f'(x) = \frac{-(1 - \sqrt{2})\left(4x^3 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(x^4 + \sqrt{x})^2}$
$$= \frac{-(1 - \sqrt{2})(8x^3\sqrt{x} + 1)}{2\sqrt{x}\,(x^4 + \sqrt{x})^2}$$

Exercice 12

1 On a : $f(x) = \dfrac{2x+1}{3-5x}$

Donc : $f'(x) = \dfrac{2(3-5x)-(2x+1)(-5)}{(3-5x)^2}$

$= \dfrac{6-10x+10x+5}{(3-5x)^2}$

$= \dfrac{11}{(3-5x)^2}$

2 On a : $f(x) = \dfrac{7x}{3x+5}$

Donc : $f'(x) = \dfrac{7(3x+5)-7x(3)}{(3x+5)^2}$

$= \dfrac{21x+35-21x}{(3x+5)^2}$

$= \dfrac{35}{(3x+5)^2}$

3 On a : $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2+7}$

Donc : $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2+7)-\sqrt{x}(2x)}{(x^2+7)^2}$

$= \dfrac{x^2+7-2x(2x)}{2\sqrt{x}(x^2+7)^2}$

$= \dfrac{-3x^2+7}{2\sqrt{x}(x^2+7)^2}$

4 On a : $f(x) = \dfrac{-3x^2+x-2}{\sqrt{x}+1}$

Donc : $f'(x) = \dfrac{(-6x+1)(\sqrt{x}+1)-(-3x^2+x-2)\times\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+1)^2}$

$= \dfrac{2\sqrt{x}(-6x\sqrt{x}-6x+\sqrt{x}+1)+3x^2-x+2}{(\sqrt{x}+1)^2}$

$= \dfrac{-12x^2-12x\sqrt{x}+2x+2\sqrt{x}+3x^2-x+2}{(\sqrt{x}+1)^2}$

$= \dfrac{-9x^2-12x\sqrt{x}+2\sqrt{x}+x+2}{(\sqrt{x}+1)^2}$

5 On a : $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-x}{\cos x+2}$

Donc : $f'(x)=\dfrac{\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-1\right)(\cos x+2)-(\sqrt{x}-x)\times(-\sin x)}{(\cos x+2)^2}$

$=\dfrac{(1-2\sqrt{x})(\cos x+2)+2\sqrt{x}(\sqrt{x}-x)\sin x}{2\sqrt{x}(\cos x+2)^2}$

6 On a : $f(x)=\dfrac{2\sqrt{x}+3x-1}{x+\sqrt{x}}$

Donc :

$f'(x)=\dfrac{\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}+3\right)(x+\sqrt{x})-(2\sqrt{x}+3x-1)\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(x+\sqrt{x})^2}$

$=\dfrac{(2+6\sqrt{x})(x+\sqrt{x})-(2\sqrt{x}+3x-1)(2\sqrt{x}+1)}{2\sqrt{x}(x+\sqrt{x})^2}$

$=\dfrac{2x+2\sqrt{x}+6x\sqrt{x}+6x-4x-2\sqrt{x}-6x\sqrt{x}-3x+2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}(x+\sqrt{x})^2}$

$=\dfrac{x+2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}(x+\sqrt{x})^2}$

Exercice 13

1 On a : $f(x)=(5x-2)^4$

Donc : $f'(x)=4(5x-2)^3\times 5=20(5x-2)^3$

infos:

$(u^r)'=ru^{r-1}\times u'$

où $r\in\mathbb{Q}$

2 On a : $f(x)=(1-2x)^{2015}$

Donc : $f'(x)=2015(1-2x)^{2014}(-2)$

$=-4030(1-2x)^{2014}$

3 On a : $f(x)=(-3x^2+2x-1)^2$

Donc : $f'(x)=2(-3x^2+2x-1)\times(-6x+2)$

$=(-12x+4)(-3x^2+2x-1)$

4 On a : $f(x)=\left(\sqrt{x}-\dfrac{3}{x}\right)^3$

Donc : $f'(x)=3\left(\sqrt{x}-\dfrac{3}{x}\right)^2\times\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{3}{x^2}\right)$

5 On a : $f(x)=\dfrac{1}{(x^2+x+1)^3}=(x^2+x+1)^{-3}$

Donc : $f'(x)=-3(x^2+x-1)^{-4}\times(2x+1)$

$=\dfrac{-6x-3}{(x^2+x+1)^4}$

6 On a : $f(x)=\sin^7 x$

Donc : $f'(x)=7\sin^6 x\cos x$

Exercice 14

1 On a : $f(x)=\sqrt{3x-1}$

Donc : $f'(x)=\dfrac{3}{2\sqrt{3x-1}}$

infos: $(\sqrt{ax+b})'=\dfrac{a}{2\sqrt{ax+b}}$

2 On a : $f(x)=\sqrt{1-2x}$

Donc : $f'(x)=\dfrac{-2}{2\sqrt{1-2x}}=\dfrac{-1}{\sqrt{1-2x}}$

3 On a : $f(x)=\sqrt{x^2+3x+5}$

Donc: $f'(x)=\dfrac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x+5}}$

infos: $(\sqrt{u})'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

4 On a : $f(x)=\sqrt{\cos x+2}$

Donc : $f'(x)=\dfrac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x+2}}$

5 On a : $f(x)=\sqrt{\dfrac{2x-1}{3x+5}}$

Donc : $f'(x)=\dfrac{\left(\dfrac{2x-1}{3x+5}\right)'}{2\sqrt{\dfrac{2x-1}{3x+5}}}$

puisque : $\left(\dfrac{2x-1}{3x+5}\right)'=\dfrac{2(3x+5)-3(2x-1)}{(3x+5)^2}=\dfrac{13}{(3x+5)^2}$

Autre méthode : $\left(\dfrac{2x-1}{3x+5}\right)'=\dfrac{\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 5\end{vmatrix}}{(3x+5)^2}=\dfrac{13}{(3x+5)^2}$

Alors : $f'(x)=\dfrac{13}{2(3x+5)^2\sqrt{\dfrac{2x-1}{3x+5}}}$

6 On a : $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2+3x-1}{2-x}}$

On pose : $u(x)=\dfrac{x^2+3x-1}{2-x}$

On a : $f(x)=\sqrt{u(x)}$

Donc : $f'(x)=\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

d'où : $u'(x)=\dfrac{(2x+3)(2-x)-(x^2+3x-1)(-1)}{(2-x)^2}$

$=\dfrac{4x-2x^2+6-3x+x^2+3x-1}{(2-x)^2}$

$=\dfrac{-x^2+4x+5}{(2-x)^2}$

D'où : $f'(x)=\dfrac{-x^2+4x+5}{2(2-x)^2\sqrt{\dfrac{x^2+3x-1}{2-x}}}$

Exercice 15

1 Déterminons $f'(x)$ pour tout x de I :

On a : $f(x)=\tan(u(x))$ où: $(\forall x\in I)\ ; u(x)=\dfrac{1}{x}$

Donc : $f'(x)=tan'(u(x)).u'(x)$

$=(1+\tan^2(u(x)))\times u'(x)$

infos: $(uov)'(x)=u'(v(x))\times v'(x)$

puisque : $u(x)=\dfrac{1}{x}$ et $u'(x)=\dfrac{-1}{x^2}$

alors : $f'(x)=\left(1+\tan^2\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)\times\dfrac{-1}{x^2}$,

donc : $(\forall x\in I)\ ;\ f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}\left(1+\tan^2\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$

2 Déterminons $f'(x)$ pour tout x de I :

Soit x de I, on a : $f(x)=\cos(u(x))$, avec : $u(x)=x^2+1$

et on a : $u'(x)=2x$

Donc : $f'(x)=cos'(u(x)).u'(x)$

$=-\sin(u(x)).u'(x)$

$=-\sin(x^2+1)2x$

$=-2x\sin(x^2+1)$

3 **Déterminons $f'(x)$ pour tout x de I :**

Soit x de I, on a : $f(x) = \sin\sqrt{x^2+1}$

$= \sin(u(x))$

avec : $u(x) = \sqrt{x^2+1}$, on a : $u'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

D'où : $f'(x) = \sin'(u(x)).u'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\cos(\sqrt{x^2+1})$

4 **Déterminons $f'(x)$ pour tout x de I :**

$(\forall x \in I)\ ; f'(x) = \left(\sqrt{\tan\frac{x}{2}}\right)'$

$= \dfrac{\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)'}{2\sqrt{\tan\frac{x}{2}}}$

et on a : $\left(\tan\frac{x}{2}\right)' = (\tan u)' = tan'(u(x)) \times u'(x)$

$= (1+\tan^2(u(x))) \times u'(x)$

$= \left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right).\frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)$

D'où : $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)}{2\sqrt{\tan\frac{x}{2}}}$

Exercice 16

Déterminons $f'(x)$ dans chacun des cas suivants :

1 On a : $f(x) = \sqrt{\sqrt{1+x^2}}$:

La fonction: $x \mapsto x^2+1$ est dérivable et positive sur $\mathbb{R}$.

Donc : $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Puisque la fonction: $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Alors la fonction : $x \mapsto \sqrt{\sqrt{x^2+1}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

et on a : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; f'(x) = \left(\sqrt{\sqrt{1+x^2}}\right)' = \dfrac{\left(\sqrt{1+x^2}\right)'}{2\sqrt{\sqrt{1+x^2}}}$

$= \dfrac{\frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{1+x^2}}}{2\sqrt{\sqrt{1+x^2}}} = \dfrac{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{2\sqrt{\sqrt{1+x^2}}}$

$= \dfrac{x}{2\sqrt{x^2+1}\sqrt{\sqrt{x^2+1}}}$

On peut simplifier l'écriture: $f'(x) = \dfrac{x}{2(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\left((x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{x}{2(x^2+1)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}}$

$= \dfrac{x}{2(x^2+1)^{\frac{3}{4}}} = \dfrac{x}{2\sqrt[4]{(x^2+1)^3}}$

2 On a : $f(x) = \sqrt[3]{x^2+x+1}$

La fonction $x \mapsto x^2+x+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et strictement positive sur $\mathbb{R}$.

(Le discriminant $\Delta < 0$ et $a > 0$)

Donc : f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

et on a : $f'(x) = \dfrac{(x^2+x+1)'}{3\sqrt[3]{(x^2+x+1)^2}} = \dfrac{2x+1}{3\sqrt[3]{(x^2+x+1)^2}}$

3 **Déterminons $f'(x)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$:**

Les fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ sont dérivables sur $]0;+\infty[$.

Donc f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on a :

$(\forall x \in]0;+\infty[) ; f'(x) = x'\sqrt[3]{x} + x(\sqrt[3]{x})' + (x^3)'\sqrt{x} + x^3(\sqrt{x})'$

$= \sqrt[3]{x} + x.\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + 3x^2\sqrt{x} + x^3.\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$= \dfrac{3(\sqrt[3]{x})^3 + x}{3\sqrt[3]{x^2}} + \dfrac{2\times 3x^2(\sqrt{x})^2 + x^3}{2\sqrt{x}}$

$= \dfrac{3x+x}{3\sqrt[3]{x^2}} + \dfrac{6x^3+x^3}{2\sqrt{x}}$

$= \dfrac{4x}{3\sqrt[3]{x^2}} + \dfrac{7x^3}{2\sqrt{x}} = \dfrac{4}{3}\dfrac{\sqrt[3]{x^3}}{\sqrt[3]{x^2}} + \dfrac{7}{2}\dfrac{x\sqrt{x^2}}{\sqrt{x}}$

$= \dfrac{4}{3}\sqrt[3]{x} + \dfrac{7}{2}x^2\sqrt{x}$

Autre méthode:

$(\forall x > 0) ; f(x) = x\sqrt[3]{x} + x^3\sqrt{x} = x(x)^{\frac{1}{3}} + x^3(x)^{\frac{1}{2}}$

$= x^{1+\frac{1}{3}} + x^{3+\frac{1}{2}} = x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{7}{2}}$

$f'(x) = \dfrac{4}{3}x^{\frac{4}{3}-1} + \dfrac{7}{2}x^{\frac{7}{2}-1} = \dfrac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} + \dfrac{7}{2}x^{\frac{5}{2}}$

$= \dfrac{4}{3}\sqrt[3]{x} + \dfrac{7}{2}\sqrt{x^5} = \dfrac{4}{3}\sqrt[3]{x} + \dfrac{7}{2}x^2\sqrt{x}$

Exercice 17

Déterminons $f'(x)$ dans chacun des cas suivants:

1 $f(x) = \cos(x^2+x+1)$, on pose : $u(x) = x^2+x+1$

On a : $f(x) = \cos(u(x))$ donc : $f'(x) = \cos'(u(x)).u'(x)$

et on a : $u'(x) = 2x + 1$

D'où : $f'(x) = -(2x+1)\sin(x^2+x+1)$

2 On a : $f(x) = \sin(\sqrt{x^2+3})$

On pose : $u(x) = \sqrt{x^2+3}$, on a : $u'(x) = \dfrac{(x^2+3)'}{2\sqrt{x^2+3}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$

Donc : $f'(x) = \sin'(u(x)) \times u'(x)$

$= \cos(\sqrt{x^2+3}) \times \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$

$= \dfrac{x\cos(\sqrt{x^2+3})}{\sqrt{x^2+3}}$

3 On a : $f(x) = \tan\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$

On pose : $u(x) = \dfrac{\pi}{x}$, donc : $u'(x) = \pi \times \dfrac{-1}{x^2} = \dfrac{-\pi}{x^2}$

D'où : $f'(x) = \tan'(u(x)).u'(x)$

$= (1 + \tan^2(u(x))).u'(x)$

$= \left(1 + \tan^2\left(\dfrac{\pi}{x}\right)\right).\dfrac{-\pi}{x^2}$

$= \dfrac{-\pi}{x^2}\left(1 + \tan^2\left(\dfrac{\pi}{x}\right)\right)$

7 Applications de la fonction dérivée

- Calculer des limites.
- Étudier les variations d'une fonction numérique.
- Prouver des inégalités.

Exercices

Exercice 18

En utilisant la dérivée, calculer les limites suivantes :

1 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{2015} - 1}{x - 1}$

2 $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(2x+1)^{2017} + 1}{x + 1}$

Exercice 19

En utilisant la dérivée, calculer les limites suivantes :

1 $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \dfrac{\sin x - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{6}}$

2 $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{4}} \dfrac{2\cos^2 x - 1}{4x + \pi}$

Exercice 20

Dans chacun des cas suivants :

1 $f(x) = x^2 - 3x + 2$

2 $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 - 1}$

a. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

b. Étudier la dérivabilité de la fonction f, et calculer $f'(x)$.

c. Calculer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition de f.

d. Dresser le tableau de variations de la fonction f .

Exercice 21

Dans chacun des cas suivants :

1 $f(x) = 2x - \sqrt{x}$

2 $f(x) = 3x - 1 - \dfrac{2\sqrt{x+1}}{x}$

a. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

b. Étudier la dérivabilité de la fonction f, et calculer $f'(x)$.

c. Calculer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition de f.

d. Dresser le tableau de variations de la fonction f .

Exercice 22

1 Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); (\forall x \in \mathbb{R}^+)$; $x^n - 1 \geq n(x-1)$

2 Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $1 - \dfrac{x^2}{2} \leq \cos x$

Exercice 23

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \sqrt{x-2} + x + 1$

1 Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

2 Étudier la continuité et la monotonie de la fonction f^{-1} sur J.

3 Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable en 5, et calculer $(f^{-1})'(5)$ (calculer premièrement $f(3)$).

4 Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable sur l'intervalle $]3; +\infty[$.

5 Résoudre dans l'intervalle J l'inéquation : $f^{-1}(2x-7) > f^{-1}(x)$

Exercice 24

En utilisant la dérivée, comparer A et B :

$$A=\frac{(2{,}0123456789)^2+1}{2{,}0123456789} \quad \text{et} \quad B=\frac{(2{,}0123456788)^2+1}{2{,}0123456788}$$

Solutions

Exercice 18

1 **Calculons** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{2015}-1}{x-1}$:

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x)=x^{2015}$

On a : $f(1)=1$ et f est dérivable en 1, car c'est un monôme.

On a : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $f'(x)=2015x^{2014}$

Donc : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{2015}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=2015$

2 **Calculons** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(2x+1)^{2017}+1}{x+1}$:

On pose : $f(x)=(2x+1)^{2017}$; $x\in\mathbb{R}$

La fonction f est dérivable en -1 (car elle est dérivable sur $\mathbb{R}$).

et on a : $f(-1)=(-1)^{2017}=-1$

et : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $f'(x)=2\times 2017(2x+1)^{2016}$

$=4034(2x+1)^{2016}$

Donc : $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(2x+1)^{2017}+1}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=f'(-1)=4034$

Exercice 19

1 **Calculons** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\dfrac{\sin x-\frac{1}{2}}{x-\frac{\pi}{6}}$:

On pose : $f(x)=\sin x$

La fonction sin est dérivable en $\dfrac{\pi}{6}$, car elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a : $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$ et $f'(x)=\cos x$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

Donc : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{\sin x-\frac{1}{2}}{x-\frac{\pi}{6}} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{f(x)-f(\frac{\pi}{6})}{x-\frac{\pi}{6}}$

$= f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$= \cos\frac{\pi}{6}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}$

2 Calculons $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{4}} \dfrac{2\cos^2 x-1}{4x+\pi}$:

On a : $\dfrac{2\cos^2 x-1}{4x+\pi} = \dfrac{1}{4}\dfrac{2\cos^2 x-1}{\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$

On considère la fonction f définie par : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ; f(x) = 2\cos^2 x$

On a : ▸ $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1$

▸ f est dérivable en $-\frac{\pi}{4}$, car elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

▸ $(\forall x\in\mathbb{R})\ ; f'(x) = -4\cos x\sin x = -2\sin(2x)$

D'où : $f'\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -2\sin(-\frac{\pi}{2}) = 2$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{4}} \dfrac{2\cos^2 x-1}{4x+\pi} = \lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{4}} \dfrac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4}\times 2 = \frac{1}{2}$

Exercice 20

1 $f(x) = x^3 - 3x + 2$

a. On a : ▸ $D_f = \mathbb{R}$, car f est une fonction polynôme.

b. ▸ f est dérivable sur $\mathbb{R}$, car c'est une fonction polynôme.

▸ $(\forall x\in\mathbb{R})\ ; f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$

c. **Calculons les limites aux bornes de D_f :**

▸ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

▸ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

Tableau de variations de f : $f(1)=0$ et $f(-1)=4$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

2 $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2-1}$

a. On a : $D_f=\mathbb{R}-\{-1;1\}$

$=]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$

b. ▸ La fonction f est dérivable sur tout intervalle inclus dans D_f, car c'est une fonction rationnelle.

▸ $(\forall x\in D_f)\ ;f'(x)=\dfrac{(2x+1)(x^2-1)-(x^2+x+1)\times 2x}{(x^2-1)^2}$

$=\dfrac{2x^3-2x+x^2-1-2x^3-2x^2-2x}{(x^2-1)^2}$

Donc : $(\forall x\in D_f)\ ;f'(x)=\dfrac{-x^2-4x-1}{(x^2-1)^2}$

c. Calculons les limites aux bornes de D_f :

On a : ▸ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+x+1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}1=1$

et ▸ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$

Le tableau de signes de x^2-1 est le suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-1}x^2+x+1=1\\ \lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}}x^2-1=0^+\\ \lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}}x^2-1=0^-\end{cases}$

Donc : $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}}f(x)=-\infty$

On a : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1} x^2+x+1=3 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} x^2-1=0^- \\ \lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} x^2-1=0^+ \end{cases}$

Donc : $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} f(x)=+\infty$

d. Dressons le tableau de variations de la fonction f :

Le signe de $f'(x)$ est celui du trinôme x^2-4x-1.

car : $(\forall x\in \mathbb{D}_f)$; $(x^2-1)^2>0$

Le discriminant du trinôme $-x^2-4x-1$ est $\Delta=16-4=12$.

ses racines sont : $x_1=\dfrac{4+\sqrt{12}}{-2}=-2-\sqrt{3}$

$$x_2=\frac{4-\sqrt{12}}{-2}=-2+\sqrt{3}$$

D'où le tableau de signes de $-x^2-4x-1$:

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{3}$		$-2+\sqrt{3}$		$+\infty$
$-x^2-4x-1$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Tableau de variations de f :

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{3}$		-1		$-2+\sqrt{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
f	1	↘	$\dfrac{-\sqrt{3}}{2}$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

- $f(-2+\sqrt{3})=\dfrac{(-2+\sqrt{3})^2+(-2+\sqrt{3})+1}{(-2+\sqrt{3})^2-1}$

$$=\frac{4-4\sqrt{3}+3-1+\sqrt{3}}{4-4\sqrt{3}+3-1}=\frac{-3\sqrt{3}+6}{-4\sqrt{3}+6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

- $f(-2-\sqrt{3})=\dfrac{4+4\sqrt{3}+3-1-\sqrt{3}}{6+4\sqrt{3}}=\dfrac{3\sqrt{3}+6}{4\sqrt{3}+6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice 21

1 $f(x) = 2x - \sqrt{x}$

a. On a : $D_f = \mathbb{R}^+ = [0 ; +\infty[$

b. f est dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$, car c'est la somme de deux fonctions dérivables sur cet intervalle qui sont :

$u : x \mapsto 2x$ fonction polynôme (fonction linéaire) dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier $]0 ; +\infty[$.

et $v : x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ (fonction usuelle).

Étudions la dérivabilité de f à droite en 0.

On a : $x > 0$; $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{2x-\sqrt{x}}{x} = 2 - \dfrac{\sqrt{x}}{x}$

$= 2 - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Donc : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \left(2 - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) = -\infty$

D'où f n'est pas dérivable à droite en 0.

- $(\forall x \in]0 ; +\infty[) ; f'(x) = 2 - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{4\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}$

c. **Calculons les limites aux bornes D_f :**

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (2x - \sqrt{x}) = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x}(2\sqrt{x} - 1) = +\infty$
- $f(0) = 0$

d. **Dressons le tableau de variations de f :**

Le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur $4\sqrt{x} - 1$.

car : $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*})$; $2\sqrt{x} > 0$

- $f'(x) = 0 \iff 4\sqrt{x} - 1 = 0$

$\iff \sqrt{x} = \dfrac{1}{4}$

$\iff x = \dfrac{1}{16}$

- $f'(x) > 0 \iff 4\sqrt{x} - 1 > 0$

$\iff \sqrt{x} > \dfrac{1}{4}$

$\iff x > \dfrac{1}{16}$

Le tableau de variations de f :

x	0		$\frac{1}{16}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	0	↘	$-\frac{1}{8}$	↗	$+\infty$

$f(\frac{1}{16}) = 2\times\frac{1}{16} - \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{8}$

2 $f(x) = 3x - 1 - 2\dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$

On a : $x \in D_f \iff x+1 \geq 0$ et $x \neq 0$

$\iff x \geq -1$ et $x \neq 0$

$\iff x \in ([-1;+\infty[- \{0\})$

$D_f = [-1\,;\,0[\cup]0\,;+\infty[$

b. La fonction f est dérivable sur chacun des intervalles $I =]-1;0[$ et $J =]0;+\infty[$, car c'est la somme et quotient de fonctions dérivables sur ces intervalles : $(f = u + \frac{v}{w})$

$u : x \to 3x - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme), et en particulier sur I et J.

$v : x \mapsto -2\sqrt{x+1}$ est dérivable sur I et J.

car la fonction : $x \mapsto x+1$ est dérivable et strictement positive sur I et J.

$w : x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme) et ne s'annule pas sur I et J.

Étudions les dérivabilité de f à droite en -1:

On a : $f(-1) = -4$

Soit $x > -1$

on a : $\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \dfrac{3x-1-\frac{2\sqrt{x+1}}{x}+4}{x+1}$

$= \dfrac{3(x+1)}{x+1} - \dfrac{2\sqrt{x+1}}{x(x+1)}$

$= 3 - \dfrac{2}{x\sqrt{x+1}}$

On a : $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} x\sqrt{x+1}=0^- \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \frac{-2}{x\sqrt{x+1}}=+\infty$

Donc : $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}\left(3-\frac{2}{x\sqrt{x+1}}\right)=+\infty$

D'où f n'est pas dérivable à droite en -1.

$(\forall x\in]-1;0[\cup]0;+\infty[)$; on a : $f'(x)=3-2\left(\frac{\frac{x}{2\sqrt{x+1}}-\sqrt{x+1}}{x^2}\right)$

$$=3-2\frac{\frac{x-2(x+1)}{2\sqrt{x+1}}}{x^2}$$

$$=3-2\left(\frac{-x-2}{2x^2\sqrt{x+1}}\right)$$

$$=3+\frac{x+2}{x^2\sqrt{x+1}}$$

c. Calculons les limites aux bornes de D_f :

- On a : $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(3x-1-2\frac{\sqrt{x+1}}{x})=+\infty$

(car : $\lim\limits_{x\to 0^-} -2\sqrt{x+1}=-2$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} x=0^-$ donc : $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-2\sqrt{x+1}}{x}=+\infty$

et on a : $\lim\limits_{x\to 0}(3x-1)=-1$

- $\lim\limits_{x\to 0^{+-}} f(x)=-\infty$

On a : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} 3x-1=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2\sqrt{x+1}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}-2\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=0\end{cases}$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

d. Tableau de variations de la fonction f :

On a : $f'(x)=3+\frac{x+2}{x^2\sqrt{x+1}}$; $(\forall x\in]-1;0[\cup]0;+\infty[)$

et : $x>-1\Rightarrow x+2>1$

$$\Rightarrow 3+\frac{x+2}{x^2\sqrt{x+1}}>0$$

$$\Rightarrow f'(x)>0$$

Donc f est strictement croissante sur chaque intervalle inclus dans son ensemble de définition.

Tableau de variations de f :

x	-1		0	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	‖	$+$
f	-4	$\nearrow +\infty$	$-\infty$	$\nearrow +\infty$

Exercice 22

1 Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ;(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ ;\ x^n - 1 \geq n(x-1)$

On a : $x^n - 1 \geq n(x-1) \iff x^n - 1 - n(x-1) \geq 0$

L'inégalité est vérifiée pour : $n = 1$, car : $x^1 - 1 = x - 1$ et $1(x-1) = x - 1$

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = x^n - 1 - n(x-1)$

avec : $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ et $x \in [0 ; +\infty[$

On a : $(\forall x \in]0; +\infty[)\ ; f'(x) = nx^{n-1} - n = n(x^{n-1} - 1)$

- $0 \leq x < 1 \Rightarrow x^{n-1} < 1^{n-1}$
  $\Rightarrow x^{n-1} - 1 < 0\ ;\ n \neq 1$
  $\Rightarrow f'(x) < 0$

- $x > 1 \Rightarrow x^{n-1} > 1^{n-1}$
  $\Rightarrow x^{n-1} - 1 > 0$
  $\Rightarrow f'(x) > 0$

- $f'(x) = 0 \iff x^{n-1} = 1$ (car $x \geq 0$)
  $\iff x = 1$

x	0		1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
f		$\searrow$	0	$\nearrow$

0 est le minimum absolu de la fonction f.

Donc : $(\forall x \in [0 ; +\infty[)\ ;\ f(x) \geq 0$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $(\forall x \in [0;+\infty[)$; $x^n - 1 \geq n(x-1)$

Remarque :

Cette inégalité s'appelle inégalité de ***Bernoulli*** connue sous la forme :

$(x+1)^n \geq 1 + nx$

Il suffit de faire un changement de variable en remplaçant x par $x-1$.

2 Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x$

Soit x de $\mathbb{R}$,

On a : $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \Longleftrightarrow 1 - \frac{x^2}{2} - \cos x \leq 0$

On considère la fonction f définie par : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \cos x$

Il suffit de montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) \leq 0$

On a : $(\forall x \in \mathbb{R})$ $f'(x) = -x + \sin x$

Pour étudier le signe de $f'(x)$, on étudie les variations de f' :

On a : $(\forall x \in \mathbb{R})$ $f'(x) = -x + \sin x$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R})$: $f''(x) = -1 + \cos x$

puisque : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $-1 \leq \cos x \leq 1$

alors : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $-1 + \cos x \leq 0$

d'où : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f''(x) \leq 0$

Par suite : f' est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Remarquer que : $f''(0) = -1 + \cos(0) = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$			$-$		
f'		↘	0	↘	
$f'(x)$	$+$		0		$-$
f		↗	0	↘	

On peut justifier le signe de $f'(x)$:

- Sur l'intervalle $]-\infty;0[$: $x < 0 \Rightarrow f'(x) > f'(0)$ (car f' est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$).

C'est-à-dire : $f'(x) > 0$

Sur l'intervalle $]0;+\infty[$: $x > 0 \Rightarrow f'(x) < f'(0)$ (car f' est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$)

C'est-à-dire : $f'(x) < 0$

D'où le tableau de signe de $f'(x)$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	1	

Puisque 0 est la valeur maximale de f, alors : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f(x) \leq 0$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $1 - \frac{x^2}{2} - \cos x \leq 0$

Exercice 23

$$f(x) = \sqrt{x-2} + x + 1$$

1 Montrons que f admet une fonction réciproque f^{-1}.

La continuité :

La fonction f est continue sur l'intervalle $D_f = [2;+\infty[$, car c'est la somme de deux fonctions continues sur cet intervalle qui sont : $u : x \longmapsto x+1$ est continue sur $\mathbb{R}$ (car fonction affine), et en particulier sur $[2;+\infty[$.

et $v : x \mapsto \sqrt{x-2}$ est continue sur $I = [2;+\infty[$, car la fonction $x \mapsto x-2$ est continue et positive sur l'intervalle $[2;+\infty[$.

La monotonie :

On a : $(\forall x \in]2;+\infty[) : f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}} + 1$

donc : $(\forall x \in]2;+\infty[)$; $f'(x) > 0$

d'où f est strictement croissante sur $[2;+\infty[$.

Par suite f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle $J = f(I)$

tel que: $J = f([2;+\infty[)$

$= [f(2); \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)[$

$= [3;+\infty[$

2 Étudions la continuité et la monotonie de f^{-1} sur J :

▸ On a : f est continue sur l'intervalle $I=[2;+\infty[$.

Donc : f^{-1} est continue sur l'intervalle $J=f(I)$.

▸ On a : f est strictement croissante sur $I=[2;+\infty[$.

Donc : f^{-1} est strictement croissante sur $J=f(I)$.

3 Montrons que f^{-1} est dérivable en 5 et calculons $(f^{-1})'(5)$:

On a : $3\in I$ et $f(3)=5$

Donc : $f^{-1}(5)=3$

La fonction f est dérivable en 3 et $f'(3)\neq 0$ (car $f'(3)=\frac{3}{2}$)

Donc la fonction f^{-1} est dérivable en 5.

On a : $(f^{-1})'(5)=\dfrac{1}{f'(3)}=\dfrac{2}{3}$

4 Montrons que f^{-1} est dérivable sur l'intervalle $]3;+\infty[$:

On a : f est dérivable sur l'intervalle $]2;+\infty[$.

et $(\forall x\in]2;+\infty[)\ ;\ f'(x)\neq 0$

Donc la fonction f^{-1} est dérivable sur l'intervalle $f(]2;+\infty[)=]3;+\infty[$.

5 Résolvons dans l'intervalle J l'inéquation $f^{-1}(2x-7)>f^{-1}(x)$:

▸ **Ensemble de définition :**

Cette inéquation est définie si $x\in J$ et $(2x-7)\in J$.

$$x\geq 3 \ et\ x\in J \Leftrightarrow x\geq 3 \ et\ (2x-7)\in J$$
$$\Leftrightarrow x\geq 3 \ et\ x\geq 5$$
$$\Leftrightarrow x\geq 5$$

Cette inéquation est définie sur l'intervalle $[5;+\infty[$.

▸ **Résolvons l'inéquation :**

Soit x de $[5;+\infty[$.

On a : $f^{-1}(2x-7)>f^{-1}(x)\Leftrightarrow 2x-7>x$ (car f^{-1} est strictement croissante)

$$\Leftrightarrow x>7$$

Donc : $S=]7;+\infty[\cap[5;+\infty[$

$$=]7;+\infty[$$

Exercice 24

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$.

Étudions les variations de f sur $]0;+\infty[$.

$(\forall x\in]0,+\infty[), f'(x)=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)'=1-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x^2-1}{x^2}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{x}$

On a : $(\forall x>0)\ ;\ \dfrac{x+1}{x}>0$

Le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$ est celui de $x-1$

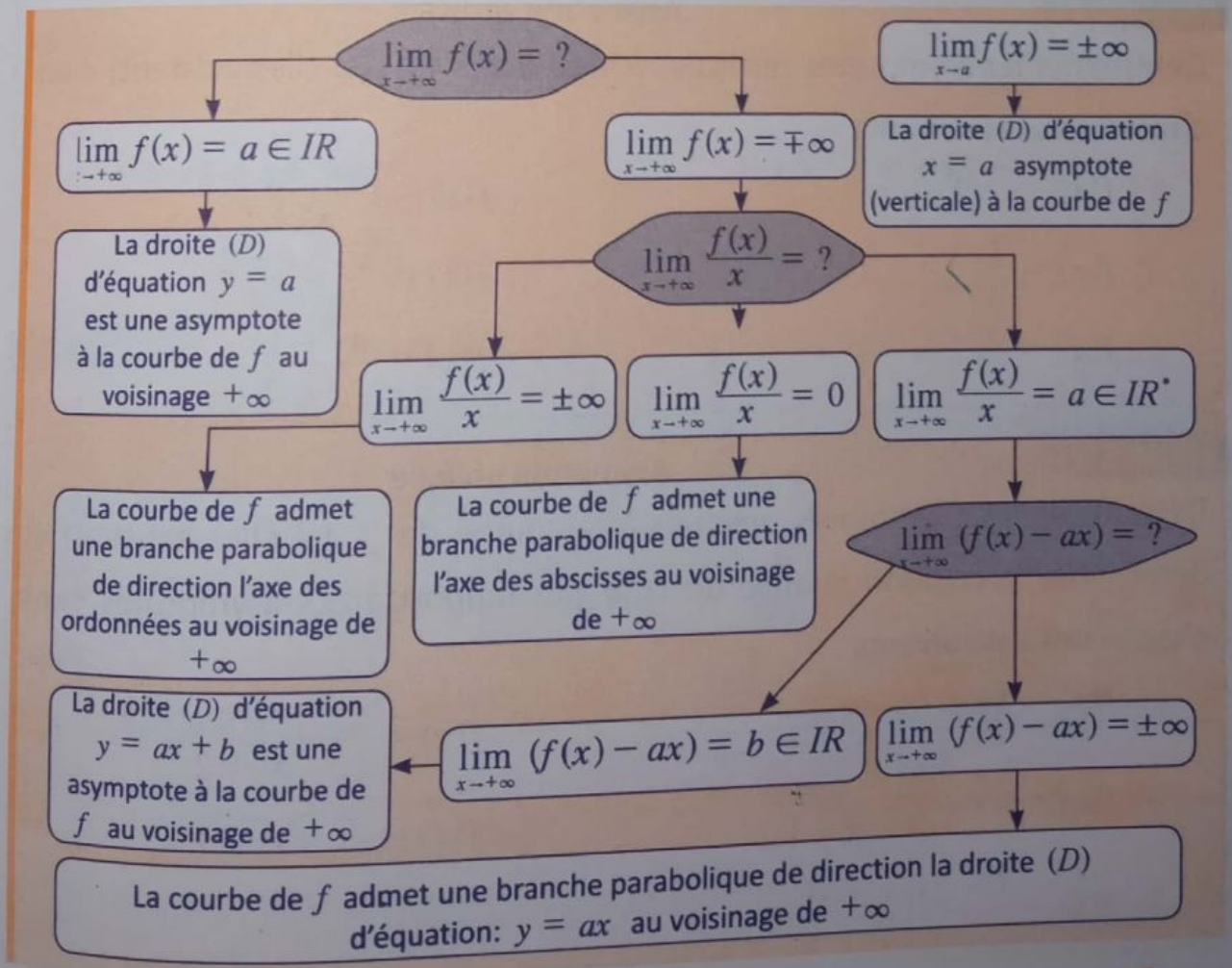
x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖	↘	2	↗	

$2,0123456788\in]1,+\infty[$ et $2,0123456789\in]1,+\infty[$

$\underbrace{2,0123456788}_{x_1}<\underbrace{2,0123456789}_{x_2}\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$, (car f est strictement croissante sur $]1,+\infty[$).

$\Rightarrow B<A$

8 Branches infinies



Propriété:

- Si $f(x) = ax + b + \varphi(x)$ telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$ alors la droite (D) d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $+\infty$.
- On obtient les mêmes résultats en remplaçant x tend vers $+\infty$ par x tend vers $-\infty$.

Exercices

Exercice 25 — Asymptote horizontale

Déterminer les asymptotes horizontales de la courbe de f (si elles existent) puis déterminer la position relative de (C_f) par rapport à ces asymptotes dans chacun des cas suivants:

1. $f(x) = \dfrac{3x-1}{1+2x}$
2. $f(x) = \dfrac{3-2x^2}{x^2+3}$
3. $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^4+5}$
4. $f(x) = \dfrac{|x+1|-x+5}{2+3x}$
5. $f(x) = x^3 - 5x + 2$
6. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$
7. $f(x) = \sqrt{x^2-x+1} - x + 2$

Exercice 26 — Asymptote verticale

Déterminer les asymptotes verticales à la courbe de f (si elles existent) dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = \dfrac{-2x+5}{x+3}$
2. $f(x) = \dfrac{x^3-5x+2}{x^2+1}$
3. $f(x) = \dfrac{3x-7}{x^2-1}$
4. $f(x) = \dfrac{x^2-x-2}{x^2-4}$
5. $f(x) = \sqrt{x} - x + 1$
6. $f(x) = \dfrac{4x+1}{\sqrt{x}-2}$

Exercice 27 — Asymptote oblique

Déterminer les asymptotes obliques à la courbe de f (si elles existent) et déterminer la position relative de (C_f) par rapport à ces asymptotes dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = 3x + 1 - \dfrac{5}{x^2+1}$
2. $f(x) = \dfrac{2x^3-x^2+x-2}{x^2+2}$
3. $f(x) = -x + 2 - \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$
4. $f(x) = \sqrt{-x^2+x+2}$
5. $f(x) = \dfrac{1-2x|x-3|}{x+5}$

Exercice 28 — Branche parabolique de direction l'axe des abscisses

Est-ce que la courbe de la fonction f admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses dans chacun des cas suivants?

1. $f(x) = 3\sqrt{x} - 2$
2. $f(x) = 1 - \sqrt{2-x}$
3. $f(x) = x^3 - 5x + 1$
4. $f(x) = \sqrt{4-x^2}$
5. $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$
6. $f(x) = \dfrac{x - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x} + 2}$

Exercice 29 — Branche parabolique de direction l'axe des ordonnées

Est-ce que la courbe de la fonction f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées dans chacun des cas suivants?

1. $f(x) = -2x^3 + x^2 - 3x + 1$
2. $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 2}{x + 1}$
3. $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$
4. $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$
5. $f(x) = -3x^2 + 5 - \sqrt{x^2 + 1}$

Exercice 30 — Branche parabolique de direction la droite d'équation $D: y = ax$; $a \neq 0$

Est-ce que la courbe de la fonction f admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $(a \neq 0) y = ax$?

1. $f(x) = \sqrt{2x+1} + 3x$
2. $f(x) = -2x - 3\sqrt{x-4}$
3. $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 3}$
4. $f(x) = 2 - \sqrt{3x+1}$
5. $f(x) = x + \dfrac{2x}{\sqrt{x+3}}$

Exercice 31 — Le plan est rapporté à un repère orthogonal

Compléter le tableau suivant :

	Limites	Interprétation géométrique
1	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -3$	
2	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$	
3	$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$	
4	$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$	
5	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$	

6	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$	
7	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$	
8	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(2x-1))=0$	
9	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(-x+2))=3$	
10	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(3x+1))=0$	
11	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+2x)=0$	
12	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+x)=-2$	
13	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=3$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-3x)=+\infty$	
14	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+x)=-\infty$	
15	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=-2$	
16		La droite $(D_1): y=3$ est une asymptote à la courbe de f au voisinage de $+\infty$
17		La droite $(D_2): y=x$ est une asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $+\infty$
18		(C_f) admet une branche parabolique de direction la droite $(D_3): y=2x$ au voisinage de $-\infty$.

Solutions

Exercice 25

Pour que la courbe de f admette une asymptote horizontale (parallèle à l'axe des abscisses), il faut que l'infini (∞) soit une borne de (D_f), et la limite de f en l'infini $(+\infty$ ou $-\infty)$ soit finie (un nombre réel).

- Si: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$, alors la droite d'équation $y = a$ est une asymptote horizontale à la courbe de f au voisinage de $+\infty$.
- Si: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$, alors la droite d'équation $y = b$ est une asymptote horizontale à la courbe de f au voisinage de $-\infty$.

1 $f(x) = \dfrac{3x-1}{1+2x}$

On a : $D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\} =]-\infty ; -\frac{1}{2}[\cup]-\frac{1}{2}; +\infty[$

et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x}{2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{3}{2}$

Donc la droite $(D) : y = \dfrac{3}{2}$ admet une asymptote horizontale à la courbe de f au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$.

- **Étudions la position de (C_f) par-rapport à l'asymptote (D).**

On étudie le signe de : $f(x) - \dfrac{3}{2}$

Soit x de (D_f), on a : $f(x) - \dfrac{3}{2} = \dfrac{3x-1}{1+2x} - \dfrac{3}{2}$

$$= \frac{6x-2-3-6x}{2(1+2x)}$$

$$= \frac{-5}{4x+2}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$4x+2$	$-$	$+$	
$f(x) - \frac{3}{2} = \frac{-5}{4x+2}$	$+$	$-$	
La positon relative de (C_f) et de la droite: $(D) : y = \frac{3}{2}$	(C_f) est au dessus de (D)		(C_f) est au dessous de (D)

2 $f(x)=\dfrac{3-2x^2}{x^2+3}$

On a : $D_f=\mathbb{R}=]-\infty;+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x^2}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}-2=-2$$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-2$

Donc la droite : $(D):y=-2$ est une asymptote horizontale à la courbe de f au voisinage $+\infty$ et $-\infty$.

▸ **Étudions la position de (C_f) par rapport à $(D):y=-2$.**

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $f(x)-(-2)=\dfrac{3-2x^2}{x^2+3}+2$

$$=\frac{3-2x^2+2x^2+6}{x^2+3}$$

$$=\frac{9}{x^2+3}$$

On a : $\dfrac{9}{x^2+3}>0$ donc : $f(x)-(-2)>0$

d'où : $(\forall x\in IR);f(x)>-2$

et par suite (C_f) est au dessus de (D) sur $\mathbb{R}$.

3 $f(x)=\dfrac{2x+3}{x^4+5}$

On a : $D_f=\mathbb{R}=]-\infty;+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x^4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x^3}=0$$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x^3}=0$

Donc la droite $(D):y=0$ (axe des abscisses) est une asymptote horizontale à la courbe de f au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

▸ **Étudions la position de (C_f) par rapport à l'asymptote (D).**

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $f(x)-0=\dfrac{2x+3}{x^4+5}$

Le signe de $f(x)$ est celui de $2x+3$, car : $(\forall x\in\mathbb{R});x^4+5>0$

x	$-\infty$	$\frac{-2}{3}$	$+\infty$
$2x+3$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$
La position de (C_f) par rapport à l'axe des abscisses	(C_f) est au dessous de l'axe des abscisses		(C_f) est au dessus de l'axe des abscisses

4 $f(x)=\dfrac{|x+1|-x+5}{2+3x}$

On a : $D_f=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{-2}{3}\right\}=\left]-\infty;\dfrac{-2}{3}\right[\cup\left]\dfrac{-2}{3};+\infty\right[$

x	$+\infty$	-1	$-\infty$
$\lvert x+1\rvert$	$-x-1$	0	$x+1$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x-1-x+5}{2+3x}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x}{3x}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}-\frac{2}{3}=-\frac{2}{3}$$
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1-x+5}{2+3x}$$
$$=\lim_{x\to+8}\frac{6}{2+3x}=0$$

Donc: - La droite $(D_1): y=-\dfrac{2}{3}$ est une asymptote horizontale à la courbe de f au voisinage de $-\infty$.

- La droite $(D_2): y=0$ est une asymptote horizontale à la courbe de f au voisinage de $+\infty$

Étudions la position de (C_f) par rapport à (D_1) et (D_2) :

Pour l'asymptote $(D_1): y=-\dfrac{2}{3}$ au voisinage de $-\infty$.

$(\forall x\in]-\infty;-1])\ ; f(x)-\left(-\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{-2x+4}{2+3x}+\dfrac{2}{3}$

$$=\frac{-6x+12+4+6x}{6+9x}=\frac{16}{6+9x}$$

Le signe de : $f(x)+\dfrac{2}{3}$ est celui de $6+9x$.

x	$-\infty$	$\frac{-2}{3}$	-1	$+\infty$
$6+9x$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)+\frac{2}{3}$	$-$	‖	$+$	
La position de (C_f) par rapport à (D_1)	(C_f) est au dessous de $D_1\ ; y=-\frac{2}{3}$	‖	(C_f) est au dessus de $D_1\ ; y=-\frac{2}{3}$	

Pour l'asymptote $(D_2): y = 0$ au voisinage de $+\infty$

On a : $\left(\forall x \in [-1; +\infty[- \left\{-\frac{2}{3}\right\}\right); f(x) = \frac{6}{2+3x}$

x	$-\infty$	-1		$-\frac{2}{3}$		$+\infty$
$3x+2$		$-$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	$-$	‖	$+$	
position de (C_f) par rapport à (D_2)		(C_f) est au dessous de (D_2)		‖	(C_f) est au dessus de (D_2)	

5 $f(x) = x^3 - 5x + 2$

On a : $Df = IR =]-\infty; +\infty[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty \notin \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty \notin \mathbb{R}$

Donc (C_f) n'admet pas d'asymptote horizontale ni au voisinage de $+\infty$ ni au voisinage de $-\infty$.

6 $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

▸ **Ensemble de définition de f :**

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $x \in D_f \Leftrightarrow 1 - x^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (1-x)(1+x) \geq 0$

$\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$

x	$-\infty$	-1		1		$+\infty$
$1-x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc : $D_f = [-1; 1]$

Puisque ∞ n'est pas une borne de D_f, alors la courbe de f n'admet pas d'asymptote horizontale..

7 $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1} - x + 2$

▸ **Ensemble de définition de f :**

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $x \in D_f \Leftrightarrow x^2 - x + 1 \geq 0$

On a : $\Delta = 1 - 4 = -3$

Puisque : $\Delta < 0$ et $a > 0$, alors : $(\forall x \in \mathbb{R}); x^2 - x + 1 > 0$

D'où : $D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

▸ **Calculons les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$:**

- **au voisinage de $-\infty$:** $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-x+1}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(-x+2)=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

- **au voisinage de $+\infty$:**

Soit : $x>0$, on a:

$$f(x)=\sqrt{x^2-x+1}-x+2=\frac{\left(\sqrt{x^2-x+1}\right)^2-(x-2)^2}{\sqrt{x^2-x+1}+(x-2)}$$

$$=\frac{x^2-x+1-x^2+4x-4}{\sqrt{x^2-x+1}+x-2}=\frac{3x-3}{\sqrt{x^2-x+1}+x-2}$$

$$=\frac{x\left(3-\frac{3}{x}\right)}{x\left[\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x}}+1-\frac{2}{x}\right]}=\frac{3-\frac{3}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x}}+1-\frac{2}{x}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}3-\frac{3}{x}=3\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x}}+1-\frac{2}{x}=2\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\frac{3}{2}$$

On a :

- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty\notin\mathbb{R}$

Donc : (C_f) n'admet pas d'asymptote horizontale au voisinage de $-\infty$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\frac{3}{2}\in\mathbb{R}$

Donc : (C_f) admet une asymptote horizontale (D) au voisinage de $+\infty$ d'équation $y=\frac{3}{2}$.

- **Étudions la position de (C_f) avec l'asymptote (D) au voisinage de $+\infty$.**

$$f(x)-\frac{3}{2}=\sqrt{x^2-x+1}-x+2-\frac{3}{2}=\sqrt{x^2-x+1}-x+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x^2-x+1}\right)^2-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{x^2-x+1}+\left(x-\frac{1}{2}\right)}=\frac{x^2-x+1-x^2+x-\frac{1}{4}}{\sqrt{x^2-x+1}+x-\frac{1}{2}}$$

$$f(x)-\frac{3}{2}=\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{x^2-x+1}+x-\frac{1}{2}}$$

On a : $\forall x\in\left[\frac{1}{2};+\infty\right[\ ;x-\frac{1}{2}\geq 0$

Donc : $\sqrt{x^2-x+1}+x-\frac{1}{2}>0$, d'où : $f(x)-\frac{3}{2}>0$

Donc : $\left(\forall x\in\left[\frac{1}{2};+\infty\right[\right);f(x)>\frac{3}{2}$

Par suite (C_f) est au dessus de $(D):y=\frac{3}{2}$ sur l'intervalle de $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$.

Exercice 26

Pour que la courbe de f admette une asymptote verticale (D) d'équation : $x = a$, il faut que:

- a soit une valeur interdite de f (annule le dénominateur).
- La limite de f en a (ou à droite ou à gauche en a) soit ∞.

1 $f(x) = \dfrac{-2x+5}{x+3}$

- **Ensemble de définition de f :**

On a : $D_f = \mathbb{R} - \{-3\} =]-\infty ; -3[\cup]-3 ; +\infty[$

(Le dénominateur de f s'annule en -3).

- Calculons la limite de f en -3:

On a : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -3} -2x+5 = 11 \\ \lim\limits_{x \to -3^+} x+3 = 0^+ \\ \lim\limits_{x \to -3^-} x+3 = 0^- \end{cases}$

Donc : $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = +\infty$

D'où la droite $(\Delta) : x = -3$ est une asymptote verticale de f.

2 $f(x) = \dfrac{x^3 - 5x + 2}{x^2 + 1}$

- **Ensemble de définition de f :**

On a : $D_f = \mathbb{R}$ (Le dénominateur de f ne s'annule pas), donc la courbe de f n'admet pas d'asymptote verticale.

3 $f(x) = \dfrac{3x-7}{x^2-1}$

- **Ensemble de définition de f :**

$$x \in D_f \iff x^2 - 1 \neq 0$$
$$\iff (x-1)(x+1) \neq 0$$
$$\iff x \neq 1 \text{ et } x \neq -1$$

Donc : $D_f = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$

(Le dénominateur de f s'annule en -1 et 1)

- **Calculons la limite de f en -1:**

On a : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -1} 3x - 7 = -10 \\ \lim\limits_{x \to -1^-} x^2 - 1 = 0^+ \\ \lim\limits_{x \to -1^+} x^2 - 1 = 0^- \end{cases}$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$

D'où la droite $(D_1): x = -1$ est une asymptote verticale à la courbe de f.

▸ **Calculons la limite de f en 1:**

On a : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1} 3x-7 = -4 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} x^2-1 = 0^- \\ \lim\limits_{x\to 1^+} x^2-1 = 0^+ \end{cases}$

Donc : $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$

D'où la droite $(D_2): x = 1$ est une asymptote verticale à la courbe de f.

4 $f(x) = \dfrac{x^2-x-2}{x^2-4}$

▸ **Ensemble de définition de f :**

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $x \in D_f \iff x^2-4 \neq 0$

$\iff (x-2)(x+2) \neq 0$

$\iff x \neq 2$ et $x \neq -2$

Donc : $D_f = \mathbb{R} - \{2; -2\}$

(Le dénominateur de f s'annule en -2 et 2)

▸ **Calculons la limite de f en -2:**

On a : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to -2} x^2-x-2 = 4 \\ \lim\limits_{x\to -2^-} x^2-4 = 0^+ \\ \lim\limits_{x\to -2^+} x^2-4 = 0^- \end{cases}$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
x^2-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = -\infty$

D'où la droite $(D_1): x = -2$ est une asymptote verticale à la courbe de f.

▸ Limite de f en 2 :

On a : $f(x) = \dfrac{x^2-x-2}{x^2-4}$

$= \dfrac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+2)}$

$= \dfrac{x+1}{x+2}$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x+1}{x+2} = \frac{3}{4}$$

Puisque : $\lim_{x\to 2} f(x) \neq \infty$

alors la droite $(D) : x = 2$ n'est pas une asymptote verticale à la courbe de f,

5 $f(x) = \sqrt{x} - x + 1$

Ensemble de définition de f :

$D_f = [0; +\infty[$

Donc la courbe de f n'admet pas d'asymptote verticale.

6 $f(x) = \dfrac{4x+1}{\sqrt{x}-2}$

Ensemble de définition de f :

Soit x de $\mathbb{R}$, on a :

$x \in D_f \iff x \geq 0$ et $\sqrt{x} - 2 \neq 0$

$\iff x \geq 0$ et $x \neq 4$

$\iff x \in ([0; +\infty[- \{4\})$

Donc : $D_f = [0; 4[\cup]4; +\infty[$

(Le dénominateur de f s'annule en 4)

Calculons la limite de f en 4:

On a : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 4} 4x + 1 = 17 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 4 \\ x<4}} \sqrt{x} - 2 = 0^- \\ \lim\limits_{\substack{x\to 4 \\ x>4}} \sqrt{x} - 2 = 0^+ \end{cases}$

Soit : $x \geq 0$

- $\sqrt{x} - 2 > 0 \iff \sqrt{x} > 2$
  $\iff x > 4$
- $\sqrt{x} - 2 < 0 \iff \sqrt{x} < 2$
  $\iff 0 \leq x < 4$

x	0		4		$+\infty$
$\sqrt{x}-2$		$-$	0	$+$	

Donc : $\lim\limits_{\substack{x\to 4 \\ x<4}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 4 \\ x>4}} f(x) = +\infty$

D'où la droite d'équation : $x = 4$ est une asymptote verticale à la courbe de f.

Exercice 27

Pour que la courbe de la fonction f admette une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$.

Il faut que : - la fonction f soit définie au voisinage de $+\infty$ (c'est-à-dire $+\infty$ soit une borne de D_f) et que:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^* \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = b \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \left(\text{ou } \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (ax+b)\right) = 0\right.$$

1 $f(x) = 3x + 1 - \dfrac{5}{x^2+1}$

- **Ensemble de définition :** $D_f = \mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$
- **Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} 3x+1 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-5}{x^2+1} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} 3x+1 = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-5}{x^2+1} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

On a : $\lim\limits_{|x|\to+\infty} (f(x) - (3x+1)) = \lim\limits_{|x|\to+\infty} \dfrac{-5}{x^2+1} = 0$

Donc la droite (D) d'équation $y = 3x + 1$ est une asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

Cas général:

Si : $f(x) = ax + b + \varphi(x)$,

telle que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0$

Donc la droite d'équation $(D) : y = ax + b$ est une asymptote oblique à la courbe de f au voisinage $+\infty$.

Étudions la position de (C_f) par rapport à l'asymptote (D):

On a : $f(x) - (3x+1) = \dfrac{-5}{x^2+1}$

puisque : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \dfrac{-5}{x^2+1} < 0$

Alors : $(\forall x \in \mathbb{R})\,;\, f(x)-(3x+1)<0$ c'est-à-dire : $(\forall x \in \mathbb{R})\,;\, f(x)<3x+1$

Donc : (C_f) est au dessous de (D) sur $\mathbb{R}$.

2 $f(x)=\dfrac{2x^3-x^2+x-2}{x^2+2}$

▸ **Ensemble de définition :** $D_f=\mathbb{R}=]-\infty;+\infty[$

Calculons les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}2x=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}2x=+\infty$$

▸ **Calculons** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$:

Soit $x\neq 0$

On a : $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{\frac{2x^3-x^2+x-2}{x^2+2}}{x}$

$$=\frac{2x^3-x^2+x-2}{x^3+2x}$$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3}{x^3}$

$$=\lim_{x\to+\infty}2$$

$$=2$$

▸ **Calculons** $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x)$:

$(\forall x\in\mathbb{R})\,;\, f(x)-2x=\dfrac{2x^3-x^2+x-2}{x^2+2}-2x$

$$=\frac{2x^3-x^2+x-2-2x^3-4x}{x^2+2}$$

$$=\frac{-x^2-3x-2}{x^2+2}$$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x^2-3x-2}{x^2+2}$

$$=\lim_{x\to+\infty}(-1)$$

$$=-1$$

D'où la droite $(\Delta): y=2x-1$ est une asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $+\infty$.

- En suivant les mêmes étapes , on aura le même résultat au voisinage de $-\infty$.

c'est-à-dire la droite (Δ) d'équation: $y = 2x - 1$ est une asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $-\infty$.

Étudions la position de (C_f) par rapport à l'asymptote (D) sur l'intervalle $[0; +\infty[$

Soit $x \in \mathbb{R}$; On a: $f(x) - (2x-1) = \dfrac{2x^3 - x^2 + x - 2}{x^2+2} - (2x-1)$

$$= \frac{2x^3 - x^2 + x - 2 - (2x-1)(x^2+2)}{x^2+2}$$

$$= \frac{2x^3 - x^2 + x - 2 - (2x^3 + 4x - x^2 - 2)}{x^2+2}$$

$$= \frac{-3x}{x^2+2}$$

Le signe de $f(x) - (2x-1)$ est celui de $-3x$ (car: $(\forall x \in \mathbb{R}); x^2 + 2 > 0$).

x	$+\infty$	4	$+\infty$
$-3x$	$+$	0	$-$
$f(x) - (2x-1)$	$+$	0	$-$
Position de (C_f) par rapport à l'asymptote $(D): y = 2x - 1$	(C_f) est au dessus de (D)		(C_f) est au dessous de (D)

$$(C_f) \cap (D) = \{A(4; f(4))\}$$

3 $f(x) = -x + 2 - \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$

Ensemble de définition :

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $x \in D_f \iff x \geq 0$ et $x + 1 \neq 0$

$$\iff x \geq 0 \text{ et } x \neq -1$$

$$\iff x \geq 0$$

Donc : $Df = [0; +\infty[$

Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} -x + 2 = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{\sqrt{x}}{x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-1}{\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

et on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (-x+2)) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-\sqrt{x}}{x+1} = 0$

Donc la droite $(\Delta): y = -x + 2$ est une asymptote oblique à la courbe f au voisinage de $+\infty$.

▸ **Étudions la position de (C_f) par rapport à l'asymptote (Δ).**

On a : $\forall x \in [0; +\infty[\ ;\ f(x) - (-x+2) = \dfrac{-\sqrt{x}}{x+1}$

Puisque : $(\forall x \in \mathbb{R}^+); -\dfrac{\sqrt{x}}{x+1} \leq 0$, alors : $(\forall x \in [0; +\infty[); f(x) \leq -x+2$

D'où la courbe de f se trouve au dessous de l'asymptote oblique (Δ).

4 $f(x) = \sqrt{-x^2+x+2}$

▸ **Ensemble de définition :**

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $x \in D_f \iff -x^2+x+2 \geq 0$

Le discriminant du trinôme $-x^2+x+2$ est : $\Delta = 9$

Donc les solutions de l'équation $-x^2+x+2=0$ sont : $x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{9}}{-2} = -1$

$x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{9}}{-2} = 2$

Le tableau de signe de $-x^2+x+2$:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$-x^2+x+2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc : $D_f = [-1; 2]$

Puisque l'infini n'est pas une borne de D_f, alors la courbe de la fonction f n'admet pas d'asymptote oblique.

5 $f(x) = \dfrac{1-2x|x-3|}{x+5}$

▸ **Ensemble de définition :**

$D_f = \mathbb{R} - \{-5\} =]-\infty; -5[\cup]-5; +\infty[$

▸ **Calculons les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.**

Ecrivons tout d'abord l'expression de f sans le symbole de la valeur absolue:

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$\lvert x-3\rvert$		$-x+3$	0	$x-3$	

▸ Si : $x \in]-\infty; -5[\cup]-5; 3]$, alors : $|x-3| = -x+3$

donc : $f(x) = \dfrac{1-2x(-x+3)}{x+5} = \dfrac{2x^2-6x+1}{x+5}$

Si : $x \in [3; +\infty[$, alors : $|x-3| = x-3$

donc : $f(x) = \dfrac{1-2x(x-3)}{x+5} = \dfrac{-2x^2+6x+1}{x+5}$

D'où : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{2x^2-6x+1}{x+5} & ; x < 3 \text{ et } x \neq -5 \\ f(x) = \dfrac{-2x^2+6x+1}{x+5} & ; x \geq 3 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2-6x+1}{x+5}$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2}{x}$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} 2x$

$= -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x^2+6x+1}{x+5}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x^2}{x}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} -2x$

$= -\infty$

Calculons $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$:

Soit $x < -5$; $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{2x^2-6x+1}{x^2+5x}$

Donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2}{x^2}$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} 2$

$= 2$

Calculons : $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - 2x)$

Soit $x < -5$; on a : $f(x) - 2x = \dfrac{2x^2-6x+1}{x+5} - 2x$

$= \dfrac{2x^2-6x+1-2x^2-10x}{x+5}$

$= \dfrac{-16x+1}{x+5}$

Donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - 2x) = \lim\limits_{x \to -\infty} -\dfrac{16x}{x}$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} (-16)$

$= -16$

D'où la droite $(D_1) : y = 2x - 16$ est une asymptote à la courbe de f au voisinage de $-\infty$.

▸ **Calculons** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$:

On a : $x\geq 3 ; \dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{-2x^2+6x+1}{x^2+5x}$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x^2}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}-2$

$=-2$

▸ **Calculons** $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+2x)$:

On a : $x\geq 3$; $f(x)+2x=\dfrac{-2x^2+6x+1}{x+5}+2x$

$=\dfrac{-2x^2+6x+1+2x^2+10x}{x+5}$

$=\dfrac{16x+1}{x+5}$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+2x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{16x+1}{x+5}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{16x}{x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}16$

$=16$

D'où la droite $(D_2): y=-2x+16$ est une asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $+\infty$.

▸ **Étudions la position de** (C_f) **par rapport à l'asymptote** $(D_2): y=-2x+16$ **sur l'intervalle** $[3;+\infty[$.

$x\geq 3$; $f(x)-(-2x+16)=\dfrac{-2x^2+6x+1}{x+5}-(-2x+16)$

$=\dfrac{-2x^2+6x+1-(-2x^2+6x+80)}{x+5}$

$=\dfrac{-79}{x+5}$

$x\in[3;+\infty[\Rightarrow x\geq 3$

$\Rightarrow x+5\geq 8>0$

$\Rightarrow -\dfrac{79}{x+5}<0$

Donc : $(\forall x\in[3;+\infty[)\ ; f(x)<-2x+16$

D'où la courbe de f se trouve au dessous de l'asymptote oblique $(D_2): y=-2x+16$ sur $[3;+\infty[$

▸ **Étudions la position de (C_f) par rapport à l'asymptote oblique $(D_1) : y = 2x - 16$ sur $[-\infty; 3[- \{-5\}$.**

Soit $x \neq -5$ et $x < 3$.

$$f(x) - (2x - 16) = \frac{2x^2 - 6x + 1}{x + 5} - (2x - 16)$$

$$= \frac{2x^2 - 6x + 1 - (2x^2 - 6x - 80)}{x + 5}$$

$$= \frac{81}{x + 5}$$

x	$-\infty$	-5	3
$x + 5$	$-$	0	$+$
$f(x) - (2x - 16)$	$-$	‖	$+$
Position (C_f) par rapport à l'asymptote (D_1)	(C_f) est au dessous de (D_1)	‖	(C_f) est au dessus de (D_1)

Exercice 28

Pour que la courbe de f admette une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$, Il faut que :

(1) $+\infty$ soit une borne de D_f.

(2) La limite de f en $+\infty$ soit infinie.

(3) La limite de $\frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$ soit 0 : $\left(\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0\right)$

(Les mêmes conditions au voisinage de $-\infty$)

1 $f(x) = 3\sqrt{x} - 2$

▸ **Ensemble de définition :** $D_f = \mathbb{R}^+ = [0; +\infty[$

▸ **Calculons** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$**:**

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 3\sqrt{x} - 2 = +\infty$$

▸ **Calculons** $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

Soit $x > 0$, on a : $\frac{f(x)}{x} = \frac{3\sqrt{x} - 2}{x}$

$$= \frac{3\sqrt{x}}{x} - \frac{2}{x}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x}$$

donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3}{\sqrt{x}}-\dfrac{2}{x}\right)=0$

D'où la courbe de f admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.

2 $f(x)=1-\sqrt{2-x}$

▸ **Ensemble de définition :**

Soit x un réel, on a : $x\in D_f \iff 2-x\geq 0$

$\iff x\leq 2$

Donc : $D_f=]-\infty;2]$

▸ **Calculons** $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$**:**

$\lim\limits_{x\to-\infty}2-x=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{2-x}=+\infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}(1-\sqrt{2-x})=-\infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

▸ **Calculons** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$**:**

Soit $x<0$;

On a : $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{1-\sqrt{2-x}}{x}$

$=\dfrac{1}{x}-\dfrac{\sqrt{2-x}}{x}$

$=\dfrac{1}{x}-\dfrac{2-x}{x\sqrt{2-x}}$

$=\dfrac{1}{x}-\dfrac{\frac{2}{x}-1}{\sqrt{2-x}}$

et on a : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}-0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}-\left(\dfrac{2}{x}-1\right)=1\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{2-x}=+\infty\end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{\frac{2}{x}-1}{\sqrt{2-x}}\right)=0$

donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$

D'où la courbe de f admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $-\infty$.

3 $f(x) = x^3 - 5x + 1$

Ensemble de définition : $D_f = \mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$

Calculons $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ **et** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$**:**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$$

Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$**:**

Soit $x \neq 0$

on a : $\frac{f(x)}{x} = \frac{x^3 - 5x + 1}{x}$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

Puisque : $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \neq 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \neq 0$

Alors la courbe de f n'admet pas de branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

4 $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

Ensemble de définition : $x \in D_f \iff 4 - x^2 \geq 0$

$$\iff (2 - x)(2 + x) \geq 0$$

$$\iff x \in [-2; 2]$$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$4 - x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

donc : $D_f = [-2; 2]$

Puisque : $+\infty$ et $-\infty$ ne sont pas des bornes de D_f, alors la courbe de f n'admet pas de branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

5 $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$

Ensemble de définition :

Soit x un réel, on a : $x \in D_f \iff x^2 + x + 1 \geq 0$

Le discriminant du trinôme $x^2 + x + 1$ est: $\Delta = 1 - 4 = -3$

Puisque : $\Delta < 0$ et $a > 0$, alors : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; x^2 + x - 1 > 0$

Puisque : $D_f = \mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$

▸ **Calculons** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ **et** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **:**

Puisque : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+x+1 = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+x+1 = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

alors : $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x+1} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+1} = +\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

▸ **Calculons :** $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

On a : $x \neq 0$; $\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}$

$$= \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}}{x}$$

$$= \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x}$$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 1$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} -\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = -1$

Puisque : $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \neq 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \neq 0$

Alors la courbe de f n'admet pas de branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

6 $f(x) = \frac{x-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}+2}$

▸ **Ensemble de définition :** Soit x de $\mathbb{R}$, on a :

$x \in D_f \iff x \geq 0$ et $\sqrt{x}+2 \neq 0$ et $x-1 \geq 0$

$\iff x \geq 1$

Donc : $D_f = [1 ; +\infty[$

▸ **Calculons** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **:**

Soit $x \geq 1$**, on a:** $f(x) = \frac{x-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}+2} = \frac{\sqrt{x}\left[\sqrt{x}-\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}}\right]}{\sqrt{x}\left(1+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)}$

donc : $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}}{1+\dfrac{2}{\sqrt{x}}}$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{2}{\sqrt{x}}=1$

et $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}=1\end{cases}\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}-\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}\right)=+\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}}{1+\dfrac{2}{\sqrt{x}}}=+\infty$ c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

▸ **Calculons** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$:

On a : $x>0$; $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{x-\sqrt{x-1}}{x\sqrt{x}+2x}$

$=\dfrac{x\left[1-\dfrac{\sqrt{x-1}}{x}\right]}{x[\sqrt{x}+2]}$

$=\dfrac{1-\sqrt{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}}{\sqrt{x}+2}$

infos:

▸ $x>0\Rightarrow\sqrt{x^2}=x$

▸ $\dfrac{\sqrt{x-1}}{x}=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2}}$

$=\sqrt{\dfrac{x-1}{x^2}}$

$=\sqrt{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}+2=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}1-\sqrt{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}=1\end{array}\right\}\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$

Donc la courbe de f admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.

Exercice 29

Pour que la courbe de la fonction f admette une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$ il faut que :

(1) $+\infty$ soit une borne de D_f.

(2) La limite de f en $+\infty$ soit ∞.

(3) La limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ en $+\infty$ soit ∞ (les mêmes conditions au voisinage de $-\infty$).

1 $f(x)=-2x^3+x^2-3x+1$

▸ **Ensemble de définition :** $D_f=\mathbb{R}=]-\infty;+\infty[$

Calculons $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$:

On a : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -2x^3 = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -2x^3 = +\infty$

- Calculons $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$:
- $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{2x^3}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} -2x = -\infty$
- $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} (-2x) = +\infty$

Donc : C_f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$.

2 $f(x) = \frac{x^2+x+2}{x+1}$

- **Ensemble de définition:** $D_f =]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$
- **Calculons $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$:**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$

- **Calculons $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$:**

On a : $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-x+2}{x^2+x}$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} 1 = 1$$

De même, on a : $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

Donc la courbe de f n'admet pas de branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$ et au voisinage de $+\infty$.

3 $f(x) = \sqrt{x^3+1}$

- **Ensemble de définition :**

soit x un réel, On a :

$x \in D_f \iff x^3+1 \geq 0$

$\iff (x+1)(x^2-x+1) \geq 0$ (car $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; x^2-x+1 > 0$)

$\iff x+1 \geq 0$

$\iff x \geq -1$ Donc : $Df = [-1;+\infty[$

▸ **Calculons** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **:**

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3+1=+\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^3+1}=+\infty$

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

▸ **Calculons** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ **:**

Soit $x>0$ on a: $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{\sqrt{x^3+1}}{x}=\sqrt{\dfrac{x^3+1}{x^2}}=\sqrt{x+\dfrac{1}{x^2}}$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\dfrac{1}{x^2}\right)=+\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+\dfrac{1}{x^2}}=+\infty$ d'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$

Par suite la courbe de f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

4 $f(x)=\sqrt{x^2-3x+2}$

▸ **Ensemble de définition :**

$x\in D_f \iff x^2-3x+2\geq 0$

Le discriminant du trinôme x^2-3x+2 est : $\Delta=9-8=1$

Les solutions de l'équation $x^2-3x+2=0$ sont :

$x_1=\dfrac{3+1}{2}=2$ et $x_2=\dfrac{3-1}{2}=1$

Tableau de signes de x^2-3x+2 :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
x^2-3x+2		$+$	0	$-$	0	$+$	

$x^2-3x+2\geq 0 \iff x\in\,]-\infty;1]\cup[2:+\infty[$

donc : $D_f=\,]-\infty;1]\cup[2:+\infty[$

▸ **Calculons** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ **et** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **:**

On a : $\lim\limits_{|x|\to+\infty} x^2-3x+2=\lim\limits_{|x|\to+\infty} x^2=+\infty$ donc : $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\sqrt{x^2-3x+2}=+\infty$

d'où : $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)=+\infty$

▸ **Calculons** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ **et** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ **:**

Soit $x>2$; on a : $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{\sqrt{x^2-3x+2}}{\sqrt{x^2}}=\sqrt{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)=1$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$

Soit $x<0$; on a : $\frac{f(x)}{x}=\frac{\sqrt{x^2\left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}}{x}$

$$=\frac{\sqrt{x^2}\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}}{x}$$

$$=\frac{-x\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}}{x}$$

$$=-\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}=-1$

Donc la courbe f n'admet pas de branche parabolique de direction l'axe des abscisses ordonnées ni au voisinage de $+\infty$ ni au voisinage de $-\infty$.

5 $f(x)=-3x^2+5-\sqrt{x^2+1}$

- **Ensemble de définition :** $D_f=\mathbb{R}=]-\infty;+\infty[$ (car : $(\forall x\in\mathbb{R});x^2+1>0$)
- **Calculons** $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ **et** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ **:**

On a : $\begin{cases}\lim\limits_{|x|\to+\infty}-3x^2+5=-\infty\\ \lim\limits_{|x|\to+\infty}-\sqrt{x^2+1}=-\infty\end{cases}$

Donc : $\lim\limits_{|x|\to+\infty}f(x)=-\infty$

- **Calculons** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ **et** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ **:**

Soit $x\neq0$; on a : $\frac{f(x)}{x}=\frac{-3x^2+5-\sqrt{x^2+1}}{x}$

$$=-3x+\frac{5}{x}-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$$

$$=-3x+\frac{5}{x}-\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}$$

- Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-3x+\frac{5}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)=+\infty$

(car : $\lim\limits_{x\to-\infty}-3x+\frac{5}{x}=+\infty$)

▸ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-3x+\dfrac{5}{x}-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\right)=-\infty$

(car : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\right)=-1$) une $\lim\limits_{x\to+\infty}-3x+\dfrac{5}{x}=-\infty$

Par suite la courbe de f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$.

Exercice 30

Pour que la courbe de la fonction f admette une branche parabolique de direction la droite d'équation $y=ax$ au voisinage de $+\infty$, il faut que:

(1) $+\infty$ soit une borne de l'ensemble de définition de la fonction f;

(2) La limite de f en $+\infty$ soit ∞;

(3) La limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ en $+\infty$ soit un nombre a non nul;

(4) La limite de $f(x)-ax$ en $+\infty$ soit infinie.

(les mêmes conditions au voisinage de $-\infty$).

1 $f(x)=\sqrt{2x+1}+3x$

▸ **Ensemble de définition :**

Soit x un réel, On a :

$$x\in D_f \iff 2x+1\geq 0$$
$$\iff x\geq -\frac{1}{2}$$

Donc : $D_f=\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$

▸ Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x+1}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}3x=+\infty\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

▸ **Calculons** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$:

Soit $x>0$; on a : $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{\sqrt{2x+1}+3x}{x}$

$$=\frac{\sqrt{2x+1}}{x}+3$$
$$=\sqrt{\frac{2x+1}{x^2}}+3$$
$$=\sqrt{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+3$$

infos:

$x>0\Rightarrow x=\sqrt{x^2}$

$x<0\Rightarrow x=-\sqrt{x^2}$

et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}=0$; donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=3=a$

▸ Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-3x)$:

On a : $f(x)-3x=\sqrt{2x+1}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x+1}=+\infty$; alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-3x)=+\infty$

Donc la courbe de f admet une branche parabolique de direction la droite (D) d'équation $y=3x$ au voisinage de $+\infty$.

2 $f(x)=-2x-3\sqrt{x-4}$

▸ **Ensemble de définition :**

Soit x un réel, on a : $x\in D_f \iff x-4\geq 0$

$\iff x\geq 4$

Donc : $D_f=[4;+\infty[$

▸ **Calculons** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}-2x=-\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}-3\sqrt{x-4}=-\infty\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$$

▸ **Calculons** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$:

Soit $x>4$; on a : $\frac{f(x)}{x}=\frac{-2x-3\sqrt{x-4}}{x}$

$$=-2-\frac{3\sqrt{x-4}}{x}$$

$$=-2-3\sqrt{\frac{x-4}{x^2}}$$

$$=-2-3\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}}$$

et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}-3\sqrt{\frac{1}{3}-\frac{4}{x^2}}=0$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-2$

▸ **Calculons** $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+2x)$:

On a : $f(x)+2x=-3\sqrt{x-4}$

et $\lim\limits_{x\to+\infty}-3\sqrt{x-4}=-\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+2x)=-\infty$

Par suite la courbe de f admet une branche parabolique de direction la droite (D) d'équation $y=-2x$ au voisinage de $+\infty$.

3 $f(x)=\sqrt{x^2-x+3}$

Ensemble de définition :

Soit x un réel, on a : $x\in D_f \iff x^2-x+3\geq 0$

Le discriminant du trinôme x^2-x+3 est : $\Delta=1-12=-11$

On a : $\Delta<0$ et $a>0$; donc : $(\forall x\in\mathbb{R})\,;\,x^2-x+3>0$,

d'où: $D_f=\mathbb{R}=]-\infty\,;+\infty[$

Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$:

On a : $\lim\limits_{|x|\to+\infty} x^2-x+3=\lim\limits_{|x|\to+\infty} x^2=+\infty$ donc : $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\sqrt{x^2-x+3}=+\infty$

d'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$:

Soit $x>0$; on a : $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{\sqrt{x^2-x+3}}{x}$

$$=\sqrt{\frac{x^2-x+3}{x^2}}$$

$$=\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}$$

donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}}=1$

Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$:

Soit $x>0$; on a : $f(x)-x=\sqrt{x^2-x+3}-x$

$$=\frac{x^2-x+3-x^2}{\sqrt{x^2-x+3}+x}$$

$$=\frac{-x+3}{\sqrt{x^2-x+3}+x}$$

$$=\frac{x\left(-1+\dfrac{3}{x}\right)}{x\left[\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}}+1\right]}$$

$$f(x)-x=\frac{-1+\dfrac{3}{x}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}}+1}$$

On a : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-1+\dfrac{3}{x}\right)=-1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}}+1=2\end{cases}$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=-\frac{1}{2}$

D'où la courbe de f n'admet pas de branche parabolique au voisinage de $+\infty$

(Par contre, elle admet une asymptote oblique d'équation $y=x-\frac{1}{2}$).

Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$:

infos:
Si $x<0$
alors: $\sqrt{x^2}=|x|=-x$

Soit $x<0$, on a : $x<0$; $\frac{f(x)}{x}=\frac{\sqrt{x^2-x+3}}{x}$

$$=\frac{\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}}{x}$$

$$=\frac{-x\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}}{x}$$

$$=-\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}$$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}=-1$

Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+x)$:

Soit $x<0$, on a : $f(x)+x=\sqrt{x^2-x+3}+x$

$$=\frac{(x^2-x+3)-x^2}{\sqrt{x^2-x+3}-x}$$

$$=\frac{-x+3}{-x\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}-x}$$

$$=\frac{-x\left(1-\frac{3}{x}\right)}{-x\left[\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}+1\right]}$$

$$=\frac{1-\frac{3}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}+1}$$

On a : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}1-\frac{3}{x}=1\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}+1=2\end{cases}$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)+x=\frac{1}{2}$

Par suite la courbe de f n'admet pas de branche parabolique au voisinage de $-\infty$ (Par contre, elle admet une asymptote oblique d'équation $y=-x+\frac{1}{2}$).

4 $f(x)=2-\sqrt{3x+1}$

Ensemble de définition :

Soit x un réel, on a : $x\in D_f \Leftrightarrow 3x+1\geq 0$

$\Leftrightarrow x\geq -\frac{1}{3}$

Donc : $Df=\left[-\frac{1}{3};+\infty\right[$

Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{3x+1}=+\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$:

Soit $x>0$, on a : $\frac{f(x)}{x}=\frac{2-\sqrt{3x+1}}{x}$

$$=\frac{2}{x}-\frac{\sqrt{3x+1}}{x}$$

$$=\frac{2}{x}-\sqrt{\frac{3x+1}{x^2}}$$

$$=\frac{2}{x}-\sqrt{\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}=0\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$$

Donc : (C_f) n'admet pas de branche parabolique de direction une droite d'équation $y=ax$.

où $a\neq 0$ (mais elle admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$).

5 $f(x)=x+\frac{2x}{\sqrt{x+3}}$

Ensemble de définition :

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $x\in D_f \Leftrightarrow x+3>0$

$\Leftrightarrow x>-3$

Donc : $D_f=]-3;+\infty[$

Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

On a : $f(x)=x+\frac{2x}{\sqrt{x+3}}=x\left(1+\frac{2}{\sqrt{x+3}}\right)$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{2}{\sqrt{x+3}}=1\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

▸ **Calculons** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$:

Soit $x>0$, on a : $x>0$; $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{x\left(1+\dfrac{2}{\sqrt{x+3}}\right)}{x}$

$$=1+\frac{2}{\sqrt{x+3}}$$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{\sqrt{x+3}}\right)=1$

▸ **Calculons** $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$:

On a : $f(x)-x=\dfrac{2x}{\sqrt{x+3}}$

$$=\frac{2x\sqrt{x+3}}{x+3}$$

$$=\frac{2x\sqrt{x+3}}{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}$$

$$=\frac{2\sqrt{x+3}}{1+\frac{3}{x}}$$

et on a : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} 2\sqrt{x+3}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{3}{x}=1\end{cases}$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=+\infty$

D'où la courbe de f admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $(D):y=x$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 30 **Le plan est rapporté à un repère orthogonal**

Complétons le tableau :

	Limites	Interprétation géométrique
1	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-3$	▸La courbe de la fonction f admet une asymptote horizontale au voisinage de $-\infty$, d'équation $y=-3$

2	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$	La courbe de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$.
3	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$	La courbe de f admet une asymptote verticale d'équation $x = a$
4	$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$	La courbe de f admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$ (Axe des ordonnées)
5	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$	La courbe de f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$
6	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$	La courbe de f admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$
7	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$	La courbe de f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$
8	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - (2x-1)) = 0$	La courbe de f admet une asymptote oblique d'équation $y = 2x - 1$ au voisinage de $-\infty$
9	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - (-x+2)) = 3$	La courbe de f admet une asymptote oblique d'équation $y = -x + 5$ au voisinage de $-\infty$ $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - (-x+5) = 0\right)$
10	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - (3x+1)) = 0$	La courbe de f admet une asymptote oblique d'équation $y = 3x + 1$ au voisinage de $+\infty$
11	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) + 2x) = 0$	La courbe de f admet une asymptote oblique d'équation $y = -2x$ au voisinage de $+\infty$ (car: $\lim\limits_{+\infty} f(x) - (-2x) = 0$)
12	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) + x) = -2$	La courbe de f admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ d'équation $y = -x - 2$

13	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=3$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-3x)=+\infty$	▸ La courbe de f admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y=3x$ au voisinage de $+\infty$.
14	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}=\dfrac{f(x)}{x}=-1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+x)=-\infty$	▸ La courbe de f admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y=-x$ au voisinage de $-\infty$
15	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=-2$	La courbe de f admet une asymptote oblique d'équation $y=x-2$ au voisinage de $+\infty$.
16	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$	La droite (D) d'équation: $y=3$ est une asymptote horizontale à la courbe de la fonction f au voisinage de $+\infty$
17	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=0$	La droite $(D): y=x$ est une asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $+\infty$
18	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-2x)=\infty$	(C_f) admet une branche parabolique de direction la droite (D) d'équation : $y=2x$ au voisinage de $-\infty$

9 Concavité d'une courbe - Points d'inflexion d'une courbe

1. Concavité d'une courbe:

Définition:

Soit f une fonction numérique dérivable sur un intervalle I et (C) sa courbe représentative.

▸ On dit que la courbe (C) est convexe si elle se trouve au dessus de toutes ses tangentes.

▸ On dit que la courbe (C) est concave si elle se trouve au dessous de toutes ses tangentes.

2. Points d'inflexion

Définition:

Soit f une fonction numérique dérivable sur un intervalle ouvert I et x_0 un élément de I.

On dit que le point $A(x_0;f(x_0))$ est un point d'inflexion de la courbe (C) si la courbe (C) change de concavité en A.

Proposition:

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I, et x_0 un élément de I.

- Si f'' est positif sur l'intervalle I alors la courbe (C) est convexe.
- Si f'' est négative sur l'intervalle I, alors la courbe (C) est concave.
- Si f'' s'annule en x_0 et change de signe au voisinage x_0, alors le point $A(x_0;f(x_0))$ est un point d'inflexion de (C).

Définition:

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I, et x_0 un élément de I.

Si la fonction dérivée f' s'annule en x_0 sans changer de signe au voisinage de x_0, alors le point $A(x_0;f(x_0))$ est un point d'inflexion de (C).

9 Axe de symétrie - centre de symétrie

Proposition:

Soit f une fonction numérique définie sur D, et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé et a et b deux éléments de $\mathbb{R}$.

- La droite d'équation: $x = a$ est un axe de symétrie de la courbe (C) si et seulement si:

Pour tout x de D, on a : $(2a - x) \in D$ et $f(2a - x) = f(x)$.

- Le point $\Omega(a;b)$ est un centre de symétrie de la courbe (C) si et seulement si:

Pour tout x de D, on a : $(2a - x) \in D$ et $f(2a - x) = 2b - f(x)$

Exercices

Exercice 32

Étudier la concavité de la courbe de la fonction f, et déterminer ses points d'inflexion (s'ils existent) dans chacun des cas suivants:

1 $f(x) = x^2 + 3x - 1$ 2 $f(x) = x^3 + x^2$ 3 $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

Exercice 33

Soit f la fonction numérique définie par: $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x} - 1}$

Étudier la concavité de la courbe de f, et déterminer ses points d'inflexion.

Exercice 34

Étudier la concavité de la courbe de la fonction f, et déterminer ses points d'inflexion (s'ils existent) dans chacun des cas suivants:

1 $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ 2 $f(x) = \left(\sqrt[3]{(x-1)}\right)^2$ 3 $f(x) = \cos^2 x + 2\cos x - 1$

Exercice 35

Montrer que le point $I(a;b)$ est un centre de symétrie de la courbe de la fonction f dans chacun des cas suivants:

1 $I(-1;2)$; $f(x) = \dfrac{x^2+4x}{x+1}$

2 $I(1;2)$; $f(x) = x + \dfrac{x}{x-1}$

3 $I(0;0)$; $f(x) = \dfrac{\sin 4x}{\cos(2x)+4}$

Exercice 36

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$

Montrer que la droite (D) d'équation : $x = -\dfrac{1}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe de f.

Exercice 32

Étudions la concavité de la courbe f dans les cas suivants:

1 f est une fonction polynôme définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a:

$(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = 2x + 3$

et on a: $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f''(x) = 2$, (f' est dérivable sur $\mathbb{R}$),

puisque : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f''(x) > 0$, alors la courbe de f est convexe.

On résume ce résultat dans le tableau suivant:

x	$-\infty$ $\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
$f''(x)$	$+$
Concavité de la courbe de f	

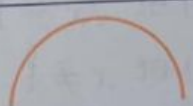
2 f est une fonction polynôme définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et f' est dérivable sur $\mathbb{R}$, on a : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = 3x^2 + 2x$

$(\forall x \in \mathbb{R}) ; f''(x) = 6x + 2$

et on a : $f''(x) = 0 \iff 6x + 2 = 0$

$\iff x = \dfrac{-1}{3}$

Le tableau suivant résume la concavité de la courbe de f :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
Concavité de la courbe de f			

$f''(x)$ s'annule et change de signe en $-\dfrac{1}{3}$.

Donc le point $A\left(-\frac{1}{3}; f\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$ est un point d'inflexion de (C_f)

$\left(f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{17}{9}\right)$

3 f est une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$.

f est deux fois dérivable sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition.

et on a : $(\forall x \in \mathbb{R}-\{1\})\ ; f'(x) = \dfrac{1(x-1)-(x+1)1}{(x-1)^2}$

$= \dfrac{-2}{(x-1)^2}$

Autre méthode :

On a : $(\forall x \in \mathbb{R}-\{1\})\ ; f'(x) = \dfrac{\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}}{(x-1)^2} = \dfrac{-1-1}{(x-1)^2} = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$

Donc : $f'(x) = -2(x-1)^{-2}$

D'où : $f''(x) = (-2)(-2)(x-1)'(x-1)^{-2-1}$

$= 4(x-1)^{-3} = \dfrac{4}{(x-1)^3}$

Par suite : $(\forall x \in \mathbb{R}-\{1\})\ ; f'(x) = \dfrac{4}{(x-1)^3}$

infos:

$\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)' = \dfrac{\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$

(avec: $ad-bc \neq 0$)

Le signe de $f''(x)$ est celui de $x-1$ sur $\mathbb{R}-\{1\}$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
Concavité de la courbe de f			

Sur l'intervalle $]1;+\infty[$ la courbe de f est convexe et sur l'intervalle $]-\infty;1[$ la courbe f est concave.

Exercice 33

Ensemble de définition : $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $x \in D_f \iff x \geq 0$ et $\sqrt{x}-1 \neq 0$

$\iff x \geq 0$ et $x \neq 1$

Donc : $D_f = [0;1[\cup]1;+\infty[$

La fonction : $x \mapsto \sqrt{x}-1$ est dérivable sur $]0;1[$ et sur $]1;+\infty[$ et ne s'annule pas.

Donc : f est dérivable sur chacun de ces intervalles.

alors : $\forall x \in]0;1[\cup]1;+\infty[\ ; f'(x) = \dfrac{-(\sqrt{x}-1)'}{(\sqrt{x}-1)^2} = \dfrac{-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}-1)^2}$

$= \dfrac{-1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2}$

On a : f' est dérivable sur $]0;1[$ et sur $]1;+\infty[$.

et on a : $(\forall x \in]0;1[\cup]1;+\infty[)\ ; f''(x) = \dfrac{(2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2)'}{(2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2)^2}$

Calculons $(2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2)'$:

$$(2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2)' = 2\times\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)^2 + 2\sqrt{x}.2(\sqrt{x}-1)'(\sqrt{x}-1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)^2 + 2\sqrt{x}.\frac{1}{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)$$

$$= (\sqrt{x}-1)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+2\right)$$

$$= (\sqrt{x}-1)\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}+2\right) = (\sqrt{x}-1)\left(3-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$= \frac{(\sqrt{x}-1)(3\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}}$$

Donc : $$f''(x) = \frac{\dfrac{(\sqrt{x}-1)(3\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}}}{(2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2)^2}$$

$$= \frac{(\sqrt{x}-1)(3\sqrt{x}-1)}{4\sqrt{x}^3(\sqrt{x}-1)^4}$$

Par suite le signe de $f''(x)$ est celui de $(\sqrt{x}-1)(3\sqrt{x}-1)$.

et on a :

$$(\forall x \in]0;1[\cup]1;+\infty[)\ ; f''(x) = \frac{(x-1)(9x-1)}{4\sqrt{x}^3(\sqrt{x}-1)^4(\sqrt{x}+1).(3\sqrt{x}+1)}$$

Le signe de $f''(x)$ est celui de $(x-1)(4x-1)$.

On obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{9}$		1		$+\infty$
$x-1$	-		-		0	+	
$9x-1$	-		0	+		+	
$f''(x)$	+		0	-		+	
Concavité de la courbe de f	∩		∩		∪		

$f''(x)$ s'annule en $\frac{1}{9}$ et change de signe en $\frac{1}{9}$; donc le point $A\left(\frac{1}{9};f\left(\frac{1}{9}\right)\right)$ est un point d'inflexion de la fonction f.

et on a : $f\left(\frac{1}{9}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{9}}-1} = \dfrac{1}{\frac{1}{3}-1} = \dfrac{1}{-\frac{2}{3}} = -\frac{3}{2}$; donc: $A\left(\frac{1}{9};-\frac{3}{2}\right)$ est le point d'inflexion de (C_f).

Exercice 34

Étudions la concavité de la courbe de f dans chacun des cas suivants:

1 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$

On a : $D_f=\mathbb{R}$ (car : $(\forall x\in\mathbb{R})\,;\,x^2+1\neq 0$)

f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a:

$$(\forall x\in\mathbb{R})\,;f'(x)=\frac{(x)'(x^2+1)-x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$$
$$=\frac{x^2+1-x(2x)}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

et on a : f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$(\forall x\in\mathbb{R})\,;f''(x)=\frac{(1-x^2)'(x^2+1)^2-(1-x^2)((x^2+1)^2)'}{((x^2+1)^2)^2}$$
$$=\frac{-2x(x^2+1)^2-(1-x^2)2(2x)(x^2+1)}{(x^2+1)^4}$$
$$=\frac{-2x(x^2+1)[(x^2+1)+2(1-x^2)]}{(x^2+1)^4}$$
$$=\frac{-2x(x^2+1+2-2x^2)}{(x^2+1)^3}$$
$$=\frac{-2x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}$$
$$=\frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$
$$=\frac{2x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(x^2+1)^3}$$

On a : $(\forall x\in\mathbb{R})\,;(x^2+1)^3>0$

Donc le signe de $f''(x)$ est celui de $2x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$.

On obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$2x$	$-$		$-$		0	$+$			$+$
x^2-3	$+$		0	$-$		$-$	0		$+$
$f''(x)$	$-$		0	$+$	0	$-$	0		$+$
Concavité de la courbe de f	∩			∪		∩			∪

La fonction f'' s'annule et change de signe en 0, $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$.

Donc les points $A_1(0;f(0))$ et $A_2(\sqrt{3};f(\sqrt{3}))$ et $A_3(-\sqrt{3};f(-\sqrt{3}))$ sont des points d'inflexion de la courbe de f.

On a : $f(0)=0$ et $f(\sqrt{3})=\frac{\sqrt{3}}{4}$, et $f(-\sqrt{3})=\frac{-\sqrt{3}}{4}$

Donc : $A_1(0;0)$ et $A_2\left(\sqrt{3};\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, et $A_3\left(-\sqrt{2};\frac{-\sqrt{3}}{4}\right)$ sont les points d'inflexion de la courbe de f.

2 $f(x)=(\sqrt[3]{x-1})^2$

on a : $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x-1\geq 0\}$

$=\{x\in\mathbb{R}/x\geq 1\}=[1;+\infty[$

f est dérivable sur $]1;+\infty[$ et on a : $(\forall x>1)\,;f(x)=(x-1)^{\frac{2}{3}}$

D'où : $(\forall x>1)\,;f'(x)=\frac{2}{3}(x-1)'(x-1)^{\frac{2}{3}-1}=\frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}}$

On a : f' est dérivable sur $]1;+\infty[$, et on a :

$(\forall x>1)\,;f''(x)=\frac{2}{3}\times\frac{-1}{3}(x-1)'(x-1)^{\frac{-1}{3}-1}$

$=-\frac{2}{9}.1.(x-1)^{-\frac{4}{3}}=\frac{-2}{9}(x-1)^{-\frac{4}{3}}=\frac{-2}{9\sqrt[3]{(x-1)^4}}$

Donc : $(\forall x>1)\,;f''(x)<0$

D'où la courbe de f est concave sur l'intervalle $[1;+\infty[$.

On obtient le tableau suivant:

x	1 $\qquad\qquad +\infty$
$f''(x)$	$\|\qquad -$
Concavité de la courbe de f	

3 $f(x)=\cos^2 x+2\cos x-1$

$D_f=\mathbb{R}$

On a : f est dérivable sur $\mathbb{R}$:

$(\forall x\in\mathbb{R})\,;f'(x)=2(\cos x)'(\cos x)^{2-1}+2(\cos x)'$

$=-2\sin x\cos x-2\sin x$

$=-2\sin x(\cos x+1)$

$f''(x)=0\Leftrightarrow \sin x=0$ ou $\cos x=-1$

$\Leftrightarrow x=k\pi$ ou $x=(2k+1)\pi\;;k\in\mathbb{Z}$

On a : $(\forall x\in\mathbb{R})\,;-1\leq\cos x\leq 1$

$(\forall x\in\mathbb{R})\,;0\leq\cos x+1$

On a f est une fonction périodique de période et 2π .

alors il suffit de l'étudier sur un intervalle d'amplitude 2π soit $[0;2\pi]$.

x	0		π		2π
$-2\sin x$	0	$-$	0	$+$	0
$1+\cos x$	$+$		0	$+$	
$f''(x)$	0	$-$	0	$+$	0
Concavité de la courbe de f	∩		∪		

On a : (C_f) est concave sur tout intervalle de la forme :

$[2k\pi;(2k+1)\pi];(k\in\mathbb{Z})$

et (C_f) est convexe sur tout intervalle de la forme :

$[(2k+1)\pi;(2k+2)\pi];(k\in\mathbb{Z})$

$f''(x)$ s'annule et change de signe aux nombres $2k\pi$ et $(2k+1)\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

Donc les points $A_k(2k\pi;f(2k\pi))$ et $B_k((2k+1)\pi:(2k+2)\pi)$ sont des points d'inflexion de la courbe de f.

Exercice 35

1 Montrons que : $I(-1;2)$ est un centre de symétrie de la courbe de f, tel que: $f(x)=\dfrac{x^2+4x}{x+1}$.

On a : $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$

$x\in D_f \Rightarrow x<-1$ ou $x>-1$

$\Rightarrow -x>1$ ou $-x<1$

$\Rightarrow -2-x>-1$ ou $-2-x<-1$

$\Rightarrow (-2-x)\in\,]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$

$\Rightarrow (-2-x)\in D_f$

Donc : $(\forall x\in D_f)\,;-2-x\in D_f$

et $(\forall x\in D_f)$; $f(-2-x)=\dfrac{(-2-x)^2+4(-2-x)}{(-2-x)+1}=\dfrac{(2+x)^2-8-4x}{-1-x}$

$$\overset{(1)}{=}\frac{4+4x+x^2-8-4x}{-1-x}=\frac{x^2-4}{-x-1}=\frac{-x^2+4}{x+1}$$

$$2b-f(x)=2\times 2-\frac{x^2+4x}{x+1}=\frac{4(x+1)-(x^2+4x)}{x+1}$$

$$=\frac{4x+4-x^2-4x}{x+1}=\frac{-x^2+4}{x+1}$$

$2b - f(x) = \dfrac{4x + 4 - x^2 - 4x}{x+1} = \dfrac{-x^2+4}{x+1}$ (2)

De (1) et (2) on déduit que :

$(\forall x \in D_f)\ ; -2-x \in D_f$ et $f(-2-x) = 2 \times 2 - f(x)$

Donc le point $I(-1;2)$ est un centre de symétrie de la courbe de f.

2 Montrons que le point $I(1;2)$ est un centre de symétrie de la courbe de f, tel que : $f(x) = x + \dfrac{x}{x-1}$.

On a : $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

Soit : $x \in D_f$, on a : $2a - x = 2 - x$ et

- $x \in D_f \iff x < 1$ ou $x > 1$
  $\iff -x > -1$ ou $-x < -1$
  $\iff 2 - x > 1$ ou $2 - x < 1$
  $\iff 2 - x \neq 1$
  $\iff 2 - x \in D_f$

Et on a :
- $f(2-x) = 2 - x + \dfrac{(2-x)}{(2-x)-1} = 2 - x + \dfrac{2-x}{1-x}$
  $= 2 - x + \dfrac{x-2}{x-1}$ (1)
- $2b - f(x) = 4 - \left(x + \dfrac{x}{x-1}\right) = 4 - x - \dfrac{x}{x-1}$
  $= 2 - x + 2 - \dfrac{x}{x-1}$
  $= 2 - x + \dfrac{2x - 2 - x}{x-1}$
  $= 2 - x + \dfrac{x-2}{x-1}$ (2)

De (1) et (2) on déduit que : $\forall x \in D_f\ ;\ 2 - x \in D_f$ et $f(2-x) = 2 \times 2 - f(x)$

Donc la point $I(1;2)$ est un centre de symétrie de la courbe de f,

3 $f(x) = \dfrac{\sin(4x)}{\cos(2x)+4}$.

Déterminons D_f l'ensemble de définition de la fonction f :

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $x \in D_f \iff \cos(2x) + 4 \neq 0$
$\iff \cos(2x) \neq -4$

Cette condition est vérifiée pour tout x de $\mathbb{R}$,

(car : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; -1 \leq \cos(2x) \leq 1$)

Donc : $D_f = \mathbb{R}$

On a : $\forall x \in \mathbb{R} ; -x \in \mathbb{R}$

et $f(-x) = \dfrac{\sin(-4x)}{\cos(-2x)+4} = -\dfrac{\sin 4x}{\cos 2x + 4} = -f(x)$

c'est-à-dire : $f(-x) = -f(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

Donc : f est une fonction impaire.

D'où le point $O(0;0)$ est un centre de symétrie de la courbe de f.

infos:
- La fonction sin est impaire.
- La fonction cos est paire.

Exercice 35

Montrons que la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe de f, telle que : $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$.

On a : $D_f = \mathbb{R}$ car : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; x^2+x+1 > 0$ (le discriminant $\Delta < 0$ et le coefficient x^2 est positif):

On a : $f(2a-x) = f(-1-x) = \sqrt{(-1-x)^2+(-1-x)+1}$

$= \sqrt{(1+x)^2-1-x+1}$

$= \sqrt{1+2x+x^2-1-x+1}$

$= \sqrt{x^2+x+1}$

$= f(x)$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R} ; (-1-x) \in \mathbb{R}$ et $f(-1-x) = f(x)$

Par suite la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe de f.

11 Etude d'une fonction numérique - Lecture graphique

Plan d'étude d'une fonction numérique :

Pour étudier une fonction numérique f, en général, on suit les étapes suivantes :

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Étudier la parité et la périodicité de la fonction f, puis déterminer l'ensemble d'étude D_E.
3. Calculer les limites aux bornes des intervalles de l'ensemble de définition.
4. Étudier la dérivabilité de f sur D_E.
5. Étudier les variations de f,

a. Calculer la fonction dérivée f'.

b. Étudier le signe de la fonction dérivée.

c. Déduire les variations de f, puis dresser le tableau de variations de f.

▸ Pour représenter la courbe de f, en général on suit les étapes suivantes :

6 Étudier les branches infinies.

7 Étudier la position de la courbe de f par rapport aux asymptotes horizontales et obliques si elles existent.

8 Étudier l'intersection de la courbe de f, avec les axes du repère (si c'est possible).

9 Donner l'équation de la tangente à (C_f) en ces points.

10 Étudier la concavité de la courbe de f et déterminer les points d'inflexion de (C_f) s'ils existent en calculant la dérivée seconde de la fonction f.

11 **Tracé :**

a. Tracer un repère orthonormé (Dans la pluspart des cas).

b. Tracer les tangentes précédentes et aussi les tangentes horizontales (là où f' s'annule).

c. Tracer les asymptotes.

d. Tracer la courbe de f, en respectant la concavité et la position relative de la courbe avec ses asymptotes.

Exercices

Exercice 37

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 5$

1 Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction f, et calculer les limites de f aux bornes de D.

2 Calculer $f'(x)$ pour tout x de D, et dresser le tableau de variations de f.

3 Étudier la concavité de (C_f) et déterminer ces points d'inflexion

4 Étudier les branches infinies de la courbe de f.

5 Déterminer le point d'intersection de (C_f) avec l'axe des ordonnées puis déterminer l'équation de la tangente à (C_f) en ce point.

6 Tracer la courbe de f.

Exercice 38

Le plan est rapporté au repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=\dfrac{x^2+3x+6}{x+1}$

1 Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f et calculer les limites de f aux bornes des intervalles de D_f.

2 a. Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\})\,;f'(x)=\dfrac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$

b. Dresser le tableau de variations de f.

3 a. Vérifier que : $(\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\})\,;f(x)=x+2+\dfrac{4}{x+1}$

b. Déterminer les branches infinies de la courbe de f.

c. Déterminer la position relative de la courbe de f par rapport à la droite (D) d'équation : $y=x+2$.

4 Montrer que le point $I(-1;1)$ est un centre de symétrie de la courbe de f.

5 a. Déterminer le point d'intersection de la courbe de f avec l'axe des ordonnées.

b. Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe de la fonction f au point d'abscisse 0.

6 Tracer la courbe de f.

7 a. Déterminer graphiquement le nombre et le signe des solutions de l'équation (E_m): $x^2+(3-m)x+6-m=0$

Discuter suivant les valeurs du paramètre m.

b. Vérifier algébriquement les résultats de la question a).

Exercice 39

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$, par : $f(x)=\sin x\cos x-\sin x$ et (C_f) sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1 Montrer que f est périodique de période 2π.

2 Montrer que le point $O(0,0)$ est un centre de symétrie de (C_f).

3 a. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x.

b. Factoriser $f'(x)$, puis étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0,\pi]$.

c. Dresser le tableau de variations de f sur $[0,\pi]$.

d. Tracer (C_f) sur l'intervalle $[0,\pi]$, puis déduire la courbe de f sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$.

Exercice 40

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1 a. Déterminer D_f l'ensemble de définition de f, et calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b. Étudier la branche infinie de (C_f).

2 a. Étudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter graphiquement ce résultat.

b. Montrer que f est dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

c. Calculer $f'(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$ et dresser le tableau de variation de f.

3 À partir du tableau de variations de f, donner le nombre de solutions de chacune des équations suivantes :

a. $f(x)=0$ b. $f(x)=\frac{1}{2}$ c. $f(x)=2$

4 Tracer la courbe de f.

Exercice 41

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$f(x)=x\dfrac{(\sqrt{x^2+1}+1)}{\sqrt{x^2+1}}$

Étudier f et tracer (C_f), la courbe de f dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Exercice 37

On a : $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+5$

1 On a : $D=\mathbb{R}=]-\infty;+\infty[$, car f est une fonction polynôme.

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{3}x^3=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{3}x^3=+\infty$

2 Calculons $f'(x)$ et dressons le tableau de variations de f :

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, car c'est une fonction polynôme.

on a : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ; f'(x)=x^2-2x-3$

- $\Delta=4+12=16$ est le discriminant de $f'(x)$.

et $x_1=\frac{2+4}{2}=3$ et $x_2=\frac{2-4}{2}=-1$ sont les racines de $f'(x)$.

- Tableau de variations de f :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
f	$-\infty$	↗	$\frac{20}{3}$	↘	-4	↗	$+\infty$

3 Étudions la concavité et déterminons les points d'inflexion de (C_f) :

On a : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ; f'(x)=x^2-2x-3$

Donc : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ; f''(x)=2x-2$

$=2(x-1)$

D'où :

x	$+\infty$		1		$-\infty$
$f''(x)$		-	0	+	
concavité de (C_f)	∩				∪

Puisque $f''(x)$ s'annule en 1 et change de signe alors le point $A(1;f(1))$ est un point d'inflexion de (C_f).

On a : $f(1)=\frac{4}{3}$, donc : $A\left(1;\frac{4}{3}\right)$

4 **Étudions les branches infinies de la courbe de f :**

Au voisinage de $-\infty$:

- On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; calculons $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{3}x^3}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{3}x^2 = +\infty$$

Donc la courbe de f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$.

Au voisinage de $+\infty$:

- On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$:

- On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{3}x^2 = +\infty$

Donc la courbe de f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

5 **Déterminons le point d'intersection de (C_f) avec l'axe (Oy) :**

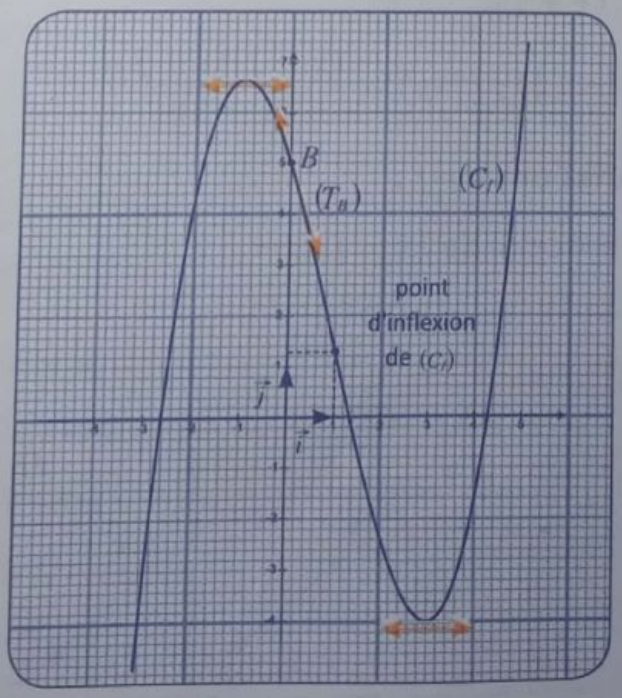
On a : $f(0) = 5$; donc : $(C_f) \cap (Oy) = \{B(0;5)\}$

- Equation de la tangente à la courbe (C_f) en B :

$(T_B) : y = f'(0)(x-0) + f(0)$

On a : $f(0) = 5$ et $f'(0) = -3$, donc : $(T_B) : y = -3x + 5$

6 **Traçons (C_f) :**



Exercice 38

$f(x)=\dfrac{x^2+3x+6}{x+1}$

1 Déterminons D_f et calculons les limites de la fonction f aux bornes de D_f :

On a : $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}=]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$

On a : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-1}(x^2+3x+6)=4\\ \lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}}(x+1)=0^-\\ \lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}}(x+1)=0^+\end{cases}$

x	-1		
$x+1$	$-$	0	$+$

Donc : $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}}f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}}f(x)=+\infty$

2 a. Calculons $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}-\{-1\}$:

Soit x de $\mathbb{R}-\{-1\}$.

On a : $f'(x)=\dfrac{(2x+3)(x+1)-(x^2+3x+6)}{(x+1)^2}$

$=\dfrac{2x^2+2x+3x+3-x^2-3x-6}{(x+1)^2}$

$=\dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$

$=\dfrac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$

Donc : $(\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\})\ ;f'(x)=\dfrac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$

b. Tableau de variations de f :

Le signe de $f'(x)$ est celui de $(x-1)(x+3)$

(car: $(\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\})\ ;(x+1)^2>0$)

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	-3	↘	$+\infty$ ‖	↘	5	↗	$+\infty$

3 a. Vérifions que : $(\forall x \in \mathbb{R}-\{-1\})\ ; f(x) = x+2+\frac{4}{x+1}$

Soit x de $\mathbb{R}-\{-1\}$:

$$x+2+\frac{4}{x+1} = \frac{(x+2)(x+1)+4}{x+1}$$
$$= \frac{x^2+x+2x+2+4}{x+1}$$
$$= \frac{x^2+3x+6}{x+1} = f(x)$$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}-\{-1\})\ ; f(x) = x+2+\frac{4}{x+1}$

b. **Déterminons les branches infinies de la courbe de f :**

- On a : $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = -\infty$; donc la droite d'équation $x = -1$ est une asymptote à la courbe de f.

- On a : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$

et $\lim\limits_{|x|\to +\infty} (f(x)-(x+2)) = \lim\limits_{|x|\to +\infty} \frac{4}{x+1} = 0$

Donc la droite : $(D) : y = x+2$ est une asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

c. **Déterminons la position relative de (C_f) avec la droite $(D) : y = x+2$:**

Soit x de $\mathbb{R}-\{-1\}$:

On a : $f(x) = x+2+\frac{4}{x+1}$, alors : $f(x)-(x+2) = \frac{4}{x+1}$

Donc le signe de $f(x)-(x+2)$ est celui de $x+1$ sur D_f :

D'où :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)-(x+2)$	$-$		$+$
Position de (C_f) par rapport à l'asymptote (D)	(C_f) est au dessous de (D)		(C_f) est au dessus de (D)

4 **Montrons que le point $I(-1;1)$ est un centre de symétrie de (C_f) :**

Soit x de $\mathbb{R}-\{-1\}$

On a : $-2-x = -1 \iff x = -1$

Donc : $x \neq -1 \Longrightarrow (-2-x) \neq -1$

D'où : $x \in D_f \Longrightarrow (-2-x) \in D_f$

On a : $f(2a-x)=f(-2-x)=(-2-x)+2+\dfrac{4}{(-2-x)+1}$

$=-x-\dfrac{4}{x+1}$

$2b-f(x)=2-\left(x+2+\dfrac{4}{x+1}\right)=-x-\dfrac{4}{x+1}$

Donc : $(\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\})\,;f(2a-x)=2b-f(x)$ avec : $a=-1$ et $b=1$

D'où le point $I(-1;1)$ est un centre de symétrie de (C_f).

5 a. **Déterminons l'intersection (C_f) avec (Oy) :**

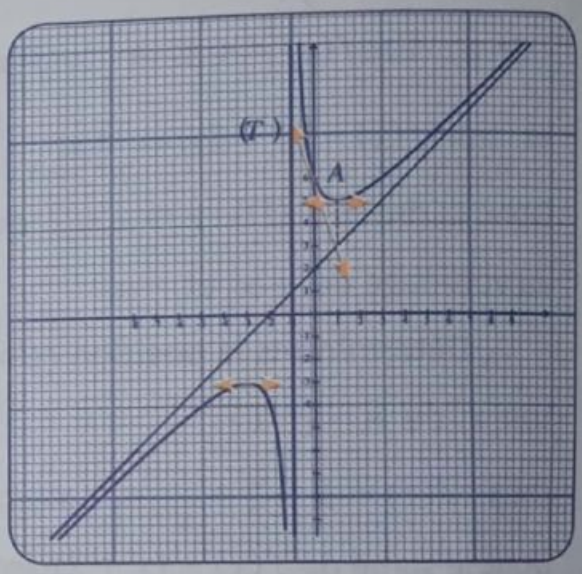
On a : $f(0)=6$; donc : $(C_f)\cap(Oy)=\{A(0;6)\}$

b. **Équation de la tangente (T) en A :**

$(T):y=f'(0)(x-0)+f(0)$

On a : $f'(0)=-3$ et $f(0)=6$

Donc : $(T):y=-3x+6$



6 **Traçons (C_f) :**

7 a.

Graphiquement, le nombre de solutions de l'équation (E_m) le nombre de points d'intersection de (C_f) avec la droite $(D_m):y=m$, où $m\in\mathbb{R}$.

Le signe des solutions est celui des abscisses de ces points :

- Si $m<-3$, alors (E_m) admet deux solutions négatives.
- Si $m=-3$, alors la solution (E_m) est -3.
- Si $-3<m<5$, pas de solution.
- Si $m=5$, alors la solution de (E_m) est 1.
- Si $5<m<6$, alors (E_m) admet deux solutions positives.
- Si $m=6$, alors (E_m) admet deux solutions l'une positive et l'autre 0.
- Si $m>6$, alors (E_m) admet deux solutions de signes contraire.

b. Algébriquement :

$(E_m): x^2+(3-m)x+6-m=0$

on a : $\Delta=(3-m)^2-4(6-m)$

$=9-6m+m^2-24+4m$

$=m^2-2m-15$

$\Delta_m=4+60=64=8^2$

$m_2=\frac{2-8}{2}=-3$ et $m_1=\frac{2+8}{2}=5$

Tableau de signe de Δ :

m	$-\infty$	-3		5	$+\infty$
$\Delta=m^2-2m-15$	+	0	−	0	+

- Si : $m\in]-3;5[$, alors : $\Delta<0$ donc l'équation (E_m) n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$.
- Si : $m\in]-\infty;-3[\cup]5;+\infty[$

alors : $\Delta>0$, donc l'équation (E_m) admet deux solutions distinctes x_1 et x_2.

Le signe de x_1 et x_2 :

On a : $x_1\times x_2=\frac{c}{a}=6-m$

Tableau de signe de x_1x_2 :

m	$-\infty$	-3		5		6	$+\infty$
$6-m$	+		+		+	0	-

- Si : $m\in]6;+\infty[$

alors : $x_1x_2<0$, donc : x_1 et x_2 sont de signes contraires (une positive et l'autre négative).

- Si : $m=6$

alors : $(E_m)\Leftrightarrow x^2-3x=0$

$\Leftrightarrow x(x-3)=0$

$\Leftrightarrow x=0$ ou $x=3$

L'équation (E_m) admet deux solutions distinctes : 0 et 3 .

- Si : $m\in]-\infty;-3[\cup]5;6[$

alors : $x_1x_2>0$; donc : x_1 et x_2 sont de même signe (soit toutes les deux positives ou toutes les deux négatives).

Pour connaître le signe x_1 et x_2 dans ces cas, on détermine le signe de la somme: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -3 + m$

m	$-\infty$	-3		5	$+\infty$
$m-3$	$-$	0	$+$	0	$+$

▸ Si : $m \in]-\infty; -3[$

alors : $x_1 + x_2 < 0$, donc : x_1 et x_2 sont négatives (car elles ont le même signe).

▸ Si : $m \in]5; +\infty[$

alors : $x_1 + x_2 > 0$, donc : x_1 et x_2 sont positives.

Exercice 39

$$f(x) = \sin x \cos x - \sin x$$

1 Montrons que f est périodique de période 2π .

On a : $D_f = \mathbb{R}$ et on a : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; x + 2\pi \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}(\forall x \in \mathbb{R})\ ; f(x+2\pi) &= \sin(x+2\pi)\cos(x+2\pi) - \sin(x+2\pi) \\ &= \sin x \cos x - \sin x \\ &= f(x)\end{aligned}$$

Donc : f est périodique de période 2π.

infos:
$(\forall x \in \mathbb{R})\ ; \cos(x + 2k\pi) = \cos x$
$\sin(x + 2k\pi) = \sin x$ avec $k \in \mathbb{Z}$

2 Montrons que f est une fonction impaire:

On a : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; -x \in \mathbb{R}$

et $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; f(-x) = \sin(-x)\cos(-x) - \sin(-x)$

$$\begin{aligned}&= -\sin x \cos x + \sin x \\ &= -(\sin x \cos x - \sin x) \\ &= -f(x)\end{aligned}$$

infos:
La fonction cos est paire.
La fonction sin est impaire.

Donc f est impaire d'où $O(0;0)$ est un centre de symétrie de la courbe de f.

3 a. Calculons $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$:

On a : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; f'(x) = (\sin x \cos x)' - (\sin x)'$

$$\begin{aligned}&= (\sin x)'\cos x + \sin x(\cos x)' - \cos x \\ &= \cos^2 x - \sin^2 x - \cos x \\ &= \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) - \cos x \\ &= 2\cos^2 x - \cos x - 1\end{aligned}$$

b. Factorisons $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$:

On a : $f'(x) = 2\cos^2 x - \cos x - 1 \qquad (\forall x \in \mathbb{R})$;

$$= 2(\cos x - 1)\left(\cos x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$= 2(\cos x - 1)\left(\cos x + \frac{1}{2}\right)$$

car les solutions de l'équation : $2X^2 - X - 1 = 0$ sont $X_1 = 1$ et $X_2 = \frac{-1}{2}$.

La factorisation du trinôme $2X^2 - X - 1$ est :

$$2X^2 - X - 1 = 2(X - 1)\left(X - \frac{-1}{2}\right)$$

$$= 2(X - 1)\left(X + \frac{1}{2}\right)$$

Étudions les variations de f sur l'intervalle $[0;\pi]$:

On a : $\cos x - 1 \leq 0$ pour tout x de $[0;\pi]$.

Soit $x \in [0;\pi]$, on a : $\cos x - 1 = 0 \iff \cos x = 1$

$$\iff x = 0$$

Soit $x \in [0;\pi]$, on a : $\cos x + \frac{1}{2} = 0 \iff \cos x = \frac{-1}{2}$

$$\iff x = \frac{2\pi}{3}$$

Soit $x \in [0;\pi]$, on a : $\cos x + \frac{1}{2} > 0 \iff \cos x > \frac{-1}{2}$

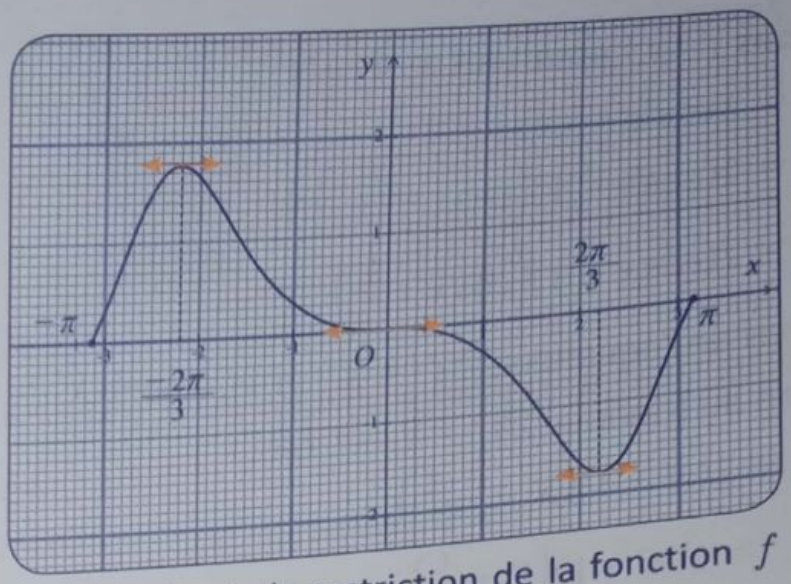
$$\iff x \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right[$$

c. Tableau de variations de f :

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$\cos x - 1$	0	$-$	0	$-$	
$\cos x + \frac{1}{2}$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	↘	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↗	0

d. Traçons (C_f) :

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\frac{2\pi}{3}\cos\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-\sqrt{3} - 2\sqrt{3}}{4} = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$$



Après le tracé de la courbe de la restriction de la fonction f sur la fonction $[0;\pi]$, on utilise la symétrie centrale de centre $O(0;0)$ origine du repère puis on utilise la translation de vecteur $2\pi\vec{i}$.

Exercice 40

1 a. Déterminons D_f l'ensemble de définition de la fonction f :

soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $x \in D_f \iff x+1 \geq 0$ et $x \geq 0$

$\iff x \geq -1$ et $x \geq 0$

$\iff x \in [0;+\infty[$

donc : $D_f = [0;+\infty[$

Déterminons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

Soit $x \in [0,+\infty[$; $\sqrt{x+1}-\sqrt{x} = \dfrac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}+\sqrt{x} = +\infty$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

b. Étudions la branche infinie de la courbe de la fonction f :

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, donc (C_f) admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$.

2 a. Étudions la dérivabilité de la fonction f à droite en zéro:

Soit $x \in]0,+\infty[$

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}-1}{x} = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} - \frac{\sqrt{x}}{x}$$

$$= \frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$= \frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)} - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Puisque : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\dfrac{1}{2}$

alors : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=-\infty$

Donc : f n'est pas dérivable à droite en 0.

Interprétation géométrique :

(C_f) la courbe de f admet une demi-tangente verticale dirigée vers le bas au point $A(0;1)$.

b. Montrons que f est dérivable sur $]0,+\infty[$:

On a la fonction $x\mapsto x+1$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et strictement positive sur $]0,+\infty[$; donc les fonctions $x\longmapsto\sqrt{x+1}$ et $x\longmapsto\sqrt{x}$ sont dérivables sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

D'où f est dérivable sur $]0,+\infty[$ (Somme de deux fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$)

Calculons $f'(x)$:

Soit x de $]0;+\infty[$

On a : $f'(x)=\dfrac{(x+1)'}{2\sqrt{x+1}}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)=\dfrac{1}{2}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}.\sqrt{x}}$

$=\dfrac{1}{2}.\dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})}{(\sqrt{x+1}.\sqrt{x})(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})}$

$=\dfrac{1}{2}\dfrac{x-(x+1)}{\sqrt{x+1}.\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})}=\dfrac{-1}{2\sqrt{x+1}\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})}$

On a : $\forall x\in]0,+\infty[\ ;\ f'(x)<0$

Donc : f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$.

Tableau de variations de f :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\!-\infty$	$-$	
f	1	↘	0

3 La fonction f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$, et $f(]0,+\infty[) =]0;1]$

a. On a : $0 \notin]0;1]$

Donc l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solutions dans l'intervalle $]0;+\infty[$

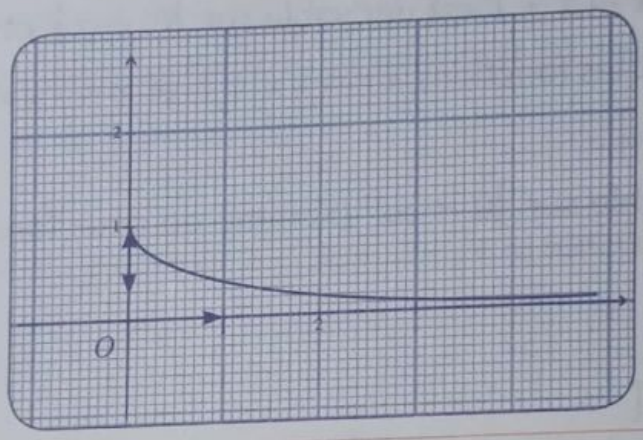
b. $\frac{1}{2} \in]0;1]$

Donc l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet une solution unique α de $]0;+\infty[$

c. $2 \notin]0,1]$

Donc l'équation $f(x) = 2$ n'a pas de solutions dans $]0;+\infty[$.

4 Le tracé :



Exercice 41

$$f(x) = x\left(\frac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

1 a. **Ensemble de définition :** $Df = \mathbb{R}$ (car : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; x^2+1 > 0$)

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $f(x) = x\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

$$= x\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

b. **Étudions la parité de f :**

On a : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; -x \in \mathbb{R}$

et $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; f(-x) = -x\left(1 + \frac{1}{\sqrt{(-x)^2+1}}\right) = -f(x)$

Donc : f est une fonction impaire.

Puisque f est une fonction impaire, alors il suffit de l'étudier sur l'intervalle $D_E = [0;+\infty[$.

2 Variations de la foctcion f :

a. Dérivabilité de f sur D_f :

La fonction $x \mapsto \dfrac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}}$ est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

et $x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Par suite f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

b. Calculons $f'(x)$ et déterminons les variations de f :

On a : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; f'(x) = \left(x\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)\right)'$

$$= (x)'\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)+x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)'$$

$$= 1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+x.\left(0-\frac{(\sqrt{x^2+1})'}{(\sqrt{x^2+1})^2}\right)$$

$$= 1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+x.\frac{-\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{(\sqrt{x^2+1})^2}$$

$$= 1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{x^2}{(\sqrt{x+1})^3} = 1+\frac{x^2+1-x^2}{(\sqrt{x^2+1})^3}$$

$$= 1+\frac{1}{(\sqrt{x^2+1})^3} = 1+\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) > 0$, d'où f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c. Calculons la limite de f en $+\infty$:

On a : $(\forall x > 0)\ ; f(x) = x\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

d. Tableau de variations de f sur l'intervalle $]0,+\infty[$:

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	0	↗	$+\infty$

$f(0) = 0$

3 Étudions la branche infinie de la courbe de f au voisinage de $+\infty$:

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

et : $(\forall x > 0)\ ; f(x) - x = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}$$

Puisque : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$, alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x = 1$

Donc: (C_f) admet une asymptote oblique d'équation $y = x + 1$ au voisinage de $+\infty$:

Position de (C_f) avec la droite $(D): y = x + 1$.

On a : $f(x) - (x+1) = \dfrac{-1}{\sqrt{1+x^2}} < 0$

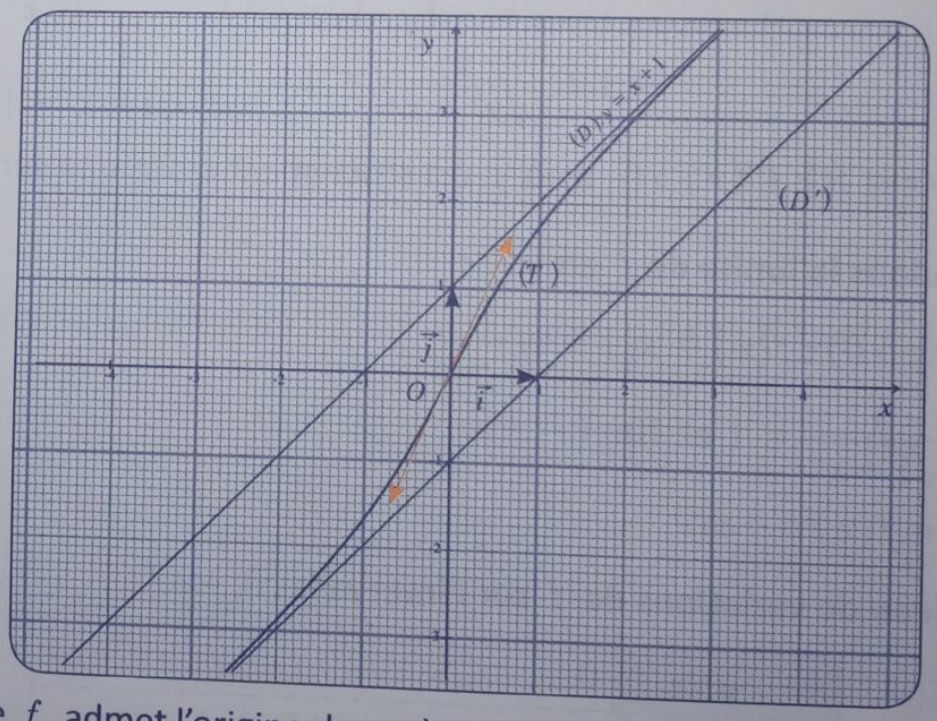
Donc : (C_f) se situe en dessous de l'asymptote oblique $(D): y = x + 1$ sur $\mathbb{R}$.

4 La tangente (C_f) au point $O(0,0)$:

On a : $f'(0) = 2$

Donc : (C_f) la courbe de f admet une tangente oblique de coefficient directeur 2 au point d'abscisse 0.

5 Courbe (C_f):



La courbe f admet l'origine du repère comme centre de symétrie (car f est une fonction impaire).

$(D): y = x + 1$ est une asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $+\infty$.

On construit de même (D') le symétrique de (D) par rapport à l'origine $(D) /\!/ (D')$.

Exercices de synthèse

Exercices

Exercice 42

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ par :

$f(x)=x-1+\dfrac{3x+4}{(x+1)^2}$

et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. Calculer les limites de f aux les bornes des intervalles de D_f.
2. a. Montrer que: $(\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\})\,;f'(x)=\dfrac{(x+1)(x-1)(x+2)^2}{(x+1)^4}$

   b. Étudier le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de f.
3. a. Étudier les branches infinies de la courbe (C_f).

   b. Déterminer la position de (C_f) par rapport à son asymptote oblique.
4. a. Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse -2.

   b. Montrer que la courbe (C_f) coupe l'axe des abscisses en un seul point d'abscisse α, et que : $-2<\alpha<-1$.

   c. Tracer (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$
5. Discuter graphiquement, selon les valeurs du paramètre m, le nombre de solutions de l'équation: $(E):x^3+(1-m)x^2+2(1-m)x+3-m=0$

Exercice 43

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$f(x)=x\sqrt{4x-x^2}$

et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0 et à gauche en 4, puis donner une interprétation graphique des résultats.
3. a. Montrer que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0;4[$, puis calculer $f'(x)$ pour tout x de l'intervalle $]0;4[$.

   b. Dresser le tableau de variations de f.

4 Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $[0;3]$.
Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1}, définie sur un intervalle que l'on déterminera.

Exercice 44

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = x + 1 - \sqrt{x^2 - x - 2}$
et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1 a. Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction f.

b. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, puis montrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{3}{2}$

2 Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite au point 2 et à gauche au point -1, et donner une interprétation graphique des résultats.

3 a. Montrer que f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty, -1[$ et $]2; +\infty[$ puis calculer $f'(x)$ pour tout x de l'ensemble $D - \{-1;2\}$,

b. Montrer que : $f'(x) > 0$ pour tout x de l'intervalle $]-\infty; -1[$, et que $f'(x) < 0$ pour tout x de l'intervalle $]2; +\infty[$, puis dresser le tableau de variations de f.

4 a. Montrer que la droite d'équation $y = 2x + \frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$.

b. Tracer la courbe (C) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Exercice 45

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = (x-2)\sqrt{x} - \frac{1}{2}x$
et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1 Montrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2 Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$, et donner une interprétation graphique du résultat obtenu.

3 Étudier la dérivabilité de f à droite en 0, interpréter graphiquement le résultat obtenu.

4 a. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*})\ ; f'(x) = \dfrac{(\sqrt{x}-1)(3\sqrt{x}+2)}{2\sqrt{x}}$

b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$, et dresser le tableau de variations de la fonction f.

5 Montrer que (C_f) coupe l'axe des abscisses en un seul point d'abscisses α sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et que $2 < \alpha < 3$.

6 Tracer (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

7 Montrer que la fonction g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $[1;+\infty[$ admet une fonction réciproque g^{-1},

déterminer $D_{g^{-1}}$ l'ensemble de définition de la fonction g^{-1}, puis tracer $(C_{g^{-1}})$ la courbe représentative de la fonction g^{-1} dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Exercice 46

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par:

$$f(x) = x + 3 - \frac{2(x+3)}{\sqrt{x+1}}$$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1 Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f.

2 Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3 a. Montrer que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]-1;+\infty[$

et que : $(\forall x \in D_f)\ ; f'(x) = 1 - \dfrac{(x-1)}{(x+1)\sqrt{x+1}}$

b. Montrer que: $(\forall x \in D_f)\ ; f'(x) > 0$ (On peut étudier deux cas: $(x < 1$ et $x \geq 1)$.

c. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

4 Déterminer l'intersection de C_f avec l'axe des abscisses.

5 Étudier les branches infinies de la courbe (C_f).

6 Tracer (C_f) (on admet que la courbe (C_f) admet un point d'inflexion d'abscisse 5).

Exercice 47

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$f(x) = 2\sqrt{\dfrac{x-1}{x}} + \dfrac{1}{x}$

1 Montrer que l'ensemble de définition de la fonction f est:

$D_f =]-\infty;0[\cup[1;+\infty[$

2 Calculer les limites suivantes: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, montrer que : $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$

3 Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 1. et donner une interprétation graphique du résultat obtenu.

4 Étudier les variations de f sur chacun des intervalles $]1;+\infty[$ et $]-\infty;0[$.

5 a. Déterminer l'intersection de (C_f) avec l'axe des abscisses.

b. Étudier les branches infinies de la courbe (C_f).

6 Tracer (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

7 Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $[1;+\infty[$

a. Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle que l'on déterminera.

b. Tracer $(C_{g^{-1}})$, la courbe de la fonction g^{-1} dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Exercice 48

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$f(x) = x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1 Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f, et calculer $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$.

2 Étudier la dérivabilité de la fonction f à gauche en 1, et donner une interprétation graphique du résultat obtenu.

3 a. Montrer que de la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]-1;1[$, puis montrer que : $(\forall x\in]-1;1[)\ ; f'(x) = \dfrac{1-x-x^2}{(1+x)^2\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}}$

b. En déduire le signe de $f'(x)$, et dresser le tableau de variations de f.

4 Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la figure f au point O.

5 Tracer (C_f), on prend : $f\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \simeq 0,3$

6 A partir de la courbe de la fonction f, déterminer l'ensemble (S) des points $M(x;y)$ du plan qui vérifient : $(x-1)x^2+(x+1)y^2=0$

Exercice 49

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x)=\sqrt{x^2-|x|+1}$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1 Montrer que D_f l'ensemble de définition de la fonction f est: $D_f=\mathbb{R}$.

2 Étudier la parité de la fonction f.

3 a. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, puis en déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b. Étudier la branche infinie de la courbe de f au voisinage de $+\infty$.

4 a. Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0, et donner une interprétation graphique du résultat obtenu.

b. Étudier les variations de la fonction f et donner son tableau de variations sur $\mathbb{R}^+$ puis sur $\mathbb{R}$.

5 Tracer (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

6 Soit g la restriction de f sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$.

a. Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle que l'on déterminera.

b. Tracer $(C_{g^{-1}})$, la courbe de fonction g^{-1} dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Exercice 50

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par: $f(x)=\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1 Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f.

2 a. Calculer les limites de la fonction f aux bornes de D_f.

b. Étudier les branches infinies de (C_f).

c. Étudier la position relative de la courbe (C_f) avec la droite $(D): y=1$.

3 a. Montrer que : $(\forall x \in]0;+\infty[)\ ; f'(x) = \dfrac{x-1}{x^2(\sqrt{x}+1)}$

b. Dresser le tableau de variations de f.

4 Tracer (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

5 Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $]0;1]$.

a. Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera,

b. Tracer $(C_{g^{-1}})$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

c. Calculer $g\left(\frac{1}{4}\right)$ puis déterminer $(g^{-1})'(1)$,

d. Donner l'expression de $g^{-1}(x)$ pour x de l'intervalle J.

Exercice 51

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par: $f(x) = \sqrt{2x-2} - x + 1$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1 Déterminer l'ensemble de définition de f.

2 Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

3 Déterminer la branche infinie de la courbe de f au voisinage de $+\infty$.

4 Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en $x_0 = 1$, puis donner une interprétation graphique du résultat obtenu.

5 a. Montrer que : $(\forall x \in]1;+\infty[)\ ; f'(x) = \dfrac{3-2x}{\sqrt{2x-2}(\sqrt{2x-2}+1)}$

b. Étudier le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de f.

6 Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $x_0 = 3$.

7 Montrer que : $f''(x) = \dfrac{-1}{(2x-2)^{\frac{3}{2}}}$ pour tout x de $]1;+\infty[$, puis étudier la concavité de (C_f) sur $[1;+\infty[$.

8 Tracer (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

9 Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I = \left[\frac{3}{2};+\infty\right[$.

a. Montrer que g admet un fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on prècisera.

b. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction g^{-1} au point d'abscisse $x_0 = 0$.

c. Tracer la courbe de la fonction g^{-1} dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

10 Montrer que pour tout x de J on a : $g^{-1}(x) = 2 - x + \sqrt{1-2x}$

Exercice 52

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par:
$f(x) = x + 1 + \sqrt{x^2+x+1}$
et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1 Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f, puis montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2 a. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

c. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = 2x + \frac{3}{2}$ est une asymptote à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$.

3 a. Montrer que : $(\forall x \in D_f)\ ; f'(x) = \dfrac{2\sqrt{x^2+x+1}+2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$

b. Montrer que la fonction f est croissante sur D_f, puis dresser son tableau de variation.

4 a. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisse 0.

b. Tracer (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

5 a. Montrer que f admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J que l'on déterminera,

b. Calculer $(f^{-1})'(2)$,

c. Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x de J.

Exercice 53

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :
$f(x) = \dfrac{x^2+5}{\sqrt{x^2+1}}$
et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1 a. Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f, et étudier la parité de f.

b. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2 Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ; f'(x)=\dfrac{x(x^2-3)}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$, puis dresser le tableau de variations de la fonction f.

3 Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0$, puis interpréter graphiquement ce résultat.

4 Tracer (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

5 Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $[0;\sqrt{3}]$.

a. Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera,

b. Calculer $g(1)$, puis déterminer $(g^{-1})'(3\sqrt{2})$.

Solutions

Exercice 42

On a : $f(x)=x-1+\dfrac{3x+4}{(x+1)^2}$

1 Déterminons les limites de f aux bornes de D_f :

On a : $D_f=]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$

- Soit x de $]0;+\infty[$; on a : $f(x)=x-1+\dfrac{x\left(3+\frac{4}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}=x-1+\dfrac{3+\frac{4}{x}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}$

puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} x-1=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3+\frac{4}{x}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}=3$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3+\frac{4}{x}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}=0$

d'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

- de même on obtient : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

- puisque : $\lim\limits_{x\to-1}(x+1)^2=0$ et $(\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\})\ ;(x+1)^2>0$

et $\lim\limits_{x\to-1}(3x+4)=1$ alors : $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x+4}{(x+1)^2}=+\infty$

et $\lim\limits_{x\to-1}(x-1)=2$, d'où : $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=+\infty$

2 a. La fonction f est dérivable en tout point de D_f (car f est une fonction rationnelle):

- **Calculons $f'(x)$:**

et $(\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\})\ ;f'(x)=(x-1)'+\dfrac{(3x+4)'(x+1)^2-(3x+4)((x+1)^2)'}{((x+1)^2)^2}$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 1+\frac{3(x+1)^2-(3x+4)(2)(x+1)'(x+1)}{(x+1)^4}\\
&= 1+\frac{3(x+1)^2-2(x+1)(3x+4)}{(x+1)^4}\\
&= \frac{(x+1)^4+3(x+1)^2-2(x+1)(3x+4)}{(x+1)^4}\\
&= \frac{(x+1)[(x+1)^3+3(x+1)-2(3x+4)]}{(x+1)^4}\\
&= \frac{(x+1)(x^3+3x^2+3x+1+3x+3-6x-8)}{(x+1)^4}\\
&= \frac{(x+1)(x^3+3x^2-4)}{(x+1)^4}
\end{aligned}
$$

et on a : $(\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\})\,;\,(x-1)(x+2)^2=(x-1)(x^2+4x+4)$

$$
\begin{aligned}
&= x^3+4x^2+4x-x^2-4x-4\\
&= x^3+3x^2-4
\end{aligned}
$$

Donc : $(\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\})\,;f'(x)=\dfrac{(x+1)(x-1)(x+2)^2}{(x+1)^4}$

b. Étudions le signe de $f'(x)$:

Le signe de $f'(x)$ est celui de $(x+2)^2(x+1)(x-1)$ sur $\mathbb{R}-\{-1\}$.

(car : $(\forall x\in D_f);(x+1)^4>0$

et on a:

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$(x+1)(x-1)$	+		+	0	−	0	+		
$(x+2)^2$	+	0	+		+		+		

donc le tableau de signe de $f'(x)$ est le suivant :

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+		−	0	+		

Dressons le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+		−	0	+		
f	$-\infty$	↗	-5	↗	$+\infty$	↘	$\frac{7}{4}$	↗	$+\infty$

3 a. Étudions les branches infinies de (C_f):

▸ On a : $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = +\infty$; donc la droite d'équation $x = -1$ est une asymptote verticale à (C_f).

▸ On a : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$

Puisque : $(\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\})\ ; f(x) = (x-1) + \dfrac{3x+4}{(x+1)^2}$

et $\lim\limits_{|x|\to +\infty} \dfrac{3x+4}{(x+1)^2} = 0$; d'où : la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

b. Position de (C_f) avec son asymptote oblique :

Soit x de $\mathbb{R} - \{-1\}$; on a le signe : $f(x) - (x-1)$ est celui de $3x + 4$.

car : $(\forall x \in D_f)\ ; (x+1)^2 > 0$; et soit : $(D) : y = x - 1$

d'où : on obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{4}{3}$	-1	$+\infty$
$3x+4$	$-$	0 $+$		$+$
Position (C_f) avec la droite (D)	(C_f) est en dessous de (D)	(C_f) est au dessus de (D)		(C_f) est au dessus de (D)

et on a : $f\left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{4}{3} - 1 = \frac{-7}{3}$; $(C_f) \cap (D) = I\left(-\frac{4}{3}; -\frac{7}{3}\right)$

4 a. Déterminons l'équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse -2:

On a : $f'(-2) = 0$, d'où l'équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse -2 est:

$y = f(-2) = -5$ $\qquad ((T) : y = f'(-2)(x+2) + f(-2))$

b. Montrons que la courbe de f coupe l'axe des abscisses en un seul point α, et que : $-2 < \alpha < -1$

▸ La fonction f est continue sur tout intervalle de D_f (car f est une fonction rationnelle).

▸ Sur l'intervalle $]-1; +\infty[$, f admet un valeur minimale qui est $\frac{7}{4}$; donc : $(\forall x \in]-1; +\infty[) ; f(x) \geq \frac{7}{4}$

D'où l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution sur $]-1; +\infty[$.

▸ Sur l'intervalle $]-\infty;-1[$, f est strictement croissante et continue et $f(]-\infty;-1[)=]-\infty;+\infty[$

On a : $0\in]-\infty;+\infty[$, donc l'équation $f(x)=0$ admet une seule solution α sur l'intervalle $]-\infty;-1[$.

Résumé: l'équation $f(x)=0$ admet une seule solution α sur D_f.

▸ Vérifions que : $-2<\alpha<-1$

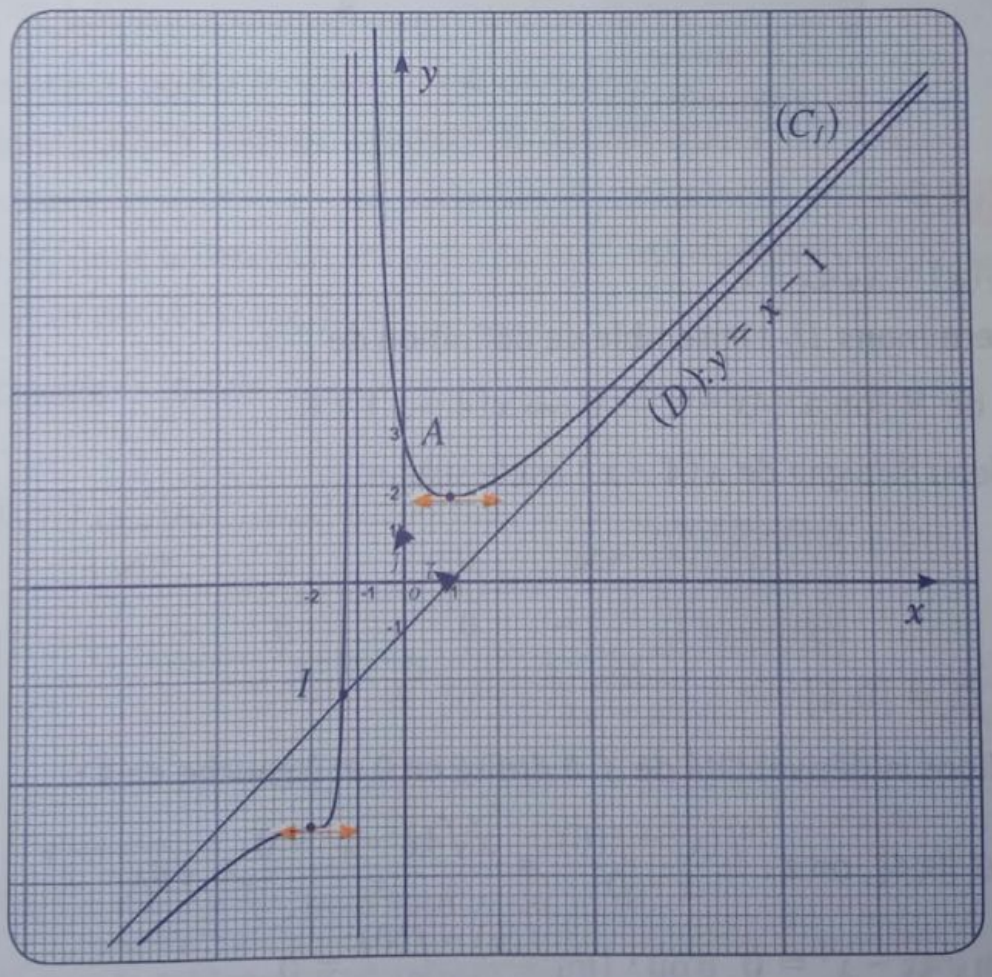
On a : $f(]-2;-1[)=]-5;+\infty[$

Or : $0\in]-5;+\infty[$, d'où : $\alpha\in]-2;-1[$, avec : $f(\alpha)=0$

conclusion : la courbe de f coupe l'axe des abscisses en un seul point d'abscisse α, tel que : $-2<\alpha<-1$.

c. Construction de (C_f):

On a : $f(0)=3$ Donc : $(C_f)\cap(oy)=\{A(0;3)\}$



5 Discutons suivant les valeurs de m nombre de solutions de l'équation :

$(E):x^3+(1-m)x^2+2(1-m)x+3-m=0$

▸ On remarque que : $x=-1$ n'est pas solution;

car : $(-1)^3+(1-m)(-1)^2+2(1-m)(-1)+3-m=5$

Soit $x \in \mathbb{R}-\{-1\}$, on a :

$$x^3+(1-m)x^2+2(1-m)x+3-m=0 \Leftrightarrow x^3+x^2-mx^2+2x-2mx+3$$
$$\Leftrightarrow x^3+x^2+2x+3=m(x^2+2x-$$
$$\Leftrightarrow x^3+x^2+2x+3=m(x+1)^2$$
$$\Leftrightarrow m=\frac{x^3+x^2+2x+3}{(x+1)^2}$$
$$\Leftrightarrow m=f(x)$$

(On vérifie que : $(\forall x \in \mathbb{R}-\{-1\})\ ; \frac{x^3+x^2+2x+3}{(x+1)^2}=x-1+\frac{3x-4}{(x+1)^2}$)

Donc le nombre de solutions de l'équation (E) est le nombre des points d'intersection de (C_f) avec la droite d'équation $y=m\ ; m \in \mathbb{R}$; graphiquement on obtient le tableau suivant :

m	$-\infty$		$\frac{7}{4}$		$+\infty$
Nombre de solutions	1		2	3	

Exercice 43

Oa : $f(x)=x\sqrt{4x-x^2}$

1 Déterminons D_f l'ensemble de définition de f :

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $4x-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x(4-x) \geq 0$

Le tableau de signe de $x(4-x)$ est le suivant :

x	$-\infty$		0		4	$+\infty$
$x(4-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$

Donc : $D_f=[0;4]$

2 Étudions la dérivabilité de f à droite en 0 et à gauche en 4 :

Soit $x \in]0;4[$, on a : $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x\sqrt{4x-x^2}-0}{x}=\sqrt{4x-x^2}$

Or : $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{4x-x^2}=0$, d'où : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$

Donc la fonction f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0)=0$.

Interprétation graphique :

La courbe (C_f) admet une demi-tangente horizontale au point $O(0;0)$.

▸ Soit $x \in]0;4[$, on a :

$$\frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \frac{x\sqrt{4x-x^2}-0}{x-4} = \frac{x\sqrt{x(4-x)}}{x-4} = \frac{x.x(4-x)}{(x-4)\sqrt{x(4-x)}}$$

$$= \frac{-x^2(x-4)}{(x-4)\sqrt{x(4-x)}} = \frac{-x^2}{\sqrt{x(4-x)}}$$

et on a : $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 4 \\ x<4}} -x^2 = -16 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 4 \\ x<4}} \sqrt{x(4-x)} = 0 \text{ et; } (\forall x \in]0;4[) ; \sqrt{x(4-x)} > 0 \end{cases}$

d'où : $\lim\limits_{\substack{x\to 4 \\ x<4}} \frac{f(x)-f(4)}{x-4} = -\infty$

Ainsi: f n'est pas dérivable à gauche en 4 .

Interprétation graphique :

La courbe (C_f) de f admet une demi-tangente verticale (dirigée vers le haut) au point $B(4;0)$.

3 a. ▸ Montrons que la fonction f est dérivable sur $]0;4[$.

La fonction: $u : x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $]0;4[$.

et la fonction: $x \mapsto 4x - x^2$ est dérivable et strictement positive sur l'intervalle $]0;4[$; donc la fonction $v : x \longmapsto \sqrt{4x-x^2}$ est dérivable sur $]0;4[$; d'où : $f = u \times v$ et dérivable sur $]0;4[$.

▸ **Calculons $f'(x)$**

On a :

$$(\forall x \in]0;4[) ; f'(x) = (x\sqrt{4x-x^2})'$$

$$= (x)'\sqrt{4x-x^2} + x\frac{(4x-x^2)'}{2\sqrt{4x-x^2}}$$

$$= \sqrt{4x-x^2} + x.\frac{4-2x}{2\sqrt{4x-x^2}} = \sqrt{4x-x^2} + \frac{2x-x^2}{\sqrt{4x-x^2}}$$

$$= \frac{4x-x^2+2x-x^2}{\sqrt{4x-x^2}} = \frac{6x-2x^2}{\sqrt{4x-x^2}} = \frac{2x(3-x)}{\sqrt{4x-x^2}}$$

D'où : $f'(x) = \frac{2x(3-x)}{\sqrt{4x-x^2}}$; pour tout x de $]0;4[$.

b. Dressons le tableau de variations de f :

On a : $(\forall x \in]0;4[) ; f'(x) = \frac{2x(3-x)}{\sqrt{4x-x^2}}$

Soit : $x \in]0;4[$, on a : $f'(x) = 0 \iff 2x = 0$ ou $3-x = 0$

$$\iff x = 3$$

Le signe de $2x(3-x)$ sur l'intervalle $]0;4[$.

est celui de $3-x$ (car : $(\forall x \in]0;4[)\ ;\ 2x > 0$)

Donc le tableau de variations de f est le suivant:

On a : $f(3) = 3\sqrt{12-9} = 3\sqrt{3}$

x	0		3		4
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
f	0	↗	$3\sqrt{3}$	↘	0

4 Montrons que g admet une fonction réciproque g^{-1} :

La fonction g est continue sur l'intervalle $[0;3]$, comme produit de deux fonctions continues sur l'intervalle $[0;3]$ qui sont: $x \mapsto x$ et $x \mapsto \sqrt{4x-x^2}$.

et la fonction g est strictement croissante sur $[0;3]$.

D'où : g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur :

$g([0;3]) = [g(0);g(3)] = [0;3\sqrt{3}]$

Exercice 44

On a : $f(x) = x+1-\sqrt{x^2-x-2}$

1 a. Déterminons D l'ensemble de définition de f :

Soit x un élément de $\mathbb{R}$, on a : $x \in D \iff x^2-x-2 \geq 0$

or les deux solutions de l'équation $x^2-x-2=0$ sont -1 et 2. (après avoir calculé Δ on a : $\Delta = 9$).

Donc : $x \in D \iff (x+1)(x-2) \geq 0$

$\iff x \in]-\infty;-1] \cup [2;+\infty[$

Donc : $D =]-\infty;-1] \cup [2;+\infty[$

b. Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$:

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-x-2) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x^2) = +\infty$; donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-x-2} = +\infty$

et on a : $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1) = -\infty$;

d'où : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x+1-\sqrt{x^2-x-2}) = -\infty$

▸ **Montrons que** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{3}{2}$:

Soit x un élément de $[2;+\infty[$, on a :

$$f(x) = x - \sqrt{x^2-x-2} + 1 = \frac{(x-\sqrt{x^2-x-2})(x+\sqrt{x^2-x-2})}{x+\sqrt{x^2-x-1}} + 1$$

$$= \frac{x+2}{x+\sqrt{x^2-x-1}} + 1 = \frac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}\right)} + 1$$

$$= \frac{1+\frac{2}{x}}{1+\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}} + 1$$

puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right) = 1$

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{2}{x}}{1+\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}} + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

2 ▸ **Étudions la dérivabilité de f à droite en 2:**

Soit x un élément de $]2;+\infty[$; on a : $f(2) = 3$

et : $\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{x+1-\sqrt{x^2-x-2}-3}{x-2}$

$$= \frac{x-2-\sqrt{x^2-x-2}}{x-2}$$

$$= 1 - \frac{\sqrt{(x+1)(x-2)}}{x-2}$$

$$= 1 - \sqrt{\frac{(x+1)(x-2)}{(x-2)^2}} \qquad (\text{car} : (x-2>0))$$

$$= 1 - \sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$$

puisque : $\lim\limits_{x\to2^+}\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = +\infty$ (car : $\lim\limits_{x\to2}(x+1) = 3$ et $\lim\limits_{x\to2^+}(x-2) = 0^+$)

alors : $\lim\limits_{x\to2^+} \sqrt{\frac{x+1}{x-2}} = +\infty$

D'où : $\lim\limits_{x\to2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to2^+}\left(1-\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}\right) = -\infty$

Donc la fonction f n'est pas dérivable à droite en 2.

Interprétation graphique :

La courbe (C) admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 2 (diri-

gée vers le bas). $\left(\text{d'équation: } \begin{cases} x = 2 \\ y \leq 3 \end{cases}\right)$

▸ **Étudions la dérivabilité de f à gauche en -1 :**

Soit x un élément de $]-\infty;-1[$, on a : $f(-1)=0$

et $\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \dfrac{x+1-\sqrt{x^2-x-2}}{x+1}$

$= 1-\dfrac{\sqrt{(x+1)(x-2)}}{x+1}$

$= 1+\sqrt{\dfrac{(x+1)(x-2)}{(x+1)^2}}$ car : $(x+1<0)$

$= 1+\sqrt{\dfrac{x-2}{x+1}}$

Or : $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)=+\infty$ (car : $\lim\limits_{x\to-1}(x-2)=-3$ et $\lim\limits_{x\to-1^-}(x+1)=0^-$)

alors : $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\sqrt{\dfrac{x-2}{x+1}}=+\infty$

donc : $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to1^-}\left(1+\sqrt{\dfrac{x-2}{x+1}}\right)=+\infty$

d'où la fonction f n'est pas dérivable à gauche en -1.

- **Interprétation graphique:** La courbe (C) admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse -1; dirigée vers le bas.

$\left(\text{son équation : } \begin{cases} x = -1 \\ y \leq 0 \end{cases}\right)$

3 a. Montrons que f est dérivable sur $]2;+\infty[$:

La fonction : $u: x \mapsto x^2-x-2$ est dérivable sur $]2;+\infty[$ et $u(x)>0$ pour tout x de $]2;+\infty[$, donc la fonction $-\sqrt{u}$ est dérivable sur $]2;+\infty[$.

et la fonction $v: x \mapsto x+1$ est dérivable sur $]2;+\infty[$.

d'où : $f = v-\sqrt{u}$ est dérivable sur $]2;+\infty[$;

▸ De même la fonction f est dérivable sur $]-\infty;-1[$.

▸ Calculons $f'(x)$ pour tout x de $D-\{-1;2\}$:

Soit x de $D-\{-1;2\}$; on a :

$$f'(x)=1-\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-2}}=\frac{2\sqrt{x^2-x-2}-2x+1}{2\sqrt{x^2-x-2}}$$

Donc : $(\forall x \in D-\{-1;2\})\ ; f'(x) = \dfrac{2\sqrt{x^2-x-2}-2x+1}{2\sqrt{x^2-x-2}}$

b. Étudions le signe de $f'(x)$:

- Si : $x < -1$ alors : $-2x+1 > 3$; donc : $-2x+1 > 0$

d'où : $2\sqrt{x^2-x-2}-2x+1 > 0$; ainsi : $f'(x) > 0$ pour tout x de $]-\infty;-1[$.

- Si : $x > 2$, alors :

$$f'(x) = \frac{(2\sqrt{x^2-x-2}-(2x-1))(2\sqrt{x^2-x-2}+(2x-1))}{2\sqrt{x^2-x-2}(2\sqrt{x^2-x-2}+(2x-1))}$$

$$= \frac{4x^2-4x-8-(4x^2-4x+1)}{2\sqrt{x^2-x-2}(2\sqrt{x^2-x-2}+(2x-1))}$$

$$= \frac{-9}{2\sqrt{x^2-x-2}(2\sqrt{x^2-x-2}+(2x-1))}$$

puisque : $x > 2$; alors : $2x-1 > 3$; d'où : $2x-1 > 0$

donc : $2\sqrt{x^2-x-2}+(2x-1) > 0$

par suite : $\dfrac{-9}{2\sqrt{x^2-x-2}(2\sqrt{x^2-x-2}+(2x-1))} < 0$

c'est-à-dire : $f'(x) < 0$ pour tout x de $]2;+\infty[$:

- Le tableau des variations de f : est le suivant :

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	‖	‖	-
f	$-\infty$ ↗	0 ‖	3 ↘	$\frac{3}{2}$

4 a. L'asymptote oblique :

Soit x de $]-\infty;-1[$, on a :

$$f(x)-\left(2x+\frac{1}{2}\right) = x+1-\sqrt{x^2-x-2}-2x-\frac{1}{2}$$

$$= -x-\sqrt{x^2-x-2}+\frac{1}{2}$$

$$= -\left(\frac{(\sqrt{x^2-x-2}+x)(\sqrt{x^2-x-2}-x)}{\sqrt{x^2-x-2}-x}\right)+\frac{1}{2}$$

$$= \frac{x+2}{\sqrt{x^2-x-2}-x}+\frac{1}{2}$$

d'où : $f(x)-\left(2x+\frac{1}{2}\right)=\dfrac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}+1\right)}+\frac{1}{2}$

$$=\frac{-\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}+1}+\frac{1}{2}$$

Or : $\lim\limits_{x\to-\infty} 1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}=1$ alors : $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=1$

et on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} 1+\frac{2}{x}=1$; d'où : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}+1}=-\frac{1}{2}$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-\left(2x+\frac{1}{2}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}+1}+\frac{1}{2}=0$

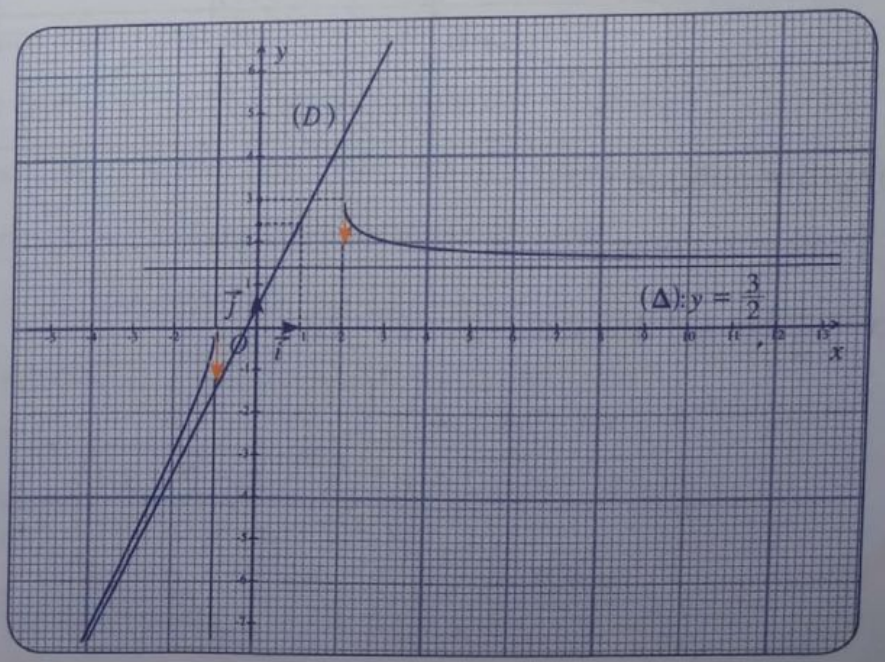
Conclusion :

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-\left(2x+\frac{1}{2}\right)\right)=0$

donc la droite (D) d'équation : $y=2x+\frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $-\infty$.

b. La courbe (C) :

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\frac{3}{2}$; donc $(\Delta): y=\frac{3}{2}$ est une asymptote horizontale à (C_f) au voisinage de $+\infty$.



Exercice 45

On a : $f(x)=(x-2)\sqrt{x}-\frac{1}{2}x$

1 Montrons que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$:

Soit : $x\in]0;+\infty[$; on a : $f(x)=x\left(1-\frac{2}{x}\right)\sqrt{x}-\frac{1}{2}x$

$$=x\left[\left(1-\frac{2}{x}\right)\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right]$$

puisque : $\begin{cases}\bullet\lim\limits_{x\to+\infty}1-\frac{2}{x}=1\\ \bullet\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)\sqrt{x}-\frac{1}{2}=+\infty\\ \bullet\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty\end{cases}$; alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

2 Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$:

Soit : $x\in]0;+\infty[$, on a : $\frac{f(x)}{x}=\frac{(x-2)\sqrt{x}-\frac{1}{2}x}{x}$

$$=\left(\frac{x-2}{x}\right)\sqrt{x}-\frac{1}{2}=\left(1-\frac{2}{x}\right)\sqrt{x}-\frac{1}{2}$$

comme : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}1-\frac{2}{x}=1$; on a donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$

Interprétation graphique :

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$

Donc la courbe de f admet une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

3 Étudions la dérivabilité de f à droite en 0:

Soit : $x\in]0;+\infty[$, on a :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{(x-2)\sqrt{x}-\frac{1}{2}x-0}{x}=(x-2)\frac{\sqrt{x}}{x}-\frac{1}{2}=(x-2).\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{2}$$

puisque : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}x-2=-2\\ \lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty\end{cases}$; alors : $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-\infty$

Donc : f n'est pas dérivable à droite en 0.

Interprétation graphique :

(C_f) admet une demi-tangente verticale au point $O(0;0)$ dirigée vers le bas .

4 a. Montrons que : $(\forall x > 0)\ ; f'(x) = \dfrac{(\sqrt{x}-1)(3\sqrt{x}+2)}{2\sqrt{x}}$:

La fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$.

Soit : $x \in]0;+\infty[$,

on a : $f'(x) = (x-2)'\sqrt{x} + (x-2)(\sqrt{x})' - \left(\frac{1}{2}x\right)'$

$= \sqrt{x} + (x-2).\dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{2x+(x-2)-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \dfrac{3x-2-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

d'autre part on a :

$(\sqrt{x}-1)(3\sqrt{x}+2) = 3x + 2\sqrt{x} - 3\sqrt{x} - 2 = 3x - \sqrt{x} - 2$

Donc : $(\forall x \in]0;+\infty[)\ ; f'(x) = \dfrac{(\sqrt{x}-1)(3\sqrt{x}+2)}{2\sqrt{x}}$

b. Étudions le signe de $f'(x)$ sur $]0;+\infty[$:

Le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$ est celui de $\sqrt{x}-1$ (car : $3\sqrt{x}+2 > 0$ et $2\sqrt{x} > 0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$), et on a : $\sqrt{x}-1 = \dfrac{x-1}{\sqrt{x}+1}$

donc le signe de $f'(x)$ est celui de $x-1$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$

Soit : $x \in]0;+\infty[$ on a : $f'(x) > 0 \iff x > 1$

$f'(x) < 0 \iff 0 < x < 1$

$f'(x) = 0 \iff x = 1$

Le tableau de variations de f est le suivant sur l'intervalle $]0;+\infty[$:

$f(1) = -1 - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{3}{2}$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	0	↘	$-\frac{3}{2}$	↗	$+\infty$

5 Montrons que la courbe (C_f) coupe l'axe des abscisses en un seul point α sur $]0;+\infty[$, et que : $2 < \alpha < 3$.

La fonction f est continue sur $[0;+\infty[$, comme somme de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$: $x \mapsto (x-2)\sqrt{x}$ et $x \longmapsto -\dfrac{1}{2}x$.

Sur l'intervalle $]0;1]$, on a : $f(]0;1]) = \left[-\dfrac{3}{2};0\right[$

donc : $(\forall x \in]0;1])$; $f(x) < 0$

Par suite l'équation $f(x)=0$ n'a pas de solutions sur l'intervalle $]0;1]$.

Sur l'intervalle $[1;+\infty[$ on a : f est continue et strictement croissante sur $[1;+\infty[$ donc : $f([1;+\infty[)=\left[-\frac{3}{2};+\infty\right[$:

puisque : $0\in\left[-\frac{3}{2};+\infty\right[$; alors l'équation $f(x)=0$ admet une seule solution α sur l'intervalle $[1;+\infty[$.

Conclusion :

Sur l'intervalle $]0;+\infty[$; l'équation $f(x)=0$ admet une seule solution α

vérifions que : $1<\alpha<2$

alors : $f(2)=-\frac{1}{2}$ et $f(3)=(3-2)\sqrt{3}-\frac{3}{2}=\sqrt{3}-\frac{3}{2}$

par suite : $\sqrt{3}-\frac{3}{2}\simeq 0,23$

donc : $f(2).f(3)<0$; d'où : $f(2)<f(\alpha)<f(3)$

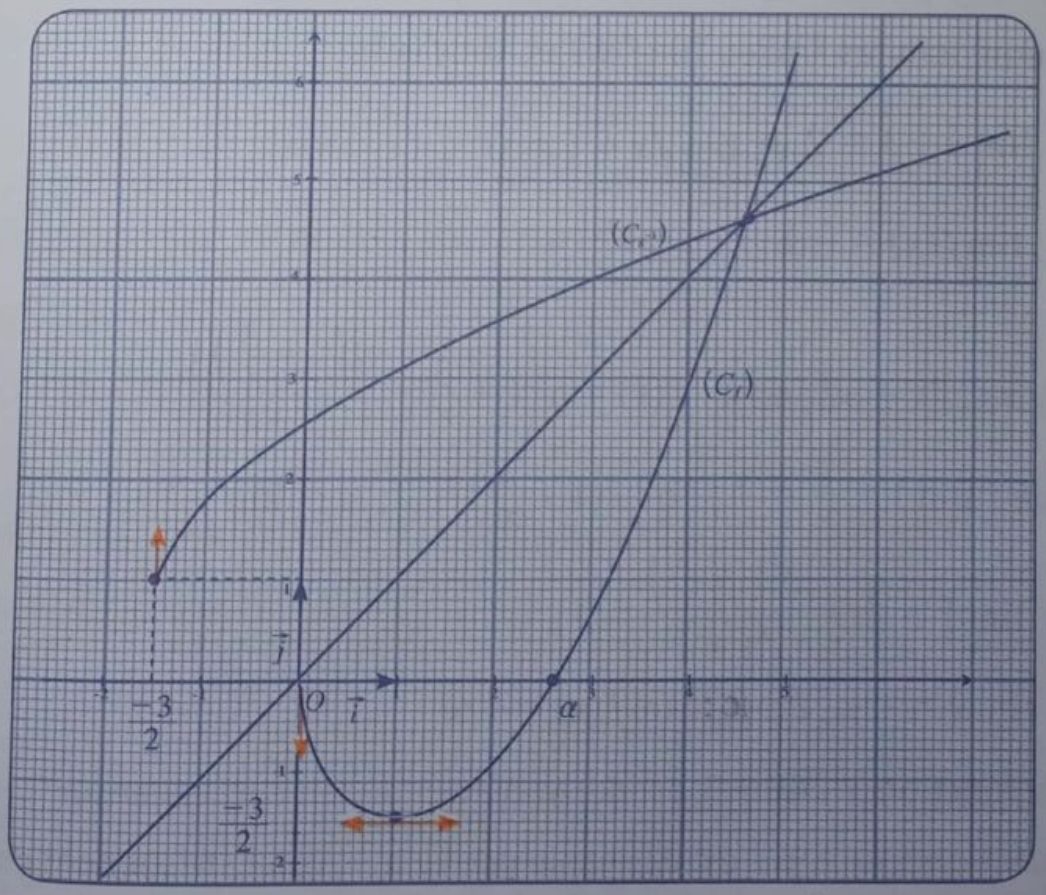
par suite : $2<\alpha<3$ (car f est strictement croissante sur $[1;+\infty[$)

donc la courbe (C_f) coupe l'axe des abscisses en un seul réel α sur $]0;+\infty]$.

et que : $2<\alpha<3$.

(remarque que : $f(0)=0$; donc : $(C_f)\cap(Ox)=\{O(0;0)\ ;\ A(\alpha;0)\}$

6 Traçons la courbe C_f :



7 Montrons que g admet une fonction réciproque g^{-1} :

La fonction f est continue sur $[0;+\infty[$ en particulier sur $[1;+\infty[$.

Donc la fonction g est continue sur $[1;+\infty[$ (somme de deux fonctions continues), et g est strictement croissante sur $[1;+\infty[$. (car f est strictement croissante sur $[1;+\infty[$).

Donc : g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur

$$D_{g^{-1}} = g([1;+\infty[) = \left[g(1); \lim_{x\to+\infty} g(x)\right[$$
$$= \left[-\frac{3}{2};+\infty\right[$$

▸ La courbe $(C_{g^{-1}})$ (voir figure précédente):

Dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (C_g) et $(C_{g^{-1}})$ sont symétriques par rapport la droite d'équation $y = x$.

Exercice 46

$$f(x) = x + 3 - \frac{2(x+3)}{\sqrt{x+1}}$$

1 Déterminons D_f l'ensemble de définition de f :

Si x de $\mathbb{R}$, on a : $x \in D_f \iff x+1 > 0$

$$\iff x > -1$$

Donc : $D_f =]-1;+\infty[$

2 Déterminons les limites $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

On a : $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} x+3 = 2$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} \sqrt{x+1} = 0^+$

Donc : $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x) = -\infty$

▸ Soit : $x \in]0;+\infty[$, on a : $f(x) = x\left(1 + \frac{3}{x} - \frac{2\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\sqrt{x+1}}\right)$

puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \frac{3}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} 2\left(1+\frac{3}{x}\right) = 2$; et : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}} = 0$

alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \frac{3}{x} - \frac{2\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\sqrt{x+1}} = 1$;

on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

3 a. La fonction $x \mapsto x+3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $]-1;+\infty[$ et la fonction $x \mapsto x+1$ est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et strictement positive sur $]-1;+\infty[$, alors la fonction $x \mapsto \sqrt{x+1}$ est dérivable sur $]-1;+\infty[$.

Donc : f est dérivable sur $]-1;+\infty[$.

▸ Montrons que: $(\forall x \in]-1;+\infty[)\ ; f'(x) = 1 - \dfrac{x-1}{(x+1)\sqrt{x+1}}$

$$(\forall x \in]-1;+\infty[)\ ; f'(x) = (x+3)' - \left(\frac{2(x+3)}{\sqrt{x+1}}\right)'$$

$$= 1 - \frac{2\sqrt{x+1} - 2(x+3).\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}}{(\sqrt{x+1})^2} = 1 - \frac{2(x+1)-(x+3)}{\sqrt{x+1}(x+1)}$$

$$= 1 - \frac{x-1}{(x+1)\sqrt{x+1}}$$

b. Montrons que : $f'(x) > 0$ pour tout x de $]-1;+\infty[$:

▸ Si : $-1 < x < 1$ alors : $x - 1 < 0$; d'où : $\dfrac{x-1}{(x+1)\sqrt{x+1}} < 0$

donc : $-\dfrac{x-1}{(x+1)\sqrt{x+1}} > 0$; par suite : $1 - \dfrac{x-1}{(x+1)\sqrt{x+1}} > 0$

Donc : $(\forall x \in]-1;1[)\ ; f'(x) > 0$

▸ Si : $x \geq 1$, alors : $f'(x) > 0 \iff 1 - \dfrac{x-1}{(x+1)\sqrt{x+1}} > 0$

$$\iff 1 > \frac{x-1}{\sqrt{x+1^3}}$$

$$\iff \sqrt{x+1^3} > x - 1$$

$$\iff (x+1)^3 > (x-1)^2$$

$$\iff x^3 + 3x^2 + 3x + 1 > x^2 - 2x + 1$$

$$\iff x^3 + 2x^2 + 5x > 0$$

C'est vérifie pour tout x de $[1;+\infty[$; on a : $(\forall x \geq 1); f'(x) > 0$

Dans les deux cas : $(\forall x \in]-1;+\infty[)\ ; f'(x) > 0$

c. Tableau de variations de f :

d'après ce qui précède, on a : $(\forall x \in]-1;+\infty[)\ ; f'(x) > 0$

Donc la fonction f est strictement croissante sur $]-1;+\infty[$.

▸ D'où le tableau de variations de f :

x	-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	↗	$+\infty$

3 L'intersection de (C_f) avec l'axe des abscisses :

Soit $x \in]-1;+\infty[$; on a : $f(x)=0 \Leftrightarrow x+3-\dfrac{2(x+3)}{\sqrt{x+1}}=0$

$\Leftrightarrow (x+3)\left(1-\dfrac{2}{\sqrt{x+1}}\right)=0$

$\Leftrightarrow x+3=0$ ou $1=\dfrac{2}{\sqrt{x+1}}$

$\Leftrightarrow \underbrace{x=-3}_{impossible}$ ou $\sqrt{x+1}=2$

$\Leftrightarrow x+1=4$

$\Leftrightarrow x=3$

Donc : (C_f) coupe l'axe des abscisses au point $A(3;0)$.

4 Étude des branches infinies de (C_f) :

On a : $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x)=-\infty$; donc : (C_f) admet une asymptote verticale d'équation $x=-1$.

et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$; déterminons $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

Soit $x \in]0;+\infty[$; on a : $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{x+3-\dfrac{2(x+3)}{\sqrt{x+1}}}{x}=1+\dfrac{3}{x}-\dfrac{2\left(1+\dfrac{3}{x}\right)}{\sqrt{x+1}}$

or : $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{3}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2\left(1+\dfrac{3}{x}\right)}{\sqrt{x+1}}=0$, d'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$

▸ Déterminons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x$:

Soit $x \in]0;+\infty[$; on a : $f(x)-x=x+3-\dfrac{2(x+3)}{\sqrt{x+1}}-x=3-\dfrac{2(x+3)}{\sqrt{x+1}}$

$=3-\dfrac{x}{\sqrt{x}}\dfrac{2\left(1+\dfrac{3}{x}\right)}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}}=3-\sqrt{x}\,.\dfrac{2\left(1+\dfrac{3}{x}\right)}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}}$

puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\left(1+\dfrac{3}{x}\right)}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}}=2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(-\sqrt{x})=-\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=-\infty$

2ème méthode :

Soit x de $]0;+\infty[$; on a : $f(x)-x=3-\dfrac{2(x+3)}{\sqrt{x+1}}=3-\dfrac{2(x+3)}{x+1}.\sqrt{x+1}$

$=3-\dfrac{2\left(1+\dfrac{3}{x}\right)}{1+\dfrac{1}{x}}.\sqrt{x+1}$

puisque : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} 3 = 3 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2\left(1+\frac{3}{x}\right)}{1+\frac{1}{x}} = -2 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} = +\infty \end{cases}$; alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = -\infty$

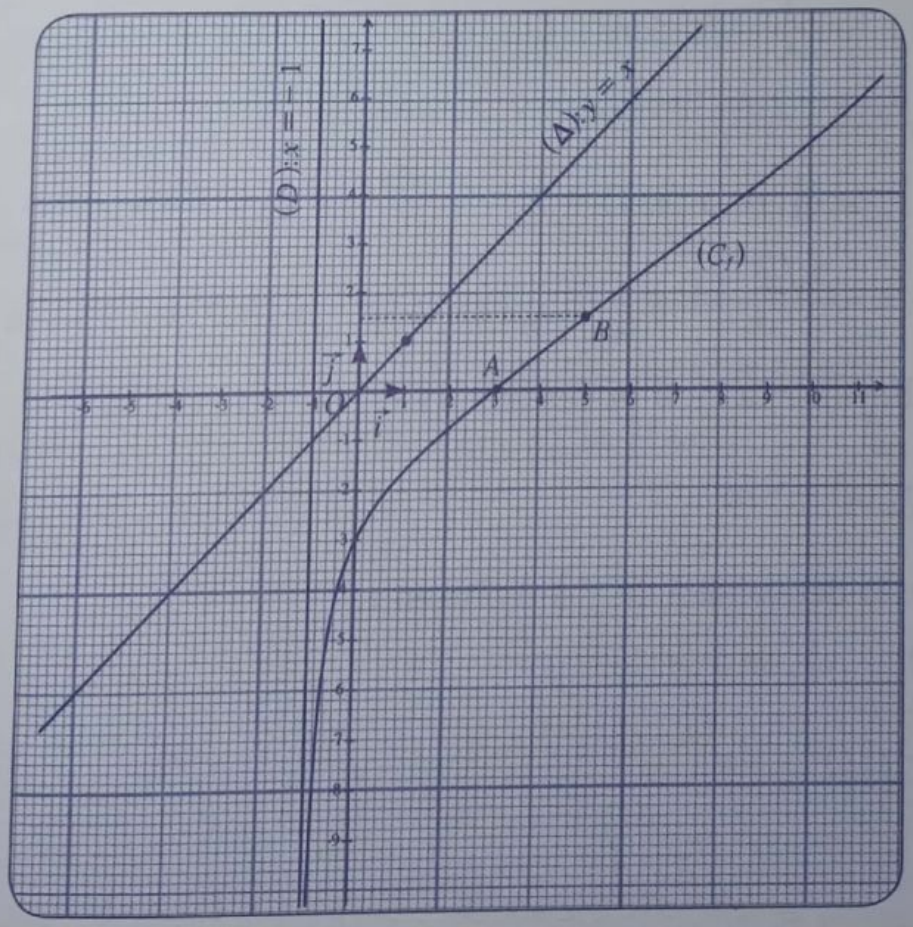
Interprétation graphique :

On a : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = -\infty \end{cases}$

Donc : (C_f) la courbe de f admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = x$ au voisinage de $+\infty$.

5 Construction de (C_f) :

On a : $f(5) = 8 - \dfrac{16}{\sqrt{6}} \simeq 1,47$; le point $B\left(5; 8 - \dfrac{16}{\sqrt{6}}\right)$ est un point d'inflexion de (C_f).



Exercice 47

On a : $f(x)=2\sqrt{\frac{x-1}{x}}+\frac{1}{x}$

1 Montrons que l'ensemble de définition de f est : $D_f=]-\infty;0[\cup[1;+\infty[$

On a : $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/\frac{x-1}{x}\geq 0 \text{ et } x\neq 0\right\}$

Le tableau de signe de $\frac{x-1}{x}$ est:

x	$-\infty$		0		1	$+\infty$
$x-1$	$-$		$-$		0	$+$
x	$-$	0	$+$			$+$
$\frac{x-1}{x}$	$+$	‖	$-$		0	$+$

Donc : $D_f=]-\infty;0[\cup[1;+\infty[$

2 Déterminons les limites: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$, et montrons que:

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-\infty$

- Soit $x\in D_f$; on a : $f(x)=2\sqrt{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}}+\frac{1}{x}=2\sqrt{1-\frac{1}{x}}+\frac{1}{x}$

et puisque : $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{1}{x}=0$; donc : $\lim\limits_{|x|\to+\infty}f(x)=2\sqrt{1}+0=2$

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=2$

- Soit $x\in]-\infty;0[$, on a : $f(x)=2\sqrt{\frac{(x-1)x}{x^2}}+\frac{1}{x}=\frac{2\sqrt{x^2-x}}{|x|}+\frac{1}{x}$

donc: $f(x)=-\frac{2\sqrt{x^2-x}}{x}+\frac{1}{x}=\frac{1}{x}(1-2\sqrt{x^2-x})$ (car: $x<0\Longrightarrow|x|=-x$)

puisque : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}\sqrt{x^2-x}=0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}(1-2\sqrt{x^2-x}=1)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}\frac{1}{x}=-\infty$

Donc : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}f(x)=-\infty$

3 Étudions la dérivabilité de f à droite en 1:

Soit $x\in]1;+\infty[$, on a : $f(1)=1$

et : $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{2\sqrt{\frac{x-1}{x}}+\frac{1}{x}-1}{x-1}=\frac{2\sqrt{\frac{x-1}{x}}+\frac{1-x}{x}}{x-1}$

$$=\frac{2\sqrt{\frac{x-1}{x}}}{x-1}+\frac{-\frac{x-1}{x}}{x-1}=2\sqrt{\frac{x-1}{x}}\times\frac{1}{x-1}-\frac{x-1}{x(x-1)}$$

$$=2\sqrt{\frac{x-1}{x(x-1)^2}}-\frac{1}{x}=2\sqrt{\frac{1}{x(x-1)}}-\frac{1}{x}$$

Remarque que : $x-1>0$; donc : $x-1=\sqrt{(x-1)^2}$

puisque : $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}}\dfrac{1}{x}=1\\ \lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}}x(x-1)=0\\ \forall x\in\,]1;+\infty[\,;\,x(x-1)>0\end{cases}$; alors : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=+\infty$

Donc la fonction f n'est pas dérivable à droite en 1.

2ème méthode:

Soit $x\in\,]1;+\infty[$, on a :

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{2\sqrt{1-\frac{1}{x}}+\frac{1}{x}-1}{x-1}=\frac{2\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}}-\frac{(\sqrt{x-1})^2}{x}}{(\sqrt{x-1})^2}$$

$$=\frac{\sqrt{x-1}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x-1}}{x}\right)}{(\sqrt{x-1})^2}=\frac{1}{\sqrt{x-1}}.\left(\frac{2\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{x}\right)$$

$$=\frac{2\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{x(\sqrt{x-1})}$$

puisque : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}}\dfrac{2\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{x}=2$ et $\lim\limits_{x\to 1^+}x\sqrt{x-1}=0$

et $(\forall x\in\,]1;+\infty[)\,;\,x\sqrt{x-1}>0$, donc : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=+\infty$

Donc la fonction f n'est pas dérivable à droite en 1.

Interprétation graphique :

(C_f) la courbe de f admet une demi-tangente verticale au point $A(1;1)$.

4 Étudions les variations de f sur $]1;+\infty[$ et $]-\infty;0[$:

Soit $x\in\,]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$

On a : $f'(x)=2\dfrac{\left(\frac{x-1}{x}\right)'}{2\sqrt{\frac{x-1}{x}}}+\left(-\frac{1}{x^2}\right)=2\dfrac{\frac{1}{x^2}}{2\sqrt{\frac{x-1}{x}}}-\frac{1}{x^2}$

$$=\frac{1}{x^2}.\frac{1}{\sqrt{\frac{x-1}{x}}}-\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{x-1}{x}}}-1\right)=\frac{1}{x^2}\left(\sqrt{\frac{x}{x-1}}-1\right)$$

$$=\frac{1}{x^2}\left(\frac{\frac{x}{x-1}-1}{\sqrt{\frac{x}{x-1}}+1}\right)=\frac{1}{x^2}\left(\frac{\frac{x-x+1}{x-1}}{\sqrt{\frac{x}{x-1}}+1}\right)=\frac{1}{x^2(x-1)\left(\sqrt{\frac{x}{x-1}}+1\right)}$$

Or : $(\forall x \in]-\infty;0[\cup]1;+\infty[)\ ;\ x^2\left(\sqrt{\frac{x}{x-1}}+1\right)>0$

donc le signe de $f'(x)$ est celui de $x-1$.

D'où le tableau de variations de f est le suivant:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	‖	0	$+$	
f	2	↘	‖	‖	1	↗	2
		$-\infty$	‖	‖			

5 a. Déterminons les points d'intersection de (C_f) avec l'axe des abscisses :

Soit $x \in D_f$: $f(x)=0 \iff 2\sqrt{\frac{x-1}{x}}+\frac{1}{x}=0$

$$\iff 2\sqrt{\frac{x-1}{x}}=-\frac{1}{x}$$

- Si $x \in [1;+\infty[$, alors : $-\frac{1}{x}<0$, d'où l'équation (E) n'a pas de solutions sur $[1;+\infty[$.
- Si $x \in]-\infty;0[$, alors : $-\frac{1}{x}>0$; d'où :

$$f(x)=0 \iff 4\left(\frac{x-1}{x}\right)=\left(-\frac{1}{x}\right)^2$$

$$\iff 4\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{1}{x^2}$$

$$\iff \frac{4x-4}{x}=\frac{1}{x^2}$$

$$\iff 4x-4=\frac{1}{x}$$

$$\iff 4x^2-4x=1$$

$$\iff 4x^2-4x-1=0$$

$$\iff x=\frac{1+\sqrt{2}}{2} \text{ ou } x=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$$

de plus on a : $\frac{1-\sqrt{2}}{2}<0$ et $\frac{1+\sqrt{2}}{2}>0$

donc : (C_f) coupe l'axe des abscisses au point $A\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2};0\right)$.

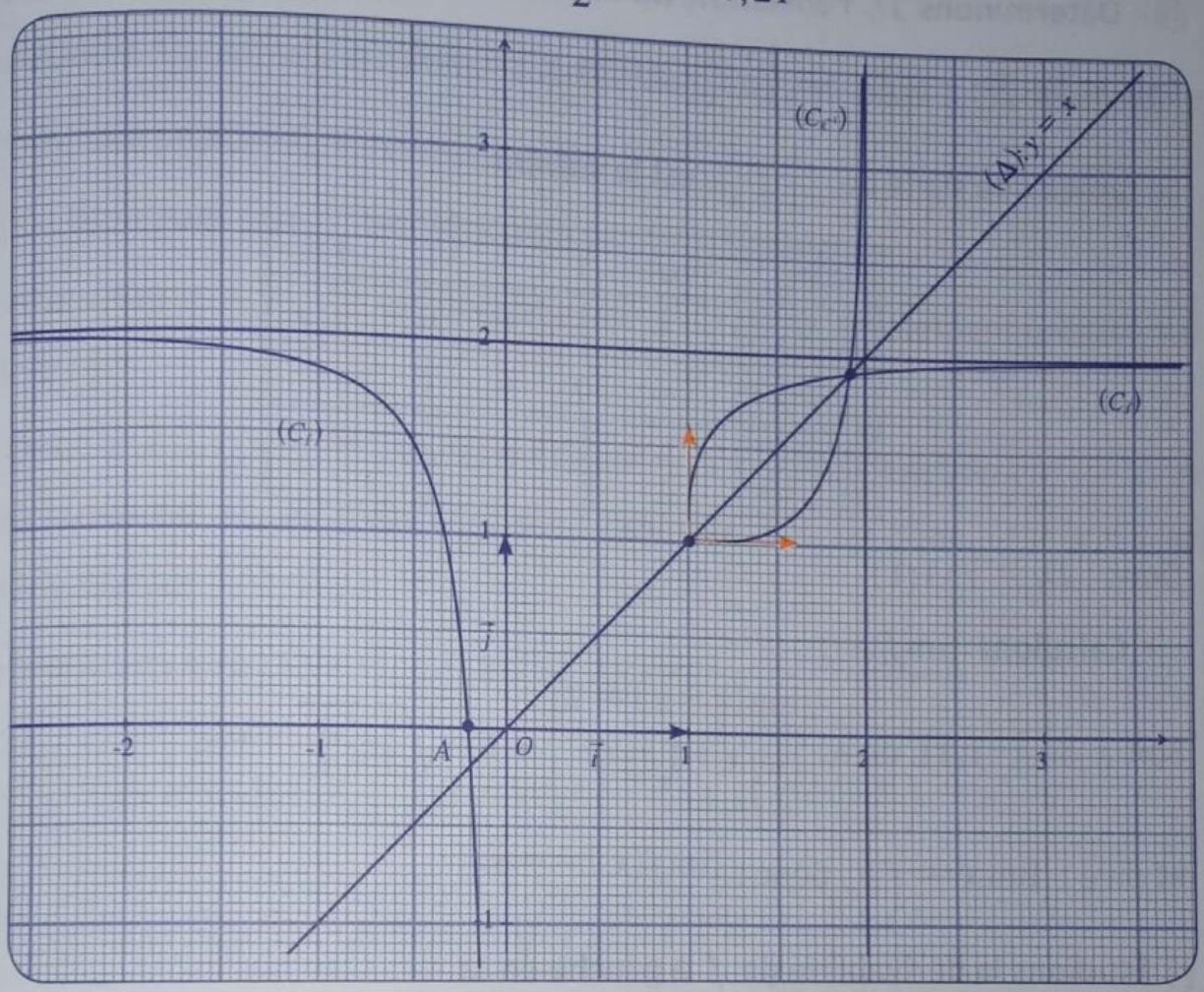
b. Étudions les branches infinies de (C_f):

On a : $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)=2$, donc la courbe de f admet la droite d'équation $y=2$ comme asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

et $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$; donc : (C_f) admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

6 Construction de (C_f) :

$$x_A = \frac{1-\sqrt{2}}{2} \simeq -0,21$$



7 g la restriction de f sur $[1; +\infty[$:

On a : g est continue, car g est somme de deux fonctions continues qui sont :

$x \mapsto 2\sqrt{\frac{x-1}{x}}$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$.

et : g est strictement croissante sur $[1; +\infty[$.

donc : g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur :

$$J = g([1; +\infty[) = \left[g(1); \lim_{x \to +\infty} g(x)\right[$$
$$= [1; 2[$$

b. Construction de $(C_{g^{-1}})$ (voir figure précédente) :

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ $(C_{g^{-1}})$ et (C_g) sont symétriques par rapport à la droite (Δ) d'équation $y = x$

Exercice 48

On a: $f(x)=x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

1 ▸ Déterminons D_f l'ensemble de définition de f :

Soit x de $\mathbb{R}$; $x\in D_f \Leftrightarrow \dfrac{1-x}{1+x}\geq 0$ et $x+1\neq 0$

Le tableau de signe de $\dfrac{1-x}{1+x}$ est le suivant :

x	$-\infty$		-1		1	$+\infty$
$1-x$	+		+	0	−	
$1+x$	−	0	+		+	
$\dfrac{1-x}{1+x}$	−	‖	+	0	−	

Donc : $D_f=]-1;1]$

▸ **Calculons $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x)$:**

Soit x de $]-1;1]$, on a : $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1}(1-x)=2\\ \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} x+1=0^+\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}=+\infty$

et on a : $\lim\limits_{x\to -1} x=-1$, donc : $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x)=-\infty$

2 Étudions la dérivabilité de f à gauche en 1:

Soit $x\in]-1;1[$, on a : $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{x\sqrt{\dfrac{1-x}{x+1}}-0}{x-1}$

$$=x\sqrt{\frac{1-x}{x+1}}\cdot\frac{1}{x-1}$$

$$=-x\sqrt{\frac{(1-x)}{(x+1)(x-1)^2}}$$

$$=-x\sqrt{\frac{1}{(x+1)(1-x)}}$$

Le tableau de signe de $(x+1)(1-x)$ est le suivant :

x		-1		1	
$(x+1)(1-x)$	−	0	+	0	−

Donc : $\lim\limits_{\substack{x\to +1\\ x<1}}(x+1)(1-x)=0^+$; d'où : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\sqrt{\dfrac{1}{(x+1)(1-x)}}=+\infty$

enfin : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} -x\sqrt{\dfrac{1}{(x+1)(1-x)}} = -\infty$

Donc : f n'est pas dérivable à gauche en 1.

Interprétation graphique :

La courbe C_f admet une demi-tangente au point d'abscisse 1. (dirigée vers les ordonnée positives), son équation est : $\begin{cases} x = 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$

3 a. Montrons que f est dérivable sur $]-1;1[$:

La fonction $x \mapsto \dfrac{1-x}{1+x}$ est dérivable sur $]-1;1[$, est strictement positive sur $]-1;1[$.

Donc : $u : x \mapsto \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ est dérivable sur $]-1;1[$; et la fonction $v : x \longmapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier sur l'intervalle $]-1;1[$; donc : $f = v \times u$ est dérivable sur $]-1;1[$.

Montrons que : $(\forall x \in]-1;1[) ; f'(x) = \dfrac{1-x-x^2}{(1+x)^2\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}}$

on a : $(\forall x \in]-1;1[) ; f'(x) = x'\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} + x\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)'$

$$= \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + x \times \frac{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)'}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$$

d'autre part: $\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)' = \dfrac{-1(x+1)-(1-x)}{(1+x)^2} = \dfrac{-x-1-1+x}{(x+1)^2} = \dfrac{-2}{(x+1)^2}$

d'où :

$$(\forall x \in]-1;1[) ; f'(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + x.\frac{\frac{-2}{(x+1)^2}}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} = \frac{\frac{1-x}{1+x} + x.\frac{-1}{(x+1)^2}}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$$

$$= \frac{(1-x)(1+x)-x}{(x+1)^2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} = \frac{1-x^2-x}{(x+1)^2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$$

b. Étudions le signe de $f'(x)$ et dressons le tableau de variations de f :

On a : $(\forall x \in]-1;1[) ; (x+1)^2\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} > 0$

d'où le signe de $f'(x)$ est celui de $1-x^2-x$.

Le trinôme $1-x^2-x$ admet deux solutions qui sont : $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

d'où le tableau de signe de $1-x^2-x$:

x	$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$	-1		1		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$
$-x^2-x+1$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$

Le tableau de variations de f est le suivant :

x	-1		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$		1
$f'(x)$	$+$		0	$-$	
f	0	↗	$f\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$	↘	$-\infty$

4 Déterminons l'équation de la tangente à la courbe f au point $O(0;0)$:

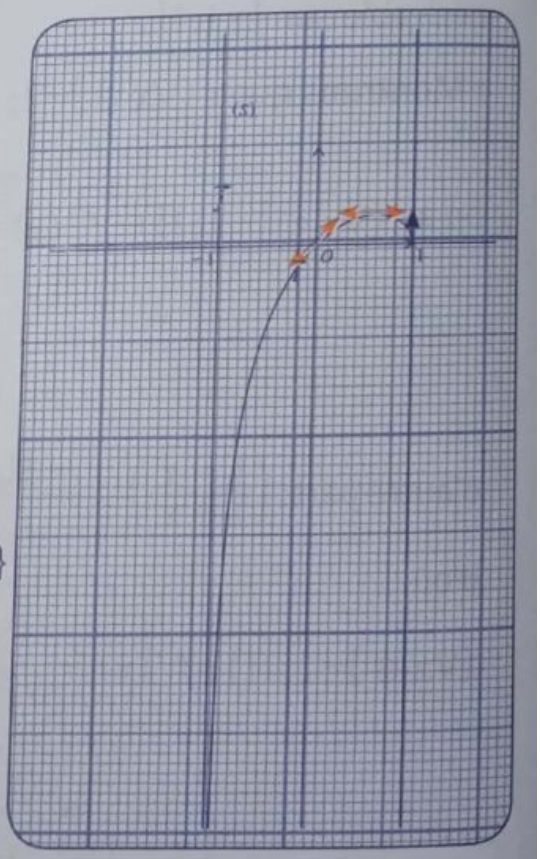
On a : $f(0)=0$ et $f'(0)=\dfrac{1}{1\sqrt{\frac{1}{1}}}=1$

donc l'équation de la tangente à (C_f) est :

$y=f'(0)(x-0)+f(0)$

alors : $y=1(x)+0$

Donc : $(T):y=x$



5 Construction de (C_f) :

6 Déterminons l'ensemble :

$(S)=\{M(x;y)\in(P)/(x-1)x^2+(x+1)y^2=0\}$

Soit $M(x;y)$ un point du plan; on a :

$$M(x;y)\in(S)\Leftrightarrow(x-1)x^2+(x+1)y^2=0$$
$$\Leftrightarrow-(x-1)x^2=(1+x)y^2$$
$$\Leftrightarrow(1-x)x^2=(1+x)y^2$$

On remarque que le point d'abscisse -1 n'appartient pas à (S) .

On suppose que : $x\neq-1$. on a : $M(x;y)\in S\Leftrightarrow\dfrac{(1-x)}{x+1}x^2=y^2$

$$\Leftrightarrow\sqrt{y^2}=\sqrt{x^2}\sqrt{\frac{1-x}{x+1}}\text{ et }\frac{1-x}{x+1}\geq0$$

$$\Leftrightarrow|y|=|x|\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\text{ et }x\in]-1;1]$$

$$M(x;y) \in S \Leftrightarrow y = x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \text{ ou } y = -x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$
$$\Leftrightarrow y = f(x) \text{ ou } y = -f(x)$$

S est la réunion de (C_f) et (C_{-f}). (remarque : (C_{-f}) est la courbe symétrique de (C_f) par rapport à l'axe des abscisses).

Exercice 49

On a : $f(x) = \sqrt{x^2 - |x| + 1}$

1 Déterminons D_f l'ensemble de définition de f :

On a : $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - |x| + 1 \geq 0\}$

et on a : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; x^2 = |x|^2$

d'où : $x^2 - |x| + 1 = |x|^2 - |x| + 1$, posons : $X = |x|$ alors l'inéquation $x^2 - |x| + 1 \geq 0$ devient : $X^2 - X + 1 \geq 0$

or le signe du trinôme $X^2 - X + 1$ est celui : $a = 1$ (car le discriminant : $\Delta < 0$)

donc : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; x^2 - |x| + 1 > 0$

D'où : $D_f = \mathbb{R}$

2 Étudions la partie de f :

Soit : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; -x \in \mathbb{R}$

et $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; f(-x) = \sqrt{(-x)^2 - |-x| + 1} = \sqrt{x^2 - |x| + 1} = f(x)$

Donc la fonction f est paire.

3 a. Déterminons $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, puis déduisons : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$:

On a : $(\forall x > 0)\ ; f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$, or : $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - x - 1) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

D'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - x + 1} = +\infty$, donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Déterminons $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$:

On pose : $x = -X$, quand x tend vers $-\infty$, alors X tend vers $+\infty$.

d'où : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{X \to +\infty} f(-X) = \lim\limits_{X \to +\infty} f(X) = +\infty$

Donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

b. Étudions la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$:

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

▸ **Calculons** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$:

Soit $x>0$, on a : $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}}{x}$

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x}=\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$$

puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$

▸ **Déterminons** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-x$:

Soit $x>0$; on a : $f(x)-x=\sqrt{x^2-x+1}-x$

$$=\frac{x^2-x+1-x^2}{\sqrt{x^2-x+1}+x}$$

$$=\frac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}+x}$$

$$=\frac{x\left(-1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}$$

$$=\frac{-1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}$$

puisque: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$, alors :

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)\lim_{x\to+\infty}\frac{-1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{-1}{2}$$

Donc la courbe (C_f) admet une asymptote oblique d'équation : $y=x-\dfrac{1}{2}$ au voisinage de $+\infty$.

4 a. Étudions la dérivabilité de f à droite en 0 :

Soit $x>0$; on a :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{x}=\frac{x^2-x+1-1}{x(\sqrt{x^2-x+1}+1)}=\frac{x(x-1)}{x(\sqrt{x^2-x+1}+1)}$$

$$=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-x+1}+1}$$

puisque : $\lim\limits_{x\to0}x-1=-1$ et $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{x^2-x+1}+1=2$

d'où : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{-1}{2}$

donc la courbe de f est dérivable à droite en 0, et (C_f) admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente de pente $f'_d(0) = -\frac{1}{2}$.

b. Étudions les variations de f :

Sur l'intervalle $]0;+\infty[$; on a : $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$

- La fonction : $x \mapsto x^2 - x + 1$ est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur $]0;+\infty[$. et strictement positive sur $]0;+\infty[$.

donc : $x \mapsto \sqrt{x^2 - x + 1}$ est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

On a : $(\forall x > 0)\ ; f'(x) = \dfrac{(x^2 - x + 1)'}{2\sqrt{x^2 - x + 1}} = \dfrac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x + 1}}$

Le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$ est celui de $2x - 1$:

Le tableau de signe $2x - 1$ sur $[0;+\infty[$ est le suivant :

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$	

Le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^+$ est le suivant:

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	↘	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↗	$+\infty$

Puisque la fonction f est paire; donc elle inverse les variations sur $]-\infty;0[$.

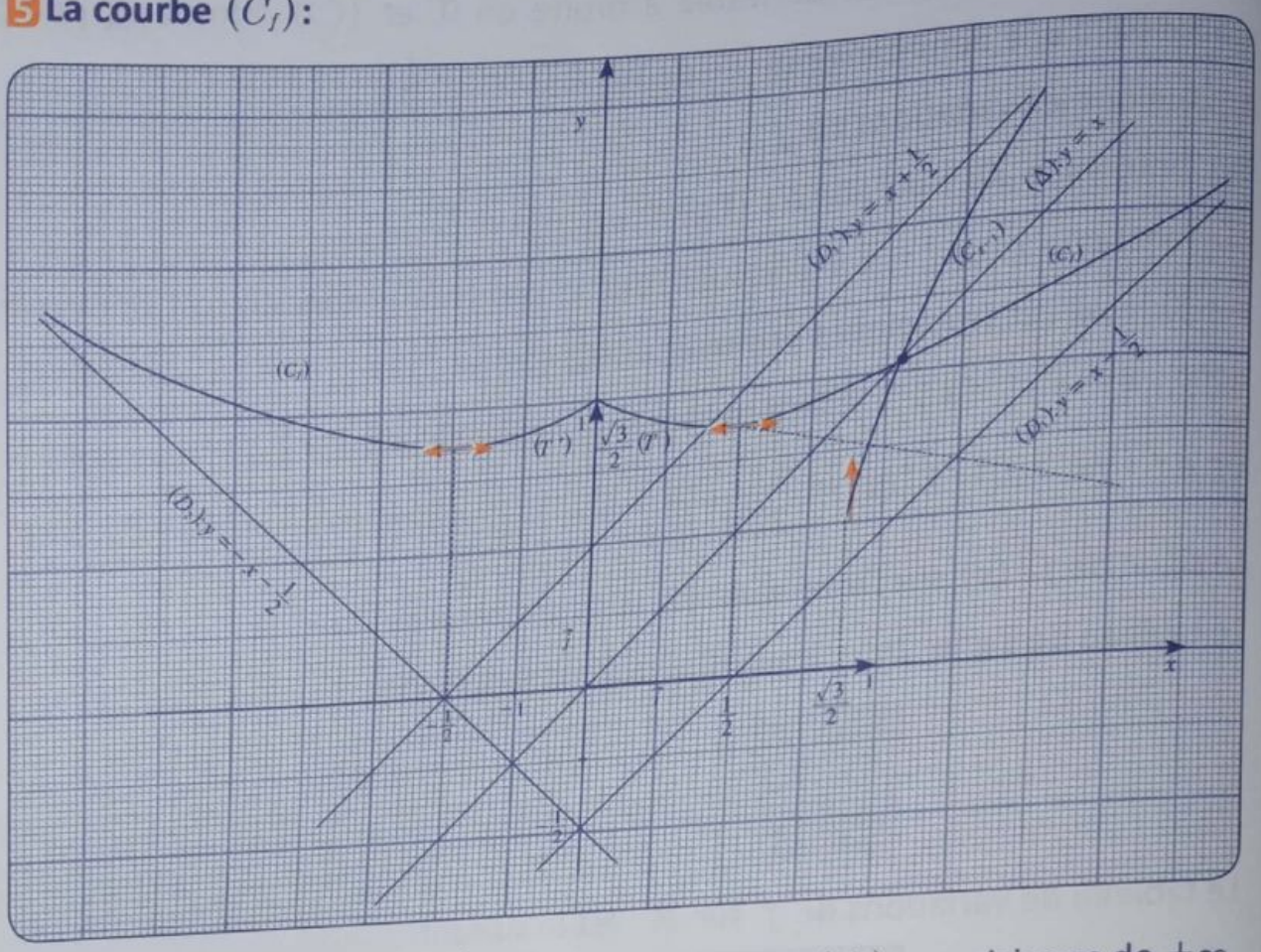
Donc tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ est le suivant:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\frac{1}{2}$ ‖ $\frac{-1}{2}$	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↗	1	↘	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↗	$+\infty$

On remarque que : $f'_g(0) = \frac{1}{2}$ et $f'_f(0) = -\frac{1}{2}$; de plus on a :

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

5 La courbe (C_f) :



On a : la droite $(D): y = x - \frac{1}{2}$ est une asymptote à (C_f) au voisinage de $+\infty$.

Puisque f est paire; donc (C_f) admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

6 a. Montrons que g admet une fonction réciproque :

La fonction g est continue sur $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$ (car: $x \mapsto x^2 - x + 1$ est continue et positive sur $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$).

et on a : g est strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

Donc : g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur :

$$J = g\left(\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[\right) = \left[g\left(\frac{1}{2}\right); \lim_{x \to +\infty} g(x)\right[= \left[\frac{\sqrt{3}}{2}; +\infty\right[$$

b. Construction de $(C_{g^{-1}})$ (voir figure précédente):

Dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, la courbe $(C_{g^{-1}})$ est le symétrique de (C_g) par rapport à la première bissectrice du repère c'est-à-dire la droite (Δ) d'équation $y = x$.

Exercice 50

On a: $f(x)=\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$

1 Déterminons D_f l'ensemble de définition de f:

On a : $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x>0\}=]0;+\infty[$

2 a. Déterminons les limites de f aux bornes de D_f:

Calculons $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$:

On a : $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0^+ \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} 1-\frac{1}{\sqrt{x}}=-\infty$

$\Longrightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2=+\infty$

$\Longrightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$

Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{\sqrt{x}}=1$: donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2=1$

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

b. Étudions les branches infinies de (C_f):

On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$: donc (C_f) admet une asymptote verticale d'équation $x=0$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$: donc (C_f) admet une asymptote horizontale d'équation $y=1$ au voisinage de $+\infty$.

c. Déterminons la position relative de (C_f) et la droite $(D):y=1$:

Soit $x>0$; étudions le signe de $f(x)-1$.

On a : $f(x)-1=\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2-1$

$=\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}+1\right)$

$=-\frac{1}{\sqrt{x}}\left(2-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

$=-\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}\right)$

$=\frac{1-2\sqrt{x}}{x}=\frac{(1-2\sqrt{x})(1+2\sqrt{x})}{x(1+2\sqrt{x})}=\frac{1-4x}{x(1+2\sqrt{x})}$

le signe de $f(x)-1$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$ est celui de $1-4x$.

Car : $(\forall x \in]0;+\infty[)\ ;\ x(1+2\sqrt{x})>0$

et on a : $1-4x=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{4}$

Le tableau de signe de $1-4x$ sur $]0;+\infty[$ est le suivant :

x	0		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$1-4x$	‖	$+$	0	$-$	

donc le tableau de la position relative (C_f) et (D) sur l'intervalle $]0;+\infty[$ est:

x	0		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$f(x)-1$	‖	$+$	0	$-$	
Position relative de (C_f) et (D)	(C_f) est au dessus de (D)			(C_f) est en dessous de (D)	

ou encore sur l'intervalle $]0;\frac{1}{4}[$; (C_f) est au dessus de (D) : $y=1$.

Et sur $]\frac{1}{4};+\infty[$; (C_f) est en dessous de (D) : $y=1$.

Et (C_f) coupe (D) : $y=1$ au point d'abscisse $\frac{1}{4}$.

3 a. **Montrons que :** $(\forall x>0)\ ; f'(x)=\frac{x-1}{x^2(\sqrt{x}+1)}$:

On a : $(\forall x \in]0;+\infty[)\ ; f'(x)=\left(\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2\right)'$

$$=2\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$=2\left(0-\frac{-(\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2}\right)\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$=2.\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2}\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$=\frac{1}{(\sqrt{x})^3}\times\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x})^4}$$

$$=\frac{\sqrt{x}-1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2(\sqrt{x}+1)}$$

b. **Dressons le tableau de variations de** f :

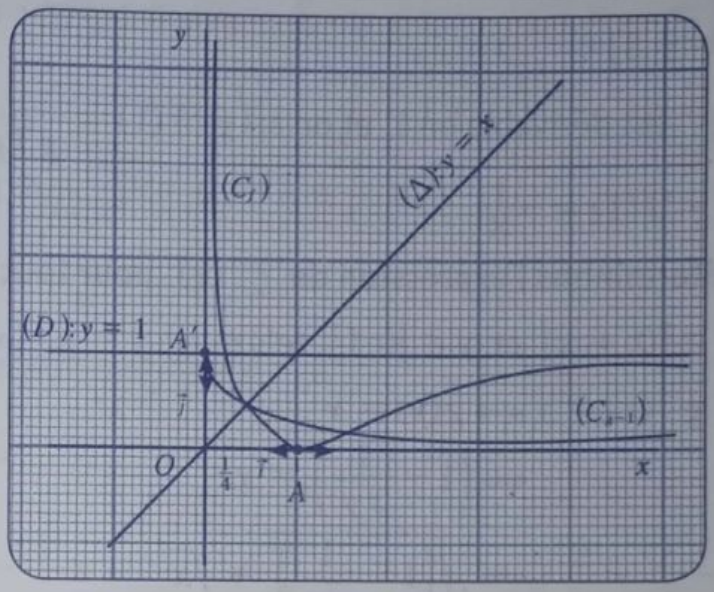
Sur l'intervalle $]0;+\infty[$, le signe de $f'(x)$ est celui de $x-1$.

on a : $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 1$

d'où le tableau de variations de f est le suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	1	↘	0	↗	$+\infty$

4 **La courbe de f :**



5 **a. Montrons que g admet une fonction réciproque g^{-1} :**

On a la fonction : $x \longmapsto \sqrt{x}$ est continue sur $]0;1]$ et ne s'annule pas sur $]0;1]$.

Donc: $u : x \longmapsto 1 - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ estcontinuesur $]0;1]$;donc: $g = u^2$ estcontinuesur $]0;1]$.

Et on a : g est strictement décroissante sur $]0;1]$.

D'où : g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle J ; avec :

$$J = g(]0;1]) = \left[g(1); \lim_{x \to 0^+} g(x)\right[= [0; +\infty[$$

b. Courbe de la fonction g^{-1} :

Dans un repère orthonormé (C_g) et $(C_{g^{-1}})$ sont symétriques par rapport à la 1ère bissectrice du repère c'est-à-dire la droite d'équation $y = x$.

(C_g)	$(C_{g^{-1}})$
$(D) : x = 0$ asymptote verticale	$(D') : y = 0$ asymptote horizontale
$A(1;0) \in (C_g)$	$A'(0;1) \in (C_{g^{-1}})$
C_g admet une demi-tangente horizontale au point $A(1;0)$	$(C_{g^{-1}})$ admet une demi-tangente verticale au point $A'(0;1)$

Construction de $(C_{g^{-1}})$ (voir la courbe précédente).

c. Calculons $g\left(\frac{1}{4}\right)$ et $(g^{-1})'(1)$:

On a : $g\left(\frac{1}{4}\right) = f\left(\frac{1}{4}\right) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}}}\right)^2 = (1-2)^2 = 1$

donc : $g\left(\frac{1}{4}\right) = 1$; d'où : $g^{-1}(1) = \frac{1}{4}$ (remarquer que $\frac{1}{4} \in]0;1]$)

▸ La fonction g est dérivable en $g^{-1}(1)$, c'est-à-dire en $\frac{1}{4}$ et $g'\left(\frac{1}{4}\right) \neq 0$ (car: $g'\left(\frac{1}{4}\right) = -8$)

d'où : g^{-1} est dérivable en 1, et on a: $(g^{-1})'(1) = \frac{1}{g'(g^{-1}(1))} = \frac{1}{g'\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{-8}$

D'où : $(g^{-1})'(1) = -\frac{1}{8}$

d. Déterminons l'expression de $g^{-1}(x)$ pour tout x de $[0;+\infty[$:

Soit : $x \in [0;+\infty[$ et $y \in]0;1]$, tels que : $y = g^{-1}(x)$

On a : $g^{-1}(x) = y \iff g(y) = x$

$$\iff \left(1 - \frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2 = x$$

$$\iff \sqrt{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2} = \sqrt{x}$$

$$\iff \left|1 - \frac{1}{\sqrt{y}}\right| = \sqrt{x}$$

or : $0 < y \leq 1 \Rightarrow 0 < \sqrt{y} \leq 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{y}} \geq 1$$

$$\Rightarrow 0 \geq 1 - \frac{1}{\sqrt{y}}$$

donc : $g^{-1}(x) = y \iff -\left(1 - \frac{1}{\sqrt{y}}\right) = \sqrt{x}$

$$\iff -1 + \frac{1}{\sqrt{y}} = \sqrt{x}$$

$$\iff \frac{1}{\sqrt{y}} = \sqrt{x} + 1$$

$$\iff \sqrt{y} = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

$$\iff y = \frac{1}{(\sqrt{x}+1)^2}$$

Donc : $(\forall x \in [0;+\infty[)$; $g^{-1}(x) = \frac{1}{(\sqrt{x}+1)^2}$

Exercice 51

On a : $f(x)=\sqrt{2x-2}-x+1$

1 Déterminons D_f l'ensemble de définition de f :

On a : $D_f=\{x\in\mathbb{R}/2x-2\geq 0\}=\{x\in\mathbb{R}/x\geq 1\}=[1;+\infty[$

2 Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, puis : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$:

- Soit : $x\in[1;+\infty[$; on a : $f(x)=\sqrt{2x-2}-x+1=\sqrt{x^2\left(\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)}-x+1$

$$=x\left(\sqrt{\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}-1+\frac{1}{x}\right)$$

puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2}{x}=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2}{x^2}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$

alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{x^2}}-1+\dfrac{1}{x}=-1$

et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$, d'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

- Soit $x\in[1;+\infty[$, on a :

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{\sqrt{2x-2}-x+1}{x}=\frac{x\left(\sqrt{\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}-1+\frac{1}{x}\right)}{x}=\sqrt{\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}-1+\frac{1}{x}$$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-1$

3 Déterminons la branche infinie de la courbe de f au voisinage de $+\infty$:

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-1$

Calculons : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)+x$

Soit : $x\in[1;+\infty[$

On a : $f(x)+x=\sqrt{2x-2}-x+1+x=\sqrt{2x-2}+1$

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x-2}+1=+\infty$

Conclusion : (C_f) la courbe de f admet une branche parabolique de direction asyptotique la droite d'équation $y=-x$ au voisinage de $+\infty$.

4 Étudions la dérivabilité de f à droite en $x_0=1$:

Soit $x\in[1;+\infty[$, on a : $f(1)=0$

et : $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{\sqrt{2x-2}-x+1}{x-1}=\dfrac{\sqrt{2x-2}}{x-1}-\dfrac{(x-1)}{x-1}$

$$=\sqrt{\frac{2(x-1)}{(x-1)^2}}-1=\sqrt{\frac{2}{x-1}}-1$$

on a : $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$ et $(\forall x\in]1;+\infty[)\ ;\ x-1>0$

donc : $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=+\infty$, d'où : f n'est pas dérivable à droite en 1.

Interprétation graphique :

(C_f) admet une demi-tangente verticale au point $A(1;0)$ (dirigée vers le haut).

5 a. Montrons que : $(\forall x\in]1;+\infty[)\ ;f'(x)=\dfrac{3-2x}{\sqrt{2x-2}(\sqrt{2x-2}+1)}$

La fonction: $x\mapsto 2x-2$ est dérivable et strictement positive sur $]1;+\infty[$, donc :

$u:x\mapsto\sqrt{2x-2}$ est dérivable sur $]1;+\infty[$.

Et la fonction : $v:x\mapsto -x+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $]1;+\infty[$.

Donc : f est dérivable sur $]1;+\infty[$. $(f=u+v)$

▸ **Calculons $f'(x)$ pour tout $]1;+\infty[$:**

$$(\forall x\in]1;+\infty[)\ ;f'(x)=\frac{(2x-2)'}{2\sqrt{2x-2}}-1=\frac{2}{2\sqrt{2x-2}}-1$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2x-2}}-1=\frac{1-\sqrt{2x-2}}{\sqrt{2x-2}}=\frac{(1-\sqrt{2x-2})(1+\sqrt{2x-2})}{(\sqrt{2x-2})(1+\sqrt{2x-2})}$$
$$=\frac{1-(2x-2)}{\sqrt{2x-2}(1+\sqrt{2x-2})}=\frac{-2x+3}{\sqrt{2x-2}(1+\sqrt{2x-2})}$$

b. Étudions le signe de $f'(x)$:

On a : $(\forall x\in]1;+\infty[)\ ;\sqrt{2x-2}(\sqrt{2x-2}+1)>0$

donc le signe de $f'(x)$ est celui de $3-2x$ sur l'intervalle $]1;+\infty[$.

On a : $f'(x)=0\iff 3-2x=0\iff x=\dfrac{3}{2}$

▸ Le tableau de signes de $3-2x$ est :

x	1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$3-2x$		$+$	0	$-$	

Donc le tableau de variations de f est le suivant :

x	1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	↗	$\frac{1}{2}$	↘	$-\infty$

6 L'équation de la tangente (T) à la courbe de f au point d'abscisse $x_0=3$.

On a : $y = f'(3)(x-3)+f(3)$ est l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 3.

c'est-à-dire l'équation de (T) est : $y = -\frac{1}{2}(x-3)$ (car : $f(3)=0$ et $f'(3) = -\frac{1}{2}$)

D'où : $(T): y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

7 **Montrons que :** $(\forall x > 1)\ ; f''(x) = \frac{-1}{(2x-2)^{\frac{3}{2}}}$:

Soit : $x \in]1;+\infty[$, on a : $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-2}} - 1 = \frac{1}{(2x-2)^{\frac{1}{2}}} - 1$

$= (2x-2)^{-\frac{1}{2}} - 1$

Donc : $f''(x) = -\frac{1}{2}(2x-2)'(2x-2)^{-\frac{1}{2}-1} - 0$

$= \frac{-1}{2}(2)(2x-2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{-1}{(2x-2)^{\frac{3}{2}}}$

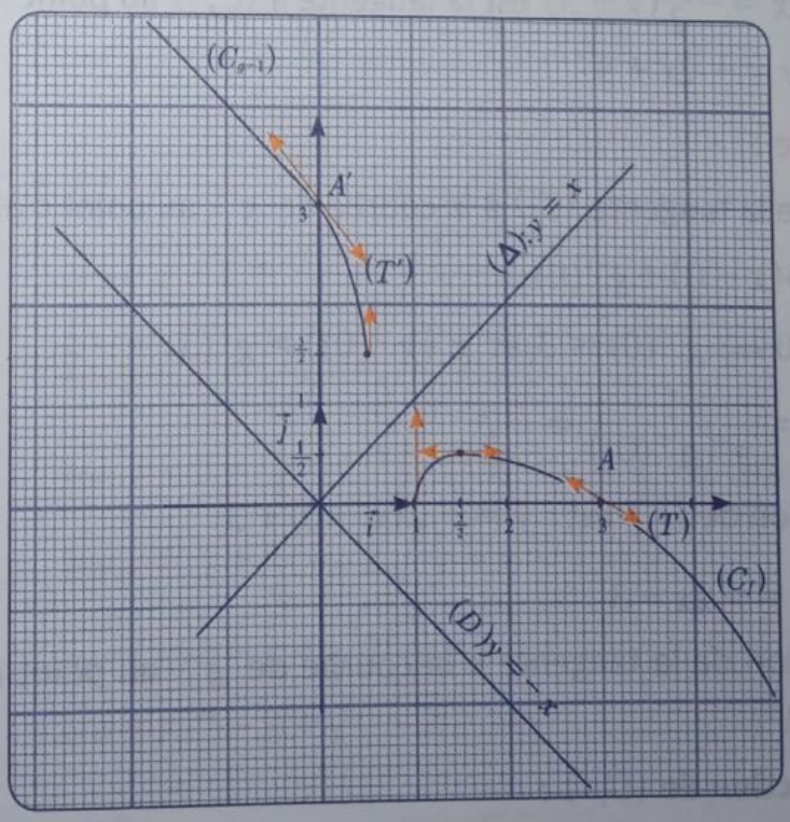
d'où : $(\forall x > 1)\ ; f'(x) = \frac{-1}{(2x-2)^{\frac{3}{2}}}$

▸ Étudions la concavité de (C_f) :

On a : $\forall x \in]1;+\infty[\ ; f''(x) < 0$

donc la courbe (C_f) est concave sur $[1;+\infty[$

8 La courbe :



9 a. Montrons que g admet une fonction réciproque :

On a : g est la restriction de f sur l'intervalle $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$, et f est une fonction continue (comme somme de deux fonctions continues sur $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$ qui sont: $x \mapsto \sqrt{2x-2}$ et $x \mapsto -x+1$) ; donc g est continue sur $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$.

Et on a : g est strictement décroissante sur $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$.

Donc : g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur :

$$J = g\left(\left[\frac{3}{2};+\infty\right[\right) = \left]\lim_{x\to+\infty} g(x); g\left(\frac{3}{2}\right)\right]$$
$$= \left]\lim_{x\to+\infty} f(x); f\left(\frac{3}{2}\right)\right]$$
$$= \left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$$

b. Déterminons l'équation de la tangente à $(C_{g^{-1}})$ au point d'abscisse 0:

1ére méthode :

On a : $f(3)=0 \iff g(3)=0$

$\iff g^{-1}(0)=3$

Donc : la tangente à $(C_{g^{-1}})$ au point $A'(0;3)$ est la droite symétrique de la tangente à (C_g) au point $A(3;0)$ par rapport à la 1ère bissectrice : $(\Delta): y=x$.

Or : $(T): y=-\frac{1}{2}(x-3)$ est la tangente à (C_f) au point $A(3;0)$.

Donc : $(T'): x=-\frac{1}{2}(y-3)$ est la tangente à $(C_{g^{-1}})$ au point $A'(0;3)$.

D'où : $(T'): y=-2x+3$

2ème méthode :

L'équation de la tangente (T') à la courbe de g^{-1} au point d'abscisse 0 est :

$y=(g^{-1})'(0)(x-0)+g^{-1}(0)$

or : $g(3)=0 \iff g^{-1}(0)=3$ et $g'(g^{-1}(0))=g'(3)=-\frac{1}{2}$

donc: $(g^{-1})'=\frac{1}{g'(g^{-1}(0))}=-2$

donc l'équation de (T) est : $y=-2(x-0)+3$

d'où : $(T'): y=-2x+3$

Donc l'équation de la tangente à la courbe de g^{-1} au point d'abscisse 0 est: $y=-2x+3$

c. Construction de $(C_{g^{-1}})$:

- Dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. $(C_{g^{-1}})$ est le symétrique de (C_g) par

rapport à la 1ère bissectrice du repère (la droite d'équation : $(y = x)$)

10 Montrons que : $(\forall x \in J)\ ;\ g^{-1}(x) = 2 - x + \sqrt{1-2x}$ **:**

1ére méthode :

Soit : $y \in \left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$ et $x \in \left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$ tel que : $y = g^{-1}(x)$

on a : $g^{-1}(x) = y \iff g(y) = x$

$$\iff \sqrt{2y-2} - y + 1 = x$$
$$\iff \sqrt{2}\sqrt{y-1} - (y-1) = x$$
$$\iff y - 1 - \sqrt{2}\sqrt{y-1} = -x$$

$$\iff (\sqrt{y-1})^2 - \sqrt{2}\sqrt{y-1} = -x$$
$$\iff (\sqrt{y-1})^2 - 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{y-1} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} - x$$
$$\iff \left(\sqrt{y-1} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} - x$$

$$\iff \sqrt{\left(\sqrt{y-1} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} - x}$$
$$\iff \left|\sqrt{y-1} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right| = \sqrt{\frac{1}{2} - x}$$

on a : $y \geq \frac{3}{2} \Longrightarrow y - 1 \geq \frac{1}{2} \Longrightarrow \sqrt{y-1} \geq \sqrt{\frac{1}{2}}$

$$\Longrightarrow \sqrt{y-1} \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow \sqrt{y-1} - \frac{\sqrt{2}}{2} \geq 0$$

donc : $g^{-1}(x) = y \iff \sqrt{y-1} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} - x}$

$$\iff \sqrt{y-1} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} - x}$$
$$\iff y - 1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} - x}\right)^2$$
$$\iff y - 1 = \frac{2}{4} + 2.\frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{\frac{1}{2} - x} + \frac{1}{2} - x \text{ ;(car : } \frac{1}{2} - w \geq 0)$$
$$\iff y = 1 + \frac{1}{2} + \sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{2} - x} + \frac{1}{2} - x$$
$$\iff y = 2 - x + \sqrt{2\left(\frac{1}{2} - x\right)}$$
$$\iff y = 2 - x + \sqrt{1-2x}$$

donc : $\left(\forall x \in \left]-\infty; \frac{1}{2}\right]\right)\ ;\ g^{-1}(x) = 2 - x + \sqrt{1-2x}$

2ème méthode : soit : $y \in \left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$ et $x \in \left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$, tel que: $g^{-1}(x) = y$

$$
\begin{aligned}
g^{-1}(x) = y &\iff g(y) = x \\
&\iff \sqrt{2y-2} - y + 1 = x \\
&\iff \sqrt{2y-2} = x + y - 1 \\
&\iff 2y - 2 = (x+y-1)^2 \\
&\iff 2y - 2 = (x+y)^2 - 2(x+y) + 1 \\
&\iff 2y - 2 = x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 2y + 1 \\
&\iff 0 = y^2 + y(2x-4) + x^2 + 3 - 2x
\end{aligned}
$$

Soient : $a = 1$ et $b = 2(x-2)$ et $c = x^2 + 3 - 2x$

On a :

$$
\begin{aligned}
\Delta &= b^2 - 4ac \\
&= 4(x-2)^2 - 4(x^2+3) + 8x \\
&= 4(x^2 - 4x + 4) - 4x^2 - 12 + 8x \\
&= -8x + 4 \\
&= 4(-2x+1)
\end{aligned}
$$

on a : $\Delta \geq 0$ (car : $x \leq \frac{1}{2}$)

alors l'équation admet deux solutions :

$$y_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2(x-2) - \sqrt{4(1-2x)}}{2} = -x + 2 - \sqrt{1-2x}$$

et $y_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = -x + 2 + \sqrt{1-2x}$

pour $x = 0$ on a : $y_1 = 1$ or $0 \in \left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$ et $1 \notin \left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$

donc : y_1 à rejeté alors y_2 est la bonne solution.

Donc : $\left(\forall x \in \left]-\infty; \frac{1}{2}\right]\right)$; $g^{-1}(x) = -x + 2 + \sqrt{1-2x}$

Exercice 52

On a : $f(x) = x + 1 + \sqrt{x^2 + x + 1}$

1 **Déterminons D_f l'ensemble de définition de f :**

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + x + 1 \geq 0\}$

Le discriminant du trinôme $x^2 + x + 1$ est : $\Delta = -3$,

on a : $\Delta < 0$ et $a > 0$ $(a = 1)$

donc : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $x^2 + x + 1 > 0$

D'où : $D_f = \mathbb{R}$

▸ **Montrons que f est continue sur $\mathbb{R}$:**

La fonction $x \mapsto x^2+x+1$ est une fonction polynôme continue sur $\mathbb{R}$; et de plus : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $x^2+x+1>0$; la fonction : $u: x \mapsto \sqrt{x^2+x+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$, et la fonction $v: x \mapsto x+1$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Donc la fonction $f = u+v$ est continue sur $\mathbb{R}$ (somme de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$).

2 a. Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$:

Soit $x \in]-\infty;0[$; on a :

$$f(x) = x+1+\sqrt{x^2+x+1} = \frac{((x+1)+\sqrt{x^2+x+1})((x+1)-\sqrt{x^2+x+1})}{(x+1)-\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$= \frac{(x+1)^2-(x^2+x+1)}{x+1-\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{x^2+2x+1-x^2-x-1}{x+1-\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$= \frac{x}{x\left(1+\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)}$$

$$= \frac{1}{1+\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}$$

puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2} = 0$; alors : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{2}$

d'où : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \frac{1}{2}$

Interprétation graphique :

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \frac{1}{2}$; donc la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$ est asymptote à (C_f) au voisinage de $-\infty$.

b. Déterminons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x+1+\sqrt{x^2+x+1} = +\infty$

car : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} x+1 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1} = +\infty\end{cases}$

c. Montrons que la droite d'équation : $y = 2x+\frac{3}{2}$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$:

Soit : $x \in]0;+\infty[$, on a :

$$f(x)-\left(2x+\frac{3}{2}\right)=x+1+\sqrt{x^2+x+1}-2x-\frac{3}{2}$$

$$=\sqrt{x^2+x+1}-x-\frac{1}{2}$$

$$=\sqrt{x^2+x+1}-\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{x^2+x+1-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{x^2+x+1}+\left(x+\frac{1}{2}\right)}=\frac{x^2+x+1-x^2-x-\frac{1}{4}}{\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}}$$

puisque: $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}=+\infty$, alors: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}}=0$

d'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-\left(2x+\frac{3}{2}\right)=0$, et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

Donc la droite (D) d'équation $y=2x+\frac{3}{2}$ est une asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $+\infty$.

3 a. Montrons que : $(\forall x\in D_f)\,;f'(x)=\frac{2\sqrt{x^2+x+1}+2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$:

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, qui sont : $x\mapsto\sqrt{x^2+x+1}$ et $x\mapsto x+1$

(remarque : la fonction $x\mapsto x^2+x+1$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$).

et on a : $(\forall x\in\mathbb{R})\,;f'(x)=(x+1)'+(\sqrt{x^2+x+1})'$

$$=1+\frac{(x^2+x+1)'}{2\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$=1+\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$=\frac{2\sqrt{x^2+x+1}+2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$$

Donc : $(\forall x\in\mathbb{R})\,;f'(x)=\frac{2\sqrt{x^2+x+1}+2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$

b. Montrons que f est croissante sur D_f :

Le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ est celui de : $2\sqrt{x^2+x+1}+2x+1$

(car le dénominateur est strictement positif : $\forall x\in\mathbb{R}\,;2\sqrt{x^2+x+1}>0$)

▸ Si : $2x+1>0$ (c'est-à-dire : $x>-\frac{1}{2}$), alors : $2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}>0$

Donc : $\forall x\in\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[; f'(x)>0$

▸ Si : $2x+1\leq 0$ (c'est-à-dire : $x\leq-\frac{1}{2}$) alors on ne peut pas déterminer directement le signe de : $2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}$

mais on a : $2\sqrt{x^2+x+1}+2x+1=\frac{4(x^2+x+1)-(2x+1)^2}{2\sqrt{x^2+x+1}-(2x+1)}$

$=\frac{4x^2+4x+4-4x^2-4x-1}{2\sqrt{x^2+x+1}-(2x+1)}$

$=\frac{3}{2\sqrt{x^2+x+1}-(2x+1)}$

puisque : $-(2x+1)\geq 0$ et $2\sqrt{x^2+x+1}>0$ alors :

$2\sqrt{x^2+x+1}-(2x+1)>0$

d'où : $\frac{3}{2\sqrt{x^2+x+1}-(2x+1)}>0$; donc : $2\sqrt{x^2+x+1}+2x+1>0$

d'où : $(\forall x\in\mathbb{R}) ; f'(x)>0$

dans les deux cas on a : $(\forall x\in\mathbb{R}) ; 2\sqrt{x^2+x+1}+2x+1>0$

▸ Tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$\frac{1}{2}$	↗	$+\infty$

4 a. Déterminons l'équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse 0:

L'équationde la tangente (T) au point d'abscisse 0 est :

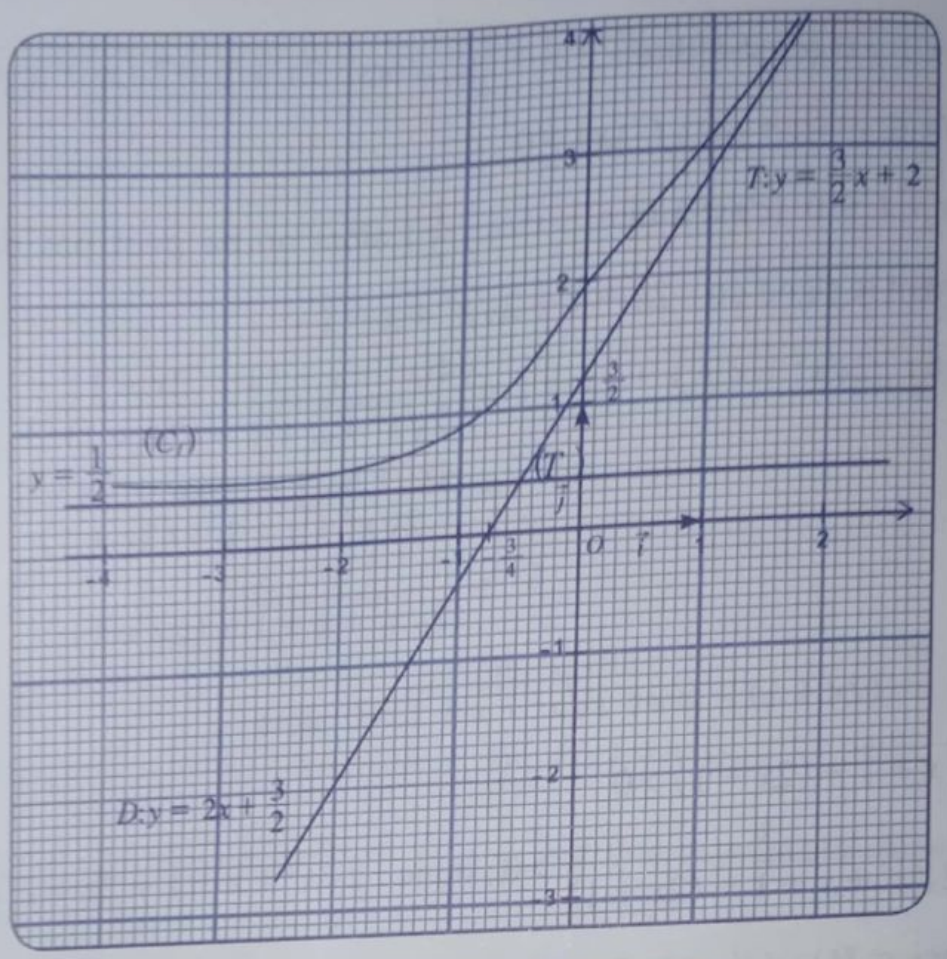
$(T): y=f'(0)(x-0)+f(0)$

or : $f(0)=2$ et $f'(0)=\frac{2+1}{2\sqrt{1}}=\frac{3}{2}$

D'où : $(T): y=\frac{3}{2}x+2$

b. Construction de (C_f):

$(D): y=2x+\frac{3}{2}$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$.



5 a. Montrons que f admet une fonction réciproque :

On a : f est continue sur $\mathbb{R}$ (d'après la première question).

et f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Donc : f admet une fonction réciproque f^{-1} ; définie sur l'intervalle J :

tel que : $J = f(\mathbb{R}) = f(]-\infty; +\infty[)$

$= \left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x); \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$

$= \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$

b. Calculons $(f^{-1})'(2)$:

On a : $f(0) = 2 \Longleftrightarrow f^{-1}(2) = 0$

- La fonction f est dérivable en 0 et $f'(0) \neq 0$ (car : $f'(0) = \frac{3}{2}$)

Donc f^{-1} est dérivable en 2 et : $(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(f^{-1}(2))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$

c. Déterminons $f^{-1}(x)$ pour tout x de J :

Soit : $y \in \mathbb{R}$ et $x \in J$ c'est-à-dire : $x \in \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$ et $y \in \mathbb{R}$, avec : $y = f^{-1}(x)$

on a : $f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow f(y)=x$

$\Leftrightarrow y+1+\sqrt{y^2+y+1}=x$

$\Leftrightarrow \sqrt{y^2+y+1}=x-y-1$

$\Leftrightarrow y^2+y+1=(x-(y+1))^2$

$\Leftrightarrow y^2+y+1=x^2+(y+1)^2-2x(y+1)$

$\Leftrightarrow y^2+y+1=x^2+y^2+2y+1-2xy-2x$

$\Leftrightarrow y-2y+2xy=x^2-2x$

$\Leftrightarrow -y+2xy=x^2-2x$

$\Leftrightarrow y(-1+2x)=x^2-2x$

$\Leftrightarrow y=\frac{x^2-2x}{2x-1}$ (car $2x-1\neq 0$)

Donc : $\left(\forall x\in\left]\frac{1}{2};+\infty\right[\right);f^{-1}(x)=\frac{x^2-2x}{2x-1}$

Exercice 53

on a : $f(x)=\frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+1}}$

1 a. Déterminons D_f l'ensemble de définition de f :

donc : $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2+1>0\}$ (la condition $x^2+1>0$ est vraie pour tout x de $\mathbb{R}$).

donc : $D_f=]-\infty;+\infty[$

Étudions la parité de f :

On a : $\forall x\in\mathbb{R}\ ;-x\in\mathbb{R}$

et on a : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;f(-x)=\frac{(-x)^2+5}{\sqrt{(-x)^2+1}}=\frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+1}}=f(x)$

on a : $\begin{cases}\forall x\in D_f\ ;-x\in D_f\\(\forall x\in D_f)\ ;f(-x)=f(x)\end{cases}$

Donc f est une fonction paire.

b. Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$:

Soit : $x\in]0;+\infty[$ on a : $f(x)=\frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{x^2+5}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}=\frac{x^2+5}{(x)\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$

$=\frac{x\left(x+\frac{5}{x}\right)}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{x+\frac{5}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$

puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}x+\frac{5}{x}=+\infty$

alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

2 Montrons que : $(\forall x\in\mathbb{R})\,;f'(x)=\frac{x^2-3}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$:

Soit : $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=\left(\frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+1}}\right)'=\frac{(x^2+5)'\sqrt{x^2+1}-(x^2+5)(\sqrt{x^2+1})'}{(\sqrt{x^2+1})^2}$

$$=\frac{2x\sqrt{x^2+1}-(x^2+5).\frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}}}{(\sqrt{x^2+1})^2}$$

$$=\left(2x\sqrt{x^2+1}-(x^2+5).\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)\times\frac{1}{(\sqrt{x^2+1})^2}$$

$$=\left(2x\sqrt{x^2+1}-\frac{x(x^2+5)}{\sqrt{x^2+1}}\right)\times\frac{1}{(\sqrt{x^2+1})^2}$$

$$=\frac{2x(x^2+1)-x(x^2+5)}{\sqrt{x^2+1}(\sqrt{x^2+1})^2}$$

$$=\frac{x[(2x^2+2)-(x^2+5)]}{(\sqrt{x^2+1})^3}$$

$$=\frac{x(x^2-3)}{(\sqrt{x^2+1})^3}$$

Donc : $(\forall x\in\mathbb{R})\,;f'(x)=\frac{x(x^2-3)}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$

Variations de f :

On a : $(\forall x\in\mathbb{R})\,;f'(x)=\frac{x(x^2-3)}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$

Or : $(\forall x\in\mathbb{R})\,;\sqrt{(x^2+1)^3}>0$

donc le signe de $f'(x)$ est celui de $x(x^2-3)$ sur $\mathbb{R}$.

On a : $x(x^2-3)=x(x^2-\sqrt{3})$

$$=x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$$

donc : $f'(x)=0\Leftrightarrow x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})=0$

$$\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=\sqrt{3} \text{ ou } x=-\sqrt{3}$$

Le tableau de signe de $x(x^2-3)$ est:

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
x	$-$		$-$		0	$+$			$+$
x^2-3	$+$		0	$-$		$-$	0		$+$
$x(x^2-3)$	$-$		0	$+$	0	$-$	0		$+$

Le tableau de variations de est le suivant :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Longrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ (car : f est paire)

et $f(\sqrt{3}) = \dfrac{3+5}{\sqrt{3+1}} = \dfrac{8}{2} = 4$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$	$-$		0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	4	↗	5	↘	4	↗	$+\infty$

3 **Montrons que :** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = 0$:

Soit : $x \in]0;+\infty[$: $f(x) - x = \dfrac{x^2+5}{\sqrt{x^2+1}} - x$

$$= \frac{x^2+1+4}{\sqrt{x^2+1}} - x$$

$$= \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{4}{\sqrt{x^2+1}} - x$$

$$= \sqrt{x^2+1} - x + \frac{4}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{(\sqrt{x^2+1})^2 - (x)^2}{\sqrt{x^2+1}+x} + \frac{4}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} + \frac{4}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} + \frac{4}{\sqrt{x^2+1}}$$

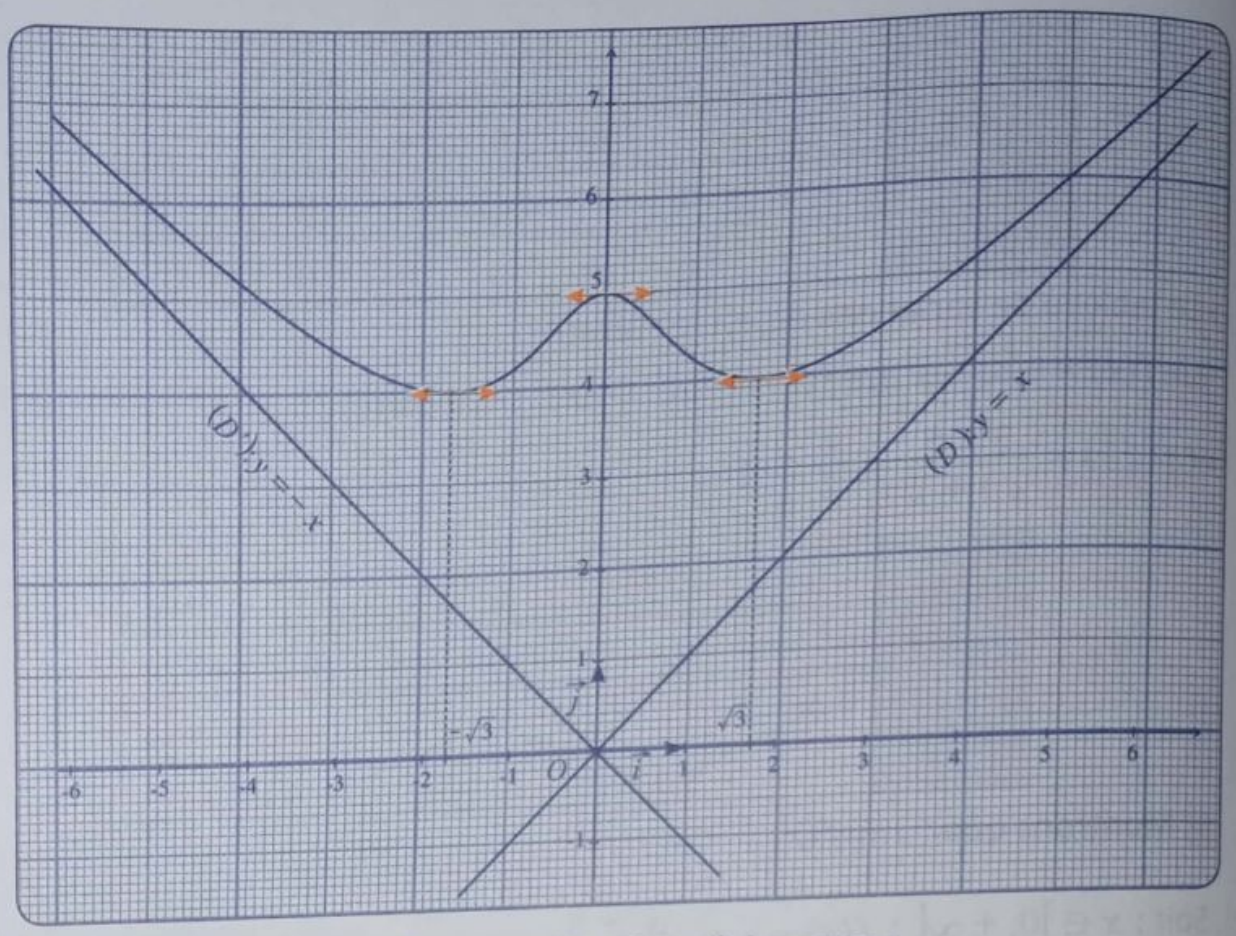
puisque: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{\sqrt{x^2+1}} = 0$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$, alors: $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x) = 0$

Interprétation graphique :

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$.

4 **Construction de** (C_f) :

Puisque f est paire alors (C_f) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



5 a. Montrons que g admet une fonction réciproque :

La fonction g est la restriction de f sur $[0;\sqrt{3}]$.

La fonction g est continue sur $[0;\sqrt{3}]$ comme quotient de deux fonctions continues sur $[0;\sqrt{3}]$ qui sont : $x \mapsto x^2+5$ et $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$.

Et on a : g est strictement décroissante sur $[0;\sqrt{3}]$.

Donc : g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle J.

Tel que : $J = g([0;\sqrt{3}]) = [f(\sqrt{3}); g(0)]$

$= [4;5]$

b. Déterminons $g(1)$ et $(g^{-1})'(3\sqrt{2})$:

On a : $g(1) = \dfrac{6}{\sqrt{2}} = \dfrac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$, alors : $g^{-1}(3\sqrt{2}) = 1$

or : g est dérivable en 1 et $g'(1) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; c'est-à-dire : $g'(1) \neq 0$

donc : g^{-1} est dérivable en $3\sqrt{2}$ et on a :

$$(g^{-1})'(3\sqrt{2}) = \frac{1}{g'(g^{-1}(3\sqrt{2}))} = \frac{1}{g'(1)} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

Donc : $(g^{-1})'(3\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$.

4 Les suites numériques

Soit n_0 un entier naturel et $I \subset \mathbb{N}$ avec $I = \{n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$

1 Suite majorée ; suite minorée ; suite bornée.

Définitions:

Soit $(u_n)_{n \in I}$ une suite numérique définie sur I

- La suite $(u_n)_{n \in I}$ est majorée si et seulement s'il existe un réel M tel que: $(\forall n \in I) ; u_n \leq M$
- La suite $(u_n)_{n \in I}$ est minorée si et seulement s'il existe un réel m : tel que $(\forall n \in I) ; u_n \geq m$
- La suite $(u_n)_{n \in I}$ est bornée si et seulement si elle est majorée et minorée.

2 Sens de variation d'une suite

Propriété:

Soit $(u_n)_{n \in I}$ une suite définie sur I

- $(u_n)_{n \in I}$ est une suite croissante si et seulement si : $(\forall n \in I) ; u_{n+1} \geq u_n$
- $(u_n)_{n \in I}$ est une suite strictement croissante si et seulement si : $(\forall n \in I) ; u_{n+1} > u_n$
- $(u_n)_{n \in I}$ est une suite décroissante si et seulement si : $(\forall n \in I) ; u_{n+1} \leq u_n$
- $(u_n)_{n \in I}$ est une suite strictement décroissante si et seulement si , $(\forall n \in I) ; u_{n+1} < u_n$
- $(u_n)_{n \in I}$ est une suite constante si et seulement si: $(\forall n \in I) ; u_{n+1} = u_n$

3 Sens de variation d'une suite

Suite arithmétique de raison r	Suite géométrique de raison q
$(\forall n \in I) ; u_{n+1} = u_n + r$	$(\forall n \in I) ; u_{n+1} = qu_n$
$u_n = u_0 + nr$; cas où: $I = \mathbb{N}$	$u_n = q^n u_0$; $I = \mathbb{N}$ et $q \neq 0$
$u_n = u_p + (n-p)r$; n et p de I	$u_n = q^{n-p} u_p$; n et p de I et $q \neq 0$

$S_n = \begin{pmatrix}\text{nombre}\\ \text{de terme}\end{pmatrix} \times \frac{1^{er}\text{ terme+dernier terme}}{2}$	$(q \neq 1)$; $S_n = \begin{matrix}1^{er}\text{ terme de}\\ \text{la somme}\end{matrix} \times \frac{1-(q)}{1-q}$.
cas particulier: $1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$	cas particulier: $1+q+q^2+\ldots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$; $(q \neq 1)$

Exercices

Exercice 1 Raisonnement par récurrence

1 On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $u_0 = 2$;

$(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = \frac{1}{2}(1+u_n)$

Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n > 1$

2 On considère la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ définie par : $v_0 = 2$;

$(\forall n \in \mathbb{N}); v_{n+1} = \sqrt{6+v_n}$

Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < v_n < 3$

3 Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$\begin{cases} w_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}) w_{n+1} = 2 - \frac{1}{2+w_n} ; \end{cases}$ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 \leqslant w_n \leqslant \sqrt{3}$

Exercice 2

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = -1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3 \end{cases}$

En utilisant le raisonnement par récurrence :

1 Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n < 6$.

2 Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n = 6 - \frac{7}{2^n}$.

Exercice 3

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}^*); u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases}$

1 Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $1 \leq u_n \leq 2$.

2 Étudier les variations de la suite (u_n).

Exercice 4

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}^*); u_{n+1} = \dfrac{5u_n}{3u_n + 5} \end{cases}$

1. Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_n > 0$
2. On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$; $v_n = \dfrac{5}{u_n}$
   a. Montrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique dont on déterminera la raison et le premier terme.
   b. Déterminer v_n et u_n en fonction de n.

Exercice 5

Soit (a_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} a_0 = 3 \\ (\forall n \in \mathbb{N}); a_{n+1} = \dfrac{3}{2}a_n - 1 \end{cases}$

1. Déterminer α l'abscisse du point d'intersection de la droite $(D): y = x$ avec la droite $(\Delta): y = \dfrac{3}{2}x - 1$
2. On pose pour tout n de $\mathbb{N}$; $b_n = a_n - \alpha$
   a. Montrer que (b_n) est une suite géométrique.
   b. Déterminer b_n puis a_n en fonction de n.

Solutions

Exercice 1

1 Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > 1$

On a : $u_0 = 2$ et $2 > 1$ d'où $u_0 > 1$; donc la propriété est vraie pour $n = 0$

Soit $n \in \mathbb{N}$; on suppose que $u_n > 1$ et on montre que $u_{n+1} > 1$.

On a : $u_n > 1$ donc $1 + u_n > 2$ d'où $\dfrac{1}{2}(1 + u_n) > 1$ ainsi $u_{n+1} > 1$.

la propriété est vraie pour $n + 1$;

donc d'après le principe de récurrence on a : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > 1$

2 Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < v_n < 3$

On a : $v_0 = 2$ et $0 < 2 < 3$ d'où $0 < v_0 < 3$;

la propriété est vraie pour $n = 0$

Soit n de $\mathbb{N}$; on suppose que $0 < v_n < 3$ et on montre que $0 < v_{n+1} < 3$

On a : $0 < v_n < 3 \Rightarrow 6 < 6 + v_n < 9$

$\Rightarrow \sqrt{6} < \sqrt{6 + v_n} < \sqrt{9}$

$\Rightarrow \sqrt{6} < v_{n+1} < 3 \qquad (\sqrt{6} > 0)$

$\Rightarrow 0 < v_{n+1} < 3$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < v_n < 3 \Longrightarrow c < v_{n+1} < 3$

Donc d'après le principe de récurrence on a : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < v_n < 3$

3 Montrons par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 \leq w_n \leq \sqrt{3}$

On a : $w_0 = 1$ et $1 \leq 1 \leq \sqrt{3}$ donc $1 \leq w_0 \leq \sqrt{3}$; d'où la propriété est vraie pour $n = 0$

Soit n de $\mathbb{N}$; on suppose que $1 \leq w_n \leq \sqrt{3}$; et on montre que $1 \leq w_{n+1} \leq \sqrt{3}$

On a: $1 \leq w_n \leq \sqrt{3} \Rightarrow 3 \leq 2 + w_n \leq 2 + \sqrt{3}$

$\Rightarrow \frac{1}{2+\sqrt{3}} \leq \frac{1}{2+w_n} \leq \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \frac{-1}{3} \leq \frac{-1}{2+w_n} \leq \frac{-1}{2+\sqrt{3}}$

$\Rightarrow 2 - \frac{1}{3} \leq 2 - \frac{1}{2+w_n} \leq 2 - \frac{1}{2+\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \frac{5}{3} \leq w_{n+1} \leq \frac{4 + 2\sqrt{3} - 1}{2+\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \frac{5}{3} \leq w_{n+1} \leq \frac{3 + 2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$

$\Rightarrow 1 \leq w_{n+1} \leq \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+2)}{2+\sqrt{3}} \qquad (\text{car } \frac{5}{3} > 1)$

$\Rightarrow 1 \leq w_{n+1} \leq \sqrt{3}$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 \leq w_n \leq \sqrt{3} \Longrightarrow 1 \leq w_{n+1} \leq \sqrt{3}$

Donc; d'après le principe de récurrence on a : $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 \leq w_n \leq \sqrt{3}$

Exercice 2

1 Montrons par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n < 6$

- pour $n = 0$ on a: $u_0 = -1$ et $-1 < 6$, d'où : $u_0 < 6$; c'est-à-dire la propriété est vraie pour $n = 0$
- Soit n un élément de $\mathbb{N}$; montrons que: $u_n < 6 \Longrightarrow u_{n+1} < 6$.

On a : $u_n < 6 \Rightarrow \frac{1}{2}u_n < 3$

$\Rightarrow \frac{1}{2}u_n + 3 < 6$

$\Rightarrow u_{n+1} < 6$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; u_n < 6 \Longrightarrow u_{n+1} < 6$

Donc d'après le principe de récurrence on a : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; u_n < 6$

2 Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; u_n = 6 - \frac{7}{2^n}$

Pour $n = 0$; on a : $u_0 = -1$ et $6 - \frac{7}{2^0} = 6 - 7 = -1$.

D'où : $u_0 = 6 - \frac{7}{2^0}$; ainsi la propriété est vraie pour $n = 0$.

Soit n un élément de $\mathbb{N}$

On suppose que : $u_n = 6 - \frac{7}{2^n}$ Et on montre que $u_{n+1} = 6 - \frac{7}{2^{n+1}}$

On a : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$

$= \frac{1}{2}\left(6 - \frac{7}{2^n}\right) + 3$

$= 3 - \frac{7}{2 \times 2^n} + 3$

$= 6 - \frac{7}{2^{n+1}}$

Donc la propriété est vraie pour $n + 1$;

d'où d'après le principe de récurrence $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n = 6 - \frac{7}{2^n}$

Exercice 3

1 Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ; 1 \leq u_n \leq 2$.

Pour $n = 1$; on a : $u_1 = 1$ et $1 \leq 1 \leq 2$; d'où $1 \leq u_1 \leq 2$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 1$

Soit n un élément $\mathbb{N}^*$; on suppose que : $1 \leq u_n \leq 2$ et on montre que: $1 \leq u_{n+1} \leq 2$

On a : $1 \leq u_n \leq 2 \Rightarrow\ 3 \leq u_n + 2 \leq 4$

$\Rightarrow \sqrt{3} \leq \sqrt{u_n + 2} \leq 2$

$\Rightarrow 1 \leq \sqrt{3} \leq \sqrt{u_n + 2} \leq 2$

$\Rightarrow 1 \leq \sqrt{u_n + 2} \leq 2$

$\Rightarrow 1 \leq u_{n+1} \leq 2$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 \leq u_n \leq 2 \Rightarrow 1 \leq u_{n+1} \leq 2$

D'ou d'après le principe de récurrence on a: $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 1 \leq u_n \leq 2$

2 Étudions les variations de (u_n)

▸ **Méthode 1:**

Soit n de $\mathbb{N}^*$; on a : $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n + 2} - u_n$

$$= \frac{u_n + 2 - u_n^2}{\sqrt{u_n + 2} + u_n}$$

$$= \frac{-u_n^2 + u_n + 2}{\sqrt{u_n + 2} + u_n}$$

$$= \frac{-(u_n + 1)(u_n - 2)}{\sqrt{u_n + 2} + u_n}$$

On a eu la factorisation en calculant le discriminant de $-x^2 + x + 2$

infos:
$ax^2 + bx + c$
$= a(x - x_1)(x - x_2)$
avec $\Delta > 0 (a \neq 0)$

Puisque : $\sqrt{u_n + 2} + u_n > 0$ et $u_n + 1 > 0$ et $u_n - 2 \leq 0$ donc: $u_{n+1} - u_n \geq 0$

D'où $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_{n+1} \geq u_n$; donc (u_n) est une suite croissante.

▸ **Méthode 2 :** On utilise le raisonnement par récurrence:

On a : $u_1 = 1$ et $u_2 = \sqrt{u_1 + 1} = \sqrt{2}$

Donc : $u_1 \leq u_2$

Soit n de $\mathbb{N}^*$; on suppose que $u_n \leq u_{n+1}$ et on montre que $u_{n+1} \leq u_{n+2}$

On a : $u_n \leq u_{n+1} \Rightarrow 0 \leq u_n + 2 \leq u_{n+1} + 2$

$\Rightarrow \sqrt{u_n + 2} \leq \sqrt{u_{n+1} + 2}$

$\Rightarrow u_{n+1} \leq u_{n+2}$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \geq u_{n+1}$

Donc la suite (u_n) est une suite croissante.

Exercice 4

On a : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_{n+1} = \dfrac{5u_n}{3u_n + 5} \end{cases}$

1 Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n > 0$

pour $n = 1$; on a: $u_1 = 1$ et $1 > 0$, donc : $u_1 > 0$.

Soit n de $\mathbb{N}^*$; on suppose que $u_n > 0$ et montrons que $u_{n+1} > 0$

on a: $u_n > 0 \Rightarrow \begin{cases} 5u_n > 0 \\ 3u_n + 5 > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \dfrac{5u_n}{3u_n + 5} > 0$

$\Rightarrow u_{n+1} > 0$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; u_n > 0 \Longrightarrow u_{n+1} > 0$

D'où d'après le principe de récurrence on a: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ; u_n > 0$

2 a. Montrons que la suite (v_n) est arithmétique :

Soit n de $\mathbb{N}^*$; on a : $v_{n+1} - v_n = \dfrac{5}{u_{n+1}} - \dfrac{5}{u_n} = \dfrac{5}{\dfrac{5u_n}{3u_n+5}} - \dfrac{5}{u_n}$

$$= \frac{5 \times (3u_n + 5)}{5u_n} - \frac{5}{u_n}$$

$$= \frac{3u_n + 5 - 5}{u_n} = \frac{3u_n}{u_n} = 3$$

Alors : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ; v_{n+1} = v_n + 5$

Donc la suite (v_n) est arithmétique de raison $r = 3$

et de 1er terme : $v_1 = \dfrac{5}{u_1} = \dfrac{5}{1} = 5$

b. Déterminons v_n en fonction de n

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ; v_n = v_1 + (n-1)r$

$$= 5 + (n-1) \times 3$$

$$= 5 + 3n - 3$$

$$= 3n + 2$$

Donc: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ; v_n = 3n + 2$

Exprimons u_n en fonction de n

Soit n de $\mathbb{N}^*$.

On a : $v_n = \dfrac{5}{u_n} \Rightarrow u_n = \dfrac{5}{v_n}$

$$\Rightarrow u_n = \frac{5}{3n+2}$$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ; u_n = \dfrac{5}{3n+2}$

Exercice 5

1 Déterminons α l'abscisse du point d'intersection de (D) et (Δ)

Il s'agit de résoudre le système: $\begin{cases} y = x \\ y = \dfrac{3}{2}x - 1 \end{cases}$

On a : $\begin{cases} y = x \\ y = \dfrac{3}{2}x - 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{2}x - 1$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{3}{2}x - x$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{1}{2}x$$

$$\Rightarrow 2 = x$$

Donc $\alpha = 2$ est l'abscisse du point d'intersection de (D) et (Δ)

2 a. Montrons que (b_n) est une suite géométrique

Soit n de $\mathbb{N}$; on a: $b_{n+1} = a_{n+1} - \alpha$ $(\alpha = 2)$

$$= a_{n+1} - 2$$
$$= \frac{3}{2}a_n - 2 - 1$$
$$= \frac{3}{2}a_n - 3 = \frac{3}{2}(a_n - 2) = \frac{3}{2}b_n$$

Alors : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; b_{n+1} = \frac{3}{2}b_n$

Donc la suite (b_n) est géométrique de raison $q = \frac{3}{2}$

Son premier terme est : $b_0 = a_0 - 2$

$$= 3 - 2$$
$$= 1$$

b. Exprimons b_n et a_n en fonction de n

On a : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; b_n = b_0 \times q^n$

$$= 1 \times \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; b_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$.

- Soit n de $\mathbb{N}$.

Exprimons a_n en fonction de n

On a : $b_n = a_n - \alpha = a_n - 2$

D'où: $a_n = b_n + 2$

Donc : $a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n + 2$

Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n + 2$

4 Limites usuelles

Pour tout p de $\mathbb{N}^*$; on a:

- $\lim\limits_{n \to +\infty} n^p = +\infty$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n^p} = +\infty$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^p} = 0$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n^p}} = 0$

Si: $\alpha \in \mathbb{Q}^{*+}$ alors: $\lim\limits_{n \to +\infty} n^\alpha = +\infty$

Si : $\alpha \in \mathbb{Q}^{*-}$ alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} n^\alpha = 0$

5 Convergence d'une suite

Soit $I = \{n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$ avec n_0 un entier naturel.

Définition:

- On dit que la suite $(u_n)_{n \in I}$ est une suite convergence si elle admet une limite l, et on écrit: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$
- Toute suite non convergence est dite divergente.

6 Les critères deconvergence d'une suite

- Si: $(\forall n \geq n_0) ; |u_n - \ell| \leq v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$, alors la suite $(u_n)_{n \in I}$ est convergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.
- Si : $(\forall n \geq n_0) ; w_n \leq u_n \leq v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \ell$, alors la suite $(u_n)_{n \in I}$ est convergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.
- Si $(\forall n \geq n_0) ; v_n \leq u_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$, alors: (u_n) est une suite divergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
- Si $(\forall n \geq n_0) ; u_n \leq v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$ alors: (u_n) est une suite divergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.
- Toute suite croissante et majorée est convergente.
- Toute suite décroissante et minorée est convergente.

7 Limite de (q^n)

Soit q un réel.

- Si $q > 1$ alors: $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.
- Si $q = 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = \lim\limits_{n \to +\infty} 1 = 1$.
- Si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.
- Si $q \leq -1$ alors la suite (q^n) est divergente.

Exercices

Exercice 6

Calculer la limte de chaque suite définie par son terme général:

1. $\left(-\frac{2}{3}\right)^n : \frac{2^{n-1}}{5^n} : \frac{3^n}{4^n} : (-0,0007)^{n-5}$
2. $\frac{3^n-4}{3^n+4}$ et $\frac{4^n-6^n}{4^n+6^n}$
3. $\frac{5^n-4^n}{3^n-2^n}$ et $\frac{2^n-\pi^n+3^n}{3^n+\pi^n+2^n}$

Exercice 7

Dans chaque cas, déterminer la limite de la suite (u_n) définie par son terme général:

1. $u_n = \frac{4n^2+3}{2n^2+2}$
2. $u_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}}$
3. $u_n = \frac{2^n-3^{n-1}}{3^{n+1}+6^{n-1}}$
4. $u_n = n^{\frac{2}{3}} - n^{\frac{1}{2}}$
5. $u_n = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}$
6. $u_n = \left(1-\frac{n+2}{n+3}\right)(n+4)$

Exercice 8

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par son terme général dans chacun des cas suivants:

1. $u_n = 1+2+3+\ldots+n$
2. $u_n = \frac{a^n-b^n}{a^n+b^n}$ avec: $a>0$ et $b>0$
3. $u_n = \frac{n^2+(-1)^n}{n+(-1)^n}$
4. $u_n = 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Exercice 9

Déterminer les limtes de (u_n); (v_n) et (w_n) telles que :

- $u_n = \frac{1}{n^2}+\frac{2}{2n^2}+\frac{3}{3n^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}$; $n \in \mathbb{N}^*$
- $v_n = \frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\ldots+\frac{1}{n^2+n}$; $n \in \mathbb{N}^*$
- $w_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$; $n \in \mathbb{N}^*$

Exercice 10

Déterminer la limite de (u_n) dans chaque cas:

1. $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; u_n = \dfrac{\sin(n)}{n^2+1}$
2. $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; u_n = \dfrac{a^n+2}{4a^n+3}$ avec $a \in]1;+\infty[$
3. $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ; u_n = \dfrac{n^2+\sin(n)}{n^4}$
4. $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; u_n = \dfrac{2n+(-1)^n\sqrt{n}}{n+2}$

Exercice 11

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; u_n = 5^n - 3^n$

1. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\})\ ; u_n > 3^n$
2. En déduire: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 12

1. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ; 3^n \geq 1+2n^2$
2. En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty}(2^n - 3^n + n)$

Exercice 13

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite numérique définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ; u_n = \frac{n}{n^2+\sqrt{1}} + \frac{n}{n^2+\sqrt{2}} + \frac{n}{n^2+\sqrt{3}} + \ldots + \frac{n}{n^2+\sqrt{n}}$$

1. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ; \dfrac{n^2}{n^2+\sqrt{n}} \leq u_n \leq \dfrac{n^2}{n^2+\sqrt{1}}$
2. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{n^2+\sqrt{1}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{n^2+\sqrt{n}}$; puis déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 14

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ; a_n = 2 + \dfrac{\sin n}{n^2}$

1. Montrer que : $|a_n - 2| \leq \dfrac{1}{n^2}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$
2. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

Exercice 6

Calculons la limite de chaque suite définie par son terme général :

1 ▸ On a : $-1 < -\frac{2}{3} < 1$; d'où : $\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n = 0$

▸ Soit n de $\mathbb{N}$; on a : $\frac{2^{n-1}}{5^n} = \frac{2^n}{5^n} \times 2^{-1} = \left(\frac{2}{5}\right)^n \times \frac{1}{2}$

Puisque : $-1 < \frac{2}{5} < 1$ alors : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$ d'où : $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$

donc : $\lim_{n\to+\infty}\frac{2^{n-1}}{5^n} = 0$

▸ Soit n de $\mathbb{N}$; on a : $\frac{3^n}{4^n} = \left(\frac{3}{4}\right)^n$

Puisque : $-1 < \frac{3}{4} < 1$ alors : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ donc : $\lim_{n\to+\infty}\frac{3^n}{4^n} = 0$

▸ Soit n de $\mathbb{N}$; on a : $(-0,0007)^{n-5} = (-0,0007)^n \times (-0,0007)^{-5}$

Puisque : $-1 < -0,0007 < 1$ alors : $\lim_{n\to+\infty}(-0,0007)^n = 0$

d'où : $\lim_{n\to+\infty}(-0,0007)^n \times \underbrace{(-0,0007)^5}_{\text{c'est une constante}} = 0$

ainsi : $\lim_{n\to+\infty}(-0,0007)^{n-5} = 0$

2 ▸ Soit n de $\mathbb{N}$; on a : $\frac{3^n-4}{3^n+4} = \frac{3^n\left(1-\frac{4}{3^n}\right)}{3^n\left(1+\frac{4}{3^n}\right)} = \frac{1-4\times\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1+4\times\left(\frac{1}{3}\right)^n}$

Puisque : $-1 < \frac{1}{3} < 1$; alors : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$

D'où : $\lim_{n\to+\infty}\frac{1-4\times\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1+4\times\left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{1}{1} = 1$, donc : $\lim_{n\to+\infty}\frac{3^n-4}{3^n+4} = 1$

▸ Soit n de $\mathbb{N}$; on a : $\frac{4^n-6^n}{4^n+6^n} = \frac{6^n\left(\frac{4^n}{6^n}-1\right)}{6^n\left(\frac{4^n}{6^n}+1\right)} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n-1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}$

Puisque : $-1 < \frac{2}{3} < 1$ alors : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

D'où : $\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n-1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1} = \frac{0-1}{0+1} = -1$

Donc : $\lim_{n\to+\infty}\frac{4^n-6^n}{4^n+6^n} = -1$

3) Soit n de $\mathbb{N}$; on a : $\dfrac{5^n-4^n}{3^n-2^n}=\dfrac{5^n\left(1-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right)}{3^n\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}=\left(\frac{5}{3}\right)^n\times\dfrac{1-\left(\frac{4}{5}\right)^n}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}$

Puisque: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n=0$ car : $-1<\frac{4}{5}<1$; et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$ car: $-1<\frac{2}{3}<1$

D'où: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1-\left(\frac{4}{5}\right)^n}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}=1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{3}\right)^n=+\infty$ car : $\frac{5}{3}>1$

Alors: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{3}\right)^n\times\dfrac{1-\left(\frac{4}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}=+\infty$

Donc: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{5^n-4^n}{3^n-2^n}=+\infty$

Soit n de $\mathbb{N}$; on a:

$$\frac{2^n-\pi^n+3^n}{3^n+\pi^n+2^n}=\frac{\pi^n\left(\frac{2^n}{\pi^n}-1+\frac{3^n}{\pi^n}\right)}{\pi^n\left(\frac{3^n}{\pi^n}+1+\frac{2^n}{\pi^n}\right)}=\frac{\left(\frac{2}{\pi}\right)^n-1+\left(\frac{3}{\pi}\right)^n}{\left(\frac{3}{\pi}\right)^n+1+\left(\frac{2}{\pi}\right)^n}$$

Puisque : $-1<\frac{3}{\pi}<1$ et $-1<\frac{2}{\pi}<1$; alors: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{\pi}\right)^n=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\right)^n=0$

D'où: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\left(\frac{3}{\pi}\right)^n-1+\left(\frac{3}{\pi}\right)^n}{\left(\frac{3}{\pi}\right)^n+1+\left(\frac{2}{\pi}\right)^n}=-1$

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2^n-\pi^n+3^n}{3^n+\pi^n+2^n}=-1$

Exercice 7

Déterminons la limite de (u_n) dans chaque cas :

1) $u_n=\dfrac{4n^2+3}{2n^2+2}$

Soit n de $\mathbb{N}^*$; on a: $u_n=\dfrac{n^2\left(4+\frac{3}{n^2}\right)}{n^2\left(2+\frac{2}{n^2}\right)}=\dfrac{4+\frac{3}{n^2}}{2+\frac{2}{n^2}}$

Puisque : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3}{n^2}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2}{n^2}=0$; d'où: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\dfrac{4}{2}=2$

2 $u_n = \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}}$

Soit n de $\mathbb{N}^*$; on a : $u_n = \dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} - \dfrac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}}$

$$= 1 - \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$$

$$= 1 - \sqrt{\frac{n\left(1-\frac{1}{n}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}} = 1 - \sqrt{\frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}}$$

Or: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ d'où: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \sqrt{\dfrac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}} = 1 - 1 = 0$

ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

2ème méthode:

Soit n de $\mathbb{N}$ on a :

$$u_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}} = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}$$

$$= \frac{(n+1)-(n-1)}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})} = \frac{2}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}$$

Puisque : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n-1} = +\infty$

Alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})} = 0$ donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

3 $u_n = \dfrac{2^n - 3^{n-1}}{3^{n+1}+6^{n-1}}$

Soit n de $\mathbb{N}$; on a : $u_n = \dfrac{2^n - 3^{n-1}}{3^n \times 3 + \frac{6^n}{6}} = \dfrac{3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{3}\right)}{6^n\left(\frac{3^n}{6^n}\times 3 + \frac{1}{6}\right)}$

$$= \left(\frac{3}{6}\right)^n \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{3}}{\left(\frac{3}{6}\right)^n \times 3 + \frac{1}{6}} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{3}}{\left(\frac{1}{2}\right)^n \times 3 + \frac{1}{6}}$$

Puisque : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$ (car : $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$ et $-1 < \dfrac{2}{3} < 1$)

Alors : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \times \dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{3}}{\left(\frac{1}{2}\right)^n \times 3 + \frac{1}{6}} = 0$; donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

4 $u_n = n^{\frac{2}{3}} - n^{\frac{1}{2}}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on a : $u_n = n^{\frac{2}{3}}\left(1 - \frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{2}{3}}}\right)$

$= n^{\frac{2}{3}}(1 - n^{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}})$

$= n^{\frac{2}{3}}(1 - n^{-\frac{1}{6}})$

Or : $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}^{*+}$ donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{2}{3}} = +\infty$

Et : $-\frac{1}{6} \in \mathbb{Q}^{*-}$; donc: $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{-\frac{1}{6}} = 0$

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

infos:

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\alpha} = +\infty$ si: $\alpha \in \mathbb{Q}^{*+}$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\alpha} = 0$ si : $\alpha \in \mathbb{Q}^{*-}$

5 $u_n = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}$

Soit n de $\mathbb{N}$; on a: $u_n = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}$

$= \frac{\sqrt{n+1}(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})}{(\sqrt{n} - \sqrt{n+1})(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})}$

$= \frac{\sqrt{n+1}(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})}{n - (n+1)}$

$= -(\sqrt{n+1})(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})$

Puisque: $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty \end{cases}$ alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} -\sqrt{n+1}(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}) = -\infty$

D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

6 $u_n = \left(1 - \frac{n+2}{n+3}\right)(n+4)$

Soit n de $\mathbb{N}^*$; on a : $u_n = \left(1 - \frac{n+2}{n+3}\right)(n+4)$

$= \frac{n+3-n-2}{n+3}.(n+4)$

$= \frac{1}{n+3}.(n+4)$

$= \frac{n+4}{n+3}$

$= \frac{n\left(1+\frac{4}{n}\right)}{n\left(1+\frac{3}{n}\right)}$

$= \frac{1+\frac{4}{n}}{1+\frac{3}{n}}$

Or: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4}{n}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3}{n}=0$; d'où : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{4}{n}}{1+\frac{3}{n}}=1$ donc: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$

Exercice 8

1 Déterminons la limite de la suite (u_n) avec: $u_n=1+2+3+...+n$

Soit n de $\mathbb{N}^*$; on a: $u_n=1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$

(Somme d'une suite arithmétique de raison $r=1$ et de 1er terme 1 et dernier terme n).

Puisque : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n(n+1)}{2}=+\infty$ alors : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$

2 Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a^n-b^n}{a^n+b^n}$ **avec** $a>0$ **et** $b>0$

- Si : $a=b$ alors: $(\forall n\in\mathbb{N})$; $u_n=0$ d'où: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$
- Si: $a<b$ alors : $u_n=\frac{b^n\left(\left(\frac{a}{b}\right)^n-1\right)}{b^n\left(\left(\frac{a}{b}\right)^n+1\right)}=\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n-1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n+1}$

Puisque: $0<\frac{a}{b}<1$ car : $0<a<b$

alors : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^n=0$; donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-1$

- Si: $a>b$ alors

On a: $u_n=\frac{a^n\left(1-\left(\frac{b}{a}\right)^n\right)}{a^n\left(1+\left(\frac{b}{a}\right)^n\right)}=\frac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^n}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n}$

Puisque : $0<\frac{b}{a}<1$ alors: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^n=0$ d'où : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$

Conclusion:

$a=b$	$a<b$	$a>b$
$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$	$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-1$	$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$

3 Calculons la limite de (u_n) avec: $u_n=\frac{n^2+(-1)^n}{n+(-1)^n}$

Soit n de $\mathbb{N}^*$; on a : $-1\le(-1)^n\le1$ d'où : $n^2-1\le n^2+(-1)^n\le n^2+1$ (1)

Et on a: $n-1\le n+(-1)^n\le n+1$

Donc: $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n+(-1)^n} \leq \frac{1}{n-1}$ (avec $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$) (2)

D'après (1) et (1) on a : $\frac{n^2-1}{n+1} \leq (n^2+(-1)^n) \times \frac{1}{n+(-1)^n} \leq \frac{n^2+1}{n-1}$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\})$; $\frac{n^2-1}{n+1} \leq \frac{n^2+(-1)^n}{n+(-1)^n} \leq \frac{n^2+1}{n-1}$

Puisque : $\frac{n^2-1}{n+1} = \frac{n\left(n-\frac{1}{n}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{n-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}$; alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = +\infty$

Alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

infos:

Si $v_n \leq u_n$ pour tout $n \geq n_0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ alors: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

4 Déterminons $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ **avec:** $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$

On a : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}$ (car: $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$)

u_n est la somme de $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

On a : alors $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} = 2.\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$

Or: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$; (car : $-1 < \frac{1}{2} < 1$); d'où: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$

Exercice 9

1 Déterminons : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{2n^2} + \frac{3}{3n^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}\right)$

Soit n de $\mathbb{N}^*$;

On a : $u_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{2n^2} + \frac{3}{3n^2} + \ldots + \frac{n}{nn^2} = \frac{1}{n^2}\left(1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{3} + \frac{4}{4} + \ldots + \frac{n}{n}\right)$

$= \frac{1}{n^2}\left(\underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{n \text{ fois } 1}\right) = \frac{1}{n^2}.(n.1) = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$

Puisque : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$; alors: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

2 Déterminons la limite de (v_n)

Soit n de $\mathbb{N}^*$; on a : $\frac{1}{n^2+n} \leq \frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2+1}$

$$\frac{1}{n^2+n} \leq \frac{1}{n^2+2} \leq \frac{1}{n^2+1}$$

$$\frac{1}{n^2+n} \leq \frac{1}{n^2+3} \leq \frac{1}{n^2+1}$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\underbrace{\frac{1}{n^2+n} \leq \frac{1}{n^2+n} \leq \frac{1}{n^2+1}}$$

Additionnons membre à membre les double inégalités précédentes:

$$\underbrace{\frac{1}{n^2+n}+\frac{1}{n^2+n}+\ldots+\frac{1}{n^2+n}}_{n \text{ fois}} \leq \frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\ldots+\frac{1}{n^2+n} \leq \underbrace{\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+1}+\ldots+\frac{1}{n^2+1}}_{n \text{ fois}}$$

D'où: $n \times \frac{1}{n^2+n} \leq v_n \leq n \times \frac{1}{n^2+1}$

Donc : $\frac{n}{n^2+n} \leq v_n \leq \frac{n}{n^2+1}$

Or : $\frac{n}{n^2+n} = \frac{n}{n(n+1)} = \frac{1}{n+1}$ et $\frac{n}{n^2+1} = \frac{n}{n\left(n+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{n+\frac{1}{n}}$

puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+\frac{1}{n}} = 0$

Par suite : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ (d'après un critère de convergence).

3 Déterminons la limite (w_n) :

Soit n de $\mathbb{N}^*$; et k $k \in \{1;2;\ldots;n\}$

On a : $1 \leq k \leq n \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

On remplace k par 1 ; 2 ; ....et n

On aura :
$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \\ \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \\ \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \end{cases}$$

Donc : $n \times \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq w_n \leq n \times \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$; d'où : $\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \leq w_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

Or : $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}$

Et : $\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{n}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}} = \frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$

Et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1$

Alors: $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 1$

(D'après un critère de convergence).

infos:

Si : $\begin{cases} u_n \le w_n \le v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell \end{cases}$

Alors: $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$

Exercice 10

1 Déterminer la limite de la suite (u_n) avec: $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; u_n = \frac{\sin(n)}{n^2+1}$

Soit n de $\mathbb{N}$; on a: $-1 \le \sin(n) \le 1$ et $n^2+1 > 0$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; \frac{-1}{n^2+1} \le u_n \le \frac{1}{n^2+1}$

Puisque: $\lim\limits_{n\to+\infty}(n^2+1) = +\infty$; alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2+1} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-1}{n^2+1} = 0$

d'où: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

2 Déterminons la limite de la suite (u_n) définie par : $n \in \mathbb{N}\ ; u_n = \frac{a^n+2}{4a^n+3}$

et $a > 1$

Soit n un entier naturel,

On a: $u_n = \frac{a^n+2}{4a^n+3} = \frac{a^n\left(1+\frac{2}{a^n}\right)}{a^n\left(4+\frac{3}{a^n}\right)} = \frac{1+\frac{2}{a^n}}{4+\frac{3}{a^n}}$; puisque: $a > 1$; alors:

$\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty$

D'où: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{a^n} = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{a^n} = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(4+\frac{3}{a^n}\right) = 4$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{a^n}\right) = 1$

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1+\frac{2}{a^n}}{4+\frac{3}{a^n}}\right) = \frac{1}{4}$; par suite: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{4}$

3 Déterminons la limite de $(u_n)_{n\ge1}$ avec: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ; u_n = \frac{n^2+\sin(n)}{n^4}$

Soit n de $\mathbb{N}^*$; on a : $-1 \le \sin(n) \le 1$. donc: $-1+n^2 \le n^2+\sin(n) \le 1+n^2$

d'où : $\frac{-1+n^2}{n^4} \leq \frac{n^2+\sin(n)}{n^4} \leq \frac{1+n^2}{n^4}$

ainsi : $-\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^2} \leq u_n \leq \frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^2}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

Puisque: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^4}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}=0$; d'où : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^2}\right)=0$

et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{-1}{n^4}+\frac{1}{n^2}\right)=0$; donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

4 Déterminons la limite de la suite (u_n):

avec : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; u_n = \frac{2n+(-1)^n\sqrt{n}}{n+2}$

Soit n de $\mathbb{N}$; on a : $-1 \leq (-1)^n \leq 1$; d'où: $-\sqrt{n} \leq (-1)^n\sqrt{n} \leq \sqrt{n}$

Donc: $2n-\sqrt{n} \leq 2n+(-1)^n\sqrt{n} \leq 2n+\sqrt{n}$

Puisque: $n+2>0$; alors: $\frac{2n-\sqrt{n}}{n+2} \leq \frac{2n+(-1)^n\sqrt{n}}{n+2} \leq \frac{2n+\sqrt{n}}{n+2}$

Donc : $\frac{2-\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+\frac{2}{n}} \leq u_n \leq \frac{2+\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+\frac{2}{n}}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

Puisque : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{n}=0$; et : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)=1$

Et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$; alors: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=2$.

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2+\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+\frac{2}{n}}=2$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2-\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+\frac{2}{n}}=2$; donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$

car : $\begin{cases} n\in\mathbb{N}^*\ ; \frac{2n-\sqrt{n}}{n+2} \leq u_n \leq \frac{2n+\sqrt{n}}{n+2} \\ \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n-\sqrt{n}}{n+2} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n+\sqrt{n}}{n+2} = 2 \end{cases}$

Exercice 11

1 Montrer par réccurence que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*-\{1\})\ ; u_n > 3$

- pour $n=2$; on a: $3^2=9$ et $u_2=5^2-3^2=16$; d'où : $u_2>3^2$;

La propriété est vraie pour $n=2$

- Soit n de $\mathbb{N}^*-\{1\}$.

Supposons: $u_n > 3^n$; et montrons que: $u_{n+1} > 3^{n+1}$

On a : $u_{n+1} = 5^{n+1} - 3^{n+1}$

$= 5.5^n - 3.3^n$

$= (2+3).5^n - 3.3^n$

$= 2.5^n + 3(5^n - 3^n)$

$= 2.5^n + 3u_n$

Puisque: $2.5^n > 0$; alors : $u_{n+1} > 3.u_n$, car $u_n > 3 \Longrightarrow 3u_n > 3^{n+1}$

ainsi: $u_{n+1} > 3^{n+1}$

D'où d'après le principe de réccurence on a . $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\})\ ; u_n > 3^n$

2 Calculons $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\})\ ; u_n > 3^n$; et puisque: $3 > 1$ alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} 3^n = +\infty$.

donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Exercice 12

1 Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ; 3^n \geq 1 + 2n^2$

- pour $n = 1$; on a : $3^1 = 3$ et $1 + 2(1)^2 = 3$; d'où la propriété est vraie pour $n = 1$.
- Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$;

On suppose que : $3^n \geq 1 + 2n^2$; et on montre que: $3^{n+1} \geq 1 + 2(n+1)^2$

On a: $3^n \geq 1 + 2n^2$; d'où: $3 \times 3^n \geq 3 + 6n^2$

Ainsi : $3^{n+1} \geq 3 + 6n^2$

Montrons que: $3 + 6n^2 \geq 1 + 2(n+1)^2$

infos:

Si: $A \geq B$

et pour montrer que: $A \geq C$

Il suffit de montrer que: $B \geq C$

On étudie le signe de la différence:

$3 + 6n^2 - (1 + 2(n+1)^2) = 3 + 6n^2 - (1 + 2n^2 + 4n + 2)$

$= 4n^2 - 4n = 4n(n-1)$

Puisque: $n \in \mathbb{N}^*$; alors: $4n(n-1) \geq 0$ d'où: $3 + 6n^2 \geq 1 + 2(n+1)^2$

donc $3^{n+1} \geq 1 + 2(n+1)^2$

par conséquent: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ; 3^n \geq 1 + 2n^2$; d'après le principe de récurrence.

2 Calculons $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n - 3^n + n$

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$

On a: $2^n - 3^n + n = 3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1 + \frac{n}{3^n}\right)$

Et puisque: $3^n \geq 1 + 2n^2$

Alors: $0 < \frac{1}{3^n} \leq \frac{1}{1+2n^2}$; d'où: $0 < \frac{n}{3^n} \leq \frac{n}{1+2n^2}$

et puisque: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{1+2n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n\left(\frac{1}{n}+2n\right)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{n}+2n} = 0$;

d'où: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{3^n} = 0$

Et on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$; car : $-1 < \frac{2}{3} < 1$

d'où : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1 + \frac{n}{3^n}\right) = -1$

Et on a : $3 > 1$; d'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$

donc: $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1 + \frac{n}{3^n}\right) = -\infty$; conclusion: $\lim\limits_{n\to+\infty}(2^n - 3^n + n) = -\infty$

Exercice 13

1 **Montrons que:** $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ; \frac{n^2}{n^2+\sqrt{n}} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2+\sqrt{1}}$

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

pour tout k de $\mathbb{N}^*$ avec $1 \leq k \leq n$;

On a : $1 \leq k \leq n \iff \sqrt{1} \leq \sqrt{k} \leq \sqrt{n}$

$\iff n^2+\sqrt{1} \leq n^2+\sqrt{k} \leq n^2+\sqrt{n}$

$\iff \frac{1}{n^2+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n^2+\sqrt{k}} \leq \frac{1}{n^2+\sqrt{1}}$

d'où: $\frac{n}{n^2+\sqrt{n}} \leq \frac{n}{n^2+\sqrt{k}} \leq \frac{n}{n^2+\sqrt{1}}$ pour tout k de $\mathbb{N}^*$ avec $1 \leq k \leq n$

On remplace k par tous les valeurs de 1 à n on aura :

$$\begin{cases} \frac{n}{n^2+\sqrt{n}} \leq \frac{n}{n^2+\sqrt{1}} \leq \frac{n}{n^2+\sqrt{1}} \\ \frac{n}{n^2+\sqrt{n}} \leq \frac{n}{n^2+\sqrt{2}} \leq \frac{n}{n^2+\sqrt{1}} \\ \quad\cdot \qquad\qquad \cdot \qquad\qquad \cdot \\ \quad\cdot \qquad\qquad \cdot \qquad\qquad \cdot \\ \frac{n}{n^2+\sqrt{n}} \leq \frac{n}{n^2+\sqrt{n}} \leq \frac{n}{n^2+\sqrt{1}} \end{cases}$$

On additionne membre à membre les doubles inégalités précédentes, on aura:

$$n \times \frac{n}{n^2+\sqrt{n}} \leq u_n \leq \frac{n}{n^2+\sqrt{1}} \times n$$

d'où : $\frac{n^2}{n^2+\sqrt{n}} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2+\sqrt{1}}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

2 Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2+\sqrt{1}}$

- Soit n de $\mathbb{N}^*$; on a: $\frac{n^2}{n^2+\sqrt{1}} = \frac{n^2}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}$

Puisque: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$; alors: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} = 1$ donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2+\sqrt{1}} = 1$

- Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2+\sqrt{n}}$

- Soit n de $\mathbb{N}^*$; on a: $\frac{n^2}{n^2+\sqrt{n}} = \frac{n^2}{n^2\left(1+\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)} = \frac{1}{1+\frac{1}{n\sqrt{n}}}$

puisque: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} = 0$; alors: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n\sqrt{n}}} = 1$; d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2+\sqrt{n}} = 1$

On a donc : $\begin{cases} (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \frac{n^2}{n^2+\sqrt{n}} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2+\sqrt{1}} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2+\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2+\sqrt{1}} = 1 \end{cases}$

(d'après un critère de convergence on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$)

Exercice 14

1 Montrons que: $|a_n - 2| \leq \frac{1}{n^2}$ **pour tout** n **de** $\mathbb{N}^*$.

Soit n de $\mathbb{N}^*$; on a: $|a_n - 2| = \left|\frac{\sin n}{n^2}\right| = \frac{|\sin n|}{n^2}$

puisque: $|\sin n| \leq 1$ alors : $\frac{|\sin n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$

donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; |a_n - 2| \leq \frac{1}{n^2}$

2 Déterminons $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; |a_n - 2| \leq \frac{1}{n^2}$

et : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

d'après un critère de convergence: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 2$

infos:

$\forall n \geq n_0 ; |u_n - \ell| \leq v_n$

Et si : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$

8 Suites de (u_n) type $u_{n+1} = f(u_n)$

Variations (cas où f est croissante).

- Si: $u_{n_0} < u_{n_0+1}$; alors par récurrence, on montre que : $(\forall n \geq n_0)$; $u_n < u_{n+1}$; donc: $(u_n)_{n \in I}$ est croissante.
- Si: $u_{n_0} > u_{n_0+1}$; alors par récurrence on montre que: $(\forall n \geq n_0)$; $u_n > u_{n+1}$; donc : $(u_n)_{n \in I}$ est décroissante.

Limite:

si:
- $u_{n+1} = f(u_n)$; $n \geq n_0$
- $u_{n_0} \in I$
- f est continue sur l'intervalle I
- $f(I) \subset I$
- $(u_n)_{n \geq n_0}$ est convergente

Alors : La limite de $(u_n)_{n \geq n_0}$ est une solution de l'équation $f(x) = x$

Exercices

Exercice 15

On considère la suite (u_n) définie par: $\begin{cases} u_0 = -\frac{5}{4} \\ (\forall n \in \mathbb{N}) \; ; \; u_{n+1} = (u_n + 2)^2 - 2 \end{cases}$

1. Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}) \; ; \; -2 < u_n < -1$.
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
4. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 16

On considère la suite (u_n) définie par: $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \sqrt{3u_n - 2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}) \; ; \; u_n \geq 2$.
2. Montrer que (u_n) est décroissante et minorée par 2.
3. En déduire que la suite (u_n) admet une limite ℓ et que : $\ell \geq 2$
4. Calculer la limite de (u_n).

Exercice 17

1 On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $[0;4]$ par:

$$f(x)=\left(\frac{4\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}\right)^2$$

a. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0;4]$.

b. Montrer que: $f([0;4])\subset[0;4]$

2 On considère la suite $(u_n)_n$ définie par: $u_0=1$

et $(\forall n\in\mathbb{N})\,;\,u_{n+1}=f(u_n)$

a. Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\,;\,0\leq u_n\leq 4$

b. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est strictement croissante, puis déduire qu'elle est convergente.

3 Soit $(v_n)_n$ la suite définie par: $(\forall n\in\mathbb{N})\,;\,v_n=1-\frac{2}{\sqrt{u_n}}$

a. Montrer que : $(v_n)_n$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

b. En déduire v_n ; puis u_n en fonction de n .

c. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 18

On considère la suite (u_n) définie par: $\begin{cases}u_0=\frac{1}{2}\\(\forall n\in\mathbb{N})\,u_{n+1}=u_n+1-\sqrt{1+u_n^2}\,;\end{cases}$

1 a. Montrer que: $(\forall n\in\mathbb{N})\,;\,0<u_n<1$

b. Montrer que (u_n) est une suite décroissante, puis déduire qu'elle est convergente.

2 Soit f la fonction définie par :

$f(x)=x+1-\sqrt{1+x^2}$

a. Montrer que f est continue sur $[0;1]$ et que: $f([0;1])\subset[0;1]$

b. Déterminer la limite la suite de (u_n).

Solutions

Exercice 15

1 **Montrons par récurrence que :** $(\forall n\in\mathbb{N})\,;\,-2<u_n<-1$

Pour $n=0$; on a: $u_0=-\frac{5}{4}$ et $-2<-\frac{5}{4}<-1$; donc: $-2<u_0<-1$

Soit n un élément de $\mathbb{N}$; on suppose que: $-2<u_n<-1$;

et on montre que: $-2 < u_{n+1} <- 1$

On a : $-2 < u_n <- 1 \Rightarrow 0 < u_n + 2 < 1$

$\Rightarrow 0 < (u_n + 2)^2 < 1$

$\Rightarrow -2 < (u_n + 2)^2 - 2 <- 2 + 1$

$\Rightarrow -2 < u_{n+1} <- 1$

Donc d'après le principe de récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; -2 < u_n <- 1$

2 Montrons que la suite (u_n) est décroissante.

Soit n un élément de $\mathbb{N}$; on a : $u_{n+1} - u_n = (u_n + 2)^2 - (u_n + 2)$

$= (u_n + 2)(u_n + 2 - 1)$

$= (u_n + 2)(u_n + 1)$

Puisque: $-2 < u_n <- 1$ alors: $u_n + 2 > 0$ et $u_n + 1 < 0$; donc:

$(u_n + 2)(u_n + 1) < 0$

d'où: $u_{n+1} - u_n < 0$

donc: $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; u_{n+1} < u_n$; conclusion (u_n) est une suite décroissante.

3 Déduisons que (u_n) est convergente.

On a la suite (u_n) est décroissante et minorée par -2; donc elle est convergente.

4 Déterminons $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Puisque la suite (u_n) est décroissante alors: $u_n \leq u_0$ pour tout n de $\mathbb{N}$; donc $u_n \leqslant -\frac{5}{4}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

On considère la fonction f définie sur $\left[-2; -\frac{5}{4}\right]$ par : $f(x) = (x+2)^2 - 2$

On a f est continue sur l'intervalle $\left[-2; -\frac{5}{4}\right]$ (car u est la restriction d'une fonction continue).

Tt de plus $f\left(\left[-2; -\frac{5}{4}\right]\right) \subset \left[-2; -\frac{5}{4}\right]$; (vérifier ce résultat)

on a : $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$ et $u_0 \in \left[-2; -\frac{5}{4}\right]$ et (u_n) est convergente.

Donc la limite de (u_n) vérifie l'équation: $f(x) = x$ dans $\left[-2; -\frac{5}{4}\right]$

Soit x de $\left[-2; -\frac{5}{4}\right]$, on a : $f(x) = x \Longleftrightarrow (x+2)^2 - 2 = x$

$\Leftrightarrow x^2+3x+2=0$

$\Leftrightarrow x=-1$ ou $x=-2$

$\Leftrightarrow x=-2$

donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-2$

Exercice 16

1 Montrons par récurrence que la suite (u_n) est minorée par 2; c'est-à-dire :

$(\forall n\in\mathbb{N})\,;u_n\geq 2$

Pour $n=0$; on a: $u_0=4$ et: $4\geq 2$ donc : $u_n\geq 2$

Soit n un élément de $\mathbb{N}$. On suppose que: $u_n\geq 2$ et on montre que: $u_{n+1}\geq 2$

On a : $u_n\geq 2$; alors : $3u_n\geq 6$; donc: $3u_n-2\geq 4$

d'où: $\sqrt{3u_n-2}\geq 2$; par conséquent : $u_{n+1}\geq 2$

D'où d'après le principe de récurrence on a : $(\forall n\in\mathbb{N})\,;u_n\geq 2$;

donc (u_n) est minorée par 2.

2 Montrons que la suite (u_n) est décroissante ;

c'est-à-dire, montrons que : $(\forall n\in\mathbb{N})\,;u_{n+1}<u_n$ (par récurrence)

Pour $n=0$; on a: $u_0=4$ et $u_1=\sqrt{3u_0-2}=\sqrt{10}$; d'où : $u_1<u_0$

Soit n de $\mathbb{N}$; supposons que : $u_{n+1}<u_n$ et on montre que : $u_{n+2}<u_{n+1}$

On a : $u_{n+1}<u_n \Longrightarrow 3u_{n+1}<3u_n$

$\Longrightarrow 0\leq 3u_{n+1}-2<3u_n-2$

$\Longrightarrow \sqrt{3u_{n+1}-2}<\sqrt{3u_n-2}$

(car $x\mapsto\sqrt{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et $(\forall n\in\mathbb{N})\,;3u_n-2\geq 0$)

(Et on a : $\sqrt{3u_n-2}=u_{n+1}$ et $\sqrt{3u_{n+1}-2}=u_{n+2}$)

Donc : $u_{n+1}<u_n \Longrightarrow u_{n+2}<u_{n+1}$; pour tout n de $\mathbb{N}$

D'après le principe de récurrence, $(\forall n\in\mathbb{N})\,;u_{n+1}<u_n$

Donc la suite (u_n) est décroissante.

3 Déduisons que la suite (u_n) admet une limite ℓ et que $\ell\geq 2$

D'après la question 1) on a : (u_n) est décroissante et minorée par 2; donc elle est convergente.

Or : $(\forall n\in\mathbb{N})\,;u_n\geq 2$ donc: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\geq\lim\limits_{n\to+\infty} 2$; d'où $\ell\geq 2$

4 Déterminons la limite de (u_n).

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I=[2;+\infty[$ par : $f(x)=\sqrt{3x-2}$

On a: ▸ $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$; et $(\forall n\in\mathbb{N})\,;u_n\geq 2$

▸ (u_n) est convergente.

▸ f est continue sur l'intervalle I ;

▸ $f(I)\subset I$ (vérifier ce résultat)

▸ $u_0\in I$

Donc la limite de la suite (u_n) vérifie l'équation $f(x)=x$ sur l'intervalle I.

Résolvons l'équation : $f(x)=x$ sur I :

$$\begin{aligned} f(x)=x &\Longleftrightarrow \sqrt{3x-2}=x \\ &\Longleftrightarrow 3x-2=x^2 \qquad (x\geq 2>0) \\ &\Longleftrightarrow x^2-3x+2=0 \\ &\Longleftrightarrow (x-1)(x-2)=0 \\ &\Longleftrightarrow x=1 \text{ ou } x=2 \end{aligned}$$

Donc: $\ell=2$ ou $\ell=1$; comme $\ell\geq 2$ alors : $\ell=2$; donc: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=2$

Exercice 17

1 a. Étudions les variations de f sur l'intervalle $[0;4]$:

La fonction f est définie sur $[0;4]$ et dérivable sur $]0;4[$ (vérifier ce résultat)

On a : $(\forall x\in]0;4[)\,;f'(x)=2\left(\dfrac{4\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}\right)'\left(\dfrac{4\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}\right)$

Or : $\left(\dfrac{\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}\right)'=\dfrac{(\sqrt{x})'(2+\sqrt{x})-\sqrt{x}\,(2+\sqrt{x})'}{(2+\sqrt{x})^2}$

$$=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(2+\sqrt{x})-\sqrt{x}\times\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(2+\sqrt{x})^2}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}\,(2+\sqrt{x})^2}(2+\sqrt{x}-\sqrt{x})=\frac{1}{\sqrt{x}\,(2+\sqrt{x})^2}$$

D'où : $(\forall x\in]0;4[)\,;f'(x)=2\times 4\times\dfrac{1}{\sqrt{x}\,(2+\sqrt{x})^2}\times\dfrac{4\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}=\dfrac{32}{(2+\sqrt{x})^2}$

Et puisque: $2+\sqrt{x}>0$ pour tout x de $]0;4[$; on a : $f'(x)>0$ pour tout x de $]0;4[$; donc f est strictement croissante sur l'intervalle $[0;4]$.

b. **Montrons que :** $f([0;4])\subset[0;4]$

La fonction f est continue sur $[0;4]$; comme carré d'une fonction continue

Et on a : f est strictement croissante sur $[0;4]$

Donc : $f([0;4])=[f(0);f(4)]=[0;4]$; d'où : $f([0;4])\subset[0;4]$

2 a. **Montrons par récurrence que** $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ 0\le u_n\le 4$

Pour $n=0$; on a : $u_0=1$ et $0\le 1\le 4$ donc : $1\le u_0\le 4$

Soit n de $\mathbb{N}$; on suppose que $0\le u_n\le 4$; et on montre que : $0\le u_{n+1}\le 4$

On a : $0\le u_n\le 4\Longrightarrow f(0)\le f(u_n)\le f(4)$ (f est croissante sur $[0;4]$)

$\Longrightarrow 0\le u_{n+1}\le 4$

D'après le principe de récurrence on a : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ 0\le u_n\le 4$

b. **Montrons par récurrence que la suite** (u_n) **est strictement croissante, c'est-à-dire:** $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_n<u_{n+1}$

- Pour $n=0$; on a : $u_0=1$ et $u_1=f(u_0)=f(1)=\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{16}{9}$;

on a donc: $u_0<u_1$

Soit n de $\mathbb{N}$; on suppose que: $u_n<u_{n+1}$; et on montre que : $u_{n+1}<u_{n+2}$

On a : $u_n<u_{n+1}$ et $u_n\in[0;4]$ et $u_{n+1}\in[0;4]$

et la fonction f est strictement croissante sur $[0;4]$; donc : $f(u_n)<f(u_{n+1})$

d'où : $u_{n+1}<u_{n+2}$

D'après le principe de récurrence : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_n<u_{n+1}$

donc la suite (u_n) est strictement croissante.

▸ Déduisons que (u_n) est convergente :

On a: la suite (u_n) est croissante et majorée par 4; donc elle est convergente.

3 a. **Montrons que la suite** (v_n) **est géométrique de raison** $\frac{1}{2}$.

Soit n de $\mathbb{N}$; on a : $v_{n+1}=1-\frac{2}{\sqrt{u_{n+1}}}=1-\frac{2}{\sqrt{f(u_n)}}=1-\frac{2+\sqrt{u_n}}{2\sqrt{u_n}}$

$=1-\frac{1}{\sqrt{u_n}}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{u_n}}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{\sqrt{u_n}}\right)=\frac{1}{2}v_n$

Donc : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n$

D'où la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = 1 - \frac{2}{\sqrt{u_0}} = 1 - 2 = -1$

b. Déterminons v_n en fonction de n :

Soit n de $\mathbb{N}$; on a: $v_n = q^n v_0$; donc : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Exprimons u_n en fonction de n :

Soit n un élément de $\mathbb{N}$; on a : $v_n = 1 - \frac{2}{\sqrt{u_n}}$; d'où : $\frac{2}{\sqrt{u_n}} = 1 - v_n$

Donc: $\sqrt{u_n} = \frac{2}{1 - v_n}$; d'où : $u_n = \left(\frac{2}{1 - v_n}\right)^2$;

conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = \left(\frac{2}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n}\right)^2$

c. Déterminons $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$:

Puisque : $-1 < \frac{1}{2} < 1$; alors: $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$; d'où: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2^2$

donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n = 4$

Remarque:

A partir de la question 2), on peut déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ d'une autre façon :

On a la suite (u_n) vérifie :

- $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 \in [0;4]$
- f continue sur $[0;4]$
- $f([0;4]) \subset [0;4]$
- (u_n) est convergente

donc la limite de (u_n) vérifie $f(x) = x$ dans l'intervalle $[0;4]$.

Exercice 18

1 a. Montrons par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n < 1$

- Pour $n = 0$; on a: $u_0 = \frac{1}{2}$ et $0 < \frac{1}{2} < 1$; d'où : $0 < u_0 < 1$

Soit n un élément de $\mathbb{N}$;

on suppose que : $0 < u_n < 1$; et on montre que $0 < u_{n+1} < 1$

On a : $u_{n+1} = 1 + u_n - \sqrt{1 + u_n^2} = \frac{(1 + u_n)^2 - (1 + u_n^2)}{1 + u_n + \sqrt{1 + u_n^2}} = \frac{2u_n}{1 + u_n + \sqrt{1 + u_n^2}}$

De plus on a : $u_n > 0$; donc : $\frac{2u_n}{1+u_n+\sqrt{1+u_n^2}} > 0$; d'où : $u_{n+1} > 0$ (1)

Montrons que : $u_{n+1} < 1$

On a : $u_{n+1} - 1 = u_n - \sqrt{1+u_n^2} = \frac{-1}{u_n+\sqrt{1+u_n^2}}$

On a : $u_n > 0$ d'où: $u_{n+1} - 1 < 0$ donc : $u_{n+1} < 1$ (2)

D'après (1) et (2)on a : $0 < u_{n+1} < 1$;

d'après le principe de récurrence : $0 < u_n < 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$;

b. **Montrons que (u_n) est décroissante**

Soit n un élément de $\mathbb{N}$; on a : $u_{n+1} - u_n = 1 - \sqrt{1+u_n^2} = \frac{1-(1+u_n^2)}{1+\sqrt{1+u_n^2}}$

$$= \frac{-u_n^2}{1+\sqrt{1+u_n^2}}$$

Or: $u_n^2 > 0$ et $1+\sqrt{1+u_n^2} > 0$; d'où : $u_{n+1} - u_n < 0$;

donc pour tout n de $\mathbb{N}$; $u_{n+1} < u_n$

Donc : (u_n) est une suite décroissante.

- Puisque (u_n) est décroissante et minorée par le nombre 0, elle est donc convergente.

2 a. **Montrons que f est continue sur $[0;1]$**

Les fonctions : $u: x \mapsto x+1$ et $v: x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ sont continues sur l'intervalle $[0;1]$; donc : f est continue sur l'intervalle $[0;1]$ (comme somme de deux fonctions continues sur $[0;1]$.

- Montrons que : $f([0;1]) \subset [0;1]$

Soit x de $[0;1]$).

On a: $f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1+x^2-x^2}{(x+\sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}}$

donc : $f'(x) = \frac{1}{(x+\sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}}$ pour tout x de $[0;1]$.

On a : $f'(x) > 0$ pour tout x de $[0;1]$; alors f est strictement croissante sur $[0;1]$.

D'où : $f([0;1]) = [f(0);f(1)]$; or $f(0) = 0$ et $f(1) = 2-\sqrt{2}$

et : $2-\sqrt{2} < 1$ donc : $f([0;1]) \subset [0;1]$

b. Déterminons la limite de (u_n)

On a : ▸ $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; u_{n+1} = f(u_n)$ ▸ f est une fonction continue sur $[0;1]$

▸ $u_0 \in [0;1]$ ▸ (u_n) est convergente ▸ $f([0;1]) \subset [0;1]$

Donc la limite de (u_n) est solution de l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $[0;1]$.

Soit $x \in [0;1]$;on a: $f(x) = x \iff x + 1 - \sqrt{1+x^2} = x$

$\iff 1 = \sqrt{1+x^2}$

$\iff 1 = 1 + x^2$

$\iff x^2 = 0$

$\iff x = 0$

donc: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

Exercices de synthèse

Exercices

Exercice 19

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $u_1 = 5$ et $u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 4}{1 + u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

1 Montrer par récurence que : $u_n > 2$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

2 On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $v_n = \dfrac{3}{u_n - 2}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

a. Montrer que : $v_{n+1} = \dfrac{1 + u_n}{u_n - 2}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$; puis montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite arithmétique de raison 1.

b. Écrire v_n en fonction de n; puis en déduire que $u_n = 2 + \dfrac{3}{n}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

c. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Exercice 20

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 13$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 7$; pour tout n de $\mathbb{N}$

1 Montrer par récurrence que : $u_n < 14$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

2 Soit (v_n) la suite définie par : $v_n = 14 - u_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$

a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$; puis écrire v_n en fonction de n.

b. En déduire que : $u_n = 14 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$; puis calculer la limite de la suite (u_n)

Exercice 21

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; u_{n+1} = \frac{u_n}{2u_n + 1}$

1 Calculer u_1 et u_2.

2 Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; u_n \neq 0$.

3 On pose : $u_n \times v_n = u_n + 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

a. Montrer que la suite (v_n) est arithmétique, en déterminant sa raison et son premier terme.

b. Écrire v_n en fonction de n puis déduire u_n en fonction de n puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 22

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 2$ et $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = \frac{7u_n - 25}{u_n - 3}$

1 Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N});\ u_n \neq 5$

2 On considère la suite (v_n) définie par : $v_n = \frac{1}{u_n - 5}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

a. Montrer que (v_n) est une suite arithmétique.

b. Déterminer v_n puis u_n en fonction de n.

c. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

3 a. Calculer : $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ en fonction de n (avec $\sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n$)

b. On pose : $P_n = 2^{v_0} \times 2^{v_1} \times .... \times 2^{v_n}$ déterminer P_n en fonction de n.

Exercice 23

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie par: $\begin{cases} u_0 = 3 \\ (\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = \frac{2u_n^2 + u_n - 2}{u_n^2} \end{cases}$

1 Montrer que la suite (u_n) est minorée par 2.

2 a. Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; u_{n+1} - 2 \leq \frac{1}{4}(u_n - 2)$

b. En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$: $0 \leq u_n - 2 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$

c. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Exercice 24

Soit (u_n) la suite numérique définie par: $u_0 = 0$

et $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$

1 Montrer que la suite (u_n) est minorée par 0 et majorée par 4.

2 Montrer que la suite (u_n) est croissante.

3 a. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$

b. En déduire que: $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; 4 - u_n \leq 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$

c. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Exercice 25

Soit (u_n) la suite numérique définie par: $u_0 = 15$ et $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = \frac{7}{5}u_n - 5$

1 Calculer u_1 et u_2.

2 Soit (v_n) la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; v_n = u_{n+1} - u_n$

Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison q que l'on déterminera, puis déterminer v_n en fonction de n pour tout n de $\mathbb{N}$.

3 On pose : pour tout n de $\mathbb{N}$: $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$

Montrer que : $S_n = u_{n+1} - u_0$ pour tout n de $\mathbb{N}$, puis déduire u_n en fonction de n.

4 Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Exercice 26

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = -\frac{1}{3} \\ (\forall n \in \mathbb{N})\ ; u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3(1 - 2u_n)} \end{cases}$

1 Calculer u_1 et u_2.

2 Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; u_n < 0$.

3 a. Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{3}$.

b. En déduire que la suite (u_n) est croissante et convergente.

4 a. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; |u_{n+1}| \leq \frac{1}{3}|u_n|$.

b. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; |u_n| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$.

c. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 27

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \frac{x^2+4}{2x}$

1 Montrer que : $f([2;3]) \subset [2;3]$

2 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par: $\begin{cases} u_1 = 3 \\ (\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ; u_{n+1} = \frac{u_n^2+4}{2u_n} \end{cases}$

a. Montrer que la suite (u_n) est minorée par le nombre 2.

b. Étudier les variations de (u_n) ; en déduire qu'elle est convergente.

3 Calculer la limite de (u_n).

Exercice 28

On considère la suite (u_n) définie par : $u_1 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ; u_{n+1} = \frac{u_n}{3-u_n}$

1 Calculer u_2 et u_3.

2 Soit $(v_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ; v_n = \frac{1}{u_n}$.

a. Calculer v_1.

b. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ; v_{n+1} = 3v_n - 1$.

3 On considère la suite $(w_n)_{n \geq 1}$ définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ; w_n = v_n - \frac{1}{2}$

a. Déterminer w_n en fonction de n, puis déduire u_n en fonction de n.

b. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 29

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 7$

et $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; u_{n+1} = \frac{u_n + 8\sqrt{2+u_n}}{9}$

1 a. Calculer u_1 et u_2.

b. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; u_n > 2$.

2 Montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.

3 Pour tout n de $\mathbb{N}$; on pose: $v_n = \sqrt{2+u_n} - 2$.

a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

b. Déterminer v_n puis u_n en fonction de n.

c. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 30

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x}{1+x+x^2}$.

1 a. Étudier les variations de f.

b. Déterminer l'image de l'intervalle $[0;1]$ par f.

2 On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

a. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq u_n \leq 1$ puis $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} < u_n$.

b. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n+1}$; en déduire que:

$(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$.

c. Montrer que la suite (u_n) est convergente puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 31

Soit (u_n) la suite numérique définie par: $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} ; u_1 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}) ; \frac{1}{u_{n+2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u_{n+1}} + \frac{1}{u_n}\right) \end{cases}$

1 Calculer u_2 et u_3.

2 Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = \frac{2u_n}{4u_n - 1}$

3 Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$.

4 Pour tout entier n de $\mathbb{N}$, on pose : $v_n = \frac{1}{u_n} - \frac{4}{3}$.

a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique, puis en déduire v_n et u_n en fonction de n.

b. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 32

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{u_n + 2} \end{cases}$

1 a. Montrer par récurrence que la suite (u_n) est strictement croissante.

b. Montrer que la suite (u_n) est majorée par 2 ; puis en déduire qu'elle est convergente.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

2 On pose: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n = \dfrac{u_n - \sqrt{3}}{u_n + \sqrt{3}}$.

a. Montrer que : (v_n) est une suite géométrique en déterminant sa raison et son premier terme.

b. Déterminer u_n en fonction de n.

c. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 33

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+2} = \dfrac{7}{3}u_{n+1} - \dfrac{2}{3}u_n$.

On pose pour tout n de $\mathbb{N}$. $v_{n+1} = u_{n+1} - 2u_n$ et $w_{n+1} = u_{n+1} - \dfrac{1}{3}u_n$.

1 a. Calculer v_1 et w_1.

b. Montrer que $(v_n)_{n \geq 0}$ et $(w_n)_{n \geq 0}$ sont deux suites géométriques de raisons respectivement $\dfrac{1}{3}$ et 2.

c. Calculer u_n en fonction de n ; puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 34

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$; $u_1 = a$ et pour tout entier naturel n de $\mathbb{N}$:

$u_{n+2} = bu_{n+1} - (b-1)u_n$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ $(b \neq 0 ; b \neq 1$ et $b \neq 2)$

1 Calculer u_2.

2 On pose pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n = u_{n+1} - u_n$.

Montrer que (v_n) est une suite géométrique puis déterminer v_n en fonction de n ; b et a pour tout n de $\mathbb{N}$.

3 On pose pour tout n de $\mathbb{N}$: $w_n = u_{n+1} - (b-1)u_n$

Montrer que (w_n) est une suite constante puis calculer w_n en fonction de n.

4 Déduire u_n en fonction de n.

5 Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ dans le cas où $0 < b < 2$ et $b \neq 1$.

Exercice 35

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$u_0 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; u_{n+1} = \dfrac{2u_n^3}{3u_n^2+1}$

1 a. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; u_n > 0$.

b. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c. Déduire que (u_n) est convergente.

2 a. Montrer que : $u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}u_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

b. Déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; u_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

c. Calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3 On pose pour tout n de $\mathbb{N}$; $v_n = \dfrac{u_n+2}{u_n+1}$.

Montrer que (v_n) est convergente en déterminant sa limite.

Exercice 36

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par : $u_1 = \dfrac{3}{2}$ et par la relation de récurrence :

et $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ; u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{n-1}{2n(n+1)}$

1 Vérifier que $u_1 > u_2 > u_3$

2 a. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^* - \{1\}$ on a :

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2}(u_n - u_{n-1}) + \dfrac{3-n}{2n(n-1)(n+1)}$

b. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

3 On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$; $v_n = u_n - \dfrac{1}{n}$.

a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

b. Déterminer v_n puis u_n en fonction de n.

c. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 19

1 Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ; u_n > 2$

Pour $n = 1$, on a : $u_1 = 5$ et $5 > 2$ d'où : $u_1 > 2$

D'où la propriété est vraie pour $n = 1$

Soit n de $\mathbb{N}^*$; on suppose que $u_n > 2$ et on montre que $u_{n+1} > 2$

1ère méthode : on a $u_{n+1} - 2 = \dfrac{5u_n - 4}{1 + u_n} - 2$

$$= \frac{5u_n - 4 - 2 - 2u_n}{1 + u_n}$$

$$= \frac{3u_n - 6}{1 + u_n}$$

$$= 3\frac{u_n - 2}{1 + u_n}$$

Or $u_n > 2$ alors $u_n - 2 > 0$ et $u_n + 1 > 0$; donc : $u_{n+1} - 2 > 0$

La propriété est vraie pour $n + 1$.

D'où d'après le principe de récurrence on a : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; u_n > 2$

2ème méthode:

on a : $u_{n+1} = \dfrac{5(u_n + 1) - 5 - 4}{u_n + 1} = 5 - \dfrac{9}{u_n + 1}$

Alors : $u_n > 2 \Rightarrow u_n + 1 > 3$

$$\Rightarrow \frac{1}{u_n + 1} < \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{-9}{u_n + 1} > \frac{-9}{3}$$

$$\Rightarrow 5 - \frac{9}{u_n + 1} > 5 - 3$$

$$\Rightarrow u_{n+1} > 2$$

Donc d'après le principe de récurrence on a : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ; u_n > 2$

2 a. ▸ Montrons que $v_{n+1} = \dfrac{1 + u_n}{u_n - 2}$ **pour tout** n **de** $\mathbb{N}^*$

Soit n de $\mathbb{N}^*$ on a : $v_{n+1} = \dfrac{3}{u_{n+1} - 2} = \dfrac{3}{\dfrac{5u_n - 4}{1 + u_n} - 2} = \dfrac{3}{\dfrac{5u_n - 4 - 2(1 + u_n)}{1 + u_n}}$

$$= \frac{3(1 + u_n)}{5u_n - 4 - 2 - 2u_n}$$

$$= \frac{3(1 + u_n)}{3u_n - 6} = \frac{1 + u_n}{u_n - 2}$$

Donc : $v_{n+1} = \dfrac{1+u_n}{u_n-2}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

▸ **Montrons que la suite (v_n) est arithmétique de raison 1.**

Soit n de $\mathbb{N}^*$; on a : $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1+u_n}{u_n-2} - \dfrac{3}{u_n-2} = \dfrac{1+u_n-3}{u_n-2}$

$= \dfrac{u_n-2}{u_n-2} = 1$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); v_{n+1} - v_n = 1$

D'où la suite (v_n) est arithmétique de raison $r = 1$ et de premier terme $v_1 = 1$

b. Déterminons v_n en fonction de n.

On a (v_n) est suite arithmétique de raison $r = 1$ et de premier terme $v_1 = 1$

donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; v_n = v_1 + (n-1).r$

c'est-à-dire : $v_n = 1 + (n-1) \times 1 = n$

donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; v_n = n$

▸ Déduisons que $u_n = 2 + \dfrac{3}{n}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

Soit n de $\mathbb{N}^*$; on a : $v_n = \dfrac{3}{u_n-2} \Rightarrow u_n - 2 = \dfrac{3}{v_n}$

$\Rightarrow u_n = \dfrac{3}{v_n} + 2$

$\Rightarrow u_n = \dfrac{3}{n} + 2$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n = 2 + \dfrac{3}{n}$

c. Déterminons $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{3}{n} = 0$; d'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(2 + \dfrac{3}{n}\right) = 2$

donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$

Solution 20

1 Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n < 14$

Pour $n = 0$; on a : $u_0 = 13$ et $13 < 14$; d'où $u_0 < 14$

la propriété est vraie pour $n = 0$

Soit n de $\mathbb{N}$; supposons que $u_n < 14$ et montrons que $u_{n+1} < 14$

Méthode 1:

▸on a: $u_{n+1}-14=\frac{1}{2}u_n+7-14$

$=\frac{1}{2}u_n-7$

$=\frac{1}{2}(u_n-14)$

Or : $u_n<14$, d'où : $u_n-14<0$

ainsi : $\frac{1}{2}(u_n-14)<0$

donc : $u_{n+1}-14<0$

La propriété est vraie pour $n+1$

Méthode 2:

▸$u_n<14 \Longrightarrow \frac{1}{2}u_n<\frac{14}{2}$

$\Longrightarrow \frac{1}{2}u_n+7<7+7$

$\Longrightarrow u_{n+1}<14$

Donc d'après le principe de récurrence, on a : $(\forall n\in\mathbb{N})\,;u_n<14$

2 a. Montrons que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$

Soit n un élément de $\mathbb{N}$; on a: $v_{n+1}=14-u_{n+1}$

$=14-\left(\frac{1}{2}u_n+7\right)$

$=7-\frac{1}{2}u_n=\frac{1}{2}(14-u_u)=\frac{1}{2}v_n$

donc : $(\forall n\in\mathbb{N})\,;v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n$

d'où la suite (v_n) est géométrique de raison $q=\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0=1$

▸Déterminons v_n en fonction de n

Soit n un élément de $\mathbb{N}$; on a : $v_n=q^n v_o$

$=(\frac{1}{2})^n\times(14-u_o)$

$=\left(\frac{1}{2}\right)^n\times(14-13)=\left(\frac{1}{2}\right)^n$

donc: $(\forall n\in\mathbb{N})\,;v_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$

b. Déduisons que $u_n=14-\left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$;

On a : $(\forall n\in\mathbb{N})\,;v_n=14-u_n$; donc : $u_n=14-v_n$

D'où : $(\forall n\in\mathbb{N})\,;u_n=14-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

▸Déterminons: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

On a: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ car : $-1<\frac{1}{2}<1$

d'où: $\lim\limits_{n\to+\infty}(14-\left(\frac{1}{2}\right)^n)=14$

donc: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=14$

Exercice 21

1 Calculons u_1 et u_2 :

On a: $u_1=\frac{u_0}{2u_0+1}=\frac{2}{2\times2+1}=\frac{2}{5}$

Et on a : $u_2=\frac{u_1}{2u_1+1}=\frac{\frac{2}{5}}{2\times\frac{2}{5}+1}=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{4+5}{5}}=\frac{2}{9}$

2 Montrons par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N})\,;u_n\neq0$

Pour : $n=0$; on a : $u_0\neq0$; car : $u_0=2$

Soit n un élément de $\mathbb{N}$; on suppose que $u_n\neq0$ et on montre que $u_{n+1}\neq0$

On a : $u_{n+1}=\frac{u_n}{2u_n+1}$ et $u_n\neq0$; d'où : $u_{n+1}\neq0$

La propriété est vraie pour $n+1$

D'après le principe de récurrence : $(\forall n\in\mathbb{N})\,;u_n\neq0$

3 a. Montrons que la suite (v_n) est arithmétique:

Soit n de $\mathbb{N}$; on a : $(u_n\times v_n=u_n+1\ ;\ u_n\neq0)\Rightarrow v_n=\frac{u_n+1}{u_n}=1+\frac{1}{u_n}$

d'où : $v_{n+1}=1+\frac{1}{u_{n+1}}=1+\frac{1}{\frac{u_n}{2u_n+1}}=1+\frac{2u_n+1}{u_n}$

donc : $v_{n+1}-v_n=1+\frac{2u_n+1}{u_n}-1-\frac{1}{u_n}=\frac{2u_n+1-1}{u_n}=\frac{2u_n}{u_n}=2$

par suite: $v_{n+1}=2+v_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

par conséquent : (v_n) est une suite arithmétique de raison $r=2$ et de premier terme $v_0=1+\frac{1}{u_0}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

b. Déterminons v_n en fonction de n puis u_n en fonction de n :

On a : $(\forall n\in\mathbb{N})\,;v_n=v_0+(n-0)r=\frac{3}{2}+n\times2=\frac{3}{2}+2n$

D'où: $(\forall n\in\mathbb{N})\,;v_n=2n+\frac{3}{2}$

D'autre part on a : $u_n v_n = u_n + 1 \Rightarrow u_n(v_n - 1) = 1$

$$\Rightarrow u_n = \frac{1}{v_n - 1}$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{1}{\frac{3}{2} + 2n - 1}$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{1}{\frac{1}{2} + 2n}$$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; u_n = \frac{1}{\frac{1}{2} + 2n}$

De plus: $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2} + 2n = +\infty$, donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

Exercice 22

1 Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ u_n \neq 5$

On utilise le raisonnement par récurrence :

Pour $n = 0$; on a : $u_0 = 2$ et $2 \neq 5$ d'où $u_0 \neq 5$

Soit n de $\mathbb{N}$; on suppose que $u_n \neq 5$ c'est-à-dire $u_n - 5 \neq 0$

Et montrons que: $u_{n+1} - 5 \neq 0$

On a : $u_{n+1} - 5 = \frac{7u_n - 25}{u_n - 3} - 5$

$$= \frac{7u_n - 25 - 5(u_n - 3)}{u_n - 3}$$

$$= \frac{7u_n - 25 - 5u_n + 15}{u_n - 3}$$

$$= \frac{2u_n - 10}{u_n - 3}$$

$$= \frac{2(u_n - 5)}{u_n - 3}$$

Or $u_n - 5 \neq 0$ d'où: $u_{n+1} - 5 \neq 0$

D'après le principe de récurrence on a: $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; u_n \neq 5$

Autre méthode:

On a : $u_0 \neq 5$

Soit n de $\mathbb{N}$; montrons que: $u_n \neq 5 \Rightarrow u_{n+1} \neq 5$

On utilise le raisonnement par contraposée :

C'est-à-dire: $u_{n+1} = 5 \Rightarrow u_n = 5$

On a : $u_{n+1} = 5 \Rightarrow \dfrac{7u_n - 25}{u_n - 3} = 5$

$\Rightarrow 7u_n - 25 = 5u_n - 15$

$\Rightarrow 7u_n - 5u_n = 25 - 15$

$\Rightarrow 2u_n = 10$

$\Rightarrow u_n = 5$

infos:
$(p \Rightarrow q) \Longleftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$
(contraposée)

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; u_n \neq 5 \Rightarrow u_{n+1} \neq 5$

D'après le principe de récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ u_n \neq 5$

2 a. Montrons que (v_n) est une suite arithmétique :

Soit n de $\mathbb{N}$;

On a : $v_{n+1} = \dfrac{1}{u_{n+1} - 5}$

$= \dfrac{1}{\dfrac{7u_n - 25}{u_n - 3} - 5} = \dfrac{1}{\dfrac{7u_n - 25 - 5(u_n - 3)}{u_n - 3}}$

$= \dfrac{u_n - 3}{7u_n - 25 - 5u_n + 15} = \dfrac{u_n - 3}{2u_n - 10} = \dfrac{u_n - 3}{2(u_n - 5)}$

D'où: $v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n - 3}{2(u_n - 5)} - \dfrac{1}{u_n - 5} = \dfrac{u_n - 3 - 2}{2(u_n - 5)} = \dfrac{u_n - 5}{2(u_n - 5)} = \dfrac{1}{2}$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; v_{n+1} = v_n + \dfrac{1}{2}$

Par conséquent: (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = \dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = \dfrac{1}{u_0 - 5} = -\dfrac{1}{3}$

b. Déterminons v_n et u_n en fonction de n

Soit n de $\mathbb{N}$; on a : $v_n = v_0 + nr$

Alors : $v_n = -\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2}n$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; v_n = -\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2}n$

Déterminons u_n en fonction de n ;

On a : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; v_n = \dfrac{1}{u_n - 5}$

Alors : $\dfrac{1}{v_n} = u_n - 5$, d'où: $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; u_n = \dfrac{1}{v_n} + 5$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; u_n = \dfrac{1}{-\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2}n} + 5 = \dfrac{1}{\dfrac{-2 + 3n}{6}} + 5$

$= \dfrac{6}{3n - 2} + 5 = \dfrac{6 + 5(3n - 2)}{3n - 2} = \dfrac{15n - 4}{3n - 2}$

c. Déterminons $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

On a : $u_n = \dfrac{1}{-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}n} + 5$, pour tout n de $\mathbb{N}$;

Or : $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{3}+\frac{1}{2}n = +\infty$; d'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 5$

3 a. Déterminons S_n en fonction de n :

Soit n de $\mathbb{N}$; on a: (v_n) est une suite arithmétique, d'où :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 + v_1 + \ldots\ldots\ldots + v_n$$

$$= (n+1)\frac{v_0 + v_n}{2}$$

$$= (n+1)\frac{-\frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}n\right)}{2}$$

$$= (n+1)\times\frac{-\frac{2}{3}+\frac{n}{2}}{2} = \frac{(n+1)(-4+3n)}{12}$$

donc : $(\forall n \in \mathbb{N}); S_n = \dfrac{(n+1)(3n-4)}{12}$

b. Déterminons P_n en fonction de n :

Soit n de $\mathbb{N}$; on a: $P_n = 2^{v_0} \times 2^{v_1} \times \ldots\ldots \times 2^{v_n}$

$$= 2^{v_0+v_1+\ldots\ldots\ldots\ldots+v_n} = 2^{S_n}$$

$$= 2^{\frac{(n+1)(3n-4)}{12}}$$

donc : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ P_n = 2^{\left(\frac{(n+1)(3n-4)}{2}\right)}$

Exercice 23

1 Montrons que (u_n) est minorée par 2.

C'est-à-dire : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ u_n \geq 2$

On utilise le raisonnement par récurrence :

Pour $n = 0$; on a: $u_0 = 3$ et $3 \geq 2$ d'où: $u_0 \geq 3$

D'où la propriété est vraie pour $n = 0$

Soit n un élément de $\mathbb{N}$; on suppose que : $u_n \geq 2$ et on montre: $u_{n+1} \geq 2$

On a : $u_{n+1} - 2 = \dfrac{2u_n^2 + u_n - 2}{u_n^2} - 2 = \dfrac{2u_n^2 + u_n - 2 - 2u_n^2}{u_n^2} = \dfrac{u_n - 2}{u_n^2}$

$$= \frac{1}{u_n^2}(u_n - 2)$$

Or : $u_n - 2 \geq 0$ car $u_n \geq 2$ et $\frac{1}{u_n^2} > 0$ d'où $u_{n+1} - 2 \geq 0$

donc : $u_{n+1} \geq 2$; la propriété est vraie pour $n+1$.

D'après le principe de récurrence on a : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; u_n \geq 2$

2 a. Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; u_{n+1} - 2 \leq \frac{1}{4}(u_n - 2)$

Soit n de $\mathbb{N}$;

On a: $u_{n+1} - 2 = \frac{1}{u_n^2}(u_n - 2)$

Or: $u_n \geq 2 \Rightarrow u_n^2 \geq 4$

$$\Rightarrow \frac{1}{u_n^2} \leq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u_n^2}(u_n - 2) \leq \frac{1}{4}(u_n - 2) \quad (u_n - 2 \geq 0)$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - 2 \leq \frac{1}{4}(u_n - 2)$$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; u_{n+1} - 2 \leq \frac{1}{4}(u_n - 2)$

b. Déduisons que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; 0 \leq u_n - 2 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$

Soit n de $\mathbb{N}^*$;

D'après les deux questions précédentes :

- on a : $u_n - 2 \geq 0$ et $u_{n+1} - 2 \geq 0$
- et $u_{n+1} - 2 \leq \frac{1}{4}(u_n - 2)$

$(\forall n \in \mathbb{N})\ ; 0 \leq u_{n+1} - 2 \leq \frac{1}{4}(u_n - 2)$

On remplace n par 0 on obtient: $0 \leq u_1 - 2 \leq \frac{1}{4}(u_0 - 2)$

on remplace n par 1 on obtient: $0 \leq u_2 - 2 \leq \frac{1}{4}(u_1 - 2)$

⋮ ⋮ ⋮ ⋮

On remplace n par $n-1$ on obtient: $0 \leq u_n - 2 \leq \frac{1}{4}(u_{n-1} - 2)$

En multipliant membre à membre les doubles inégalités précédentes et après simplification on obtient : $0 \leq u_n - 2 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n (u_0 - 2)$

C'est-à-dire : $0 \leq u_n - 2 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n (3 - 2)$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; 0 \leq u_n - 2 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$

Méthode 2: On pourra faire un raisonnement par récurrence

c. **Déterminons $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$:**

On a : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ 0 \leq u_n - 2 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$

Or : $-1 < \frac{1}{4} < 1$ d'où : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$

Ainsi: $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 \leq \lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - 2) \leq \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n$

d'où : $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - 2) = 0$

donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$

▸ **Méthode 2:**

On a : $0 \leq u_n - 2 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n \Longrightarrow |u_n - 2| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$

or : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$

donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$ (d'après un critère de convergence)

infos:

Si: $\forall n \geq n_0 \quad |u_n - \ell| \leq v_n$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

alors: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$

Exercice 24

1 Montrons que : (u_n) est minorée par 0 et majorée par 4.

C'est-à-dire : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ 0 \leq u_n \leq 4$

On utilise le raisonnement par récurrence :

Pour $n = 0$; on a : $u_0 = 0$ et $0 \leq 0 \leq 4$; d'où : $0 \leq u_0 \leq 4$

La propriété est vraie pour $n = 0$

Soit n un élément de $\mathbb{N}$; on suppose : $0 \leq u_n \leq 4$ et on montre que : $0 \leq u_{n+1} \leq 4$

on a : $0 \leq u_n \leq 4 \Rightarrow 0 \leq 3u_n \leq 12$

$\Rightarrow 4 \leq 3u_n + 4 \leq 16$

$\Rightarrow 2 \leq \sqrt{3u_n + 4} \leq 4$

$\Rightarrow 2 \leq \sqrt{3u_n + 4} \leq 4$

$\Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 4$ (car $(0 \leqslant 2)$)

D'après le principe de récurrence on a : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ 0 \leq u_n \leq 4$

2 Montrons que (u_n) est croissante :

Soit n de $\mathbb{N}$;

On a : $u_{n+1} - u_n = \sqrt{3u_n + 4} - u_n = \frac{3u_n + 4 - u_n^2}{\sqrt{3u_n + 4} + u_n} = \frac{-u_n^2 + 3u_n + 4}{\sqrt{3u_n + 4} + u_n}$

Puisque: $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ \sqrt{3u_n+4}+u_n>0$

Le signe de $u_{n+1}-u_n$ est celui de $-u_n^2+3u_n+4$

Étudions le signe du trinôme $-X^2+3X+4$

Les deux solutions de l'équation $-X^2+3X+4=0$ sont: $X_1=-1$ et $X_2=4$

Et le tableau de signe du trinôme $-X^2+3X+4$ est le suivant:

X	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$-X^2+3X+4$		-	0	+	0	-	

Puisque: $0 \le u_n \le 4$; on a : $-u_n^2+3u_n+4 \ge 0$)

car : $(\forall X \in [0;4])\ ;\ -X^2+3X+4 \ge 0$

donc: $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ u_{n+1}-u_n \ge 0$; c'est-à-dire la suite (u_n) est croissante.

3 a. Montrons que: $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ 4-u_{n+1} \le \frac{1}{2}(4-u_n)$

Soit n un élément de $\mathbb{N}$

On a : $4-u_{n+1}=4-\sqrt{3u_n+4}=\dfrac{16-(3u_n+4)}{4+\sqrt{3u_n+4}}=\dfrac{12-3u_n}{4+\sqrt{3u_n+4}}$

$$=\frac{3(4-u_n)}{4+\sqrt{3u_n+4}}=\frac{3}{4+\sqrt{3u_n+4}}(4-u_n)$$

Encadrons: $\dfrac{3}{4+\sqrt{3u_n+4}}$:

On a : $0 \le u_n \le 4 \Rightarrow 0 \le 3u_n \le 12$

$$\Rightarrow 4 \le 3u_n+4 \le 16$$
$$\Rightarrow 2 \le \sqrt{3u_n+4} \le 4$$
$$\Rightarrow 6 \le 4+\sqrt{3u_n+4} \le 8$$
$$\Rightarrow \frac{1}{8} \le \frac{1}{4+\sqrt{3u_n+4}} \le \frac{1}{6}$$
$$\Rightarrow \frac{3}{8} \le \frac{3}{4+\sqrt{3u_n+4}} \le \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \frac{3}{4+\sqrt{3u_n+4}}(4-u_n) \le \frac{1}{2}(4-u_n)\ ;\ (4-u_n \ge 0)$$
$$\Rightarrow 4-u_{n+1} \le \frac{1}{2}(4-u_n)$$

donc: $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ 4-u_{n+1} \le \frac{1}{2}(4-u_n)$

b. Déduisons que: $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; 4 - u_n \leq 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Soit n de $\mathbb{N}$; on a : $0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$

On remplace n par 0 ; on aura : $0 \leq 4 - u_1 \leq \frac{1}{2}(4 - u_0)$

On remplace n par 1; on aura : $0 \leq 4 - u_2 \leq \frac{1}{2}(4 - u_1)$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

On remplace n par $(n-1)$; on aura : $0 \leq 4 - u_n \leq \frac{1}{2}(4 - u_{n-1})$

En multipliant membre à membre les inégalités doubles et après simplification

on obtient : $0 \leq 4 - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (4 - u_0)$

C'est-à-dire : $0 \leq 4 - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (4 - 0)$

donc : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; 0 \leq 4 - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \times 4$

2ème méthode : on pourra faire un raisonnement par récurrence.

c. Déterminons $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$:

On a : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; 0 \leq 4 - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \times 4$

Et puisque : $\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} 0 = 0 \\ \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \times 4 = 0 \quad \left(\text{car: } -1 < \frac{1}{2} < 1\right) \end{cases}$

Alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} (4 - u_n) = 0$ (d'après un critère de convergence)

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 4$

Exercice 25

1 Calcul de u_1 et u_2

On a : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; u_{n+1} = \frac{7}{5}u_n - 5$

- On pose $n = 0$; on a : $u_1 = \frac{7}{5}u_0 - 5 = \frac{7}{5} \times 15 - 5 = 21 - 5 = 16$

d'où : $u_1 = 16$

- on pose $n = 1$; on a: $u_2 = \frac{7}{5}u_1 - 5 = \frac{7}{5} \times 16 - 5 = \frac{87}{5}$

d'où: $u_2 = \frac{87}{5}$

2 Montrons que la suite (v_n) est géométrique.

Soit n un élément de $\mathbb{N}$; on a : $v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1}$

$$= \left(\frac{7}{5}u_{n+1} - 5\right) - \left(\frac{7}{5}u_n - 5\right)$$

$$= \frac{7}{5}(u_{n+1} - u_n) - 5 + 5$$

$$= \frac{7}{5}v_n$$

Donc : la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{7}{5}$ et de premier terme:

$v_0 = u_1 - u_0 = 16 - 15 = 1$

Déterminons v_n en fonction de n

On a : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; v_n = v_0 \times q^{n-0}$

D'où: $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; v_n = \left(\frac{7}{5}\right)^n$

3 Déterminons S_n en fonction de n

Soit n de $\mathbb{N}$; on a: $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$

Montrons que : $S_n = u_{n+1} - u_n$

On a : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; v_n = u_{n+1} - u_n$

pour $n = 0$; on a : $v_0 = u_1 - u_0$

pour $n = 1$; on a : $v_1 = u_2 - u_1$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$

pour n ; on a : $v_n = u_{n+1} - u_n$

Additionnons membre à membre les égalités précédentes,

On obtient : $v_0 + v_1 + \ldots + v_n = u_{n+1} - u_0$

D'où : $S_n = u_{n+1} - u_0$ donc : $u_{n+1} = S_n + u_0$; d'où : $(n \in \mathbb{N}^*)\ ; u_n = S_{n-1} + u_0$

Calculons u_n en fonction de n

on a : $u_n = (v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1}) + u_0$

$$= v_0 \times \frac{1 - \left(\frac{7}{5}\right)^n}{1 - \frac{7}{5}} + 15$$

$$= 1 \times \frac{1 - \left(\frac{7}{5}\right)^n}{-\frac{2}{5}} + 15$$

$$= -\frac{5}{2}\left(1 - \left(\frac{7}{5}\right)^n\right) + 15 = -\frac{5}{2} + \frac{5}{2} \times \left(\frac{7}{5}\right)^n + 15$$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ; u_n = \frac{25}{2} + \frac{5}{2} \times \left(\frac{7}{5}\right)^n$

Cette dernière propriété est vraie pour $n = 0$ car :

$u_0 = 15$ et $\frac{25}{2} + \frac{5}{2}\left(\frac{7}{5}\right)^0 = 15$

Donc: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = \frac{25}{2} + \frac{5}{2}\left(\frac{7}{5}\right)^n$

4 Déterminons $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

On a: $\frac{7}{5} > 1$; d'où : $\lim\limits_{n \to +\infty}\left(\frac{7}{5}\right)^n = +\infty$

donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{25}{2} + \frac{5}{2}\left(\frac{7}{5}\right)^n = +\infty$

Exercice 26

1 Calcul de u_1 **et** u_2.

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = \frac{u_n}{3(1-2u_n)}$

On remplace n par 0; on a: $u_1 = \frac{u_0}{3(1-2u_0)} = \frac{-\frac{1}{3}}{3\left(1-2\times\frac{-1}{3}\right)} = \frac{-\frac{1}{3}}{3\left(1+\frac{2}{3}\right)}$

$= \frac{-\frac{1}{3}}{3\times\frac{5}{3}} = \frac{-1}{15} = -\frac{1}{15}$

Et on a : $u_2 = \frac{u_1}{3(1-2u_1)} = \frac{-\frac{1}{15}}{3\left(1-2\times\frac{-1}{15}\right)} = \frac{-\frac{1}{15}}{3\left(1+\frac{2}{15}\right)} = \frac{-\frac{1}{15}}{3\times\frac{17}{15}}$

$= \frac{-1}{51} = -\frac{1}{51}$

Donc : $u_1 = -\frac{1}{15}$ et $u_2 = -\frac{1}{51}$

2 Montrons que: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n < 0$

Pour $n = 0$; on a : $u_0 = -\frac{1}{3}$ et $-\frac{1}{3} < 0$; d'où: $u_0 < 0$

Soit n un élément de $\mathbb{N}$; on suppose que: $u_n < 0$ et on montre que: $u_{n+1} < 0$

On a : $u_n < 0$ d'où : $\begin{cases} u_n < 0 \\ 1 - 2u_n > 0 \end{cases}$; donc : $\frac{u_n}{3(1-2u_n)} < 0$ d'où: $u_{n+1} < 0$

La propriété est vraie pour $n + 1$;

d'après le principe de récurrence on a : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n < 0$

3 a. Soit n de $\mathbb{N}$; on a : $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3(1-2u_n)} \Rightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{3(1-2u_n)}$ $(u_n \neq 0)$

Et de plus : $u_n < 0 \Rightarrow -2u_n > 0$

$\Rightarrow 1 - 2u_n > 1$

$\Rightarrow \dfrac{1}{1-2u_n} < 1$

$\Rightarrow \dfrac{1}{3(1-2u_n)} < \dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{1}{3}$

b. Déduisons que (u_n) est croissante et qu'elle est convergente

On a : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{1}{3}$; donc: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ car : $\dfrac{1}{3} \leq 1$

Alors : $\begin{cases} (\forall n \in \mathbb{N}) ; \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 \\ u_n < 0 \end{cases} \Longrightarrow (u_{n+1} \geqslant u_n)$

D'où la suite (u_n) est croissante

Puisque (u_n) est croissante et majorée

par 0; donc elle est convergente

infos:

- Si: $(\forall n \in I) ; u_n > 0$

  $(\forall n \in I) ; \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 \Rightarrow (u_n)_{n\in I}$ est croissante

  $(\forall n \in I) ; \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 \Rightarrow (u_n)_{n\in I}$ est décroissante

- Si: $(\forall n \in I) ; u_n < 0$

  $(\forall n \in I) ; \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 \Rightarrow (u_n)_{n\in I}$ est croissante

  $(\forall n \in I) ; \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 \Rightarrow (u_n)_{n\in I}$ est décroissante

4 a. Montrons que: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_{n+1}| \leq \dfrac{1}{3}|u_n|$

Soit n un élément de $\mathbb{N}$;

On a: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{1}{3} \Longrightarrow \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leq \dfrac{1}{3}$

$\Longrightarrow |u_{n+1}| \leq \dfrac{1}{3}|u_n|$

(Remarque que $u_n < 0$ et $u_{n+1} < 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$: $\dfrac{u_{.+1}}{u_n} > 0$)

b. Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n| \leq \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

On a d'après la question précédente $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_{n+1}| \leq \dfrac{1}{3}|u_n|$, alors :

On remplace n par 0 on a : $|u_1| \leq \dfrac{1}{3}|u_0|$

On remplace n par 1; on a : $|u_2| \leq \dfrac{1}{3}|u_1|$

⋮ ⋮ ⋮

On remplace n par $n-1$; on a : $|u_n| \leq \dfrac{1}{3}|u_{n-1}|$

En multipliant membre à membre les inégalités précédentes on obtient :

$|u_n| \leq \left(\dfrac{1}{3}\right)^n |u_0|$

C'est-à-dire : $|u_n| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n \left|\frac{-1}{3}\right|$

d'où: $|u_n| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$ (On pourra faire un raisonnement par récurrence)

c. Déterminons $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

On a : $|u_n| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$

et: $-1 < \frac{1}{3} < 1$ d'où: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = 0$

D'où d'après un ctitère de convergence on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

infos:

Si : $|u_n - \ell| \leq k v_n$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ alors: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$

Exercice 27

1 Montrons que: $f([2;3]) \subset [2;3]$

On a : $(\forall x \in \mathbb{R}^*); f'(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{2x^2}$ d'où: $f'(x) \geq 0$ pour tout x de $[2;+\infty[$ et $f'(x)$ équivaut à $x = 2$.

donc : f est strictement croissante sur $[2;3]$ (1) (car $[2;3] \subset [2;+\infty[$);

Et on a f continue sur $[2;3]$ (2)

D'après (1) et (2) on a: $f([2;3]) = [f(2);f(3)] = \left[2;\frac{13}{6}\right]$

Or $\frac{13}{6} < 3$; d'où $f([2;3]) \subset [2;3]$

2 a. Montrons que (u_n) **est minorée par 2;**

en utilisant le raisonnement par récurrence

Pour $n = 1$ on a : $u_1 = 3$ et $3 > 2$; donc : $u_1 > 2$

Soit n de $\mathbb{N}^*$; on suppose que: $u_n > 2$; et on montre que : $u_{n+1} > 2$

Puisque f est strictement croissante sur $[2;+\infty[$ et $u_n > 2$ alors: $f(u_n) > f(2)$

donc : $f(u_n) > 2$; d'où : $u_{n+1} > 2$

D'après le principe de récurrence; on a : $u_n > 2$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$;

donc la suite (u_n) est minorée par 2.

b. Étudions les variations de (u_n).

Soit n de $\mathbb{N}^*$; on a : $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 + 4}{2u_n} - u_n = \frac{4 - u_n^2}{2u_n}$

Puisque : $u_n > 2$, alors : $u_n > 0$ et $4 - u_n^2 < 0$

Donc : $u_{n+1} - u_n < 0$ d'où : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $u_{n+1} < u_n$; la suite (u_n) est décroissante.

▸ **Déduction :**

La suite: (u_n) est décroissante et minorée par 2 ; donc elle est convergente.

3 On a la fonction f est continue sur l'intervalle $[2;3]$; $f([2;3]) \subset [2;3]$ $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_0 \in [2;3]$ et la suite (u_n) est convergente; donc la limite (u_n) est solution de l'équation $f(x) = x$ dans $[2;3]$.

Soit x un élément de $[2;3]$; on a : $f(x) = x \iff \dfrac{x^2+4}{2x} = x$

$\iff x^2 - 4 = 0$

$\iff x = 2$ (car $-2 \notin [2;3]$)

donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$

Exercice 28

1 **Calculons u_2 et u_3**

On a : $u_2 = \dfrac{u_1}{3-u_1} = \dfrac{1}{2}$ et $u_3 = \dfrac{u_2}{3-u_2} = \dfrac{\frac{1}{2}}{3-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{5}$; donc : $u_2 = \dfrac{1}{2}$ et $u_3 = \dfrac{1}{5}$

2 a. **Calculons v_1**

On a : $u_1 = 1$; d'où : $v_1 = \dfrac{1}{u_1} = 1$; donc : $v_1 = 1$

b. **Montrons que :** $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $v_{n+1} = 3v_n - 1$

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$

On a: $v_n = \dfrac{1}{u_n}$; d'où $v_{n+1} = \dfrac{1}{u_{n+1}} = \dfrac{3-u_n}{u_n} = \dfrac{3}{u_n} - 1$

donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $v_{n+1} = 3v_n - 1$

3 a. **Déterminons w_n en fonction de n**

Soit n élément de $\mathbb{N}^*$;

On a : $w_{n+1} = v_{n+1} - \dfrac{1}{2} = 3v_n - \dfrac{3}{2} = 3\left(v_n - \dfrac{1}{2}\right) = 3w_n$

donc: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $w_{n+1} = 3w_n$; d'où (w_n) est une suite géométrique de raison $q = 3$ et de 1er terme $w_1 = \dfrac{1}{2}$.

On a : $w_n = w_1 \times q^{n-1}$; donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $w_n = \dfrac{1}{2} \times 3^{n-1}$

▸ Déduisons v_n et u_n en fonction de n

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$:

▸ Déterminons v_n en fonction de n : on a : $w_n = \dfrac{1}{2} \times 3^{n-1}$; d'où :

$v_n = \frac{1}{2}.3^{n-1} + \frac{1}{2}$ (car $v_n = w_n + \frac{1}{2}$)

Déterminons u_n en fonction de n :

On a : $v_n = \frac{1}{u_n}$; d'où : $u_n = \frac{1}{v_n}$; ainsi: $u_n = \frac{1}{\frac{1}{2}.3^{n-1} + \frac{1}{2}}$; (on peut également écrire u_n de la façon suivante : $u_n = \frac{1}{\frac{1}{6}.3^n + \frac{3}{6}} = \frac{1}{\frac{3^n+3}{6}} = \frac{6}{3^n+3}$

b. Déterminons $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $u_n = \frac{6}{3^n+3}$ et puisque : $3 > 1$; on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$

donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

Exercice 29

1 a. Calcul de u_1 et u_2 .

On a : $u_1 = \frac{u_0 + 8\sqrt{2+u_0}}{9} = \frac{7+8\times 3}{9} = \frac{31}{9}$; d'où : $u_1 = \frac{31}{9}$

et $u_2 = \frac{u_1 + 8\sqrt{2+u_1}}{9} = \frac{\frac{31}{9} + 8\times\frac{7}{3}}{9} = \frac{199}{81}$; donc : $\begin{cases} u_1 = \frac{31}{9} \\ u_2 = \frac{199}{81} \end{cases}$

b. Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n > 2$

pour $n = 0$; on a : $u_0 = 7$ et $7 > 2$; d'où : $u_0 > 2$.

Soit n de $\mathbb{N}$; on suppose que la propriété est vraie pour n ; et on montre qu'elle est vraie pour $n+1$.

On a: $u_n > 2$; d'où: $\sqrt{2+u_n} > 2$ (car $u_n + 2 > 4$); d'où :

$\frac{u_n + 8\sqrt{2+u_n}}{9} > \frac{2+8\times 2}{9}$

donc : $u_{n+1} > \frac{18}{9}$ c'est-à-dire : $u_{n+1} > 2$

D'après le principe de récurrence on a : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n > 2$

2 Montrons que la suite (u_n) est strictement décroissante.

Soit n de $\mathbb{N}$;

On a : $u_{n+1} - u_n = \frac{8(\sqrt{2+u_n} - u_n)}{9} = \frac{8(2+u_n-u_n^2)}{9(\sqrt{2+u_n}+u_n)} = \frac{-8(u_n-2)(u_n+1)}{9(\sqrt{2+u_n}+u_n)}$

Or : $u_n > 2$; d'où : $u_n + 1 > 0$ et $u_n - 2 > 0$ et on a : $\sqrt{2+u_n} + u_n > 0$

donc : $u_{n+1} - u_n < 0$; (car $-\frac{8}{9} < 0$) alors: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} - u_n < 0$

donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

3 a. Montrons que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

Soit n de $\mathbb{N}$; on a : $v_{n+1} = \sqrt{2+u_{n+1}} - 2$

alors : $v_{n+1} + 2 = \sqrt{2+u_{n+1}}$

donc : :

$$(v_{n+1}+2)^2 = 2 + u_{n+1} = 2 + \frac{u_n + 8\sqrt{2+u_n}}{9} = \frac{18 + u_n + 8\sqrt{2+u_n}}{9}$$

$$= \frac{16 + (2+u_n) + 2\times 4\sqrt{2+u_n}}{9} = \left(\frac{4+\sqrt{2+u_n}}{3}\right)^2$$

On obtient: $v_{n+1} + 2 = \frac{4+\sqrt{2+u_n}}{3}$ (car $(v_{n+1}+2 > 0)$

Donc: $v_{n+1} = \frac{4+\sqrt{2+u_n}}{3} - 2 = \frac{\sqrt{2+u_n}-2}{3} = \frac{1}{3}v_n$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$

D'où la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = \sqrt{2+u_0} - 2 = 1$

b. Déterminons v_n et u_n en fonction de n.

On a (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = 1$;

donc : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; v_n = v_0 q^n = \frac{1}{3^n}$

on obtient de ce qui précède : $\frac{1}{3^n} = \sqrt{2+u_n} - 2$ ainsi: $\left(2 + \frac{1}{3^n}\right) = \sqrt{2+u_n}$

donc : $\left(2+\frac{1}{3^n}\right)^2 = 2 + u_n$;

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; u_n = \left(2+\frac{1}{3^n}\right)^2 - 2$

c. Calculer la limite (u_n)

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$ d'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{3^n} = 0$ donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4 - 2 = 2$

Exercice 30

1 a. Étude des variations de f avec : $f(x) = \frac{x}{1+x+x^2}$

La fonction f est définie dérivable sur $\mathbb{R}$. (fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}$)

Et on a : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; f'(x) = \dfrac{(1+x+x^2)-(2x+1)x}{(1+x+x^2)^2} = \dfrac{(1-x)(1+x)}{(1+x+x^2)^2}$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $(1-x)(1+x)$

donc f est croissante sur l'intervalle $[-1;1]$ et décroissante sur chacun des deux intervalles $]-\infty;-1]$ et $[1;+\infty[$.

b. Déterminons l'image de $[0;1]$ par f

L'image de $[0;1]$ par f est $[f(0);f(1)]$.(car f continue et croissante sur $[0;1]$)

d'où : $f([0;1]) = \left[0;\frac{1}{3}\right]$

2 a. Montrons par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; 0 \leq u_n \leq 1$

Pour $n = 0$; on a: $0 \leq 1 \leq 1$; d'où $0 \leqslant u_0 \leqslant 1$ la propriété est vraie pour $n = 0$

- Soit n de $\mathbb{N}$; on suppose que propriété est vraie pour n et, on montre qu'elle est vraie pour $n+1$.

On a : $0 \leq u_n \leq 1$; donc : $0 \leq f(u_n) \leq \frac{1}{3}$ (car $f([0;1]) = \left[0;\frac{1}{3}\right]$)

d'où $0 \leq u_{n+1} \leq 1$.

D'après le principe de récurrence on a: $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; 0 \leq u_n \leq 1$

Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; u_{n+1} < u_n$

pour : $n = 0$ on a $u_0 = 1$ et $u_1 = f(u_0) = \frac{1}{3}$; d'où $u_1 < u_0$; la propriété est vraie pour $n = 0$.

Soit n de $\mathbb{N}$; on suppose que : $u_{n+1} < u_n$ et on montre que : $u_{n+2} < u_{n+1}$

On a : $u_{n+1} < u_n$ et $0 \leq u_n \leq 1$ et $0 \leq u_{n+1} \leq 1$ et f est strictement croissante sur l'intervalle $[0;1]$.

Donc : $f(u_{n+1}) < f(u_n)$; d'où : $u_{n+2} < u_{n+1}$, donc la propriété est vraie pour $n+1$.

On obtient $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; u_{n+1} < u_n$; donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

b. Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ; f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n+1}$ puis déduisons que :

$(\forall n \in \mathbb{N}^*); 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$

Soit n de $\mathbb{N}$; on a: $f\left(\frac{1}{n}\right) = \dfrac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = \dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{n^2+n+1}{n^2}}$

d'où : $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{n}{n^2+n+1}$

donc : $f\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n^2+n+1}-\frac{1}{n+1}=\frac{-1}{(n+1)(n^2+n+1)}$

Puisque $(n+1)(n^2+n+1)>0$ alors $f\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}<0$

donc : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);f\left(\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n+1}$

Déduction :

On utilise le raisonnement par récurrence

Pour $n=1$ on a : $u_1=\frac{1}{3}$; puisque $0\leq\frac{1}{3}\leq\frac{1}{1}$ donc : $0\leq u_1\leq\frac{1}{1}$

Soit n de $\mathbb{N}^*$; on suppose que la propriété est vraie pour n et on montre qu'elle est vraie pour $n+1$.

On a : $0\leq u_n\leq\frac{1}{n}$ et f est croissante sur $[0;1]$;d'où: $f(0)\leq f(u_n)\leq f\left(\frac{1}{n}\right)$

Or : $f\left(\frac{1}{n}\right)\leq\frac{1}{n+1}$ et $f(0)=0$ et $f(u_n)=u_{n+1}$ d'où : $0\leq u_{n+1}\leq\frac{1}{n+1}$

La propriété est vraie pour $n+1$; donc : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);0\leq u_n\leq\frac{1}{n}$

c. Déduisons que la suite (u_n) est convergente et déterminons sa limite.

La suite (u_n) est croissante et majorée par 1; donc elle est convergente.

Puisque $0\leq u_n\leq\frac{1}{n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ donc: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$ (d'après un critère de convergence)

Exercice 31

1 a. Calcul u_2 et u_3.

On a : $u_0=\frac{1}{2}$ et $u_1=1$ et on a : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $\frac{1}{u_{n+2}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u_{n+1}}+\frac{1}{u_n}\right)$

donc : $\frac{1}{u_2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{2}(1+2)=\frac{3}{2}$ d'où: $u_2=\frac{2}{3}$

de même $\frac{1}{u_3}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\frac{2}{3}}+1\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right)=\frac{5}{4}$ d'où : $u_3=\frac{4}{5}$

2 Montrons par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $u_{n+1}=\frac{2u_n}{4u_n-1}$

pour $n=0$; on a : $\frac{2u_0}{4u_0-1}=\frac{2\times\frac{1}{2}}{4\times\frac{1}{2}-1}=1=u_1$ donc: $u_1=\frac{2u_0}{4u_0-1}$

La propriété est vraie pour $n=0$

Soit n de $\mathbb{N}$; on suppose que la propriété est vraie pour n. c'est-à-dire : $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{4u_n - 1}$,

on aura : $u_n(4u_{n+1} - 2) = u_{n+1}$ d'où : $u_n = \dfrac{u_{n+1}}{4u_{n+1} - 2}$

on montre qu'elle est vraie pour $n+1$.

on a: $\dfrac{1}{u_{n+2}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{u_n + u_{n+1}}{u_{n+1} \times u_n}\right) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\dfrac{u_{n+1}}{4u_{n+1} - 2} + u_{n+1}}{u_{n+1} \times \dfrac{u_{n+1}}{4u_{n+1} - 2}} = \dfrac{1}{2}\dfrac{4u_{n+1}^2 - u_{n+1}}{u_{n+1}^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{4u_{n+1} - 1}{u_{n+1}}$

donc: $u_{n+2} = \dfrac{2u_{n+1}}{4u_{n+1} - 1}$ ainsi la propriété est vraie pour $n+1$.

D'après le principe de récurrence on a : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{4u_n - 1}$

3 Montrons que: $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; \dfrac{1}{2} \leq u_n \leq 1$

Pour: $n = 0$; on a $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{2} \leq 1$ d'où : $\dfrac{1}{2} \leq u_0 \leq 1$

donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Soit n de $\mathbb{N}$; on suppose que la propriété est vraie pour n et on montre qu'elle est vraie pour $n+1$.

On a: $u_{n+1} - 1 = \dfrac{2u_n}{4u_n - 1} - 1 = \dfrac{1 - 2u_n}{4u_n - 1}$

Or: $\dfrac{1}{2} \leq u_n \leq 1$; d'où : $1 - 2u_n \leq 0$ et $4u_n - 1 > 0$; donc : $u_{n+1} - 1 \leq 0$

C'est-à-dire: $u_{n+1} \leq 1$

De plus on a : $u_{n+1} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{2u_n}{4u_n - 1} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2(4u_n - 1)}$

Puisque: $\dfrac{1}{2} \leq u_n \leq 1$ alors : $4u_n - 1 > 0$; d'où: $u_{n+1} - \dfrac{1}{2} \geq 0$

donc : $\dfrac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$

Par conséquent : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; \dfrac{1}{2} \leq u_n \leq 1$, d'après le principe de récurrence.

4 a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique puis calculer v_n et u_n en fonction de n.

Soit n de $\mathbb{N}$; on a: $v_{n+1} = \dfrac{1}{u_n} - \dfrac{4}{3} = \dfrac{1}{\dfrac{2u_n}{4u_n - 1}} - \dfrac{4}{3} = \dfrac{4u_n - 1}{2u_n} - \dfrac{4}{3}$

$$= \frac{12u_n - 3 - 8u_n}{6u_n} = \frac{4u_n}{6u_n} - \frac{3}{6u_n} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2u_n} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u_n} - \frac{4}{3}\right)$$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; v_{n+1} = -\dfrac{1}{2}v_n$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = -\dfrac{1}{2}$ et de premier terme.

$v_0 = \frac{1}{u_0} - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$

▸ Calcul de v_n et u_n en fonction de n .

On a (v_n) est une suite géométrique de raison $q = -\frac{1}{2}$ et de premier terme: $v_0 = \frac{2}{3}$

D'où: $v_n = v_0 \times q^n = \frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

De plus on a : $v_n = \frac{1}{u_n} - \frac{4}{3}$ d'où: $u_n = \frac{3}{3v_n + 4}$; donc:

$$u_n = \frac{3}{3 \times \frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 4}$$

On obtient : $u_n = \frac{3}{4 + 2 \times \left(\frac{-1}{2}\right)^n}$; pour tout n de $\mathbb{N}$

5 Calcul de la limite (u_n).

On a : $-1 < -\frac{1}{2} < 1$, d'où: $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$ donc: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{3}{4}$

Exercice 32

1 a. Montrons que la suite (u_n) est croissante:

On utilise le raisonnement par récurrence.

On a : $u_1 - u_0 = \frac{2}{3}$ (car: $u_1 = \frac{5}{3}$); d'où: $u_1 - u_0 > 0$.

Soit n de $\mathbb{N}$; on suppose que : $u_{n+1} - u_n > 0$ et on montre que: $u_{n+2} - u_{n+1} > 0$

on a : $u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{2u_{n+1} + 3}{u_{n+1} + 2} - \frac{2u_n + 3}{u_n + 2}$

$$= \frac{2u_{n+1}u_n + 4u_{n+1} + 3u_n + 6 - 2u_{n+1}u_n - 3u_{n+1} - 4u_n - 6}{(u_n + 2)(u_{n+1} + 2)}$$

$$= \frac{u_{n+1} - u_n}{(u_n + 2)(u_{n+1} + 2)}$$

On a : $u_{n+1} > 0$ et $u_n > 0$ (vérifier ce résultat) donc: $(u_n + 2)(u_{n+2} + 2) > 0$

D'où : $u_{n+2} - u_{n+1}$ et $u_{n+1} - u_n$ ont le même signe et donc : $u_{n+2} - u_{n+1} > 0$.

D'après le principe de récurrence: $u_{n+1} > u_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$;

la suite: (u_n) est strictement croissante.

b. Montrons que la suite (u_n) est majorée par 2.

C'est-à-dire : $u_n < 2$ pour tout n de $\mathbb{N}$;

Pour $n = 0$; on a $u_0 < 2$ (car: $u_0 = 1$)

Soit n de $\mathbb{N}$; supposons que : $u_n < 2$ et montrons que : $u_{n+1} < 2$

On a : $u_{n+1} - 2 = \dfrac{2u_n + 3}{u_n + 2} - 2 = \dfrac{-1}{u_n + 2}$

Donc : $u_{n+1} - 2 < 0$; (car: $u_n + 2 > 0$) et donc : $u_{n+1} < 2$;

d'après le principe de récurrence : $u_n < 2$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

Déduction:

La suite (u_n) est croissante et majorée par 2; donc elle est convergente.

c. Calculons la limite de (u_n).

(Remarque $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+2}$)

La suite (u_n) vérifie
- $u_{n+1} = f(u_n)$
- $f([0;2]) \subset [0;2]$
- $u_0 \in [0;2]$
- f est continue sur $[0;2]$
- (u_n) est convergente

Donc la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie l'équation : $\ell = \dfrac{2\ell+3}{\ell+2}$ avec $0 \leq \ell \leq 2$

D'où : $\ell^2 + 2\ell = 2\ell + 3$ donc : $\ell = \sqrt{3}$ donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \sqrt{3}$

2 a. Montrons que la suite: (v_n) est géométrique.

Soit n de $\mathbb{N}$;

on a : $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - \sqrt{3}}{u_{n+1} + \sqrt{3}} = \dfrac{\dfrac{2u_n+3}{u_n+2} - \sqrt{3}}{\dfrac{2u_n+3}{u_n+2} + \sqrt{3}}$

$= \dfrac{(2-\sqrt{3})u_n + 3 - 2\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})u_n + 3 + 2\sqrt{3}} = \dfrac{(2-\sqrt{3})u_n - \sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})u_n + \sqrt{3}(2+\sqrt{3})}$

$= \dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\left(\dfrac{u_n - \sqrt{3}}{u_n + \sqrt{3}}\right)$

$v_{n+1} = \dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} v_n = (7 - 4\sqrt{3}) v_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $7 - 4\sqrt{3}$ et de premier terme $v_0 = -2 + \sqrt{3}$.

b. Déterminons u_n en fonction de n .

On a : $v_n = (\sqrt{3} - 2)(7 - 4\sqrt{3})^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$; car: (v_n) est géométrique de raison $7 - 2\sqrt{3}$ et de 1er terme $v_0 = -2 + \sqrt{3}$

On a : $v_n = \dfrac{u_n - \sqrt{3}}{u_n + \sqrt{3}}$ pour tout n de $\mathbb{N}$; d'où : $v_n u_n + \sqrt{3} v_n = u_n - \sqrt{3}$

Alors : $u_n(v_n-1)=-\sqrt{3}v_n-\sqrt{3}$, on obtient: $u_n=\dfrac{\sqrt{3}v_n+\sqrt{3}}{1-v_n}$

Donc : $u_n=\dfrac{\sqrt{3}(-2+\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})^n+\sqrt{3}}{1+(2-\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})^n}$; pour tout n de $\mathbb{N}$

c) Déterminons $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty}(-2+\sqrt{3})\sqrt{3}(7-4\sqrt{3})^n=0$ car : $-1<7-4\sqrt{3}<1$

D'où: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\sqrt{3}$

Exercice 33

1 a. Calcul de v_1 et w_1

On a : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ; v_{n+1}=u_{n+1}-2u_n$ et on a : $(\forall n\in\mathbb{N}); w_{n+1}=u_{n+1}-\frac{1}{3}u_n$

Pour $n=0$; on a : $v_1=u_1-2u_0$

$=1-2\times 0$

$=1$

Pour $n=0$; on a : $w_1=u_1-\frac{1}{3}u_0$

$=1-\frac{1}{3}\times 0$

$=1$

b. Montrons que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

Soit n de $\mathbb{N}$;

On a : $v_{n+2}=u_{n+2}-2u_{n+1}=\left(\frac{7}{3}u_{n+1}-\frac{2}{3}u_n\right)-2u_{n+1}$

$=\left(\frac{7}{3}-2\right)u_{n+1}-\frac{2}{3}u_n=\frac{1}{3}u_{n+1}-\frac{2}{3}u_n=\frac{1}{3}(u_{n+1}-2u_n)=\frac{1}{3}v_{n+1}$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q=\frac{1}{3}$ et son premier terme est $v_1=1$.

Montrons que: $(w_n)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique de raison $q'=2$.

Soit n de $\mathbb{N}$; on a : $w_{n+1}=u_{n+1}-\frac{1}{3}u_n$

D'où : $w_{n+2}=u_{n+2}-\frac{1}{3}u_{n+1}$

$=\left(\frac{7}{3}u_{n+1}-\frac{2}{3}u_n\right)-\frac{1}{3}u_{n+1}=\left(\frac{7}{3}-\frac{1}{3}\right)u_{n+1}-\frac{2}{3}u_n$

$=2u_{n+1}-\frac{2}{3}u_n=2\left(u_{n+1}-\frac{1}{3}u_n\right)=2w_n$

Donc: (w_n) est géométrique de raison $q'=2$ et de 1er terme $w_1=1$

2 **Déterminons u_n en fonction n .**

Déterminons tout d'abord v_n et w_n en fonction de n ;

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; v_n = v_1 \times q^{n-1} = 1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

Et on a $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; w_n = w_1 \times (q')^{n-1} = 1 \times 2^{n-1} = (2)^{n-1}$

On a pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\begin{cases} v_{n+1} = u_{n+1} - 2u_n \\ w_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n \end{cases}$

D'où: $v_{n+1} - w_{n+1} = -2u_n + \frac{1}{3}u_n$

$$v_{n+1} - w_{n+1} = \left(-2 + \frac{1}{3}\right)u_n$$

$$v_{n+1} - w_{n+1} = \frac{-5}{3}u_n$$

On obtient: $u_n = -\frac{3}{5}(v_{n+1} - w_{n+1})$

$$= \frac{3}{5}(w_{n+1} - v_{n+1})$$

donc: $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n = \frac{3}{5}\left(2^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$;

vraie de même pour $n = 0$ car: $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \frac{3}{5}\left(2^0 - \left(\frac{1}{3}\right)^0\right) = 0 \end{cases}$

donc : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = \frac{3}{5}\left(2^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$

▸ **Calculons $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$;**

on a : $2 > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$

Or : $-1 < \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$

D'où: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Exercice 34

1 **Calculons u_2 :**

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+2} = bu_{n+1} - (b-1)u_n$

Pour : $n = 0$; on a : $u_2 = bu_1 - (b-1)u_0$

$$= b.a - (b-1).0$$

$$= ab$$

$u_2 = ab$

2 Montrons que : (v_n) est une suite géométrique

Soit n de $\mathbb{N}$; on a : $v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1}$

$$= (bu_{n+1} - (b-1)u_n) - u_{n+1}$$
$$= (b-1)u_{n+1} - (b-1)u_n$$
$$= (b-1)(u_{n+1} - u_n)$$
$$= (b-1)v_n$$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_{n+1} = (b-1)v_n$

D'où la suite (v_n) est géométrique de raison $q = b - 1$

(**remarquer que:** $\begin{cases} q \neq 0 \\ q \neq 1 \end{cases}$)

Déterminons v_n en fonction de n :

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n = v_0 \times q^{n-0}$

Or : $v_0 = u_1 - u_0 = a - 0 = a$ d'où: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n = a(b-1)^n$

3 Montrons que (w_n) est une suite constante.

C'est-à-dire : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; w_n = cte$

Ou encore : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; w_{n+1} = w_n$

Soit n de $\mathbb{N}$; on a : $w_{n+1} = u_{n+2} - (b-1)u_{n+1}$

$$= (bu_{n+1} - (b-1)u_n) - (b-1)u_{n+1}$$
$$= (b - b + 1)u_{n+1} - (b-1)u_n$$
$$= u_{n+1} - (b-1)u_n$$
$$= w_n$$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; w_{n+1} = w_n$; d'où : (w_n) est une suite constante

On a alors: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; w_n = w_0$

Or : $w_0 = u_1 - (b-1)u_0$; alors : $w_0 = a - (b-1) \times 0$

C'est-à-dire : $w_0 = a$

Donc: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; w_n = a$

4 Déterminons u_n en fonction de n :

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \begin{cases} v_n = u_{n+1} - u_n \\ w_n = u_{n+1} - (b-1)u_n \end{cases}$

D'où : $v_n - w_n = (u_{n+1} - u_n) - (u_{n+1} - (b-1)u_n)$

$= -u_n + (b-1)u_n$

$= (-1 + b - 1)u_n$

$= (b-2)u_n$

D'où : $u_n = \frac{1}{b-2}(v_n - w_n)$ (car: $b \neq 2$)

Or: $v_n = a(b-1)^n$ et $w_n = a$; donc : $u_n = \frac{1}{b-2}(a(b-1)^n - a)$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; u_n = \frac{a}{b-2}((b-1)^n - 1)$

5 Déterminons $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

On a : $0 < b < 2$; d'où: $-1 < b-1 < 1$ et $b \neq 1$

Donc : $\lim\limits_{n \to +\infty}(b-1)^n = 0$; d'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{a}{b-2}(0-1) = \frac{-a}{b-2}$

On obtient: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{a}{2-b}$

Exercice 35

1 a. Montrons par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; u_n > 0$

Pour $n = 0$; on a : $u_0 = 1$ et $1 > 0$ donc : $u_0 > 0$; d'où la propriété est vraie pour $n = 0$.

Soit n un élément de $\mathbb{N}$; on suppose que : $u_n > 0$ et on montre que : $u_{n+1} > 0$.

On a : $u_n > 0 \Longrightarrow \begin{cases} 2u_n^3 > 0 \\ 3u_n^2 + 1 > 0 \end{cases}$

$\Longrightarrow \frac{2u_n^3}{3u_n^2 + 1} > 0$

$\Longrightarrow u_{n+1} > 0$

D'après le principe de récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; u_n > 0$

b. Montrons que (u_n) **est une suite décroissante.**

Soit n de $\mathbb{N}$; on a: $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n^3}{3u_n^2 + 1} - u_n = \frac{2u_n^3 - u_n(3u_n^2 + 1)}{3u_n^2 + 1}$

$= \frac{2u_n^3 - 3u_n^3 - u_n}{3u_n^2 + 1} = \frac{-u_n^3 - u_n}{3u_n^2 + 1} = -\frac{u_n^3 + u_n}{3u_n^2 + 1}$

Or : $\begin{cases} u_n^3 + u_n > 0 \\ 3u_n^2 + 1 > 0 \end{cases}$; (car : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; u_n > 0$)

D'où : $-\frac{u_n^3+u_n}{3u_n^2+1}<0$; donc : $u_{n+1}-u_n<0$ pour tout n de $\mathbb{N}$;

Donc : (u_n) est une suite décroissante.

c. **Déduisons que la suite (u_n) est convergente.**

On a : (u_n) est décroissante et minorée par 0 (car : $(\forall n\in\mathbb{N})\,;\,u_n>0$)

donc : la suite (u_n) est convergente.

2 a. **Montrons que :** $(\forall n\in\mathbb{N})\,;\,u_{n+1}\le\frac{1}{2}u_n$

Soit n un élément de $\mathbb{N}$; étudions le signe de : $u_{n+1}-\frac{1}{2}u_n$

On a : $u_{n+1}-\frac{1}{2}u_n=\frac{2u_n^3}{3u_n^2+1}-\frac{u_n}{2}$

$$=\frac{4u_n^3-(3u_n^2+1)u_n}{2(3u_n^2+1)}=\frac{4u_n^3-3u_n^3-u_n}{2(3u_n^2+1)}=\frac{u_n^3-u_n}{2(3u_n^2+1)}$$

$$=\frac{u_n(u_n^2-1)}{2(3u_n^2+1)}=\frac{u_n(u_n-1)(u_n+1)}{2(3u_n^2+1)}$$

Or la suite (u_n) est décroissante, donc : $(\forall n\in\mathbb{N})\,;\,u_n\le u_0$, d'où: $u_n\le 1$

On a : $\begin{cases}u_n\le 1\\ u_n+1>0\\ u_n>0\\ 2(3u_n^2+1)>0\end{cases}$ d'où: $u_{n+1}-\frac{1}{2}u_n\le 0$; donc : $u_{n+1}\le\frac{1}{2}u_n$

Conclusion: $(\forall n\in\mathbb{N})\,;\,u_{n+1}\le\frac{1}{2}u_n$

b. **Montrons que :** $(\forall n\in\mathbb{N})\,;\,u_{n+1}\le\left(\frac{1}{2}\right)^n$

On a : $(\forall n\in\mathbb{N})\,;\,u_{n+1}\le\frac{1}{2}u_n$

On remplace n par 0; on a $(0\le)\ u_1\le\frac{1}{2}u_0$

On remplace n par 1; on a : $(0\le)\ u_2\le\frac{1}{2}u_1$

⋮ ⋮ ⋮

On remplace n par $n-1$; on a : $(0\le)\ u_n\le\frac{1}{2}u_{n-1}$

En multipliant membre à membre les inégalités précédentes et après simplification on obtient :

$u_n\le\left(\frac{1}{2}\right)^n u_0$ d'où : $u_n\le\left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

▸ 2ème méthode: On utilise le raisonnement par récurrence :

Pour : $u_0=1$ et $\left(\frac{1}{2}\right)^0=1$ d'où : $u_0\le\left(\frac{1}{2}\right)^0$

La propriété est vraie pour $n = 0$

Soit n un élément de $\mathbb{N}$; on suppose que : $u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et on montre que : $u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$;

On a : $u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$, donc : $\frac{1}{2}u_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

D'où : $\frac{1}{2}u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$; et puisque $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$; alors : $u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

D'après le principe de récurrence on a : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

infos:

Si : $\begin{cases} a \leq b \\ b \leq c \end{cases}$ alors : $a \leq c$

c. Déterminons $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

On a : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 \leq u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Or : $\lim\limits_{n \to +\infty} 0 = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $\left(-1 < \frac{1}{2} < 1\right)$

donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

3 Montrons que (v_n) est convergente et déterminons sa limite

On a: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $v_n = \frac{u_n + 2}{u_n + 1}$

d'où : $v_n = f(u_n)$ avec : $f(X) = \frac{X + 2}{X + 1}$

On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ et f est continue en 0 donc : (v_n) est convergente et

$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = f(0)$

$= \frac{0 + 2}{0 + 1} = 2$

donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 2$

infos:

Si : $\lim u_n = \ell$

et f continue en ℓ

alors (v_n) tel que: $v_n = f(u_n)$

converge vers $f(\ell)$.

Exercice 36

1 Calculons u_1 ; u_2 et u_3

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{n - 1}{2n(n + 1)}$

pour $n = 1$; on a : $u_2 = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1 - 1}{2 \times (1 + 1)} = \frac{1}{2}u_1 = \frac{3}{4}$

pour $n = 2$; on a : $u_3 = \frac{1}{2}u_2 + \frac{2 - 1}{2 \times 2 \times (2 + 1)} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{12}$

$= \frac{11}{24}$

On a : $u_1 > u_2 > u_3$ $\left(\text{car } \frac{3}{2} > \frac{3}{4} > \frac{11}{24}\right)$

2 a. Montrons que :

$(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\})$; $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(u_n - u_{n-1}) + \frac{3-n}{2n(n-1)(n+1)}$

Soit n de $\mathbb{N}^* - \{1\}$

On a : $u_{n+1} - u_n = \left(\frac{1}{2}u_n + \frac{n-1}{2n(n+1)}\right) - \left(\frac{1}{2}u_{n-1} + \frac{n-1-1}{2(n-1)(n-1+1)}\right)$

$$= \frac{1}{2}u_n + \frac{n-1}{2n(n+1)} - \frac{1}{2}u_{n-1} - \frac{n-2}{2(n-1)n}$$

$$= \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{2}u_{n-1} + \frac{n-1}{2n(n+1)} - \frac{n-2}{2n(n-1)}$$

$$= \frac{1}{2}(u_n - u_{n-1}) + \frac{(n-1)^2 - (n-2)(n+1)}{2n(n+1)(n-1)}$$

$$= \frac{1}{2}(u_n - u_{n-1}) + \frac{(n^2 - 2n + 1) - (n^2 + n - 2n - 2)}{2n(n+1)(n-1)}$$

$$= \frac{1}{2}(u_n - u_{n-1}) + \frac{-n + 1 + 2}{2n(n+1)(n-1)}$$

$$= \frac{1}{2}(u_n - u_{n-1}) + \frac{3-n}{2n(n+1)(n-1)}$$

b. Montrons que (u_n) est décroissante

On utilise le raisonnement par récurrence et la relation :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(u_n - u_{n-1}) + \frac{3-n}{2n(n-1)(n+1)}$$

On a : $u_3 \leq u_2$; car : $u_2 = \frac{3}{4}$ et $u_2 = \frac{11}{24}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq 3$, on suppose que $u_n \leq u_{n-1}$, et on montre que $u_{n+1} \leq u_n$

On a : $\begin{cases} u_n - u_{n-1} \leq 0 \\ 3 - n \leq 0 \\ 2n(n-1)(n+1) > 0 \end{cases}$

donc : $\frac{1}{2}(u_n - u_{n-1}) + \frac{3-n}{2n(n-1)(n+1)} \leq 0$ (somme de deux nombres négatifs ou nuls)

D'où : $u_{n+1} - u_n \leq 0$; on obtient : $u_{n+1} \leq u_n$

Daprès le principe de la récurrence $(\forall n \geq 3) u_n \leq u_{n-1}$

De plus on a : $u_3 \leq u_2 \leq u_1$ d'où $(\forall n \in \mathbb{N}^*) u_{n+1} \leq u_n$

donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

3 a. Montrons que (v_n) est géométrique.

Soit n de $\mathbb{N}$; on a : $v_{n+1} = u_{n+1} - \dfrac{1}{n+1}$

$$= \frac{1}{2}u_n + \frac{n-1}{2n(n+1)} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{2}u_n + \frac{n-1-2n}{2n(n+1)} = \frac{1}{2}u_n + \frac{-1-n}{2n(n+1)}$$

$$= \frac{1}{2}u_n - \frac{n+1}{2n(n+1)}$$

$$= \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\left(u_n - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}v_n$$

donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$; et de premier terme

$v_1 = u_1 - \dfrac{1}{1} = \dfrac{3}{2} - 1 = \dfrac{1}{2}$

b. Déterminons v_n et u_n en fonction de n

Soit n de $\mathbb{N}^*$;

On a : $v_n = v_1 \times q^{n-1} = \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{1+n-1} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; v_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

Déterminons u_n en fonction de n

Soit n de $\mathbb{N}^*$ on a : $v_n = u_n - \dfrac{1}{n}$

d'où : $v_n + \dfrac{1}{n} = u_n$ donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n + \dfrac{1}{n}$

c. Déterminons $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Puisque: $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$; alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ et on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n} = 0$

d'où : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + \dfrac{1}{n} = 0$ donc: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

5 Les fonctions logarithmes

1 Fonctions logarithmes népérien: définition et propriétés

Définition:

La fonction logarithme népérien, notée ln, est la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0;\infty[$ qui s'annule en 1.

Conséquences:

- L'ensemble de définition de la fonction ln est: $D =]0; +\infty[$
- $\ln(1) = 0$
- Il existe un seul réel strictement positif, noté e, tel que $\ln(e) = 1$ (c'est un nombre irrationnel tel que $e = 2,7182$).
- La fonction ln est dérivable sur l'intervalle $]0;\infty[$ et on a: $(\forall x \in]0; +\infty[)\ ;\ (\ln)'(x) = \frac{1}{x}$.
- Pour tout a et b de $]0 ; +\infty[$, on a: $a < b \Leftrightarrow \ln(a) < \ln(b)$

$a = b \Leftrightarrow \ln(a) = \ln(b)$

Propriétés algébriques:

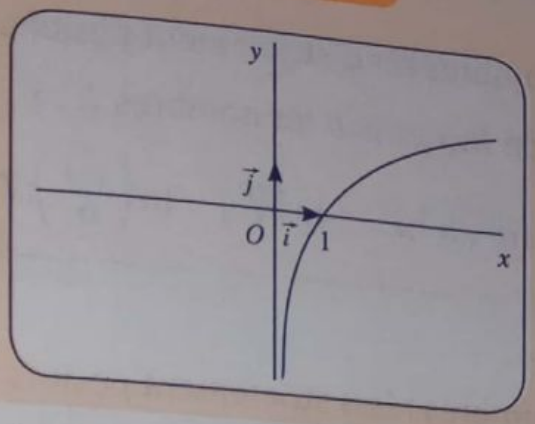
Pour tout a et b de $]0; +\infty[$ et tout r de $\mathbb{Q}$, on a :

- $\ln(a.b) = \ln(a) + \ln(b)$
- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\ln(a^r) = r\ln(a)$
- $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$

Signe de la fonction ln:

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$	

Représentation graphique de la fonction ln:



Exercices

Exercice 1

Écrire chacun des nombres suivants sous la forme $\ln(p)$ tel que $p \in \mathbb{N}^*$:

1 $\ln\left(\frac{9}{2}\right)+\ln\left(\frac{2}{5}\right)+\ln\left(\frac{5}{3}\right)$

2 $-\ln(0,1)-\ln(0,001)+\frac{1}{2}\ln(10000)$

3 $4\ln\frac{1}{2}+3\ln 2+3\ln(\sqrt[3]{8})$

4 $\ln(9+16)-3\ln(2\sqrt[3]{5})+\ln(12-4)$

5 $\ln\sqrt{\sqrt{7}+2}+\ln\sqrt{\sqrt{7}-2}+3\ln\sqrt{3}$

6 $\ln(2+\sqrt{2})+\ln(2+\sqrt{2+\sqrt{2}})+\ln(2-\sqrt{2+\sqrt{2}})$

Exercice 2

1 Écrire en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$ chacun des nombres suivants :

$A = \ln 16 - \ln(81^3)$; $B = \ln(9\sqrt{2})$; $C = \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{16}\right)$ et $D = \ln\left(\frac{\sqrt[3]{3}}{3\sqrt[4]{2}}\right)$

2 Calculer E et F sachant que :

$$E = \ln\left(\frac{1}{e}\right)^2 - \left(\ln\frac{1}{e}\right)^2 \text{ et } F = 2\ln(2+\sqrt{5})+\ln(2-\sqrt{5})^2$$

Exercice 3

Calculer A et B sachant que :

1 $A = \ln(5+2\sqrt{6})^{20}+\ln(5-2\sqrt{6})^{20}$

2 $B = 2\ln(e\sqrt{e})-3\ln(e^5)-2\ln(e^{-6})$

Exercice 4

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs.

Calculer en fonction de $\ln a$ et $\ln b$ les nombres X, Y, Z et T :

$$X = \ln\left(\frac{a^5}{b^3}\right); Y = \ln(a^2\sqrt{b}); Z = \ln\left(\frac{a}{b}\right) - \ln\left(\frac{\sqrt{a}}{b}\right); T = \ln\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\right) + \ln\left(\frac{a}{b}\right)^2$$

Exercice 5

Soient x et y deux nombres réels strictement positifs, montrer que :

1. $\ln\sqrt{xy} = \dfrac{\ln x + \ln y}{2}$
2. $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) + \ln\left(\dfrac{y}{x}\right) = 0$
3. $\ln(\sqrt[3]{xy}) - \dfrac{1}{3}\ln(x^2) = \dfrac{1}{3}\ln\left(\dfrac{y}{x}\right)$
4. $\ln x + \ln y \geq 2 \iff \sqrt{xy} \geq e$

Exercice 6

Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction f dans chaque cas :

1. $f(x) = \ln(2x - 1)$
2. $f(x) = \ln(x^2 - 1)$
3. $f(x) = \dfrac{\ln(x^2 + 4)}{x}$
4. $f(x) = \ln\left(\dfrac{2x - 1}{x - 2}\right)$
5. $f(x) = \dfrac{\ln(2x - 1)}{\ln(x - 2)}$

Exercice 7

Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction f dans chaque cas:

1. $f(x) = \ln((x - 2)^2)$
2. $f(x) = \ln(|x - 2|)$
3. $f(x) = \ln(1 - |x|)$
4. $f(x) = \sqrt{\ln x}$
5. $f(x) = \dfrac{x}{\ln\left(\dfrac{x}{2}\right)}$

Exercice 8

Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction f dans chaque cas:

1. $f(x) = \ln(3x - 6) + \ln(x + 4)$
2. $f(x) = \ln(|x^2 - 16|)$
3. $f(x) = \ln\left(\left|1 + \dfrac{1}{x}\right|\right)$
4. $f(x) = \ln(-x^2 + 6x - 5)$
5. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2 - 5x + 6}{-x^2 + 7x + 8}\right)$

Exercice 9

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

1. $1-\ln x=0$
2. $\ln\left(\frac{x}{3}\right)=\ln(5)$
3. $\ln x=2$
4. $x\ln(2x-1)=0$
5. $\ln^2 x-3\ln x=0$

Exercice 10

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\ln(x-2)+\ln(x+1)=\ln(3x-5)$
2. $2\ln(x-2)+\ln(3x+1)=2\ln 2$
3. $6\ln^2(x)+7\ln(x)-3=0$
4. $\ln^3(x)-2\ln^2(x)-\ln x+2=0$
5. $\ln x-\frac{1}{\ln x}=\frac{15}{4}$

Exercice 11

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes:

1. $\ln(x)\leq 0$
2. $\ln(2x+3)\geq 0$
3. $2-\ln x\geq 0$
4. $\ln x\leq 2\ln 3$
5. $\ln x\leq 2\ln(x+1)$
6. $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\geq 0$
7. $(1+\ln x)(2-\ln x)\geq 0$
8. $\frac{\ln x}{\ln x-3}\leq 0$

Exercice 12

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes:

1. $2(\ln x)^2-\ln x-1\geq 0$
2. $\ln^2 x+\ln x<0$
3. $\ln^2 x-9\geq 0$
4. $(\ln x)^2+5\ln x-6<0$
5. $\frac{2\ln x-1}{1-\ln x}\leq 0$
6. $\ln(x^2+2x-2)>0$

Exercice 13

Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction f dans chaque cas:

1. $f(x)=\frac{x-5}{\ln^2(x)-4\ln x+3}$
2. $f(x)=\sqrt{3-\ln x}$
3. $f(x)=\sqrt{(x-1)\ln x}$

Exercice 1

infos: $\forall (a;b;c)\in(\mathbb{R}^{*+})^3$ $\ln a+\ln b+\ln c=\ln(abc)$

1 On a : $\ln\left(\frac{9}{2}\right)+\ln\left(\frac{2}{5}\right)+\ln\left(\frac{5}{3}\right)=\ln\left(\frac{9}{2}\times\frac{2}{5}\times\frac{5}{3}\right)=\ln 3$

2 On a: $-\ln(0,1)-\ln(0,001)+\frac{1}{2}\ln(10000)=-\ln(10^{-1}\times 10^{-3})+\ln\sqrt{10^4}$

$=-\ln(10^{-4})+\ln(10^2)=\ln\left(\frac{10^2}{10^{-4}}\right)=\ln(10^4\times 10^2)=\ln(10^6)$

3 On a : $4\ln\frac{1}{2}+3\ln 2+3\ln(\sqrt[3]{8})=-4\ln 2+3\ln 2+3\ln 2=2\ln 2$

Donc : $4\ln\frac{1}{2}+3\ln 2+3\ln(\sqrt[3]{8})=\ln 4$

4 On a :

$\ln(9+16)-3\ln(2\sqrt[3]{5})+\ln(12-4)=\ln 25-\ln(2\sqrt[3]{5})^3+\ln 8$

$=\ln(25\times 8)-\ln(8\times 5)=\ln\left(\frac{25\times 8}{5\times 8}\right)$

Donc : $\ln(9+16)-3\ln(2\sqrt[3]{5})+\ln(12-4)=\ln(5)$

5 On a :

$\ln\sqrt{\sqrt{7}+2}+\ln\sqrt{\sqrt{7}-2}+3\ln\sqrt{3}=\ln\sqrt{(\sqrt{7}+2)(\sqrt{7}-2)}+3\ln\sqrt{3}$

$=\ln\sqrt{3}+3\ln\sqrt{3}=4\ln\sqrt{3}=2\ln(3)$

Donc : $\ln\sqrt{\sqrt{7}+2}+\ln\sqrt{\sqrt{7}-2}+3\ln\sqrt{3}=\ln 9$

6 On a : $\ln(2+\sqrt{2})+\ln(2+\sqrt{2+\sqrt{2}})+\ln(2-\sqrt{2+\sqrt{2}})$

$=\ln(2+\sqrt{2})+\ln((2-\sqrt{2+\sqrt{2}})(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}))$

$=\ln(2+\sqrt{2})+\ln(2-\sqrt{2})=\ln((2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2}))$

$=\ln(2)$

Donc : $\ln(2+\sqrt{2})+\ln(2+\sqrt{2+\sqrt{2}})+\ln(2-\sqrt{2+\sqrt{2}})=\ln(2)$

Exercice 2

Calculons A, B, C et D en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$:

- On a : $A=\ln 16-\ln(81^3)=\ln 2^4-\ln(3^4)^3$ donc: $A=4\ln 2-12\ln 3$
- On a : $B=\ln(9\sqrt{2})=\ln 3^2+\ln\sqrt{2}$ donc : $B=2\ln 3+\frac{1}{2}\ln 2$
- On a : $C=\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{16}\right)=\ln\sqrt{3}-\ln 2^4$ donc : $C=\frac{1}{2}\ln 3-4\ln 2$
- On a : $D=\ln\left(\frac{\sqrt[3]{3}}{3\sqrt[4]{2}}\right)=\ln\sqrt[3]{3}-\ln(3\sqrt[4]{2})=\frac{1}{3}\ln 3-\left(\ln 3+\frac{1}{4}\ln 2\right)$

Donc : $D=-\frac{2}{3}\ln 3-\frac{1}{4}\ln 2$

Calculons E et F :

On a : $E = \ln\left(\frac{1}{e}\right)^2 - \left(\ln\frac{1}{e}\right)^2 = 2\ln\frac{1}{e} - (-\ln e)^2 = -2\ln e - 1 = -3$

On a : $F = 2\ln(2+\sqrt{5}) + \ln(2-\sqrt{5})^2 = \ln((2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5}))^2$

$= \ln((\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2))^2 = \ln(\sqrt{5}^2 - 2^2) = \ln(5-4)$

Donc : $F = \ln(1) = 0$

info: $(a-b)^2 = (b-a)^2$

Exercice 3

1 Calculons A :

$A = \ln(5+2\sqrt{6})^{20} + \ln(5-2\sqrt{6})^{20} = 20\ln(5+2\sqrt{6}) + 20\ln(5-2\sqrt{6})$

$= 20\ln(5+2\sqrt{6})(5-2\sqrt{6}) = 20\ln(25-24) = 20\ln(1)$

Donc : $A = 0$ car $\ln(1) = 0$

2 Calculons B :

On a: $B = 2\ln(e\sqrt{e}) - 3\ln(e^5) - 2\ln(e^{-6}) = 2\ln e^{\frac{3}{2}} - 3\ln e^5 - 2\ln e^{-6}$

$= 2\times\frac{3}{2}\ln e - 3\times 5\ln e - 2(-6)\ln e = 3 - 15 + 12$

Donc : $B = 0$

Exercice 4

Calculons X :

On a : $X = \ln\left(\frac{a^5}{b^3}\right)$ donc : $X = \ln(a^5) - \ln(b^3)$

$\left(\text{car: } \left(\forall (x,y)\in(IR_+^*)^2; \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y\right)\right.$, d'où : $X = 5\ln a - 3\ln b$

Calculons Y :

On a : $Y = \ln(a^2\sqrt{b})$ d'où : $Y = \ln a^2 + \ln\sqrt{b}$

C'est-à-dire : $Y = 2\ln a + \ln b^{\frac{1}{2}}$ $\left(\text{car : } \sqrt{b} = b^{\frac{1}{2}}\right)$

Par suite : $Y = 2\ln a + \frac{1}{2}\ln b$

Calculons Z :

On a :

$Z = \ln\left(\frac{a}{b}\right) - \ln\left(\frac{\sqrt{a}}{b}\right) = (\ln a - \ln b) - (\ln\sqrt{a} - \ln b) = \ln a - \ln b - \frac{1}{2}\ln a + \ln b$

Donc : $Z = \frac{1}{2}\ln a$

Calculons T :

On a : $T = \ln\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\right) + \ln\left(\frac{a}{b}\right)^2$

Donc : $T = \ln\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}} + 2\ln\left(\frac{a}{b}\right)$ (car: $((\forall x \in \mathbb{R}_+^*); \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

Par suite: $T = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{a}{b}\right) + 2\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{1}{3}(\ln a - \ln b) + 2(\ln a - \ln b)$

D'où : $T = \frac{7}{3}\ln a - \frac{7}{3}\ln b$

2ème méthode:

On a : $T = \ln\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\right) + \ln\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \ln\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}} \times \left(\frac{a}{b}\right)^2\right) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{7}{3}}$

Donc : $T = \frac{7}{3}\ln a - \frac{7}{3}\ln b$

Exercice 5

1 Montrons que : $\ln\sqrt{xy} = \frac{\ln x + \ln y}{2}$

Soit x et y deux éléments de $]0;+\infty[$, on a :

$\ln\sqrt{xy} = \frac{1}{2}\ln(xy) = \frac{1}{2}(\ln x + \ln y)$

Donc : $\ln\sqrt{xy} = \frac{\ln x + \ln y}{2}$

2 Montrons que : $\ln\left(\frac{x}{y}\right) + \ln\left(\frac{y}{x}\right) = 0$

Soit x et y deux éléments de $]0;+\infty[$ on a :

$\ln\left(\frac{x}{y}\right) + \ln\left(\frac{y}{x}\right) = \ln\left(\frac{x}{y} \times \frac{y}{x}\right) = \ln 1$

Donc : $\ln\left(\frac{x}{y}\right) + \ln\left(\frac{y}{x}\right) = 0$

3 Montrons que: $\ln(\sqrt[3]{xy}) - \frac{1}{3}\ln(x^2) = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{y}{x}\right)$

Soit x et y deux éléments de $]0;+\infty[$ on a :

$$\ln(\sqrt[3]{xy}) - \frac{1}{3}\ln(x^2) = \frac{1}{3}\ln(xy) - \frac{1}{3}\ln(x^2)$$
$$= \frac{1}{3}(\ln(xy) - \ln(x^2)) = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{xy}{x^2}\right) = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{y}{x}\right)$$

Donc : $\ln(\sqrt{xy}) - \frac{1}{3}\ln(x^2) = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{y}{x}\right)$

4 Montrons que : $\ln x + \ln y \geq 2 \iff \sqrt{xy} \geq e$

Soit x et y deux éléments de $]0;+\infty[$ on a :

$$\ln x + \ln y \geq 2 \iff \ln(xy) \geq 2$$
$$\iff \frac{1}{2}\ln(xy) \geq 1$$
$$\iff \ln\sqrt{xy} \geq \ln e$$
$$\iff \sqrt{xy} \geq e$$

Exercice 6

Déterminons D l'ensemble de définition de la fonction f dans chaque cas :

1 $f(x) = \ln(2x-1)$

Soit x un élément de $\mathbb{R}$, on a : $x \in D \iff 2x-1>0$

$\iff 2x>1$

$\iff x>\frac{1}{2}$

Donc : $D=\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

2 $f(x) = \ln(x^2-1)$

Soit x un élément de $\mathbb{R}$, on a : $x \in D \iff x^2-1>0$

$\iff x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $D=]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

3 $f(x)=\frac{\ln(x^2+4)}{x}$

Soit x un élément de $\mathbb{R}$, on a : $x \in D \iff (x^2+4>0 \text{ et } x\neq 0)$

puisque : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ; x^2+4>0$ alors $x\in D \iff x\neq 0$

Donc : $D=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

4 $f(x)=\ln\left(\frac{2x-1}{x-2}\right)$

Soit x un élément de $\mathbb{R}$, on a : $x\in D \iff \left(\frac{2x-1}{x-2}>0 \text{ et } x-2\neq 0\right)$

Tableau de signes de $\frac{2x-1}{x-2}$ est le suivant:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{2x-1}{x-2}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

donc : $x\in D \iff x\in\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[\cup]2;+\infty[$ et $x\neq 2$

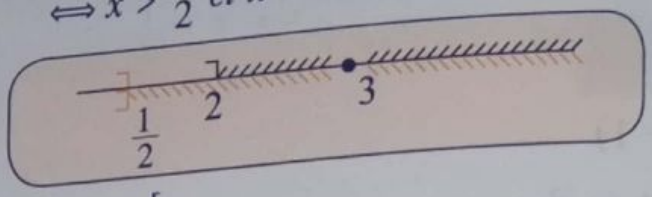
$\iff x\in\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[\cup]2;+\infty[$

Donc : $D=\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[\cup]2;+\infty[$

5 $f(x) = \dfrac{\ln(2x-1)}{\ln(x-2)}$

Soit x un élément de $\mathbb{R}$, on a :

$$x \in D \Leftrightarrow (2x-1) > 0 \text{ et } x-2 > 0 \text{ et } \ln(x-2) \neq 0$$
$$\Leftrightarrow 2x > 1 \text{ et } x > 2 \text{ et } x-2 \neq 1$$
$$\Leftrightarrow x > \frac{1}{2} \text{ et } x > 2 \text{ et } x \neq 3$$



Donc : $D =]2;3[\cup]3;+\infty[$

Remarque: on remarque que les fonctions : $x \longmapsto \ln\left(\dfrac{2x-1}{x-2}\right)$ et $x \mapsto \dfrac{\ln(2x-1)}{\ln(x-2)}$ n'ont pas le même ensemble de définition.

Exercice 7

Déterminons D l'ensemble de définition de la fonction f dans chaque cas :

1 $f(x) = \ln((x-2)^2)$

Soit x un élément de $\mathbb{R}$, on a : $x \in D \Leftrightarrow (x-2)^2 > 0$

et comme : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; (x-2)^2 \geq 0$:

alors : $x \in D \Leftrightarrow (x-2)^2 \neq 0$

$$\Leftrightarrow x \neq 2$$

Donc : $D = \mathbb{R} - \{2\} =]-\infty\ ; 2[\cup]2; +\infty[$

2 $f(x) = \ln(|x-2|)$

Soit x un élément de $\mathbb{R}$, on a : $x \in D \Leftrightarrow |x-2| > 0$

puisque : $(\forall x \in \mathbb{R}); |x-2| \geqslant 0$, alors : $x \in D \Leftrightarrow |x-2| \neq 0$

$$\Leftrightarrow x \neq 2$$

Donc : $D = \mathbb{R} - \{2\} =]-\infty\ ; 2[\cup]2\ ; +\infty[$

3 $f(x) = \ln(1-|x|)$

Soit x un élément de $\mathbb{R}$, on a : $x \in D \Leftrightarrow 1-|x| > 0$

$$\Leftrightarrow |x| < 1$$
$$\Leftrightarrow -1 < x < 1$$
$$\Leftrightarrow x \in]-1;1[$$

Donc : $D =]-1;1[$

infos:

$|x| < r \Leftrightarrow -r < x < r$ avec $r > 0$

4 $f(x)=\sqrt{\ln x}$

Soit x un élément de $\mathbb{R}$, on a : $x \in D \Leftrightarrow (x>0 \text{ et } \ln x \geq 0)$

$\Leftrightarrow x>0$ et $x \geqslant 1$

$\Leftrightarrow x \in [1;+\infty[$

x	0		1		$+\infty$
Signe de $\ln x$	‖	$-$	0	$+$	

Donc : $D=[1;+\infty[$

5 $f(x)=\dfrac{x}{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}$

Soit x un élément de $\mathbb{R}$, on a : $x \in D \Leftrightarrow \frac{x}{2}>0 \text{ et } \ln\left(\frac{x}{2}\right)\neq 0$

$\Leftrightarrow x>0 \text{ et } \frac{x}{2}\neq 1$

$\Leftrightarrow x>0 \text{ et } x\neq 2$

Donc : $D=]0;2[\cup]2;+\infty[$

Exercice 8

Déterminons D l'ensemble de définition de la fonction f dans chaque cas :

1 $f(x)=\ln(3x-6)+\ln(x+4)$

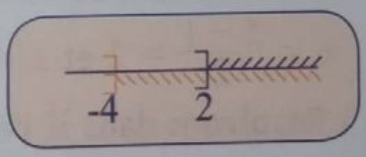
Soit x un élément de $\mathbb{R}$, on a :

$x \in D \Leftrightarrow 3x-6>0 \text{ et } x+4>0$

$\Leftrightarrow x>2 \text{ et } x>-4$

$\Leftrightarrow x>2$

$\Leftrightarrow x \in]2;+\infty[$



Donc : $D=]2:+\infty[$

2 $f(x)=\ln(|x^2-16|)$

Soit x un élément de $\mathbb{R}$, on a: $x \in D \Leftrightarrow |x^2-16|>0$

et comme : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; |x^2-16| \geq 0$ alors : $x \in D \Leftrightarrow |x^2-16| \neq 0$

$\Leftrightarrow x^2-16 \neq 0$

$\Leftrightarrow (x-4)(x+4) \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq 4$ et $x \neq -4$

Donc : $D=IR-\{-4;4\}=]-\infty;-4[\cup]-4;4[\cup]4;+\infty[$

3 $f(x)=\ln\left(\left|1+\frac{1}{x}\right|\right)$

Soit x un élément de $\mathbb{R}$, on a : $x \in D \Leftrightarrow \left|1+\frac{1}{x}\right|>0 \text{ et } x\neq 0$

$$x \in \mathbb{D} \Leftrightarrow \frac{x+1}{x} \neq 0 \text{ et } x \neq 0$$
$$\Leftrightarrow x \neq -1 \text{ et } x \neq 0$$

Donc : $D = \mathbb{R} - \{-1, 0\} =]-\infty; -1[\cup]-1; 0[\cup]0; +\infty[$

4 $f(x) = \ln(-x^2 + 6x - 5)$

Soit x un élément de $\mathbb{R}$, on a : $x \in D \Leftrightarrow -x^2 + 6x - 5 > 0$

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $-x^2 + 6x - 5 = 0$

le discriminant de cette équation est : $\Delta = 36 - 20 = 16$

et les solutions sont : $x_1 = \frac{-6-4}{-2} = 5$ et $x_2 = \frac{-6+4}{-2} = 1$

Tableau de signe du trinôme $-x^2 + 6x - 5$ est le suivant :

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$-x^2 + 6x - 5$		$-$	0	$+$	0	$-$	

donc : $x \in D \Leftrightarrow x \in]1; 5[$

d'où : $D =]1; 5[$

5 $f(x) = \ln\left(\frac{x^2 - 5x + 6}{-x^2 + 7x + 8}\right)$

Soit x un réel, on a : $x \in D \Leftrightarrow \frac{x^2 - 5x + 6}{-x^2 + 7x + 8} > 0$ et $-x^2 + 7x + 8 \neq 0$

▸ **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation :** $x^2 - 5x + 6 = 0$

le discriminant de cette équation est : $\Delta = 25 - 24 = 1$ et les solutions sont :

$x_1 = \frac{5-1}{2} = 2$ et $x_2 = \frac{5+1}{2} = 3$

▸ **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation :** $-x^2 + 7x + 8 = 0$

Le discriminant de cette équation est : $\Delta = 49 + 32 = 81$ et les solutions sont :

$x_1 = \frac{-7-9}{-2} = 8$ et $x_2 = \frac{-7+9}{-2} = -1$

Tableau de signe de l'expression $\frac{x^2 - 5x + 6}{-x^2 + 7x + 8}$ est le suivant :

x	$-\infty$		-1		2		3		8		$+\infty$
$x^2 - 5x + 6$	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$		
$-x^2 + 7x + 8$	$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$		
$\frac{x^2 - 5x + 6}{-x^2 + 7x + 8}$	$-$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	‖	$-$		

donc : $x \in D \Leftrightarrow x \in]-1;2[\cup]3;8[$

d'où : $D =]-1;2[\cup]3;8[$

Exercice 9

Dans cet exercice, on désigne par D l'ensemble de définition de l'équation à résoudre et par S son ensemble des solutions.

1 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $1 - \ln x = 0$

On a : $D =]0;+\infty[$

Soit x un élément de D on a : $1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1$

$\Leftrightarrow \ln x = \ln e$

$\Leftrightarrow x = e$

Donc : $S = \{e\}$

2 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\ln\left(\frac{x}{3}\right) = \ln(5)$

On a : $D =]0;+\infty[$

Soit x un élément de D on a : $\ln\left(\frac{x}{3}\right) = \ln(5) \Leftrightarrow \frac{x}{3} = 5$

$\Leftrightarrow x = 15$

Donc : $S = \{15\}$

3 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\ln x = 2$

On a : $D =]0;+\infty[$

Soit x un élément de D on a : $\ln x = 2 \Leftrightarrow \ln x = 2\ln(e)$ (car $\ln(e) = 1$)

$\Leftrightarrow \ln x = \ln(e^2)$

$\Leftrightarrow x = e^2$

Donc : $S = \{e^2\}$

4 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x\ln(2x-1) = 0$

Déterminons D :

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $x \in D \Leftrightarrow 2x - 1 > 0$

$\Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$

Donc : $D = \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

Soit x un élément de D : $x\ln(2x-1) = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ ou } \ln(2x-1) = 0)$

$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 2x - 1 = 1$

$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1$

et comme $0 \notin D$ et $1 \in D$ alors : $S = \{1\}$

5 **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation :** $\ln^2(x) - 3\ln x = 0$

On a : $D =]0;+\infty[$

Soit x un élément de D, on a :

$$\begin{aligned}\ln^2(x) - 3\ln x = 0 &\iff \ln x(\ln x - 3) = 0\\ &\iff \ln x = 0 \ \ ou \ \ \ln x = 3\\ &\iff x = 1 \ \ ou \ \ (\ln x = 3\ln e = \ln e^3)\\ &\iff x = 1 \ \ ou \ \ x = e^3\end{aligned}$$

Donc : $S = \{1, e^3\}$

Exercice 10

Dans cet exercice, on désigne par D l'ensemble de définition de l'équation à résoudre et par S son ensemble de solutions de cette équation.

1 **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation:** $\ln(x-2) + \ln(x+1) = \ln(3x-5)$

Déterminons D:

Soit x un élément de $\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}x \in D &\iff x - 2 > 0 \ \ et \ \ x + 1 > 0 \ \ et \ \ 3x - 5 > 0\\ &\iff x > 2 \ \ et \ \ x > -1 \ \ et \ \ x > \frac{5}{3}\end{aligned}$$

Donc : $D =]2;+\infty[$

Soit $x \in D$, on a :

$$\begin{aligned}\ln(x-2) + \ln(x+1) = \ln(3x-5) &\iff \ln((x-2)(x+1)) = \ln(3x-5)\\ &\iff \ln(x^2 - x - 2) = \ln(3x-5)\\ &\iff x^2 - x - 2 = 3x - 5\\ &\iff x^2 - 4x + 3 = 0\\ &\iff (x-1)(x-3) = 0\\ &\iff x = 1 \ \ ou \ \ x = 3\end{aligned}$$

et comme $1 \notin D$ et $3 \in D$ alors : $S = \{3\}$

2 **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation :** $2\ln(x-2) + \ln(3x+1) = 2\ln 2$

Déterminons D:

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $x \in D \iff x - 2 > 0 \ \ et \ \ 3x + 1 > 0$

$$\begin{aligned}&\iff x > 2 \ \ et \ \ x > -\frac{1}{3}\\ &\iff x > 2\end{aligned}$$

Donc : $D =]2;+\infty[$

Soit $x \in D$, on a :

$$2\ln(x-2)+\ln(3x+1)=2\ln 2 \iff \ln((x-2)^2)+\ln(3x+1)=\ln(4)$$
$$\iff \ln((x-2)^2(3x+1))=\ln(4)$$
$$\iff 3x^3-12x^2+12x+x^2-4x+4=4$$
$$\iff 3x^3-11x^2+8x=0$$
$$\iff x(3x^2-11x+8)=0$$
$$\iff x=0 \text{ ou } 3x^2-11x+8=0$$

Le discriminant de l'équation : $3x^2-11x+8=0$ est : $\Delta=121-96=25$

Les solutions de cette équation sont : $x_1=\frac{11-5}{6}=1$ et $x_2=\frac{11+5}{6}=\frac{8}{3}$

et comme : $0 \notin D$ et $1 \notin D$ et $\frac{8}{3} \in D$, alors : $S=\left\{\frac{8}{3}\right\}$

3 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(E): 6\ln^2(x)+7\ln(x)-3=0$

On a : $D=]0;+\infty[$

Pour résoudre cette équation, on fait le changement de variable suivant, posons : $X=\ln x$ avec $X \in \mathbb{R}$ et $x>0$.

L'équation (E) devient : $(E'): 6X^2+7X-3=0$

Le discriminant de (E') est $\Delta=49+72=121$

et les solutions sont : $X_1=\frac{-7-11}{12}=-\frac{3}{2}$ et $X_2=\frac{-7+11}{12}=\frac{1}{3}$

et comme $X=\ln x$; alors : $\ln x=-\frac{3}{2}$ ou $\ln x=\frac{1}{3}$

C'est-à-dire : $\ln x=-\frac{3}{2}\ln e$ ou $\ln x=\frac{1}{3}\ln e$

C'est-à-dire : $\ln x=\ln(e^{-\frac{3}{2}})$ ou $\ln x=\ln(e^{\frac{1}{3}})$

donc : $x=e^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e^3}}=\frac{1}{e\sqrt{e}}$ ou $x=e^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{e}$

D'où : $S=\left\{\sqrt[3]{e}\,;\frac{1}{e\sqrt{e}}\right\}$

4 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\ln^3(x)-2\ln^2(x)-\ln(x)+2=0$

On a : $D=]0;+\infty[$

Résolvons l'équation à l'aide d'un changement de variable.

On pose : $X=\ln x$ avec $X \in \mathbb{R}$ et $x>0$.

L'équation (E) devient $(E'): X^3-2X^2-X+2=0$

On a : $X^3-2X^2-X+2=0 \iff (X^3-X)-2(X^2-1)=0$

$$\iff X(X^2-1)-2(X^2-1)=0$$

$$(E') \Leftrightarrow (X^2-1)(X-2)=0$$
$$\Leftrightarrow X^2-1=0 \text{ ou } X-2=0$$
$$\Leftrightarrow X=1 \text{ ou } X=-1 \text{ ou } X=2$$

d'où : $\ln x = 1$ ou $\ln x = -1$ ou $\ln x = 2$

C'est-à-dire : $x = e$ ou $\ln x = \ln(e^{-1})$ ou $\ln x = \ln(e^2)$

donc : $x = e$ ou $x = e^{-1}$ ou $x = e^2$

d'où : $S = \{e, e^2, e^{-1}\}$

5 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation (E): $\ln x - \frac{1}{\ln x} = \frac{15}{4}$

Déterminons D:

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $x \in D \Leftrightarrow (x > 0 \text{ et } \ln x \neq 0)$

$$\Leftrightarrow x > 0 \text{ et } x \neq 1$$

donc : $D =]0;1[\cup]1;+\infty[$

Soit $x \in D$, on a : $\ln(x) - \frac{1}{\ln(x)} = \frac{15}{4} \Leftrightarrow (\ln x)^2 - 1 = \frac{15}{4}\ln x$

$$\Leftrightarrow (\ln x)^2 - \frac{15}{4}\ln x - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow 4(\ln x)^2 - 15\ln x - 4 = 0$$

Posons $X = \ln x$ avec $X \in \mathbb{R}$.

L'équation (E) devient : (E'): $4X^2 - 15X - 4 = 0$

le discriminant de (E') est : $\Delta = 225 + 64 = 289$

et les solutions de cette équation sont :

$X_1 = \frac{15-17}{8} = -\frac{1}{4}$ et $X_2 = \frac{15+17}{8} = 4$

D'où : $\ln x = -\frac{1}{4} = -\frac{1}{4}\ln e = \ln(e^{-\frac{1}{4}})$ ou $\ln x = 4 = 4\ln e = \ln e^4$

C'est-à-dire : $x = e^{-\frac{1}{4}}$ ou $x = e^4$ d'où : $S = \{e^4, e^{-\frac{1}{4}}\}$.

Exercice 11

Dans cet exercice, on désigne par D l'ensemble de définition de l'inéquation à résoudre par et par S son ensemble de solutions de cette inéquation.

1 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\ln x \leq 0$

On a : $D =]0;+\infty[$

Soit $x \in D$; on a : $\ln x \leq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq \ln(1)$

$$\Leftrightarrow 0 < x \leq 1$$

d'où : $S =]0;1]$

2 **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :** $\ln(2x+3) \geq 0$

Déterminons D :

Soit x un élément de IR, on a : $x \in D \iff 2x+3>0$

$\iff x > -\frac{3}{2}$

Donc : $D = \left]-\frac{3}{2}; +\infty\right[$

Soit x un élément de D, on a :

$$\begin{aligned} \ln(2x+3) \geq 0 &\iff \ln(2x+3) \geq \ln(1) \\ &\iff 2x+3 \geq 1 \\ &\iff 2x \geq -2 \\ &\iff x \geq -1 \end{aligned}$$

Donc : $S = [-1; +\infty[$

3 **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :** $2 - \ln x \geq 0$

On a : $D =]0; +\infty[$

Soit x un élément de D, on a :

$$\begin{aligned} 2 - \ln x \geq 0 &\iff \ln x \leq 2 \\ &\iff \ln x \leq 2\ln e \\ &\iff \ln x \leq \ln(e^2) \\ &\iff 0 < x \leq e^2 \end{aligned}$$

Donc : $S =]0; e^2]$

4 **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation:** $\ln x \leq 2\ln 3$

On a : $D =]0; +\infty[$

Soit x un élément de D, on a :

$$\begin{aligned} \ln x \leq 2\ln 3 &\iff \ln x \leq \ln(3^2) \\ &\iff \ln x \leq \ln(9) \\ &\iff 0 < x \leq 9 \end{aligned}$$

Donc : $S =]0; 9]$

5 **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :** $\ln x \leq 2\ln(x+1)$

Déterminons D, on a : $x \in D \iff x > 0$ et $x+1 > 0$

$\iff x > 0$ et $x > -1$

$\iff x > 0$

Donc : $D =]0; +\infty[$

Soit x un élément de D, on a : $\ln x \leq 2\ln(x+1) \iff \ln(x) \leq \ln((x+1)^2)$

$\iff x \leq (x+1)^2$

$\iff x^2 + x + 1 \geq 0$

et comme $(\forall x \in]0;+\infty[)\ ; x^2 + x + 1 > 0$, donc : $S =]0;+\infty[$

6 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation: $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \geq 0$

▸ **Déterminons D.**

Soit x un élément de $\mathbb{R}$, on a : $x \in D \iff \frac{x+1}{x-1} > 0$ et $x \neq 1$

Dressons le tableau de signes de l'expression $\frac{x+1}{x-1}$:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x+1$	$-$		0	$+$		$+$	
$x-1$	$-$			$-$	0	$+$	
$\frac{x+1}{x-1}$	$+$		0	$-$	‖	$+$	

d'où: $x \in D \iff x \in]-\infty, -1[\cup]1; +\infty[$

Ainsi : $D =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$

Soit x un élément de D, on a: $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \geq 0 \iff \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \geq \ln(1)$

$\iff \frac{x+1}{x-1} \geq 1$

$\iff \frac{x+1}{x-1} - 1 \geq 0$

$\iff \frac{2}{x-1} \geq 0$

$\iff x - 1 > 0$

$\iff x > 1$

Donc : $S =]1;+\infty[$

7 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $(1+\ln x)(2-\ln x) \geq 0$

On a : $D =]0;+\infty[$

Soit $x \in D$,

on a : $1 + \ln x \geq 0 \iff \ln x \geq -1$

$\iff \ln x \geq -\ln e$

$\iff \ln x \geq \ln\left(\frac{1}{e}\right)$

$\iff x \geq \frac{1}{e}$

et on a:

$2 - \ln x \geq 0 \iff \ln x \leq 2$

$\iff \ln x \leq 2\ln e$

$\iff \ln x \leq \ln e^2$

$\iff 0 < x \leq e^2$

et on a : $1+\ln x \leq 0 \Leftrightarrow 0 < x \leq \frac{1}{e}$ et $2-\ln x \leq 0 \Leftrightarrow x \geq e^2$

d'où le tableau de signes de l'expression $(1+\ln x)(2-\ln x)$:

x	0		$\frac{1}{e}$		e^2		$+\infty$
$1+\ln x$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$2-\ln x$	‖	$+$		$+$	0	$-$	
$(1+\ln x)(2-\ln x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

On déduit que : $S = \left[\frac{1}{e}; e^2\right]$

8 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\frac{\ln x}{\ln x - 3} \leq 0$

Déterminons D :

- Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $x \in D \Leftrightarrow x > 0$ et $\ln x \neq 3$

$\Leftrightarrow x > 0$ et $\ln x \neq \ln(e^3)$

$\Leftrightarrow x > 0$ et $x \neq e^3$

Donc : $D =]0; e^3[\cup]e^3; +\infty[$

- Soit $x \in D$; on a : $\ln x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$

$\ln x \leq 0 \Leftrightarrow 0 < x \leq 1$

Soit $x \in D$; on a : $\ln x - 3 > 0 \Leftrightarrow \ln x > 3$

$\Leftrightarrow \ln x > \ln(e^3)$

$\Leftrightarrow x > e^3$

et on a : $\ln x - 3 < 0 \Leftrightarrow 0 < x < e^3$

d'où le tableau de signes de l'expression $\frac{\ln x}{\ln x - 3}$:

x	0		1		e^3		$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$\ln x - 3$	‖	$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{\ln x}{\ln x - 3}$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	

Donc : $S = [1; e^3[$

Exercice 12

On désigne par D l'ensemble de définition de l'inéquation et par S son ensemble de solutions.

1 **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation:** $(E): 2(\ln x)^2 - \ln x - 1 \geq 0$

- On a : $D =]0; +\infty[$

- Soit $x \in D$; posons $X = \ln x$ avec $X \in \mathbb{R}$

L'inéquation (E) devient : $2X^2 - X - 1 \geq 0$

le discriminant de l'équation (E') : $2X^2 - X - 1 = 0$ est : $\Delta = 9$ et ses solutions sont : $X_1 = \frac{1+3}{4} = 1$ et $X_2 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}$

Tableau de signe du trinôme $2X^2 - X - 1$ est le suivant :

X	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$2X^2 - X - 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

donc : $2X^2 - X - 1 \geq 0 \iff X \leq -\frac{1}{2}$ ou $X \geq 1$

d'où : $2(\ln x)^2 - \ln x - 1 \geq 0 \iff \ln x \leq -\frac{1}{2}$ ou $\ln x \geq 1$

$\iff \ln x \leq -\frac{1}{2}\ln e$ ou $\ln x \geq \ln e$

$\iff \ln x \leq \ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ ou $\ln x \geq \ln e$

$\iff 0 < x \leq \frac{1}{\sqrt{e}}$ ou $x \geq e$

Ainsi : $S = \left]0; \frac{1}{\sqrt{e}}\right] \cup [e; +\infty[$

2 **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :** $(\ln x)^2 + \ln x < 0$

on a : $(\ln x)^2 + \ln x < 0 \iff \ln x(\ln x + 1) < 0$,

et on a : $D =]0; +\infty[$

Soit : $x \in D$

$\ln x > 0 \iff x > 1$

et $\ln x = 0 \iff x = 1$

- Soit $x \in D$: $\ln x + 1 > 0 \iff \ln x > -1$

$\iff \ln x > \ln\left(\frac{1}{e}\right)$

$\iff x > \frac{1}{e}$

et $\ln x + 1 = 0 \iff x = \frac{1}{e}$

d'où le tableau de signes de l'expression $\ln x(\ln x + 1)$:

x	0		$\frac{1}{e}$		1		$+\infty$
$\ln x$		$-$		$-$	0	$+$	
$\ln x + 1$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$\ln(x)(\ln x + 1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $S = \left]\frac{1}{e}; 1\right[$

3 **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :** $(\ln x)^2 - 9 \geq 0$

- On a : $D =]0; +\infty[$

- Soit x un élément de D, on a :

$$(\ln x)^2 - 9 \geq 0 \iff (\ln x)^2 \geq 9$$
$$\iff |\ln x| \geq 3$$
$$\iff \ln x \geq 3 \text{ ou } \ln x \leq -3$$
$$\iff \ln x \geq 3\ln e \text{ ou } \ln x \leq -3\ln e$$
$$\iff \ln x \geq \ln(e^3) \text{ ou } \ln x \leq \ln(e^{-3})$$
$$\iff x \geq e^3 \text{ ou } 0 < x \leq e^{-3}$$

Donc : $S =]0; e^{-3}] \cup [e^3; +\infty[$

Infos:

$|x| \geq r \iff x \geq r$ ou $x \leq -r$ avec $r > 0$

4 **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :** $(E).\ (\ln x)^2 + 5\ln x - 6 < 0$

- On a : $D =]0; +\infty[$

posons : $X = \ln x$ avec $X \in \mathbb{R}$ et $x > 0$.

le discriminant de l'équation $X^2 + 5X - 6 = 0$ est $\Delta = 49$ et les solutions de cette équation sont : $X_1 = \dfrac{-5-7}{2} = -6$ et $X_2 = \dfrac{-5+7}{2} = 1$

d'où le tableau de signes du trinôme $X^2 + 5X - 6$:

X	$-\infty$		-6		1		$+\infty$
$X^2 - 5X - 6$		$+$	0	$-$	0	$+$	

d'où : $X^2 + 5X - 6 < 0 \iff -6 < X < 1$

donc : $(\ln x)^2 + 5\ln x - 6 < 0 \iff -6 < \ln x < 1$
$$\iff -6\ln e < \ln x < \ln e$$
$$\iff \ln(e^{-6}) < \ln x < \ln e$$
$$\iff e^{-6} < x < e$$

Donc : $S =]e^{-6}; e[$

5 **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :** $\dfrac{2\ln x - 1}{1 - \ln x} \leq 0$

- **Déterminons D :**

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $x \in D \iff x > 0$ et $1 - \ln x \neq 0$
$$\iff x > 0 \text{ et } \ln x \neq 1$$
$$\iff x > 0 \text{ et } \ln x \neq \ln e$$
$$\iff x > 0 \text{ et } x \neq e$$

Donc : $D =]0; e[\cup]e; +\infty[$

Soit x un élément de D

On a :

$$2\ln x - 1 > 0 \iff \ln x > \frac{1}{2}$$
$$\iff \ln x > \frac{1}{2}\ln e$$
$$\iff \ln x > \ln(e^{\frac{1}{2}})$$
$$\iff \ln x > \ln(\sqrt{e})$$
$$\iff x > \sqrt{e}$$

et $2\ln x - 1 = 0 \iff x = \sqrt{e}$

on a :

$$1 - \ln x > 0 \iff \ln x < 1$$
$$\iff \ln x < \ln e$$
$$\iff 0 < x < e$$

et $1 - \ln x = 0 \iff x = e$

Le tableau de signes de l'expression $\frac{2\ln x - 1}{1 - \ln x}$ est le suivant:

x	0		$\sqrt{e}$		e	$+\infty$
$2\ln x - 1$	‖	$-$	0	$+$		$+$
$1 - \ln x$	‖	$+$		$+$	0	$-$
$\frac{2\ln x - 1}{1 - \ln x}$	‖	$-$	0	$+$	‖	$-$

Donc : $S =]0;\sqrt{e}\,] \cup]e; +\infty[$

6 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation: $(E) : \ln(x^2 + 2x - 2) > 0$

- Déterminons D :

Soit x un élément de $\mathbb{R}$, on a : $x \in D \iff x^2 + 2x - 2 > 0$

le discriminant de l'équation : $x^2 + 2x - 2 = 0$ est $\Delta = 12$ et ses solutions sont :

$$x_1 = \frac{-2 - 2\sqrt{3}}{2} = -1 - \sqrt{3} \text{ et } x_2 = \frac{-2 + 2\sqrt{3}}{2} = -1 + \sqrt{3}$$

Donc le tableau de signes du trinôme $x^2 + 2x - 2$ est :

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{3}$		$-1+\sqrt{3}$	$+\infty$
$x^2 + 2x - 2$		$+$	0	$-$	0	$+$

Ainsi : $D =]-\infty ; -1-\sqrt{3}[\cup]-1+\sqrt{3}; +\infty[$

Soit x un élément de D, on a :

$$\ln(x^2 + 2x - 2) > 0 \iff \ln(x^2 + 2x - 2) > \ln(1)$$
$$\iff x^2 + 2x - 2 > 1$$
$$\iff x^2 + 2x - 3 > 0$$

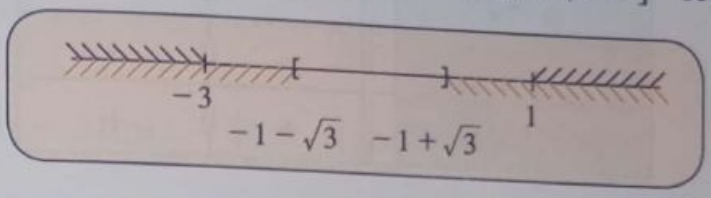
le discriminant de l'équation : $x^2 + 2x - 3 = 0$ est : $\Delta = 16$ et les solutions de

l'équation : $x^2+2x-3=0$ sont : $x_1=\frac{-2-4}{2}=-3$ et $x_2=\frac{-2+4}{2}=1$

donc le tableau de signes du trinôme x^2+2x-3 est :

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
x^2-2x-3		$+$	0	$-$	0	$+$	

D'où: $x\in S \Leftrightarrow (x\in]-\infty;-1[\cup]-1+\sqrt{3};+\infty[)\cap(x\in]-\infty;-3[\cup]1;+\infty[)$



donc : $S=]-\infty;-3[\cup]1;+\infty[$

Remarque : $x\in S \Leftrightarrow x\in D$ *et* $x\in]-\infty;-3[\cup]1;+\infty[$

$\Leftrightarrow x\in]-\infty;-3[\cup]1;+\infty[$

Exercice 13

Déterminons D l'ensemble de définition de f dans chaque cas:

1 $f(x)=\dfrac{x-5}{\ln^2 x-4\ln x+3}$

Soit $x\in\mathbb{R}$, on a : $x\in D \Leftrightarrow x>0$ *et* $\ln^2 x-4\ln(x)+3\neq 0$

et on a : $\ln^2 x-4\ln x+3 = \ln^2 x-4\ln x+4-1$

$= (\ln(x)-2)^2-1$

$= (\ln(x)-2-1)(\ln(x)-2+1)$

$= (\ln(x)-3)(\ln(x)-1)$

D'où : $\ln^2 x-\ln x+3\neq 0 \Leftrightarrow \ln x\neq 3$ *et* $\ln x\neq 1$

$\Leftrightarrow x\neq e^3$ *et* $x\neq e$

donc : $x\in D \Leftrightarrow x>0$ et $x\neq e^3$ et $x\neq e$

Ainsi : $D=]0;e[\cup]e;e^3[\cup]e^3;+\infty[$

2 $f(x)=\sqrt{3-\ln x}$

Soit $x\in\mathbb{R}$, on a : $x\in D \Leftrightarrow x>0$ et $3-\ln x\geq 0$

$\Leftrightarrow x>0$ et $\ln x\leq 3$

$\Leftrightarrow x>0$ et $\ln x\leq 3\ln e$

$\Leftrightarrow x>0$ et $\ln x\leq \ln(e^3)$

$\Leftrightarrow x>0$ et $x\leq e^3$

Donc : $D =]0 ; e^3]$

3 $f(x) = \sqrt{(x-1)\ln x}$

Soit x un élément de $\mathbb{R}$, on a : $x \in D \iff x > 0$ et $(x-1)\ln x \geq 0$

Dressons le tableau de signes de $(x-1)\ln x$:

x	0		1		$+\infty$
$x-1$	‖	$-$	0	$+$	
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$	
$(x-1)\ln x$	‖	$+$	0	$+$	

D'où : $D =]0; +\infty[$

2 Limites usuelles

en 0^+

- $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0^-$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} x^n \ln x = 0^-$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

en $+\infty$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0^+$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0^+$ $n \in \mathbb{N}^*$

en 0 : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

en 1 : $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$

Exercices

Exercice 14

Calculer les limites suivantes :

1 $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{\ln x} + x$ **2** $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x - 1 - \dfrac{\ln x}{x^3}$ **3** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{4x}$

4 $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x)^2 - \ln x + 3$ **5** $\lim\limits_{x \to +\infty} x - 2\ln x$ **6** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln(x)}{x^2 - 1}$

Exercice 15

Calculer les limites suivantes:

1 $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 + x + 1 - \ln x$ **2** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x - \ln x}{x + \ln x}$ **3** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{\ln x}$

4 $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x^2+1) - x$ **5** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^2 - 1}$ **6** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(x+1)\ln x}{x^2}$

Exercice 16

Calculer les limites suivantes, en utilisant le changement de variable donné :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{4}{x}\right)$ (poser $X=\frac{4}{x}$)
2. $\lim\limits_{x\to1} \frac{\ln(2-x^2)}{x^2-1}$ (poser $X=1-x^2$)
3. $\lim\limits_{x\to2^+} \frac{\ln(1+\sqrt{x-2})}{x-2}$ (poser $X=\sqrt{x-2}$)
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ (poser $X=\frac{x+1}{x-1}$)
5. $\lim\limits_{x\to1^+} (x^2-3x+2)\ln(x-1)$ (poser $X=x-1$)
6. $\lim\limits_{x\to e} \frac{(\ln x)^2+2\ln x-3}{x-e}$ (poser $X=\frac{x}{e}$)

Exercice 17

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{x\ln x}{\ln x-2}$
2. $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x(1-\ln x)}$ (poser: $x=t^{\frac{3}{2}}$)
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x^3}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^3}{x^2}$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+x+1)}{x}$
6. $\lim\limits_{x\to0} \frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$
7. $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(\frac{2x-1}{x+2}\right)$
8. $\lim\limits_{x\to1^+} \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$

Solutions

Exercice 14

1 **Calculons** $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{\ln x}+x\right)$:

On a : $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{\ln x}=0$ (car: $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$) et $\lim\limits_{x\to0^+} x=0$

D'où : $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{\ln x}+x\right)=0$

2 **Calculons** $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-1-\frac{\ln x}{x^3}$:

on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^3}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1)=+\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-1-\frac{\ln x}{x^3}\right)=+\infty$

3 **Calculons** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{4x}$:

On a : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{4x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\dfrac{1}{4}$ (car: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$)

4 **Calculons** $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)^2-\ln x+3$:

Soit $x\in]1;+\infty[$, on a : $(\ln x)^2-\ln x+3=\ln x\left(\ln x-1+\dfrac{3}{\ln x}\right)$

et comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln x-1+\dfrac{3}{\ln x}\right)=+\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)^2-\ln x+3=+\infty$

Autre méthode : On peut poser: $t=\ln x$, on a : $x\longrightarrow+\infty\Longrightarrow t\longrightarrow+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\ln^2 x-\ln x+3=\lim_{t\to+\infty}t^2-t+3=\lim_{t\to+\infty}t^2=+\infty$$

5 **Calculons** $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2\ln x)$:

Soit $x\in\mathbb{R}^{*+}$,ona: $x-2\ln x=x\left(1-2.\dfrac{\ln x}{x}\right)$

et comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$

Alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}x-2\ln x=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(1-2.\dfrac{\ln x}{x}\right)=+\infty$

6 **Calculons** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x^2-1}$

Soit $x\in(\mathbb{R}^{+*}-\{1\})$, on a : $\dfrac{\ln x}{x^2-1}=\dfrac{\ln x}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{\ln x}{x-1}\times\dfrac{1}{x+1}$

et comme : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}=1$ et $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{2}$; Alors : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x^2-1}=\dfrac{1}{2}$

Exercice 15

1 **Calculons** $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2+x+1-\ln x$:

Soit : $x\in]0;+\infty[$, on a : $x^2+x+1-\ln x=x^2\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\ln x}{x^2}\right)$

et comme : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}=0$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\ln x}{x^2}\right)=1$

et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2+x+1-\ln x=+\infty$

2 **Calculons** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\ln x}{x+\ln x}$:

soit $x\in]0;+\infty[$, on a : $\dfrac{x-\ln x}{x+\ln x}=\dfrac{x\left(1-\dfrac{\ln x}{x}\right)}{x\left(1+\dfrac{\ln x}{x}\right)}=\dfrac{1-\dfrac{\ln x}{x}}{1+\dfrac{\ln x}{x}}$

et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-\ln x}{x+\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{\ln x}{x}}{1+\frac{\ln x}{x}}=1$

3 **Calculons** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\ln x}$:

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=0$ et $(\forall x\in]1;+\infty[)\ ;\ \frac{\ln x}{x^2}>0$, donc: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\ln x}=+\infty$

4 **Calculons** $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x^2+1)-x$:

Soit x un élément de $]0;+\infty[$, on a :

$$\ln(x^2+1)-x=\ln\left(x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right)-x=\ln(x^2)+\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-x$$
$$=2\ln(x)-x+\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=x\left(2.\frac{\ln x}{x}-1\right)+\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

et comme : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=1$ et la fonction ln est continue en 1;

alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=\ln(1)=0$

et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(2.\frac{\ln x}{x}-1\right)=-\infty$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x^2+1)-x=-\infty$

5 **Calculons** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2-1}$:

Soit x un élément de $]1;+\infty[$, on a : $\frac{\ln x}{x^2-1}=\frac{\ln x}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{\ln x}{x^2}\times\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}}$

et comme : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}}=1$; Alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2-1}=0$

6 **Calculons** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x+1)\ln x}{x^2}$:

Soit x un élément de $]0;+\infty[$, on a :

$$\frac{(x+1)\ln x}{x^2}=\frac{x+1}{x}.\frac{\ln x}{x}=\left(\frac{x}{x}+\frac{1}{x}\right).\frac{\ln x}{x}=\left(1+\frac{1}{x}\right).\frac{\ln x}{x}$$

et comme : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x+1)\ln x}{x^2}=0$

Exercice 16

1 Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{4}{x}\right)$: à l'aide du changement de variable $X=\frac{4}{x}$

On a : $x\longrightarrow+\infty\Longrightarrow X\longrightarrow 0$ et $x=\frac{4}{X}$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{4}{x}\right)=\lim\limits_{X\to0}\frac{4}{X}\ln(1+X)=\lim\limits_{X\to0}4\times\frac{\ln(1+X)}{X}=4$

(car : $\lim\limits_{X\to0}\frac{\ln(1+X)}{X}=1$)

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{4}{x}\right)=4$

2 Calculons $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln(2-x^2)}{x^2-1}$: en posant : $X=1-x^2$

On a : $x\longrightarrow 1\Longrightarrow X\longrightarrow 0$ et : $x^2=1-X$

donc : $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln(2-x^2)}{x^2-1}=\lim\limits_{X\to0}\frac{\ln(2-(1-X))}{1-X-1}=\lim\limits_{X\to0}-\frac{\ln(1+X)}{X}$

$=-1$

D'où : $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln(2-x^2)}{x^2-1}=-1$

3 Calculons $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{\ln(1+\sqrt{x-2})}{x-2}$: en posant : $X=\sqrt{x-2}$

On a : $x\longrightarrow 2^+\Longrightarrow X\longrightarrow 0^+$ et $x-2=X^2$

donc : $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{\ln(1+\sqrt{x-2})}{x-2}=\lim\limits_{X\to0^+}\frac{\ln(1+X)}{X^2}$

$=\lim\limits_{X\to0^+}\frac{\ln(1+X)}{X}\times\frac{1}{X}$ (car $\lim\limits_{X\to0^+}\frac{\ln(1+X)}{X}=1$

$=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to0^+}\frac{1}{X}=+\infty$)

D'où : $\lim\limits_{x\to2}\frac{\ln(1+\sqrt{x-2})}{x-2}=+\infty$

4 Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$: en posant : $X=\frac{x+1}{x-1}$

On a d'une part : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}1=1$

donc: $x\longrightarrow+\infty\Longrightarrow X\longrightarrow 1$

et d'autre part : $X=\frac{x+1}{x-1}\iff x+1=X(x-1)$

$\iff x+1=Xx-X$

$\iff x-Xx=-1-X$

$\iff x(1-X)=-(1+X)$

$\iff x=\frac{X+1}{X-1}$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\lim\limits_{X\to1}\frac{X+1}{X-1}\ln(X)=\lim\limits_{X\to1}(X+1)\times\frac{\ln(X)}{X-1}$

$=2$

car : $\lim\limits_{X\to1}\frac{\ln(X)}{X-1}=1$ et $\lim\limits_{X\to1}(X+1)=2$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=2$

5 Calculons $\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2-3x+2)\ln(x-1)$: **en posant :** $X=x-1$

On a d'une part : $x\longrightarrow 1^+ \Longrightarrow X\longrightarrow 0^+$

et d'autre part : $x=X+1 \Longrightarrow x^2-3x+2 = (X+1)^2-3(X+1)+2$

$= X^2-X = X(X-1)$

donc : $\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2+3x+2)\ln(x-1) = \lim\limits_{X\to 0^+}(X-1)X\ln(X) = 0$

car : $\lim\limits_{X\to 0^+} X\ln X = 0$ et $\lim\limits_{X\to 0^+}(X-1) = -1$

D'où : $\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2+3x+2)\ln(x-1) = 0$

6 Calculons $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{(\ln x)^2+2\ln x-3}{x-e}$: en posant : $X=\dfrac{x}{e}$

On a : $x\longrightarrow e \Longrightarrow X\longrightarrow 1$ et $x=eX$

donc:

$$\frac{(\ln x)^2+2\ln x-3}{x-e} = \frac{(\ln(eX))^2+2\ln(eX)-3}{eX-e} = \frac{(\ln X+1)^2+2(1+\ln X)-3}{e(X-1)}$$

$$= \frac{(\ln X)^2+2\ln X+1+2+2\ln X-3}{e(X-1)} = \frac{(\ln X)^2+4\ln X}{e(X-1)}$$

$$= \frac{\ln X}{X-1}\times\frac{\ln X+4}{e}$$

et comme : $\lim\limits_{X\to 1}\dfrac{\ln X}{X-1}=1$ et $\lim\limits_{X\to 1}\dfrac{\ln X+4}{e}=\dfrac{4}{e}$

alors : $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{(\ln x)^2+2\ln x-3}{x-e}=\dfrac{4}{e}$

Exercice 17

1 Calculons $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x\ln x}{\ln x-2}$:

On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x-2) = -\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x\ln x}{\ln x-2}=0$

2 Calculons $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x(1-\ln x)}$:

Soit $x\in\,]0;1[$, on a : $1-\ln x>0$ et $x>0$ donc : $x(1-\ln x)>0$

donc : $\lim\limits_{x\to 0^+} x(1-\ln x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x-x\ln x = 0^+$, car $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$

D'où : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x(1-\ln x)}=+\infty$

3 Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^2}{x^3}$:

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^2}{x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^2\cdot\dfrac{1}{x}=0$ $\left(\text{car : } \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0 \text{ et } \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0\right)$

4 **Calculons** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^3}{x^2}$: en posant : $x = t^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{t})^3$

on a : $t \longrightarrow +\infty \iff x \longrightarrow +\infty$

donc : $\dfrac{(\ln x)^3}{x^2} = \dfrac{\left(\ln\left(t^{\frac{3}{2}}\right)\right)^3}{\left(t^{\frac{3}{2}}\right)^2} = \dfrac{\left(\frac{3}{2}\ln(t)\right)^3}{t^3} = \dfrac{27}{8}\left(\dfrac{\ln t}{t}\right)^3$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln t}{t} = 0$

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^3}{x^2} = \lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{27}{8}\left(\dfrac{\ln t}{t}\right)^3 = 0$

5 **Calculons** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^2+x+1)}{x}$:

Soit $x \in]0;+\infty[$, on a :

On a : $\dfrac{\ln(x^2+x+1)}{x} = \dfrac{\ln\left(x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\right)}{x} = \dfrac{\ln(x^2)+\ln\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x}$

$= \dfrac{2\ln x}{x} + \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x}$

et comme : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right) = 1$ et la fonction ln est continue en 1;

alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right) = \ln(1) = 0$, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x} = 0$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^2+x+1)}{x} = 0$

6 **Calculons** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$:

Soit $x \in]-1,0[\cup]0;1[$, on a : $\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) = \dfrac{1}{x}(\ln(1+x)-\ln(1-x))$

$= \dfrac{\ln(1+x)}{x} - \dfrac{\ln(1-x)}{x}$

$= \dfrac{\ln(1+x)}{x} + \dfrac{\ln(1+(-x)}{(-x)}$

et comme : $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+(-x))}{(-x)} = \lim\limits_{t\to0}\dfrac{\ln(1+t)}{t} = 1$ (on pose : $t = -x$)

Alors : $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) = 2$

7 **Calculons** $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(\dfrac{2x-1}{x+2}\right)$:

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-1}{x-2} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}2 = 2$

et la fonction ln est continue en 2;

Alors : $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(\dfrac{2x-1}{x-2}\right) = \ln 2$

8 Calculons $\lim\limits_{x\to 1^+}\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$:

On a : $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)=+\infty$ (car $\lim\limits_{x\to 1^+}x+2=3$ et $\lim\limits_{x\to 1^+}x-1=0$ et $x-1>0$ pour tout x de l'intervalle $]1;+\infty[$).

et comme: $\lim\limits_{X\to+\infty}\ln(X)=+\infty$; alors : $\lim\limits_{x\to 1^+}\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)=+\infty$

3 La dérivée logarithmique - la dérivée de la fonction composée $\ln(u)$

Définition:

Soit u un fonction dérivable sur un intervalle I tel que : $(\forall x\in I)\ ;\ u(x)\neq 0$

La fonction : $x\mapsto\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ est appelée la dérivée logarithmique de la fonction u sur l'intervalle I.

Propriété:

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I telle que : $(\forall x\in I);\ u(x)\neq 0$, alors la fonction : $f: x\mapsto\ln(|u(x)|)$ est dérivable sur I et on a : $(\forall x\in I);\ f'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

Exercices

Exercice 18

1 Soit f la fonction définie sur $\left[0;\frac{1}{e}\right[\cup\left]\frac{1}{e};+\infty\right[$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2\ln x}{1+\ln x} & ;\ x\in\left]0;\frac{1}{e}\right[\cup\left]\frac{1}{e};+\infty\right[\\ f(0)=0 \end{cases}$$

a. Montrer que f est continue à droite en 0.

b. Montrer que f est dérivable à droite en 0.

2 Soit g la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par : $g(x)=\sqrt{x\ln(1+x)}$

a. Étudier la dérivabilité de g à droite et à gauche en 0

b. Donner une interprétation géométrique du résultat obtenu.

Exercice 19

Étudier la dérivabilité de f sur l'intervalle I, puis calculer $f'(x)$ dans chaque cas :

1. $f(x) = x^2 - \ln x$; $I =]0; +\infty[$
2. $f(x) = \ln(2x+1)$; $I = \left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$
3. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$; $I =]0; +\infty[$
4. $f(x) = (\ln x)^4$; $I =]0; +\infty[$
5. $f(x) = \frac{1}{\ln x}$; $I =]1; +\infty[$
6. $f(x) = \sqrt{\ln x}$; $I =]1; +\infty[$

Exercice 20

Calculer la dérivée de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = x^2 \ln x$
2. $f(x) = \frac{\ln(x)+1}{x}$
3. $f(x) = \ln(x^2+x+1)$
4. $f(x) = \ln\left(\frac{2x+1}{4-x}\right)$
5. $f(x) = (x^2-x)\ln(x)$
6. $f(x) = (1-2\ln x)^3$
7. $f(x) = \frac{2x-\ln x}{\ln x - 2}$

Exercice 21

Étudier les variations de la fonction f (Ensemble de définition - limites - la fonction dérivée et le tableau de variations) dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = x^2 - \ln x$
2. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$
3. $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$
4. $f(x) = \ln(x^2-x+1)$

Exercice 22

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right); x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1. Montrer que f est une fonction paire.
2. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
3. a. Montrer que f est continue en 0.
   b. Étudier la dérivabilité de f en 0.

Exercice 23

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} \; ; \; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1 Montrer que f est continue à droite en 0.

2 Étudier la dérivabilité de f à droite en 0.

3 Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

4 Calculer $f'(x)$ pour tout x de l'intervalle $]0;+\infty[$.

Solutions

Exercice 18

1 a. Étudions la continuité de f à droite en 0.

On a : $\lim\limits_{x\to0^+} x^2\ln x = 0$ et $\lim\limits_{x\to0^+}(1+\ln x) = -\infty$

d'où : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x^2\ln x}{1+\ln x} = 0 = f(0)$

Donc f est continue à droite en 0.

b. Étudions la dérivabilité de f à droite en 0.

Soit $x \in \left]0, \dfrac{1}{e}\right[$, on a : $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{x\ln x}{1+\ln x}$

et comme : $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x = 0$ et $\lim\limits_{x\to0^+}(1+\ln x) = -\infty$

alors : $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$

Donc f est dérivable à droite en 0 et : $f'_d(0) = 0$

2 a. Étudions la dérivabilité de g à droite en $x_0 = 0$.

On a : $g(0) = 0$

Soit : $x \in]0;+\infty[$, on a :

$$\frac{g(x)-g(0)}{x} = \frac{\sqrt{x\ln(1+x)}}{x} = \sqrt{\frac{x\ln(1+x)}{x^2}} = \sqrt{\frac{\ln(1+x)}{x}}$$

et comme $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ et la fonction racine carrée est continue en 1,

alors : $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = \sqrt{1} = 1$

donc g est dérivable à droite en $x_0 = 0$ et on a : $g'_d(0) = 1$.

Étudions la dérivabilité de f à gauche en 0.

Soit $x \in]-1\,;\,0[$, on a: $\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = \dfrac{\sqrt{x\ln(1+x)}}{x}$

$$= -\sqrt{\frac{x\ln(1+x)}{x^2}} = -\sqrt{\frac{\ln(1+x)}{x}}$$

et puisque : $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$, alors : $\lim\limits_{x\to 0^-}\sqrt{\dfrac{\ln(1+x)}{x}}=1$

donc : $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(-\sqrt{\dfrac{\ln(1+x)}{x}}\right)=-1$

d'où g est dérivable à gauche en 0, et on a : $g'_g(0)=-1$

Ainsi g est non dérivable en 0 , car: $g'_g(0)\neq g'_d(0)$

infos:

$\begin{cases} y=f'_d(x_0)(x-x_0)+f(x_0) \\ x\geq 0 \end{cases}$

équation de la demi-tangente au point: $M_0(x_0\,;f(x_0))$ à droite.

b. L'interprétation géométrique :

La courbe de la fonction g admet deux demi-tangentes (T_1) et (T_2) au point O de coefficients directeurs respectifs 1 et -1, et ayant pour équations:

$(T_1):\begin{cases} y=x \\ x\geq 0 \end{cases}$; $(T_2)\begin{cases} y=-x \\ x\leq 0 \end{cases}$

Exercice 19

Étudions la dérivabilité de f sur I, puis calculons $f'(x)$.

1 $f(x)=x^2-\ln(x)\,;\ I=]0;+\infty[$

▸ La fonction $x\longmapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme) en particulier sur l'intervalle $I=]0;+\infty[$.

▸ La fonction $x\longmapsto -\ln x$ est dérivable sur $I=]0;+\infty[$,

donc f est dérivable sur l'intervalle $I=]0;+\infty[$ et on a :

$f'(x)=2x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x^2-1}{x}$ pour tout $x\in I$.

infos:

$(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$

$(\ln|u|)'=\dfrac{u'}{u}$

2 $f(x)=\ln(2x+1)\,;\ I=\left]-\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$

On a : $x\longmapsto 2x+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction affine) en particulier sur l'intervalle $I=\left]-\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

et on a : $\left(\forall x\in\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[\right);\ 2x+1>0$

donc la fonction $x\mapsto\ln(2x+1)$ est dérivable sur $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$

c'est-à-dire la fonction f est dérivable sur $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$.

et on a : $f'(x)=\dfrac{(2x+1)'}{2x+1}=\dfrac{2}{2x+1}$ pour tout $x\in I$ ..

3 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}\,;\ I=]0\,;+\infty[$

On a : f est dérivable sur I car c'est le quotient de deux fonctions dérivables sur I : ($x\longmapsto\ln x$ et $x\longmapsto x$).

et on a : $(\forall x \in I) ; f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x)}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$

4 $f(x) = (\ln x)^4 ; I =]0; +\infty[$

infos: $(u^n)' = nu'u^{n-1}$

f est une fonction dérivable sur $I =]1; +\infty[$ car la fonction $x \mapsto \ln x$ est dérivable sur I : $(\forall x \in I) ; f'(x) = 4(\ln x)'(\ln x)^3 = \frac{4}{x}.(\ln x)^3$

5 $f(x) = \frac{1}{\ln x} ; I =]1; +\infty[$

La fonction ln est dérivable sur $]0; +\infty[$, en particulier sur l'intervalle $I =]1; +\infty[$:

et $(\forall x \in] ; 1, +\infty[) ; \ln x \neq 0$

donc la fonction f est dérivable sur I (car c'est l'inverse d'une fonction dérivable non nulle).

et on a : $f'(x) = -\frac{(\ln x)'}{(\ln x)^2} = -\frac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = -\frac{1}{x(\ln x)^2}$ pour tout $x \in I$.

6 $f(x) = \sqrt{\ln x} ; I =]1; +\infty[$

La fonction ln est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ en particulier sur I ;

et comme : $(\forall x \in]1; +\infty[) ; \ln x > 0$ alors la fonction f est dérivable sur $]1; +\infty[$, et on a : $(\forall x \in]1; +\infty[) ; f'(x) = \frac{(\ln x)'}{2\sqrt{\ln x}} = \frac{\frac{1}{x}}{2\sqrt{\ln x}} = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$

Donc : $f'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$ pour tout $x \in I$.

Exercice 20

Calculons $f'(x)$ dans chaque cas:

1 $f(x) = x^2 \ln x$

On a : $D_f =]0; +\infty[$, et $f'(x) = 2x \ln x + x^2 \times \frac{1}{x} = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1)$

Donc : $f'(x) = x(2 \ln(x) + 1)$ pour tout x de $]0; +\infty[$.

2 $f(x) = \frac{\ln(x) + 1}{x}$

On a : $D_f =]0; +\infty[$ et $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - (\ln x + 1)}{x^2} = \frac{1 - \ln x - 1}{x^2} = -\frac{\ln x}{x^2}$

Donc : $f'(x) = -\frac{\ln x}{x^2}$ pour tout x de $]0; +\infty[$.

3 $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$

On a : $D_f = \mathbb{R}$ et $f'(x) = \frac{(x^2 + x + 1)'}{x^2 + x + 1} = \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}$ Donc : $f'(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}$

4 $f(x)=\ln\left(\frac{2x+1}{4-x}\right)$

On a : $D_f=\left]-\frac{1}{2};4\right[$

et $f'(x)=\frac{\left(\frac{2x+1}{4-x}\right)'}{\frac{2x+1}{4-x}}=\frac{\frac{9}{(4-x)^2}}{\frac{2x+1}{4-x}}=\frac{9}{(4-x)^2}\times\frac{4-x}{2x+1}=\frac{9}{(4-x)(1+2x)}$

Donc : $f'(x)=\frac{9}{(4-x)(2x+1)}$ pour tout x de $\left]\frac{-1}{2};+4\right[$.

5 $f(x)=(x^2-x)\ln x$

on a : $D_f=]0:+\infty[$

et : $f'(x)=(2x-1)\ln x+(x^2-x)\times\frac{1}{x}=(2x-1)\ln x+x(x-1)\times\frac{1}{x}$

$=(2x-1)\ln(x)+x-1$

Donc : $(\forall x\in D_f)\ ;f'(x)=(2x-1)\ln(x)+x-1$

6 $f(x)=(1-2\ln x)^3$

On a : $D_f=]0;+\infty[$,

et $f'(x)=3(1-2\ln x)'(1-2\ln x)^2=3\left(-\frac{2}{x}\right)(1-2\ln x)^2$

Donc : $(\forall x\in]0;+\infty[)\ ;\ f'(x)=-\frac{6}{x}(1-2\ln x)^2$

7 $f(x)=\frac{2x-\ln x}{\ln x-2}$

On a : $D_f=]0;e^2[\cup]e^2;+\infty[$, et

$f'(x)=\frac{\left(2-\frac{1}{x}\right)(\ln x-2)-(2x-\ln x)\times\frac{1}{x}}{(\ln x-2)^2}=\frac{2\ln x-4-\frac{\ln x}{x}+\frac{2}{x}-2+\frac{\ln x}{x}}{(\ln x-2)^2}$

$=\frac{2\ln x+\frac{2}{x}-6}{(\ln x-2)^2}=\frac{2x\ln x-6x+2}{x(\ln x-2)^2}$

Donc : $(\forall x\in D_f)\ ;f'(x)=\frac{2(x\ln x-3x+1)}{x(\ln x-2)^2}$

Exercice 21

Étudions les variations de f dans chaque cas :

1 $f(x)=x^2-\ln x$

- déterminons l'ensemble de définition D :

Soit x un élément de $\mathbb{R}$, on a : $x\in D\iff x>0$

donc : $D=]0;+\infty[$

- **Calculons les limites de f aux bornes de D:**

On a : $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$, donc: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^2 - \ln x = +\infty$

Soit $x > 0$, on a : $f(x) = x^2 - \ln x = x^2\left(1 - \dfrac{\ln x}{x^2}\right)$ et puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2} = 0$

C'est-à-dire: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \dfrac{\ln x}{x^2}\right) = 1$ et comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$,

alors: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(1 - \dfrac{\ln x}{x^2}\right) = +\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

- **Calcul de la fonction dérivée :**

f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on a :

$$(\forall x \in]0;+\infty[)\ ; f'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x}$$

- **Tableau de variations.**

On a le signe de $f'(x)$ est celui de $2x^2 - 1$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$,

Soit $x > 0$, on a : $f'(x) > 0 \iff 2x^2 - 1 > 0$

$$\iff x^2 > \frac{1}{2}$$

$$\iff x > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

et $f'(x) = 0 \iff x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

d'où le tableau de variations de f est le suivant:

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	$\frac{1+\ln 2}{2}$	↗	$+\infty$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} + \ln(\sqrt{2}) = \frac{1+\ln 2}{2}$$

2 $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

- **Déterminons l'ensemble de définition D:**

Soit x un élément de $\mathbb{R}$, on a : $x \in D \iff (x > 0 \text{ et } x \neq 0)$

$$\iff x > 0$$

$$\iff x \in]0;+\infty[$$

Donc : $D =]0; +\infty[$

- Calculons les limites de f aux bornes de D :

On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0^+$ donc: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

On a : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

- Calcul de la fonction dérivée:

f est dérivable sur $]0; +\infty[$;

On a : $(\forall x > 0) f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$

- Tableau de variations :

On a le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - \ln x$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Donc : $f'(x) \geq 0 \iff 1 - \ln x \geq 0$ et $1 - \ln x = 0 \iff x = e$

$\iff \ln x \leq \ln e$

$\iff 0 < x \leq e$

D'où le tableau de variations de f est le suivant :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ $-\infty$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

3 $f'(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$

- Déterminons l'ensemble de définition D.

Soit x un élément de $\mathbb{R}$, on a : $x \in D \iff \dfrac{x+1}{x} > 0$ et $x \neq 0$

Dressons le tableau de signe de $\dfrac{x+1}{x}$:

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$x+1$	$-$		0	$+$		$+$	
x	$-$			$-$	0	$+$	
$\dfrac{x+1}{x}$	$+$		0	$-$	‖	$+$	

d'où : $x \in D \iff x \in]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$

Donc : $D =]-\infty ; -1[\cup]0; +\infty[$

Calculons les limites aux bornes de D :

▸ au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$.

On a : $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{x+1}{x}=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{x}{x}=\lim\limits_{|x|\to+\infty}1=1$ et la fonction ln continue au point 1;

Donc : $\lim\limits_{|x|\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)=\ln(1)=0$

▸ à gauche en -1:

On a : $\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{x+1}{x}=0$ et $(\forall x\in]-\infty,-1[)\,;\dfrac{x+1}{x}>0$ et $\lim\limits_{X\to0^+}\ln X=-\infty$;

Alors : $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)=-\infty$

▸ à droite en 0:

on a : $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x+1}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\ln X=+\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)=+\infty$

- **Calculons** $f'(x)$:

Pour tout x de $]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$, on a :

$$f'(x)=\frac{\left(\dfrac{x+1}{x}\right)'}{\dfrac{x+1}{x}}=\frac{\dfrac{-1}{x^2}}{\dfrac{x+1}{x}}=\frac{-1}{x^2}\times\frac{x}{x+1}=\frac{-1}{x(x+1)}$$

- **Tableau de variations de** f :

On a : $(\forall x\in]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[)\,;f'(x)<0$,d'où le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$				$-$	
f	1	↘	$-\infty$	|	$+\infty$	↘	1

4 $f(x)=\ln(x^2-x+1)$

- **Déterminons l'ensemble de définition** D:

Soit x un élément de $\mathbb{R}$, on a : $x\in D\Leftrightarrow x^2-x+1>0$

le discriminant du trinôme x^2-x+1 est : $\Delta=-3$

on a : $\Delta<0$ et $(a>0)a=1$, alors : $(\forall x\in\mathbb{R}):x^2-x+1>0$

Donc : $D=\mathbb{R}=]-\infty\,;+\infty[$

- **Calculons les limites aux bornes de** D.

on a : $\lim\limits_{|x|\to+\infty} x^2-x+1=\lim\limits_{|x|\to+\infty} x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\ln(X)=+\infty$

Donc : $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\ln(x^2-x+1)=+\infty$

- Calculons $f'(x)$:

On a : la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car la fonction $x\longmapsto x^2-x+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\forall x\in IR)\,;\,x^2-x+1>0$.

et on a : $f'(x)=\dfrac{(x^2-x+1)'}{x^2-x+1}=\dfrac{2x-1}{x^2-x+1}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

- Tableau de variations de f :

on a : $(\forall x\in\mathbb{R})\,;\,x^2-x+1>0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $2x-1$.

D'où le tableau de variations de f est comme suite:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↘	$\ln\left(\frac{3}{4}\right)$	↗	$+\infty$

Exercice 22

$$\begin{cases} f(x)=x\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right);\ x\neq 0\\ f(0)=0\end{cases}$$

1 Montrons que f est une fonction impaire.

- On a : $D=\mathbb{R}$ alors : $(\forall x\in\mathbb{R})\,;-x\in\mathbb{R}$

- Soit $x\in\mathbb{R}^*$, on a : $f(-x)=-x\ln\left(1+\dfrac{1}{(-x)^2}\right)=-x\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)=-f(x)$

et $f(0)=0$.

donc : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ f(-x)=-f(x)$

D'où f est une fonction impaire.

2 Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

Soit $x\in\,]0;+\infty[$, on a : $f(x)=x\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)=\dfrac{1}{x}\times x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$

$$=\frac{1}{x}\times\frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}{\dfrac{1}{x^2}}$$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{X\to0^+}\dfrac{\ln(1+X)}{X}=1$ (on pose $X=\frac{1}{x^2}$)

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

3 a. Montrons que f est continue en 0.

Soit $x\in\mathbb{R}^*$, on a : $f(x)=x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=x\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)$

$=x\ln(x^2+1)-x\ln(x^2)$

$=x\ln(x^2+1)-2x\ln(|x|)$

- à droite en 0 : on a, $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}x\ln(x^2+1)-2x\ln x=0=f(0)$

car : $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=0$ et $\lim\limits_{x\to0}x\ln(x^2+1)=0$

Donc f est continue à droite en 0.

- à gauche en 0: on a : $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}x^2\ln(x^2+1)-2x\ln(-x)$

$=\lim\limits_{t\to0^+}t^2\ln(t^2+1)+2t\ln(t)=0=f(0)$

(on pose : $t=-x$, on a : $x\longrightarrow0^-\iff t\longrightarrow0^+$)

donc f est continue à gauche en 0.

Remarque: on peut étudier la continuité de f à gauche en 0, sachant que f est impaire, en effet on a :

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}-f(-x)$

$=\lim\limits_{t\to+0^+}-f(t)$ (on pose : $t=-x$)

$=0=f(0)$

Conclusion : f est continue en 0.

b. Étudions la dérivabilité de f en 0.

Soit $x\in\mathbb{R}^*$, on a : $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$

et comme : $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\ln(X)=+\infty$

alors : $\lim\limits_{x\to0}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=+\infty$ c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=+\infty$

f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 23

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} ; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1 Montrons que f est continue à droite en 0.

Soit $x \in]0; +\infty[$, on a : $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} = \dfrac{\ln(1+x)}{x} \times \dfrac{x}{\sqrt{x}}$

$$= \frac{\ln(1+x)}{x} \times \sqrt{x}$$

et comme $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$

alors : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$

Donc f est continue à droite en 0.

2 Étudions la dérivabilité de f à droite en 0.

Soit $x \in]0; +\infty[$, on a : $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{\dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}}{x}$

$$= \frac{\ln(1+x)}{x\sqrt{x}} = \frac{\ln(1+x)}{x} \times \frac{1}{\sqrt{x}}$$

et comme : $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

alors : $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = +\infty$

Donc f n'est pas dérivable à droite en 0.

3 Montrons que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Soit $x \in]0; +\infty[$, on a : $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} = \dfrac{\ln\left(x(1+\frac{1}{x})\right)}{\sqrt{x}}$

$$= \frac{\ln x}{\sqrt{x}} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}} = \frac{2\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}}$$

et comme : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\ln t}{t} = 0$ (on pose : $t = \sqrt{x}$)

Alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

4 Calculons $f'(x)$ pour $x \in]0; +\infty[$:

f est dérivable sur $]0; +\infty[$, et on a : $f'(x) = \dfrac{\dfrac{1}{1+x} \cdot \sqrt{x} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \ln(1+x)}{x}$

Donc : $(\forall x \in]0;+\infty[)\ ; f'(x) = \dfrac{2x-(1+x)\ln(1+x)}{2x\sqrt{x}\,(1+x)}$

4 Fonctions logarithmes de base a avec $a \in \mathbb{R}^{*+} - \{1\}$

Définition:

Soit $a \in \mathbb{R}^{*+} - \{1\}$.

La fonction numérique définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{\ln a}$ est appelée la fonction logarithme de base a, et on la note $\log_a$.

Conséquances:

- $\log_a(1) = 0$;
- $D_{\log_a} =]0;+\infty[$;
- $\log_a(a) = 1$;
- $\log_a(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a}$

Propriétés:

Pour tout x et y de $]0;+\infty[$ et pour tout élément r de $\mathbb{Q}$ on a :

- $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$
- $\log_a\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$
- $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$
- $\log_a(x^r) = r\log_a(x)$

Logarithme de base 10:

- $(\forall x \in]0;+\infty[)\ \log(x) = \dfrac{\ln x}{\ln(10)}$
- $\log(10) = 1$
- $\log(10^r) = r$ pour tout r élément de $\mathbb{Q}$

Exercices

Exercice 24

1 Simplifier les nombres $a = \log_2 4$; $b = \log_{\frac{1}{2}}(2)$ et $c = \log_8 64$

2 Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation : $(\log_3 x).(\log_{27} x) = \dfrac{1}{3}$

Exercice 25

1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a. $\log(x+2) + \log x = 1$

b. $\log_{\sqrt{2}}(x-1) - \log_{\sqrt{2}}(2x+1) = \log_{\sqrt{2}}\left(\dfrac{1}{3}\right)$

c. $\log_3(2-x) + \log_9(x+3) = \log_3(\sqrt{2-x})$

2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\log_a x = \log_x a$; avec $a \in \mathbb{R}^{*+} - \{1\}$

3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(\log_3 x)^2 + 4\log_3 x = 5$

4 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a. $\log_5(x+3) < \log_5(2x)$

b. $\log_{0,5}(3x-1) > \log_{0,5}(x+1)$

Exercice 26

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

(E): $\begin{cases} x + y = 1 \\ \log x - \log y = -1 \end{cases}$ (F): $\begin{cases} 3\log x - \log y = -2 \\ \log(xy) = 6 \end{cases}$

Solutions

Exercice 24

1 Simplifions a, b et c

On a:

$a = \log_2 4$
$= \log_2 2^2$
$= 2\log_2(2)$
$= 2$

$b = \log_{\frac{1}{2}}(2)$
$= \dfrac{\ln 2}{\ln \frac{1}{2}}$
$= -\dfrac{\ln 2}{\ln 2}$
$= -1$
$b = -\log_{\frac{1}{2}}(2) = -1$

$c = \log_8 64$
$= \log_8 8^2$
$= 2\log_8 8$
$= 2$

infos:
On a :
aussi $\log_a(a) = 1$ et toutes les propriétés de la fonction ln restent valables pour la fonction $\log_a$.

2 Déterminons les solution de l'équation : (E) $\log_3 x . \log_{27} x = \frac{1}{3}$

L'ensemble de définition de l'équation est $]0; +\infty[$;

Soit x de $]0; +\infty[$, on a :

$(E) \iff \dfrac{\ln x}{\ln 3} \times \dfrac{\ln x}{\ln 27} = \dfrac{1}{3}$

$\iff (\ln x)^2 = \dfrac{1}{3}\ln 3 \ln 3^3 = (\ln 3)^2$

$\iff \ln x = \ln 3$ ou $\ln x = -\ln 3$

$\iff \ln x = \ln 3$ ou $\ln x = \ln \dfrac{1}{3}$

$\iff x = 3$ ou $x = \dfrac{1}{3}$

Les solutions de l'équation (E) sont 3 et $\frac{1}{3}$ donc : $S = \left\{\frac{1}{3}; 3\right\}$

infos:
$\ln x = y \iff x = e^y$
$\log x = y \iff x = 10^x$
$\log_a x = y \iff x = a^y$
avec : $a > 0$ et $a \neq 1$

Exercice 25

1 a. **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation :** (E_1): $\log(x+2)+\log x=1$

Soit D l'ensemble de définition de l'équation (E_1).

On a : $x\in D \iff (x\in\mathbb{R}$ et $x+2>0$ et $x>0)$

$\iff (x\in\mathbb{R}$ et $x>-2$ et $x>0)$

$\iff x>0$

donc : $D=]0;+\infty]$

Soit x un élément de D on a :

$\log(x+2)+\log x=1 \iff \log(x(x+2))=1$

$\iff \log(x(x+2))=\log 10$

$\iff x(x+2)=10$

$\iff x^2+2x-10=0$

et puisque le discriminant de l'équation $x^2+2x-10=0$ est $\Delta=44$

alors les solutions de l'équation $x^2+2x-10=0$ sont : $-1+\sqrt{11}$ et $-1-\sqrt{11}$

et puisque : $-1+\sqrt{11}>0$ et $-1-\sqrt{11}<0$

alors l'ensemble de solutions de l'équation (E_1) est : $S=\{-1+\sqrt{11}\}$

b. **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation :** (E_2): $\log_{\sqrt{2}}(x-1)-\log_{\sqrt{2}}(2x+1)=\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{3}\right)$

Soit D l'ensemble de définition de l'équation (E_2), on a :

$x\in D \iff (x\in\mathbb{R}$ et $x-1>0$ et $2x+1>0)$

$\iff (x\in\mathbb{R}$ et $x>1$ et $x>-\frac{1}{2})$

$\iff x>1$

D'où : $D=]1;+\infty[$

Soit x un élément de D, on a :

L'équation $(E_2) \iff \log_{\sqrt{2}}\left(\frac{x-1}{2x+1}\right)=\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{3}\right)$

$\iff \frac{x-1}{2x+1}=\frac{1}{3}$

$\iff 3x-3=2x+1$

$\iff x=4$

et puisque : $4\in D$ alors : $S=\{4\}$

c. **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation :** $(E_3): \log_3(2-x)+\log_9(x+3)=\log_3(\sqrt{2-x})$

Soit D l'ensemble de définition de l'équation (E_3), on a :

$$x \in D \iff (x \in \mathbb{R} \text{ et } 2-x>0 \text{ et } x+3>0)$$
$$\iff (x \in \mathbb{R} \text{ et } x<2 \text{ et } x>-3)$$
$$\iff x \in]-3;2[$$

d'où : $D=]-3;2[$

Soit x un élément de D, on a : $\log_3(2-x)=\dfrac{\ln(2-x)}{\ln 3}$

et $\log_9(x+3)=\dfrac{\ln(x+3)}{\ln 9}=\dfrac{\ln(x+3)}{2\ln 3}$

et $\log_3(\sqrt{2-x})=\dfrac{\ln(\sqrt{2-x})}{\ln 3}=\dfrac{\ln(2-x)}{2\ln 3}$

donc : $(E_3) \iff \dfrac{\ln(2-x)}{\ln 3}+\dfrac{\ln(x+3)}{2\ln 3}=\dfrac{\ln(2-x)}{2\ln 3}$

$$\iff 2\ln(2-x)+\ln(x+3)=\ln(2-x)$$
$$\iff \ln(2-x)+\ln(x+3)=0$$
$$\iff \ln((2-x)(x+3))=\ln(1)$$
$$\iff (2-x)(x+3)=1$$
$$\iff x^2+x-5=0$$

et comme les solutions de l'équation $x^2+x-5=0$ sont :

$\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}$ et $\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}$ et on a : $-3<\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}<2$ et $-3<\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}<2$

Alors l'ensemble de solutions de l'équation (E_3) est: $S=\left\{\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2};\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}\right\}$

2 **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation :** $(E_4): \log_a x=\log_x a$

L'équation (E_4) est définie sur $D=\mathbb{R}_+^*-\{1\}$.

Soit x un élément de D, on a : $\log_a x=\log_x a \iff \dfrac{\ln x}{\ln a}=\dfrac{\ln a}{\ln x}$

$$\iff (\ln x)^2=(\ln a)^2$$
$$\iff \ln x=\ln a \text{ ou } \ln x=-\ln a$$
$$\iff x=a \text{ ou } x=\frac{1}{a}$$

et puisque : $a \in D$ et $\dfrac{1}{a} \in D$, alors : $S=\left\{a;\dfrac{1}{a}\right\}$

3 **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation :** (E_5): $(\log_3 x)^2 + 4\log_3 x = 5$

L'équation (E_5) est définie sur $D =]0; +\infty[$

Soit x un élément de $]0; +\infty[$, on pose : $X = \log_3 x$

L'équation (E_5) devient : $X^2 + 4X = 5$ c'est-à-dire : $X^2 + 4X - 5 = 0$

on a : $X^2 + 4X - 5 = 0 \iff X = 1$ ou $X = -5$

et on a : $\log_3 x = 1 \iff \log_3 x = \log_3 3$

$\iff x = 3$

$\log_3 x = -5 \iff \log_3 x = \log_3 3^{-5}$

$\iff x = 3^{-5} = \frac{1}{243}$

Donc : $S = \left\{3; \frac{1}{243}\right\}$

4 a. **Résolvons dans $\mathbb{R}$ L'inéquation :** (S_1): $\log_5(x+3) < \log_5(2x)$

L'inéquation (S_1) est définie si et seulement si $x + 3 > 0$ et $2x > 0$;

c'est-à-dire : $x > -3$ et $x > 0$.

d'où : $x > 0$, donc $D =]0; +\infty[$.

or la fonction $\log_5$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

donc : $\log_5(x+3) < \log_5(2x) \iff (x > 0$ et $x + 3 < 2x)$

$\iff x > 0$ et $3 < x$

$\iff x \in]3; +\infty[$

infos:

- $\log_a$ est strictement croissante si $a > 1$
- $\log_a$ est strictement décroissante si $0 < a < 1$

donc l'ensemble de solutions de l'inéquation (S_1) est : $S =]3; +\infty[$

b. **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :** (S_2) : $\log_{0,5}(3x-1) > \log_{0,5}(x+1)$

L'inéquation (S_2) est définie sur $\left]\frac{1}{3}; +\infty\right[$

et puisque la fonction $\log_{0,5}$ est strictement décroissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$; alors $(S_2) \iff x > \frac{1}{3}$ et $3x - 1 < x + 1$

$\iff x < 1$ et $x > \frac{1}{3}$

$\iff x \in \left]\frac{1}{3}; 1\right[$

D'où l'ensemble de solutions de l'inéquation (S_2) est : $\left]\frac{1}{3}; 1\right[$

Exercice 26

Résolvons dans $\mathbb{R}^2$ le système (E) :

les conditions d'existence du système (E) est : $x > 0$ et $y > 0$

on a : $(E) \iff \begin{cases} x + y = 1 \\ \log\left(\frac{x}{y}\right) = -1 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x + y = 1 \\ \frac{x}{y} = 10^{-1} \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x + y = 1 \\ y = 10x \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = \frac{1}{11} \\ y = \frac{10}{11} \end{cases}$

et comme : $\frac{1}{11} > 0$ et $\frac{10}{11} > 0$ alors la solution du système (E) est le couple $\left(\frac{1}{11};\frac{10}{11}\right)$

Donc : $S = \left\{\left(\frac{1}{11};\frac{10}{11}\right)\right\}$

Résolvons dans $\mathbb{R}^2$ le système (F):

les conditions d'existence du système (F) est: $x > 0$ et $y > 0$.

$\iff \begin{cases} 4\log x = 4 & (1)+(2) \\ \log y = 6 - \log x & (2) \end{cases}$

$(F) \iff \begin{cases} 3\log x - \log y = -2 & (1) \\ \log x + \log y = 6 & (2) \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = 10 \\ y = 10^5 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = 10^1 \\ \log y = 6 - 1 \end{cases}$

et puisque $10 > 0$ et $10^5 > 0$ alors la solution du système (F) est le couple $(10;10^5)$.

Finalement : $S = \left\{\left(\frac{1}{11};\frac{10}{11}\right)\right\}$

Exercices

Exercice 27

Calculer les limites suivantes :

1 $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x+2}{x^2\ln(x)}$

2 $\lim\limits_{x\to 0^+} 2x\ln(x+\sqrt{x})$

3 $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3-2x^2+3}{x\ln(x)}$

4 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+3x)}{2x}$

5 $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2}{x+1}\ln\left(\dfrac{x^3+8}{1-x^2}\right)$

6 $\lim\limits_{x\to 2^+} (x-2)^2\ln(x^3-8)$

7 $\lim\limits_{x\to -1^+} (x^2-1)\ln(7x^3+4x^2+3)$

8 $\lim\limits_{x\to +\infty} x\ln(x)-x\ln(x+2)$

9 $\lim\limits_{x\to 1^+} (x-1)\ln(\ln x)$

Exercice 28

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x+\ln(1+x^2)$.

Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1 Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

2 a. Vérifier que : $f(x)=x+2\ln|x|+\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$

b. Montrer que : $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-\infty$

3 Étudier les branches infinies de la courbe (C).

Exercice 29

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=x-1-\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

1 Calculer : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

2 Étudier les branches infinies de (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

3 Étudier la position relative de la courbe (C) avec la droite (D) d'équation $y=x-1$.

Exercice 30

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

1. Montrer que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.
2. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et monter que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.
3. a. Montrer que f est une fonction impaire.
   b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = -\frac{1}{2}\ln(3 - 2\sqrt{2})$
   c. Montrer que pour tout r appartenant à $\mathbb{Q}$ on a : $f\left(\frac{e^r - e^{-r}}{2}\right) = r$

Exercice 31

Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = x^2 - 2 + \ln(x)$

1. a. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.
   b. Montrer que : $f(]0; +\infty[) = \mathbb{R}$.
2. a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
   b. Montrer que : $1,3 < \alpha < 1,35$.
3. Déterminer le signe de $f(x)$ pour tout x de l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

Exercice 32

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \ln|x^2 - 2x - 3|$

1. a. Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction f.
   b. Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$
2. Soit (C) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.
   a. Montrer que la droite (Δ) d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de la courbe (C).
   b. Étudier les branches infinies de la courbe (C).

Exercice 33

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = 3\ln(x) + 1 - x^3$

Soit (C) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. a. Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
   b. Étudier les branches infinies de la courbe (C).

2 a. Calculer $f'(x)$ pour tout élément x de $]0;+\infty[$; puis donner le tableau de variations de f.

b. Construire la courbe (C).

3 Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0;1]$ par : $g(x)=f(x)$

a. Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

b. Construire dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, la courbe (Cg^{-1}) de la fonction g^{-1}.

Exercice 34

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=(2-\ln x)\ln x$

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 a. Calculer : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b. Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^2}{x}=0$

c. Étudier les branches infinies de la courbe (C).

2 a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x)=0$

b. Étudier le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

3 a. Montrer que $(\forall x\in]0;+\infty[)\,;\,f'(x)=\dfrac{2}{x}(1-\ln x)$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0;+\infty[$, puis dresser le tableau de variations de f.

4 a. Montrer que : $(\forall x\in]0;+\infty[)\,;\,f''(x)=\dfrac{2}{x^2}(\ln(x)-2)$

b. Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion A dont on déterminera les coordonnées;

c. Écrire l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point A.

5 Construire (T) et (C) dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Exercice 35

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x-\ln(1+x^2)$

1 a. Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

b. Montrer que : $f'(x)=\dfrac{(x-1)^2}{1+x^2}$ pour tout x de $\mathbb{R}$;

c. Donner le tableau de variations de f.

2 a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = x$

b. Montrer que : $f([0;1]) \subset [0;1]$

3 On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

a. Montrer par récurrence que : $0 \leq u_n \leq 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

b. Montrer que la suite (u_n) est décroissante;

c. En dédruire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 36

I Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par: $g(x) = x^2 - x - \ln(x)$

1 Montrer que : $g'(x) = \dfrac{(2x+1)(x-1)}{x}$ pour tout x de $]0;+\infty[$

2 Donner le tableau de variations de g.

3 En déduire que $g(x) \geq 0$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

II Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = x^2 - 1 - (\ln x)^2$ et soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1 a. Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, puis interpréter géométriquement ce résultat.

b. Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$

c. En déduire la nature de la branche infinie de (C) au voisinage de $+\infty$.

2 a. Montrer que : $f'(x) = 2\left(\dfrac{x^2 - \ln x}{x}\right)$ pour tout x de $]0;+\infty[$

b. Vérifier que $g(x) + x = x^2 - \ln x$ pour tout x de $]0;+\infty[$, puis donner le tableau de variations de f.

3 a. Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point $A(1;0)$

b. Construire dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, la tangente (T) et la courbe (C) (On admet que (C) admet un seul point d'inflexion A).

Exercice 37

I Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = 1 - x^2 - \ln x$

1 Montrer que g est strictement décroissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

2 En déduire que : $(\forall x \in]0;1])$; $g(x) \geq 0$ et $(\forall x \in]1;+\infty[)$; $g(x) < 0$

II Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = -x + \dfrac{\ln x}{x}$

Soit (C) la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1 a. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, puis donner une interprétation graphique à ce résultat;

b. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et montrer que la courbe (C) admet une asymptote oblique (Δ) d'équation $y = -x$ au voisinage de $+\infty$;

c. Étudier la position relative de la courbe (C) et la droite (Δ).

2 a. Montrer que $(\forall x \in]0;+\infty[)$; $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$

b. Dresser le tableau de variations de f.

3 a. Montrer que : $(\forall x \in]0;+\infty[)$; $f''(x) = \dfrac{2\ln(x) - 3}{x^3}$

b. Montrer que (C) admet un point d'inflexion que l'on déterminera.

4 Tracer la courbe (C) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

Exercice 38

I Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = \dfrac{2}{x} - 1 + \ln(x)$

1 Montrer que : $(\forall x \in]0;+\infty[)$; $g'(x) = \dfrac{x-2}{x^2}$

2 Dresser le tableau de variations de la fonction g.

3 Montrer que : $(\forall x \in]0;+\infty[)\,; g(x) > 0$

II On considère la fonction f définie sur $D = [0;1[\cup]1;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x-2}{\ln(x)} & ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1 a. Montrer que f est continue à droite en zéro.

b. Étudier la dérivabilité de f à droite en 0, et donner une interprètation graphique du résultat obtenu.

2 a. Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

b. Étudier les branches infinies de la courbe (C).

3 a. Montrer que : $(\forall x \in D - \{0\})$; $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(\ln x)^2}$

b. Dresser le tableau de variations de f.

c. Tracer la courbe (C) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Exercice 39

I Soit g la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=x-\ln(x)$

1 a. Montrer que : $g'(x)=\dfrac{x-1}{x}$ pour tout x de l'intervalle $]0;+\infty[$.

b. Montrer que la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $]0;1]$ et strictement croissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$.

c. En déduire que : $g(x)>0$ pour tout x de l'intervalle $]0;+\infty[$.

2 a. Montrer que $(x-1)\ln x\geq 0$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

b. En déduire que $g(x)+(x-1)\ln x>0$ pour tout x de l'intervalle $]0;+\infty[$.

II Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par:

$f(x)=1+x\ln(x)-(\ln x)^2$

et soit (C) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1 a. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$, puis interpréter graphiquement ce résultat,

b. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$.

En déduire la nature de la branche infinie de (C) au voisinage de $+\infty$.

2 a. Montrer que $f'(x)=\dfrac{g(x)+(x-1)\ln x}{x}$ pour tout x de $]0;+\infty[$

b. En déduire que la fonction f est strictement croissante de l'intervalle $]0;+\infty[$, puis dresser le tableau des variations de f.

3 Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]0;+\infty[$ et que $\dfrac{1}{e}<\alpha<\dfrac{1}{2}$

4 Tracer dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, la courbe (C) (On admet que (C) admet un point d'inflexion d'abscisse compris entre 1 et1,5, on prend $\alpha\simeq 0{,}4$).

Exercice 40

I Soit g la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par :

$g(x)=2\sqrt{x}-2-\ln x$

1 Montrer que $g'(x)=\dfrac{x-1}{x(\sqrt{x}+1)}$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

2 Étudier les variations de g sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

3 En déduire que $g(x)\geq 0$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

II Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x - \sqrt{x}\ln(x); & x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Soit (C) la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1 a. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\ln x = 0$; (on peut poser $t = \sqrt{x}$).

b. Montrer que la fonction f est continue à droite en 0.

2 Étudier la dérivabilité de f à droite de 0, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu .

3 a. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$, en déduire que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

b. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = -\infty$.

c. Préciser la nature de la branche infinie de la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

4 Étudier la position relative de la courbe (C) et la droite (Δ) d'équation : $y = x$.

5 a. Montrer que : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{2\sqrt{x}}$ pour tout x de $]0;+\infty[$;

b. Dresser le tableau de variations de f.

c. Tracer dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, la courbe (C).

Exercice 41

I Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x^2 + \ln(x) + 1$

1 Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2 Calculer $g'(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$, puis dresser le tableau de variations de la fonction g.

3 En déduire que $(\forall x \in]0;1[)\,;\, g(x) - 2 < 0$ et $(\forall x \in]1;+\infty[)\,;\, g(x) - 2 > 0$

II Soit f la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = x - \dfrac{\ln(x)}{x}$

Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1 a. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b. Étudier les branches infinies de la courbe (C).

c. Étudier la position relative de la courbe (C) et la droite (D) d'équation $y = x$.

2 a. Montrer que : $(\forall x > 0)\,; f'(x) = \dfrac{g(x) - 2}{x^2}$.

b. Dresser le tableau de variations de f.

3 Tracer dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, la courbe (C).

4 Soit h la fonction numérique définie sur $[1;+\infty[$ par : $h(x)=f(x)$

a. Montrer que la fonction h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J que l'on éterminera;

b. Calculer $h(e)$, et montrer que h^{-1} est dérivable au point $e-\frac{1}{e}$ et calculer $(h^{-1})'\left(e-\frac{1}{e}\right)$;

c. Tracer dans le même repère la courbe $(C_{h^{-1}})$ de la fonction h^{-1}.

Exercice 42

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[1;e]$ par : $f(x)=x+1-\ln x$

1 a. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur $[1;e]$ puis montrer que f est strictement croissante sur $[1;e]$.

b. Dresser le tableau de variations de f sur $[1;e]$ puis montrer que $f([1;e])\subset[1;e]$

2 On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $\begin{cases}u_0=1\\(\forall n\in\mathbb{N});u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$

a. Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ 1\leq u_n\leq e$

b. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante, en déduire qu'elle est convergente.

c. Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=e$

Exercice 43

I Soit g la fonction numérique définie sur $]-1;+\infty[$ par:

$g(x)=(1+x)^2-1+\ln(x+1)$

1 Montrer que $g'(x)=\frac{2(x+1)^2+1}{x+1}$ pour tout x de l'intervalle $]-1;+\infty[$

2 Dresser le tableau de variations de la fonction g.

3 En déduire que: $(\forall x\in]-1;0])\ ;\ g(x)\leq 0$ et $(\forall x\in[0;+\infty[)\ ;\ g(x)\geq 0$

II Soit f la fonction numérique définie sur $]-1;+\infty]$ par :

$f(x)=x-\frac{\ln(x+1)}{x+1}$

et soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1 Montrer que : $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=+\infty$ puis interpréter graphiquement ce

résultat.

2 a. Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x) = 0$

a. Préciser la nature de la branche infinie de la courbe (C) au voisinage de $+\infty$

3 Étudier la position relative de la courbe (C) et la droite (Δ) d'équation $y = x$.

4 a. Montrer que : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$ pour tout x de $]-1;+\infty[$.

b. Dresser le tableau de variations de f.

c. Montrer que : $f([0;4]) \subset [0;4]$

5 Tracer dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, la courbe (C).

6 On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ (\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

a. Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ 0 \leq u_n \leq 4$

b. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente, puis calculer sa limite.

Exercice 44

Soit f la fonction numérique définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{1+(\ln x)^2} \ ; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et soit (C) la courbe représentative de f dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

1 a. Montrer que la fonction f est continue à droite en zéro.

b. Montrer que la fonction f est dérivable à droite en zéro, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2 a. Montrer que : $(\forall x > 0) ; f(x) = \dfrac{1}{\dfrac{1}{x} + \left(\dfrac{2\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2}$

b. Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

c. Préciser la nature de la branche infinie de la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

3 a. Montrer que : $(\forall x \in]0;+\infty[) \ ; \ f'(x) = \dfrac{(\ln(x)-1)^2}{(1+\ln^2(x))^2}$.

b. Dresser le tableau de variations de f.

c. Montrer que l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point

d'abscisse 1 est : $y = x$.

d. Étudier la position relative de la courbe (C) et la droite (T).

4 Tracer dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, la courbe (C) (on admet que la courbe (C) admet trois points d'inflexion d'abscisses: e , $\alpha \simeq 0,7$ et $\beta \simeq 11$).

5 On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

a. Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ 1 \leq u_n \leq e$

b. Étudier la monotonie de la suite (u_n) (On peut utiliser la question 3)d)

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente, puis calculer sa limite.

Solutions

Exercice 27

1 Calculons $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x+2}{x^2\ln(x)}$:

On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2\ln(x) = 0$ et $x^2\ln(x) < 0$ pour tout x de l'intervalle $]0;1[$.

donc : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^2\ln x} = -\infty$

et comme : $\lim\limits_{x\to 0^+} x+2 = 2$, alors : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x+2}{x^2\ln x} = -\infty$

2 Calculons $\lim\limits_{x\to 0^+} 2x\ln(x+\sqrt{x})$:

Soit x de $]0;+\infty[$,

on a : $\ln(x+\sqrt{x}) = \ln(\sqrt{x}(\sqrt{x}+1))$

$= \ln(\sqrt{x}) + \ln(\sqrt{x}+1) = \dfrac{1}{2}\ln(x) + \ln(\sqrt{x}+1)$

donc : $2x\ln(x+\sqrt{x}) = x\ln(x) + 2x\ln(\sqrt{x}+1)$

et comme $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}+1 = 1$ et la fonction ln continue en 1,

alors: $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(\sqrt{x}+1) = \ln(1) = 0$

donc : $\lim\limits_{x\to 0^+} 2x\ln(\sqrt{x}+1) = 0$

or : $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$

d'où : $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) + 2x\ln(\sqrt{x}+1) = 0$

par suite : $\lim\limits_{x\to 0^+} 2x\ln(x+\sqrt{x}) = 0$

3 **Calculons** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-2x^2+3}{x\ln(x)}$:

Soit x de $]1;+\infty[$,

On a : $\dfrac{x^3-2x^2+3}{x\ln(x)}=\dfrac{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^3}}{\dfrac{\ln x}{x^2}}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^3}=1$

et puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}=0$ et $\dfrac{\ln(x)}{x^2}>0$ pour tout $x\in]1;+\infty[$,

alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^3}}{\dfrac{\ln(x)}{x^2}}=+\infty$, donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-2x^2+3}{x\ln(x)}=+\infty$

4 **Calculons** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+3x)}{2x}$:

Soit x un réel tel que $x>-\dfrac{1}{3}$ et $x\neq0$, on a : $\dfrac{\ln(1+3x)}{2x}=\dfrac{\ln(1+3x)}{3x}\times\dfrac{3}{2}$

on pose : $X=3x$; $x\longrightarrow0\Longleftrightarrow X\longrightarrow0$

donc : $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+3x)}{3x}=\lim\limits_{X\to0}\dfrac{\ln(1+X)}{X}=1$ (on pose : $X=3x$)

d'où : $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+3x)}{2x}=\dfrac{3}{2}$

5 **Calculons** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{x+1}\ln\left(\dfrac{x^3+8}{1-x^2}\right)$:

Soit x un réel tel que $x<-2$; on a :

$$\frac{2}{x+1}\ln\left(\frac{x^3+8}{1-x^2}\right)=\frac{\ln\left(\dfrac{x^3+8}{1-x^2}\right)}{\dfrac{x^3+8}{1-x^2}}\times\frac{x^3+8}{1-x^2}\times\frac{2}{x+1}$$

posons : $X=\dfrac{x^3+8}{1-x^2}$ on a : $x\longrightarrow-\infty\Longleftrightarrow X\longrightarrow+\infty$

donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln\left(\dfrac{x^3+8}{1-x^2}\right)}{\dfrac{x^3+8}{1-x^2}}=\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{\ln X}{X}=0$

et puisque : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3+8}{1-x^2}\times\dfrac{2}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3}{-x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}-2=-2$

alors : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{x+1}\ln\left(\dfrac{x^3+8}{1-x^2}\right)=0$

6 **Calculons** $\lim\limits_{x\to2^+}(x-2)^2\ln(x^3-8)$:

Soit x un réel tel que $x>2$ on a : $x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$

donc : $(x-2)^2\ln(x^3-8) = (x-2)^2\ln((x-2)(x^2+2x+4))$

$= (x-2)^2\ln(x-2)+(x-2)^2\ln(x^2+2x+4)$

posons : $X = x-2$, on a : $x \to 2^+ \iff X \longrightarrow 0^+$

donc : $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)^2\ln(x-2) = \lim\limits_{X\to 0^+} X^2\ln X = 0$

et puisque : $\lim\limits_{x\to 2^+} x^2+2x+4 = 12$ alors : $\lim\limits_{x\to 2^+}\ln(x^2+2x+4) = \ln(12)$

et comme : $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)^2 = 0$ alors : $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)^2\ln(x^2+2x+4) = 0$

d'où : $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)^2\ln(x-2)+(x-2)^2\ln(x^2+2x+4) = 0$

donc : $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)^2\ln(x^3-8) = 0$

7 Calculons $\lim\limits_{x\to -1^+}(x^2-1)\ln(7x^3+4x^2+3)$:

On remarque que (-1) est une racine du polynôme : $P(x) = 7x^3+4x^2+3$

factorisons $P(x)$;

on a : $P(x) = 7x^3+4x^2+3$

$= 7x^3+7+4x^2-4$

$= 7(x^3+1)+4(x^2-1)$

$= 7(x+1)(x^2-x+1)+4(x+1)(x-1)$

$= (x+1)(7x^2-7x+7+4x-4)$

$= (x+1)(7x^2-3x+3)$

infos:

On peut utiliser la divisioneuclidienne du polynôme $P(x)$ par $x-(-1)$

et on a : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $7x^2-3x+3>0$; car le discriminant du trinôme $7x^2-3x+3$ est négatif et le coefficient de x^2 est positif.

donc, pour tout x de l'intervalle $]-1;+\infty[$, on a :

$(x^2-1)\ln(7x^2+4x+3) = (x-1)(x+1)\ln((x+1)(7x^2-3x+3))$

$= (x-1)(x+1)\ln(x+1)+(x-1)(x+1)\ln(7x^2-3x+3)$

et comme : $\lim\limits_{x\to -1^+}(x+1)\ln(x+1) = \lim\limits_{X\to 0^+} X\ln X = 0$ (En posant : $X = x+1$)

alors : $\lim\limits_{x\to -1^+}(x-1)(x+1))\ln(x+1) = 0$

et comme : $\lim\limits_{x\to -1^+} 7x^2-3x+3 = 13$ et la fonction ln est continue en 13

alors : $\lim\limits_{x\to -1^+}\ln(7x^2-3x+3) = \ln(13)$

or : $\lim\limits_{x\to -1^+}(x-1)(x+1) = 0$

donc : $\lim\limits_{x\to -1^+}(x^2-1))\ln(7x^3+4x^2+3) = 0$

8 Calculons $\lim\limits_{x\to +\infty} x\ln x - x\ln(x+2)$:

Soit x un élément de $]0;+\infty[$,

On a : $x\ln x - x\ln(x+2) = x(\ln(x) - \ln(x+2))$

$= x(\ln x - \ln(x(1+\frac{2}{x}))$

$= x\left(\ln x - \ln x - \ln(1+\frac{2}{x})\right)$

$= -x\ln(1+\frac{2}{x})$

$= -2.\dfrac{\ln(1+\frac{2}{x})}{\frac{2}{x}}$

on pose : $X = \dfrac{2}{x}$

on a : $x \longrightarrow +\infty \Longleftrightarrow X \longrightarrow 0^+$

d'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\ln x - x\ln(x+2) = \lim\limits_{X\to 0^+} -2\times\dfrac{\ln(1+X)}{X} = -2$

donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x - x\ln(x+2) = -2$

9 Calculons $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)\ln(\ln x)$:

Soit x un élément de $]1;+\infty[$, on a: $(x-1)\ln(\ln x) = \dfrac{x-1}{\ln x}\times\ln(x)\times\ln(\ln x)$

on pose : $X = \ln x$ on a : $x \longrightarrow 1^+ \Longleftrightarrow X \longrightarrow 0^+$

d'où : $\lim\limits_{x\to 1^+}\ln x\times\ln(\ln x) = \lim\limits_{X\to 0^+} X\ln X = 0$

et puisque: $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-1}{\ln x} = 1$ (car: $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\ln x}{x-1} = 1$)

Alors: $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)\ln(\ln x) = 0$

Exercice 28

1 Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\ln(X) = +\infty$

donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+x^2) = +\infty$

et puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} x + \ln(1+x^2) = +\infty$

C'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2 a. Vérifions que : $f(x) = x + 2\ln|x| + \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$ **pour tout** x **de** $\mathbb{R}^*$.

Soit $x\in\mathbb{R}^*$, on a : $1+x^2 = x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$

donc : $\ln(1+x^2) = \ln\left(x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\right) = \ln(x^2) + \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$

et puisque : $x^2 = |x|^2$ alors : $\ln(x^2) = \ln(|x|^2) = 2\ln(|x|)$

donc : $f(x) = x + \ln(1+x^2) = x + 2\ln(|x|) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$

D'où : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$; $f(x) = x + 2\ln(|x|) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$

a. **Montrons que** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$:

Soit x un élément de $]-\infty;0[$, on a : $|x| = -x$

d'où : $f(x) = x + 2\ln(-x) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$

$= x\left(1 + 2\frac{\ln(-x)}{x}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$

et puisque : $\lim\limits_{x\to-\infty} 1+\frac{1}{x^2} = 1$ et la fonction ln est continue au point 1 alors :

$\lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = \ln(1) = 0$

et on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\ln(-x)}{x} = \lim\limits_{X\to+\infty} -\frac{\ln X}{X} = 0$ (En posant : $X = -x$)

et : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{2\ln(-x)}{x}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(x) = -\infty$

donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(1+\frac{2\ln(-x)}{x}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = -\infty$ c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

3 Étude des branches infinies:

- on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$:

Soit $x > 0$, on a : $f(x) = x + 2\ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$

donc : $\frac{f(x)}{x} = 1 + 2\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$

et puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+\frac{1}{x^2}) = \ln(1) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$,

alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2\ln x}{x} + \frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = 0$, donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$:

Soit $x > 0$, on a : $f(x) - x = \ln(1+x^2)$

et puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+x^2) = +\infty$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = +\infty$

d'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = +\infty$

Par suite la courbe (C) admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = x$ au voisinage de $+\infty$.

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Déterminons $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$:

Soit $x < 0$, on a : $f(x) = x + 2\ln(-x) + \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$

donc : $\dfrac{f(x)}{x} = 1 + \dfrac{2\ln(-x)}{x} + \dfrac{1}{x}\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$

et comme : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\ln(-x)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) = \ln(1) = 0$

et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, alors : $\lim\limits_{x\to-\infty} 2\dfrac{\ln(-x)}{x} + \dfrac{1}{x}\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) = 0$

donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$

Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - x$:

on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x\to-\infty} \ln(1+x^2) = +\infty$

finalement : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - x = +\infty$

Par suite la courbe (C) admet une branche parabolique de direction la droite d'équation: $y = x$ au voisinage de $-\infty$.

Exercice 29

1 **Calculons** $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$:

on a : $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} = -\infty$

on a : $\lim\limits_{x\to0^+} x - 1 = -1$ donc : $\lim\limits_{x\to0^+} x - 1 - \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} = +\infty$

C'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$

Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

Soit $x > 0$; on a : $\ln x = 2\ln\sqrt{x}$ d'où : $\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} = \dfrac{2\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$

On pose : $X = \sqrt{x}$; $x \to +\infty \iff X \to +\infty$

donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{X\to+\infty} 2\dfrac{\ln X}{X} = 0$

et puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} x - 1 = +\infty$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} x - 1 - \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} = +\infty$

Finalement : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2 **Étude des branches infinies :**

On a : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote à la courbe (C).

Soit $x > 0$; on a : $f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ et : $f(x) - (x-1) = -\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$

et puisque : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0$, alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (x-1) = 0$

on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (x-1) = 0$

Donc la droite d'équation $y = x - 1$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

3 Étude de la position relative :

Soit $x > 0$; on a : $f(x) - (x-1) = \frac{-\ln(x)}{\sqrt{x}}$ et $\sqrt{x} > 0$

d'où le signe de $f(x) - (x-1)$ est celui de $-\ln(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

on a : $\begin{cases} -\ln(x) = 0 \iff x = 1 \\ -\ln(x) > 0 \iff x \in]0;1[\\ -\ln(x) < 0 \iff x \in]1; +\infty[\end{cases}$

Position relative de (C) avec (D) :

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-x$	‖	$+$	0	$-$	
Position relative	‖	(C) est au dessus de (D)		(C) est au dessous de (D)	

La courbe (C) et la droite (D) se coupent au point $A(1;0)$.

Exercice 30

1 Montrons que : $D = \mathbb{R}$

Soit x un élément de $\mathbb{R}$; on a : $x \in D \iff (x + \sqrt{1+x^2} > 0$ et $1 + x^2 \geq 0)$

$\iff x + \sqrt{1+x^2} > 0$

on a : $0 \leqslant x^2 < 1 + x^2 \Rightarrow \sqrt{x^2} < \sqrt{1+x^2}$

$\Rightarrow |x| < \sqrt{1+x^2}$

$\Rightarrow -x < \sqrt{1+x^2}$

$\Rightarrow \sqrt{1+x^2} + x > 0$ (car: $(\forall x \in \mathbb{R}; -x \leq |x|)$

d'où : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $x + \sqrt{1+x^2} > 0$, donc : $D = \mathbb{R}$.

2 Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$:

on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} x + \sqrt{1+x^2} = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \ln(X) = +\infty$

donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x + \sqrt{x^2+1}) = +\infty$

Montrons que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1}+x)$

$$= \ln\left(\frac{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}{\sqrt{x^2+1}-x}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}\right) = -\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$$

et on a : $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}-x) = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\ln(X) = +\infty$

donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(\sqrt{x^2+1}-x) = +\infty$

Finalement : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

3 a. Montrons que la fonction f est impaire.

pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $-x \in \mathbb{R}$

pour tout x de $\mathbb{R}$, on a

$$f(-x) = \ln(\sqrt{(-x)^2+1}+(-x)) = \ln(\sqrt{x^2+1}-x)$$

$$= \ln\left(\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}\right) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)$$

$$= -\ln(\sqrt{x^2+1}+x) = -f(x)$$

d'où : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; f(-x) = -f(x)$

donc f est une fonction impaire.

infos:

On peut aussi montrer que:

$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}\ ; -x \in \mathbb{R} \\ (\forall x \in \mathbb{R})\ ; f(-x)+f(x) = 0 \end{cases}$

b. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = -\frac{1}{2}\ln(3-2\sqrt{2})$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(x) = -\frac{1}{2}\ln(3-2\sqrt{2}) \iff \ln(\sqrt{x^2+1}+x) = -\frac{1}{2}\ln(3-2\sqrt{2})$$

$$\iff \ln(\sqrt{x^2+1}+x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{3-2\sqrt{2}}\right)$$

$$\iff \ln(\sqrt{x^2+1}+x) = \frac{1}{2}\ln(3+2\sqrt{2})$$

$$\iff \ln(\sqrt{x^2+1}+x) = \frac{1}{2}\ln((\sqrt{2}+1)^2)$$

$$\iff \ln(\sqrt{x^2+1}+x)) = \ln(\sqrt{2}+1)$$

$$\implies \sqrt{x^2+1} = \sqrt{2}+1-x$$

$$\implies x^2+1 = (\sqrt{2}+1-x)^2$$

$$\implies x^2+1 = 2+1+x^2+2\sqrt{2}-2\sqrt{2}x-2x$$

$$\implies 2x(\sqrt{2}+1) = 2+2\sqrt{2} = 2(\sqrt{2}+1)$$

$$\implies x = 1$$

On a : $f(1) = \ln(1+\sqrt{2})$

$= \frac{1}{2}\ln((1+\sqrt{2})^2) = \frac{1}{2}\ln(3+2\sqrt{2})$

$= -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{3+2\sqrt{2}}\right)$

$= -\frac{1}{2}\ln(3-2\sqrt{2})$

Donc : $S_{\mathbb{R}} = \{1\}$

c. Montrons que pour tout r de $\mathbb{Q}$, on a : $f\left(\frac{e^r - e^{-r}}{2}\right) = r$

Soit $r \in \mathbb{Q}$, on a : $f(\frac{e^r - e^{-r}}{2}) = \ln\left(\sqrt{\frac{(e^r - e^{-r})^2}{4} + 1} + \frac{e^r - e^{-r}}{2}\right)$

$= \ln\left(\sqrt{\frac{(e^r)^2 - 2 + (e^{-r})^2}{4}} + 1 + \frac{e^r - e^{-r}}{2}\right)$

$= \ln\left(\sqrt{\frac{(e^r)^2 + 2 + (e^{-r})^2}{4}} + \frac{e^r - e^{-r}}{2}\right)$

$= \ln\left(\sqrt{\frac{(e^r)^2 + 2.e^r.e^{-r} + (e^{-r})^2}{4}} + \frac{e^r - e^{-r}}{2}\right)$

$= \ln\left(\sqrt{\frac{(e^r + e^{-r})^2}{4}} + \frac{e^r - e^{-r}}{2}\right)$

$= \ln\left(\frac{e^r + e^{-r}}{2} + \frac{e^r - e^{-r}}{2}\right)$

$= \ln(e^r) = r$

Donc: $(\forall r \in \mathbb{Q})$; $f\left(\frac{e^r - e^{-r}}{2}\right) = r$

Exercice 31

1 a. Montrons que la fonction f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

La fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ (car les fonctions $x \longmapsto x^2 - 2$ et $x \longmapsto \ln(x)$ sont dérivables sur l'intervalle $]0;+\infty[$).

et on a : $(\forall x \in]0;+\infty[)$; $f'(x) = 2x + \frac{1}{x}$

on a : $(\forall x \in]0;+\infty[)$; $f'(x) > 0$

Ainsi la fonction f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

b. Montrons que : $f(]0;+\infty[) = \mathbb{R}$

On a : f est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$, donc f est continue sur $]0;+\infty[$, et puisqu'elle est strictement croissante sur $]0;+\infty[$, alors:

$f(]0;+\infty[) = \left]\lim_{x\to 0^+} f(x); \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[$

Calculons les limites: $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 - 2 + \ln x = -\infty$

(car : $\lim_{x\to 0^+} x^2 - 2 = -2$ et $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$)

et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - 2 + \ln x = +\infty$

(car : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - 2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$)

Finalement : $f(]0\,;+\infty[) =]-\infty\,;+\infty[= \mathbb{R}$

2 a. Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$.

On a : f est continue et strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ donc f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $f(]0\,;+\infty[) = IR$.

et puisque $0 \in \mathbb{R}$ alors il existe un élément unique α dans $\mathbb{R}$ tel que $f(\alpha) = 0$.

b. Montrons que $1,30 < \alpha < 1,35$:

On a : $f(\alpha) = 0$

et : $f(1,3) = -0,05$ et $f(1,35) \simeq 0,12$

donc : $f(1,3) < f(\alpha) < f(1,35)$

Et puisque la fonction f est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ alors : $1,3 < \alpha < 1,35$

3 Déterminons le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$:

Dressons le tableau de variations de f :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$			
f	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

Soit $x \in]0\,;+\infty[$, on a :

$x \in [\alpha\,;+\infty[\iff x \geq \alpha$

$\iff f(x) \geq f(\alpha)$

$\iff f(x) \geqslant 0$

$x \in]0;\alpha] \iff x \leq \alpha$

$\iff f(x) \leq f(\alpha)$

$\iff f(x) \leq 0$

d'où le tableau de signe de f :

x	0		α		$+\infty$
$f(x)$	‖	$-$	0	$+$	

Exercice 32

1 a. Déterminons D l'ensemble de définition de la fonction f :

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $x \in D \iff |x^2 - 2x - 3| > 0$

$\iff x^2 - 2x - 3 \neq 0$

le discriminant du trinôme : x^2-2x-3 est $\Delta=16$ et les solutions sont :

$x_1=\dfrac{2-4}{2}=-1$ et $x_2=\dfrac{2+4}{2}=3$

donc : $x\in D\Leftrightarrow x\neq -1$ et $x\neq 3$

Finalement : $D=\mathbb{R}-\{-1,3\}=]-\infty;-1[\cup]-1;3[\cup]3;+\infty[$

b. Calculons les limites :

- On a : $\lim\limits_{|x|\to+\infty} x^2-2x-3=\lim\limits_{|x|\to+\infty} x^2=+\infty$

donc : $\lim\limits_{|x|\to+\infty}|x^2-2x-3|=+\infty$

et on a : $\lim\limits_{X\to+\infty}\ln(X)=+\infty$

d'où : $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\ln|x^2-2x-3|=+\infty$

C'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

- On a : $\lim\limits_{x\to-1} x^2-2x-3=0$ et $\lim\limits_{x\to3} x^2-2x-3=0$

donc : $\lim\limits_{x\to-1}|x^2-2x-3|=0^+$ et $\lim\limits_{x\to3}|x^2-2x-3|=0^+$

et puisque : $\lim\limits_{X\to0^+}\ln(X)=-\infty$

alors : $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\ln|x^2-2x-3|=-\infty$

et de même $\lim\limits_{x\to3} f(x)=\lim\limits_{x\to3}\ln|x^2-2x-3|=-\infty$

2 a. Montrons que la droite $(\triangle)$ d'équation : $x=1$ est un axe de symétrie de la courbe (C).

- Montrons d'abord que pour tout x de D, on a : $2-x\in D$

Soit $x\in\mathbb{R}$, on a : $x\notin D\Leftrightarrow x=-1$ ou $x=3$

$\Leftrightarrow -x=1$ ou $-x=-3$

$\Leftrightarrow 2-x=3$ ou $2-x=-1$

$\Leftrightarrow 2-x\notin D$

d'où : $(\forall x\in\mathbb{R}): x\in D\Leftrightarrow 2-x\in D$

donc $(\forall x\in D)\ ;\ 2-x\in D$.

Soit $x\in D$, on a :

$$\begin{aligned} f(2-x) &= \ln|(2-x)^2-2(2-x)-3| \\ &= \ln|4-4x+x^2-4+2x-3| \\ &= \ln|x^2-2x-3| \\ &= f(x) \end{aligned}$$

donc : $(\forall x\in D)\ ;\ f(2-x)=f(x)$

on a : $(\forall x \in D); 2-x \in D$ et $f(2-x)=f(x)$

donc la droite (D) d'équation $x=1$ est un axe de symétrie de la courbe (C).

infos:

$(D): x=a$ est un axe de symétrie pour (C), équivaut à :

$\begin{cases}(\forall x \in D_f): 2a-x \in D_f \\ (\forall x \in D_f): f(2a-x)=f(x)\end{cases}$

b. Étudions les branches infinies de (C_f)

▸ On a : $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=-\infty$

donc les droites d'équations: $x=-1$ et $x=3$ sont deux asymptotes verticales à la courbe (C).

▸ **Au voisinage de $+\infty$:**

on a $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$

et: $(\forall x \in]3;+\infty[): x^2-2x-3>0$

d'où pour tout x de l'intervalle $]3;+\infty[$.

on a : $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{\ln(x^2-2x-3)}{x}=\dfrac{\ln\left(x^2\left(1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)\right)}{x}$

$=\dfrac{\ln(x^2)+\ln\left(1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}{x}$

$=2\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{\ln\left(1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}{x}$

et puisque : $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln\left(1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}{x}=0$

alors : $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$; donc : (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.

▸ **Au voisinage de $-\infty$:**

on a : (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$ et on sait que la droite (Δ) d'équation: $x=1$ est un axe de symétrie pour la courbe (C), donc : (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $-\infty$.

Exercice 33

1 a. ▸ **Calculons $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$:**

on a : $\lim\limits_{x\to 0^+} 1-x^3=1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$,

donc : $\lim\limits_{x\to 0^+} 3\ln(x)+1-x^3=-\infty$, c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$

▸ **Calculons** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

Soit $x \in]0;+\infty[$, on a : $f(x) = x^3\left(3\dfrac{\ln x}{x^3} - 1\right) + 1$

et puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^3} = 0$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3\ln(x)}{x^3} - 1 = -1$

et puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\left(\dfrac{3\ln(x)}{x^3} - 1\right) = -\infty$

d'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\left(\dfrac{3\ln(x)}{x^3} - 1\right) + 1 = -\infty$, finalement : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

b. Étudions les branches infinies de la courbe (C) :

▸ On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, donc la droite d'équation : $x = 0$ est une asymptote verticale à la courbe (C).

▸ On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$:

pour tout x un élément de l'intervalle $]0,+\infty[$, on a :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{3\ln(x) + 1 - x^3}{x} = 3\frac{\ln(x)}{x} + \frac{1}{x} - x^2$$

et puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (-x^2) = -\infty$

alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} 3\dfrac{\ln(x)}{x} + \dfrac{1}{x} - x^2 = -\infty$, finalement : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$.

on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$

donc la courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

2 a. Calculons $f'(x)$:

On a : $x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto 1 - x^3$ sont dérivables sur l'intervalle $]0,+\infty[$, donc la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

et on a : $(\forall x \in]0;+\infty[)$; $f'(x) = (3\ln(x) + 1 - x^3)'$

$$= 3 \times \frac{1}{x} - 3x^2 = \frac{3}{x}(1 - x^3)$$

Dressons le tableau de variations de la fonction f :

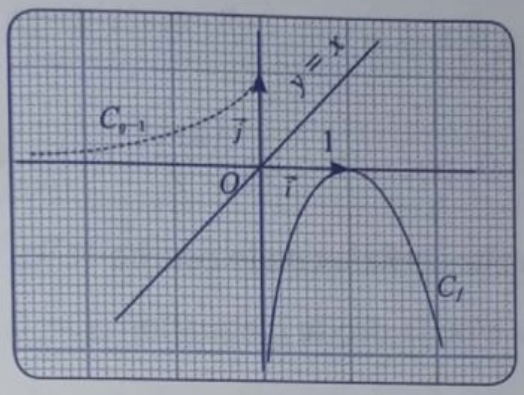
on a : le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - x^3$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

et on a : $(1 - x^3) = (1 - x)(1 + x + x^2)$ et $1 + x + x^2 > 0$, car le discriminant du trinôme $x^2 + x + 1$ est $\Delta = -3$ et $\begin{cases} a = 1 \\ a > 0 \end{cases}$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - x$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

d'où le tableau de variations de f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

b. Construction de la courbe (C) :



2 a. **Montrons que g admet une fonction réciproque:**

On a : f est une fonction dérivable sur $]0,+\infty[$, donc elle est continue sur l'intervalle $]0,+\infty[$, alors : g est continue sur l'intervalle $]0;1]$ car $g=f$ sur l'intervalle $]0;1]$.

Donc la fonction g est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0;1]$.

d'où : g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $J=g(]0;1])$.

tel que : $J=\left]\lim\limits_{x\to 0^+} g(x);g(1)\right]=]-\infty;0]$

b. **Construction de la courbe (Cg^{-1}) :**

on a: la courbe (Cg^{-1}) est le symétrique de la courbe (C) par rapport à la première bissectrice dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ dans $]0;1]$ (voir figure).

Exercice 34

1 a. **Calculons $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$:**

On a : $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}(2-\ln x)=+\infty$

donc : $\lim\limits_{x\to 0^+}(2-\ln x)\ln x=-\infty$, c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$

Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(2-\ln x)=-\infty$

donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}(2-\ln x)\ln x=-\infty$, c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

b. Montrons que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^2}{x}=0$

Soit x un élément de $]0;+\infty[$, on a : $\ln\sqrt{x}=\dfrac{1}{2}\ln x$ c'est-à-dire: $\ln x=2\ln\sqrt{x}$

d'où : $\dfrac{(\ln x)^2}{x}=\dfrac{(2\ln\sqrt{x})^2}{(\sqrt{x})^2}=4\left(\dfrac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$

on pose : $t=\sqrt{x}$, on a : $x\to+\infty\iff t\to+\infty$

d'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln t}{t}=0$

donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2=0$, par suite : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}4\left(\dfrac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2=0$

c. Étudions les branches infinies de la courbe (C):

On a : $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$ d'où la droite d'équation $x=0$ est une asymptote à la courbe (C) .

- on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$, calculons : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

Soit x un élément de l'intervalle $]0;+\infty[$, on a : $f(x)=2\ln x-(\ln x)^2$

d'où : $\dfrac{f(x)}{x}=2\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{(\ln x)^2}{x}$

et puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^2}{x}=0$

alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\ln x}{x}-\dfrac{(\ln x)^2}{x}=0$, donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$

Par suite la courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage $+\infty$.

2 a. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=0$

Soit x un élément de $]0;+\infty[$, on a : $f(x)=0\iff(2-\ln x)\ln x=0$

$\iff\ln x=0$ ou $\ln x=2$

$\iff x=1$ ou $x=e^2$

Ainsi : $S=\{1;e^2\}$

b. Étudions le signe de $f(x)$:

- Le tableau de signes de $\ln x$ est le suivant :

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$	

Le tableau de signe de $2-\ln x$:

on a : $2-\ln x>0 \Leftrightarrow \ln x<2$
$\Leftrightarrow 0<x<e^2$

$2-\ln x=0 \Leftrightarrow \ln x=2$
$\Leftrightarrow x=e^2$

d'où le signe de signe :

x	0		1		e^2		$+\infty$
$2-\ln x$	‖	$+$		$+$	0	$-$	

Finalement le tableau de signes de $f(x)$ est :

x	0		1		e^2		$+\infty$
$f(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

3 a. Montrons que $f'(x)=\frac{2}{x}(1-\ln x)$ pour tout x de l'intervalle $]0;+\infty[$:

La fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$:

et on a : $(\forall x\in]0;+\infty[)\,;f'(x)=(2-\ln x)\times\frac{1}{x}+\left(-\frac{1}{x}\right)\ln x$

$=\frac{1}{x}(2-\ln x-\ln x)$

$=\frac{1}{x}(2-2\ln x)=\frac{2}{x}(1-\ln x)$

b. Déterminons le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$:

On a : le signe de $f'(x)$ est celui de $1-\ln x$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

On a : $f'(x)=0 \Leftrightarrow 1-\ln x=0$
$\Leftrightarrow \ln x=1$
$\Leftrightarrow x=e$

et $f'(x)>0 \Leftrightarrow 1-\ln x>0$
$\Leftrightarrow \ln x<1$
$\Leftrightarrow 0<x<e$

d'où le tableau de signes de $f'(x)$ est:

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

Tableau de variation de f :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ $-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$

4 a. **Montrons que** $(\forall x>0)\ ;\ f''(x)=\frac{2}{x^2}(\ln(x)-2)$:

On a : f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

et pour tout x de $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{2}{x}(1-\ln x)$

d'où : $(\forall x\in]0;+\infty[); f''(x) = 2\left(-\frac{1}{x^2}(1-\ln x)+\frac{1}{x}\times\left(-\frac{1}{x}\right)\right)$

$= 2\left(-\frac{1}{x^2}(1-\ln x)-\frac{1}{x^2}\right)$

$= \frac{2}{x^2}(-1+\ln(x)-1)=\frac{2}{x^2}(\ln(x)-2)$

b. **Montrons que la courbe** (C) **admet un point d'inflexion :**

on a : le signe de $f''(x)$ est celui de $\ln(x)-2$ sur $]0;+\infty[$

on a : $\ln(x)-2\geq 0 \iff \ln x\geq 0$

$\iff x\geq e^2$

d'où le tableau de signe de $f''(x)$ est :

x	0		e^2		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	

donc : $f''(x)$ s'annule en e^2 et change de signe en e^2.

et comme $f(e^2)=0$ alors le point $A(e^2;0)$ est un point d'inflexion de la courbe (C).

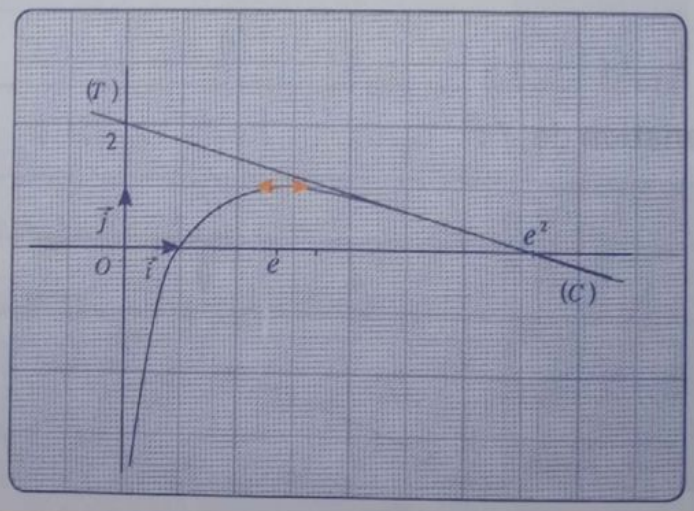
c. **Équation de la tangente** (T):

On a : $f(e^2)=0$ et $f'(e^2)=\frac{-2}{e^2}$

Donc l'équation de la tangente au point $A(e^2;0)$ est: $y=\frac{-2}{e^2}(x-e^2)$

(T): $y=-2xe^{-2}+2$

5 **Traçons la courbe** (C) **et** (T):



Exercice 35

1 a. Montrons que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Soit x un élément de l'intervalle $]0;+\infty]$ on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= x - \ln\left(x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= x - \ln(x^2) - \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \\ &= x - 2\ln(x) - \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = x\left(1-2\frac{\ln x}{x}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \end{aligned}$$

et puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x^2} = 1$ et la fonction ln est continue en 1 alors :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = \ln(1) = 0$

et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-2\frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$

d'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-2\frac{\ln x}{x}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = +\infty$ c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Montrons que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} 1+x^2 = +\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(1+x^2) = +\infty$

c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to-\infty} -\ln(1+x^2) = -\infty$, et on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$

donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} x - \ln(1+x^2) = -\infty$, finalement : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

b. Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ f'(x) = \frac{(x-1)^2}{1+x^2}$:

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x de $\mathbb{R}$ on a :

$$f'(x) = 1 - \frac{(1+x^2)'}{1+x^2} = 1 - \frac{2x}{1+x^2} = \frac{1+x^2-2x}{1+x^2} = \frac{(x-1)^2}{1+x^2}$$

c. Le tableau de variations de la fonction f :

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $(x-1)^2 \geq 0$ et $1+x^2 > 0$

d'où : $\frac{(x-1)^2}{1+x^2} \geq 0$ c'est-à-dire : $f'(x) \geqslant 0$

on a : $f'(x) = 0 \iff x = 1$

Le tableau de variations de f est le suivant:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$+$	
f	‖ $-\infty$	↗		↗	$+\infty$

2 a. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = x$:

Soit x un élément de $\mathbb{R}$, on a : $f(x) = x \Leftrightarrow x - \ln(1+x^2) = x$

$\Leftrightarrow \ln(1+x^2) = 0$

$\Leftrightarrow 1 + x^2 = 1$

$\Leftrightarrow x^2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$

Donc : $S = \{0\}$

b. Montrons que : $f([0;1]) \subset [0;1]$

La fonction $x \mapsto 1 + x^2$ est continue et strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc la fonction $x \mapsto \ln(1+x^2)$ est continue sur $\mathbb{R}$,

et on a : $x \mapsto x$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc la fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, d'où la fonction f est continue et strictement croissante sur $[0;1]$. ainsi : $f([0;1]) = [f(0); f(1)]$

on a : $f(0) = 0$ et $f(1) = 1 - \ln(2)$, donc : $f([0;1]) = [0; 1 - \ln(2)]$

et puisque $1 - \ln(2) < 1$, alors : $[0; 1 - \ln(2)] \subset [0;1]$

d'où : $f([0;1]) \subset [0;1]$

3 a. Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 \leq u_n \leq 1$

- pour $n = 0$, on a : $u_0 = 1$ et $0 \leq 1 \leq 1$

donc : $0 \leq u_0 \leq 1$.

Soit n un élément de $\mathbb{N}$; supposons que : $0 \leq u_n \leq 1$ et montrons que : $0 \leq u_{n+1} \leq 1$

on a : $0 \leq u_n \leq 1$ c'est-à-dire : $u_n \in [0;1]$, et puisque : $f([0;1]) \subset [0;1]$

alors : $f(u_n) \in [0;1]$, par suite : $u_{n+1} \in [0;1]$

c'est-à-dire : $0 \leq u_{n+1} \leq 1$, finalement la propriété est vraie pour $n+1$.

d'où d'après le principe de la récurrence on a : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 \leq u_n \leq 1$

b. Montrons que la suite (u_n) est décroissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} = f(u_n) = u_n - \ln(1 + u_n^2)$

donc : $u_{n+1} - u_n = -\ln(1 + u_n^2)$; et puisque : $0 \leqslant u_n \leq 1$, alors : $1 \leq 1 + u_n^2 \leq 2$

or la fonction ln est strictement croissante sur $]0; +\infty[$, donc:

$\ln(1) \leq \ln(1 + u_n^2) \leq \ln(2)$

c'est-à-dire : $0 \leq \ln(1 + u_n^2) \leq \ln(2)$

d'où : $-\ln(1 + u_n^2) \leq 0$ par suite : $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$

Finalement : $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$, ce qui signifie que $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite décroissante.

c. **Déduction :**

On a la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge..

Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

La fonction f est continue sur $[0;1]$ et $f([0;1]\subset[0;1])$ et (u_n) est définie par: $u_0 \in [0;1]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$ et la suite (u_n) est convergente donc sa limite est la solution de l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $[0;1]$, et comme 0 est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ sur l'intervalle $[0;1]$ alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

Exercice 36

1 1 Montrons que: $g'(x) = \dfrac{(2x+1)(x-1)}{x}$ **pour tout** x **de** $]0;+\infty[$.

Les fonctions: $x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto x^2 - x$ sont dérivables sur $]0;+\infty[$, d'où la fonction g est dérivable sur $]0;+\infty[$, (somme de deux fonctions dérivables):

et on a : $(\forall x \in]0;+\infty[)$; $g'(x) = (x^2 - x - \ln x)'$

$$= 2x - 1 - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - x - 1}{x}$$

or: $(2x+1)(x-1) = 2x^2 - 2x + x - 1 = 2x^2 - x - 1$

donc : $(\forall x \in]0;+\infty[)$; $g'(x) = \dfrac{(2x+1)(x-1)}{x}$

2 Tableau de variations de g :

On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 - x = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}(-\ln x) = +\infty$,

donc : $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 - x - \ln x = +\infty$.

c'est-à-dire: $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$

Soit x un élément de l'intervalle $]0;+\infty[$, on a :

$$g(x) = x^2 - x - \ln x = x^2\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x^2}\right)$$

et puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{\ln x}{x^2} = 1$

or : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{\ln x}{x^2}\right) = +\infty$

Finalement : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

Soit $x \in]0;+\infty[$, on a : $2x+1>0$ et $x>0$

et $g'(x)=\dfrac{(2x+1)(x-1)}{x}$, donc le signe de $g'(x)$ est celui de $x-1$ sur $]0;+\infty[$.

d'où le tableau de variations de la fonction g est :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
g	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

3 Déduisons que $g(x)\geq 0$ pour tout x de l'intervalle $]0;+\infty[$

- La fonction g est croissante sur $[1;+\infty[$.

donc : $x\geq 1 \Rightarrow g(x)\geq g(1)$

$\Rightarrow g(x)\geq 0$

- La fonction g est décroissante sur $]0;1]$,

donc : $0<x\leq 1 \Rightarrow g(x)\geq g(1)$

$\Rightarrow g(x)\geq 0$

Finalement : $(\forall x\in]0;+\infty[)\ ;\ g(x)\geq 0$

Remarque: La fonction g admet un minimum en 1 et $g(1)=0$ donc:

$(\forall x\in]0;+\infty[)\ ;\ g(x)\geq 0$

II 1 a. Montrons que : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$

On a : $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$, donc : $\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x)^2=+\infty$

d'où : $\lim\limits_{x\to 0^+}-(\ln x)^2=-\infty$

et puisque : $\lim\limits_{x\to 0^+}x^2-1=-1$, alors : $\lim\limits_{x\to 0^+}x^2-1-(\ln x)^2=-\infty$

Finalement : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$

Interprétation géométrique :

On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ donc la droite d'équation $x=0$ est une asymptote verticale à la courbe (C).

b. Montrons que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Soit $x\in]0;+\infty[$, on a : $f(x)=x^2\left(1-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{(\ln x)^2}{x^2}\right)=x^2\left(1-\dfrac{1}{x^2}-\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^2\right)$

et puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ et : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^2=0$

et puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}1-\dfrac{1}{x^2}=1$, et $\lim\limits_{x\to+\infty}1-\dfrac{1}{x^2}-\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^2=1$

or : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(1-\frac{1}{x^2}-\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\right) = +\infty$

Finalement : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

▸ **Montrons que :** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

Soit $x \in]0;+\infty[$, on a : $\frac{f(x)}{x} = x\left(1-\frac{1}{x^2}-\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\right)$

et puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{x^2}-\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{1}{x^2}-\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\right) = +\infty$ finalement : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

c. **Nature du branche infinie :**

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, donc la courbe (C) admet une branche parabolique de direction (Oy) au voisinage de $+\infty$.

2 a. **Montrons que :** $(\forall x \in]0;+\infty[)$; $f'(x) = 2\left(\frac{x^2-\ln x}{x}\right)$

Les fonctions : $x \longmapsto (\ln x)^2$ et $x \longmapsto x^2-1$ sont dérivables sur l'intervalle $]0;+\infty[$, donc la fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ (produit de deux fonctions dérivables).

Et on a : $(\forall x \in]0;+\infty[)$; $f'(x) = (x^2-1-(\ln x)^2)'$

$= 2x - 2\times\frac{1}{x}\times\ln x$

$= 2(x-\frac{\ln x}{x}) = 2\left(\frac{x^2-\ln x}{x}\right)$

b. **Vérifions que :** $(\forall x \in]0;+\infty[)$; $g(x)+x = x^2-\ln x$

Soit $x \in]0;+\infty[$, on a : $g(x) = x^2-x-\ln x$

donc : $g(x)+x = x^2-\ln x$, par suite :

$(\forall x \in]0;+\infty[)$; $g(x)+x = x^2-\ln x$

▸ **Tableau de variations de la fonction f :**

Soit $x \in]0;+\infty[$, on a : $f'(x) = 2\left(\frac{x^2-\ln x}{x}\right)$

d'où le signe de $f'(x)$ est celui de $x^2-\ln x$ c'est-à-dire le signe de $g(x)+x$

(car : $g(x)+x = x^2-\ln(x)$)

et puisque : $x > 0$ et $g(x) \geq 0$ alors : $g(x)+x > 0$, c'est-à-dire : $x^2-\ln(x) > 0$

d'où : $f'(x) > 0$

Donc $f'(x) > 0$ pour tout x de l'intervalle $]0;+\infty[$, ainsi le tableau de variation de f est:

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$
f	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

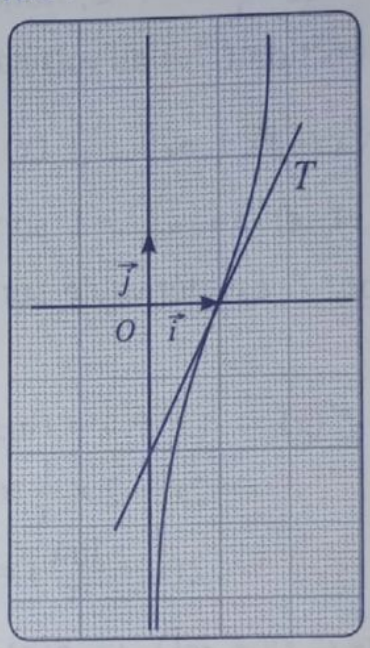
3 a. Équation de la tangente (T) au point d'abscisse 1:

On a : $f(1) = 0$ et $f'(1) = 2$

donc l'équation de la tangente (T) est : $y = f'(1)(x-1) + f(1) = 2x - 2$

d'où : (T): $y = 2x - 2$

c. Construction de la courbe :



Exercice 37

1 1 Montrons que la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$:

On a : la fonction g est dérivable sur $]0;+\infty[$, (somme de deux fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$ qui sont : $x \mapsto 1 - x^2$ et $x \longmapsto -\ln(x)$)

et on a : $(\forall x \in]0;+\infty[)$; $g'(x) = -2x - \frac{1}{x} = -\left(2x + \frac{1}{x}\right)$

d'où : $g'(x) < 0$ pour tout x de $]0;+\infty]$, donc la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $[0;+\infty]$.

2 Déduction :

On a : la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $]0;+\infty]$ et

$g(1)=0$.

donc :

- $0<x\leq 1 \Rightarrow g(x)\geqslant g(1)$
  $\Rightarrow g(x)\geq 0$
- $x>1 \Rightarrow g(x)<g(1)$
  $\Rightarrow g(x)<0$

Finalement : $\begin{cases}(\forall x\in]0;1]) & ; g(x)\geq 0\\ (\forall x\in]1;+\infty[) & ; g(x)<0\end{cases}$

III 3 a. Montrons que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$:

On a : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$

donc : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{x}=-\infty$, et comme : $\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)=0$

alors : $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-x+\dfrac{\ln x}{x}\right)=-\infty$; donc : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$

- **Interprétation :**

On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$, d'où la droite d'équation $x=0$ est une asymptote verticale à la courbe (C).

b. Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x)=-\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x+\dfrac{\ln x}{x}\right)=-\infty$

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

- **Montrons que (Δ) est une asymptote oblique à la courbe (C) :**

On a : $(\forall x>0)\ ;\ f(x)-(-x)=\dfrac{\ln x}{x}$

et puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$

Alors la droite (Δ) d'équation $y=-x$ est une asymptote oblique à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

c. Étudions la position relative de (C) par rapport à (Δ) :

Soit $x\in]0;+\infty]$, on a : $f(x)-(-x)=\dfrac{\ln x}{x}$

d'où le signe de $f(x)-(-x)$ est celui de $\ln x$ sur $]0;+\infty[$:

Le tableau de signes de $\ln x$ est :

x	0		1		$+\infty$
$\ln(x)$	‖	$-$	0	$+$	

Le tableau ci-dessous, résume la position relative de (C) par rapport à (Δ) :

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-x$	‖	$-$	0	$+$	
Position relative de (C) et (Δ)	‖	(C) est au dessous de (Δ)		(C) et au dessus de (Δ)	

(C) et (Δ) se coupent au point $B(1;-1)$

1 a. Montrons que $(\forall x \in]0;+\infty[)$; $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$

On a : la fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$.

Soit $x \in]0;+\infty[$, on a : $f'(x) = \left(-x + \dfrac{\ln x}{x}\right)'$

$$= -1 + \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2}$$

$$= -1 + \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$= \frac{-x^2 + 1 - \ln x}{x^2}$$

on a : $g(x) = 1 - x^2 - \ln x$, donc : $(\forall x > 0); f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$

b. Tableau de variations de la fonction f :

Le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

donc, d'après la partie I, on déduit le tableau de variations de f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$

3 a. Montrons que : $(\forall x \in]0;+\infty[)$; $f''(x) = \dfrac{2\ln(x) - 3}{x^3}$

On a : la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Soit x de $]0;+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$

donc : $f''(x) = \dfrac{x^2 g'(x) - 2x g(x)}{x^4}$

$$= \frac{x(xg'(x) - 2g(x))}{x^4} = \frac{xg'(x) - 2g(x)}{x^3}$$

et on a : $xg'(x) - 2g(x) = -x\left(2x + \frac{1}{x}\right) - 2(1 - x^2 - \ln x)$

$= -2x^2 - 1 - 2 + 2x^2 + 2\ln(x)$

$= 2\ln(x) - 3$

d'où : $(\forall x \in]0; +\infty[)\ ;\ f''(x) = \frac{2\ln(x) - 3}{x^3}$

b. Montrons que la courbe (C) admet un point d'inflexion :

On a : $(\forall x > 0)\ ;\ f''(x) = \frac{2\ln(x) - 3}{x^3}$

donc le signe de $f''(x)$ est celui de $2\ln(x) - 3$ sur $]0; +\infty[$.

et on a : $2\ln(x) - 3 = 2\left(\ln(x) - \frac{3}{2}\right)$

par suite le signe de $f''(x)$ est celui de $x - e^{\frac{3}{2}}$ sur $]0; +\infty[$.

infos:

Le signe de $\ln a - \ln b$ est celui de $a - b$

et le signe de $\ln x - a$ est celui de $x - e^a$

D'où le tableau de signes de $f''(x)$ est :

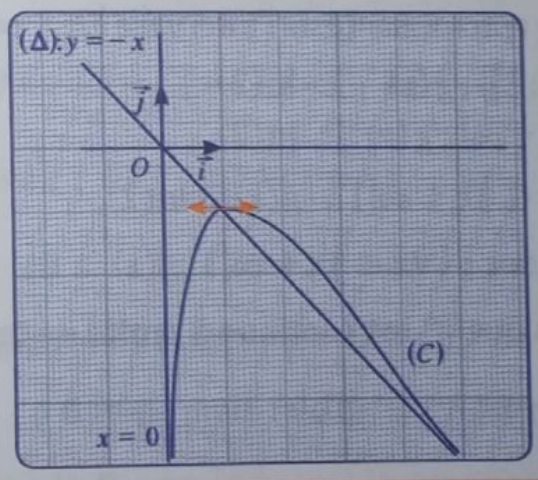
x	0		$e^{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	

donc : $f''(x)$ s'annule en $e^{\frac{3}{2}} = e\sqrt{e}$ et change de signe au voisinage de $e^{\frac{3}{2}}$,

par suite le point A d'abscisses $e\sqrt{e}$ est un point d'inflexion de la courbe (C),

On a : $f(e\sqrt{e}) = -e^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}$

4 La courbe (C)



Exercice 38

1 1 Montrons que : $(\forall x \in]0; +\infty[)\ ;\ g'(x) = \frac{x-2}{x^2}$

La fonction g est dérivable sur $]0; +\infty[$, (somme de deux fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$ qui sont : $x \longmapsto \frac{2}{x} - 1$ et $x \longmapsto \ln x$.

et on a : $(\forall x \in]0;+\infty[); g'(x) = \left(\frac{2}{x} - 1 + \ln(x)\right)'$

$$= -\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-2}{x^2}$$

2 Tableau de variations de g :

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{x} - 1 = -1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{x} - 1 + \ln x = +\infty$, d'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

on a : pour tout x de $]0;+\infty[$; $g(x) = -1 + \frac{2 + x\ln x}{x}$

or : $\lim\limits_{x \to 0^+} x\ln x = 0$ donc : $\lim\limits_{x \to 0^+} 2 + x\ln x = 2$

d'où : $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{2 + x\ln x}{x} = +\infty$, d'où : $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$

le signe de $g'(x)$ est celui de $x - 2$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

donc le tableau de variations g est :

x	0		2		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
g	‖ $+\infty$	↘	$\ln(2)$	↗	$+\infty$

3 Déduction :

On a : la fonction g est croissante sur l'intervalle $[2;+\infty[$ et décroissante sur $]0;2]$.

donc : $\begin{cases} (\forall x \in]0;2]) ; g(x) \geq \ln(2) \\ \forall x \in [2;+\infty[; g(x) \geq \ln(2) \end{cases}$

c'est-à-dire : $(\forall x \in]0;+\infty[)$; $g(x) \geqslant \ln(2)$

or : $\ln(2) > 0$, donc : $(\forall x \in]0;+\infty[) ; g(x) > 0$

II 1 a. Montrons que f est continue à droite en 0:

On a : $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ d'où : $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{\ln x} = 0$

et puisque : $\lim\limits_{x \to 0^+} x - 2 = -2$, alors : $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x-2}{\ln x} = 0$

d'où : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$

ainsi : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$, c'est-à-dire : f est continue à droite en 0.

b. Étudions la dérivabilité de f à droite en 0:

Soit x un élément de $]0;1[$, on a : $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{1}{x}\left(\frac{x-2}{\ln x}-0\right)=\frac{x-2}{x\ln(x)}$

et puisuqe : $\lim\limits_{x\to 0^+} x-2=-2$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x)=0^-$ alors : $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x-2}{x\ln x}=+\infty$

donc : $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=+\infty$, ainsi f n'est pas dérivable à droite en 0.

Par suite la courbe (C) admet une demi tangente verticale dirigée vers le haut au point O.

2 a. ▸ **Calculons** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

Soit x un élément de $]1;+\infty[$, on a : $f(x)=\frac{x-2}{x}\times\frac{x}{\ln x}$

et puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0^+$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x}=+\infty$

et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}1-\frac{2}{x}=1$

d'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-2}{x}\times\frac{x}{\ln x}=+\infty$, finalement : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

▸ **Calculons** $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$:

On a : $\lim\limits_{x\to 1^+}\ln x=0^+$, donc : $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{1}{\ln x}=+\infty$

et puisque $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-2)=-1$, alors : $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x-2}{\ln x}=-\infty$

d'où : $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-\infty$

▸ **Calculons** $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$:

On a : $\lim\limits_{x\to 1^-}\ln x=0^-$, donc : $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{\ln(x)}=-\infty$

or : $\lim\limits_{x\to 1^-}(x-2)=-1$, donc : $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x-2}{\ln x}=+\infty$

d'où : $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=+\infty$

b. **Étudions les branches infinies de la courbe** (C):

▸ On a : $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=+\infty$, donc la droite d'équation $x=1$ est une asymptote verticale à la courbe (C).

▸ On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, calculons : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

Soit $x\in]1;+\infty[$, on a : $\frac{f(x)}{x}=\frac{x-2}{x}\times\frac{1}{\ln x}$

et comme : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}=0$

et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}1-\dfrac{2}{x}=1$, donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-2}{x}\times\dfrac{1}{\ln x}=0$

donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$

d'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$

ainsi la courbe (C) admet une branche parabolique de direction (Ox) au voisinage de $+\infty$.

3 a. Montrons que: $(\forall x\in D-\{0\})\ ;\ f'(x)=\dfrac{g(x)}{(\ln x)^2}$,

La fonction f est dérivable en tout point de $D-\{0\}$,

et on a: $(x\in D-\{0\})$, on a : $f'(x)=\dfrac{1\times\ln(x)-(x-2)\times\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}=\dfrac{\ln(x)-1+\frac{2}{x}}{(\ln(x))^2}$

Donc : $(\forall x\in D\setminus\{0\})\ ;\ f'(x)=\dfrac{g(x)}{(\ln x)^2}$

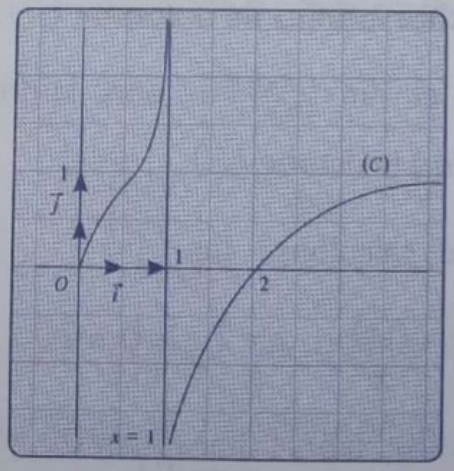
b. Le tableau de variations de f :

on a : le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$ sur $D\setminus\{0\}$, et d'après la partie (I) on a : $(\forall x\in D\setminus\{0\})\ ;\ g(x)>0$

d'où le tableau de variations de f est :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	‖	$+$	
f	0	$\nearrow$ $+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$	

c. Construction de la courbe (C): on a : $f(2)=0$



Exercice 39

1 a. Montrons que $g'(x) = \frac{x-1}{x}$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

Les fonctions : $x \longmapsto x$ et $x \longmapsto -\ln x$ sont dérivables sur l'intervalle $]0;+\infty[$, donc la fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$,

et on a : $(\forall x \in]0;+\infty[)\ ;\ g'(x) = (x - \ln x)'$

$$= 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

b. Étudions la monotonie de g sur $]0;+\infty[$:

on a : $g'(x) = \frac{x-1}{x}$ pour tout x de $]0;+\infty[$; d'où le signe de $g'(x)$ est celui de $x-1$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

On a :

x	0		1		$+\infty$
$x-1$	‖	$-$	0	$+$	

donc : $(\forall x \in]0;1])\ ;\ g'(x) \leq 0$

et $(\forall x \in [1;+\infty[)\ ;\ g'(x) \geq 0$

d'où : g est croissante sur $[1;+\infty[$ est décroissante sur l'intervalle $]0;1]$.

c. Déduction :

On a: la fonction : ▸ g est décroissante sur $]0;1]$, donc :

$$0 < x \leq 1 \Longrightarrow g(x) \geq g(1)$$

et ▸ g est croissante sur $[1;+\infty[$, donc : $x \geqslant 1 \Rightarrow g(x) \geqslant g(1)$

d'où : $(\forall x \in]0;+\infty[)\ ; g(x) \geq g(1)$

et puisque : $g(1) = 1 - \ln(1) = 1$, alors : $g(1) > 0$

Finalement : $(\forall x \in]0;+\infty[)\ ; g(x) > 0$

2ème méthode :

le tableau de variations de g est:

d'après le tableau de variations de g ,

on a g admet 1 comme valeur minimale absolue.

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	
g	‖	↘	1	↗	

Donc : $(\forall x > 0)\ ;\ g(x) \geq 1$ d'où : $(\forall x > 0)\ ;\ g(x) > 0$

2 a. Montrons que : $(\forall x \in]0;+\infty[); (x-1)\ln x \geq 0$

Déterminons le signe de $(x-1)\ln x$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

le tableau de signes de $(x-1)\ln x$:

x	0		1		$+\infty$
$x-1$	‖	$-$	0	$+$	
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$	
$(x-1)\ln x$	‖	$+$	0	$+$	

Donc : $(\forall x \in]0;+\infty[) ; (x-1)\ln x \geq 0$

b. **Déduction :**

Soit x un élément de $]0;+\infty[$; on a, d'après ce qui précède $g(x) > 0$ et $(x-1)\ln(x) \geq 0$ donc : $g(x) + (x-1)\ln x > 0$

Finalement : $g(x) + (x-1)\ln x > 0$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

II 1 a. **Montrons que :** $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

on a : $\lim\limits_{x \to 0^+} x\ln x = 0$, donc : $\lim\limits_{x \to 0^+} 1 + x\ln x = 1$

et puisque : $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ alors : $\lim\limits_{x \to 0^+} (\ln x)^2 = +\infty$

d'où : $\lim\limits_{x \to 0^+} -(\ln x)^2 = -\infty$

par suite : $\lim\limits_{x \to 0^+} 1 + x\ln x - (\ln x)^2 = -\infty$

finalement : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

Interprétation graphique :

On a : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$, d'où la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale à la courbe (C).

b. **Montrons que :** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Soit x un élément de $]0;+\infty[$, on a:

$$f(x) = 1 + x\ln(x) - (\ln x)^2 = 1 + x\ln(x)\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)$$

et puisque : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = 1$

et on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} x\ln x = +\infty$, par suite : $\lim\limits_{x \to +\infty} x\ln(x)\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$

d'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + x\ln(x)\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$, c'est-à-dire : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Montrons que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$

Soit $x\in]0;+\infty[$, on a : $f(x)=1+x\ln(x)\left(1-\dfrac{\ln x}{x}\right)$

d'où : $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{1}{x}+\ln(x)\left(1-\dfrac{\ln x}{x}\right)$

et puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}1-\dfrac{\ln x}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$

alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)\left(1-\dfrac{\ln x}{x}\right)=+\infty$, et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$

donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}+\ln(x)\left(1-\dfrac{\ln x}{x}\right)+\infty$ finalement : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$

Déduction :

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$, donc la courbe (C) admet une branche parabolique de direction (Oy) au voisinage de $+\infty$.

2 a. Montrons que : $(\forall x>0);f'(x)=\dfrac{g(x)+(x-1)\ln x}{x}$

On a : la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$, et on a :

$$\begin{aligned}(\forall x\in]0;+\infty[);f'(x) &= (1+x\ln(x)-(\ln x)^2)'\\ &= \ln(x)+x\times\frac{1}{x}-2\times\frac{1}{x}\times\ln(x)\\ &= \ln(x)+1-\frac{2\ln(x)}{x}=\frac{x\ln(x)+x-2\ln(x)}{x}\end{aligned}$$

et puisque : $\begin{aligned}x\ln(x)+x-2\ln(x) &= (x-1)\ln(x)+x-\ln(x)\\ &= (x-1)\ln(x)+g(x)\end{aligned}$

Alors : $(\forall x\in]0;+\infty[);f'(x)=\dfrac{g(x)+(x-1)\ln x}{x}$

b. Déduction :

On a : $(\forall x>0);f'(x)=\dfrac{g(x)+(x-1)\ln x}{x}$

d'où le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)+(x-1)\ln x$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$,

on a : $g(x)+(x-1)\ln x>0$ (d'après la question $(I\ \ 2\ \text{ب})$) d'où :

$(\forall x>0);f'(x)>0$

Finalement la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Tableau de variations de f **:**

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
f	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

3 ▸ **Montrons que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $]0;+\infty[$.**

Les fonctions $x \longmapsto \ln x$ et $x \longmapsto x$ sont continues sur l'intervalle $]0;+\infty[$, donc la fonction f est continue sur $]0;+\infty[$ (somme de deux fonctions continues).

on a: la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$, donc :

$$f(]0;+\infty[) = \left]\lim_{x\to 0^+} f(x) ; \lim_{x\to -\infty} f(x)\right[=]-\infty ; +\infty[= \mathbb{R}$$

et puisque $0 \in \mathbb{R}$ alors l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

▸ **Montrons que : $\frac{1}{e} < \alpha < \frac{1}{2}$**

on a : $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{\ln(2)}{2} - \ln^2(2) \simeq 0,17$

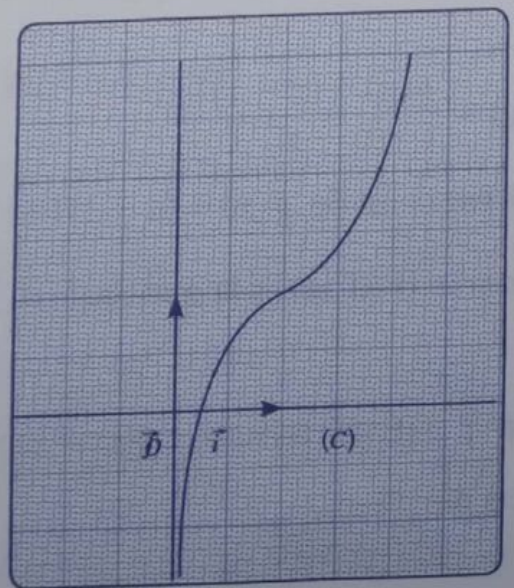
et $f\left(\frac{1}{e}\right) = 1 - e - 1 = -e$

d'où : $f\left(\frac{1}{e}\right) f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

et on a f est continue et strictement croissante sur $\left[\frac{1}{e};\frac{1}{2}\right]$

Donc : $\frac{1}{e} < \alpha < \frac{1}{2}$

4 **La courbe (C)**



Exercice 40

I 1 Montrons que : $(\forall x\in]0;+\infty[)\,;\,g'(x)=\dfrac{x-1}{x(\sqrt{x}+1)}$

Les fonctions : $x\longmapsto \ln x$ et $x\longmapsto 2\sqrt{x}-2$ sont dérivables sur $]0;+\infty[$, donc la fonction g est dérivable sur $]0;+\infty[$ (somme de deux fonctions dérivables) et on a :

$$\begin{aligned}(\forall x\in]0;+\infty[);g'(x) &= (2\sqrt{x}-2-\ln x)'\\ &= 2\times\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}\\ &= \frac{\sqrt{x}-1}{x}=\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{x(\sqrt{x}+1)}=\frac{x-1}{x(\sqrt{x}+1)}\end{aligned}$$

2 Étudions les variations de g sur $]0;+\infty[$:

On a : $g'(x)=\dfrac{x-1}{x(\sqrt{x}+1)}$ pour tout x de $]0;+\infty[$, donc le signe de $g'(x)$ est celui de $x-1$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

on a : $(\forall x\in]0;1])\,;\,g'(x)\le 0$ et $(\forall x\in[1;+\infty[)\,;\,g'(x)\ge 0$

donc : g est décroissante sur $]0;1]$, et croissante sur $[1;+\infty[$.

3 Déduction :

On a la fonction g est décroissante sur l'intervalle $]0;1]$, donc :

$$\begin{aligned}0<x\le 1 &\Longrightarrow g(x)\ge g(1)\\ &\Longrightarrow g(x)\ge 0\end{aligned}$$

et g est croissante sur $[1;+\infty[$, donc : $x\ge 1 \Longrightarrow g(x)\ge g(1)$
$\Longrightarrow g(x)\ge 0$

Finalement : $(\forall x\in]0;+\infty[)\,;\,g(x)\ge 0$

II 1 a. Montrons que : $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\ln x=0$

Soit $x\in]0;+\infty[$, on a : $\ln\sqrt{x}=\dfrac{1}{2}\ln x$, donc : $\ln x=2\ln\sqrt{x}$

si on pose : $t=\sqrt{x}$, alors : $x\longrightarrow 0^+\Longleftrightarrow t\longrightarrow 0^+$

d'où : $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}2\sqrt{x}\ln\sqrt{x}=\lim\limits_{t\to 0^+}2t\ln t=0$

b. Montrons que la fonction f est continue à droite en 0:

On a : $\lim\limits_{x\to 0^+}x=0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\ln x=0$

donc : $\lim\limits_{x\to 0^+}x-x\sqrt{x}\ln x=0$, c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$

on a : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$, donc : f est continue à droite en 0.

2 Étudions la dérivabilité de f à droite en 0:

Soit $x \in]0;+\infty[$,

on a : $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{x-\sqrt{x}\ln(x)}{x-0} = 1-\dfrac{\sqrt{x}\ln x}{x} = 1-\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

et puisque : $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ alors : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} = -\infty$

d'où : $\lim\limits_{x\to 0^+} 1-\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} = +\infty$, ainsi : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$

donc : f n'est pas dérivable à droite en 0.

▸ **Interprétation graphique :**

On a : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$, donc la courbe (C) admet une demi tangente verticale dirigée vers le haut au point O.

3 a. Montrons que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} = +\infty$

Soit x un élément de $]0;+\infty[$, si on pose: $t = \sqrt{x}$, alors: $x \longrightarrow +\infty \Longleftrightarrow t \longrightarrow +\infty$.

d'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{t\to+\infty} 2\dfrac{\ln t}{t} = 0$

▸ **Déduction :**

Soit x un réel tel que $x > 0$: $f(x) = x\left(1-\dfrac{\sqrt{x}\ln x}{x}\right) = x\left(1-\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)$

et puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

Alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\right) = +\infty$, ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

b. ▸ Montrons que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = 1$

Soit $x \in]0;+\infty[$, on a : $\dfrac{f(x)}{x} = 1-\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

et puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} = 1$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = 1$

▸ **Montrons que :** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = -\infty$

Soit x un réel tel que $x > 0$, on a : $f(x) = x-\sqrt{x}\ln x$, donc : $f(x)-x = -\sqrt{x}\ln x$

et puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x = +\infty$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}(-\sqrt{x}\ln x) = -\infty$

Finalement : $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=-\infty$

c. Déterminons la nature de la branche infinie :

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-x=-\infty$

Donc la courbe (C) admet une branche parabolique de direction la droite $y=x$ au voisinage de $+\infty$.

4 Étudions la position relative de la courbe (C) par rapport la droite (Δ):

Soit x un réel tel que $x>0$, on a : $f(x)-x=-\sqrt{x}\ln x$

Le signe de $f(x)-x$ est celui de $-\ln(x)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

et on a :

x	0		1		$+\infty$
$-\ln x$	‖	$+$	0	$-$	

Le tableau ci-dessous résume la position relative de (C) et (Δ) :(on a: $f(0)=0$)

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-x$	0	$+$	0	$-$	
Position relative	(C) est au dessus de (Δ)		(C) est au dessous de (Δ)		

La courbe (C) coupe la droite (Δ) au point de $A(1;1)$ et $O(0;0)$.

5 a. Montrons que : $(\forall x\in]0;+\infty[)\ ;\ f'(x)=\dfrac{g(x)}{2\sqrt{x}}$

Les fonctions : $x\longmapsto x$ et $x\longmapsto\sqrt{x}$ et $x\longmapsto\ln x$ sont dérivables sur $]0;+\infty[$, donc la fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$, (somme et produit de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$) :

et on a : $(\forall x\in]0;+\infty[);f'(x)=(x-\sqrt{x}\ln x)'$

$$=1-\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x-\sqrt{x}\times\frac{1}{x}$$

$$=1-\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$=\frac{2\sqrt{x}-2-\ln x}{2\sqrt{x}}=\frac{g(x)}{2\sqrt{x}}$$

b. Tableau de variations de f :

On a : $(\forall x>0)\ ;\ f'(x)=\dfrac{g(x)}{2\sqrt{x}}$

donc le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

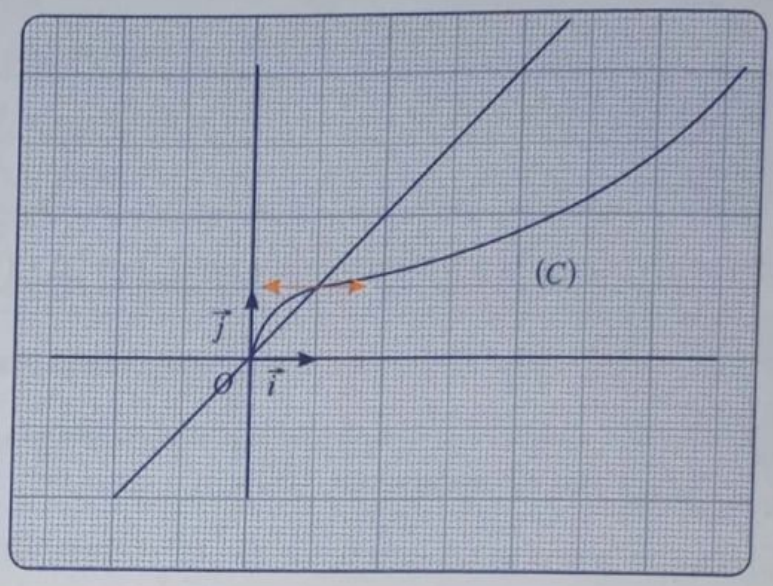
et d'après 1 on a : $g(x) \geq 0$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

d'où : $(\forall x > 0)$; $f'(x) \geq 0$ et $(f'(1) = 0)$.

Le tableau de variations f est :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$+$	
f	‖ 0	↗		↗	$+\infty$

6 **La courbe :**



Exercice 41

1 1 ▸ **Calculons** $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$ **et** $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ **:**

on a : $\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 + 1 = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$,

donc : $\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 + 1 + \ln x = -\infty$, par suite : $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = -\infty$

▸ **Calculons** $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ **:**

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 + 1 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$,

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 + 1 + \ln x = +\infty$, par suite : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

2 **Calculons** $g'(x)$ **pour tout** x **de** $]0;+\infty[$ **:**

Les fonctions : $x \longmapsto \ln x$ et $x \longmapsto x^2 + 1$ sont dérivables sur $]0;+\infty[$, donc la fonction g est dérivable sur $]0;+\infty[$ (somme de deux fonctions dérivables).

et on a : $(\forall x \in]0;+\infty[); g'(x) = (x^2 + \ln(x) + 1)' = 2x + \frac{1}{x}$

Tableau de variations de g :

On a : $2x+\frac{1}{x}>0$ pour tout x de $]0;+\infty[$, donc : $g'(x)>0$ pour tout x de $]0;+\infty[$, donc la fonction g est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

d'où le tableau de variation de g :

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	
g	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

3 Déduction :

On a : $g(1)=2$, et la fonction g est croissante sur $]0;+\infty[$.

donc : $0<x<1 \Longrightarrow g(x)<g(1)$

$\Longrightarrow g(x)-2<0$

et $x>1 \Longrightarrow g(x)>g(1)$

$\Longrightarrow g(x)-2>0$

finalement : $\begin{cases}(\forall x\in]0;1[) & g(x)-2<0\\ (\forall x\in]1;+\infty[) & g(x)-2>0\end{cases}$

II 1 a. Calculons : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

▸ on a : $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x}=-\infty$

et on a : $\lim\limits_{x\to 0^+}x=0$, donc : $\lim\limits_{x\to 0^+}x-\frac{\ln x}{x}=+\infty$

finalement : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$

▸ On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$,

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}x-\frac{\ln x}{x}=+\infty$, c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

b. Étudions des branches infinies :

▸ On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$, donc la droite d'équation $x=0$ est une asymptote verticale à la courbe (C).

▸ On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{\ln x}{x}\right)=0$

donc la droite d'équation $y=x$ est une asymptote oblique à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

c. Étudions la position de la courbe (C) et (D):

Soit $x \in]0;+\infty[$, on a : $f(x)-x=-\dfrac{\ln x}{x}$

donc le signe de $f(x)-x$ est celui de $-\ln x$ sur $]0;+\infty[$.

On a :

x	0		1		$+\infty$
$-\ln x$	‖	$+$	0	$-$	

Le tableau suivant résume la position de la courbe (C) par rapport à (D):

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-x$	‖	$+$	0	$-$	
Position relative	‖	(C) est au dessus de (D)	elles se coupent	(C) est au dessous de (D)	

2 a. Montrons que : $(\forall x \in]0;+\infty[)\ ; f'(x)=\dfrac{g(x)-2}{x^2}$

Les fonctions : $x \longmapsto \ln x$ et $x \longmapsto x$ et $x \longmapsto \dfrac{-1}{x}$ sont dérivables sur $]0;+\infty[$, donc f est dérivable sur $]0;+\infty[$ (somme et produit de fonctions dérivables).

on a : $(\forall x>0); f'(x) = \left(x-\dfrac{\ln x}{x}\right)'$

$$= 1-\frac{x\times\frac{1}{x}-\ln x}{x^2}$$

$$= 1-\frac{1-\ln x}{x^2}=\frac{x^2-1+\ln x}{x^2}$$

et on a : $g(x)-2=x^2+\ln(x)+1-2=x^2-1+\ln(x)$

donc : $(\forall x \in]0;+\infty[)\ ;\ f'(x)=\dfrac{g(x)-2}{x^2}$

b. Tableau de variations de f :

On a : $(\forall x>0)\ ;\ f'(x)=\dfrac{g(x)-2}{x^2}$

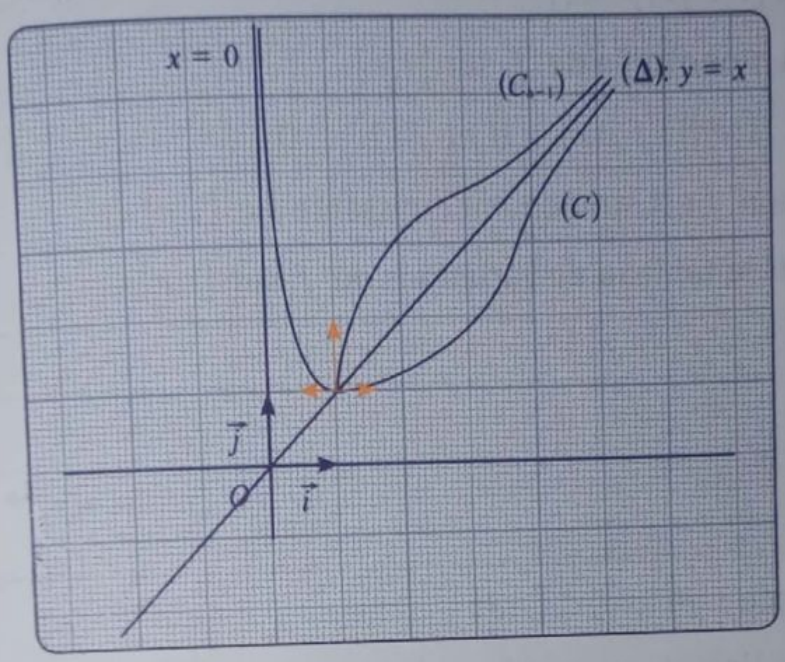
le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)-2$ sur $]0;+\infty[$.

d'après la partie I) on a : $\begin{cases} f'(x)=0 \iff x=1 \\ f'(x)<0 \iff x\in]0;1[\\ f'(x)>0 \iff x\in]1;+\infty[\end{cases}$

d'où le tableau de variations de f est :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

3 **Traçons la courbe (C) :**



4 a. **Montrons que h admet une fonction réciproque :**

On a : la fonction h est continue et strictement croissante sur $[1;+\infty[$ donc, elle admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur l'intervalle $J = h(I)$;

tel que : $J = f([1;+\infty[) = [f(1); \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[= [1;+\infty[$

b. **Calculons $(h^{-1})'\left(e-\frac{1}{e}\right)$:**

On a : $h(e) = e - \frac{1}{e}$ donc : $(h^{-1})\left(e-\frac{1}{e}\right) = e$

et puisque h est dérivable en e et $h'(e) = 1$.

c'est-à-dire : $h'(e) \neq 0$, donc h^{-1} est dérivable en $e-\frac{1}{e}$ et on a:

$$(h^{-1})'\left(e-\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{h'(e)} = 1$$

c) Traçons $(C_{h^{-1}})$:

$(C_{h^{-1}})$ est le symétrique de la courbe de h par rapport à la première bissectrice dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ sur l'intervalle $[1;+\infty[$ (voir figure) .

Exercice 42

1 a. Calculons $f'(x)$ pour tout x de l'intervalle $[1;e]$:.

La fonction f est dérivable sur $[1;e]$.

Pour tout élément x de $[1;e]$ on a : $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

et puisque $(\forall x \in [1;e]) : (x-1 \geq 0 \ et \ x > 0)$

alors : $(\forall x \in [1;e]) ; f'(x) \geq 0$

▸ **Étudions la monotonie de f sur $[1;e]$.**

on a : $(\forall x \in [1;e]) ; f'(x) \geq 0$ et $f'(1) = 0$

d'où la fonction f est strictement croissante sur $[1;e]$.

b. Dressons le tableau de variations de f sur $[1;e]$.

x	1		e
$f'(x)$	0	$+$	
f	2	↗	e

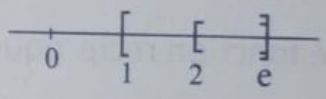
▸ **Montrons que : $f([1;e]) \subset [1;e]$**

On a : la fonction f est continue et strictement croissante sur $[1;e]$ donc:

$f([1;e]) = [f(1) ; f(e)] = [2;e]$

et puisque : $[2;e] \subset [1;e]$

alors: $f([1;e]) \subset [1;e]$



2 a. - Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ 1 \leq u_n \leq e$

- pour $n = 0$ on a : $u_0 = 1$ donc : $1 \leq u_0 \leq e$
- soit n un élément de $\mathbb{N}$.

supposons que $1 \leq u_n \leq e$ et montrons que : $1 \leq u_{n+1} \leq e$

on a :

$$1 \leq u_n \leq e \implies f(1) \leq f(u_n) \leq f(e)$$
$$\implies 2 \leq u_{n+1} \leq e$$
$$\implies 1 \leq u_{n+1} \leq e$$

Donc la propriété est vraie pour $n+1$.

D'où d'après le principe de la récurrence on a : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ 1 \leq u_n \leq e$

b. ▸ Montrons que la suite (u_n) est croissante:

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = 1 - \ln(u_n)$

on a : $u_n \leq e \Longrightarrow \ln(u_n) \leq \ln(e)$

$\Longrightarrow \ln(u_n) \leq 1$

$\Longrightarrow 1 - \ln(u_n) \geq 0$

$\Longrightarrow u_{n+1} - u_n \geq 0$

donc : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} - u_n \geq 0$

d'où la suite (u_n) est croissante.

▸ Déduction : (u_n) est croissante majorée par e donc elle est convergente.

c. **Montrons que :** $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = e$

on a : ▸ f est continue sur $[1;e]$

▸ $f([1;e]) \subset [1;e]$

▸ $u_0 \in [1;e]$

▸ $(\forall n \in IN)$; $u_{n+1} = f(u_n)$

▸ (u_n) est convergente.

donc la limite de (u_n) est la solution de l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $[1;e]$.

Résolvons dans $[1;e]$ l'équation $f(x) = x$:

Soit x un élément de $[1;e]$, on a : $f(x) = x \iff x + 1 - \ln x = x$

$\iff \ln x = 1$

$\iff \ln x = \ln e$

$\iff x = e$

donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = e$

Exercice 43

1 Montrons que : $(\forall x > -1)$; $g'(x) = \dfrac{2(x+1)^2 + 1}{x+1}$

On a : la fonction $x \longmapsto x + 1$ est dérivable strictement positive sur $]-1; +\infty[$,

donc la fonction $x \longmapsto \ln(x+1)$ est dérivable sur $]0; +\infty[$.

de même, la fonction $x \longmapsto (x+1)^2 - 1$ est dérivable sur $]-1; +\infty[$.

donc la fonction f est dérivable sur $]-1; +\infty[$, (somme de deux fonctions dérivables)

et on a : $(\forall x \in]-1; +\infty[); g'(x) = ((1+x)^2 - 1 + \ln(x+1))'$

$= 2(1+x) + \dfrac{1}{x+1}$

$= \dfrac{2(1+x)^2 + 1}{(x+1)}$

2 Tableau de variations de g :

- on a : $\lim\limits_{x\to -1^+} x+1=0^+$, donc : $\lim\limits_{x\to -1^+} \ln(x+1)=-\infty$

et on a : $\lim\limits_{x\to -1^+} (1+x)^2-1=-1$, donc : $\lim\limits_{x\to -1^+} (x+1)^2-1+\ln(x+1)=-\infty$

c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to -1^+} g(x)=-\infty$

- On a : $\lim\limits_{x\to +\infty} x+1=+\infty$, donc : $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x+1)=+\infty$

et puisque : $\lim\limits_{x\to +\infty} (1+x)^2-1=+\infty$, alors : $\lim\limits_{x\to +\infty} (1+x)^2-1+\ln(x+1)=+\infty$

par suite : $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)=+\infty$

- Soit x un réel; tel que: $x>-1$, on a : $2(x+1)^2+1>0$ et $x+1>0$

donc: $\dfrac{2(x+1)^2+1}{x+1}>0$,

c'est-à-dire : $g'(x)>0$ finalement : $(\forall x>-1)\,;g'(x)>0$

d'où le tableau de variations de g est :

x	-1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	
g	$-\infty$ ‖	↗	$+\infty$

3 Déduction :

On a : g est strictement croissante sur $]-1;+\infty[$ et $g(0)=0$.

Soit $x\in]-1;+\infty[$, on a : $-1<x\leq 0 \Longrightarrow g(x)\leq g(0)$

$\Longrightarrow g(x)\leq 0$

et $x\geq 0 \Longrightarrow g(x)\geq g(0)$

$\Longrightarrow g(x)\geq 0$

Finalement : $\begin{cases}(\forall x\in]-1;0]) & ; g(x)\leq 0\\ (\forall x\in[0;+\infty[) & ; g(x)\geq 0\end{cases}$

II 1 Montrons que : $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=+\infty$

On a : $\lim\limits_{x\to -1^+} (x+1)=0^+$, donc : $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{1}{x+1}=+\infty$

et $\lim\limits_{x\to -1^+} \ln(x+1)=-\infty$, d'où : $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{\ln(x+1)}{x+1}=-\infty$

donc : $\lim\limits_{x\to -1^+} x-\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}=+\infty$, finalement : $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=+\infty$

Interprétation graphique :

On a : $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$, donc la droite d'équation $x = -1$ est une asymptote verticale à la courbe (C).

2 a. ▸ **Montrons que :** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Soit x un réel, tel que : $x > -1$, on pose : $t = x + 1$; on a : $x \longrightarrow +\infty \iff t \longrightarrow +\infty$

d'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\ln t}{t} = 0$

et puisque : $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$, alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} x - \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} = +\infty$

donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

▸ **Montrons que :** $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x) = 0$

Soit x un réel, tel que : $x > -1$, on a : $f(x) = x - \dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$, donc : $f(x) - x = -\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$

et puisque : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$, alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x) = 0$

b. Nature de la branches infinie :

on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x) = 0$, donc la droite d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

3 Étude de la position relative de (C) par rapport à (Δ) :

Soit x un réel, tel que : $x > -1$, on a : $f(x) = x - \dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$

donc : $f(x) - x = -\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$

on a : $x + 1 > 0$, donc le signe de $f(x) - x$ est celui de $-\ln(x+1)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

on a : $\ln(x+1) = 0 \iff x + 1 = 1$

$\iff x = 0$

et $\ln(x+1) > 0 \iff x + 1 > 1$

$\iff x > 0$

le tableau suivant résume la position relative de la courbe (C) par rapport à (Δ) :

x	1		0		$+\infty$
$f(x) - x$		$+$	0	$-$	
Position relative		(C) est au dessus de (Δ)	elles se coupent	(C) est au dessous de (Δ)	

4 a. **Montrons que :** $(\forall x \in]-1;+\infty[)\,;\, f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$

La fonction f est dérivable sur $]-1;+\infty[$,

et on a :

$$(\forall x > -1); f'(x) = \left(x - \frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)' 1 - \frac{\frac{1}{x+1}\times(x+1) - \ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$= 1 - \frac{1-\ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - 1 + \ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$$

b. **Tableau de variations de f :**

Soit $x > -1$, on a : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$ et $(x+1)^2 > 0$

donc le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$ sur l'intervalle $]-1;+\infty[$.

et d'après la parie (I), le tableau de variations de f est :

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

c. **Montrons que :** $f([0;4]) \subset [0;4]$

on a : f est continue et strictement croissante sur $[0;4]$,

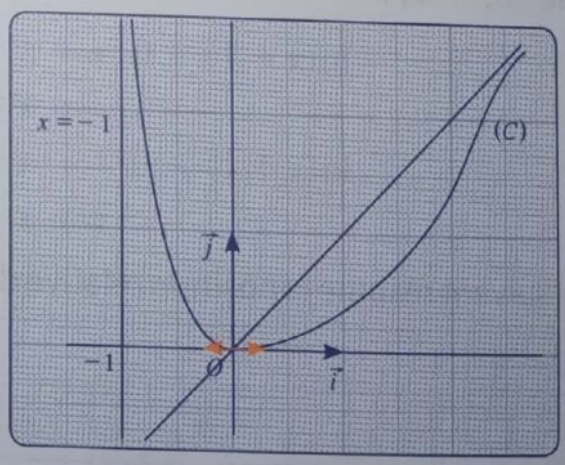
donc : $f([0;4]) = [f(0)\,;\, f(4)]$

et comme : $f(0) = 0$ et $f(4) = 4 - \dfrac{\ln(5)}{5}$ et $4 - \dfrac{\ln(5)}{5} \leq 4$

alors : $f(4) \leq 4$ par suite : $[f(0)\,;\, f(4)] \subset [0;4]$

d'où : $f([0;4]) \subset [0;4]$

5 La construction de (C) :



6 a. Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; 0 \leq u_n \leq 4$

pour $n = 0$, on a : $u_0 = 4$ et $0 \leq 4 \leq 4$

donc : $0 \leq u_0 \leq 4$

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que : $0 \leq u_n \leq 4$ montrons que $0 \leq u_{n+1} \leq 4$

ona: $u_n \in [0;4]$ et $f([0;4]) \subset [0;4]$, donc: $f(u_n) \in [0;4]$ c'est-à-dire: $u_{n+1} \in [0;4]$

d'où : $0 \leq u_{n+1} \leq 4$, par suite la propriété est vraie pour $n+1$.

d'après le principe de la récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; 0 \leq u_n \leq 4$

b. Montrons que la suite (u_n) est décroissante:

Soit n un élément de $\mathbb{N}$.

d'après la question **II 3** : $(\forall x \in [0; +\infty[)\ ; f(x) \leq x$

et puisque : $u_n \in [0;4]$ alors : $f(u_n) \leq u_n$ c'est-à-dire : $u_{n+1} \leq u_n$

donc : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; u_{n+1} \leq u_n$

d'où la suite (u_n) est décroissante.

c. Déduction :

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge.

▸ Calculons : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

On a : la fonction f est continue sur $[0;4]$ et $f([0;4]) \subset [0;4]$ et la suite (u_n) est définie par $u_0 = 4$ et $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = f(u_n)$

et puisque (u_n) converge alors sa limite est la solution de l'équation $f(x) = x$ dans $[0;4]$,

et puisque 0 est la seule solution de l'équation $f(x) = x$, sur l'intervalle $[0;4]$ alors: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

Solution 44

1 a. Montrons que f est une fonction continue à droite en 0:

On a : $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$, donc : $\lim\limits_{x \to 0^+} (\ln x)^2 = +\infty$

d'où : $\lim\limits_{x\to 0^+} 1+(\ln x)^2 = +\infty$ par suite : $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{1+(\ln x)^2} = 0$

et comme : $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$, alors : $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{1+(\ln x)^2} = 0$

donc : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$, et puisque : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$

alors la fonction f est continue à droite en 0.

b. Montrons que la fonction f est dérivable à droite en 0:

Soit x un élément de $]0;+\infty[$, on a : $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{1}{1+(\ln x)^2}$

et on a : $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{1+(\ln x)^2} = 0$, donc : $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$

d'où f est dérivable à droite en 0 et on a : $f'_d(0) = 0$

Interprétation géomètrique :

La courbe (C) admet une demi-tangente horizontale en O d'équation :

$\begin{cases} y = f_d'(0)(x-0)+f(0) \\ x \geq 0 \end{cases}$ c'est-à-dire : $\begin{cases} y = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$

2 a. **Vérifions que :** $(\forall x > 0)\ ; f(x) = \dfrac{1}{\frac{1}{x}+\left(\frac{2\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2}$

Soit $x \in]0;+\infty[$, on a : $\ln\sqrt{x} = \frac{1}{2}\ln(x)$, donc : $\ln x = 2\ln\sqrt{x}$

d'où : $f(x) = \frac{x}{1+(\ln x)^2} = \frac{x}{x\left(\frac{1}{x}+\frac{(\ln x)^2}{x}\right)}$

$$= \frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{(\ln x)^2}{x}} = \frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{(2\ln\sqrt{x})^2}{(\sqrt{x})^2}} = \frac{1}{\frac{1}{x}+\left(\frac{2\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2}$$

Donc : $(\forall x > 0)\ ; f(x) = \dfrac{1}{\frac{1}{x}+\left(\frac{2\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2}$

b. **Montrons que** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$:

Soit x un réel, tel que : $x > 0$, on a : $f(x) = \dfrac{1}{\frac{1}{x}+\left(\frac{2\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

posons : $t=\sqrt{x}$, alors : $x \longrightarrow +\infty \Longleftrightarrow t \longrightarrow +\infty$

on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln t}{t}=0^+$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2=0^+$

par suite : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}+\left(\dfrac{2\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2=0^+$, donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\dfrac{1}{x}+\left(\dfrac{2\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2}=+\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

c. Nature de la branche infinie:

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

Soit x un réel, tel que : $x>0$, on a : $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{1}{1+(\ln x)^2}$

et puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)^2=+\infty$, d'où: $\lim\limits_{x\to+\infty}1+(\ln x)^2=+\infty$

par suite : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+(\ln x)^2}=0$ finalement : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$

donc la courbe (C) admet une branche parabolique de direction (Ox) au voisinage de $+\infty$.

3 a. Montrons que : $(\forall x>0)\ ;\ f'(x)=\dfrac{(\ln(x)-1)^2}{(1+\ln^2(x))^2}$

On a la fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$.

Soit $x\in]0;+\infty[$, on a : $f'(x)=\left(\dfrac{x}{1+(\ln(x))^2}\right)'$

$$=\frac{1\times(1+\ln^2(x))-x\left(2\times\frac{1}{x}\ln(x)\right)}{(1+\ln^2(x))^2}$$

$$f'(x)=\frac{1+\ln^2(x)-2\ln(x)}{(1+\ln^2(x))^2}=\frac{(\ln(x)-1)^2}{(1+\ln^2(x))^2}$$

Donc : $(\forall x>0)\ ;\ f'(x)=\dfrac{(\ln(x)-1)^2}{(1+\ln^2(x))^2}$

b. Dressons le tableau de variations de f :

Soit $x>0$, on a : $(\ln(x)-1)^2\geq 0$ et $(1+\ln^2(x))^2>0$

d'où : $f'(x) \geq 0$ et $f'(e) = 0$

le tableau de variations de f est :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$+$	
f	$\|\|$	0 ↗		↗	$+\infty$

c. Équation de la tangente (T) :

On a : $f(1) = 1$ et $f'(1) = 1$ d'où l'équation de la tangente (T) est:

$y = f'(1)(x-1) + f(1) = x$ Donc : $(T) : y = x$

d. Étudions la position de la courbe (C) par rapport à la tangente (T) :

Soit $x \in]0; +\infty[$, on a : $f(x) - x = \dfrac{x}{1+(\ln x)^2} - x$

$= x\left(\dfrac{1}{1+(\ln x)^2} - 1\right) = \dfrac{-x(\ln x)^2}{1+(\ln x)^2}$

et puisque $-x(\ln x)^2 \leq 0$ et $1+(\ln x)^2 > 0$ alors : $\dfrac{-x(\ln x)^2}{1+(\ln x)^2} \leq 0$

d'où : $f(x) \leq x$

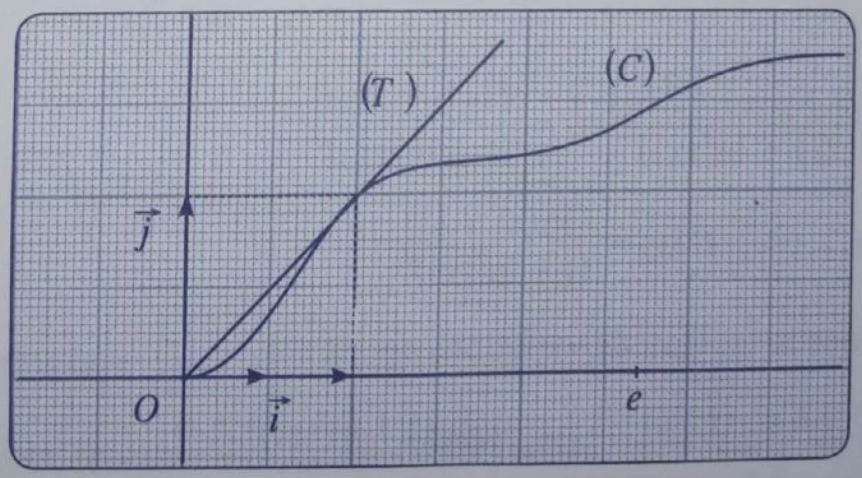
et on a : $((\forall x > 0) ; f(x) = x \iff \ln x = 0)$ et $f(0) = 0$

$\iff x = 1$

donc : $(\forall x \geqslant 0)$; $f(x) \leqslant x$,

d'où la courbe (C) est au dessous de (T).

4 Traçons la courbe (C) :



5 a. **Montrons par récurrence que :** $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 \leq u_n \leq e$

Pour $n = 0$, on a : $u_0 = 1$ et $1 \leq 1 \leq e$. donc : $1 \leq u_0 \leq e$

soit $n \in \mathbb{N}$; supposons que: $1 \leq u_n \leq e$ et montrons que : $1 \leq u_{n+1} \leq e$

on a: f est croissante sur $[0; +\infty[$, donc : $1 \leq u_n \leq e \Longrightarrow f(1) \leq f(u_n) \leq f(e)$

$$\Longrightarrow 1 \leq u_{n+1} \leq \frac{e}{2}$$

et on a : $\frac{e}{2} \leq e$ donc $1 \leq u_{n+1} \leq e$, c'est-à-dire la propriété est vraie pour $n+1$.

et d'après le principe de la récurrence : $(\forall n \in IN); 1 \leq u_n \leq e$

b. **Étudions la monotonie de la suite** (u_n)**:**

d'après la question 3)d), on a : $(\forall x \geq 0)$; $f(x) \leq x$

soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n \geq 0$,

d'où : $f(u_n) \leq u_n$, c'est-à-dire : $u_{n+1} \leq u_n$

donc : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} \leq u_n$

ainsi la suite (u_n) est décroissante.

c. **Déduction :**

La suite (u_n) est décroissante est minorée par 1, donc elle converge.

Calculons $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$:

La fonction f est continue sur $[1;e]$ et $f([1;e]) \subset [1;e]$

et la suite (u_n) est définie par : $u_0 \in [1;e]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

La suite (u_n) est convergente donc sa limite est la solution de l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $[1;e]$.

Puisque 0 et 1 sont les solutions de l'équation $f(x) = x$ et $0 \notin [1;e]$ et $1 \in [1;e]$ alors : $\lim u_n = 1$.

CONTENUS	PAGES
Introduction	3
Activités préliminaires	4
Continuité d'une fonction numérique	41
Dérivation et ses applications - Étude des fonctions	101
Suites numériques	257
Fonctions logarithmes	326

LIBRAIRIE ES-SALAM AL-JADIDA
31/34 Place My Youssef - Habouss - Casablanca
Tel.: 05-22-30-40-16 / 05-22-30-37-11
Fax: 05-22-44-10-47
E-mail: lib.essalam@menara.ma
lib.essalam@hotmail.fr - lib.essalam@gmail.com
www.librairieessalam.com

ISSN 2508-9838
ISBN 978-9954-682-02-9

Prix de vente public:
90,00 DH

9 789954 682029