AL MOFIDE EN MATHÉMATIQUES

2ème Année Du Cycle De Baccalauréat

Sciences Expérimentales et ses filières

Sciences et Technologies Industrielles et ses filières

Abdesslem HAKKANI
Inspecteur principal de l'enseignement
secondaire qualifiant
Coordinateur

Hicham AJANA
Inspecteur de l'enseignement
secondaire qualifiant

Ahmed SANI
Inspecteur de mathématiques
Enseignant chercheur

Abderrahman AGOURRAM
Professeur principal
de l'enseignement secondaire qualifiant

Mohamed GHOUZAILI
Professeur principal
de l'enseignement secondaire qualifiant

Mostafa FAHMI
Inspecteur principal de l'enseignement
secondaire qualifiant

LIVRE DE L'ÉLÈVE

For more visit: L9ray.com

L9RAY

Imprimerie Fabricant du Livre Edition 2018
dépote légale 2018MO4144
isbn 978-9954-613-72-6

For more visit: L9ray.com

L9RAY

AVANT-PROPOS

C'est dans le cadre de la réforme globale du système éducatif et selon les développements enregistrés par le curriculum, que ce manuel a été élaboré. Il s'adresse aux élèves du 2ème année du baccalauréat (Sciences Expérimentales et Technologies Industrielles) ; il accompagne ainsi une étape cruciale importante du cursus scolaire des élèves.

Cette étape se caractérise par :

- L'acquisition d'un bagage cognitif mathématique permettant l'amélioration de l'apprentissage ;
- L'émergence d'aptitudes et de capacités facilitant l'orientation vers des études appropriées meilleures.

L'élaboration de ce livre a donc tenu compte des considérations et caractéristiques suivantes :

- Maintien, organisation et perfectionnement des acquis.
- Introduction de chaque chapitre par des activités préparatoires qui incitent l'élève à l'adhésion et à l'engagement dans son apprentissage. Ces activités représentent un trait d'union entre les prérequis et les « nouveaux » savoirs et savoirs - faire.
- Consolidation des savoirs et savoirs - faire fondamentaux par le biais d'exemples et d'applications qui jalonnent la totalité de l'ouvrage et qui favorisent la fixation des concepts et leurs appréhension.
- Proposition d'exercices résolus et commentés qui conduisent à la confirmation des notions et leur assimilation à travers l'application fonctionnelle, au contrôle du degré d'acquisition et de la qualité de maîtrise aussi bien que l'entraînement à la formulation rigoureuse du raisonnement.
- Proposition d'exercices et problèmes nombreux, diversifiés et catégorisés comme suit :
  - Exercices d'application.
  - Exercices de perfectionnement.
  - Problème de synthèse.
  - Extrait des examens du baccalauréat.

Les exercices et les problèmes proposés sont calibrés en fonction des capacités exigibles et sont classés selon le degré de difficulté. Dans tous les cas, ces exercices permettent de montrer la pertinence et l'efficacité des outils mathématiques dans des situations variées.

En conclusion, nous souhaitons que ce manuel soit un moyen d'éclairement pour les enseignants et un outil profitable aux élèves.

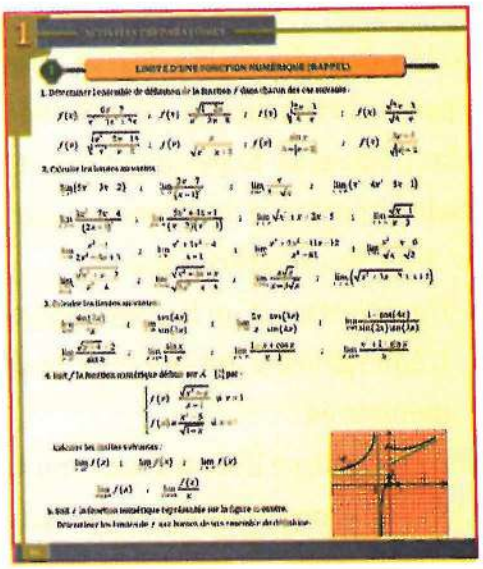
Finalement, le manuel scolaire reste un instrument pédagogique efficient que le professeur investit pour réaliser les ambitions auxquelles il aspire. C'est dans cette optique qu'il a été conçu.

For more visit: L9ray.com

COMMENT J'UTILISE CE LIVRE ?

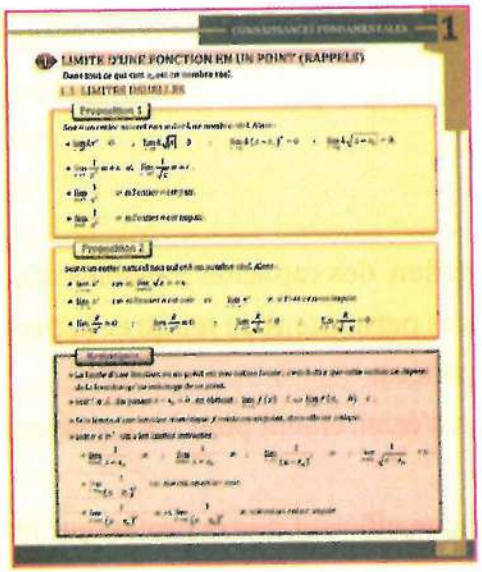


Cette page présente les principaux titres, les capacités attendues et un aperçu historique sur des savants mathématiciens.



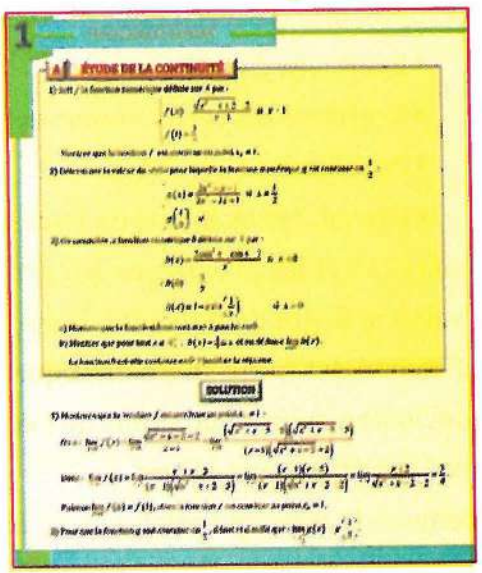
Ces activités facilitent la construction du savoir en se référant aux prérequis.

On trouve, à ce stade, les savoirs fondamentaux, les règles et les formules qui ont été établies.

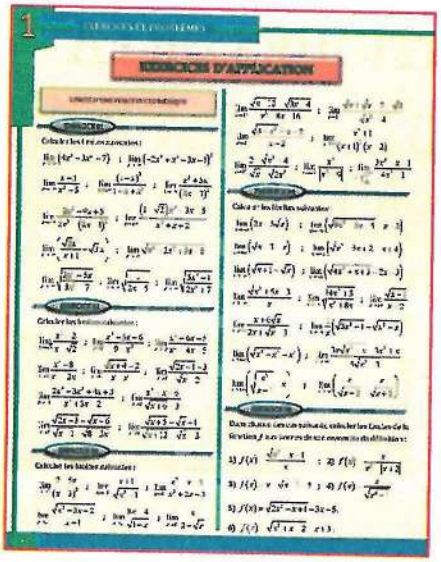


Méthodes Et Astuces

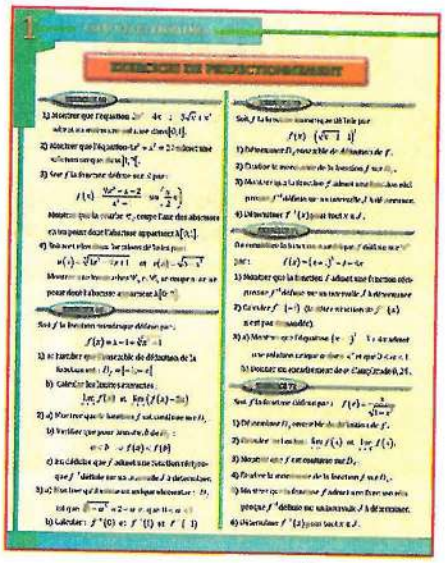
Ce type d'exercices permet de consolider le savoir, de l'investir et de s'exercer au raisonnement.



For more visit: L9ray.com



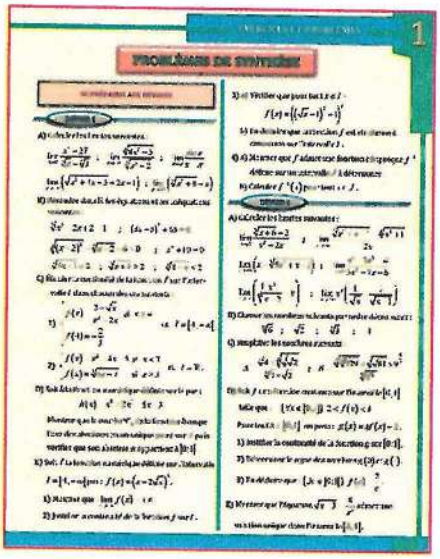
Exercices d'Applications
Exercices d'évaluation et d'application immédiate des apprentissages.

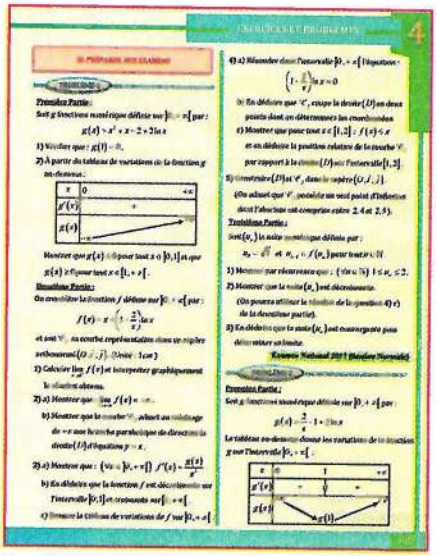


Exercices de Perfectionnement
Ces exercices permettent l'amélioration des apprentissages et leur évolution ver: la maîtrise, la perfection et l'enrichissement des acquis.

Se Préparer Aux Devoirs
Exercices d'évaluation qui nécessitent une organisation des acquis et la mobilisation des ressources.

Se Préparer Aux Examens
Problèmes de synthèse extraits des anciennes épreuves posées au bac. C'est la phase d'intégration des apprentissages et l'investissement du savoir sous ses différents aspects.





For more visit: L9ray.com

PROGRAMME DE MATHÉMATIQUES DE LA DEUXIÈME ANNÉE DU CYCLE DU BACCALAURÉAT SCIENCES EXPÉRIMENTALES

Contenu Du Programme	Capacités Attendues	Recommandations Pédagogiques
I ANALYSE MATHÉMATIQUE		
1 Suites Numériques		
I. Limite d'une suite numérique : • Limite des suites numériques de référence : $(n)_{n\geq 0}$, $(n^2)_{n\geq 0}$, $(n^3)_{n\geq 0}$, $(\sqrt{n})_{n\geq 0}$ et $(n^p)_{n\geq 0}$ où p est un entier naturel ; • Limite des suites numériques de référence : $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$, $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\geq 1}$, $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$ et $\left(\frac{1}{n^p}\right)_{n\geq 1}$ où p est un entier naturel ; • Suite convergente ; • Critères de convergence ; convergence d'une suite croissante et majorée ; convergence d'une suite décroissante et minorée ; • Suite divergente ; • Opérations sur les limites de suites ; limites et ordre	• Utiliser les suites arithmétiques et les suites géométriques pour étudier des exemples de suites de la forme : $u_{n+1}=au_n+b$ et $u_{n+1}=\frac{au_n+b}{cu_n+d}$ • Utiliser les suites de référence et les critères de convergence pour déterminer les limites de suites numériques ; • Utiliser les suites numériques pour résoudre des problèmes variés de différents domaines ; • Déterminer la limite d'une suite convergente (u_n) de la forme : $u_{n+1}=f(u_n)$ où f est une fonction continue sur un intervalle I et $f(I)\subset I$;	• Toute étude théorique de la notion de limite d'une suite est hors programme ; • En tenant compte du fait qu'une suite numérique est une fonction numérique sur l'ensemble des entiers naturels et à partir de limites de fonctions de référence ; on admettra dans une première étape les limites des suites : $(n)_{n\geq 0}$, $(n^2)_{n\geq 0}$, $(n^3)_{n\geq 0}$, $(\sqrt{n})_{n\geq 0}$ et $(n^p)_{n\geq 0}$ et les suites : $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$, $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\geq 1}$, $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$ et $\left(\frac{1}{n^p}\right)_{n\geq 1}$ où p est un entier naturel supérieur ou égal à 3 , quand n tend vers $+\infty$. • Si (v_n) est une suite numérique vérifiant : $v_n \geq u_n$ pour $n \geq p$ où (u_n) est une suite de limite $+\infty$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

For more visit: L9ray.com

		• Si (v_n) est une suite numérique vérifiant : $\lvert v_n - \ell \rvert \leq u_n$ pour $n \geq p$ où (u_n) est une suite de limite 0, alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell$. • On admettra les opérations sur les limites finies et les limites infinies et on habituera les élèves à les utiliser correctement ; • L'usage de l'outil informatique est recommandé dans ce chapitre. • On admettra les critères de convergence après leur introduction en se basant sur la compatibilité des opérations sur les suites avec l'ordre, dans des situations concrètes et progressives et ce à partir de cas particuliers • Si (u_n) est une suite numérique vérifiant : $v_n \leq u_n \leq w_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \ell$ alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$. On traitera, dans des cas particuliers, des problèmes se ramenant à l'étude des suites récurrentes de la forme : $u_{n+1} = au_n + b$ et et $u_{n+1} = \dfrac{au_n + b}{cu_n + d}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction continue sur un intervalle I et vérifiant $f(I) \subset I$. • On traitera, dans des cas particuliers, des problèmes se ramenant à l'étude des suites de $v_n = f(u_n)$; • On admettra les propriétés suivantes :

For more visit: L9ray.com

L9RAY

		• Si une suite de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ (où f est une fonction continue sur un intervalle I et vérifiant $f(I) \subset I$ est convergente et sa limite est ℓ, alors ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$. • Si une suite (u_n) est convergente de limite ℓ et f est continue en ℓ, alors la suite numérique (v_n) telle que $v_n = f(u_n)$ est convergente et sa limite est $f(\ell)$. • On traitera la limite de la suite (a^n) (où $a \in \mathbb{R}^*$) et la limite de la suite numérique de la forme (n^α) (où $\alpha \in \mathbb{Q}^*$), et on considérera par la suite ces deux limites comme étant deux limites usuelles ; • L'étude des fonctions précédera celle des suites.

2	FONCTIONS NUMÉRIQUES	
I. Continuité, dérivation et étude de fonctions • Continuité en un point ; continuité à droite ; continuité à gauche ; continuité sur un intervalle (cas de fonctions polynômes ; de fonctions rationnelles ; de fonctions trigonométriques et de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$) ; • Image d'un intervalle et d'un segment par une fonction continue ; • Théorème des valeurs intermédiaires ; cas d'une fonction continue et strictement monotone	• Déterminer l'image d'un segment ou d'un intervalle : - par une fonction continue. - par une fonction continue et strictement monotone. - Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour l'étude de quelques équations ou inéquations ou pour l'étude du signe de quelques expressions ... ; • Utiliser la dichotomie pour déterminer des valeurs approchées des solutions de l'équation $f(x) = \lambda$ ou pour encadrer ces solutions ; • Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires et le théorème de la	• On adoptera la définition suivante : « f est continue au point x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ » ; • On admettra les résultats concernant la continuité des fonctions polynômes, des fonctions rationnelles, des fonctions trigonométriques et de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ et on mettra l'accent sur les applications de ces résultats ; • On admettra que l'image d'un segment par une fonction continue est un segment ainsi que l'image d'un intervalle est un intervalle et après on en déduira le théorème des

For more visit: L9ray.com

sur un intervalle ; • Fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle ; • Continuité et dérivabilité ; • Dérivabilité de la composée de deux fonctions dérivables ; • Dérivée de la fonction réciproque ; • Puissances rationnelles x^r $(r \in \mathbb{Q}^*)$; propriétés • Dérivée de la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ $(n \geq 1)$ • Exemples d'études de fonctions.	fonction réciproque dans le cas d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle ; • Calculer les dérivées des fonctions usuelles ; • Déterminer la monotonie d'une fonction à partir du signe de sa dérivée. • Déterminer la monotonie d'une fonction à partir de son tableau de variation ou de sa représentation graphique. • Résoudre graphiquement des équations de la forme et des inéquations de la forme : $f(x) = g(x)$ et $f(x) \leq g(x)$ • Déterminer la monotonie de la fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone et représenter graphiquement la fonction réciproque ; • Déterminer le nombre dérivé de la fonction réciproque d'une fonction en un point ; • Résoudre des problèmes concernant les valeurs minimales et valeurs maximales ; • Étudier et représenter des fonctions rationnelles et des fonctions trigonométriques.	valeurs intermédiaires ; • On admettra que $f+g$ et $f \times g$ et λf sont des fonctions continues sur un intervalle I si f et g sont continues sur I ; • On admettra que $g \circ f$ est une fonction continue sur un intervalle I si f est continue sur I et g est continue sur $f(I)$; • On rappellera la notion de dérivation et ses applications à partir d'activités variées faisant apparaitre son importance dans l'étude locale et globale des fonctions au programme surtout l'approximation locale d'une fonction, l'étude du sens de variation d'une fonction sur un intervalle, la détermination des extrema et l'étude du signe d'une fonction ou d'une égalité algébrique sur un intervalle ou la concavité de la courbe d'une fonction numérique..., ce sera également une occasion pour rappeler la propriété caractéristique d'une fonction constante ou strictement monotone sur un intervalle ; • Les fonctions réciproques des fonctions trigonométriques usuelles sont hors programme ; • À partir de l'étude d'exemples de fonctions polynômes, de fonctions rationnelles , de fonctions trigonométriques et de fonctions irrationnelles on maintiendra les acquis des élèves relatifs à la dérivation, aux limites, à l'approximation par une fonction linéaire, aux éléments de symétrie de la courbe d'une fonction, à l'étude des branches infinies et à la résolution graphique de quelques équations et inéquations ..... ;

For more visit: L9ray.com

		• On se limitera à l'étude de quelques exemples de fonctions irrationnelles dont le signe de la dérivée ne pose pas de difficulté ; à cette occasion on abordera les équations irrationnelles à partir d'exemples ; • Utiliser l'écriture différentielle $dy = f'(x)dx$; • L'étude des fonctions de la forme $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ où $(n \geq 3)$ et u est une fonction positive, est hors programme, toutefois on se limitera à la détermination de leurs dérivées.
II. Fonctions primitives • Fonctions primitives d'une fonction continue sur un intervalle ; • Fonctions primitives de la somme de deux fonctions ; fonctions primitives du produit d'une fonction par un nombre réel.	• Déterminer les fonctions primitives des fonctions usuelles ; • Utiliser les formules de dérivation pour déterminer les fonctions primitives d'une fonction sur un intervalle.	• On déterminera les fonctions primitives des fonctions usuelles à partir de la lecture croisée du tableau des dérivées de ces fonctions.
III. Fonctions logarithmes et exponentielles • Fonction logarithme népérienne • Définition et propriétés algébriques ; • Le symbole ln et étude de la fonction $x \mapsto \ln x$; • Dérivée logarithmique d'une fonction ; • Les primitives de la fonction : $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ • Fonction logarithme de base a - Définition et propriétés ; - Fonction logarithme décimale. • Fonction exponentielle népérienne : - Définition et propriétés algébriques.	• Maitriser le calcul algébrique sur les logarithmes ; • Maitriser la résolution des équations, des inéquations et des systèmes comportant des logarithmes ; • Reconnaitre et appliquer le logarithme décimal (surtout pour la résolution des équations de la forme $10^x = a$) et des inéquations de la forme $10^x \leq a$ ou de la forme $10^x \geq a$) ; • Maitriser et appliquer les limites logarithmiques essentielles ; • Étudier et représenter des fonctions dont l'expression comporte le logarithme népérien ; • Maitriser la résolution des équations, inéquations et systèmes d'équations comportant des exponentielles ;	• On présentera la fonction logarithme comme étant la fonction primitive de la fonction : $x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur l'intervalle qui s'annule en 1 et ce juste après l'étude des fonctions primitives ; • La fonction exponentielle népérienne est la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien ; • Pour tout nombre réel strictement positif : $a^x = e^{b \ln x}$. • On admettra que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$. • Sont considérées comme limites fondamentales les limites se rapportant à la fonction logarithme népérien et à la fonction exponentielle népérienne ainsi que les limites :

For more visit: L9ray.com

- Le symbole Exp et étude de la fonction $x \mapsto \exp(x)$ - Le nombre e et l'écriture e^x. - Les primitives de la fonction $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$ • Fonction exponentielle de base a : - Définition et propriétés ; - Dérivée de la fonction : $x \mapsto a^x$	• Maitriser les limites fondamentales des fonctions exponentielles et les appliquer ; • Maitriser et appliquer les limites fondamentales des fonctions exponentielles; • Étudier et représenter des fonctions dont l'expression comporte la fonction exponentielle népérienne ; • Étudier et représenter des fonctions dont l'expression comporte la fonction exponentielle népérienne et la fonction logarithme népérien ; • Déterminer des valeurs approchées du nombre e^a (où $a \in \mathbb{R}$), ou déterminer une valeur approchée d'un nombre réel a où e^a est un nombre donné en utilisant l'outil informatique adéquat.	$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ $\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$, $\lim_{x\to 0^+} x^n \ln x = 0$ (où $n \in \mathbb{N}^*$) • On utilisera les fonctions logarithmes et les fonctions exponentielles dans la résolution de problèmes divers.
IV. Équations différentielles • L'équation différentielle : $y' = ay + b$ • L'équation différentielle : $y'' + ay' + by = 0$	• Résoudre l'équation différentielle : $y' = ay + b$ • Résoudre l'équation différentielle : $y'' + ay' + by = 0$ • Résoudre les équations différentielles se ramenant aux équations précédentes.	• Résolution des équations : $y' = ay + b$ et $y'' + ay' + by = 0$ et ses utilisations dans des situations des disciplines de la spécialité ; • On admettra la solution générale de l'équation : $y'' + ay' + by = 0$
V. Calcul intégral : • Intégrale d'une fonction continue sur un segment ; • Propriétés de l'intégrale : relation de Chasles, linéarité, l'intégrale et l'ordre, la valeur moyenne ; • Techniques de calcul : utilisation des fonctions primitives ; intégration par parties ; • Calcul d'aires et volumes.	• Calculer l'intégrale des fonctions à l'aide des deux techniques ; • Maitriser le calcul de l'aire d'un domaine plan limité par deux courbes et deux droites parallèles à l'axe des ordonnées ; • Calculer le volume d'un solide engendré par la rotation de la courbe d'une fonction autour de l'axe des abscisses.	• On présentera l'intégrale d'une fonction sur un segment à partir de la notion de primitive d'une fonction continue ; • On admettra toute les propriétés et on pourra les interpréter géométriquement en utilisant l'aire.

For more visit: L9ray.com

II	ALGÈBRE, GÉOMÉTRIE ET PROBABILITÉS	
1	**ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE**	
I. Produit scalaire dans V_3 : • Définition ; • Propriétés : symétrie ; bilinéarité, orthogonalité de deux vecteurs, • Repère orthonormé ; Base orthonormée. • Expression analytique du produit scalaire, de la norme d'un vecteur et de la distance de deux points.	• Exprimer et démontrer l'orthogonalité de deux vecteurs en utilisant le produit scalaire ; • Exprimer vectoriellement et analytiquement l'orthogonalité et ses propriétés.	• On présentera le produit scalaire dans l'espace et ses propriétés à l'instar de sa présentation dans le plan ; • On étendra et on admettra toutes les propriétés du produit scalaire du plan à l'espace ; • L'utilisation du produit scalaire pour exprimer les propriétés métriques et l'orthogonalité analytiquement et pour l'établissement de formules de certaines distances sont deux objectifs de cette partie.
II. Applications du produit scalaire dans l'espace : • Détermination analytique de l'ensemble $\left\{M \in \mathcal{P} / \vec{u}.\overrightarrow{AM} = k\right\}$ • Vecteur normal à un plan ; • Équation cartésienne d'un plan définie par un point et un vecteur normal à ce plan ; • Distance d'un point à un plan ; • Étude analytique d'une sphère ; • Étude de l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que : $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ • Intersection d'une sphère et d'un plan ; plan tangent à une sphère en un point donné de cette sphère ; intersection d'une sphère et d'une droite ; • Applications à la résolution de problèmes géométriques.	• Déterminer un plan par un point et un vecteur normal ; • Déterminer la droite passant par un point et orthogonale à un plan ; • Déterminer l'équation cartésienne d'une sphère définie par son centre et son rayon ; • Déterminer une représentation paramétrique d'une sphère ; • Reconnaitre l'ensemble des points M de l'espace vérifiant la relation : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$	• On limitera l'étude analytique des positions relatives, d'une sphère et d'un plan et d'une sphère et d'une droite, sur des exemples numériques sans étudier le cas général ; • On utilisera le produit scalaire pour étudier le parallélisme et l'orthogonalité dans l'espace.

For more visit: L9ray.com

III. Produit vectoriel : • Orientation de l'espace ; trièdre ; repère et base orientés ; • Définition géométrique du produit vectoriel et interprétation géométrique de sa norme ; • Propriétés : antisymétrie ; bilinéarité ; • Coordonnées du produit vectoriel de deux vecteurs dans une base orthonormée directe ; • Distance d'un point à une droite.	• Calculer l'aire d'un triangle en utilisant le produit vectoriel ; • Déterminer une équation d'un plan définie par trois points non alignés ; • Appliquer le produit vectoriel pour résoudre des problèmes géométriques.	• On définira le produit vectoriel après l'orientation de l'espace en utilisant le bonhomme d'Ampère et on donnera aussi son interprétation géométrique ; • On admettra toutes les propriétés du produit vectoriel.
IV. Nombres complexes : • L'ensemble $\mathbb{C}$; • L'écriture algébrique d'un nombre complexe ; • Égalité de deux nombres complexes. • Représentation géométrique d'un nombre complexe ; affixe d'un point ; affixe d'un vecteur ; • Les opérations sur les nombres complexes ; • Conjugué d'un nombre complexe ; module d'un nombre complexe ; • Argument d'un nombre complexe non nul ; forme trigonométrique ; • Angle de deux vecteurs et argument du rapport de leurs affixes ; alignement de trois points ; • L'équation $az^2 + bz + c = 0$ où a, b et c sont des réels et $a \neq 0$. • Notation exponentielle d'un nombre complexe non nul : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ les deux formules d'Euler et formule de Moivre.	• Maitriser le calcul sur les nombres complexes ; • Passer de l'écriture algébrique à l'écriture trigonométrique d'un nombre complexe et inversement ; • Reconnaitre les formules trigonométriques de base en utilisant les nombres complexes ; • Linéariser des monômes trigonométriques en utilisant la notation exponentielle d'un complexe ; • Utiliser les nombres complexes pour résoudre des problèmes géométriques (Alignement, orthogonalité,.....) ; • Exprimer à l'aide des complexes une translation ou une homothétie ou une rotation ; • Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $az^2 + bz + c = 0$ où a, b et c sont des réels et $a \neq 0$ • Résoudre des équations se ramenant à la résolution d'équations du second degré à une inconnue.	• On sensibilisera de la nécessité d'introduire les nombres complexes de manière succincte et précise ; • Vue l'importance de la représentation géométrique dans la consolidation de la notion de nombre complexe, son traitement doit commencer directement au début de ce chapitre et accompagner la présentation de la majorité des notions au programme afin de permettre l'interprétation géométrique de l'opposé, du conjugué, du module, de l'argument, de la somme de deux nombres complexes et du produit d'un nombre complexe par un nombre réel ; • On fera le lien entre le module de $z - z'$ et la distance AB d'une part et l'argument de $z - z'$ et l'angle orienté $\left(\vec{i}\,;\overrightarrow{AB}\right)$ où z et z' sont les affixes respectifs de A et B et $\vec{i}$ le vecteur directeur de l'axe des réels ; On insistera sur la traduction des notion géométriques, en particulier celles de la distance, la mesure d'un angle, l'alignement et de la cocyclicité de points, en langages de nombres complexes ; • On abordera la résolution des équa-

For more visit: L9ray.com

		tions se ramenant à la résolution des équations du second degré à coefficients réels à une seule inconnue dans l'ensemble $\mathbb{C}$; • L'équation du second degré à coefficients complexes non réels est considérée hors programme sauf celle dont la résolution se ramène à la résolution des équations du second degré à coefficients réels.

2	CALCUL DE PROBABILITÉS	
• Principe fondamental du dénombrement, arbre de choix ; • Stabilité de la fréquence d'un événement aléatoire ; • Arrangement avec répétition ; arrangement sans répétition ; • Combinaisons ; • Les nombres A_n^p ; C_n^p et $n!$. • Expériences aléatoires ; • Probabilité d'un événement ; • Hypothèse de l'équiprobabilité ; • Probabilité conditionnelle ; indépendance de deux événements ; indépendance de deux épreuves ; • Variable Aléatoire, loi de probabilité d'une variable aléatoire ; l'espérance mathématique ; l'écart type d'une variable aléatoire ; • Loi binomiale.	• Calculer la probabilité de la réunion de deux événements ; la probabilité de l'intersection de deux événements et le calcul de la probabilité de l'événement contraire ; • Utiliser le modèle de dénombrement selon la situation étudiée ; • Reconnaitre l'indépendance de deux évènements ; • Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire ; • Reconnaitre et appliquer la loi binomiale dans des situations en relation avec les disciplines de la spécialité.	• On habituera les élèves à concevoir et appliquer la simulation adéquate selon l'expérience aléatoire donnée ; • On évitera toute présentation théorique de la notion de probabilité ; • On remarquera la stabilité de la fréquence d'un événement aléatoire à partir de la répétition d'une expérience aléatoire simple un très grand nombre de fois (lancer d'une pièce de monnaie, tirage d'une boule d'un sac...), on pourra utiliser la touche rand de la calculatrice scientifique ou la calculatrice scientifique programmable ou l'ordinateur ; • On partira de situations concrètes et de manière progressive pour permettre à l'élève de décrire des expériences aléatoires en utilisant le langage probabiliste ; • On présentera la probabilité d'un évènement à partir de la stabilité de la fréquence d'un évènement. • On renforcera la présentation des notions de probabilité par des exemples variés couvrant différents cas possibles ; • On appliquera la probabilité dans des situations variées en relation avec les disciplines de la spécialité.

For more visit: L9ray.com

1

CONTINUITÉ D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE

HISTOIRE

La définition du concept de fonction a évolué depuis son introduction par Leibniz à la fin du XVII^{e} siècle. Il s'agissait alors d'associer un objet à chaque point d'une courbe, par exemple la tangente. En identifiant chaque point de la courbe avec son ordonnée, Jean Bernoulli puis Euler redéfinissent ensuite ce terme pour décrire une expression composée d'une variable et d'éventuels paramètres constants.
Le lien entre l'expression d'une fonction et sa courbe représentative conduit Euler à élargir la notion en admettant des définitions par morceaux puis des courbes qui ne peuvent être obtenues par des expressions analytiques.
La condition de continuité est formalisée par Bolzano et Cauchy au XIX^{e} siècle, puis contournée par Dirichlet avec l'indicatrice des rationnels.

Source : https://fr.wikipedia.org

AUGUSTIN LOUIS CAUCHY (1789 – 1857)





KARL WEIERSTRASS (1812 – 1897)

CAPACITÉS ATTENDUES

- Déterminer l'image d'un segment ou d'un intervalle :
  - par une fonction continue.
  - par une fonction continue et strictement monotone.
  - Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour l'étude de quelques équations ou inéquations ou pour l'étude du signe de quelques expressions ... ;
- Utiliser la dichotomie pour déterminer des valeurs approchées des solutions de l'équation $f(x)=\lambda$ ou pour encadrer ces solutions ;
- Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires et le théorème de la fonction réciproque dans le cas d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle.

PLAN DU COURS

- Activités Préparatoires..... 16
- Connaissances Fondamentales
  - Limite d'une fonction en un point (rappels) 23
  - Continuité d'une fonction numérique..... 27
  - Image d'un intervalle par une fonction continue 37
  - Fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone..... 43
  - Fonctions racine n^{ième} - Puissance rationnelle..... 45
- Techniques Et Astuces 52
- Exercices Et Problèmes
  - Exercices d'application..... 66
  - Exercices de perfectionnement..... 76
  - Problèmes de synthèse..... 79

For more visit: L9ray.com

L9RAY

1 ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES

1 LIMITE D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE (RAPPEL)

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans chacun des cas suivants :

$f(x)=\dfrac{6x+7}{x^3-3x^2+2x}$; $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-2x}}{x^2-2x-8}$; $f(x)=\sqrt{\dfrac{2x+3}{5-x}}$; $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x+3}}{\sqrt{5-x}}$

$f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-2x-15}{x^2-x-2}}$; $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-x+3}}$; $f(x)=\dfrac{\sin x}{5-|x-2|}$; $f(x)=\dfrac{3x-4}{\sqrt{|x|-2}}$

2. Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 2}\left(5x^2-3x-2\right)$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-7}{(x-1)^2}$; $\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{x}{2-\sqrt{x}}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3-4x^2+5x-1\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2-7x+4}{(2x+1)^3}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^3+4x-1}{(x-2)(x^2+1)}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x}+2x+5$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}}{x+3}$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-5x+3}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+3x^2-4}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3+2x^2-11x-12}{x^4-81}$; $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$

$\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}}\dfrac{\sqrt{x^2+x-2}}{x^2-4}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3x}-x}{\sqrt{2x^2+x-5}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{x}}{x-3\sqrt{x}}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+2}+x+1\right)$

3. Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(7x)}{4x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(4x)}{\sin(3x)}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-\tan(3x)}{x+\sin(4x)}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(4x)}{\sin(2x)\tan(3x)}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sin x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{1+x^2}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+x+\cos x}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1+\sin x}{x}$

4. Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}-\{1\}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-x}}{x-1} & \text{si } x>1 \\ f(x)=\dfrac{x^2-5}{\sqrt{1-x}} & \text{si } x<1 \end{cases}$$

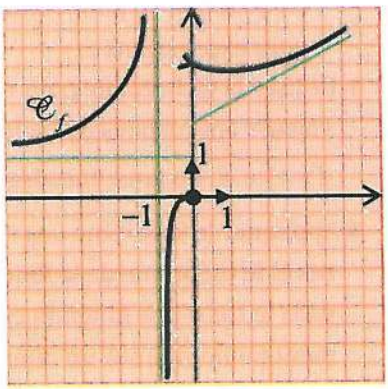
Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

5. Soit f la fonction numérique représentée sur la figure ci-contre.

Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

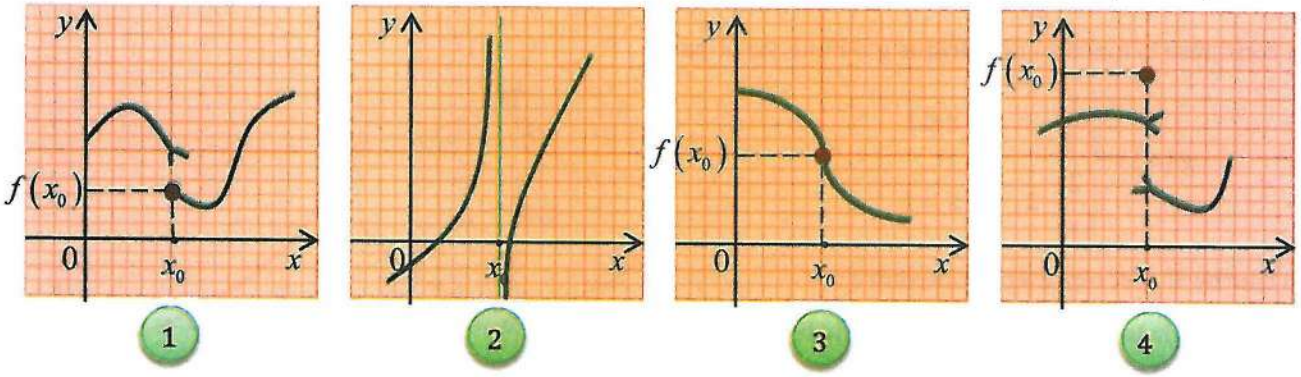


For more visit: L9ray.com

2 CONTINUITE D'UNE FONCTION EN UN POINT

A. Une approche graphique de la continuité :

Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative d'une fonction numérique f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.



Dans chacun des cas (1), (2), (3) et (4), comparer chacune des limites $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ avec le nombre $f(x_0)$ (s'il existe).

En général, lorsque x est proche de x_0, le point $M(x;f(x))$ est proche du point $A(x_0;f(x_0))$, c'est-à-dire que le réel $f(x)$ est proche du nombre $f(x_0)$.

On dit alors que la fonction f est continue au point x_0.

La courbe $\mathscr{C}_f$ est alors « sans trou » autour de A, elle ne présente pas de « saut » au point A.

Dans le cas 3, la fonction f est continue en x_0.

Dans les cas 1 et 4, la fonction f n'est pas continue en x_0. On dit alors que la fonction f n'est pas continue en x_0 ou discontinue au point x_0.

GÉNÉRALISATION

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I de centre x_0.

- On dit que f est continue au point x_0 si : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- On dit que f est continue à droite en x_0 si : $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.
- On dit que f est continue à gauche en x_0 si : $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Dans le cas 1, la fonction f est continue à droite en x_0 mais n'est pas continue à gauche en x_0.

Dans le cas 4, la fonction f est continue n'est pas continue ni à droite en x_0 ni à gauche en x_0.

Dans le cas 3, la fonction f est continue à droite et à gauche en x_0.

For more visit: L9ray.com

L9RAY

B. Applications :

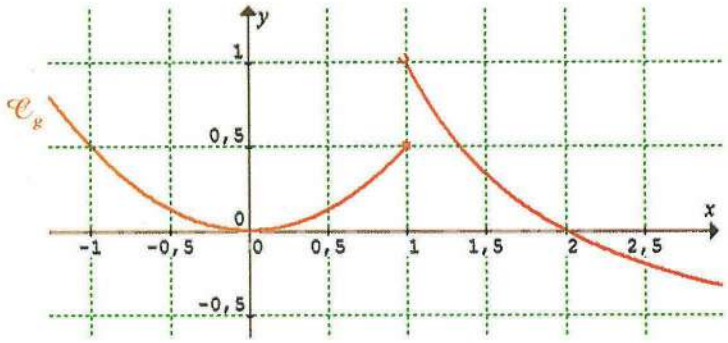
1. On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\begin{cases} x^3 & \text{si } x\le 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x>0 \end{cases}$.

a) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

b) La fonction f est-elle continue en 0 ? Justifier la réponse.

2. On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{2} & \text{si } x\le 1 \\ \dfrac{2}{x}-1 & \text{si } x>1 \end{cases}$$



Sa courbe $\mathscr{C}_g$ est représentée ci-contre :

a) À partir de la courbe représentative de la fonction g peut-on dire que la fonction g est continue en 1 ? en 0 ?

b) Vérifier que : $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=g(1)$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)\neq g(1)$. Que peut-on déduire ?

3. Dans chacun des cas suivants, étudier la continuité de la fonction f au point x_0 :

1er cas :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x-1} & \text{si } x\neq 1 \\ f(1)=-2 \end{cases} \quad \text{et} \quad x_0=1 \quad ;$$

2ème cas :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{2x+4}-2}{x} & \text{si } x\neq 0 \\ f(0)=1 \end{cases} \quad \text{et} \quad x_0=0$$

3ème cas :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1-\cos(4x)}{\sin(3x)\tan(2x)} & \text{si } x\neq 0 \\ f(0)=\dfrac{4}{3} \end{cases} \quad \text{et} \quad x_0=0 \quad ;$$

4ème cas :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3+8}{x^2-4} & \text{si } x\neq -2 \\ f(-2)=3 \end{cases} \quad \text{et} \quad x_0=-2$$

4. Dans chacun des cas suivants, étudier la continuité à droite et à gauche de la fonction f au point x_0 :

1er cas :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x+2}{x^2+1} & \text{si } x<1 \\ f(x)=x^2+x+1 & \text{si } x\ge 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad x_0=1 \quad ;$$

2ème cas :

$$\begin{cases} f(x)=x^2-3x+3 & \text{si } x\le 2 \\ f(x)=\dfrac{6\sqrt{x+7}-18}{x-2} & \text{si } x>2 \end{cases} \quad \text{et} \quad x_0=2$$

3ème cas :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{|x-2|} & \text{si } x\neq 2 \\ f(2)=\dfrac{1}{4} \end{cases} \quad \text{et} \quad x_0=2 \quad ;$$

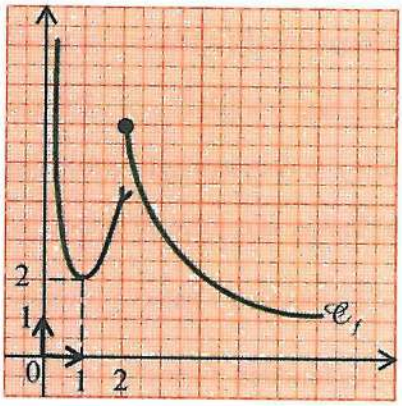
4ème cas :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{4+4\sin x}-2}{x} & \text{si } x<0 \\ f(x)=\sqrt{x+4}-\dfrac{1}{2} & \text{si } x\ge 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad x_0=0$$

For more visit: L9ray.com

3 CONTINUITÉ SUR UN INTERVALLE

1. La figure ci-contre présente la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction numérique f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.



a) La fonction f est elle-continue au point 2 ? Justifier la réponse.

b) Parmi les intervalles suivants, déterminer ceux sur lesquels la fonction f est continue en chacun de ses points :

$I=]0;1]$; $J=[1;3]$; $K=[2;4]$; $L=]0;+\infty[$

2. Soit g la fonction numérique définie par : $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

a) Vérifier que g est bien définie sur $]-1;1[$.

b) Soit $x_0 \in]-1;1[$. Montrer que g est continue en x_0.

On dit alors que la fonction g est continue sur l'intervalle $]-1;1[$.

GÉNÉRALISATION

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I.

Dire que la fonction f est continue sur l'intervalle I signifie que f est continue en tout point de I. Graphiquement, la représentation graphique de f sur I ne présente ni saut ni rupture. Elle peut être tracée « sans lever le crayon ».

3. On considère la fonction numérique h définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} h(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-x} & \text{si } x>1 \\ h(x)=x^2+ax & \text{si } x\leq 1 \end{cases}$ où $a\in\mathbb{R}$.

a) Montrer que h est continue en tout point de $]-\infty;1[$ et en tout point de $]1;+\infty[$.

b) Déterminer la valeur de a pour laquelle la fonction h est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

4 FONCTION PARTIE ENTIÈRE

La fonction partie entière E est définie sur $\mathbb{R}$ par $E(x)=n$, où n est l'entier relatif tel que : $n\leq x<n+1$.

À titre d'exemples : $E(0,47)=0$; $E(5,8)=5$; $E(-0,4)=-1$; $E(-3,65)=-4$; $E(7)=7$

1. Copier puis remplir le tableau suivant :

x	3,5	−5	1,23	π	$-\pi$	$\sqrt{19}$	$-\frac{8}{5}$	−1,45	−0,795
$E(x)$									

For more visit: L9ray.com

L9RAY

1 ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES

2. a) Que vaut $E(x)$ quand $x \in \mathbb{Z}$?

b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $x-1 < E(x) \leq x$.

3. Déterminer $E(x)$ dans chacun des cas suivants :

1er cas : $x \in [0;1[$; 2ème cas : $x \in [1;2[$; 3ème cas : $x \in [2;3[$; 4ème cas : $x \in [-1;0[$.

4. Soit f la restriction de la fonction E sur l'intervalle $[-4;4[$.

a) Tracer la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé.

b) La fonction f est-elle continue en $\frac{3}{2}$? En 0 ? En $-\frac{1}{4}$?

c) La fonction f est-elle continue sur l'intervalle $]-1;1[$? Sur l'intervalle $[0;1[$? Sur l'intervalle $]2;3]$?

5 IMAGE D'UN INTERVALLE PAR UNE FONCTION CONTINUE

A) On considère les fonctions numériques f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sin x$ et $g(x) = (x-1)^2$

Les fonctions f et g sont évidemment continues sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer $f(\mathbb{R})$ et $f\left(\left[-\frac{\pi}{4};\pi\right[\right)$ puis vérifier qu'ils sont des intervalles de $\mathbb{R}$.

Remarquer bien que les intervalles I et $f(I)$ ne sont pas en général de même nature.

2. Déterminer $g([1;+\infty[)$ et $g([1;2])$ et $g(]0;3[)$ puis vérifier qu'ils sont des intervalles.

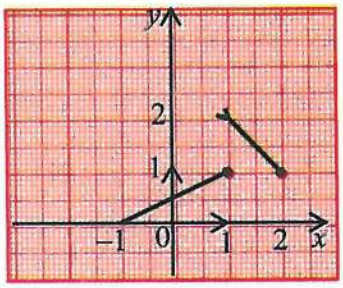
RÉSULTAT ADMIS

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Si f est continue sur $[a;b]$ alors $f([a;b]) = [m;M]$ où m est le minimum de f sur $[a;b]$ et M est le maximum de f sur $[a;b]$.

B) Dans la figure ci-contre, $\mathscr{C}_f$ représente la courbe d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-1;2]$.



1. Déterminer l'expression de $f(x)$ pour tout $x \in [-1;2]$.

2. Vérifier que f n'est pas continue au point 1.

3. Déterminer $f([-1;2])$.

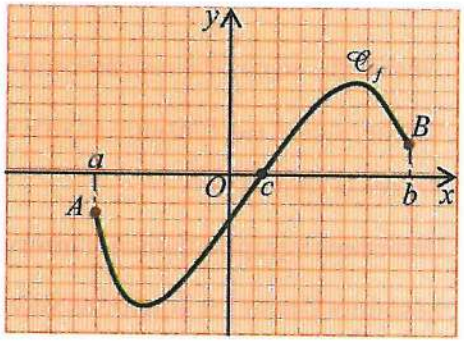
4. La condition « f continue sur un intervalle I » est-elle nécessaire pour que $f(I)$ soit un intervalle ? Justifier la réponse.

For more visit: L9ray.com

6 THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

A) Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et soit a et b deux éléments de I tels que $a < b$.

On suppose que $f(a) \times f(b) < 0$.



1. Montrer que : $0 \in f(I)$.

2. En déduire qu'il existe au moins un élément c de l'intervalle $[a;b]$ tel que $f(c) = 0$.

3. Application :

Montrer que l'équation $x^3 + 2x + 1 = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[-1;1]$.

B) Soit f une fonction continue sur un segment $[a;b]$, et soit λ un nombre réel compris strictement entre $f(a)$ et $f(b)$. On pose : $g(x) = f(x) - \lambda$.

1. Vérifier que $g(a) \times g(b) < 0$.

2. En déduire qu'il existe un nombre réel c de l'intervalle $[a;b]$ tel que $f(c) = \lambda$.

> On a donc montré que si f est une fonction continue sur $[a;b]$, alors pour tout réel λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c dans $[a;b]$ tel que $f(c) = \lambda$.
> Ce résultat porte le nom de « Théorème des valeurs intermédiaires ».

3. Applications :

Soit f et g les fonctions numériques définies par : $f(x) = (x^2 - 2)\sqrt{x^2 + 1}$ et $g(x) = 2\cos x - 1$

a) Montrer que l'équation $f(x) = 3$ admet au moins une solution dans l'intervalle $\left[\sqrt{2};2\right]$.

b) Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet au moins une solution dans l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

C) Le tableau suivant donne les variations d'une fonction numérique f continue sur l'intervalle $[-1;+\infty[$:

x	-1		0		1		2		$+\infty$
$f(x)$	-3	↗	4	↘	2	↗	7	↘	$-\infty$

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β dans l'intervalle $[-1;+\infty[$.

2. Déterminer le signe de la fonction $f(x)$ sur l'intervalle $[-1;+\infty[$.

For more visit: L9ray.com

L9RAY

1 ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES

7 THÉORÈME DE LA FONCTION RÉCIPROQUE

A) Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $I=[-3;+\infty[$ par : $f(x)=x^2+6x+5$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. Vérifier que f est continue et strictement croissante sur l'intervalle I.

2. Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$.

3. Déterminer graphiquement l'intervalle J image de l 'intervalle I par la fonction f.

4. Résoudre dans I les équations suivantes : $(E_1): f(x)=12$; $(E_2): f(x)=-7$

5. Soit $y\in J$. Montrer que l'équation $f(x)=y$, d'inconnue x, admet une solution unique dans l'intervalle I donnée par : $x=-3+\sqrt{y+4}$.

La fonction qui, à chaque élément y de l'intervalle J, associe l'élément $x=-3+\sqrt{y+4}$ dans I est appelée la fonction réciproque de la fonction f et est notée f^{-1}. On écrit alors : $(\forall x\in J)\ f^{-1}(x)=-3+\sqrt{x+4}$.

6. Vérifier que la fonction f^{-1} est continue et strictement croissante sur l'intervalle J.

GÉNÉRALISATION

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors elle admet une fonction réciproque notée f^{-1} définie sur l'intervalle $J=f(I)$, et on a :

$$(\forall y\in J)(\forall x\in I)\ \left(y=f(x)\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)\right)$$

De plus, la fonction f^{-1} est continue et a même sens de monotonie que f.

B) Soit g la fonction numérique définie sur $I=[2;+\infty[$ par : $g(x)=x-3-2\sqrt{x-1}$.

1. a) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

b) Montrer que la fonction g est continue sur l'intervalle I.

2. a) Vérifier que pour tout $x\in I$: $g(x)=\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2-3$.

b) En déduire que la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle I.

3. Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

Préciser la monotonie de la fonction g^{-1}.

4. Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$.

For more visit: L9ray.com

1 LIMITE D'UNE FONCTION EN UN POINT (RAPPELS)

Dans tout ce qui suit, x_0 est un nombre réel.

1.1. LIMITES USUELLES

Proposition 1

Soit n un entier naturel non nul et k un nombre réel. Alors :

- $\lim\limits_{x\to 0} kx^n = 0$; $\lim\limits_{x\to 0} k\sqrt{|x|} = 0$; $\lim\limits_{x\to x_0} k(x-x_0)^n = 0$; $\lim\limits_{x\to x_0} k\sqrt{|x-x_0|} = 0$.
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$ si l'entier n est pair.
- $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^n} = -\infty$ si l'entier n est impair.

Proposition 2

Soit n un entier naturel non nul et k un nombre réel. Alors :

- $\lim\limits_{x\to +\infty} x^n = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to -\infty} x^n = +\infty$ si l'entier n est pair et $\lim\limits_{x\to -\infty} x^n = -\infty$ si l'entier n est impair.
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{k}{x^n} = 0$; $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{k}{x^n} = 0$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{k}{\sqrt{x}} = 0$; $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{k}{\sqrt{-x}} = 0$.

Remarques

- La limite d'une fonction en un point est une notion locale ; c'est-à-dire que cette notion ne dépend de la fonction qu'au voisinage de ce point.
- Soit $\ell \in \mathbb{R}$. En posant $x - x_0 = h$, on obtient : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0} f(x_0 + h) = \ell$.
- Si la limite d'une fonction numérique f existe en un point, alors elle est unique.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a les limites suivantes :
  - $\lim\limits_{x\to x_0^+} \dfrac{1}{x-x_0} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to x_0^-} \dfrac{1}{x-x_0} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{(x-x_0)^2} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to x_0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x-x_0}} = +\infty$.
  - $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{(x-x_0)^n} = +\infty$ si n est un entier pair.
  - $\lim\limits_{x\to x_0^+} \dfrac{1}{(x-x_0)^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to x_0^-} \dfrac{1}{(x-x_0)^n} = -\infty$ si n est un entier impair.

For more visit: L9ray.com

L9RAY

1.2. LIMITES DES FONCTIONS USUELLES

Proposition 3

Soit P et Q deux fonctions polynomiales et $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors :

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$

(2) Si $Q(x_0) \neq 0$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$

(3) $\lim\limits_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$

(4) Si $x_0 \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} \tan x = \tan x_0$

(5) $\lim\limits_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$

(6) Si $x_0 \geq 0$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$

(7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

(8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$

(9) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

1.3. OPÉRATIONS SUR LES LIMITES FINIES

Proposition 4

Soit f et g deux fonctions numériques et $x_0 \in \mathbb{R}$. Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell'$ alors :

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} (f+g)(x) = \ell + \ell'$.

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} (fg)(x) = \ell\ell'$.

(3) $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |\ell|$.

(4) Si $\ell' \neq 0$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} \left(\dfrac{1}{g}\right)(x) = \dfrac{1}{\ell'}$ et $\lim\limits_{x\to x_0} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{\ell}{\ell'}$.

(5) Si $k \in \mathbb{R}$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} (kf)(x) = k\ell$.

(6) Si $\ell \geq 0$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\ell}$.

Remarque

- Ces propriétés restent aussi valables quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ ou vers x_0 à droite ou à gauche.

Proposition 5

Soit P et Q deux fonctions polynômes définies par :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad \text{et} \quad Q(x) = b_p x^p + b_{p-1}x^{p-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

où $a_n, \ldots, a_1, a_0, b_p, \ldots, b_0$ des réels tels que : $a_n \neq 0$ et $b_p \neq 0$.

- La limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ et $-\infty$ est la limite du monôme de plus haut degré :

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty} a_n x^n \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty} a_n x^n$$

- La limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$ et $-\infty$ est la limite du quotient des monômes de plus haut degré :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n}{b_p x^p} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{a_n x^n}{b_p x^p}.$$

For more visit: L9ray.com

1.4. OPÉRATIONS SUR LE LIMITES INFINIES

On admet toutes les opérations suivantes.

Dans ce qui suit, x_0 est un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$; ℓ et ℓ' sont deux nombres réels.

Ces opérations restent valables pour les limites à droite et à gauche en x_0.

L'abréviation « $F.I$ » signifie « Forme indéterminée », c'est-à-dire qu'on ne peut pas déterminer la limite immédiatement et tout résultat est possible.

LIMITE D'UNE SOMME DE DEUX FONCTIONS

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$F.I$

LIMITE D'UN PRODUIT DE DEUX FONCTIONS

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	ℓ	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a}(f\times g)(x)$	$\ell\times\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$F.I$

LIMITE D'UN QUOTIENT DE DEUX FONCTIONS

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\ell'\neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$\ell>0$ ou 0^+	$\ell>0$ ou 0^+	$\ell<0$ ou 0^-	$\ell<0$ ou 0^-	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$F.I$

LIMITE DE L'INVERSE D'UNE FONCTION

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\ell\neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{1}{f}\right)(x)$	$\frac{1}{\ell}$	$+\infty$	$-\infty$	0

For more visit: L9ray.com

Remarques

- L'obtention d'une forme indéterminée « $F.I$ » **signifie** que la méthode mise en place pour calculer la limite de la fonction trébuche. Cela ne signifie en aucun cas que la fonction n'a pas de limite. Des méthodes seront présentées au fur et à mesure, pour lever les indéterminations les plus classiques, à savoir : « $\frac{0}{0} = F.I$ » ; « $\frac{\infty}{\infty} = F.I$ » ; « $0 \times \infty = F.I$ » ; « $+\infty + (-\infty) = F.I$ ».

  Parmi ces méthodes, on peut citer jusqu'à présent les techniques suivantes :
  - Factoriser par le (les) terme(s) de plus haut degré si un terme est prépondérant.
  - Factoriser par $x-a$ si a est racine d'un polynôme P : $P(x) = (x-a)Q(x)$.
  - Multiplier par l'expression conjuguée : $\left(X - \sqrt{Y}\right)\left(X + \sqrt{Y}\right) = X^2 - Y$.
  - Encadrement, majoration, minoration,.....
- Les tableaux précédents donnent les résultats les plus classiques des limites rencontrées. Voici trois conseils pour bien manipuler ces tableaux :
  - Par exemple, on retiendra que diviser par 0^+, c'est multiplier par $+\infty$;
  - Il est souhaitable de comprendre ces tableaux au lieu de les apprendre par cœur.
  - Une manière de lire ces tableaux est la suivante, mais attention **NE JAMAIS L'ECRIRE SUR SA COPIE** : « $+\infty - (-\infty) = +\infty$ » ; « $-\infty + \ell = -\infty$ » ; « $-\infty \times (-\infty) = +\infty$ » ; « $\frac{3}{-\infty} = 0$ » ; « $\frac{-1}{0^+} = -\infty$ » ; « $\frac{+\infty}{0^+} = +\infty$ »

1.5. LIMITES ET ORDRE

Proposition 6

Soit f, g et h des fonctions numériques définies sur un intervalle I et $\ell \in \mathbb{R}$.

(1) Si $f(x) \geq g(x)$ au voisinage de x_0 et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$, alors : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

(2) Si $f(x) \leq g(x)$ au voisinage de x_0 et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$, alors : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

(3) Si $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ au voisinage de x_0 et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \ell$, alors : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

(4) Si $|f(x) - \ell| \leq g(x)$ au voisinage de x_0 et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$, alors : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

Remarques

- Les résultats de la proposition 6 restent aussi valables quand x tend vers x_0 à droite ou à gauche ou vers $+\infty$ ou $-\infty$.
- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{f(x)} = +\infty$.

For more visit: L9ray.com

2 CONTINUITÉ D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE

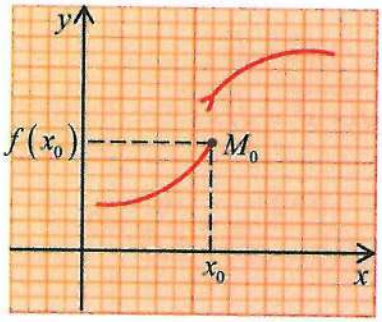
2.1. CONTINUITÉ D'UNE FONCTION EN UN POINT

Définition 1

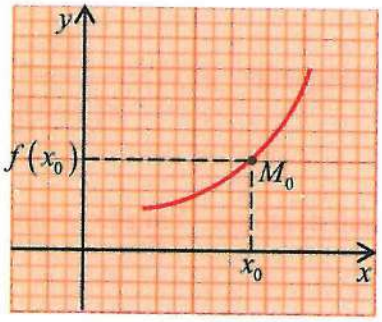
Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et x_0 un élément de I.

On dit que la fonction f est continue au point x_0 si : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Interprétation Graphique



f est discontinue au point x_0 signifie que la courbe $\mathscr{C}_f$ est discontinue au point $M_0(x_0, f(x_0))$



f est continue au point x_0 signifie que la courbe $\mathscr{C}_f$ est continue au point $M_0(x_0, f(x_0))$

Remarque

Si la fonction f est définie au point x_0 et n'admet pas de limite en x_0 ou sa limite est infinie au point x_0, on dit que f est **discontinue** au point x_0.

Exemples

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f : x \mapsto x^n$ est continue en zéro car : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} x^n = 0 = f(0)$.

2) Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x - 1} & \text{si} \quad x \neq 1 \\ f(1) = -4 \end{cases}$$

Montrons que la fonction f est continue au point $x_0 = 1$:

On a : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x-5)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} (x-5) = -4$. D'où : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$.

Par suite, la fonction f est continue au point $x_0 = 1$.

For more visit: L9ray.com

3) Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{2x}}{x - \sqrt{x}} & \text{si } x \neq 1 \\ g(1) = m \end{cases} \quad \text{où} \quad m \text{ un paramètre réel.}$$

Déterminons la valeur de m pour que la fonction g soit continue en 1 :

Soit x un élément de l'intervalle $]0;+\infty[$ distinct de 1. On a :

$$g(x) = \frac{\left(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{2x}\right)\left(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{2x}\right)\left(x + \sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{2x}\right)\left(x - \sqrt{x}\right)\left(x + \sqrt{x}\right)} = \frac{\left(1+x^2-2x\right)\left(x+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{2x}\right)\left(x^2 - x\right)}$$

Par conséquent : $g(x) = \dfrac{(x-1)^2\left(x+\sqrt{x}\right)}{x(x-1)\left(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{2x}\right)} = \dfrac{(x-1)\left(x+\sqrt{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{2x}\right)}$.

Il s'ensuit donc que : $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)\left(x+\sqrt{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{2x}\right)} = \dfrac{0\times 2}{1\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)} = \dfrac{0}{2\sqrt{2}} = 0$

Pour que la fonction g soit continue en 1, il faut et il suffit que $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = g(1)$, c'est-à dire : $m = 0$.

4) Soit h la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$\begin{cases} h(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ h(0) = 0 \end{cases}$$

Montrons que la fonction h est continue en 0 :

On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $\left|\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right| \leq 1$; donc $\left|x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right| \leq x^2$. D'où : $\left(\forall x \in \mathbb{R}^*\right)\ |h(x)| \leq x^2$.

Comme $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$, alors : $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0 = h(0)$. Ainsi, la fonction h est continue en 0.

5) Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\left(1-\cos(3x)\right)\sin(2x)}{x^3} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = \dfrac{35}{4} \end{cases}$$

Étudions la continuité de f en 0 :

On a : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left(1-\cos(3x)\right)\sin(2x)}{x^3}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(3x)}{(3x)^2} \times (3x)^2 \times \frac{\sin(2x)}{2x} \times \frac{2x}{x^3}$$

For more visit: L9ray.com

Donc : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} 18\times\dfrac{1-\cos(3x)}{(3x)^2}\times\dfrac{\sin(2x)}{2x} = 18\times\dfrac{1}{2}\times 1 = 9$

Puisque $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$, alors la fonction f n'est pas continue en 0.

Applications

1. Dans chacun des cas suivants, étudier la continuité de la fonction f au point x_0 :

a) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{-2x^2 - x + 1}{x+1} & \text{si } x \neq -1 \\ f(-1) = 1 \end{cases}$ et $x_0 = -1$; b) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x + \tan(2x)}{\sin(3x)} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$ et $x_0 = 0$

c) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+x+2} - 2}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ f(1) = \dfrac{3}{4} \end{cases}$ et $x_0 = 1$; d) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x+1} - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}$ et $x_0 = 0$

2. Soit g la fonction numérique définie par : $\begin{cases} g(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 - 4} & \text{si } x \neq 2 \\ g(2) = \lambda \end{cases}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Déterminons la valeur du réel λ pour que la fonction g soit continue au point $x_0 = 2$.

2.2. CONTINUITÉ À DROITE - CONTINUITÉ À GAUCHE

Définition 2

1) Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[x_0, x_0 + \alpha[$ où $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

On dit que f est **continue à droite** en x_0 si : $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x) = f(x_0)$

2) Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]x_0 - \alpha, x_0]$ où $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

On dit que f est **continue à gauche** en x_0 si : $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f(x) = f(x_0)$

Exemples

1) Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 3 - x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{2x - 1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Étudions la continuité à droite et à gauche de la fonction f au point $x_0 = 0$:

On a $f(0) = 3$ et de plus : $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \dfrac{x^2 - 3}{2x - 1} = 3 = f(0)$. Donc f est continue à droite en 0.

For more visit: L9ray.com

De même : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} (3-x^2) = 3 = f(0)$; donc f est continue à gauche en 0.

2) Soit g la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{x^2-1}{|x-1|} \text{ si } x \neq 1 \\ g(1) = 2 \end{cases}$$

Étudions la continuité à droite et à gauche de la fonction g au point $x_0 = 1$:

On a : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} (x+1) = 2$. Donc $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} g(x) = g(1)$ et la fonction g est continue à droite au point $x_0 = 1$.

On a : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{x^2-1}{-(x-1)} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} (-x-1) = -2$. Donc $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} g(x) \neq g(1)$ et la fonction g n'est pas continue à gauche au point $x_0 = 1$.

Proposition 7

Une fonction numérique f est continue au point x_0 si, et seulement si elle est continue à droite et à gauche au point x_0. En d'autres termes :

$$(f \text{ est continue au point } x_0) \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

Exemple

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x} \text{ si } x > 0 \\ f(x) = \dfrac{\cos x + \sin x - 1}{4x} \text{ si } x < 0 \\ f(0) = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Montrons que la fonction f est continue en 0 :

- Continuité à droite en 0 :

On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\left(\sqrt{x+4}-2\right)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}$.

Donc : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x+4}+2} = \dfrac{1}{4}$.

Puisque $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$, alors la fonction f est continue à droite en 0.

For more visit: L9ray.com

• Continuité à gauche en 0 :

On a : $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\cos x + \sin x - 1}{4x} = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{\sin x}{4x} - \dfrac{1-\cos x}{4x}\right) = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{1}{4}\times\dfrac{\sin x}{x} - \dfrac{1-\cos x}{x^2}\times\dfrac{x}{4}\right)$.

Donc : $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \dfrac{1}{4}\times 1 - \dfrac{1}{2}\times\dfrac{0}{4} = \dfrac{1}{4}$. Puisque $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$, alors f est continue à gauche en 0.

Puisque la fonction f est continue à droite et à gauche en 0, alors elle est continue en ce point.

Applications

1. Dans chacun des cas suivants, étudier la continuité de la fonction f au point x_0 :

a) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{x+1} & \text{si } x \le 0 \\ f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x+3} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ et $x_0 = 0$; **b)** $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^3 - 7x - 6}{|x-3|} & \text{si } x \neq 3 \\ f(3) = 20 \end{cases}$ et $x_0 = 3$.

c) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2 + 5x + 6}{x^3 + 8} & \text{si } x > -2 \\ f(x) = \dfrac{\sqrt{x+6} - 2}{x+2} & \text{si } -6 \le x < -2 \\ f(-2) = \dfrac{1}{4} \end{cases}$ et $x_0 = -2$; **d)** $\begin{cases} f(x) = x\sin\dfrac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ f(0) = 0 \\ f(x) = \dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ et $x_0 = 0$.

e) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x+4} - 2} & \text{si } 0 < x < \dfrac{\pi}{4} \\ f(0) = 4 \\ f(x) = \dfrac{x\tan(2x)}{1-\cos x} & \text{si } -\dfrac{\pi}{4} < x < 0 \end{cases}$ et $x_0 = 0$.

2. Déterminer les deux réels a et b pour que la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2 + x - a}{x-1} & \text{si } x < 1 \\ f(x) = x^2 + b & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

soit continue au point $x_0 = 1$.

3. a) Montrer que : $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{\cos(\pi x)}{2x-1} = -\dfrac{\pi}{2}$.

b) On considère la fonction numérique g définie par :

$$\begin{cases} g(x) = mx + 1 & \text{si } x < \dfrac{1}{2} \\ g(x) = \dfrac{n\cos(\pi x)}{\pi(2x-1)} & \text{si } x > \dfrac{1}{2} \\ g\left(\dfrac{1}{2}\right) = -1 \end{cases}$$

Déterminer les nombres réels m et n pour que la fonction g soit continue au point $x_0 = \dfrac{1}{2}$.

For more visit: L9ray.com

2.3. CONTINUITÉ D'UNE FONCTION SUR UN INTERVALLE

Définition 3

1) Une fonction f est continue sur un intervalle ouvert I si elle est continue en tout point de I.

En particulier : f est continue sur $]a;b[$ si elle est continue en tout point de $]a;b[$.

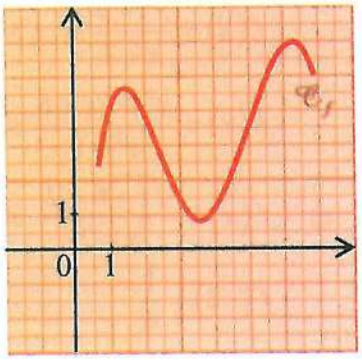
2) Une fonction f est continue sur $[a;b]$ si elle est continue sur $]a;b[$ et continue à droite en a et à gauche en b.

3) Une fonction f est continue sur $[a;b[$ si elle est continue sur $]a;b[$ et continue à droite en a.

4) Une fonction f est continue sur $]a;b]$ si elle est continue sur $]a;b[$ et continue à gauche en b.

INTERPRÉTATION GRAPHIQUE

Intuitivement, dire que la fonction numérique f est continue sur un intervalle I signifie que sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est continue (elle n'a pas de trou ni de saut). Autrement dit, on peut tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ sans lever le crayon.



Exemples

1) Toute fonction constante est continue sur $\mathbb{R}$.

2) Toute fonction polynomiale P est continue sur $\mathbb{R}$ car pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$: $\lim\limits_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$

3) Toute fonction rationnelle est continue sur son ensemble de définition.

4) Les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

5) La fonction $x \mapsto \tan x$ est continue sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition.

6) La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

2.4. FONCTION PARTIE ENTIÈRE

Définition 4

Soit x un nombre réel.

La partie entière de x est le plus grand entier relatif n qui est inférieur ou égal à x. On la note : $E(x)$.

Exemples

$E(4,2) = 4$; $E(-3,75) = -4$; $E(\sqrt{3}) = 1$; $E\left(-\frac{9}{4}\right) = -3$; $E\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

$E(\pi) = 3$; $E(-0,1457) = -1$; $E(\sqrt{3}+\sqrt{2}) = 3$; $E(-1) = -1$

For more visit: L9ray.com

Proposition 8

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $E(x) \leq x < E(x)+1$ et $x-1 < E(x) \leq x$.

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $E(x) = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$.

3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $p \in \mathbb{Z}$: $E(x+p) = E(x)+p$.

4) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fonction partie entière est continue à droite en n et discontinue à gauche en n.

5) La fonction partie entière est continue sur tout intervalle du type $[n;n+1[$ où $n \in \mathbb{Z}$.

6) La fonction partie entière n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

Courbe représentative de la fonction partie entière :

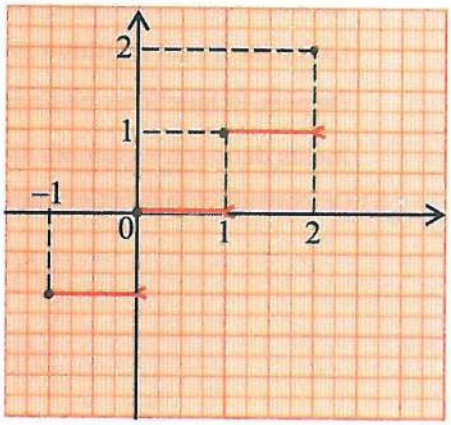
Soit $k \in \mathbb{Z}$. Si $k \leq x < k+1$ alors $E(x) = k$. Par suite,

la fonction partie entière est constante sur l'intervalle $[k;k+1[$.

On obtient ainsi la courbe représentative ci-contre :

Remarquons bien que la courbe représentative de la fonction partie entière présente des sauts aux points 0, 1 et 2. Elle est donc discontinue aux points 0, 1 et 2.

En fait, la proposition précédente affirme que la fonction partie entière est continue sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$.



2.5. OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONS CONTINUES

Proposition 9

Soit f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I et k un nombre réel. Alors :

(1) Les fonctions $f+g$, $k.f$ et $f.g$ sont continues sur I.

(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f^n : x \mapsto \left(f(x)\right)^n$ est continue sur I.

(3) Si la fonction g ne s'annule pas sur I, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I.

(4) La fonction $|f|$ est continue sur I.

(5) Si la fonction f est positive sur I, alors $\sqrt{f}$ est continue sur I.

Exemples

1) La fonction f définie par $f(x) = x^2 + 5x + \cos x$ est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de deux fonctions continue sur $\mathbb{R}$ qui sont : $x \mapsto x^2 + 5x$ et $x \mapsto \cos x$.

For more visit: L9ray.com

2) La fonction $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$.

3) La fonction g définie par $g(x) = \sqrt{x}\left(x^3 + 5x - 7\right)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ en tant que produit de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$ qui sont $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto x^3 + 5x - 7$.

4) On considère la fonction h définie par : $h(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{2|x+1| - 5}$. Étudions la continuité de h sur D_h :

On a tout d'abord $D_h = \left]-\infty; -\frac{7}{2}\right[\cup \left]-\frac{7}{2}; \frac{3}{2}\right[\cup \left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$. Soit maintenant u et v les deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = x^2 - 2x + 3$ et $v(x) = 2|x+1| - 5$

La fonction u est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynomiale.

La fonction v est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

De plus, la fonction v ne s'annule pas sur D_h. Par suite, la fonction h est continue sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition.

5) On considère la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + 2x - \dfrac{5}{2} & \text{si } x \leq -3 \\ f(x) = \dfrac{\sqrt{2x+10} - 2}{x+3} & \text{si } x > -3 \end{cases}$$

Montrons que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$:

- Continuité de la fonction f au point $x_0 = -3$:

On a : $f(-3) = (-3)^2 + 2(-3) - \dfrac{5}{2} = \dfrac{1}{2}$. Calculons maintenant : $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x < -3}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x > -3}} f(x)$.

$$\lim_{\substack{x \to -3 \\ x < -3}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -3 \\ x < -3}} \left(x^2 + 2x - \frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{\substack{x \to -3 \\ x > -3}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -3 \\ x > -3}} \frac{\sqrt{2x+10} - 2}{x+3} = \lim_{\substack{x \to -3 \\ x > -3}} \frac{2(x+3)}{(x+3)\left(\sqrt{2x+10} + 2\right)} = \lim_{\substack{x \to -3 \\ x > -3}} \frac{2}{\sqrt{2x+10} + 2} = \frac{1}{2}.$$

Puisque $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x < -3}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x > -3}} f(x) = f(-3)$, alors la fonction f est continue au point $x_0 = -3$.

- Continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}$:

La fonction f est continue sur l'intervalle $]-\infty; -3[$ (restriction d'une fonction polynôme).

La fonction $x \mapsto 2x + 10$ est continue et positive sur l'intervalle $]-3; +\infty[$, donc la fonction numérique $x \mapsto \sqrt{2x+10} - 2$ est continue sur cet intervalle.

La fonction $x \mapsto x + 3$ est continue et ne s'annule pas sur l'intervalle $]-3; +\infty[$.

La fonction f est donc continue sur l'intervalle $]-3; +\infty[$ en tant que quotient de deux fonctions continues sur cet intervalle.

For more visit: L9ray.com

Comme f est continue en -3 et sur chacun des intervalles $]-\infty;-3[$ et $]-3;+\infty[$, alors elle est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

6) On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x\sqrt{x}-1}{x-1} & \text{si } x\neq 1 \\ f(1)=\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Montrons que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^+$:

- Continuité de la fonction f en 1 :

On a : $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(x\sqrt{x}\right)^2-1}{(x-1)\left(x\sqrt{x}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{(x-1)\left(x\sqrt{x}+1\right)}$

Donc : $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{(x-1)\left(x\sqrt{x}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x+1}{x\sqrt{x}+1}=\dfrac{3}{2}$.

Puisque $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$, alors la fonction f est continue en 1.

- Continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}^+$:

La fonction $x\mapsto x\sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ en tant que produit de deux fonctions continues sur cet intervalle ; d'où la fonction $x\mapsto x\sqrt{x}-1$ est continue sur $\mathbb{R}^+\setminus\{1\}$.

La fonction $x\mapsto x-1$ est continue et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^+\setminus\{1\}$. Ainsi, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^+\setminus\{1\}$ comme quotient de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}^+\setminus\{1\}$.

Puisque la fonction f est continue en 1, alors elle est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Applications

1. Dans chacun des cas suivants, montrer que la fonction f est continue sur son ensemble de définition :

a) $f(x)=\left(\dfrac{4x+5}{x^2+3}\right)\sin x$; b) $f(x)=|2x-3|+\dfrac{x+1}{x^2+x+1}$; c) $f(x)=x^2-\tan x-1$

2. Soit g la fonction numérique définie par $g(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}}{4-x}$.

Montrer que g est continue sur l'intervalle $[2;4[$.

3. Déterminer tous les couples $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ pour lesquels la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=a^2x+3 & \text{si } x<1 \\ f(x)=\dfrac{-b^2x+8}{2x-1} & \text{si } 1\leq x\leq 3 \\ f(x)=\dfrac{2}{5}x^2-\dfrac{b^2}{5}x+ab & \text{si } x>3 \end{cases}$$

For more visit: L9ray.com

est continue sur $\mathbb{R}$.

4. Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[-2;1[$ par : $f(x) = xE(x)+1$.

a) Donner l'expression de $f(x)$ sur chacun des intervalles : $[-2;-1[$; $[-1;0[$; $[0;1[$.

b) Construire la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f dans un repère orthonormé.

La fonction f est-elle continue sur l'intervalle $[-2;1[$? Justifier la réponse.

2.6. CONTINUITÉ DE LA COMPOSÉE DE DEUX FONCTIONS

Proposition 10

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie sur un intervalle J tel que $f(I) \subset J$, et soit x_0 un élément de I.

Si f est continue au point x_0 et g est continue au point $f(x_0)$, alors la fonction $g\,o\,f$ est continue en x_0.

Corollaire

Si f est continue sur un intervalle I et g est continue sur un intervalle J tel que $f(I) \subset J$ alors la fonction $g\,o\,f$ est continue sur l'intervalle I.

Exemples

1) Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \cos\left(2x^2 - 3x + 4\right)$

Montrons que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$:

Puisque les fonctions $f_1 : x \mapsto 2x^2 - 3x + 4$ et $f_2 : x \mapsto \cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et $f_1(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$, alors la fonction $f = f_2\,o\,f_1$ est continue sur $\mathbb{R}$.

2) Soit g la fonction numérique définie par : $g(x) = \sqrt{\dfrac{x}{1+\sin^2 x}}$

Étudions la continuité de g sur $\mathbb{R}^+$:

La fonction $g_1 : x \mapsto \dfrac{x}{1+\sin^2 x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $g_1(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+$, et la fonction $g_2 : x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. Il s'ensuit donc que la fonction $g = g_2\,o\,g_1$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Applications

Dans chacun des cas suivants, étudier la continuité de la fonction f sur les intervalles de D_f.

1) $f(x) = \sin\left(\dfrac{2x+1}{x^2-1}\right)$; 2) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-3}{x+2}}$; 3) $f(x) = \sqrt{2|x|-3}$

4) $f(x) = \cos\left(\sqrt{x^2+1}\right)$; 5) $f(x) = \sqrt{1-\sin x}$; 6) $f(x) = \cos\left(\tan^2 x\right)$

For more visit: L9ray.com

3 IMAGE D'UN INTERVALLE PAR UNE FONCTION CONTINUE

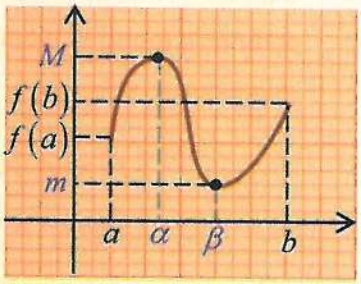
3.1. IMAGE D'UN SEGMENT PAR UNE FONCTION CONTINUE

Proposition 11

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Autrement dit :

(la fonction f est continue sur $[a;b]$) $\Rightarrow$ $f([a;b])=[m;M]$



Remarque

Si f est continue sur un segment $[a;b]$, alors $M=f(\alpha)$ est le maximum de f sur $[a;b]$ et $m=f(\beta)$ est le minimum de f sur $[a;b]$. On a alors : $f([a;b])=[m;M]$ (voir la figure ci-dessus)

Proposition 12

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Exemple

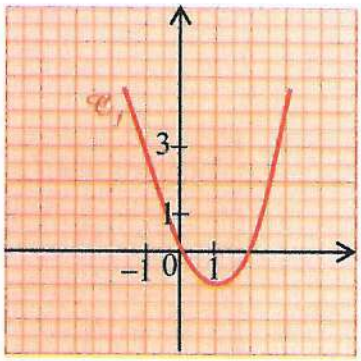
Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^2-2x$

À partir du graphe de la fonction f, on déduit que :

$f([-1;2])=[-1;3]$; $f([0;2[)=[-1;0]$

$f(]-1;0])=[0;3[$; $f([2;+\infty[)=[0;+\infty[$

$f(]-\infty;1])=[-1;+\infty[$; $f(\mathbb{R})=[-1;+\infty[$



Applications

Pour chacun des cas suivants, montrer que la fonction numérique f est continue sur l'intervalle I puis déterminer $f(I)$:

1) $f(x)=x^2+2$ et $I=[-1;3]$; 2) $f(x)=\dfrac{x-4}{x-2}$ et $I=[5;8]$

3) $f(x)=\sqrt{x+1}$ et $I=[3;5]$; 4) $\begin{cases} f(x)=x+3 \text{ si } x\leq 2 \\ f(x)=x^2+1 \text{ si } x>2 \end{cases}$ et $I=[-3;5]$

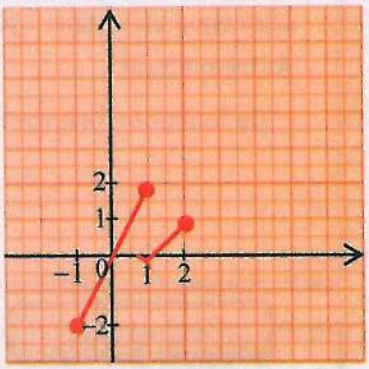
For more visit: L9ray.com

Remarques

- La continuité d'une fonction est une condition suffisante pour que l'image d'un intervalle soit un intervalle, mais cette condition n'est pas évidemment nécessaire. En effet, il se peut que l'image d'un intervalle par une fonction discontinue soit un intervalle comme le montre l'exemple suivant :

Considérons la fonction f définie sur $[-1;2]$ par :

$$\begin{cases} f(x) = 2x & \text{si } x \in [-1;1] \\ f(x) = x-1 & \text{si } x \in]1;2] \end{cases}$$



L'image de l'intervalle $[-1;2]$ par la fonction f est l'intervalle $[-2;2]$ bien que la fonction f ne soit pas continue sur $[-1;2]$.

- Les intervalles I et $f(I)$ ne sont pas toujours de même nature. À titre d'exemple, l'image de l'intervalle semi-ouvert $]-1;2]$ par la fonction $x \mapsto x^2$ est le segment $[0;4]$.

3.2. IMAGE D'UN INTERVALLE PAR UNE FONCTION CONTINUE ET STRICTEMENT MONOTONE

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I.

On a alors les résultats suivants :

	L'image de l'intervalle I par la fonction numérique f	
L'intervalle I	f strictement croissante sur I	f strictement décroissante sur I
$[a;b]$	$[f(a);f(b)]$	$[f(b);f(a)]$
$]a;b[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x);\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x);\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$
$[a;b[$	$\left[f(a);\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x);f(a)\right]$
$]-\infty;a]$	$\left]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x);f(a)\right]$	$\left[f(a);\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\right[$
$]a;+\infty[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x);\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x);\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$
$\mathbb{R}$	$\left]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x);\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x);\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\right[$

For more visit: L9ray.com

Exemples

1) On considère la fonction numérique f définie par : $f(x)=\dfrac{2x-3}{x+1}$.

L'ensemble de définition de la fonction f est : $D_f=]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$.

On a : $\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2+3=5>0$. Donc, la fonction f est donc continue et strictement croissante sur chacun des intervalles $]-\infty;-1[$ et $]-1;+\infty[$. Il en découle donc les résultats suivants :

$f([0;1])=[f(0);f(1)]=\left[-3;-\dfrac{1}{2}\right[$, $f([-2;-1[)=\left[f(-2);\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)\right[=[7;+\infty[$

$f(]-1;1])=\left]\lim\limits_{x\to-1^+}f(x);f(1)\right]=\left]-\infty;-\dfrac{1}{2}\right]$, $f([2;+\infty[)=\left[f(2);\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right[=\left[\dfrac{1}{3};2\right[$

2) Soit f une fonction continue sur les deux intervalles $]-\infty;2[$ et $]2;+\infty[$ et dont le tableau de variations est donné par :

x	$-\infty$		-3		2		4		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	$+\infty$	↗	2	↘	1

Déterminons les images des intervalles suivants par la fonction f :

$]-\infty;-3]$; $[-3;2[$; $]2;4]$; $]4;+\infty[$

- $f(]-\infty;-3])=\left]\lim\limits_{x\to-\infty}f(x);f(-3)\right]=]-\infty;3]$.
- $f([-3;2[)\left]\lim\limits_{x\to2^-}f(x);f(-3)\right]=]-\infty;3]$.
- $f(]2;4])\left]\lim\limits_{x\to2^+}f(x);f(4)\right]=]-\infty;2]$.
- $f(]4;+\infty[)=\left]\lim\limits_{x\to+\infty}f(x);\lim\limits_{x\to4^-}f(x)\right[=]1;2[$.

Application

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^2-2x+3$

Déterminer les images des intervalles suivants par la fonction f :

$I=]-\infty;0]$; $J=[1;2]$; $K=]-5;-1[$; $L=[\sqrt{2};+\infty[$

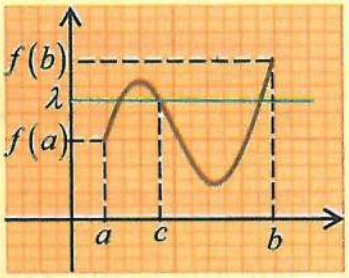
For more visit: L9ray.com

3.3. THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

Proposition 13

Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$, alors pour tout réel λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c appartenant à l'intervalle $[a;b]$ tel que $f(c)=\lambda$.

En d'autres termes : l'équation $f(x)=\lambda$ d'inconnue x admet au moins une solution dans $[a;b]$, pour tout réel λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$.



Preuve

Comme f est continue sur l'intervalle $[a;b]$, alors il existe deux réels m et M tels que $f([a;b])=[m;M]$.

Puisque les réels $f(a)$ et $f(b)$ appartiennent à $[m;M]$ (en supposant par exemple que $f(a)\leq f(b)$) alors $[f(a);f(b)]\subset[m;M]$, c'est-à-dire que $[f(a);f(b)]\subset f([a;b])$. Il s'ensuit donc que pour tout réel λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c appartenant à $[a,b]$ tel que $f(c)=\lambda$.

Exemple

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0;\pi]$ par : $f(x)=x+\cos x$

La fonction f est continue sur $[0;\pi]$ et de plus $f(0)=1$ et $f(\pi)=\pi-1$.

Puisque 2 est compris entre $f(0)$ et $f(\pi)$ alors il existe au moins un réel $c\in[0;\pi]$ tel que $f(c)=2$.

Cela signifie que l'équation $x+\cos x=2$ admet au moins une solution sur l'intervalle $[0;\pi]$.

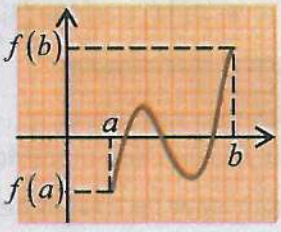
Corollaire

Si la fonction f est continue sur $[a;b]$ tel que $f(a)\times f(b)<0$ alors l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a;b]$. Si de plus, la fonction f est strictement monotone, cette solution est unique.

Remarque

On peut interpréter le résultat du corollaire précédent comme suit :

Si la fonction f est continue sur $[a;b]$ et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors le graphe $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses, au moins une fois, en un point dont l'abscisse appartient au segment $[a;b]$.



For more visit: L9ray.com

Exemples

1) Montrons que l'équation $8x^3 - 6x - 1 = 0$ admet une solution dans chacun des intervalles $\left]-1;-\frac{1}{2}\right[$, $\left]-\frac{1}{2};0\right[$ et $]0;1[$:

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 8x^3 - 6x - 1$

La fonction g est évidemment continue sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynomiale.

- On a $g(-1) = -3$ et $g\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$, donc $g(-1).g\left(-\frac{1}{2}\right) < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution dans l'intervalle $\left]-1;-\frac{1}{2}\right[$.
- On a $g\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$ et $g(0) = -1$, donc $g(0).g\left(-\frac{1}{2}\right) < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution dans l'intervalle $\left]-\frac{1}{2};0\right[$.
- On a $g(1) = 1$ et $g(0) = -1$, donc $g(0).g(1) < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution dans l'intervalle $]0;1[$.

D'où l'équation $8x^3 - 6x - 1 = 0$ admet une solution dans chacun des intervalles $\left]-1;-\frac{1}{2}\right[$, $\left]-\frac{1}{2};0\right[$ et $]0;1[$. Comme de plus g est un polynôme de degré 3, ce sont les seules solutions sur $\mathbb{R}$.

2) Montrons que l'équation $x + \sin x - 1 = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $I = \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$:

On considère la fonction f définie sur I par : $f(x) = x + \sin x - 1$.

La fonction f est continue et strictement croissante sur I en tant que somme des fonctions continues et strictement croissantes sur I. De plus $f(0) = -1$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$, donc $f(0).f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans I.

Applications

1. Montrer que chacune des équations suivantes admet au moins une solution dans l'intervalle I :

a) $x^4 + x^2 + 4x - 1 = 0$ et $I = [0;1]$; b) $2\cos x - x = 0$ et $I = [0;\pi]$

c) $1 + \sin x = 4x$ et et $I = \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$; d) $\tan x + x^2 = 2$ et $I = \left]\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3}\right[$

2. Montrer que l'équation $x^3 - 6x^2 + 6 = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[-2;0]$.

3. Montrer que l'équation $x^4 - 15x^3 - 6x^2 - 37x - 12 = 0$ admet au moins une solution unique dans $\mathbb{R}^+$.

4. Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que : $(\forall x \in I)\ f(x) \neq 0$.

Montrer par l'absurde que la fonction f garde un signe constant sur l'intervalle I.

For more visit: L9ray.com

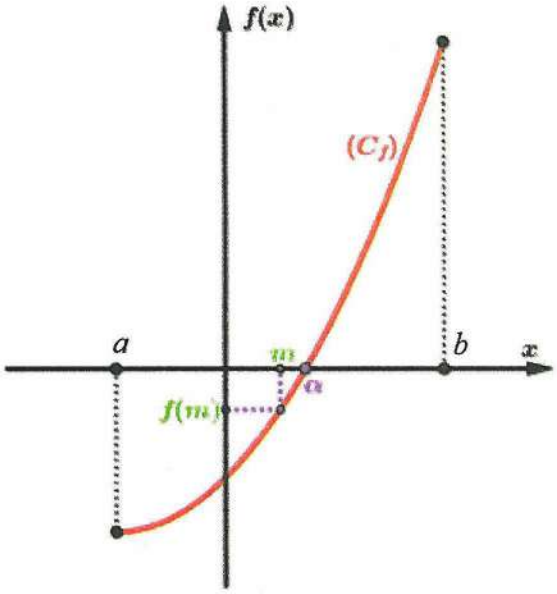
3.4. PRINCIPE DE LA MÉTHODE DE DICHOTOMIE

Soit f une fonction continue sur un segment $[a;b]$ telle que l'équation $f(x)=0$ admette une solution unique α dans $[a;b]$.

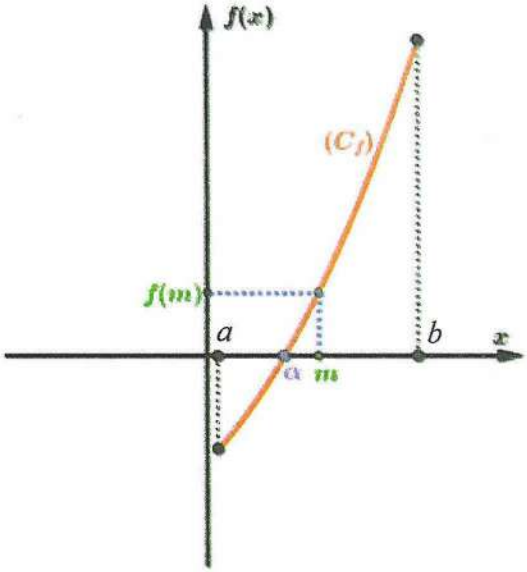
Pour déterminer un encadrement du nombre α, on démarre donc en ayant localisé la racine α entre les réels a et b $(a<\alpha<b)$; et on sait par exemple que sur cet intervalle, la fonction f (continue) est strictement croissante.

On calcule alors le centre m du segment $[a;b]$ (à savoir $m=\dfrac{a+b}{2}$) puis son image par f : $f(m)$, et on la compare à 0.

Deux cas peuvent alors se produire :



Cas où $f(m)<0$
On a alors $m<\alpha<b$. On reprend la bissection de l'intervalle en posant :
$a=m$ et $b=b$
puis on continue comme précédemment...



Cas où $f(m)>0$
On a alors $a<\alpha<m$. On reprend la bissection de l'intervalle en posant :
$a=a$ et $b=m$
puis on continue comme précédemment...

Exemple

Soit la fonction f la fonction numérique définie par : $f(x)=x^3+x^2+x-2$.

La fonction f est continue et strictement croissante sur $[0;1]$ et on a $f(0)f(1)<0$. Donc l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α tel que $0<\alpha<1$. Déterminons un encadrement de α de longueur $0,25$.

Le centre de $[0;1]$ est $\dfrac{1}{2}$ et on a $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{9}{8}$. Donc $f\left(\dfrac{1}{2}\right)\times f(1)<0$ et $\dfrac{1}{2}<\alpha<1$. (Longueur : $1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$)

Le centre de $\left[\dfrac{1}{2};1\right]$ est $\dfrac{3}{4}$ et on a $f\left(\dfrac{3}{4}\right)=-\dfrac{17}{64}$. Donc $f(1)\times f\left(\dfrac{3}{4}\right)<0$ et $\dfrac{3}{4}<\alpha<1$. (Longueur : $1-\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{4}$)

Ainsi : $\dfrac{3}{4}<\alpha<1$.

For more visit: L9ray.com

4 FONCTION RÉCIPROQUE D'UNE FONCTION CONTINUE ET STRICTEMENT MONOTONE

4.1. THÉORÈME DE LA FONCTION RÉCIPROQUE

Proposition 14

Soit f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I et soit $J = f(I)$.

Pour tout $y \in J$, l'équation $f(x) = y$ admet une solution unique x dans l'intervalle I.

La fonction qui à chaque élément y de J associe l'élément unique x de I tel que $f(x) = y$ est appelée la fonction réciproque de la fonction f et est notée f^{-1}.

Remarques

- Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I et $J = f(I)$, et si f^{-1} est la fonction réciproque de la fonction f, alors :

$$\begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases}$$

- Pour tout $x \in J$: $f \circ f^{-1}(x) = x$.
- Pour tout $x \in I$: $f^{-1} \circ f(x) = x$.
- Soit f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I et soit $J = f(I)$. Si $0 \in J$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans I. C'est le réel $f^{-1}(0)$.

Exemple

Soit f la fonction numérique définie sur $I =]-\infty;-1]$ par : $f(x) = \dfrac{x^2+5}{x-2}$.

Montrons que la fonction f admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J à déterminer et calculons $f^{-1}(x)$ pour $x \in J$:

La fonction f étant continue et dérivable sur I car c'est la restriction d'une fonction rationnelle et on a pour tout $x \in I$: $f'(x) = \dfrac{2x(x-2)-(x^2+5)}{(x-2)^2} = \dfrac{x^2-4x-5}{(x-2)^2} = \dfrac{(x+1)(x-5)}{(x-2)^2}$.

Il s'ensuit donc que : $(\forall x \in]-\infty;-1[)\ f'(x) > 0$.

Puisque la fonction f est continue et strictement croissante sur I, alors elle admet une fonction réciproque définie sur l'intervalle $J = f(I)$ avec : $J = f(I) = \left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x); f(-1)\right] =]-\infty;-2]$.

For more visit: L9ray.com

Détermination de $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$:

Soit $x \in J$ et $y \in I$ tels que $y = f^{-1}(x)$.

On a : $y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y) \Leftrightarrow \dfrac{y^2+5}{y-2} = x \Leftrightarrow y^2 - xy + 2x + 5 = 0$.

Le discriminant de cette équation d'inconnue y est : $\Delta = (-x)^2 - 4(2x+5) = x^2 - 8x - 20$

Puisque $\Delta \geq 0$, alors l'équation $y^2 - xy + 2x + 5 = 0$ admet deux solutions réelles qui sont :

$$y_1 = \frac{x - \sqrt{x^2 - 8x - 20}}{2} \quad \text{et} \quad y_2 = \frac{x + \sqrt{x^2 - 8x - 20}}{2}$$

On a : $y_1 + 1 = \dfrac{x + 2 - \sqrt{x^2 - 8x - 20}}{2} \leq 0$ (car $x \in J$ c'est-à-dire : $x + 2 \leq 0$ et $-\sqrt{x^2 - 8x - 20} \leq 0$)

En définitive : $(\forall x \in J) \quad f^{-1}(x) = \dfrac{x - \sqrt{x^2 - 8x - 20}}{2}$

Applications

Dans chacun des cas suivants, montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer puis déterminer une expression de $f^{-1}(x)$ pour $x \in J$:

1) $f(x) = x^2 - 2x + 5$ et $I = [1; +\infty[$; 2) $f(x) = 4x - x^2$ et $I =]-\infty; 2[$

3) $f(x) = \sqrt{x^2 - x} - x$ et $I =]0; +\infty]$; 4) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+2}$ et $I = \left[0; \sqrt{2}\right]$

4.2. PROPRIÉTÉS DE LA FONCTION RÉCIPROQUE

Proposition 15

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors :

- La fonction réciproque f^{-1} est continue sur $f(I)$ et a même sens de variation que la fonction f.
- Les courbes représentatives de f et de f^{-1}, dans un repère orthonormé, sont symétriques par rapport à la première bissectrice (c'est-à-dire par rapport à la droite d'équation $y = x$)

Preuve

Soit y_1 et y_2 deux éléments distincts de $f(I)$. Il existe deux réels distincts x_1 et x_2 de I tels que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$. il s'ensuit donc que : $x_1 = f^{-1}(y_1)$ et $x_2 = f^{-1}(y_2)$. Par conséquent :

$$\frac{f^{-1}(y_2) - f^{-1}(y_1)}{y_2 - y_1} = \frac{x_1 - x_2}{f(x_1) - f(x_2)}$$

Cela signifie donc que les taux de variation des deux fonctions f et f^{-1} ont le même signe et par suite,

For more visit: L9ray.com

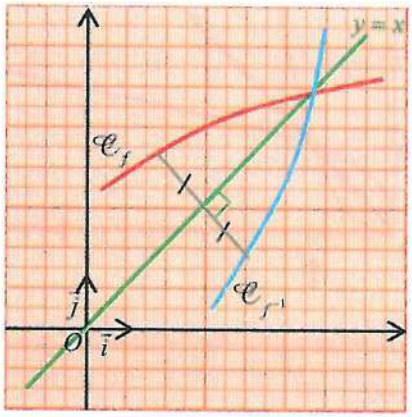
les fonctions f et f^{-1} ont le même sens de variation.

Soit $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ les graphes de f et f^{-1} respectivement dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Soit $M(x;y)$ un point du plan et $M'(y;x)$ son symétrique par rapport à la première bissectrice. Donc :

$$M(x;y) \in \mathscr{C}_f \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow M'(y;x) \in \mathscr{C}_{f^{-1}}$$

Il s'ensuit donc que $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice.



5 FONCTION RACINE n^ième - PUISSANCE RATIONNELLE

5.1. FONCTION RACINE n^ième

Soit n un entier naturel non nul.

La fonction $f : x \mapsto x^n$ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}^+$; donc elle admet une fonction réciproque définie sur l'intervalle $f(\mathbb{R}^+) = \left[f(0); \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[= \mathbb{R}^+$.

Définition 5

Soit n un entier naturel non nul.

La fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $x \mapsto x^n$ admet une fonction réciproque définie sur $\mathbb{R}^+$.

Cette fonction est appelée fonction racine $n^{ième}$ et est notée $\sqrt[n]{\ }$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\sqrt[n]{x}$ se lit « racine $n^{ième}$ du réel positif x »

Proposition 16

Soit n un entier naturel non nul. Alors :

- Pour tous x et y de $\mathbb{R}^+$:

$$\sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow y^n = x \quad ; \quad \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y \quad ; \quad \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x < y$$

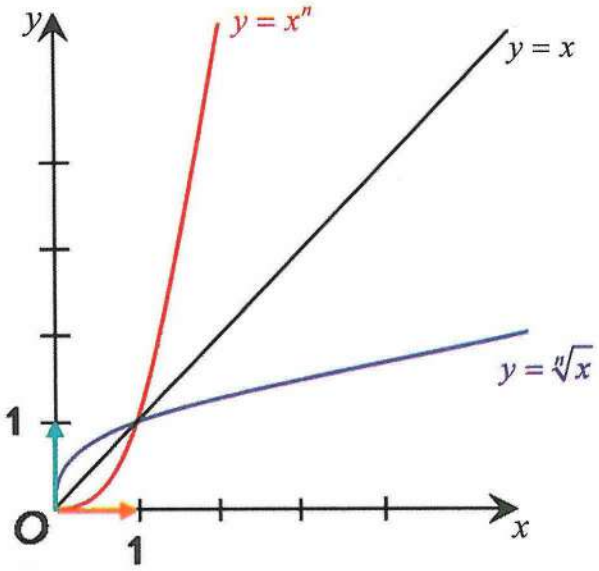
- Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$: $\sqrt[n]{x^n} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$

- La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et de plus : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$.

For more visit: L9ray.com

L9RAY

1 CONNAISSANCES FONDAMENTALES



Remarques

- Pour tout réel positif x : $\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$.
- La fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est appelée fonction racine cubique.
- Soit a et b deux réels positifs.
  - L'expression conjuguée de $\sqrt[3]{a} - b$ est $\left(\sqrt[3]{a}\right)^2 + b\sqrt[3]{a} + b^2$.
  - L'expression conjuguée de $\sqrt[4]{a} - b$ est $\left(\sqrt[4]{a}\right)^3 + b\left(\sqrt[4]{a}\right)^2 + b^2\sqrt[4]{a} + b^3$.

Ces résultats et d'autres sont des transcriptions immédiates des identités remarquables suivantes :

$$x^3 - y^3 = (x-y)\left(x^2 + xy + y^2\right) \quad ; \quad x^3 + y^3 = (x+y)\left(x^2 - xy + y^2\right)$$

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y)$$

$$x^4 - y^4 = (x-y)\left(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3\right) = (x-y)(x+y)\left(x^2 - y^2\right)$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0;1]$: $x^n \leq x \leq \sqrt[n]{x}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [1;+\infty[$: $\sqrt[n]{x} \leq x \leq x^n$.
- Pour tous réels positifs x et y , le signe de $\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{y}$ est celui de $x - y$.
- Soit a un réel non nul et $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

L'ensemble des solutions de l'équation $x^n = a$ dépend du signe du nombre a et de la parité de l'entier n.

Le tableau ci-contre résume tous les cas possibles.

Parité de n / Signe de a	n pair	n impair
$a > 0$	$S = \left\{-\sqrt[n]{a}; \sqrt[n]{a}\right\}$	$S = \left\{\sqrt[n]{a}\right\}$
$a < 0$	$S = \varnothing$	$S = \left\{-\sqrt[n]{-a}\right\}$

For more visit: L9ray.com

Proposition 17

Soit a et b deux réels positifs, et p et n deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2.

On a alors les propriétés suivantes :

$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$; $\sqrt[n]{\frac{1}{a}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a}}$ (avec $a>0$) ; $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ (avec $b>0$)

$\sqrt[np]{a^p}=\sqrt[n]{a}$; $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}=\sqrt[np]{a}$; $\left(\sqrt[n]{a}\right)^p=\sqrt[n]{a^p}$

Exemples

1) Simplifions le nombre : $A=\dfrac{\sqrt[4]{32}\times\sqrt[6]{27}\times\sqrt[4]{108}}{\sqrt{\sqrt[4]{144}}}$

On a : $A=\dfrac{\sqrt[4]{2^5}\times\sqrt[6]{3^3}\times\sqrt[4]{2^2\times3^3}}{\sqrt[8]{2^4\times3^2}}=\dfrac{\sqrt[4]{2^4\times2}\times\sqrt[6]{3^3}\times\sqrt[4]{2^2}\times\sqrt[4]{3^3}}{\sqrt[8]{2^4}\times\sqrt[8]{3^2}}=\dfrac{2\sqrt[4]{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}\times\sqrt[4]{3^3}}{\sqrt{2}\times\sqrt[4]{3}}=6\sqrt[4]{2}$

2) Classons les nombres $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt{2}$ et $\sqrt[6]{10}$ par ordre croissant :

On a : $\sqrt[3]{5}=\sqrt[6]{5^2}=\sqrt[6]{25}$ et $\sqrt{2}=\sqrt[6]{2^3}=\sqrt[6]{8}$

Puisque $\sqrt[6]{8}<\sqrt[6]{10}<\sqrt[6]{25}$, alors : $\sqrt{2}<\sqrt[6]{10}<\sqrt[3]{5}$.

3) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : (E) : $\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}=\sqrt[3]{2}$

L'équation (E) est définie lorsque $1+x\geq0$ et $1-x\geq0$, c'est-à-dire pour $x\in[-1;1]$.

Soit $x\in[-1;1]$. On a :

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}=\sqrt[3]{2} &\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}\right)^3=\left(\sqrt[3]{2}\right)^3\\ &\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{1+x}\right)^3+\left(\sqrt[3]{1-x}\right)^3+3\sqrt[3]{1+x}\times\sqrt[3]{1-x}\left(\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}\right)=2\\ &\Leftrightarrow 1+x+1-x+3\sqrt[3]{1+x}\times\sqrt[3]{1-x}\left(\sqrt[3]{2}\right)=2\\ &\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{1-x^2}=0\\ &\Leftrightarrow 1-x^2=0\\ &\Leftrightarrow x^2=1\\ &\Leftrightarrow x=1 \text{ ou } x=-1\end{aligned}$$

Par suite, l'ensemble solution de l'équation (E) est : $S=\{-1;1\}$.

4) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $\sqrt[3]{x+1}<2$

Cette inéquation est définie lorsque $x+1\geq0$, c'est-à-dire pour $x\in[-1;+\infty[$.

Soit $x\in[-1;+\infty[$. On a : $\sqrt[3]{x+1}<2\Leftrightarrow\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^3<2^3\Leftrightarrow x+1<8\Leftrightarrow x<7$.

Par suite, l'ensemble solution de cette inéquation est : $S=[-1;7[$.

For more visit: L9ray.com

5) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $\sqrt[3]{(x-2)(x^2-x+3)} > x-2$

Soit D l'ensemble de définition de cette inéquation. On a :

$$x \in D \Leftrightarrow (x-2)(x^2-x+3) \geq 0 \Leftrightarrow x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2 \quad \left(\text{Car : } x^2-x+3 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} > 0\right)$$

Donc : $D = [2;+\infty[$.

On a maintenant pour tout $x \in D$:

$$\sqrt[3]{(x-2)(x^2-x+3)} > x-2 \Leftrightarrow (x-2)(x^2-x+3) > (x-2)^3$$

$$\Leftrightarrow x^2-x+3 > (x-2)^2 \quad (\text{car } 2 \text{ n'est pas solution de l'inéquation})$$

$$\Leftrightarrow -x+3 > -4x+4$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{1}{3}$$

Par suite, l'ensemble solution de cette inéquation est : $S =]2;+\infty[$.

Applications

1. Simplifier les nombres suivants : $A = \dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{256}} \times \sqrt[4]{64}}{\sqrt[5]{24300000} \times \sqrt[3]{1024}}$ et $B = \dfrac{\sqrt[4]{9} \times \sqrt{\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{9}}}{\sqrt[5]{729}\sqrt{\sqrt{3}}}$

2. Comparer les nombres $\sqrt[4]{5}$ et $\sqrt[3]{4}$.

3. Montrer que : $(\forall a \in \mathbb{R}^+)(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall p \in \mathbb{N}^*)$: $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[p]{a} = \sqrt[np]{a^{n+p}}$.

4. a) Développer $\left(2+\sqrt{2}\right)^3$ et $\left(2-\sqrt{2}\right)^3$.

b) En déduire la valeur exacte du nombre : $E = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} - \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$.

5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$16x^4-81=0$; $8x^3-27=0$; $64+147x^3=0$; $(2x-1)^3+343=0$

$\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}=12$; $\sqrt[3]{x+5}+\sqrt[3]{x+6}=\sqrt[3]{2x+11}$; $\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}=\sqrt[3]{4x}$

6. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$x^3-3 \geq 0$; $16x^4-25<0$; $\sqrt[5]{x+2}<3$; $x+2>\sqrt[3]{x^2+8}$; $\dfrac{(x^3-1)(x^3+8)}{x^3-3\sqrt{3}} \geq 0$

Proposition 18

Soit u une fonction positive sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$.

- Si u est continue sur I alors la fonction $\sqrt[n]{u}$ est continue sur I.
- Si $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[n]{u(x)} = \sqrt[n]{\ell}$.
- Si $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[n]{u(x)} = +\infty$.

For more visit: L9ray.com

Exemples

1) Calculons la limite : $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt[3]{x-1}-2}{x-9}$

Le calcul direct de cette limite conduit à la forme indéterminée « $\dfrac{0}{0}$ ».

On a : $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt[3]{x-1}-2}{x-9}=\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\left(\sqrt[3]{x-1}-2\right)\left[\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^2+2\sqrt[3]{x-1}+4\right]}{(x-9)\left[\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^2+2\sqrt[3]{x-1}+4\right]}$

$$=\lim_{x\to 9}\frac{\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^3-8}{(x-9)\left[\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^2+2\sqrt[3]{x-1}+4\right]}$$

$$=\lim_{x\to 9}\frac{x-9}{(x-9)\left[\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^2+2\sqrt[3]{x-1}+4\right]}$$

$$=\lim_{x\to 9}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^2+2\sqrt[3]{x-1}+4}$$

Par suite : $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt[3]{x-1}-2}{x-9}=\dfrac{1}{2^2+2\times 2\times 4}=\dfrac{1}{12}$.

2) Calculons la limite : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x}-2x\right)$

Le calcul direct de cette limite conduit à la forme indéterminée « $+\infty-\infty$ ».

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x}-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3\left(1+\dfrac{3}{x^2}\right)}-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt[3]{\left(1+\dfrac{3}{x^2}\right)}-2\right)$.

Or : $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{\left(1+\dfrac{3}{x^2}\right)}-2\right)=-1$; donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x}-2x\right)=-\infty$.

3) Calculons la limite : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+2}-x+5\right)$

Le calcul direct de cette limite conduit à la forme indéterminée « $+\infty-\infty$ ».

On a pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$: $\sqrt[3]{x^3+x^2+2}-x+5=\dfrac{\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+2}\right)^3-x^3}{\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+2}\right)^2+x\sqrt[3]{x^3+x^2+2}+x^2}+5$

Il s'ensuit donc :

$$\sqrt[3]{x^3+x^2+2}-x+5=\frac{x^2+2}{\left(\sqrt[3]{x^3\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^3}\right)}\right)^2+x\sqrt[3]{x^3\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^3}\right)}+x^2}+5$$

For more visit: L9ray.com

$$\sqrt[3]{x^3+x^2+2}-x+5=\frac{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left[\left(\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}\right)}\right)^2+\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}\right)}+1\right]}+5$$

$$=\frac{1+\frac{2}{x^2}}{\left(\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}\right)}\right)^2+\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}\right)}+1}+5$$

Or : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x^2}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x^3}=0$

Par suite : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+2}-x+5\right)=\frac{1+0}{1+1+1}+5=\frac{16}{3}$.

4) Calculons la limite : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt[4]{x+1}-\sqrt{x+1}}$.

Le calcul direct de la limite $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{x+1}\right)$ conduit à la forme indéterminée « $+\infty-\infty$ ».

En posant $t=\sqrt[12]{x+1}$, on obtient :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt[4]{x+1}-\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[12]{(x+1)^4}-\sqrt[12]{(x+1)^6}}{\sqrt[12]{(x+1)^3}-\sqrt[12]{(x+1)^6}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^4-t^6}{t^3-t^6}=\lim_{t\to+\infty}\frac{-t^6}{-t^6}=1$$

Applications

1. Étudier la continuité de la fonction $f : x\mapsto\sqrt[4]{\frac{x}{x-1}}$ sur chaque intervalle de son ensemble de définition.

2. Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt[3]{x}-1}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{8x^3+x}-2x\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2+1}\right)$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt[4]{x+1}-1}$

$\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt[3]{x+6}-\sqrt{x+2}}{x-2}$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\sin x}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt[4]{x^4-x^2}+x\right)$; $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt[3]{2x-3}-\sqrt[3]{3x-5}}{\sqrt{7x+2}-\sqrt{5x+6}}$

3. Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[-3;+\infty[$ par :

$$\begin{cases}f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x+3}-2}{x-5} & \text{si } x\neq5\\ f(5)=\dfrac{1}{12}\end{cases}$$

a) Montrer que la fonction f est continue sur l'intervalle $[-3;+\infty[$.

b) Calculer la limite $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

For more visit: L9ray.com

5.2. PUISSANCE RATIONNELLE D'UN NOMBRE STRICTEMENT POSITIF

Définition 6

Soit a un réel strictement positif et r un nombre rationnel. On pose $r=\frac{p}{q}$ avec $p\in\mathbb{Z}$ et $q\in\mathbb{N}^*$.

Le nombre a^r est le nombre $\sqrt[q]{a^p}$. Ce nombre est appelé la puissance rationnelle du nombre a d'exposant r.

Remarque

Soit a un réel strictement positif et $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$.

On a : $\sqrt{a}=\sqrt[2]{a}=a^{\frac{1}{2}}$ et $\sqrt[3]{a}=a^{\frac{1}{3}}$. De façon générale, on a l'égalité : $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$

Proposition 19

Soit r et r' deux nombres rationnels, et a et b deux réels strictement positifs.

Alors on a les égalités suivantes :

$$a^r\times a^{r'}=a^{r+r'}\ ;\ (ab)^r=a^r.b^r\ ;\ \left(a^r\right)^{r'}=a^{rr'}\ ;\ a^{-r}=\frac{1}{a^r}\ ;\ \left(\frac{a}{b}\right)^r=\frac{a^r}{b^r}\ ;\ \frac{a^r}{a^{r'}}=a^{r-r'}$$

Exemple

Simplifions le nombre $A=\dfrac{\sqrt[4]{32}\times\sqrt[6]{27}\times\sqrt[4]{108}}{\sqrt[4]{6}}$:

On a : $A=\dfrac{\left(2^5\right)^{\frac{1}{4}}\times\left(3^3\right)^{\frac{1}{6}}\times\left(2^2\times3^3\right)^{\frac{1}{4}}}{(2\times3)^{\frac{1}{4}}}=\dfrac{2^{\frac{5}{4}}\times3^{\frac{1}{2}}\times2^{\frac{1}{2}}\times3^{\frac{3}{4}}}{2^{\frac{1}{4}}\times3^{\frac{1}{4}}}=2^{\frac{5}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}\times3^{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\frac{1}{4}}=2^{\frac{3}{2}}\times3=6\sqrt{2}$

Applications

1. Simplifier les nombres suivants : ($a\in\mathbb{R}_+^*$ et $b\in\mathbb{R}_+^*$)

$$X=\frac{(125)^{\frac{2}{9}}\times(625)^{\frac{1}{4}}\times(25)^{\frac{5}{2}}}{5^{\frac{17}{3}}}\ ;\ Y=\frac{(7^{\frac{2}{5}})^{\frac{1}{2}}\times(3^{-\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}\times(21)^{\frac{3}{4}}}{(7^{-\frac{3}{2}})^{\frac{1}{3}}\times(243)^{\frac{2}{3}}\times\left(63^{-2}\right)^{-\frac{1}{6}}}\ ;\ Z=\frac{a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{5}{2}}\left(\sqrt[4]{\frac{1}{a^2}}\right)^3}{\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{5}{2}}\left(\sqrt[5]{b^{-3}}\right)^4}$$

2. a) Montrer que pour tout $x\in]0;1[$: $x^{\frac{6}{7}}>x$

b) En déduire que pour tout $(x,y)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$: $\sqrt[7]{x^6}+\sqrt[7]{y^6}>\sqrt[7]{(x+y)^6}$

3. Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{2}}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\frac{1}{4}}-2x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}-3x}$; $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\left(4-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}-8}{x}$.

For more visit: L9ray.com

L9RAY

A ÉTUDE DE LA CONTINUITÉ

1) Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x-1} & \text{si } x\neq 1 \\ f(1)=\dfrac{3}{4} \end{cases}$$

Montrer que la fonction f est continue au point $x_0=1$.

2) Déterminer la valeur du réel a pour laquelle la fonction numérique g est continue en $\dfrac{1}{2}$:

$$\begin{cases} g(x)=\dfrac{2x^2+x-1}{2x^2-3x+1} & \text{si } x\neq \dfrac{1}{2} \\ g\left(\dfrac{1}{2}\right)=a \end{cases}$$

3) On considère la fonction numérique h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} h(x)=\dfrac{2\cos^2 x-\cos x-1}{x^2} & \text{si } x<0 \\ h(0)=-\dfrac{3}{2} & \\ h(x)=1+x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x>0 \end{cases}$$

a) Montrer que la fonction h est continue à gauche en 0.

b) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$: $|h(x)-1|\leq x$ et en déduire $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)$.

La fonction h est-elle continue en 0 ? Justifier la réponse.

SOLUTION

1) Montrons que la fonction f est continue au point $x_0=1$:

On a : $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+x+2}-2\right)\left(\sqrt{x^2+x+2}+2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+x+2}+2\right)}$

Donc : $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+x+2}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+x+2}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+x+2}+2}=\dfrac{3}{4}$.

Puisque $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$, alors la fonction f est continue au point $x_0=1$.

2) Pour que la fonction g soit continue en $\dfrac{1}{2}$, il faut et il suffit que : $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} g(x)=g\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

For more visit: L9ray.com

On a : $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} g(x)=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{2x^2+x-1}{2x^2-3x+1}=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{(2x-1)(x+1)}{(2x-1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{x+1}{x-1}=-3$. Par suite : $a=-3$.

3) a) Montrons que la fonction h est continue à gauche en 0 :

On a : $\lim\limits_{x\to0^-} h(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{2\cos^2 x-\cos x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{(\cos x-1)(2\cos x+1)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0^-}-\dfrac{1-\cos x}{x^2}(2\cos x+1)$

On sait que $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$; donc : $\lim\limits_{x\to0^-} h(x)=-\dfrac{1}{2}\times3=-\dfrac{3}{2}$.

Ainsi : $\lim\limits_{x\to0^-} h(x)=h(0)$ et donc h est continue à gauche en 0.

b) On a pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$: $|h(x)-1|=\left|x\sin\dfrac{1}{x}\right|=x\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|$.

On sait que : $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\le1$ et $x>0$; donc : $x\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\le x$. Par conséquent : $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)\ |h(x)-1|\le x$.

Puisque $\lim\limits_{x\to0^+} x=0$, alors : $\lim\limits_{x\to0^+} h(x)=1$.

On a : $\lim\limits_{x\to0^+} h(x)=1$ et $h(0)=-\dfrac{3}{2}$, donc $\lim\limits_{x\to0^+} h(x)\neq h(0)$. Donc, la fonction h n'est pas continue à droite en 0. Il s'ensuit donc que la fonction h n'est pas continue en 0.

- Pour montrer que $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$, il suffit de montrer qu'au voisinage de a :

$$|f(x)-\ell|\le g(x) \text{ avec } \lim_{x\to a} g(x)=0$$

On pourra aussi montrer que : $h(x)\le f(x)-\ell\le g(x)$ avec $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\lim\limits_{x\to a} h(x)=0$

- On étudiera la continuité d'une fonction f en x_0 lorsque f sera définie sur un intervalle ouvert contenant x_0. Pour démontrer que f est continue en x_0 il suffit de montrer que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.
- Pour étudier la continuité d'une fonction f en un point x_0, il est parfois intéressant d'étudier la continuité à gauche et la continuité à droite puis appliquer le résultat :

$$(f \text{ est continue en } x_0)\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$$

B CONTINUITÉ SUR UN INTERVALLE

1) Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{x^2+2x-7}{x^2+3}+\sqrt{x^2-x+1}$.

Étudier la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2) Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} g(x)=2x^2-5x-\sqrt{3-x} & \text{si } x\le2 \\ g(x)=\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-4} & \text{si } x>2 \end{cases}$$

Étudier la continuité de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

For more visit: L9ray.com

L9RAY

3) Soit h la fonction numérique définie sur l'intervalle $]-1;1[$ par :

$$\begin{cases} h(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x\sin x} & \text{si } -1<x<0 \\ h(0)=\dfrac{1}{2} & \\ h(x)=\dfrac{1-\cos x}{x^2} & \text{si } 0<x<1 \end{cases}$$

Montrer que la fonction h est continue sur l'intervalle $]-1;1[$.

SOLUTION

1) Étudions la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}$:

Pour tout réel x, on pose : $u(x)=\dfrac{x^2+2x-7}{x^2+3}$ et $v(x)=x^2-x+1$.

On a pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f(x)=u(x)+\sqrt{v(x)}$.

- La fonction u est une fonction rationnelle définie et continue sur $\mathbb{R}$ car : $(\forall x\in\mathbb{R})\ x^2+3\neq 0$.
- La fonction v est une fonction polynôme continue sur $\mathbb{R}$.

  Par ailleurs le discriminant du trinôme x^2-x+1 est strictement négatif ($\Delta=(-1)^2-4\times1\times1=-3$).

  Il en résulte donc que : $(\forall x\in\mathbb{R})\ v(x)>0$.

  On en déduit donc que la fonction $x\mapsto\sqrt{v(x)}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- Enfin, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

2) Étudier la continuité de la fonction g sur $\mathbb{R}$:

- La fonction $x\mapsto 2x^2-5x$ est une fonction polynôme continue sur l'intervalle $]-\infty;2[$.

  La fonction $x\mapsto 3-x$ est une fonction polynôme continue et positive sur l'intervalle $]-\infty;2[$.

  Il en résulte donc que la fonction $x\mapsto\sqrt{3-x}$ est continue sur $]-\infty;2[$.

  Enfin, g est continue sur $]-\infty;2[$ en tant que différence de deux fonctions continues sur cet intervalle.
- La fonction $x\mapsto\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-4}$ est une fonction rationnelle définie et continue sur $]2;+\infty[$.

  Donc il en est de même pour la fonction g.
- Étudions maintenant la continuité en 2 :

  On a : $\lim\limits_{x\to2^-}g(x)=\lim\limits_{x\to2^-}2x^2-5x+\sqrt{3-x}=-1=g(2)$.

  Donc la fonction g est continue à gauche en 2.

For more visit: L9ray.com

On a : $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{(x-2)(x^2-4x+3)}{(x-2)(x+2)} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2-4x+3}{x+2} = -\dfrac{1}{4}$.

Puisque $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x) \neq g(2)$, alors la fonction g n'est pas continue à droite en 2.

Conclusion : La fonction g est continue sur $\mathbb{R}-\{2\}$.

3) Montrons que la fonction h est continue sur l'intervalle $]-1;1[$:

- La fonction $x \mapsto x^2+1$ est une fonction polynôme continue et positive sur l'intervalle $]-1;0[$.

  Donc la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+1}-1$ est continue sur $]-1;0[$.

  La fonction $x \mapsto x\sin x$ est continue sur $]-1;0[$ comme produit de deux fonctions continues sur cet intervalle. De plus, on a pour tout $x \in]-1;0[$: $x\sin x \neq 0$.

  Ainsi, h est continue sur $]-1;0[$ en tant que quotient de deux fonctions continues sur cet intervalle.

- Les fonctions $x \mapsto 1-\cos x$ et $x \mapsto x^2$ sont continues sur l'intervalle $]0;1[$. Il s'ensuit donc que la fonction h est continue sur $]0;1[$ en tant que quotient de deux fonctions continues sur cet intervalle.

- Montrons maintenant que la fonction h est continue en 0 :

  On a : $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x\sin x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^2}{x\sin x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+1} \times \dfrac{x}{\sin x} = \dfrac{1}{2}\times 1 = \dfrac{1}{2}$.

  Puisque $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = h(0)$, alors la fonction h est continue à gauche en 0.

  On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2} = h(0)$. La fonction h est donc continue à droite en 0.

  Conclusion : La fonction h est continue sur $]-1;1[$.

C THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

1) Montrer que l'équation $3|x-2|-5\sqrt{2x-1}+x^2=4$ admet au moins une solution dans $[1;5]$.

2) Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=x^2+\sin x-2$.

et soit $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Montrer que la courbe $\mathscr{C}_g$ coupe l'axe des abscisses en un unique point sur l'intervalle $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

3) Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=2x^3+3x-4$.

a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$.

b) Vérifier que : $0<\alpha<1$.

c) Déterminer un encadrement de α d'amplitude $0,25$.

For more visit: L9ray.com

4) Soit h une fonction numérique continue sur chacun des intervalles $]-\infty;3[$ et $]3;+\infty[$ et dont le tableau de variations est donné par :

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$h(x)$		$\nearrow$	2	$\searrow$	$+\infty$	$\searrow$	0
	-3			$-\infty$			

a) Déterminer les images des intervalles suivants par la fonction h :

$]-\infty;0[$; $[0;3[$; $]-\infty;3[$; $]3;+\infty[$

b) Démontrer que l'équation $h(x)=0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}-\{3\}$.

SOLUTION

1) Montrons que l'équation $3|x-2|-5\sqrt{2x-1}+x^2=4$ admet au moins une solution dans $[1;5]$:

On pose pour tout $x\in[1;5]$: $F(x)=3|x-2|-5\sqrt{2x-1}+x^2$.

- La fonction $x\mapsto x-2$ est une fonction polynôme continue l'intervalle $[1;5]$, donc il en est de même pour la fonction $x\mapsto|x-2|$.

  La fonction $x\mapsto 2x-1$ est une fonction polynôme continue et positive sur l'intervalle $[1;5]$.

  Donc la fonction $x\mapsto\sqrt{2x-1}$ est continue sur $]-1;0[$.

  La fonction $x\mapsto x^2$ est une fonction polynôme continue sur l'intervalle $[1;5]$.

  Par conséquent, la fonction F est continue sur l'intervalle $[1;5]$.

- On a : $F(1)=-1$ et $F(5)=19$, donc : $F(1)\le 4\le F(5)$.

  Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $F(x)=4$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[1;5]$.

2) Montrons que la courbe $\mathscr{C}_g$ coupe l'axe des abscisses en un unique point sur l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$:

Les fonctions $x\mapsto x^2-2$ et $x\mapsto\sin x$ sont continues sur $\mathbb{R}$, en particulier sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Donc la fonction g est continue sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ en tant que somme de deux fonctions continues sur cet intervalle.

For more visit: L9ray.com

On a de plus : $g(0)=-2$ et $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2-4}{4}$; par conséquent : $g(0).g\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$.

Puisque les fonctions $x\mapsto x^2-2$ et $x\mapsto \sin x$ sont strictement croissantes sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, alors la fonction g est aussi strictement croissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ en tant que somme de deux fonctions strictement croissantes sur cet intervalle.

d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique dans l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$. D'où, la courbe $\mathscr{C}_g$ coupe l'axe des abscisses en un unique point sur l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

3) Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=2x^3+3x-4$.

a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$:

La fonction f est une fonction polynôme continue sur $\mathbb{R}$. De plus, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=\left(x^3+3x-1\right)'=3x^2+3$.

Puisque $f'(x)>0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, alors la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

On en déduit alors : $f(\mathbb{R})=f\left(]-\infty;+\infty[\right)=\left]\lim\limits_{x\to-\infty}f(x);\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right[=]-\infty;+\infty[=\mathbb{R}$.

Comme $0\in f(\mathbb{R})$ alors il admet un unique antécédent dans $\mathbb{R}$.

Par suite, l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$.

b) Vérifier que : $0<\alpha<1$.

La fonction f étant continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Par ailleurs, on a : $f(0)=-4$ et $f(\alpha)=0$ et $f(1)=1$.

Comme $f(0)<f(\alpha)<f(1)$, alors : $0<\alpha<1$.

c) Déterminer un encadrement de α d'amplitude $0,25$:

Le centre de l'intervalle $]0;1[$ est : $\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$. De plus : $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{9}{4}$ et $f(1)=1$. Donc : $\alpha\in\left]\frac{1}{2};1\right[$.

Le centre de l'intervalle $\left]\frac{1}{2};1\right[$ est : $\frac{3}{4}$. De plus : $f\left(\frac{3}{4}\right)=-\frac{29}{32}$ et $f(1)=1$. Donc : $\alpha\in\left]\frac{3}{4};1\right[$.

On remarque que : $1-\frac{3}{4}=0,25$, donc un encadrement de α d'amplitude $0,25$ est : $\frac{3}{4}<\alpha<1$.

4) a) Détermination des images des intervalles par la fonction h :

- La fonction h étant continue et strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty;0[$. Donc :

$$h\left(]-\infty;0[\right)=\left]\lim_{x\to-\infty}h(x);\lim_{x\to0^-}h(x)\right[=]-3;2[$$

For more visit: L9ray.com

L9RAY

- La fonction h étant continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[0;3[$. Donc :

$$h([0;3[) = \left]\lim_{x\to 3^-} h(x); h(0)\right] =]-\infty;2]$$

- La fonction h étant continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]3;+\infty[$. Donc :

$$h(]3;+\infty[) = \left]\lim_{x\to+\infty} h(x); \lim_{x\to 3^+} h(x)\right[=]0;+\infty[$$

- La fonction h est continue mais n'est pas strictement monotone sur l'intervalle $]-\infty;3[$.

D'après le tableau de variations de h, on a : $h(]-\infty;3[) =]-3;2]\cup]-\infty;2] =]-\infty;2]$

b) Montrer que l'équation $h(x)=0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}-\{2\}$:

- On a : $h(]3;+\infty[) =]0;+\infty[$; donc la fonction h ne s'annule pas sur $]3;+\infty[$.
- On a : $h(]-\infty;0[) =]-3;2[$ et $0\in]-3;2[$.

Donc l'équation $h(x)=0$ admet une solution unique dans l'intervalle $]-\infty;0[$.

- On a : $h([0;3[) =]-\infty;2]$ et $0\in]-\infty;2]$.

Donc l'équation $h(x)=0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[0;3[$.

<u>Conclusion :</u> l'équation $h(x)=0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}-\{3\}$.



- Il faut bien se rappeler que le théorème des valeurs intermédiaires, qui est lié à la continuité de la fonction, assure l'existence des solutions. Pour montrer que l'équation $f(x)=\lambda$ (où $\lambda\in\mathbb{R}$) admet une solution unique α dans un intervalle I donné, on essaye souvent de montrer que la fonction f est continue et strictement monotone sur l'intervalle I puis vérifier que $\lambda\in f(I)$.
- Pour encadrer par dichotomie la solution d'une équation $f(x)=0$ sur un intervalle $[a;b]$ avec une précision donnée, on suit les étapes suivantes :
  - Vérifier que l'équation $f(x)=0$ a une solution unique sur cet intervalle.
  - Soit c le milieu de l'intervalle $[a;b]$, c'est-à-dire : $c=\dfrac{a+b}{2}$.

    Si $f(a).f(c)<0$, la solution est dans l'intervalle $[a;c]$, sinon la solution est dans $[c;b]$.
  - Continuer en testant le milieu du nouvel intervalle, jusqu'à avoir la précision voulue.
- On rappelle bien que l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
- Si f est continue sur un intervalle I et ne s'annule pas sur I, alors f garde un signe constant sur I.

For more visit: L9ray.com

D THÉORÈME DE LA FONCTION RÉCIPROQUE

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $I=[2;+\infty[$ par : $f(x)=x^2-4x+3$

1) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

2) Dresser le tableau de variations de la fonction f^{-1}.

3) Tracer les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ des fonctions f et f^{-1} dans un même repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

4) a) Déterminer $f^{-1}(0)$.

b) Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$.

SOLUTION

1) La fonction f est dérivable sur I car c'est la restriction d'une fonction polynôme sur cet intervalle.

De plus, on a pour tout $x\in I$: $f'(x)=\left(x^2-4x+3\right)'=2x-4$.

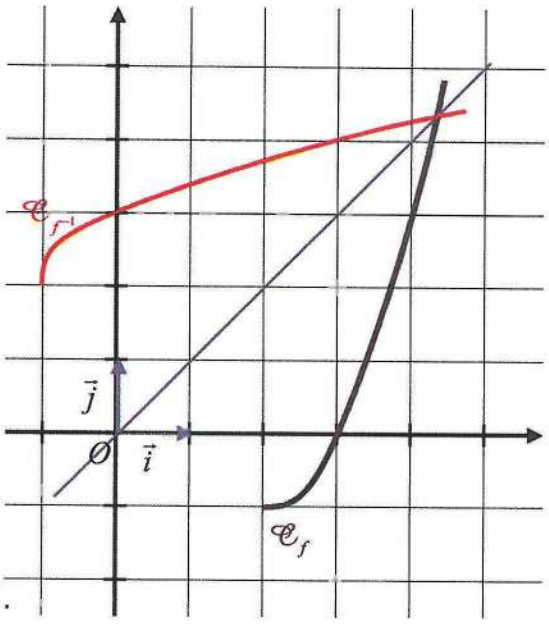
Par conséquent, pour tout $x\in]2;+\infty[$: $f'(x)>0$. Donc la fonction f est strictement croissante sur I.

Puisque f est continue et strictement croissante sur I, alors elle admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle $J=f(I)$ avec : $J=f([2;+\infty[)=\left[f(2);\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right[=[-1;+\infty[$.

2) Tableau de variations de la fonction f^{-1} :

Comme f est strictement croissante sur l'intervalle I et comme f et f^{-1} ont le même sens de variations (respectivement sur I et $f(I)$), alors la fonction f^{-1} est strictement croissante sur l'intervalle J.

x	-1	$+\infty$
$f^{-1}(x)$	2	$+\infty$



3) Tracés de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_{f^{-1}}$:

Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y=x$ (première bissectrice).

4) a) Déterminons $f^{-1}(0)$:

Posons $\alpha=f^{-1}(0)$. On a : $f(\alpha)=0$ et $\alpha\in I$.

Donc α est la seule solution de l'équation $f(x)=0$ dans I.

For more visit: L9ray.com

L9RAY

En résolvant l'équation $x^2 - 4x + 3 = 0$, on obtient $\alpha = 3$. Par suite : $f^{-1}(0) = 3$.

b) Calcul de $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$:

Soit $x \in J$ et $y \in I$ tels que $y = f^{-1}(x)$. On a :

$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow y^2 - 4y + 3 = x \Leftrightarrow (y-2)^2 = x + 1$$

Puisque $x \in J$ et $y \in I$, alors $x \geq 1$ et $y \geq 2$. Il en résulte donc que :

$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow y - 2 = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow y = 2 + \sqrt{x+1}$$

Par suite : $(\forall x \in J)\ f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x+1}$.



- Pour montrer qu'une fonction f admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J à déterminer, il suffit de vérifier que la fonction f est continue et strictement monotone sur un intervalle I puis utiliser le théorème de la fonction réciproque avec $J = f(I)$.
- Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I alors :
  - La fonction réciproque f^{-1} est continue sur $f(I)$ et a même sens de variation que la fonction f.
  - Les courbes représentatives de f et de f^{-1}, dans un repère orthonormé, sont symétriques par rapport à la première bissectrice (c'est-à-dire par rapport à la droite d'équation $y = x$)
- En général, on ne sait pas expliciter la fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle, mais on connaît des propriétés sur cette fonction : monotonie, continuité, limites, graphe,.....
- Pour déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$ pour $x \in J$, on utilise souvent l'équivalence :

$$\begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases}$$

La formule obtenue en fonction de x donne l'expression de $f^{-1}(x)$.

E UTILISATION DE FONCTION IRRATIONNELLE

1) Classer dans l'ordre croissant les nombres suivants : $\sqrt[3]{4}$; $\sqrt[4]{6}$; $\sqrt[6]{15}$.

2) Simplifier les nombres suivants : $A = \dfrac{\sqrt[3]{2^{10}} \times \sqrt{\sqrt{64}} \times \sqrt[5]{6^5}}{\sqrt{18} \times \sqrt{\sqrt[3]{256}}}$ et $B = \dfrac{(27)^{\frac{2}{9}} \times (81)^{\frac{1}{4}} \times 9^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{17}{3}}}$

3) Soit a et b deux réels strictement positifs. Établir l'égalité suivante :

$$\left(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{4}{3}} = \left[a + \left(a^3 b\right)^{\frac{1}{4}}\right]^{\frac{1}{3}} + \left[b + \left(ab^3\right)^{\frac{1}{4}}\right]^{\frac{1}{3}}$$

For more visit: L9ray.com

4) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+8}-2}{\sin x} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+5x^2+7}-4x\right) \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{8x^3+x^2+7}-2x\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{1}{4}}-2x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}-3x} \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty}\left(5x-1+\sqrt[3]{3-x}\right) \quad ; \quad \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[4]{x}-1} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x}-\sqrt[6]{x+1}}$$

5) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes :

$$\sqrt[3]{3+x}-\sqrt[3]{3-x}=\sqrt[6]{9-x^2} \quad ; \quad \sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x}=1 \quad ; \quad \sqrt[3]{x-5}<2 \quad ; \quad \sqrt[3]{x^2+2x+8}\le x+2$$

6) Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^3+2}$

a) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f.

b) Étudier les variations de la fonction f.

c) Soit g la restriction de la fonction sur l'intervalle $I=\left]-\infty;-\sqrt[3]{2}\right[$.

Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} dont on déterminera l'ensemble de définition J.

d) Calculer $g^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$.

SOLUTION

1) Classons dans l'ordre croissant les nombres : $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[4]{6}$ et $\sqrt[6]{15}$.

On a : $\sqrt[3]{4}=\sqrt[12]{4^4}=\sqrt[12]{256}$ et $\sqrt[4]{6}=\sqrt[12]{6^3}=\sqrt[12]{216}$ et $\sqrt[6]{15}=\sqrt[12]{15^2}=\sqrt[12]{225}$.

Puisque la fonction $x\mapsto\sqrt[12]{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, alors : $\sqrt[12]{216}<\sqrt[12]{225}<\sqrt[12]{256}$.

Par suite : $\sqrt[4]{6}<\sqrt[6]{15}<\sqrt[3]{4}$.

2) Simplification de A :

$$A=\frac{\sqrt[3]{2^{10}}\times\sqrt{\sqrt{64}}\times\sqrt[5]{6^5}}{\sqrt{18}\times\sqrt{\sqrt[3]{256}}}=\frac{\sqrt[3]{2^9\times 2}\times\sqrt{8}\times 6}{\sqrt{9\times 2}\times\sqrt[6]{256}}=\frac{2^3\times\sqrt[3]{2}\times 2\sqrt{2}\times 6}{3\sqrt{2}\times\sqrt[6]{2^8}}=\frac{32.\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2^4}}=\frac{32}{\sqrt[3]{2^3}}=\frac{32}{2}=16$$

Ainsi : $A=16$.

Simplification de B :

$$B=\frac{(27)^{\frac{2}{9}}\times(81)^{\frac{1}{4}}\times 9^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{17}{3}}}=\frac{\left(3^3\right)^{\frac{2}{9}}\times\left(3^4\right)^{\frac{1}{4}}\times\left(3^2\right)^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{17}{3}}}=\frac{3^{\frac{2}{3}}\times 3\times 3^5}{3^{\frac{17}{3}}}=3^{\frac{2}{3}+1+5-\frac{17}{3}}=3^1=3.$$ Ainsi : $B=3$.

3) Soit a et b deux réels strictement positifs. On a :

$$\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{4}{3}}=\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)\times\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

For more visit: L9ray.com

L9RAY

D'où : $\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{4}{3}}=\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}\times\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(b^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}\times\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(a+\left(a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{1}{4}}\right)\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\left(a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{1}{4}}\right)+b\right)^{\frac{1}{3}}$

Par suite : $\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{4}{3}}=\left[a+\left(a^3b\right)^{\frac{1}{4}}\right]^{\frac{1}{3}}+\left[b+\left(ab^3\right)^{\frac{1}{4}}\right]^{\frac{1}{3}}$.

4) Calcul des limites :

- $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{x+8}-2}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+8-8}{\sin x\left(\sqrt[3]{(x+8)^2}+2.\sqrt[3]{x+8}+4\right)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin x}.\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x+8)^2}+2.\sqrt[3]{x+8}+4}$

  Par suite : $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{x+8}-2}{\sin x}=1\times\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{12}$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+5x^2+7}-4x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3\left(1+\dfrac{5}{x}+\dfrac{7}{x^3}\right)}-4x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt[3]{\left(1+\dfrac{5}{x}+\dfrac{7}{x^3}\right)}-4\right)=-\infty$

  Car : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{\left(1+\dfrac{5}{x}+\dfrac{7}{x^3}\right)}-4\right)=-3$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{8x^3+x^2+7}-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{8x^3+x^2+7-8x^3}{\left(\sqrt[3]{8x^3+x^2+7}\right)^2+2x.\sqrt[3]{8x^3+x^2+7}+4x^2}$

  $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{8x^3+x^2+7-8x^3}{\left(\sqrt[3]{8x^3+x^2+7}\right)^2+2x.\sqrt[3]{8x^3+x^2+7}+4x^2}$

  $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+7}{x^2\left[\left(\sqrt[3]{8+\dfrac{1}{x}+\dfrac{7}{x^3}}\right)^2+2.\sqrt[3]{8+\dfrac{1}{x}+\dfrac{7}{x^3}}+4\right]}$

  Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{8x^3+x^2+7}-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\dfrac{7}{x^2}}{\left(\sqrt[3]{8+\dfrac{1}{x}+\dfrac{7}{x^3}}\right)^2+2.\sqrt[3]{8+\dfrac{1}{x}+\dfrac{7}{x^3}}+4}=\dfrac{1}{12}$

  Car : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^3}=0$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\frac{1}{4}}-2x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}-3x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\frac{1}{3}}\left(x^{-\frac{1}{12}}-2\right)}{x\left(x^{-\frac{1}{2}}-3\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^{-\frac{2}{3}}\times\left(\dfrac{x^{-\frac{1}{12}}-2}{x^{-\frac{1}{2}}-3}\right)=0$

  Car : $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{-\frac{1}{12}}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^{-\frac{1}{2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^{-\frac{2}{3}}=0$.

For more visit: L9ray.com

• $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(5x-1+\sqrt[3]{3-x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(5-\frac{1}{x}+\frac{\sqrt[3]{3-x}}{x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(5-\frac{1}{x}-\sqrt[3]{\frac{3-x}{-x^3}}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(5-\frac{1}{x}-\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^3}}\right)$

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}x=\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}=0$, donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-5x-\sqrt[3]{3-x}\right)=-\infty$.

• $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[4]{x}-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\left(x^2-1\right)\left(\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[4]{x^2}+\sqrt[4]{x}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+1\right)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x+1)\left(\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[4]{x^2}+\sqrt[4]{x}+1\right)}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+1}=\frac{8}{3}$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x}-\sqrt[6]{x+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[12]{x^3}-\sqrt[12]{(x+1)^4}}{\sqrt[12]{x^6}-\sqrt[12]{(x+1)^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[12]{\frac{(x+1)^4}{x^6}}\times\frac{\sqrt[12]{\frac{x^3}{(x+1)^4}}-1}{1-\sqrt[12]{\frac{(x+1)^2}{x^6}}}$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[12]{\frac{(x+1)^4}{x^6}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[12]{\frac{x^3}{(x+1)^4}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[12]{\frac{(x+1)^2}{x^6}}=0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x}-\sqrt[6]{x+1}}=0$

• Pour l'équation : $\sqrt[3]{3+x}-\sqrt[3]{3-x}=\sqrt[6]{9-x^2}$

L'équation a un sens si : $3+x\geq0$ et $3-x\geq0$ et $9-x^2\geq0$.

L'ensemble de définition de cette équation est donc : $D_1=[-3;3]$.

En utilisant l'identité remarquable $(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$, on a alors pour tout $x\in D_1$.

$$\sqrt[3]{3+x}-\sqrt[3]{3-x}=\sqrt[6]{9-x^2}\Leftrightarrow\left(\sqrt[3]{3+x}-\sqrt[3]{3-x}\right)^3=\sqrt{9-x^2}$$

$$\Leftrightarrow(3+x)-(3-x)-3\sqrt[3]{9-x^2}.\sqrt[6]{9-x^2}=\sqrt{9-x^2}$$

$$\Leftrightarrow2x-3\sqrt{9-x^2}=\sqrt{9-x^2}\qquad\text{(car : } \sqrt[3]{a}.\sqrt[6]{a}=\sqrt{a}\text{)}$$

$$\Leftrightarrow x=2\sqrt{9-x^2}$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2=4\left(9-x^2\right)\ \text{ et }\ x\in[0;3]\right)$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{6\sqrt{5}}{5}$$

Par suite, l'ensemble solution de cette équation est : $S_1=\left\{\frac{6\sqrt{5}}{5}\right\}$

• Pour l'équation : $\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x}=1$

L'équation a un sens si : $1+x\geq0$ et $x\geq0$.

L'ensemble de définition de cette équation est donc : $D_2=\mathbb{R}^+$.

On a pour tout $x\in\mathbb{R}^+$:

$$\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x}=1\Leftrightarrow\sqrt{x+1}-1=\sqrt[3]{x}\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+1}-1\right)^3=x\Leftrightarrow(x+1)\sqrt{x+1}-3(x+1)+3\sqrt{x+1}-1=x$$

ce qui donne : $\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x}=1\Leftrightarrow\sqrt{x+1}\left(x+4-4\sqrt{x+1}\right)=0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+1}=0\text{ ou }x+4=4\sqrt{x+1}\right)$

For more visit: L9ray.com

Or $\sqrt{x+1} \neq 0$, donc : $\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x} = 1 \Leftrightarrow (x+4)^2 = 16(x+1) \Leftrightarrow x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ ou } x = 8)$

Par suite, l'ensemble solution de cette équation est : $S_2 = \{0;8\}$

• Pour l'inéquation : $\sqrt[3]{x-5} < 2$

L'inéquation a un sens si $x - 5 \geq 0$, c'est-à-dire : $x \geq 5$.

L'ensemble de définition de cette inéquation est donc : $D_3 = [5;+\infty[$.

On à pour tout $x \in [5;+\infty[$: $\sqrt[3]{x-5} < 2 \Leftrightarrow x - 5 < 2^3 \Leftrightarrow x - 5 < 8 \Leftrightarrow x < 13$.

Par suite, l'ensemble solution de cette équation est : $S_3 = [5;13[$

• Pour l'inéquation : $\sqrt[3]{x^2+2x+8} \leq x+2$

L'inéquation a un sens si $x^2 + 2x + 8 \geq 0$.

Le discriminant du trinôme $x^2 + 2x + 8$ est $\Delta = 2^2 - 4 \times 8 = -28$. Comme $\Delta < 0$, alors $x^2 + 2x + 8 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. L'ensemble de définition de cette inéquation est donc : $D_4 = \mathbb{R}$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{x^2+2x+8} \leq x+2 &\Leftrightarrow x^2+2x+8 \leq (x+2)^3 \\ &\Leftrightarrow x^2+2x+8 \leq x^3+6x^2+12x+8 \\ &\Leftrightarrow x^3+5x^2+10x \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x(x^2+5x+10) \geq 0\end{aligned}$$

Le discriminant du trinôme $x^2 + 5x + 10$ est $\Delta = 5^2 - 4 \times 10 = -15$, donc : $(\forall x \in \mathbb{R})\ x^2 + 5x + 10 > 0$.

Par conséquent : $\sqrt[3]{x^2+2x+8} \leq x+2 \Leftrightarrow x \geq 0$.

Par suite, l'ensemble solution de cette équation est : $S_4 = [0;+\infty[$.

6) Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x^3+2}$

a) Soit D_f l'ensemble de définition de la fonction f. On a :

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^3 + 2 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x^3 \neq -2\} = \{x \in \mathbb{R} / x \neq -\sqrt[3]{2}\}$$

Par suite : $D_f =]-\infty;-\sqrt[3]{2}[\cup]-\sqrt[3]{2};+\infty[$.

b) Variations de la fonction f :

La fonction f est une fonction rationnelle dérivable sur tout intervalle inclus dans D_f.

De plus, on a pour tout $x \in D_f$:

$$f'(x) = \left(\frac{x^3-1}{x^3+2}\right)' = \frac{(x^3-1)'(x^3+2) - (x^3-1)(x^3+2)'}{(x^3+2)^2} = \frac{9x^2}{(x^3+2)^2}$$

On a pour tout $x \in D_f$: $f'(x) \geq 0$.

For more visit: L9ray.com

Tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$		$-\sqrt[3]{2}$		0		$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$	0	$+$		
$f(x)$	1	↗	$+\infty$ $\mid$ $-\infty$	↗	1		

c) Soit g la restriction de la fonction sur l'intervalle $I =]-\infty;-\sqrt[3]{2}[$.

La fonction g est continue et strictement croissante sur l'intervalle I. Donc elle admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle $J = g(I) =]1;+\infty[$.

d) Expression de $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$:

Soit $x \in J$ et $y \in I$ tels que : $y = g^{-1}(x)$. On a :

$$y = g^{-1}(x) \Leftrightarrow x = g(y) \Leftrightarrow x = \frac{y^3-1}{y^3+2} \Leftrightarrow xy^3+2x = y^3-1 \Leftrightarrow y^3 = \frac{2x+1}{1-x}$$

Par conséquent : $y = g^{-1}(x) \Leftrightarrow y^3 = -\frac{2x+1}{x-1} \Leftrightarrow y = -\sqrt[3]{\frac{2x+1}{x-1}}$ (car : $x>1$ et $\frac{2x+1}{x-1}>0$).

Par suite : $(\forall x \in J)\ g^{-1}(x) = -\sqrt[3]{\frac{2x+1}{x-1}}$.

- Pour calculer les limites contenant des racines n^{ièmes}, il est parfois plus intéressant d'utiliser les règles de conjugaison.



En pratique on utilise souvent les règles suivantes :

$$\sqrt{A}-B = \frac{A-B^2}{\sqrt{A}+B} \quad ; \quad \sqrt[3]{A}-B = \frac{A-B^3}{\sqrt[3]{A^2}+B.\sqrt[3]{A}+B^2} \quad ; \quad \sqrt[3]{A}+B = \frac{A+B^3}{\sqrt[3]{A^2}-B.\sqrt[3]{A}+B^2}$$

- Pour résoudre une équation ou inéquation avec des fonctions racines n^{ièmes}, on fait appel souvent aux identités remarquables et le fait que les fonctions racines n^{ièmes} sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}^+$.

Souvent en pratique, on utilise les identités suivantes :

$$(a\pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \quad ; \quad (a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 = a^3-b^3-3ab(a-b)$$

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 = a^3+b^3+3ab(a+b) \quad ; \quad a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$

For more visit: L9ray.com

EXERCICES D'APPLICATION

LIMITE D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE

EXERCICE 01

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(4x^5-3x^2+7\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2x^4+x^3-3x-1\right)^3$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+3}{x^2-5}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(1-x)^3}{1+x+x^3}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+5x}{(2x+3)^2}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2-9x+5}{2x^2-(2x+1)^2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(1-\sqrt{2}\right)x^2+3x-5}{x^2+x+2}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{\sqrt{2}x^2}{x+1}-\sqrt{3}\,x\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^3-2x^2+3x-8}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\dfrac{2x^2-5x}{8x^2+7}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{1}{2x-5}}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\dfrac{5x^3-1}{2x^3+7}}$

EXERCICE 02

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\dfrac{x^2-2}{x-\sqrt{2}}$; $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-5x+6}{9-x^2}$; $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{x^2+6x+5}{x^2+4x-5}$

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{x^2-2x}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x-x^2}$; $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x}-2}$

$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^3+3x^2+4x+3}{x^2+3x+2}$; $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-x-6}{\sqrt{x+6}-3}$

$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+6}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{8-2x}}$; $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x+5}-\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+12}-\sqrt{x}-2}$

EXERCICE 03

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{7-5x}{(x-3)^2}$; $\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$; $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2-x-3}{x^2+2x-3}$

$\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{8x-4}{\sqrt{1-x}}$; $\lim\limits_{x\to4^+}\dfrac{x}{2-\sqrt{x}}$

$\lim\limits_{x\to4^+}\dfrac{\sqrt{x+12}-\sqrt{3x-4}}{x^2-8x+16}$; $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-4}}$

$\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{\sqrt{4-x^2}+x-2}{x-2}$; $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+1}{(x+1)^3(x-2)}$

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2-\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x}-\sqrt{2x^2}}$; $\lim\limits_{x\to-3^-}\dfrac{x^3}{\left|x^2-9\right|}$; $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+}\dfrac{3x^2-x-1}{4x^2-1}$

EXERCICE 04

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-5\sqrt{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2+3x-5}+x+3\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+3}-x\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5x+2}-x+4\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+3}+2x-3\right)$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+5x-3}}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{4x^2+3}{x^2+8x}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}}{x+2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+6\sqrt{x}}{2x+\sqrt{x}-3}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\left(\sqrt{3x^2+1}-\sqrt{x^2+x}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^4-x^3}-x^2\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x\sqrt{x^2+x}-3x^2+x}{5\sqrt{x^2+3}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\dfrac{x^3}{x+1}}-x\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{\sqrt{x-2}}-\dfrac{x}{\sqrt{x+2}}\right)$

EXERCICE 05

Dans chacun des cas suivants, calculer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition :

1) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}$; 2) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-|x+2|}$

3) $f(x)=x-\sqrt{x-1}+5$; 4) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

5) $f(x)=\sqrt{2x^2-x+1}-3x+5$.

6) $f(x)=\sqrt{x^2+x-2}-x+3$.

For more visit: L9ray.com

EXERCICE 06

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x - \sqrt{2x+1} & \text{si } x \geq -\frac{1}{2} \\ f(x) = \dfrac{4x^2-1}{2x+1} & \text{si } x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

1) Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2) Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^+} f(x)$.

EXERCICE 07

On considère la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = x\sqrt{\frac{x-3}{x-2}}$$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.

2) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to2^-} f(x) \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \left(f(x)-x\right)$$

EXERCICE 08

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{7x} \quad ; \quad \lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{x^2} \quad ; \quad \lim_{x\to0^+}\frac{\tan x-\sin x}{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan 5x}{\sin x} \quad ; \quad \lim_{x\to0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3} \quad ; \quad \lim_{x\to0}\frac{\sin x.\sin 2x}{1-\cos x}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x} \quad ; \quad \lim_{x\to0}\frac{1-\cos 5x}{\left(x^2+x\right)\tan 3x}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^3 x}{x.\sin 4x} \quad ; \quad \lim_{x\to0}\frac{2\sin x-\sin(2x)}{x^3}$$

EXERCICE 09

Soit f une fonction numérique vérifiant :

$$(\forall x\in\mathbb{R}) \quad 1+x-x^2 \leq f(x) \leq 1+x-x^2+x^4$$

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)+x^2\right) \; ; \; \lim_{x\to0}\frac{f(x)-1}{x} \; ; \; \lim_{x\to0}\frac{f(x)-1-x}{x^2}$$

EXERCICE 10

En utilisant un encadrement convenable, calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x} \; ; \; \lim_{x\to+\infty}\frac{3x+2}{5-4\sin x} \; ; \; \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}-\cos x\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\cos x}{x^2+1} \; ; \; \lim_{x\to0^+}\sqrt{x}\cos\frac{1}{\sqrt{x}} \; ; \; \lim_{x\to0}x^2\sin\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{3+\sin\left(\frac{1}{x}\right)} \; ; \; \lim_{x\to-1}\frac{1+\cos^2 x}{(x+1)^2} \; ; \; \lim_{x\to1}\frac{1+\sin^2 x}{(x-1)^2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^2+\cos x-x\sin x}{3x^2+1} \; ; \; \lim_{x\to2}\frac{(x-2)\sqrt{5-x}}{2+\sin\left(\frac{1}{x-2}\right)}$$

CONTINUITÉ D'UNE FONCTION EN UN POINT

EXERCICE 11

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ f(2) = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Montrer que la fonction f est continue en $x_0 = 2$.

EXERCICE 12

On considère la fonction numérique f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{5-\sqrt{x+17}}{x-8} & \text{si } x \neq 8 \\ f(8) = -\dfrac{1}{10} \end{cases}$$

Montrer que la fonction f est continue en $x_0 = 8$.

EXERCICE 13

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ f(1) = 3 \end{cases}$$

Montrer que la fonction f n'est pas continue en $x_0 = 1$.

For more visit: L9ray.com

L9RAY

1 EXERCICES ET PROBLÈMES

EXERCICE 14

Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^2-4} & \text{si } x\neq 2 \\ f(2)=\dfrac{3}{4} \end{cases}$$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f puis calculer les limites de f aux bornes de D_f.

2) Étudier la continuité de la fonction f en $x_0=2$.

EXERCICE 15

Dans chacun des cas suivants, étudier la continuité de la fonction f au point x_0 :

1) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{2x+2}-1}{4x^2-1} & \text{si } x\neq -\dfrac{1}{2} \\ f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{4} \end{cases}$ et $x_0=-\dfrac{1}{2}$.

2) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{(1-\cos x)^2}{\sin^3 x} & \text{si } x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$ et $x_0=0$.

3) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3} & \text{si } x\neq 2 \\ f(2)=\dfrac{8}{9} \end{cases}$ et $x_0=2$.

4) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{2x^3-x^2+4x-20}{x^3-8} & \text{si } x\neq 2 \\ f(2)=2 \end{cases}$ et $x_0=2$.

5) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x^2+3x+2} & \text{si } x\neq -1 \\ f(-1)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ et $x_0=-1$.

6) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{2\cos^2 x-\cos x-1}{x^2} & \text{si } x\neq 0 \\ f(0)=-\dfrac{3}{2} \end{cases}$ et $x_0=0$.

EXERCICE 16

Dans chacun des cas suivants, déterminer la valeur du réel a pour que la fonction f soit continue en x_0 :

1) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-3x+2} & \text{si } x\neq 1 \\ f(1)=a \end{cases}$ et $x_0=1$.

2) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sin(\pi x)}{x-1} & \text{si } x\neq 1 \\ f(1)=a \end{cases}$ et $x_0=1$.

3) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\tan x-\sqrt{3}}{x-\dfrac{\pi}{3}} & \text{si } x\neq \dfrac{\pi}{3} \\ f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=a \end{cases}$ et $x_0=\dfrac{\pi}{3}$.

4) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{ax^2+(a+1)x+1}{2x^2+x-1} & \text{si } x\neq -1 \\ f(-1)=\dfrac{1}{3} \end{cases}$ et $x_0=-1$.

CONTINUITÉ À GAUCHE - CONTINUITÉ À DROITE

EXERCICE 17

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=(2-x)^2 & \text{si } x\leq 1 \\ f(x)=x^3+x-1 & \text{si } x>1 \end{cases}$$

Montrer que la fonction f est continue en $x_0=1$.

EXERCICE 18

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=2x^2-3x & \text{si } x<-1 \\ f(x)=x^2+4 & \text{si } -1\leq x<1 \\ f(x)=\sqrt{x^2+1}+2 & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$$

1) Étudier la continuité de f aux points -1 et 1.

2) La fonction f est-elle continue en 0 ?

For more visit: L9ray.com

EXERCICE 19

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + \sqrt{x} - 2 & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = 1 - 3x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Étudier la continuité de la fonction f en 0.

EXERCICE 20

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = 3\sqrt{x} - 2x + 5 & \text{si } x > 4 \\ f(x) = (x+k)^2 & \text{si } x \leq 4 \end{cases}$$

Déterminer les valeurs du réel k pour que la fonction f soit continue en 4.

EXERCICE 21

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2 - |x-1| - 1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

1) Étudier la continuité de la fonction f à gauche et à droite au point $x_0 = 1$.

2) La fonction f est-elle continue au point $x_0 = 1$?

EXERCICE 22

Soit f la fonction définie sur $[-2;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2} - 2}{|x-2|} & \text{si } x \neq 2 \\ f(2) = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Étudier la continuité de la fonction f à gauche et à droite au point $x_0 = 2$.

EXERCICE 23

Déterminer les réels a et b pour lesquels la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2 + x - a}{x-1} & \text{si } x < 1 \\ f(x) = x^2 + b & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

soit continue en 1.

EXERCICE 24

Soit f la fonction numérique définie sur $]-\pi;\pi[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x+1} - 1} & \text{si } x \in]0;\pi[\\ f(0) = 2 \\ f(x) = \dfrac{x^2}{1 - \cos(2x)} & \text{si } x \in]-\pi;0[\end{cases}$$

Étudier la continuité de la fonction f au point $x_0 = 0$.

EXERCICE 25

Soit f et g les fonctions numériques définie sur $\mathbb{R}$ par :

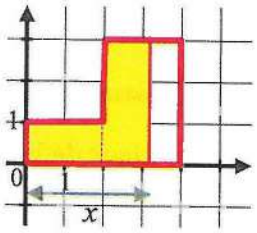
$$\begin{cases} f(x) = x - 1 \text{ si } x \geq 1 \\ f(x) = x + 1 \text{ si } x < 1 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} g(x) = x^2 + 2x \text{ si } x \geq 1 \\ g(x) = x - 1 \text{ si } x < 1 \end{cases}$$

1) Étudier la continuité de la fonction f et g en 1.

2) Définir la fonction $f \times g$ puis étudier la continuité de cette fonction en 1. Que déduit-on ?

EXERCICE 26

Pour $x \in [0;4]$, $f(x)$ est l'aire de la partie colorée en jaune sur la figure en dessous.



La fonction f est-elle continue en 2 ?

EXERCICE 27

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{ax^2 + bx - 1}{x^2 - 1} & \text{si } x \geq 2 \\ f(x) = 3x + c & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

Déterminer les réels a, b et c pour que les conditions suivantes soit vérifiées :

- ✓ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$ et $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} f(x)$
- ✓ f continue en $x_0 = 2$.

For more visit: L9ray.com

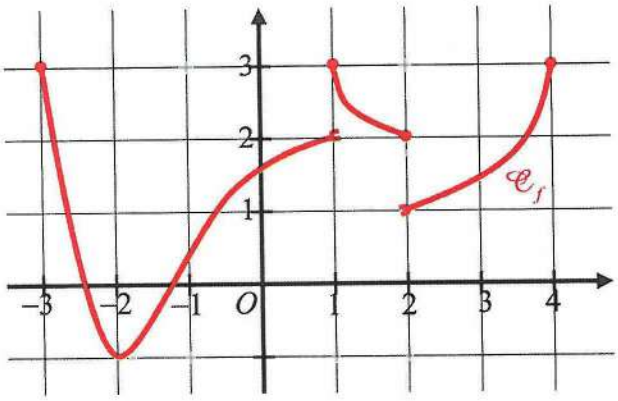
L9RAY

1 EXERCICES ET PROBLÈMES

CONTINUITÉ SUR UN INTERVALLE

EXERCICE 28

On a tracé la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-3;4]$.



1) La fonction f est-elle continue :

a) en -2 ? ; b) en 1 ? ; c) en 2 ?

2) La fonction f est-elle continue sur l'intervalle :

a) $[-3;0]$? ; b) $[1;2]$? ; c) $]2;4]$?

4) Donner un intervalle de longueur 4 sur lequel la fonction f est continue.

EXERCICE 29

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=|x|+x+1 & \text{si } x\le 1 \\ f(x)=\sqrt{x}\left(x^2+2\right) & \text{si } x>1 \end{cases}$$

1) Montrer que la fonction f est continue sur chacun des intervalles $]-\infty;1[$ et $]1;+\infty[$.

2) Montrer que f est continue en 1. Que déduit-on ?

EXERCICE 30

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{3x^2+2x-1}{x^2-1} & \text{si } x<-1 \\ f(x)=5x^2+x-2 & \text{si } x\ge -1 \end{cases}$$

Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 31

Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x)=2\sqrt{x-1}+x+3 & \text{si } x>1 \\ f(x)=-\dfrac{x^2+x+2}{x-2} & \text{si } x<1 \\ f(1)=4 \end{cases}$$

1) Déterminer D_f ensemble de définition de f.

2) Étudier la continuité de la fonction f sur D_f.

EXERCICE 32

Soit f la fonction numérique définie sur $]-2;2[$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{x} & \text{si } -2<x<0 \\ f(0)=0 \\ f(x)=x^3-5x^2 & \text{si } 0<x<2 \end{cases}$$

Étudier la continuité de la fonction f sur $]-2;2[$.

EXERCICE 33

Dans chacun des cas suivants, montrer que la fonction f est continue sur son ensemble de définition.

1) $f(x)=x^2+3x+\cos x$; 2) $f(x)=\sqrt{x^2-5x-6}$

3) $f(x)=\dfrac{3x^2+5x-4}{x^2+3}+\sqrt{2x^2-x+3}$

4) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x^2-3x+2}$; 5) $f(x)=5\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

6) $f(x)=\left|5x^3-7x^2+4x-3\right|$

7) $f(x)=\cos\left(-3x^2+5\right)$; 8) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x^2-3x+2}$

9) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} & \text{si } x\ne 1 \\ f(1)=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

10) $\begin{cases} f(x)=x^2-3x & \text{si } x\le 1 \\ f(x)=\dfrac{x^3-5x^2+5x-1}{x-1} & \text{si } x>1 \end{cases}$

For more visit: L9ray.com

EXERCICE 34

Soit f la fonction définie sur $[-4;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{4+x}-2} & \text{si } x\neq 0 \\ f(0)=4 \end{cases}$$

Étudier la continuité de la fonction f sur $[-4;+\infty[$.

EXERCICE 35

Soit f la fonction numérique définie sur $]0;\pi[$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sin^2 x-\sin x}{2\sin^2 x-\sin x-1} & \text{si } x\neq \dfrac{\pi}{2} \\ f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Étudier la continuité de la fonction f sur $]0;\pi[$.

EXERCICE 36

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-2;1[$ par :

$$f(x)=xE(x)+1$$

1) Donner l'expression de $f(x)$ sur chacun des intervalles $[-2;-1[$ et $[-1;0[$ et $[0;1[$.

2) Tracer $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

3) La fonction f est-elle continue sur $[-2;1[$?

EXERCICE 37

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x)=\frac{E\left(\sqrt{x}\right)}{x}$$

où $E\left(\sqrt{x}\right)$ est la partie entière du nombre $\sqrt{x}$.

1) Déterminer D_f ensemble de définition de f.

2) Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

3) a) Calculer $f(x)$ dans chacun des cas suivants :

$$x\in[1;4[\quad \text{et} \quad x\in[4;9[$$

b) La fonction f est-elle continue sur $[1;9[$?

EXERCICE 38

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=a^2x+3 & \text{si } x<1 \\ f(x)=\dfrac{-b^2x+8}{2x-1} & \text{si } 1\leq x\leq 3 \\ f(x)=\dfrac{2}{5}x^2-\dfrac{b^2}{5}x+ab & \text{si } x>3 \end{cases}$$

où a et b sont deux réels.

Déterminer tous les couples $(a;b)$ pour lesquels la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 39

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=x\sin\left(\dfrac{3}{x}\right) & \text{si } x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

1) a) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}^*)\ |f(x)|\leq|x|$.

b) En déduire que f est continue au point $x_0=0$.

2) Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

EXERCICE 40

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=x^3-3x+1$$

Déterminer les images des intervalles suivants par f :

$$I=]0;+\infty[\quad ; \quad J=]0;1[\quad ; \quad K=]-\infty;-1]$$

EXERCICE 41

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$:

$$f(x)=\begin{cases} 2x-3 & \text{si } x<2 \\ x^2-3 & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$$

1) Justifier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

2) Déterminer : $f([-2;4])$ et $f(]-\infty;1])$

For more visit: L9ray.com

L9RAY

1 EXERCICES ET PROBLÈMES

EXERCICE 42

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}-\{1\}$ par :

$$f(x)=\frac{2x}{x-1}$$

1) Dresser le tableau de variations de f.

2) Déterminer l'image de chacun des intervalles suivants par la fonction f :

$I=]1;3]$; $J=]1;+\infty[$; $K=\mathbb{R}^-$; $L=]-\infty;1[$

EXERCICE 43

Soit f une fonction numérique continue sur chacun des intervalles $]-\infty;2[$ et $]2;+\infty[$ et dont le tableau de variations est donné par :

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f(x)$	1	↗	2	↘	0	↘	$-\infty$	$-\infty$	↗ 1

Déterminer les images des intervalles suivants par la fonction f :

$]-\infty;2[$; $]2;+\infty[$; $]-\infty;0[$; $[0;2[$; $[0;1]$

EXERCICE 44

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=x^3+x^2-x$$

1) Justifier que la fonction f est continue sur $[-1;2]$.

2) Calculer $f(-1)$ et $f(2)$.

3) En déduire que l'équation $f(x)=5$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[-1;2]$.

EXERCICE 45

Soit f une fonction continue sur $[0;1]$ à valeurs dans $[0;1]$. Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0;1]$.

EXERCICE 46

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=4x^3-3x-\frac{1}{2}$$

1) Calculer : $f(-1)$; $f\left(-\frac{1}{2}\right)$; $f(0)$; $f(1)$.

2) En déduire que l'équation $f(x)=0$ admet au moins trois solutions dans l'intervalle $[-1;1]$.

EXERCICE 47

1) Montrer que l'équation $\sqrt{x}-x^3+2x-1=0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]0;1[$.

2) Montrer que l'équation $\sin x=1-x$ admet une solution unique dans l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{6}\right[$.

3) Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=x^5+3x^3+4x-5$$

Montrer que la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f coupe l'axe des abscisses en un point unique dont l'abscisse α vérifie : $0<\alpha<1$.

EXERCICE 48

Soit f une fonction numérique continue sur chacun des intervalles $]-\infty;2[$ et $]2;+\infty[$ et dont le tableau de variations est donné par :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)$	-2	↗	4	↘	$-\infty$ $+\infty$	↘	0

1) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$.

2) Même question pour les équations :

a) $f(x)=3$; b) $f(x)=-2$; c) $f(x)=7$

For more visit: L9ray.com

EXERCICE 50

Dans chacun des cas suivants, montrer que l'équation proposée admet au moins une solution dans I :

1) $x^3-2x^2-1=0$; $I=[2;3]$

2) $x^4-2x-\sqrt{x}+1=0$; $I=]0;1[$

3) $x^4+x^2+4x=1$; $I=[0;1]$

4) $x-2\sin x=0$; $I=\left]\frac{\pi}{3};\pi\right[$

5) $\sqrt{1+\frac{1}{x}}=x$; $I=\left[\frac{5}{4};\frac{3}{2}\right]$

6) $3\sin x+\cos^2 x=x$; $I=[0;\pi]$

7) $\frac{3}{2}x-\tan x=0$; $I=\left]\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3}\right[$

8) $\cos x=\frac{2}{(x+1)^2}$; $I=]2\pi;3\pi[$

9) $2x\sqrt{x+3}=x^2+3x-5$; $I=[3;4]$

10) $3|x+1|+\sqrt{x+2}-x^3=4$; $I=[1;2]$

EXERCICE 51

Dans chacun des cas suivants, montrer que l'équation proposée admet une solution unique dans I :

1) $2x^3+3x-3=0$; $I=[0;1]$

2) $x^4+2x-3=0$; $I=\left[\frac{1}{2};\sqrt{2}\right]$

3) $-x^3-2x-1=0$; $I=\mathbb{R}$

4) $\tan x-x-1=0$; $I=\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

EXERCICE 52

Soit f la fonction définie par : $f(x)=x^3-3x+1$

1) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]-1;1[$.

2) En utilisant la méthode de dichotomie, déterminer un encadrement de α d'amplitude $0,25$.

EXERCICE 53

1) Montrer que l'équation :

$$(E):-2x\sqrt{x}+\frac{1}{x}-5x=-10$$

admet une solution unique α dans $\mathbb{R}_+^*$.

2) Vérifier que : $1,4<\alpha<1,5$.

3) Résoudre dans l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ l'inéquation :

$$(I):\ 2x\sqrt{x}-\frac{1}{x}+5x-10<0$$

EXERCICE 54

On considère la fonction f définie sur $I=\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$f(x)=x^2-x\sin x-\cos x$$

1) Montrer que f est strictement croissante sur I.

2) Montrer qu'il existe un unique réel α de l'intervalle I tel que : $f(\alpha)=0$.

3) À quel des deux intervalles $\left]\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3}\right[$ et $\left]\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right[$ appartient-il le réel α ? Justifier la réponse.

4) Donner le tableau de signe de la fonction f sur I.

EXERCICE 55

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\frac{1}{x}-2\sqrt{x+1}$

1) Déterminer D_f ensemble de définition de f et calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α puis que : $\frac{1}{2}<\alpha<1$.

b) Montrer que le réel α vérifie la relation :

$$4\alpha^3+4\alpha^2-1=0$$

EXERCICE 56

Soit f la fonction définie par : $f(x)=x^3-6x^2+6$.

1) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet trois racines dans l'ensemble $\mathbb{R}$.

2) En déduire le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

For more visit: L9ray.com

L9RAY

1 EXERCICES ET PROBLÈMES

THÉORÈME DE LA FONCTION RÉCIPROQUE

EXERCICE 57

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $I=\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$ par : $f(x)=2x^2-x+1$

1) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

2) Dresser le tableau de variations de la fonction f^{-1}.

3) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$.

4) Tracer les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ des fonctions f et f^{-1} dans un même repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

EXERCICE 58

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{3-x^2}{1+x^2}$

1) Vérifier que : $(\forall x\in\mathbb{R})\ f(x)=-1+\dfrac{4}{1+x^2}$.

2) Sans utiliser la fonction dérivée, montrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

3) Soit g la restriction de f sur $\mathbb{R}^+$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J à déterminer.

b) Calculer $g^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$.

EXERCICE 59

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^3+x$

1) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque g définie sur un intervalle J à déterminer.

2) Dresser le tableau de variations de la fonction g.

3) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})\ (g(x))^3+g(x)=x$.

4) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}^+$: $g(x)\le x$

puis calculer la limite : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{(g(x))^3}$.

EXERCICE 60

Dans chacun des cas suivants, montrer que f définie sur l'intervalle I admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer, puis donner une expression de $f^{-1}(x)$ et tracer les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ des fonctions f et f^{-1} dans un même repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) $f(x)=2x+3$; $I=\mathbb{R}$

2) $f(x)=1-\dfrac{3}{x+2}$; $I=]-2;+\infty[$

3) $f(x)=x|x|$; $I=\mathbb{R}$

4) $f(x)=x^2-4x+3$; $I=[2;+\infty[$

EXERCICE 61

Dans chacun des cas suivants, montrer que f définie sur l'intervalle I admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer, puis donner une expression de $f^{-1}(x)$:

1) $f(x)=\dfrac{x^2+5x}{x-2}$; $I=[5;+\infty[$

2) $f(x)=-2(x-1)^2+5$; $I=[1;+\infty[$

3) $f(x)=x^2-6x+5$; $I=]-\infty;3[$

4) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; $I=\mathbb{R}^+$

5) $f(x)=\left(\sqrt{3-x}+1\right)^2$; $I=]-\infty;3]$

6) $f(x)=x-\sqrt{x^2-x}$; $I=[1;+\infty[$

7) $f(x)=2x-\sqrt{x}$; $I=\left[0;\dfrac{1}{16}\right]$

8) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$; $I=]-\infty;-1]$

9) $f(x)=x+\sqrt{-x}-1$; $I=\left[-\dfrac{1}{4};0\right]$

10) $f(x)=\sqrt{x-2}+x+1$; $I=[2;+\infty[$

For more visit: L9ray.com

FONCTION RACINE N^{ième} - PUISSANCE RATIONNELLE

EXERCICE 62

1) Simplifier les nombres suivants :

$$a=\frac{\sqrt{18}\times\sqrt{\sqrt[3]{256}}\times\sqrt[4]{64}}{\sqrt[3]{1024}\times\sqrt[6]{64\times10^6}}\quad;\quad b=\frac{\sqrt[15]{3}\times\sqrt[3]{9}\times\left(\sqrt{9}\right)^3}{\sqrt[4]{27}\times\sqrt{\sqrt{3}}}$$

$$c=\frac{\sqrt[4]{2048}\times\sqrt[4]{160000}}{\sqrt[8]{4096}\times\sqrt[3]{\sqrt{256}}\times\sqrt{512}}$$

2) Simplifier les nombres suivants :

$$x=(27)^{\frac{2}{3}}+(16)^{\frac{3}{4}}-\frac{2}{\sqrt[3]{8^{-2}}}+\frac{\sqrt[5]{2}}{4^{-\frac{2}{5}}}$$

$$y=\frac{(81)^{\frac{2}{9}}\times(27)^{\frac{1}{4}}\times9^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{14}{3}}}$$

$$z=\frac{a^{\frac{5}{3}}\times\left(\sqrt[4]{\frac{1}{a^2}}\right)^3\times b^{\frac{5}{2}}}{\left(a^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{2}{3}}\times\sqrt[5]{b^{-\frac{3}{4}}}}\quad(\text{ici}\,(a,b)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2)$$

3) Comparer les deux nombres : $\sqrt[5]{91}$ et $\sqrt[3]{15}$

4) Ordonner dans l'ordre croissant les nombres :

$$A=\sqrt{2}\quad;\quad B=\sqrt[3]{4}\quad;\quad C=\sqrt[6]{5}\quad;\quad D=\sqrt[4]{3}$$

5) Écrire les dénominateurs des nombres suivants sous la forme d'un nombre rationnel :

$$\frac{1}{2\sqrt[3]{4}}\quad;\quad\frac{2}{\sqrt[3]{3}-1}\quad;\quad\frac{\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{2}}\quad;\quad\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}$$

EXERCICE 63

1) Déterminer les deux réels b et c tels que :

$$(\forall x\in\mathbb{R})\quad x^3-3x-18=(x-3)\left(x^2+bx+c\right)$$

2) On pose : $t=\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$

a) Montrer que t est solution de l'équation :

$$x^3-3x-18=0$$

b) En déduire que : $\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}=3$

EXERCICE 64

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $x^8-25=0$; 2) $8x^3+27=0$

3) $x^7=\sqrt{3}$; 4) $\sqrt[3]{x}=\sqrt[6]{7}$

5) $x^4=16$; 6) $5x^6+1=0$

7) $4(3x-1)^7+3=0$; 8) $(3x-4)^5=32$

9) $9(7x+4)^{10}-5=0$; 10) $(3x-4)^5=32$

11) $\sqrt[3]{x^2}-5\sqrt[3]{x}+4=0$; 12) $9x-7\sqrt[3]{x}-2=0$

EXERCICE 65

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $x^4-5x^2-24=0$; 2) $x^6+3x^3-4=0$

3) $\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}=2$; 4) $5x-4\sqrt[3]{x}-1=0$

5) $\sqrt[3]{x+5}+\sqrt[3]{x+6}=\sqrt[3]{2x+11}$; 6) $\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}=12$

EXERCICE 66

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $4x^3-125\geq0$; 2) $\sqrt{2x+1}<3+\sqrt{x+2}$

3) $\sqrt[3]{x^2+8}-2<x$; 4) $x+1>\sqrt[3]{x^2+1}$

5) $\sqrt[3]{(x-2)(x^2-x+3)}>x-2$; 6) $16x^4<25$

7) $\sqrt{x-1}-\sqrt[3]{x-2}>1$; 8) $\sqrt[3]{x^3-3x^2+x+1}\geq x-1$

EXERCICE 67

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt[3]{x}-1}\quad;\quad\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{x-x^3}}{2-x}\quad;\quad\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1-x}-1}{\sin x}$$

$$\lim_{x\to2}\frac{x-\sqrt[3]{x+6}}{3-\sqrt{2x+5}}\quad;\quad\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x+7}-2}{\sqrt[4]{x}-1}\quad;\quad\lim_{x\to4}\frac{\sqrt[3]{5-x}-1}{2-\sqrt[3]{x+4}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}x-\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}\quad;\quad\lim_{x\to2}\frac{\sqrt[3]{x+6}-\sqrt{x+2}}{x-2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-2x\quad;\quad\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-x$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[6]{x}}\quad;\quad\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{2x^3-x}-\sqrt[3]{x^3+2x}}{x}$$

For more visit: L9ray.com

EXERCICES DE PERFECTIONNEMENT

EXERCICE 68

1) Montrer que l'équation $2x^3 - 4x + 1 = 3\sqrt{x} + x^2$ admet au moins une solution dans $[0;1]$.

2) Montrer que l'équation $4x^5 + x^3 = 27$ admet une solution unique dans $]1;2[$.

3) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{9x^5 - x - 2}{x^2 + 1} - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en un point dont l'abscisse appartient à $[0;1]$.

4) Soit u et v les deux fonctions définies par :

$$u(x) = \sqrt[3]{3x^2 + 7x + 1} \quad \text{et} \quad v(x) = \sqrt{5 - x^2}$$

Montrer que les courbes $\mathscr{C}_u$ et $\mathscr{C}_v$ se coupent en un point dont l'abscisse appartient à $[0;2]$.

EXERCICE 69

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = x - 1 + \sqrt[3]{x^3 + 1}$$

1) a) Justifier que l'ensemble de définition de la fonction est : $D_f = [-1;+\infty[$.

b) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - 2x\right)$$

2) a) Montrer que la fonction f est continue sur D_f.

b) Vérifier que pour tous a et b de D_f :

$$a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$$

c) En déduire que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

3) a) Montrer qu'il existe un unique élément $\alpha \in D_f$ tel que $\sqrt[3]{1+\alpha^3} = 2 - \alpha$ et que $0 < \alpha < 1$

b) Calculer : $f^{-1}(0)$ et $f^{-1}(1)$ et $f^{-1}(-1)$

EXERCICE 70

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = \left(\sqrt{x+1} - 1\right)^3$$

1) Déterminer D_f ensemble de définition de f.

2) Étudier la monotonie de la fonction f sur D_f.

3) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

4) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

EXERCICE 71

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = (x+1)^3 - 3 - 4x$

1) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer

2) Calculer $f^{-1}(-1)$ (la détermination de $f^{-1}(x)$ n'est pas demandée).

3) a) Montrer que l'équation $(x+1)^3 = 3 + 4x$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}^+$ et que $0 < \alpha < 1$.

b) Donner un encadrement de α d'amplitude $0,25$.

EXERCICE 72

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

1) Déterminer D_f ensemble de définition de f.

2) Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$.

3) Montrer que f est continue sur D_f.

4) Étudier la monotonie de la fonction f sur D_f.

5) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

6) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

For more visit: L9ray.com

EXERCICE 73

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x)=2x+1+\sqrt{4x^2+x}$$

1) Étudier la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}^+$.

2) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

3) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

4) Montrer que l'équation $f(x)=x+2$ admet une solution unique α dans l'intervalle $\left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]$.

EXERCICE 74

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x)=\sqrt[3]{x^2+x}$$

1) Déterminer D_f ensemble de définition de f.

2) Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

3) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[1;2]$.

4) Soit g la restriction de la fonction f sur $]-\infty;-1]$.

a) Montrer que la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty;-1]$.

b) En déduire que g admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J à déterminer.

c) Calculer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

EXERCICE 75

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{x}{1+|x|}$.

1) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2) En déduire que f admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J à déterminer.

3) Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

EXERCICE 76

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x)=\left(1-\sqrt{x}\right)^3$

1) Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{f(x)-1}{x}$.

2) Montrer que f est strictement décroissante sur l'intervalle $I=\left[0;\frac{1}{4}\right]$.

2) Soit g la restriction de la fonction f sur I.

a) Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b) Calculer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

EXERCICE 77

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}$

1) Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2) On admet que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f^{-1}\left(\sqrt[3]{\frac{x^2}{2}}\right)=x$

EXERCICE 78

Soit f la fonction numérique définie sur $[1;+\infty[$ par :

$$f(x)=\sqrt{x-1}-2\sqrt[4]{x-1}$$

1) a) Montrer que pour tout $[1;+\infty[$:

$$f(x)=\left(\sqrt[4]{x-1}-1\right)^2-1$$

b) Calculer la limite : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) a) Montrer que f est continue sur $I=[2;+\infty[$.

b) Montrer que f est strictement croissante sur I.

c) Soit g la restriction de la fonction f sur I.

Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b) Calculer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

For more visit: L9ray.com

L9RAY

1 EXERCICES ET PROBLÈMES

EXERCICE 79

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0;1]$ telle que : $f([0;1]) \subset [0;1]$.

Montrer qu'il existe au moins $c \in [0;1]$ tel que :

$$f(c) + f(1-c) = 2c .$$

EXERCICE 80

Soit $f : [a;b] \to [a;b]$ une fonction continue sur $[a;b]$.

Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a;b]$.

EXERCICE 81

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ et p et q deux réels strictement positifs.

Montrer qu'il existe un réel $c \in [a,b]$ tel que :

$$pf(a) + qf(b) = (p+q) f(c)$$

EXERCICE 82

Soit f une fonction numérique continue sur $[a;b]$ telle que $f(a) < ab$ et $b^2 < f(b)$.

Montrer que : $(\exists \alpha \in [a;b])$; $f(\alpha) = \alpha b$.

EXERCICE 83

Montrer qu'il existe un unique réel α de l'intervalle $]3;4[$ tel que l'aire d'un carré de côté α est égale à celle d'un rectangle de dimensions 4 et $4 - \sqrt{\alpha}$.

EXERCICE 84

Soit f une fonction continue sur un segment $[a;b]$ telle que : $f([a;b]) = [m;M]$

et soit x_1 , x_2 , ... et x_n des éléments distincts de $[a,b]$.

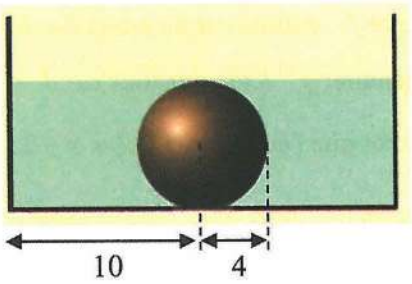
1) Montrer que : $m \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \leq M$

2) En déduire que : $(\exists c \in [a;b])$; $f(c) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)$

EXERCICE 85

Dans un récipient cylindrique de rayon $10cm$, on place une bille de rayon $4cm$.

On verse ensuite de l'eau jusqu'à recouvrir exactement la bille. On retire alors la bille, et on la remplace par une autre bille de rayon R (où R est différent de 4).



1) Calculer le volume d'eau versé dans le récipient.

2) À quel intervalle doit appartenir R ?

3) En calculant de deux façons le volume « eau + bille », démontrer qu'une nouvelle bille est solution du problème si son rayon R vérifie l'équation :

$$(E) : x^3 - 150x + 536 = 0$$

4) Justifier que le problème admet une solution puis donner une valeur approchée de R à $0,1cm$ près.

EXERCICE 86

Soit f la fonction numérique définie sur $[0;2[$ par :

$$f(x) = E(x) + (x - E(x))^2$$

1) Écrire $f(x)$ sans symbole $E(x)$.

(On distinguera deux cas : $x \in [0;1[$ et $x \in [1;2[$)

2) a) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f sur $[0;2[$.

b) Montrer que f est continue sur $[0;2[$.

EXERCICE 87

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ telle que :

$$f(a) = f(b)$$

Montrer que l'équation $f(x) = f\left(x + \frac{b-a}{2}\right)$ admet au moins une solution dans $[a;b]$.

For more visit: L9ray.com

PROBLÈMES DE SYNTHÈSE

SE PRÉPARER AUX DEVOIRS

DEVOIR 1

A) Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{3}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{8x^3+5}}{\sqrt[3]{x^3+2}}$; $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{x-\pi}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+3}+2x-1\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+8}-x\right)$

B) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes :

$\sqrt[3]{x^2+2x+2}=1$; $(3x-5)^3+65=0$

$\sqrt[3]{(x-2)^2}-\sqrt[3]{x-2}-6=0$; $x^6+10=0$

$\sqrt[3]{3x-1}<2$; $\sqrt[5]{x+3}\geq 2$; $\sqrt[3]{4-x}\leq 2$

C) Étudier la continuité de la fonction f sur l'intervalle I dans chacun des cas suivants :

1) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{2-\sqrt{x}}{x^2-2x} & \text{si } x\geq 4 \\ f(4)=-\dfrac{2}{3} \end{cases}$ et $I=[4;+\infty[$.

2) $\begin{cases} f(x)=x^2-4x+5 & \text{si } x<3 \\ f(x)=\sqrt[3]{5x-7} & \text{si } x\geq 3 \end{cases}$ et $I=\mathbb{R}$.

D) Soit h la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x)=x^5+2x^3+5x-3$$

Montrer que la courbe $\mathscr{C}_h$ de la fonction h coupe l'axe des abscisses en un unique point sur $\mathbb{R}$ puis vérifier que son abscisse α appartient à $]0;1[$.

E) Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $I=[4;+\infty[$ par : $f(x)=\left(x-2\sqrt{x}\right)^3$.

1) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

2) Justifier la continuité de la fonction f sur I.

3) a) Vérifier que pour tout $x\in I$:

$$f(x)=\left(\left(\sqrt{x}-1\right)^2-1\right)^3$$

b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle I.

4) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b) Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$.

DEVOIR 2

A) Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{x+6}-2}{x^2-2x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+x+1}-\sqrt[4]{x^4+1}}{2x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt[3]{5x^2+x+1}\right)$; $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3x^2+4}{5x^2-7x-6}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\dfrac{x^3}{x+2}}-x\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\right)$

B) Classer les nombres suivants par ordre décroissant :

$\sqrt[10]{6}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt[5]{3}$; 1

C) Simplifier les nombres suivants :

$A=\dfrac{\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{\sqrt{2}}}{\sqrt[8]{4}\times\sqrt{2}}$; $B=\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt[3]{729}}\times\sqrt{\sqrt{81}}\times 9^{\frac{5}{2}}}{\sqrt[3]{3^{20}}}$

D) Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0;1]$ telle que : $(\forall x\in[0;1])\ 2<f(x)<3$

Pour tout $x\in[0;1]$, on pose : $g(x)=xf(x)-2$.

1) Justifier la continuité de la fonction g sur $[0;1]$.

2) Déterminer le signe des nombres $g(0)$ et $g(1)$.

3) En déduire que : $(\exists c\in]0;1[)\ f(c)=\dfrac{2}{c}$.

E) Montrer que l'équation $\sqrt{x-3}=\dfrac{8}{x^2}$ admet une solution unique dans l'intervalle $[3;4]$.

For more visit: L9ray.com

L9RAY

F) Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $I=[-1;+\infty[$ par : $f(x)=x+3-2\sqrt{x+1}$.

1) Vérifier que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

2) Justifier la continuité de la fonction f sur I.

3) a) Vérifier que pour tout $x\in I$:

$$f(x)=\left(\sqrt{x+1}-1\right)^2+1$$

b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle I.

4) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b) Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$.

DEVOIR 3

A) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\sqrt[3]{\left(8x^3+x^2\right)^2}} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{64x^3+x^2}-4x\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+1}+2x-3\right) \quad ; \quad \lim_{x\to0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}$$

$$\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt[3]{7x^2-x}+\sqrt{x^2-3x}-4}{x^2-1} \quad ; \quad \lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x+7}-2}{\sqrt{x+3}-2}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt[4]{\frac{x^3+5x^2-7}{16x^3-3x+1}} \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{x^4+x^2+2}}{x+2}$$

B) Simplifier les nombres suivants :

$$A=\frac{\sqrt[5]{\sqrt[3]{2^4}}\cdot\sqrt[3]{8}.\left(\sqrt[7]{4}\right)^7}{\sqrt[3]{16}\times\sqrt{\sqrt[3]{32}}} \quad ; \quad B=\frac{\sqrt[4]{3}\times\sqrt[20]{3.\sqrt[4]{9}}\times27^{\frac{5}{4}}}{\sqrt[4]{243}.\sqrt{\sqrt{3}}}$$

C) Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x)=x^3+3x-5$$

1) Étudier les variations de la fonction g.

2) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α puis vérifier que $1<\alpha<2$.

3) En utilisant la méthode de dichotomie, donner Un encadrement de α d'amplitude $0,25$.

4) Dresser le tableau de signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

D) Soit h la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} h(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x^2+6x}-2\sqrt[3]{2}}{x-2} & \text{si } x\neq2 \\ h(2)=\dfrac{5\sqrt[3]{2}}{12} \end{cases}$$

Montrer que la fonction h est continue en $x_0=2$.

E) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x)=\dfrac{x-3}{2\sqrt{x}}$

1) Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) Justifier la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$.

3) Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

4) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle I à déterminer.

5) Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in I$.

DEVOIR 4

A) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(2x)}{\sqrt[3]{x^2+1}-1} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+5x^2+3}-2x+1\right)$$

$$\lim_{x\to5}\frac{\sqrt[3]{4x+7}-3}{\sqrt{2x^2-1}-7} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}-\frac{x}{\sqrt{x-1}}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+3}{\sqrt[3]{x^2+4}+5} \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{4x-1}{\sqrt{x^2+3x+5}+2x}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{1-x}}{x} \quad ; \quad \lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{2x+2}-4}{x-1}$$

B) Simplifier les nombres suivants :

$$A=\frac{\sqrt[3]{\sqrt[3]{729}\times\sqrt{\sqrt{81}}}}{\sqrt[3]{3^{17}}} \quad ; \quad B=\sqrt{\sqrt{3}}+2\sqrt[4]{48}-\sqrt[4]{243}$$

$$C=\frac{\sqrt[3]{x^5}}{\sqrt{\sqrt{y^{-5}}}}\times\sqrt[12]{\frac{x^{-8}}{y^3}} \quad (\text{avec } x\in\mathbb{R}_+^* \text{ et } y\in\mathbb{R}_+^*)$$

C) Classer par ordre croissant les nombres :

$$a=\sqrt[3]{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad b=\sqrt{\sqrt{5}} \quad \text{et} \quad C=\sqrt[4]{7}$$

D) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\sqrt[5]{2x-1}\geq2$

For more visit: L9ray.com

E) Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$$

1) Justifier la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) Montrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

3) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle I à déterminer.

4) Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in I$.

5) Montrer que l'équation $f(x)=x^2$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[1;2]$.

DEVOIR 5

A) Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} g(x)=\dfrac{\sqrt[3]{3x+5}-2}{x-1} & \text{si } x>1 \\ g(1)=2 & \\ g(x)=\dfrac{x^3+4x-5}{x^2-1} & \text{si } x<1 \end{cases}$$

1) Calculer : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

2) Étudier la continuité à gauche et à droite de la fonction g au point $x_0=1$.

B) Soit h la fonction numérique définie sur $]1;+\infty[$ par : $h(x)=\dfrac{1}{x-1}-\sqrt{x}$

1) Montrer que l'équation $h(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]1;+\infty[$ et que $\alpha \in]1;2[$.

2) Vérifier que : $\alpha=\sqrt[3]{2\alpha^2-\alpha+1}$.

C) Soit f la fonction numérique définie sur $I=[1;+\infty[$ par : $f(x)=x\sqrt{x^2-1}$

1) Justifier la continuité de la fonction f sur I.

2) Montrer que f est strictement croissante sur I.

3) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

4) Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in I$.

DEVOIR 6

A) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt[3]{x+60}-\sqrt{x+12}}{x-4} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{2x^3+x}-\sqrt[3]{2}\,x\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt[3]{2-x}} \quad ; \quad \lim_{x\to0}\frac{1-\cos(4x)}{\tan x.\sin 3x} \quad ; \quad \lim_{x\to3}\frac{x^3-27}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{3}}$$

B) Étudier la continuité de la fonction f au point x_0 dans les deux cas suivants :

1) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x-1} & \text{si } x<1 \\ f(x)=\sqrt{x^3-x+36} & \text{si } x\geq1 \end{cases}$ et $x_0=1$.

2) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{|x^2-9|}{x^2-3x} & \text{si } x\neq3 \\ f(3)=3 & \end{cases}$ et $x_0=3$.

C) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$g(x)=x^3+2x-\frac{1}{x}-4$$

1) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}_+^*$ et que $1<\alpha<2$.

2) En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

3) Montrer qu'il existe un unique élément $c \in \left]\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que : $g(c)=\cos c$.

(On donne : $g\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\approx-4,2$ et $g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\approx0,9$)

D) Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x)=\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3$$

1) Justifier la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) Montrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

3) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

4) Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in I$.

For more visit: L9ray.com

L9RAY

2

DÉRIVATION ET ÉTUDE DE FONCTIONS

HISTOIRE

Le mathématicien français d'origine italienne Joseph- Louis Lagrange a consacré de nombreux travaux à l'étude de fonctions. C'est à lui que l'on doit les termes de dérivée et de primitive.

Il considérait en effet que la première dérivait de la seconde considérée elle-même comme la fonction première, donc la primitive.

Lagrange s'est penché sur presque tous les domaines des mathématiques. Citons seulement ses travaux en mécanique céleste et ceux sur les équations différentielles.

Source : https://fr.wikipedia.org

JOSEPH-LOUIS LAGRANGE (1736 – 1813)



CAPACITÉS ATTENDUES

- Déterminer la monotonie d'une fonction à partir du signe de sa dérivée.
- Déterminer la monotonie d'une fonction à partir de son tableau de variations ou de sa représentation graphique.
- Résoudre graphiquement des équations de la forme et des inéquations de la forme :

$$f(x)=g(x) \quad \text{et} \quad f(x)\leq g(x)$$

- Déterminer la monotonie de la fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone et représenter graphiquement la fonction réciproque ;
- Déterminer le nombre dérivé de la fonction réciproque d'une fonction en un point ;
- Résoudre des problèmes concernant les valeurs minimales et valeurs maximales ;
- Étudier et représenter des fonctions rationnelles et des fonctions trigonométriques ;
- Déterminer les fonctions primitives des fonctions usuelles ;
- Utiliser les formules de dérivation pour déterminer les fonctions primitives d'une fonction sur un intervalle.

PLAN DU COURS

- Activités Préparatoires..... 83
- Connaissances Fondamentales
  - Dérivabilité d'une fonction numérique 88
  - Complément sur la dérivation..... 92
  - Étude d'une fonction numérique 97
  - Les fonctions primitives 103
- Techniques Et Astuces 106
- Exercices Et Problèmes
  - Exercices d'application..... 124
  - Exercices de perfectionnement..... 133
  - Problèmes de synthèse..... 140

For more visit: L9ray.com

1 DÉRIVABILITÉ D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE (RAPPELS)

A. Dérivabilité d'une fonction en un point :

1. Étudier la dérivabilité de la fonction f au point x_0 puis interpréter géométriquement le résultat obtenu, dans chacun des cas suivants :

a) $f(x)=x^2-3x+4$ et $x_0=1$; b) $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ et $x_0=0$

c) $f(x)=\dfrac{3-x}{x+1}$ et $x_0=-2$; d) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3-5x}}$ et $x_0=-1$

e) $f(x)=\left|x^2-4\right|$ et $x_0=6$; f) $f(x)=\left|x^2-x\right|$ et $x_0=-1$

g) $f(x)=\sin x$ et $x_0=\dfrac{\pi}{2}$; h) $f(x)=x\cos x+\tan(2x)$ et $x_0=0$

i) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{2x+7}-3}{x-1} & \text{si } x\neq 1 \\ f(1)=\dfrac{1}{3} \end{cases}$ et $x_0=6$; j) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x} & \text{si } x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$ et $x_0=0$

2. Étudier la dérivabilité à gauche et à droite de la fonction f au point x_0 puis interpréter géométriquement les résultats obtenus, dans chacun des cas suivants :

a) $f(x)=\dfrac{x\left|x-1\right|}{x+4}$ et $x_0=1$; b) $f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{\left|x-2\right|-2}$ et $x_0=2$

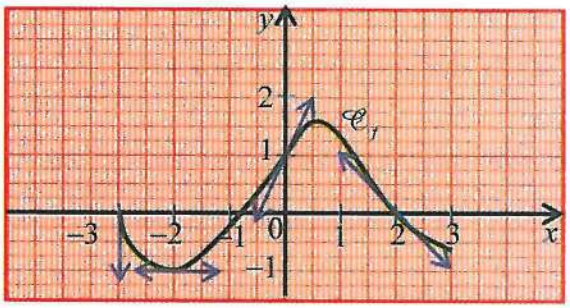
c) $\begin{cases} f(x)=x^3-4x & \text{si } x\leq 1 \\ f(x)=x^2-3x-1 & \text{si } x>1 \end{cases}$ et $x_0=1$; d) $\begin{cases} f(x)=(1+x)\sqrt{x} & \text{si } x\geq 0 \\ f(x)=\sin(2x) & \text{si } x<0 \end{cases}$ et $x_0=0$

3. Soit f la fonction numérique définie sur $[-3;3]$ et représentée dans la figure ci-contre :

a) Calculer les limites $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-1}{h}$ et $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$.

b) Que vaut $f'(-2)$? Justifier la réponse.

c) Préciser en justifiant la réponse : $\lim\limits_{x\to -3^+}\dfrac{f(x)-f(-3)}{x+3}$.



B. Approximation affine d'une fonction dérivable :

1. Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

a) Déterminer l'approximation affine φ de la fonction f au voisinage de 0.

b) Déterminer une valeur approchée à chacun des nombres : $\sqrt{1,04}$ et $\sqrt{1,000025}$.

2. Déterminer une valeur approchée à chacun des nombres suivants : $\cos(91^\circ)$ et $(2,005)^3$.

For more visit: L9ray.com

L9RAY

2 ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES

C. Calcul des dérivées :

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble de définition de la fonction f et les intervalles sur lesquels elle est dérivable puis calculer $f'(x)$:

1) $f(x)=x^5-4x^3+3x+2$; 2) $f(x)=5x^3-4x^2+\frac{3}{x}-\sqrt{x}$; 3) $f(x)=\frac{2}{3}\left(x^2-4x+3\right)^6$

4) $f(x)=x\sqrt{x^2+x+5}$; 5) $f(x)=\frac{3x-7}{x^2+2}$; 6) $f(x)=\sin(2x)-5\cos(3x)+8\tan x$

7) $f(x)=\frac{7}{x^2+4x+5}$; 8) $f(x)=\sin^3 x.\cos^4 x$; 9) $f(x)=x+2-6\sqrt{x^2-x}$

D. Applications de la fonction dérivée :

1. Étudier les variations de chacun des fonctions suivantes puis déterminer les extremums (s'ils existent)

a) $f(x)=x^3-3x+2$; b) $f(x)=\sqrt{x^2-2x}$; c) $f(x)=x+\frac{1}{\sqrt{x+1}}$

d) $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x+1}}$; e) $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^2-1}$; f) $f(x)=3x+1-\frac{2\sqrt{x+1}}{x}$

2. En utilisant le nombre dérivé, déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^3-8x+5}-2\sqrt{2}}{x-3}$; $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(3x+1)^{2020}-1}{x}$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{2x-\pi}$; $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\cos(\pi x)+x^2}{x-1}$

3. Soit a un réel de l'intervalle $]0;1]$. On considère les fonctions u et v définies sur $[0;a]$ par :

$$u(x)=\sqrt{(1+x)^3}-\frac{3}{2}x \quad \text{et} \quad v(x)=\sqrt{(1+x)^3}-\frac{3}{2}x\sqrt{a+1}$$

a) Calculer $u'(x)$ et $v'(x)$ pour tout $x\in[0;a]$.

b) Étudier les variations des fonctions u et v.

c) En déduire que pour tout $a\in]0;1]$: $\frac{1+\frac{3}{2}a}{1+a}\le\sqrt{a+1}\le\frac{1}{1-\frac{a}{2}}$.

E. Étude de concavité d'une courbe :

1. Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+7x-5$

a) Calculer $f''(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

b) Étudier la concavité de la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f et déterminer ses points d'inflexion éventuels.

2. Dans chacun des cas suivants, étudier la concavité de la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f et déterminer ses points d'inflexion éventuels :

$f(x)=x^4+x^3-18x^2+24x$; $f(x)=3x+5+\frac{x+1}{x^2+2x+2}$; $f(x)=\frac{3x}{\sqrt{2x+1}}$; $f(x)=|x^3-1|-2$

For more visit: L9ray.com

3. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0;\pi]$ par : $g(x)=x^2+\cos x$.

$\mathscr{C}_g$ désigne sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

a) Montrer que la fonction g est convexe sur l'intervalle $[0;\pi]$.

b) Écrire l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse $\frac{\pi}{6}$.

c)En déduire que pour tout $x\in[0;\pi]$: $x^2+(1-\pi)x+\cos x\geq\frac{2\pi-\pi^2}{4}$

F. Branches infinies d'une courbe :

Dans chacun des cas suivants, déterminer les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f :

1) $f(x)=\frac{5-4x^2}{(2+x)^2}$; 2) $f(x)=\frac{4x^3+5}{2x^2-x-1}$; 3) $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}+3x}{x}$; 4) $f(x)=3x-\sqrt{x}+2$

5) $f(x)=3x-2+\frac{1}{\sqrt{x-1}}$; 6) $f(x)=\sqrt{x^2+4x+3}-x$; 7) $f(x)=\sqrt{x^2+4x}+x-2$

8) $f(x)=\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$; 9) $f(x)=x+\frac{|x-1|}{x+1}$; 10) $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2-9}}$; 11) $f(x)=\sqrt[3]{x^2+4}$

12) $\begin{cases} f(x)=\frac{x^2}{2-x} & \text{si } x\in[0;1] \\ f(x)=x-\sqrt{x^2-x} & \text{si } x\in]-\infty;0[\cup]1;+\infty[\end{cases}$; 13) $\begin{cases} f(x)=\frac{x^3}{\sqrt{x^3-1}} & \text{si } x>1 \\ f(x)=x-1+2\sqrt{1-x} & \text{si } x\leq 1 \end{cases}$

G. Éléments de symétrie d'une courbe :

1. Dans les deux cas suivants, montrer que le point Ω est un centre de symétrie pour la courbe $\mathscr{C}_f$ de f :

a) $f(x)=x^3-3x^2-5x+4$ et $\Omega(1;-3)$; b) $f(x)=\frac{2x^2-x}{x-1}$ et $\Omega(1;1)$

2. Dans les deux cas suivants, montrer que la droite (Δ) est un axe de symétrie pour la courbe $\mathscr{C}_f$ de f :

a) $f(x)=\sqrt{x^2-6x+5}$ et $(\Delta):x=3$; b) $f(x)=2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}$ et $(\Delta):x=\frac{1}{2}$

H. Étude d'une fonction périodique :

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\cos^2 x.\sin(2x)$.

$\mathscr{C}_f$ désigne sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. Montrer que la fonction f est périodique de période π.

2. Montrer que la fonction f est impaire et en déduire qu'on peut restreindre l'étude de f sur $D_e=\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

3. Calculer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f sur D_e.

4. Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $[-2\pi;3\pi]$.

For more visit: L9ray.com

L9RAY

2 ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES

2 DÉRIVÉE DE LA COMPOSÉE DE DEUX FONCTIONS

A. Soit F la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x)=(x^7+1)^8$

1. Calculer $F'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

2. Déterminer deux fonctions f et g telles que $F = g\,o\,f$.

3. Comparer $F'(x)$ et $g'(f(x))\times f'(x)$.

B. Soit f une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie sur un intervalle J telles que $f(I)\subset J$, et soit $x_0\in I$. On suppose que f est dérivable en x_0 et que g est dérivable en $y_0=f(x_0)$.

On considère la fonction G définie sur J par : $G(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-g(y_0)}{x-y_0} & \text{si } x\neq y_0\\ G(y_0)=g'(y_0)\end{cases}$

1. Montrer que la fonction G est continue en y_0.

2. Soit x un élément de I distinct de x_0.

a) Montrer que si $f(x)\neq f(x_0)$, alors : $\dfrac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0}=G(f(x))\times\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

b) Montrer que : $\lim\limits_{x\to x_0} G(f(x))=g'(f(x_0))$.

c) En déduire que $g\,o\,f$ est dérivable en x_0 et que : $(g\,o\,f)'(x_0)=g'(f(x_0))\times f'(x_0)$

GÉNÉRALISATION

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0\in I$ et g une fonction définie sur un intervalle J telle que : $f(I)\subset J$.

- Si f est dérivable en x_0 et g dérivable en $y_0=f(x_0)$, alors la fonction $g\,o\,f$ est dérivable en x_0 et on a : $(g\,o\,f)'(x_0)=f'(x_0)\times g'(f(x_0))$.
- Si f est dérivable sur I et g dérivable sur J, alors la fonction $g\,o\,f$ est dérivable sur I et on a : $(\forall x\in I)\ (g\,o\,f)'(x)=f'(x)\times g'(f(x))$.

C. Applications :

1. Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\cos(3x^2-4x+5)$.

Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

2. Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

$f(x)=\sin\left(\sqrt{x^2+3}\right)$; $g(x)=\tan\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$; $h(x)=\sqrt{\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)}$; $k(x)=\left(\dfrac{3x+5}{x^2+1}\right)^4$

For more visit: L9ray.com

3 DÉRIVÉE DE LA FONCTION RÉCIPROQUE

A. Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[1;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{5}{2}$

1. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie de $[1;+\infty[$ sur $[2;+\infty[$.

2. Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in[2;+\infty[$.

3. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]2;+\infty[$ puis déterminer $\left(f^{-1}\right)'(x)$ pour tout $x\in]2;+\infty[$.

4. Vérifier que pour tout $x\in]2;+\infty[$: $\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$

GÉNÉRALISATION

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I et $x_0\in I$.

- Si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0)\neq 0$, alors la fonction réciproque f^{-1} est dérivable en $y_0=f(x_0)$ et de plus : $\left(f^{-1}\right)'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$
- Si f est dérivable sur I et $f'(x)\neq 0$ pour tout $x\in I$, alors la fonction réciproque f^{-1} est dérivable sur $f(I)$ et de plus : $(\forall x\in f(I))\ \left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$.

B. Applications :

1. Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $f(x)=x+1+\sqrt{x}$.

   a) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

   b) Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable en 3 et calculer $\left(f^{-1}\right)'(3)$.

2. Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle $\left]0;\frac{1}{4}\right[$ par : $g(x)=\left(1-2\sqrt{x}\right)^3$.

   a) Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

   b) Calculer $g\left(\frac{1}{16}\right)$ et en déduire la valeur de $\left(g^{-1}\right)'\left(\frac{1}{8}\right)$.

3. Soit h la fonction numérique définie sur l'intervalle $I=\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ par : $h(x)=x+\sqrt{\sin x}$.

   a) Montrer que la fonction h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

   b) Montrer que la fonction h^{-1} est dérivable sur $J-\{0\}$.

   c) Montrer que h^{-1} est dérivable à droite en 0.

For more visit: L9ray.com

L9RAY

1 DÉRIVABILITÉ D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE (RAPPELS)

1.1. DÉRIVABILITÉ D'UNE FONCTION EN UN POINT

Définition 1

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et x_0 un élément de I.

On dit que f est dérivable en x_0 s'il existe un réel ℓ tel que : $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell$.

Le nombre ℓ est appelé le nombre dérivé de la fonction f en x_0. Il est noté $f'(x_0)$.

Remarques

- Parfois, notamment en physique, on adopte la notation $\dfrac{df}{dx}(x_0)$ pour le nombre dérivé de f en x_0.

  On trouve également, la notation $\dot{f}(x_0)$, lorsque la variable désigne le temps.
- Un simple changement d'écriture montre, en s'appuyant sur la composition des limites, que f est dérivable en x_0 si la fonction $h \mapsto \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ a une limite finie en 0 et alors :

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

- La notion de dérivabilité, étant définie à l'aide d'une limite, est une notion locale.

Définition 2

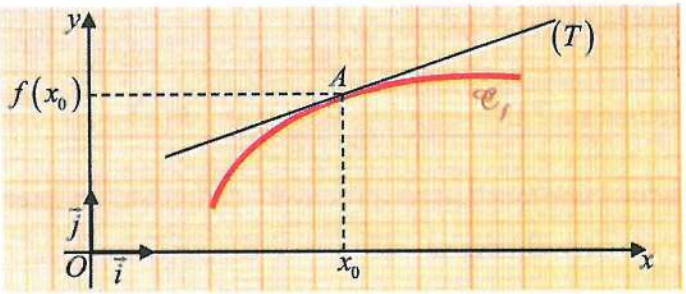
Soit f une fonction dérivable en x_0.

La droite (T) d'équation $y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ est appelée la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f au point d'abscisse x_0.

La fonction $x \mapsto f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ s'appelle l'approximation affine de f au voisinage de x_0.

On écrit alors :

$f(x) \approx f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ au voisinage de x_0 ou $f(x_0+h) \approx hf'(x_0)+f(x_0)$ au voisinage de 0



For more visit: L9ray.com

1.2. DÉRIVABILITÉ À DROITE - DÉRIVABILITÉ À GAUCHE

Définition 3

- Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $[x_0, x_0 + r[$ où $r \in \mathbb{R}_+^*$.

On dit que f est dérivable à droite de x_0 s'il existe un réel ℓ_1 tel que : $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell_1$.

Le nombre ℓ_1 est appelé le nombre dérivé de la fonction f à droite en x_0. Il est noté $f'_d(x_0)$.

- Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $]x_0 - r, x_0]$ où $r \in \mathbb{R}_+^*$.

On dit que f est dérivable à gauche de x_0 s'il existe un réel ℓ_2 tel que : $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell_2$.

Le nombre ℓ_2 est appelé le nombre dérivé de la fonction f à gauche en x_0. Il est noté $f'_g(x_0)$.

Proposition 1

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et x_0 un élément de I.

La fonction f est dérivable en x_0 si, et seulement si, elle est dérivable à droite et à gauche en x_0, avec $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$, et dans ce cas : $f'(x_0) = f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$

Exemples

1) On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x - 3\sqrt[3]{x-1} \ ; \ x \geq 1 \\ f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \ ; \ x < 1 \end{cases}$$

Étudions la dérivabilité de la fonction f au point $x_0 = 1$:

- Dérivabilité à gauche :

On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \dfrac{\frac{1}{\sqrt{x}} - 1}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \dfrac{\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x-1)} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \dfrac{-1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} = -\dfrac{1}{2}$.

Donc la fonction f est dérivable à gauche en 1 et $f'_g(1) = -\dfrac{1}{2}$.

- Dérivabilité à droite :

On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \dfrac{x - 3\sqrt[3]{x-1} - 1}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \left(\dfrac{x-1}{x-1} - 3\dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{x-1} \right) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \left(1 - \dfrac{3}{\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^2} \right) = -\infty$.

Donc la fonction f n'est pas dérivable à droite en 1.

For more visit: L9ray.com

Interprétations géométriques

- La fonction f est dérivable à gauche en 1 et $f'_g(1) = -\frac{1}{2}$; donc la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f admet une demi-tangente à gauche au point $A(1;1)$ de coefficient directeur $-\frac{1}{2}$ et d'équation cartésienne :

$$\begin{cases} y = f'_g(1)(x-1) + f(1) \\ x \leq 1 \end{cases} \text{ ; c'est-à-dire : } \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \\ x \leq 1 \end{cases}$$

- On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = -\infty$; donc la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une demi-tangente verticale à droite au point $A(1;1)$ dirigée vers le bas.

2) On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} g(x) = x\sqrt{x} \ ; \ x \geq 0 \\ g(x) = 1 - \cos x \ ; \ x < 0 \end{cases}$$

Étudions la dérivabilité de la fonction g au point $x_0 = 0$:

- Dérivabilité à gauche :

On a : $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$.

Donc la fonction g est dérivable à droite en 0 et $g'_g(0) = 0$.

- Dérivabilité à droite :

On a : $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1-\cos x}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1-\cos x}{x^2} \times x = \frac{1}{2} \times 0 = 0$.

Donc la fonction g est dérivable à gauche en 0 et $g'_d(0) = 0$.

Puisque $g'_g(0) = g'_d(0) = 0$, alors la fonction g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$.

Interprétation géométrique

La fonction g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$; donc la courbe $\mathscr{C}_g$ de la fonction g admet une tangente horizontale à l'origine du repère.

1.3. DÉRIVABILITÉ D'UNE FONCTION SUR UN INTERVALLE

Définition 4

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I.

On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point x de I. On note f' la fonction qui à $x \in I$ associe le nombre dérivée de f en x. On l'appelle la fonction dérivée de f, ou plus simplement la dérivée de f. On écrit aussi : $f' = \frac{df}{dx}$.

For more visit: L9ray.com

TABLEAU DES DÉRIVÉES USUELLES

La fonction f	La fonction f'	Domaine de dérivabilité
$x \mapsto a \quad (a \in \mathbb{R})$	$x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto ax \quad (a \in \mathbb{R}^*)$	$x \mapsto a$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto \cos x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto -\sin x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \tan x$	$x \mapsto 1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[\quad (k \in \mathbb{Z})$
$x \mapsto \sin(ax+b) \quad (a,b \in \mathbb{R})$	$x \mapsto a\cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos(ax+b) \quad (a,b \in \mathbb{R})$	$x \mapsto -a\sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$

1.4. OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONS DÉRIVABLES

Proposition 2

Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors :

$$(f+g)' = f'+g' \quad ; \quad (\alpha f)' = \alpha f' \quad ; \quad (f.g)' = f'.g + g'.f \quad ; \quad (f^n)' = n.f'.f^{n-1}$$

Si la fonction g ne s'annule pas sur I, alors : $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$ et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'.g - f.g'}{g^2}$.

Enfin, si f est strictement positive sur I, alors : $\left(\sqrt{f}\right)' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$.

Remarque

Avant de dériver une fonction, il ne faut pas oublier de vérifier et rappeler que la fonction en question est définie et dérivable sur l'intervalle considéré.

For more visit: L9ray.com

2 COMPLÉMENTS SUR LA DÉRIVATION

2.1. DÉRIVABILITÉ ET CONTINUITÉ

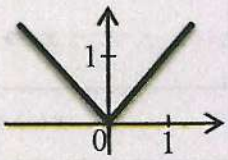
Proposition 3

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I et x_0 un élément de I.

Si f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0.

Remarques

- Une conséquence immédiate de la proposition 3 est la suivante : toute fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle.
- La réciproque de la proposition 3 est fausse. Par exemple, la fonction $x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0. (Figure ci-contre)



2.2. DÉRIVÉE DE LA FONCTION COMPOSÉE

Proposition 4

Soit I et J deux intervalles ouverts, et $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions numériques, avec $f(I) \subset J$. Soit x_0 un élément de I. Si :

- la fonction f est dérivable en x_0,
- la fonction g est dérivable en $y_0 = f(x_0)$,

alors la fonction $g \circ f$ est dérivable en x_0 et de plus : $(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) \times g'(f(x_0))$

Corollaire

Si f est dérivable sur un intervalle I et g est dérivable sur un intervalle J tel que $f(I) \subset J$, alors la $g \circ f$ est dérivable sur I et de plus, pour tout $x \in I$: $(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x))$.

Exemples

1) On considère la fonction U définie sur $\mathbb{R}$ par : $U(x) = \cos\left(\sqrt{x^2+5}\right)$

En posant : $f(x) = \sqrt{x^2+5}$ et $g(x) = \cos x$, on aura pour $x \in \mathbb{R}$: $U(x) = g \circ f(x)$.

Puisque f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et que $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$, alors la fonction $U = g \circ f$ est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ et de plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

For more visit: L9ray.com

$$U'(x) = f'(x) \times g'(f(x)) = \frac{x \sin\left(\sqrt{x^2+5}\right)}{\sqrt{x^2+5}}$$

2) On considère la fonction V définie sur $]1,2[$ par : $V(x) = \tan\left(\frac{\pi}{x}\right)$

En posant : $f(x) = \frac{\pi}{x}$ et $g(x) = \tan x$, on aura pour $x \in]1;2[$: $V(x) = g \circ f(x)$.

La fonction f étant dérivable sur $]1;2[$ et $f(]1;2[) \subset \left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$; donc g est dérivable sur $f(]1;2[)$.

Par suite, V est dérivable sur $]1;2[$ et de plus, pour tout $x \in]1;2[$:

$$V'(x) = f'(x) \times g'(f(x)) = -\frac{\pi}{x^2}\left(1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)$$

Applications

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sin(x \cos x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis déterminer sa dérivée.

2. Montrer que la fonction $g : x \mapsto \sin\left(x\sqrt{x}\right) + \cos\left(x^3\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ puis déterminer sa dérivée.

3. Soit h la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} h(x) = x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ h(0) = 0 \end{cases}$$

a) Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction h en 0.

b) Montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $h'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2.3. DÉRIVÉE DE LA FONCTION RÉCIPROQUE

Proposition 5

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et $x_0 \in I$.

Si f est dérivable en x_0 avec $f'(x_0) \neq 0$, alors la fonction f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et de plus :

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Corollaire

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Si f est dérivable sur I telle que la fonction f' ne s'annule pas sur I, alors la fonction f^{-1} est dérivable sur $J = f(I)$. De plus, on a pour tout $x \in J$: $\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$.

For more visit: L9ray.com

L9RAY

Exemples

1) Soit f la fonction numérique définie sur $I=[2;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt{x}}$.

La fonction f est dérivable sur I en tant que quotient de deux fonctions dérivables sur I . De plus, on a pour tout $x\in I$: $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x\sqrt{x}}=\dfrac{x-2}{2x\sqrt{x}}$.

On a pour tout $x>2$: $f'(x)>0$. Donc, la fonction f est strictement croissante sur I .

Comme f est continue et strictement croissante sur I , alors f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle J donné par : $J=f(I)=\left[f(2);\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right[=[2\sqrt{2};+\infty[$

Étudions maintenant la dérivabilité de la fonction f^{-1} sur l'intervalle $]2\sqrt{2};+\infty[$:

Puisque la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]2;+\infty[$ et pour tout $x\in]2;+\infty[$, on a $f'(x)\neq 0$,

alors sa fonction réciproque f^{-1} est dérivable sur $]2;+\infty[$. Calculons maintenant $\left(f^{-1}\right)'(3)$:

On a : $\left(f^{-1}\right)'(3)=\dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(3)\right)}$. Calculons par exemple $\beta=f^{-1}(3)$:

Le nombre β est l'unique réel de $]2;+\infty[$ tel que : $f(\beta)=3$. On a alors :

$$f(\beta)=3\Leftrightarrow\sqrt{\beta}+\frac{2}{\sqrt{\beta}}=3\Leftrightarrow\left(\sqrt{\beta}\right)^2-3\sqrt{\beta}+2=0\Leftrightarrow\left(\sqrt{\beta}-1\right)\left(\sqrt{\beta}-2\right)=0$$

Or $\sqrt{\beta}>\sqrt{2}>1$; donc $\sqrt{\beta}-1\neq 0$. Donc : $f(\beta)=3\Leftrightarrow\sqrt{\beta}-2=0\Leftrightarrow\beta=4$. D'où : $f^{-1}(3)=4$.

Comme $f'(4)=\dfrac{1}{8}$, alors : $\left(f^{-1}\right)'(3)=\dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(3)\right)}=\dfrac{1}{f'(4)}=8$.

2) Soit f la fonction numérique définie sur $I=\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ par : $f(x)=x\sin x$

La fonction f est dérivable sur I en tant que produit de deux fonctions dérivables sur I . De plus, on a pour tout $x\in I$: $f'(x)=\sin x+x\cos x$.

Puisque $f'(x)>0$ pour tout $x\in\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, alors f est strictement croissante sur I . Par suite, f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle J donné par : $J=f(I)=\left[f(0);f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right]=\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

On a $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\pi}{12}$ et $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{6+\pi\sqrt{3}}{12}$. Or $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\neq 0$ donc la fonction f^{-1} est dérivable en $\dfrac{\pi}{12}$ et on a :

$$\left(f^{-1}\right)'\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1}{f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)}=\frac{12}{6+\pi\sqrt{3}}$$

For more visit: L9ray.com

Applications

1. Soit f la fonction définie sur $\left]0;\frac{1}{4}\right[$ par : $f(x)=\left(1-2\sqrt{x}\right)^3$.

   a) Montrer que f admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J à déterminer.

   b) Calculer $f\left(\frac{1}{16}\right)$ et en déduire $\left(f^{-1}\right)'\left(\frac{1}{8}\right)$.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$

   a) Montrer que f admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J à déterminer.

   b) Montrer que f^{-1} est dérivable en 1 et calculer $\left(f^{-1}\right)'(1)$.

3. Soit g la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par : $g(x)=x^3-3x-3$.

   a) Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J à déterminer.

   b) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans $[1;+\infty[$.

   c) Montrer que $\left(g^{-1}\right)'(0)=\frac{1}{3\left(\alpha^2-1\right)}$.

4. Soit h la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par : $h(x)=x-2\sqrt{x}$.

   a) Montrer que la fonction h admet une fonction réciproque définie sur l'intervalle $[-1;+\infty[$.

   b) Résoudre dans $[1;+\infty[$ chacune des deux équations : $(E_1): h(x)=0$; $(E_2): h(x)=3$.

   c) Montrer que h^{-1} est dérivable en 0 et en 3 puis calculer $\left(h^{-1}\right)'(0)$ et $\left(h^{-1}\right)'(3)$.

   d) Calculer $h^{-1}(x)$ pour tout $x\in[-1;+\infty[$.

   e) Montrer que h^{-1} est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et définir $\left(h^{-1}\right)'$.

2.4. DÉRIVÉE DE LA FONCTION RACINE N^{ème}

Proposition 6

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

- La fonction $x\mapsto\sqrt[n]{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)'=\left(x^{\frac{1}{n}}\right)'=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}=\frac{1}{n.\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

- Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ alors la fonction $x\mapsto\sqrt[n]{u(x)}$ est dérivable sur I et sa fonction dérivée est donnée par :

$$\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)'=\frac{1}{n}u'(x)\left(u(x)\right)^{\frac{1}{n}-1}=\frac{u'(x)}{n\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)^{n-1}}$$

For more visit: L9ray.com

L9RAY

Preuve

On sait que la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est la fonction réciproque de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x^n$.

Puisque f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée $f' : x \mapsto nx^{n-1}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$, alors sa fonction réciproque f^{-1} est dérivable sur $f\left(\mathbb{R}_+^*\right) = \mathbb{R}_+^*$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} = \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}$$

Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ alors la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ est dérivable sur I en tant que composée de deux fonctions dérivables. De plus, pour tout $x \in I$:

$$\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)' = f'(u(x)) \times u'(x) = \frac{1}{n}\left(u(x)\right)^{\frac{1}{n}-1} u'(x) = \frac{u'(x)}{n\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)^{n-1}}$$

Exemples

1) La fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\left(\sqrt[3]{x}\right)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3.\sqrt[3]{x^2}}$

2) On considère la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt[3]{8x-5}$

La fonction $u : x \mapsto 8x-5$ est dérivable et strictement positive sur l'intervalle $\left]\frac{5}{8};+\infty\right[$. Par conséquent,

La fonction f est dérivable sur $\left]\frac{5}{8};+\infty\right[$ et on a pour tout $x \in \left]\frac{5}{8};+\infty\right[$:

$$f'(x) = \frac{1}{3}u'(x)\left(u(x)\right)^{\frac{1}{3}-1} = \frac{8}{3}(8x-5)^{-\frac{2}{3}} = \frac{8}{3.\sqrt[3]{(8x-5)^2}}$$

Applications

Calculer la dérivée de chacune des fonctions numériques suivantes :

$f(x) = \sqrt[4]{3+\cos^2 x}$; $g(x) = x.\sqrt[7]{x^2-x}$; $h(x) = \sqrt[3]{\left(x^3-1\right)^4}$; $k(x) = \sin\left(\sqrt[3]{x^2+x+1}\right)$

Proposition 7

Soit r un nombre rationnel non nul.

- La fonction numérique $x \mapsto x^r$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto r.x^{r-1}$.
- Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors la fonction numérique $x \mapsto \left(u(x)\right)^r$ est dérivable sur I et sa fonction dérivée est donnée par la formule :

$$\left(\left(u(x)\right)^r\right)' = r.u'(x).\left(u(x)\right)^{r-1}$$

For more visit: L9ray.com

Exemple

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\left(x^2-x+5\right)^{\frac{7}{8}}$.

La fonction $x \mapsto x^2-x+5$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x)=\left(\left(x^2-x+5\right)^{\frac{7}{8}}\right)'=-\frac{7}{8}(2x-1)\left(x^2-x+5\right)^{\frac{7}{8}-1}=\frac{-7(2x-1)}{8\sqrt[8]{\left(x^2-x+5\right)^{15}}}$$

Applications

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer les intervalles où elles sont dérivables puis donner leurs fonctions dérivées :

$f(x)=(3-\cos 2x)^{\frac{4}{3}}$; $g(x)=\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)^{-\frac{3}{5}}$; $h(x)=(2+\sin(4x))^{\frac{5}{8}}$

3 ÉTUDE DES FONCTIONS NUMÉRIQUES (RAPPELS)

3.1. MONOTONIE D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE

Proposition 8

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- La fonction f est constante sur I si, et seulement, si : $(\forall x \in I)\ f'(x)=0$
- La fonction f est croissante sur I si, et seulement, si : $(\forall x \in I)\ f'(x) \geq 0$
- La fonction f est décroissante sur I si, et seulement, si : $(\forall x \in I)\ f'(x) \leq 0$

Remarques

- Les résultats de la proposition 8 ne sont valables que sur un intervalle.
- Si f' est positive sur I et ne s'y annule qu'en un nombre fini de points, alors la fonction f est strictement croissante sur I.
- Si f' est négative sur I et ne s'y annule qu'en un nombre fini de points, alors la fonction f est strictement décroissante sur I.

Exemple

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $I=]-\infty;-1[$ par : $f(x)=\frac{x}{\sqrt[3]{x^2+x}}$.

Étudions les variations de la fonction f :

La fonction $x \mapsto x^2+x$ est dérivable sur l'intervalle I car c'est une fonction polynôme. De plus, on a pour tout $x \in I$: $x^2+x>0$. Donc, la fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x^2+x}$ est dérivable sur I.

For more visit: L9ray.com

Enfin, la fonction f est dérivable sur I en tant que quotient de deux fonctions dérivables sur I.

On a pour tout $x \in I$:

$$f'(x)=\left(\frac{x}{\sqrt[3]{x^2+x}}\right)'=\frac{\sqrt[3]{x^2+x}-x\times\dfrac{2x+1}{3.\left(\sqrt[3]{x^2+x}\right)^2}}{\left(\sqrt[3]{x^2+x}\right)^2}=\frac{\dfrac{3\left(\sqrt[3]{x^2+x}\right)^3-\left(2x^2+x\right)}{3.\left(\sqrt[3]{x^2+x}\right)^2}}{\left(\sqrt[3]{x^2+x}\right)^2}$$

Par conséquent : $(\forall x \in I)\ f'(x)=\dfrac{x^2+2x}{3\left(\sqrt[3]{x^2+x}\right)^4}$. Ainsi, le signe de $f'(x)$ est celui de x^2+2x.

Tableau de variations de la fonction f :

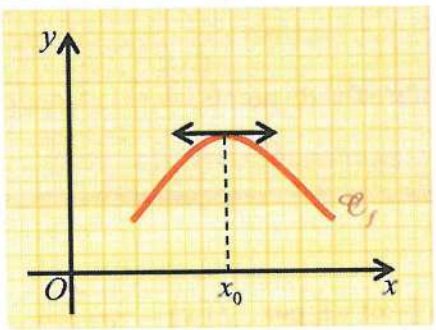
x	$-\infty$		-2		-1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-\sqrt[3]{4}$	↘	$-\infty$

3.2. EXTREMUMS D'UNE FONCTION DÉRIVABLE SUR UN INTERVALLE

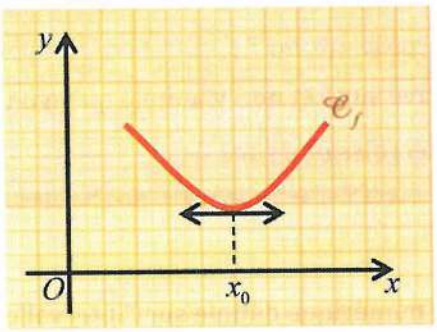
Proposition 9

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et x_0 un élément de I.

- Si f admet un extremum local au point x_0, alors : $f'(x_0)=0$.
- Si f' s'annule en x_0 en changeant de signe, alors f admet un extremum en x_0.



f présente un maximum en x_0



f présente un minimum en x_0

Exemple

On considère la fonction f définie par : $f(x)=x+\dfrac{1+x}{1+2x}$

For more visit: L9ray.com

• Le domaine de définition de la fonction f est : $D_f = \left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[\cup \left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$.

• Les limites de la fonctions f aux bornes de son domaine de définition :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x+\frac{1+x}{1+2x}\right) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1+x}{1+2x}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^+} f(x) = \lim_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^+}\left(x+\frac{1+x}{1+2x}\right) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^-} f(x) = \lim_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^-}\left(x+\frac{1+x}{1+2x}\right) = -\infty$$

• La fonction f est dérivable sur D_f car c'est une fonction rationnelle. De plus, on a pour $x \in D_f$:

$$f'(x) = \left(x+\frac{1+x}{1+2x}\right)' = 1-\frac{1}{(1+2x)^2} = \frac{(1+2x)^2-1}{(1+2x)^2} = \frac{4x(1+x)}{(1+2x)^2}$$

Tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$		-1		$\frac{-1}{2}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	‖	↘	1	↗	$+\infty$

• La fonction f admet deux extremums locaux sur son ensemble de définition :

▪ Un minimum local en 0 et qui est $f(0)=1$.

▪ Un maximum local en -1 et qui est $f(-1)=-1$.

Applications

1. Soit f la fonction numérique définie sur $[-1;+\infty[$ par : $f(x) = x - \sqrt[3]{x+1}$

a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Étudier la dérivabilité de f à droite en -1 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

c) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-1;+\infty[$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f.

2. Soit g la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = \sqrt[3]{ax^2} - \frac{2}{3}x$ où $a \in \mathbb{R}_+^*$.

a) Montrer que pour tout $x \in]0;+\infty[$: $f'(x) = \frac{2}{3}\left(\sqrt[3]{\frac{a}{x}} - 1\right)$.

b) En déduire que pour tous réels a et x de l'intervalle $]0;+\infty[$: $a^{\frac{1}{3}} \times x^{\frac{2}{3}} \leq \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}x$.

For more visit: L9ray.com

L9RAY

3.3. AXE DE SYMÉTRIE – CENTRE DE SYMÉTRIE

Proposition 10

Soit f une fonction numérique et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

Pour que la droite (Δ) d'équation $x = a$ soit un axe de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$, il faut et il suffit que pour tout $x \in D_f$: $(2a-x) \in D_f$ et $f(2a-x) = f(x)$

Exemple

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = \sqrt{x^2+6x+5}$

Soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

Montrons que la droite (Δ) d'équation $x = -3$ est un axe de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$:

Le domaine de définition de f est $D_f =]-\infty;-5] \cup [-1;+\infty[$. On a d'une part :

$$x \in D_f \Leftrightarrow (x \leq -5 \text{ ou } x \geq -1) \Leftrightarrow (-6-x \geq -1 \text{ ou } -6-x \leq -5) \Leftrightarrow (-6-x) \in D_f$$

D'autre part, pour tout $x \in D_f$:

$$f(-6-x) = \sqrt{(-6-x)^2+6(-6-x)+5} = \sqrt{x^2+12x+36-36-6x+5} = \sqrt{x^2+6x+5} = f(x)$$

Par suite, la droite (Δ) d'équation $x = -3$ est un axe de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$.

Proposition 11

Soit f une fonction numérique et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère donné.

Pour que le point $\Omega(a,b)$ soit un centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$, il faut et il suffit que pour tout $x \in D_f$: $(2a-x) \in D_f$ et $f(2a-x)+f(x) = 2b$

Exemple

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = \dfrac{\cos x}{2-\sin x}$.

Montrons que $\Omega\left(\dfrac{\pi}{2},0\right)$ est un point de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$:

L'ensemble de définition de f est $D_f = \mathbb{R}$. Donc, pour tout $x \in D_f$, $(\pi-x) \in D_f$.

On a maintenant pour tout $x \in D_f$:

$$f(\pi-x)+f(x) = \frac{\cos(\pi-x)}{2-\sin(\pi-x)} + \frac{\cos x}{2-\sin x} = -\frac{\cos x}{2-\sin x} + \frac{\cos x}{2-\sin x} = 0.$$

Par conséquent, le point $\Omega\left(\dfrac{\pi}{2};0\right)$ est un centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$.

For more visit: L9ray.com

Remarques

- Si f est une fonction paire, alors sa courbe $\mathscr{C}_f$ admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.
- Si f est une fonction impaire, alors $\mathscr{C}_f$ admet l'origine du repère comme centre de symétrie.
- Si la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f admet la droite d'équation $x = a$ comme axe de symétrie ou admet le point de coordonnées $(a;b)$ comme centre de symétrie, alors on peut restreindre l'étude de la fonction f sur l'ensemble $D_{étude} = D_f \cap [a;+\infty[$.

3.4. LES FONCTIONS PÉRIODIQUES

Définition 5

Soit f une fonction numérique et D_f son ensemble de définition.

On dit que f est périodique s'il existe un réel non nul T tel que pour tout $x \in D_f$:

$$(x+T) \in D_f \quad \text{et} \quad (x-T) \in D_f \quad \text{et} \quad f(x+T) = f(x)$$

Le nombre réel T est appelé alors une période de f. La plus petite période strictement positive de la fonction f est appelée la période de la fonction f.

Exemples

1) Si ω_0 est un réel strictement positif alors les fonctions $t \mapsto \sin(\omega_0 t + \varphi)$ et $t \mapsto \cos(\omega_0 t + \varphi)$ sont périodiques de période $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$.

2) Si a est un réel non nul, alors la fonction $x \mapsto \tan(ax+b)$ est périodique de période $T = \dfrac{\pi}{a}$.

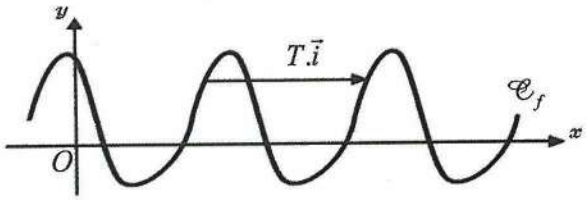
Proposition 12

Soit f une fonction périodique de période T et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

- Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le nombre nT est aussi une période de la fonction f.
- La courbe de $\mathscr{C}_f$ est invariante par toute translation de vecteur $nT.\vec{i}$ avec $n \in \mathbb{Z}$.
- Si $x_0 \in \mathbb{R}$ est un réel donné, la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est la réunion des images de l'ensemble $\{M(x;f(x)) / x \in D_f \cap [x_0 ; x_0 + T[\}$ par toutes les translations de vecteur $nT.\vec{i}$ avec $n \in \mathbb{Z}$.

Ainsi, pour étudier une fonction périodique de période T, il suffit de l'étudier sur un intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur T. (Souvent, on choisit un des deux intervalles $[0;T[$ ou $\left[-\dfrac{T}{2};\dfrac{T}{2}\right[$).

For more visit: L9ray.com



3.5. ÉTUDE DE LA CONCAVITÉ D'UNE COURBE

Définition 6

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

- On dit que la courbe $\mathscr{C}_f$ est convexe si elle est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes, et on dit qu'elle est concave si elle est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes.
- On dit que le point $M_0\left(x_0 ; f\left(x_0\right)\right)$ est un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$ si, en M_0, la courbe $\mathscr{C}_f$ traverse sa tangente.

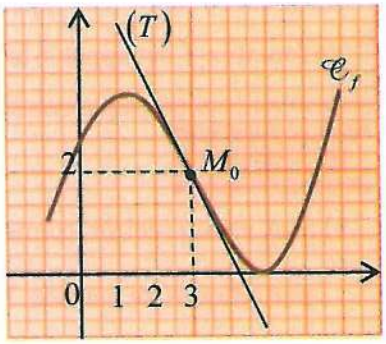
Exemple

On considère la figure ci-contre qui présente le graphe d'une fonction numérique f sur $\mathbb{R}$.

La courbe $\mathscr{C}_f$ est convexe sur $[3;+\infty[$ et concave sur $]-\infty;3]$.

Le point $M_0(3,2)$ est un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.

La tangente (T) traverse la courbe $\mathscr{C}_f$ en $M_0(3;2)$.



Proposition 13

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.

- Pour que la courbe $\mathscr{C}_f$ de f soit convexe sur I, il faut et il suffit que : $(\forall x \in I)\quad f''(x) \geq 0$
- Pour que la courbe $\mathscr{C}_f$ de f soit concave sur I, il faut et il suffit que : $(\forall x \in I)\quad f''(x) \leq 0$
- Pour que le point $M_0\left(x_0 ; f\left(x_0\right)\right)$ soit un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$, il faut et il suffit que la dérivée seconde f'' s'annule en x_0 et change de signe de part et d'autre de x_0.

Applications

Pour chacun des cas suivants, étudier la concavité de la courbe $\mathscr{C}_f$ et déterminer ses points d'inflexion (sous réserve d'existence) :

$$f(x)=\frac{x}{x^2+1} \quad ; \quad f(x)=x+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad ; \quad f(x)=(x-1)\sqrt[3]{x-1} \quad ; \quad f(x)=\frac{\sqrt{x}}{(x-1)^2}$$

For more visit: L9ray.com

3.6. ÉTUDE DES BRANCHES INFINIES (RAPPEL)

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ → La droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale de la courbe $\mathscr{C}_f$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = b$ → La droite d'équation $y = b$ est une asymptote horizontale de la courbe $\mathscr{C}_f$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$ → La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique dirigée vers l'axe des ordonnées.
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ → La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique dirigée vers l'axe des abscisses.
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ $(a \in \mathbb{R}^*)$
  - $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax) = b$ → La droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique de la courbe $\mathscr{C}_f$
  - $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax) = \pm\infty$ → La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = ax$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$ → La droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique de la courbe $\mathscr{C}_f$

4 LES FONCTIONS PRIMITIVES

4.1. PRIMITIVE D'UNE FONCTION SUR UN INTERVALLE

Définition 7

Soit f et F deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

On dit que la fonction F est une primitive de la fonction f sur I si :

F est dérivable sur I et pour tout $x \in I$: $F'(x) = f(x)$

Exemple

On considère les fonctions numériques f et F définies sur l'intervalle $I =]0;+\infty[$ par :

For more visit: L9ray.com

$$f(x)=1+\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2} \quad \text{et} \quad F(x)=x+2\sqrt{x}+\frac{1}{x}$$

La fonction F est une primitive de la fonction f sur I car F est dérivable sur I et pour tout $x \in I$:

$$F'(x)=\left(x+2\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)'=1+\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}=f(x)$$

Proposition 14

Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive définie sur cet intervalle.

4.2. PRIMITIVES D'UNE FONCTION CONTINUE

Proposition 15

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- Si F est une primitive de la fonction f sur I, alors les primitives de f sur I sont les fonctions $x \mapsto F(x)+c$ où c est une constante réelle.
- Pour tout $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive G de f sur I vérifiant : $G(x_0)=y_0$

Exemple

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I=]0,+\infty[$ par : $f(x)=1+\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}$

On a déjà vu que la fonction F définie sur I par : $F(x)=x+2\sqrt{x}+\frac{1}{x}$ est une primitive de f sur I.

Donc les primitives de la fonction f sur l'intervalle I sont les fonctions $x \mapsto x+2\sqrt{x}+\frac{1}{x}+c$ où c est une constante réelle.

Soit G la primitive de la fonction f sur I qui s'annule en 1. Donc : $G(x)=x+2\sqrt{x}+\frac{1}{x}+c$ avec $G(1)=0$.

On a alors : $G(1)=0 \Leftrightarrow 1+2\sqrt{1}+\frac{1}{1}+c=0 \Leftrightarrow 4+c=0 \Leftrightarrow c=-4$

Ainsi : $(\forall x \in]0;+\infty[)\ \ G(x)=x+2\sqrt{x}+\frac{1}{x}-4$.

4.3. OPÉRATIONS SUR LES PRIMITIVES

Proposition 16

Si F et G sont respectivement des primitives des fonctions f et g sur un intervalle I alors :

- $F+G$ est une primitive de la fonction $f+g$ sur l'intervalle I.
- Pour tout $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha F+\beta G$ est une primitive de $\alpha f+\beta g$ sur l'intervalle I.

For more visit: L9ray.com

TABLEAU DES PRIMITIVES USUELLES

La fonction f	Les primitives F de f	L'intervalle I
0	$c \quad (c \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto a \quad (a \in \mathbb{R}^*)$	$x \mapsto ax + c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x^n} \quad (n \in \mathbb{N}^* - \{1\})$	$x \mapsto \frac{1}{(1-n)x^{n-1}} + c$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
$x \mapsto x^r \quad (r \in \mathbb{Q}^* - \{1\})$	$x \mapsto \frac{x^{r+1}}{r+1} + c$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto \sqrt[n]{x} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$x \mapsto \frac{n}{n+1}\sqrt[n]{x^{n+1}} + c$	$\mathbb{R}^+$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x + c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x + c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$x \mapsto \tan x + c$	$\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[\quad (k \in \mathbb{Z})$
$x \mapsto \sin(ax+b) \quad (a \in \mathbb{R}^*)$	$x \mapsto -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos(ax+b) \quad (a \in \mathbb{R}^*)$	$x \mapsto \frac{1}{a}\sin(ax+b) + c$	$\mathbb{R}$
$u'v + uv'$	$uv + c$	Intervalle où u et v sont dérivables
$-\frac{u'}{u^2}$	$\frac{1}{u} + c$	Intervalle où u est dérivable et ne s'annule pas
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u} + c$	Intervalle où u est dérivable et strictement positive
$u'u^r \quad (r \in \mathbb{Q}^* - \{1\})$	$\frac{u^{r+1}}{r+1} + c$	Intervalle où u est dérivable et u^r est définie
$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	$\frac{u}{v} + c$	Intervalle où u et v sont dérivables et v ne s'annule pas

For more visit: L9ray.com

A ÉTUDE DE LA DÉRIVABILITÉ EN UN POINT

Soit f la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x)=2\sqrt{x}-x & \text{si } x\in]0;1[\\ f(x)=\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x^2-x} & \text{si } x\in[1;+\infty[\end{cases}$$

1) Montrer que la fonction f est continue en 1.

2) Étudier la dérivabilité de la fonction f à gauche en 1 puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3) a) Montrer que pour tout $x\in]1;+\infty[$: $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}-\sqrt[3]{\dfrac{x}{(x-1)^2}}$.

b) Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 1 puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

SOLUTION

1) Montrons que fonction f est continue en 1 :

On a : $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x^2-x}\right)=1=f(1)$. Donc la fonction f est continue à droite en 1.

On a : $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\left(2\sqrt{x}-x\right)=1=f(1)$. Donc la fonction f est continue à gauche en 1.

Par suite, la fonction f est continue en 1.

2) Étudions la dérivabilité de la fonction f à gauche en 1 :

On a : $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{2\sqrt{x}-x-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}-\dfrac{x-2\sqrt{x}+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}-\dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$.

Donc : $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}-\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}=0$.

Par suite, la fonction f est dérivable à gauche en 1 et de plus : $f'_g(1)=0$.

Interprétation graphique : la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f admet une demi-tangente horizontale à gauche au point d'abscisse 1.

3) a) On a pour tout $x\in]1;+\infty[$:

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x^2-x}-1}{x-1}=\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}-\frac{\sqrt[3]{x^2-x}}{x-1}=\frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)}-\sqrt[3]{\frac{x(x-1)}{(x-1)^3}}$$

Par conséquent, pour tout $x\in]1;+\infty[$: $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}-\sqrt[3]{\dfrac{x}{(x-1)^2}}$

b) Dérivabilité de la fonction f à droite en 1 :

For more visit: L9ray.com

On a : $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}-\sqrt[3]{\dfrac{x}{(x-1)^2}}\right)=-\infty$.

Car : $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}=\dfrac{1}{3}$ et $\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt[3]{\dfrac{x}{(x-1)^2}}=+\infty$.

Par suite, la fonction f n'est pas dérivable à droite en 1.

Interprétation graphique : la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f admet une demi-tangente verticale à droite au point d'abscisse 1 dirigée vers le bas.

- Pour montrer qu'une fonction f est dérivable en un point x_0, on peut :
  - Appliquer la définition et montrer que : $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\ell\in\mathbb{R}$
  - Montrer que f est dérivable à gauche et à droite, et son nombre dérivé à gauche est égal à son nombre dérivé à droite : $f'_d(x_0)=f'_g(x_0)$.
  - Utiliser les opérations sur les fonctions dérivables.
  - Vérifier que la courbe admet en $A(x_0,f(x_0))$ une tangente non verticale.
- Dans le cas où : $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\pm\infty$, f n'est pas dérivable en x_0 et sa courbe représentative admet une tangente (ou demi-tangente) parallèle à (Oy) au point $M_0(x_0;f(x_0))$.

B OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONS DÉRIVÉES

1) Calculer $f'(x)$ dans chacun des cas suivants :

a) $f(x)=(-2x^3+7x^2-x+4)^5$; b) $f(x)=(x^3+2x)\sqrt{4x^2+1}$; c) $f(x)=\dfrac{\sin(2x)}{2+\cos^2 x}$

d) $f(x)=2x+5-\sqrt{\dfrac{1}{x^2+1}}$; e) $f(x)=x^3-\sqrt{x}\tan x+\dfrac{\sin x}{x}$; f) $f(x)=\left(\dfrac{x+1}{x^2+3x+7}\right)^3$

2) Dans chacun des cas suivants, montrer que la fonction f est dérivable sur l'intervalle I puis calculer sa dérivée $f'(x)$ pour tout $x\in I$:

a) $f(x)=\cos(3x^2-5x+7)$ et $I=\mathbb{R}$; b) $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x}{x^2+1}}$ et $I=]0;+\infty[$

c) $f(x)=4x^{\frac{2}{3}}-5x^{\frac{1}{3}}+2x^{-\frac{1}{3}}$ et $I=]0;+\infty[$; d) $f(x)=\sin\left(\sqrt{x^2+5}\right)$ et $I=\mathbb{R}$

e) $f(x)=\tan\left(\dfrac{\pi}{x^2+1}\right)$ et $I=]-\infty;-1[$; f) $f(x)=\sqrt[3]{2-\sin^2 x}$ et $I=\mathbb{R}$

For more visit: L9ray.com

L9RAY

SOLUTION

1) Calcul des dérivées :

a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x)=\left[\left(-2x^3+7x^2-x+4\right)^5\right]'=5\left(-2x^3+7x^2-x+4\right)'\left(-2x^3+7x^2-x+4\right)^4$$

Par suite : $(\forall x \in \mathbb{R})\ f'(x)=5\left(-6x^2+14x-1\right)\left(-2x^3+7x^2-x+4\right)^4$.

b) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x)=\left(\left(x^3+2x\right)\sqrt{4x^2+1}\right)'=\left(x^3+2x\right)'\sqrt{4x^2+1}+\left(x^3+2x\right)\left(\sqrt{4x^2+1}\right)'$$

Donc : $f'(x)=\left(3x^2+2\right)\sqrt{4x^2+1}+\dfrac{4x\left(x^3+2x\right)}{\sqrt{4x^2+1}}=\dfrac{\left(3x^2+2\right)\left(4x^2+1\right)+4x\left(x^3+2x\right)}{\sqrt{4x^2+1}}$

Par suite : $(\forall x \in \mathbb{R})\ f'(x)=\dfrac{16x^4+19x^2+2}{\sqrt{4x^2+1}}$.

c) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x)=\left(\frac{\sin(2x)}{2+\cos^2 x}\right)'=\frac{\left(\sin(2x)\right)'\left(2+\cos^2 x\right)-\sin(2x)\left(2+\cos^2 x\right)'}{\left(2+\cos^2 x\right)^2}$$

Donc : $f'(x)=\dfrac{2\cos(2x)\left(2+\cos^2 x\right)+\sin(2x)(2\sin x\cos x)}{\left(2+\cos^2 x\right)^2}=\dfrac{2\cos(2x)\left(2+\cos^2 x\right)+\sin^2(2x)}{\left(2+\cos^2 x\right)^2}$

Par suite : $(\forall x \in \mathbb{R})\ f'(x)=\dfrac{2\cos(2x)\left(2+\cos^2 x\right)+\sin^2(2x)}{\left(2+\cos^2 x\right)^2}$.

d) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x)=\left(2x+5-\sqrt{\frac{1}{x^2+1}}\right)'=(2x+5)'-\left(\sqrt{\frac{1}{x^2+1}}\right)'=2-\frac{\left(\frac{1}{x^2+1}\right)'}{2\sqrt{\frac{1}{x^2+1}}}=2-\frac{-\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}}{2\sqrt{\frac{1}{x^2+1}}}$$

Donc : $f'(x)=2+\dfrac{\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}}{\sqrt{\frac{1}{x^2+1}}}=2+\dfrac{x}{\left(x^2+1\right)^2\sqrt{\frac{1}{x^2+1}}}=2+\dfrac{x}{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}$

Par suite : $(\forall x \in \mathbb{R})\ f'(x)=2+\dfrac{x}{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}$.

For more visit: L9ray.com

e) La fonction f est dérivable sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition, à savoir : $D_f = \mathbb{R}_+^* - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$. On a pour tout $x \in D_f$:

$$f'(x) = \left(x^3 - \sqrt{x}\tan x + \frac{\sin x}{x}\right)' = \left(x^3\right)' - \left(\sqrt{x}\tan x\right)' + \left(\frac{\sin x}{x}\right)'$$

Par suite : $\left(\forall x \in D_f\right)\ f'(x) = 3x^2 - \left(\frac{\tan x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\cos^2 x}\right) + \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$.

f) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \left[\left(\frac{x+1}{x^2+3x+7}\right)^3\right]' = 3\left(\frac{x+1}{x^2+3x+7}\right)'\left(\frac{x+1}{x^2+3x+7}\right)^2$$

Donc : $f'(x) = 3\frac{x^2+3x+7-(x+1)(2x+3)}{\left(x^2+3x+7\right)^2}\left(\frac{x+1}{x^2+3x+7}\right)^2 = \frac{3\left(-x^2-2x+4\right)(x+1)^2}{\left(x^2+3x+7\right)^4}$

Par suite : $\left(\forall x \in D_f\right)\ f'(x) = -\frac{3\left(x^2+2x-4\right)(x+1)^2}{\left(x^2+3x+7\right)^4}$.

2) a) Les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto 3x^2 - 5x + 7$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$; donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \left(\cos\left(3x^2-5x+7\right)\right)' = \left(3x^2-5x+7\right)' \times \cos'\left(3x^2-5x+7\right) = -(6x-5)\sin\left(3x^2-5x+7\right)$$

Par suite : $\left(\forall x \in D_f\right)\ f'(x) = -(6x-5)\sin\left(3x^2-5x+7\right)$.

b) La fonction $x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$ est une fonction rationnelle dérivable et strictement positive sur $I =]0;+\infty[$.

Par conséquent, la fonction f est dérivable sur I.

On a pour tout $x \in]0;+\infty[$:

$$f'(x) = \left(\sqrt[3]{\frac{x}{x^2+1}}\right)' = \frac{\left(\frac{x}{x^2+1}\right)'}{3\sqrt[3]{\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^2}} = \frac{\frac{x^2+1-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2}}{3\sqrt[3]{\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^2}} = \frac{1-x^2}{3\left(x^2+1\right)^2\sqrt[3]{\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^2}}$$

Par suite : $\left(\forall x \in]0;+\infty[\right)\ f'(x) = \frac{1-x^2}{3\left(x^2+1\right)^2\sqrt[3]{\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^2}}$.

c) Les fonctions $x \mapsto x^{\frac{2}{3}}$ et $x \mapsto x^{\frac{1}{3}}$ et $x \mapsto x^{-\frac{1}{3}}$ sont dérivables sur $I =]0;+\infty[$.

Par conséquent, la fonction f est dérivable sur I.

For more visit: L9ray.com

On a pour tout $x \in]0;+\infty[$:

$$f'(x)=\left(4x^{\frac{2}{3}}-5x^{\frac{1}{3}}+2x^{-\frac{1}{3}}\right)'=4\times\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}-5\times\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}-2\times\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}-1}$$

Par suite : $(\forall x\in]0;+\infty[)\ f'(x)=\frac{8}{3}x^{-\frac{1}{3}}-\frac{5}{3}x^{-\frac{2}{3}}-\frac{2}{3}x^{-\frac{4}{3}}$.

d) Les fonctions $x\mapsto\sin x$ et $x\mapsto\sqrt{x^2+5}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$; donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

On a pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$f'(x)=\left(\sin\left(\sqrt{x^2+5}\right)\right)'=\left(\sqrt{x^2+5}\right)'\times\sin'\left(\sqrt{x^2+5}\right)=\frac{x}{\sqrt{x^2+5}}\cos\left(\sqrt{x^2+5}\right)$$

Par suite : $(\forall x\in\mathbb{R})\ f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+5}}\cos\left(\sqrt{x^2+5}\right)$.

e) On pose : $u(x)=\frac{\pi}{x^2+1}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. La fonction u est une fonction rationnelle dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur l'intervalle $]-\infty;-1[$. De plus, pour tout $x\in]-\infty;-1[$ on a : $x^2>1$. Il s'ensuit donc que $x^2+1>2$ et alors : $0<\frac{\pi}{x^2+1}<\frac{\pi}{2}$. Par conséquent : $u(]-\infty;-1[)\subset\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

Puisque la fonction $x\mapsto\tan x$ est dérivable sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, alors la fonction $f=\tan u$ est dérivable sur l'intervalle $]-\infty;-1[$ comme composée de deux fonctions dérivables.

On a pour tout $x\in]-\infty;-1[$:

$$f'(x)=\left(\tan\left(\frac{\pi}{x^2+1}\right)\right)'=\left(\frac{\pi}{x^2+1}\right)'\tan'\left(\frac{\pi}{x^2+1}\right)=-\frac{2\pi x}{\left(x^2+1\right)^2}\left(1+\tan^2\left(\frac{\pi}{x^2+1}\right)\right)$$

Par suite : $(\forall x\in]-\infty;-1[)\ f'(x)=-\frac{2\pi x}{\left(x^2+1\right)^2}\left(1+\tan^2\left(\frac{\pi}{x^2+1}\right)\right)$.

f) La fonction $x\mapsto 2-\sin^2 x$ est une fonction dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$f'(x)=\left(\sqrt[3]{2-\sin^2 x}\right)'=\frac{\left(2-\sin^2 x\right)'}{3\sqrt[3]{\left(2-\sin^2 x\right)^2}}=\frac{-2\sin x\cos x}{3\sqrt[3]{\left(2-\sin^2 x\right)^2}}=\frac{-\sin(2x)}{3\sqrt[3]{\left(2-\sin^2 x\right)^2}}$$

Par suite : $(\forall x\in\mathbb{R})\ f'(x)=\frac{-\sin(2x)}{3\sqrt[3]{\left(2-\sin^2 x\right)^2}}$.

For more visit: L9ray.com



- Pour montrer qu'une fonction f est dérivable sur un intervalle I et calculer sa dérivée, il suffit d'utiliser les théorèmes d'opérations sur les fonctions dérivables.
Pratiquement : il s'agit de considérer que la fonction f est une somme, un produit, un quotient, une composée ...et d'appliquer le théorème et la formule qui correspondent.
Attention à bien vérifier que les conditions d'application sont satisfaites ; si ce n'est pas le cas, il faut revenir à l'une des méthodes précédentes.
Il est par conséquent nécessaire de connaître sur les dérivées des fonctions classiques, ainsi que les formules de dérivation suivantes : $(k \in \mathbb{R})$

$$(u+v)' = u'+v' \quad ; \quad (uv)' = u'v+uv' \quad ; \quad (u^n)' = nu'u^{n-1} \quad ; \quad (ku)' = ku' \quad ; \quad (vou)' = u' \times (v' ou)$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2} \quad ; \quad \left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \quad ; \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2} \quad ; \quad \left(\sqrt[n]{u}\right)' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$$

$$\left(\sqrt[3]{u}\right)' = \frac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}} \quad ; \quad \left(\sin(u(x))\right)' = u'(x)\cos(u(x)) \quad ; \quad \left(\cos(u(x))\right)' = -u'(x)\sin(u(x))$$

- Pour montrer que la fonction $f = \sqrt[n]{u}$ est dérivable sur un intervalle I, il suffit de montrer que la fonction u est dérivable et strictement positive sur I.

C ÉTUDE D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE (1)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = x\left(\sqrt{x}-2\right)^2$.

On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Que peut-on déduire ?

2) Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0 puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3) a) Montrer que pour tout $x \in]0;+\infty[$: $f'(x) = 2\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)$

b) Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f.

4) Étudier la concavité de la courbe $\mathscr{C}_f$ et montrer que $\mathscr{C}_f$ admet un unique point d'inflexion I auquel on déterminera ses coordonnées.

5) Résoudre dans $\mathbb{R}^+$ l'équation $f(x) = x$ et interpréter le résultat graphiquement.

6) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

7) Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $I = [4;+\infty[$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b) Dresser le tableau de variations de la fonction g^{-1}.

For more visit: L9ray.com

c) Calculer $g(9)$ puis déterminer $\left(g^{-1}\right)'(9)$.

d) Montrer que pour tout $x \in J$: $g^{-1}(x) = \left(\sqrt{1+\sqrt{x}}+1\right)^2$.

8) Tracer la courbe $\mathscr{C}_{g^{-1}}$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

SOLUTION

1) Calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$:

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x}-2\right)^2 = +\infty$ car : $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x}-2\right)^2 = +\infty$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x}-2\right)^2 = +\infty$.

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$, alors la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique dirigée vers l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

2) Dérivabilité à droite de la fonction f en 0 :

On a : $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x\left(\sqrt{x}-2\right)^2}{x} = \lim\limits_{x\to0^+} \left(\sqrt{x}-2\right)^2 = 4$.

Donc la fonction f est dérivable à droite en 0 et de plus : $f'_d(0) = 4$.

Interprétation graphique :

La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une demi-tangente au point $O(0;0)$ de coefficient directeur 4.

3) a) La fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on a pour tout $x \in]0;+\infty[$:

$$f'(x) = \left(x\left(\sqrt{x}-2\right)^2\right)' = (x)'\left(\sqrt{x}-2\right)^2 + x\left(\left(\sqrt{x}-2\right)^2\right)' = \left(\sqrt{x}-2\right)^2 + 2x\left(\sqrt{x}-2\right)'\left(\sqrt{x}-2\right)$$

Ce qui donne :

$$f'(x) = \left(\sqrt{x}-2\right)^2 + 2x\left(\sqrt{x}-2\right)\frac{1}{2\sqrt{x}} = \left(\sqrt{x}-2\right)^2 + \sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right) = \left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-2+\sqrt{x}\right)$$

Par suite : $\left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*\right)\ f'(x) = 2\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)$

b) Tableau de variations de la fonction f :

On a : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}-2\right) = 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-1 = 0 \text{ ou } \sqrt{x}-2 = 0\right) \Leftrightarrow (x = 1 \text{ ou } x = 4)$

Donc le tableau de signe de $f'(x)$ sur $]0;+\infty[$ est :

For more visit: L9ray.com

x	0		1		4		$+\infty$
$\sqrt{x}-1$	$-$	$\|$	0	$+$		$+$	
$\sqrt{x}-2$	$-$			$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$+$	$\|$	0	$-$	0	$+$	

Le tableau de variations de la fonction f :

x	0		1		4		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$\|$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	1	↘	0	↗	$+\infty$

4) Étude de la concavité de la courbe $\mathscr{C}_f$:

La fonction f' est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et on a pour tout $x \in]0;+\infty[$:

$$f''(x)=2\left[\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)\right]'=2\left[\left(\sqrt{x}-1\right)'\left(\sqrt{x}-2\right)+\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)'\right]=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$$

Par conséquent : $\left(\forall x \in]0;+\infty[\right)\ f''(x)=\dfrac{2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}}$.

Le signe de $f''(x)$ est donc celui de $2\sqrt{x}-3$ car $\sqrt{x}>0$.

On a pour tout $x \in]0;+\infty[$: $f''(x)=0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x}-3=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}=\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow x=\dfrac{9}{4}$.

Tableau de concavité :

x	0		$\frac{9}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	∩	point d'inflexion	∪	

Ainsi, la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un unique point d'inflexion qui est le point $I\left(\dfrac{9}{4};f\left(\dfrac{9}{4}\right)\right)$.

On a : $f\left(\dfrac{9}{4}\right)=\dfrac{9}{16}$. Par suite, $I\left(\dfrac{9}{4};\dfrac{9}{16}\right)$ est un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.

For more visit: L9ray.com



- Pour étudier le sens de variation d'une fonction f dérivable sur son ensemble de définition, on étudie le signe de $f'(x)$ sur cet ensemble. En pratique, on étudie le sens de variation d'une fonction dérivable sur un ensemble en prenant en considération les recommandations suivantes :
  - Avant de dériver une fonction, on justifie (même brièvement) sa dérivabilité.
  - On ne parle de monotonie que sur un intervalle, pas sur une réunion d'intervalles.
  - Pour étudier le signe de $f'(x)$, il peut être utile d'étudier une fonction auxiliaire.
  - Pour étudier les extremums locaux d'une fonction f dérivable sur un intervalle ouvert $]a;b[$, il suffit de calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]a;b[$ puis utiliser le résultat suivant :

    La fonction f admet alors un extremum local en x_0 si et seulement si sa dérivée f' s'annule en x_0 et change de signe de part et d'autre en x_0.
- Si une fonction est à dérivée strictement positive, la fonction est strictement croissante, mais l'inverse n'est pas vrai. Cependant, on dispose du résultat suivant : Si la dérivée est positive et ne s'annule qu'en un nombre fini de points sur un intervalle, alors la fonction est strictement croissante.
- Pour étudier la convexité d'une fonction f donnée sur un intervalle donné I :
  - Si l'énoncé l'affirme ou si la fonction permet de le montrer, on peut écrire que f est deux fois dérivable sur I et on étudie alors le signe de la dérivée seconde.
  - Si la fonction n'a aucune raison d'être dérivable plus d'une fois sur I, on peut étudier alors le sens de variation de la dérivée première.

5) Résolution de l'équation $f(x)=x$:

Soit $x \in \mathbb{R}^+$. On a :

$$f(x)=x \Leftrightarrow x\left(\sqrt{x}-2\right)^2=x \Leftrightarrow x\left(\sqrt{x}-2\right)^2-x=0 \Leftrightarrow x\left[\left(\sqrt{x}-2\right)^2-1\right]=0$$

Par conséquent :

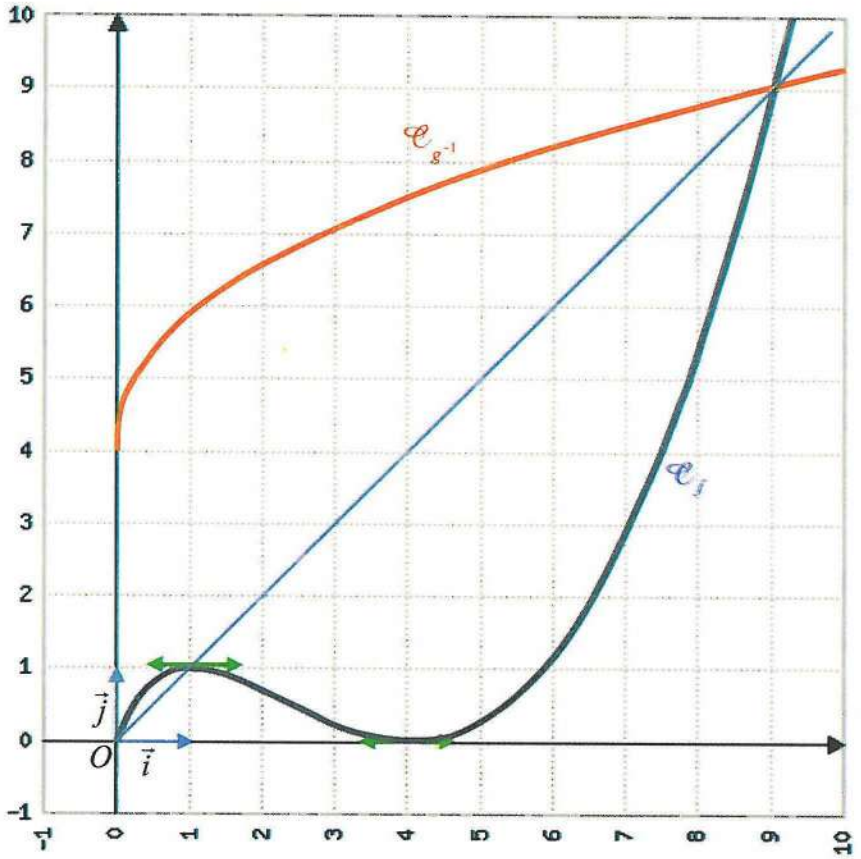
$$f(x)=x \Leftrightarrow \left(x=0 \text{ ou } \sqrt{x}-2=1 \text{ ou } \sqrt{x}-2=-1\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(x=0 \text{ ou } \sqrt{x}=3 \text{ ou } \sqrt{x}=1\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(x=0 \text{ ou } x=9 \text{ ou } x=1\right)$$

Ainsi, l'ensemble solution de l'équation $f(x)=x$ est : $S=\{0;1;9\}$.

Interprétation graphique : la courbe $\mathscr{C}_f$ coupe la droite (Δ) d'équation $y=x$ (première bissectrice) en trois points dont les couples de coordonnées sont : $(0;0)$ et $(1;1)$ et $(9;9)$.

For more visit: L9ray.com

6) Construction de la courbe $\mathscr{C}_f$:



7) Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $I=[4;+\infty[$.

a) La fonction g est continue sur l'intervalle I (car elle est dérivable sur cet intervalle) et strictement croissante sur I. Donc g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle J telle que :

$$J=g\left([4;+\infty[\right)=\left[g(4);\lim_{x\to+\infty}g(x)\right[=[0;+\infty[$$

b) On sait que g et g^{-1} ont le même sens de monotonie respectivement sur les intervalles I et J.

Comme g est strictement croissante sur I, alors g^{-1} est strictement croissante sur J.

Tableau de variations de la fonction g :

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g^{-1}(x)$	4 ↗ $+\infty$

c) On a : $g(9)=9$ et $g'(9)=2\left(\sqrt{9}-1\right)\left(\sqrt{9}-2\right)=4$.

Puisque $g'(9)\neq 0$, alors g^{-1} est dérivable en 9 et on a : $\left(g^{-1}\right)'(9)=\dfrac{1}{g'\left(g^{-1}(9)\right)}=\dfrac{1}{g'(9)}=\dfrac{1}{4}$.

d) Montrons que pour tout $x\in J$: $g^{-1}(x)=\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}+1\right)^2$.

For more visit: L9ray.com

L9RAY

Soit $x \in J$ et $y \in I$. On a :

$$y = g^{-1}(x) \Leftrightarrow x = g(y) \Leftrightarrow x = y\left(\sqrt{y}-2\right)^2 = x \Leftrightarrow \left(\sqrt{y}\right)^2\left(\sqrt{y}-2\right)^2 = x$$

Donc : $y = g^{-1}(x) \Leftrightarrow \sqrt{y}\left|\sqrt{y}-2\right| = \sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{y}\left(\sqrt{y}-2\right) = \sqrt{x}$ (car $y \geq 4$ et $\sqrt{y} \geq 2$).

Par conséquent :

$$y = g^{-1}(x) \Leftrightarrow \left(\sqrt{y}\right)^2 - 2\sqrt{y} = \sqrt{x} \Leftrightarrow \left(\sqrt{y}\right)^2 - 2\sqrt{y} + 1 = \sqrt{x} + 1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{y}-1\right)^2 = \sqrt{x}+1$$

Donc : $y = g^{-1}(x) \Leftrightarrow \left|\sqrt{y}-1\right| = \sqrt{\sqrt{x}+1} \Leftrightarrow \sqrt{y}-1 = \sqrt{\sqrt{x}+1} \Leftrightarrow \sqrt{y} = \sqrt{\sqrt{x}+1}+1$

Par suite : $y = \left(\sqrt{1+\sqrt{x}}+1\right)^2$.

Conclusion : $(\forall x \in J)\ \ g^{-1}(x) = \left(\sqrt{1+\sqrt{x}}+1\right)^2$

8) Construction de la courbe $\mathscr{C}_{g^{-1}}$ dans le repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$:

Les courbes $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_{g^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ (première bissectrice).



- On suppose maintenant que la fonction f est dérivable et strictement monotone sur un intervalle I. Soit $x_0 \in I$ et $y_0 = f(x_0)$, c'est-à-dire $x_0 = f^{-1}(y_0)$.
  - Si $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en y_0 et de plus :
$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)}$$
  - Si $f'(x_0) = 0$, alors f^{-1} n'est pas dérivable en y_0 et la courbe représentative de f^{-1} admet au point d'abscisse y_0 une tangente parallèle à l'axe des ordonnées.
- Il est parfois intéressant d'étudier la parité ou la périodicité d'une fonction, pour éviter de l'étudier sur tout son ensemble de définition tout entier, mais sur un sous-ensemble dit domaine d'étude.
  Les variations sur le domaine de définition se retrouvent à partir de celles du domaine d'étude par symétrie (centrale ou axiale) pour la parité, par translation pour la périodicité. On peut aussi utiliser simultanément ces deux propriétés.
- En ce qui concerne l'intersection avec les axes, il faut connaître les phrases de rédaction qui guident le raisonnement.
  Faire attention à ce que l'on écrit, chercher les abscisses n'est pas chercher les coordonnées ; il ne faut pas confondre ces deux notions.
- Le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$ est le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec la droite (Δ_m) d'équation $y = m$.
- Si f est croissante sur un intervalle I, alors l'implication « $f(a) \leq f(b) \Rightarrow a \leq b$ » n'est pas toujours vraie (par exemple : f constante sur I). La condition « f strictement croissante » est donc nécessaire.

For more visit: L9ray.com

D ÉTUDE D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE (2)

On considère la fonction numérique f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = -\dfrac{x^3}{x^2+1} & \text{si } x \le 0 \\ f(x) = x + \sqrt{x^2+2x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Montrer que l'ensemble de définition de la fonction f est : $D_f = \mathbb{R}$.

2) Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

3) Étudier la dérivabilité de la fonction f à gauche et à droite en 0 puis interpréter graphiquement les résultats obtenus.

4) a) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x+1$ est une asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ puis déterminer la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à (D) sur $\mathbb{R}^+$

c) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

5) a) Montrer que :

$$\begin{cases} f'(x) = -\dfrac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2} & \text{si } x < 0 \\ f'(x) = 1 + \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

b) Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f.

6) Donner l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -1.

7) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

8) Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $I =]-\infty;0]$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b) Montrer que la fonction g^{-1} est dérivable en $\dfrac{1}{2}$ puis déterminer $(g^{-1})'\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

SOLUTION

1) On a : $x \in D_f \Leftrightarrow \left[\left(x \le 0 \text{ et } x^2+1 \ne 0\right) \text{ ou } \left(x > 0 \text{ et } x^2+2x \ge 0\right)\right]$

$\Leftrightarrow (x \le 0 \text{ ou } x > 0)$

$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

Ainsi : $D_f = \mathbb{R}$.

For more visit: L9ray.com

2) Montrons que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$:

- La fonction $x \mapsto -\dfrac{x^3}{x^2+1}$ est une fonction rationnelle continue sur $\mathbb{R}$; donc la fonction f est continue sur l'intervalle $]-\infty;0[$.
- La fonction $x \mapsto x^2+2x$ est une fonction polynôme continue et positive sur $]0;+\infty[$.

Il s'ensuit donc que la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+2x}$ est continue sur $]0;+\infty[$.

La fonction $x \mapsto x$ est une fonction polynôme continue sur $]0;+\infty[$.

Ainsi, la fonction f est continue sur $]0;+\infty[$.

- Continuité de f en 0 :

On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(x+\sqrt{x^2+2x}\right) = 0 = f(0)$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} -\dfrac{x^3}{x^2+1} = 0 = f(0)$.

Puisque : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$, alors la fonction f est continue en 0.

3) a) Dérivabilité à gauche en 0 :

On a : $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} -\dfrac{x^2}{x^2+1} = 0$.

Par conséquent, la fonction f est dérivable à gauche en 0 et de plus : $f'_g(0) = 0$.

Interprétation graphique :

La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une demi-tangente horizontale à gauche au point $O(0;0)$.

Dérivabilité à droite en 0 :

On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x+\sqrt{x^2+2x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\sqrt{\dfrac{x^2+2x}{x^2}}\right) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\sqrt{\dfrac{x+2}{x}}\right) = +\infty$.

Par conséquent, la fonction f n'est dérivable à droite en 0.

Interprétation graphique :

La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une demi-tangente verticale à droite au point $O(0;0)$ dirigée vers le haut.

4) a) Calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{x^2+2x}\right) = +\infty$ car : $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x} = +\infty$.

b) On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2x+1)\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-(x+1)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x^2+2x)-(x+1)^2}{\sqrt{x^2+2x}+(x+1)}$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2x+1)\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-1}{\sqrt{x^2+2x}+(x+1)} = 0$ car : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x}+(x+1) = +\infty$.

Par suite, la droite $(D) : y = 2x+1$ est une asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}^+$: $f(x)-(2x+1) = \dfrac{-1}{\sqrt{x^2+2x}+(x+1)}$.

For more visit: L9ray.com

Comme $\dfrac{-1}{\sqrt{x^2+2x}+(x+1)}<0$, alors $f(x)-(2x+1)<0$ pour tout $x\in\mathbb{R}^+$.

Par suite, la courbe $\mathscr{C}_f$ est en dessous de la droite (D) sur $\mathbb{R}^+$.

c) Calcul de $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+x\right)$:

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}-\dfrac{x^3}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\dfrac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}-x=+\infty$

et : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{x^3}{x^2+1}+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

Interprétation graphique :

la droite $(\Delta): y=-x$ est une asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $-\infty$.

5) a) On a pour tout $x\in\left]-\infty;0\right[$:

$$f'(x)=\left(-\frac{x^3}{x^2+1}\right)'=-\frac{\left(x^3\right)'\left(x^2+1\right)-x^3\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2}=-\frac{3x^2\left(x^2+1\right)-2x^4}{\left(x^2+1\right)^2}=-\frac{x^4+3x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

On a pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$:

$$f'(x)=\left(x+\sqrt{x^2+2x}\right)'=(x)'+\left(\sqrt{x^2+2x}\right)'=1+\frac{\left(x^2+2x\right)'}{2\sqrt{x^2+2x}}=1+\frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x}}$$

Par suite :
$$\begin{cases} f'(x)=-\dfrac{x^4+3x^2}{\left(x^2+1\right)^2} & \text{si } x<0 \\ f'(x)=1+\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}} & \text{si } x>0 \end{cases}$$

b) On a pour tout $x<0$: $x^4+3x^2>0$ et $\left(x^2+1\right)^2>0$. Donc : $(\forall x<0)\ f'(x)<0$.

Ainsi, la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty;0\right[$.

On a pour tout $x>0$: $x+1>0$ et $\sqrt{x^2+2x}>0$. Donc : $(\forall x>0)\ f'(x)>0$.

Ainsi, la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left]0;+\infty\right[$.

Le tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

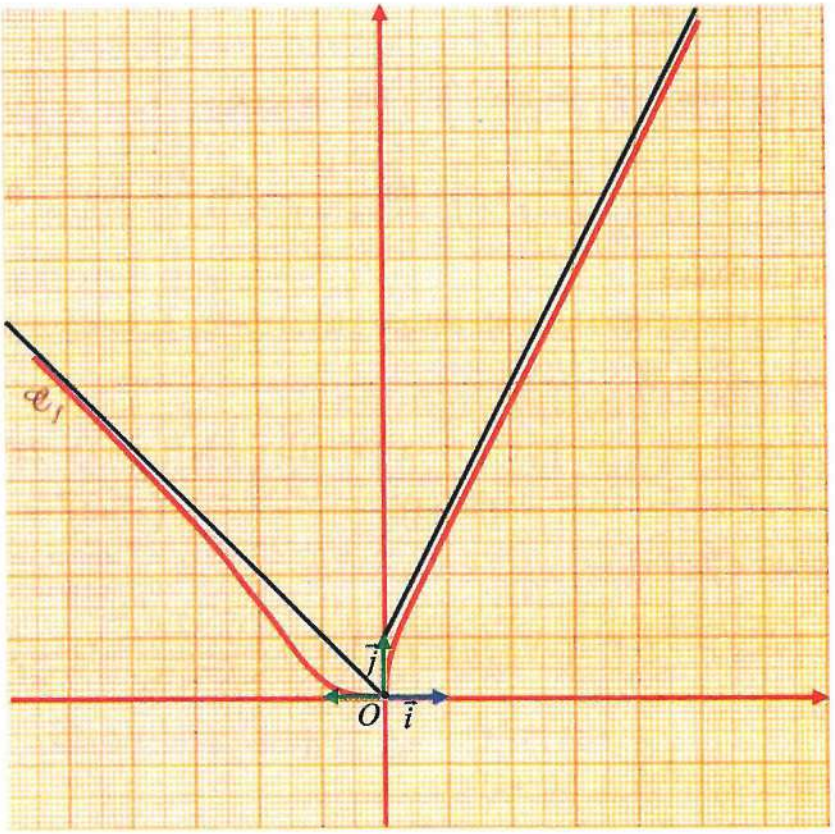
6) L'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -1 est donnée par :

$$(T): y=f'(-1)(x+1)+f(-1)$$

For more visit: L9ray.com

On a : $f'(-1)=-1$ et $f(-1)=\frac{1}{2}$. Par suite : $(T): y=-x-\frac{1}{2}$.

7) Construction de la courbe $\mathscr{C}_f$:



8) Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $I=]-\infty;0]$.

a) La fonction g est continue sur l'intervalle I (car elle est dérivable sur cet intervalle) et strictement décroissante sur I. Donc g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle J telle que :

$$J=g(]-\infty;0])=\left[g(0);\lim_{x\to-\infty}g(x)\right[=[0;+\infty[$$

b) On a $g(-1)=\frac{1}{2}$ et $g'(-1)=-1\neq 0$. Donc la fonction g^{-1} est dérivable en $\frac{1}{2}$ et de plus :

$$\left(g^{-1}\right)'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{g'\left(g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)}=\frac{1}{g'(-1)}=-1$$

- Lors de l'étude d'une fonction numérique d'une variable réelle, il est souvent demandé d'étudier les branches infinies de la courbe de cette fonction.
Il faut connaître les branches infinies citées dans le cours. En particulier :
si $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$ alors la droite d'équation $y=ax+b$ est une asymptote oblique de la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.



For more visit: L9ray.com

E FONCTIONS PRIMITIVES

1) Dans chacun des cas suivants, déterminer les fonctions primitives de la fonction f sur l'intervalle I :

a) $f(x)=(2x-3)(x^2-3x+7)^4$ et $I=\mathbb{R}$; b) $f(x)=(3x^2+2)\sqrt{x^3+2x+5}$ et $I=\mathbb{R}$

c) $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{3-\cos x}}$ et $I=\mathbb{R}$; d) $f(x)=\sin\left(3x-\dfrac{5\pi}{6}\right)+\cos(4x)-1$ et $I=\mathbb{R}$

e) $f(x)=\dfrac{2x-3}{(x^2-3x+5)^2}$ et $I=\mathbb{R}$; f) $f(x)=\tan^3 x+\tan x$ et $I=\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$

g) $f(x)=\dfrac{1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x}}$ et $I=\mathbb{R}_+^*$; h) $f(x)=x^5-4x+\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{4}{\sqrt{x}}$ et $I=\mathbb{R}_+^*$

i) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}+\sqrt[3]{x-1}$ et $I=]1;+\infty[$; j) $f(x)=3x\sqrt[5]{x}-\dfrac{x}{\sqrt[6]{x^2+1}}$ et $I=\mathbb{R}^+$

2) On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $I=]1;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{x^5-2x^3+5x}{(x^2-1)^2}$.

a) Justifier que la fonction f admet une primitive définie sur l'intervalle I.

b) Vérifier que pour tout $x\in I$: $f(x)=x+\dfrac{1}{(x-1)^2}-\dfrac{1}{(x+1)^2}$.

c) En déduire les fonctions primitives de la fonction f sur l'intervalle I.

d) Déterminer la primitive F de la fonction f s'annulant en 2.

SOLUTION

1) Détermination des fonctions primitives de la fonction f :

a) On a pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f(x)=(2x-3)(x^2-3x+7)^4=(x^2-3x+7)'(x^2-3x+7)^4$.

Donc les fonctions primitives de f sont les fonctions F définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x)=\frac{1}{5}(x^2-3x+7)^5+C \quad \text{où} \quad C\in\mathbb{R}$$

b) On a pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f(x)=(3x^2+2)\sqrt{x^3+2x+5}=(x^3+2x+5)'(x^3+2x+5)^{\frac{1}{2}}$.

Donc les fonctions primitives de f sont les fonctions F définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x)=\frac{2}{3}(x^3+2x+5)^{\frac{3}{2}}+C \quad \text{où} \quad C\in\mathbb{R}$$

c) On a pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{3-\cos x}}=\dfrac{(3-\cos x)'}{\sqrt{3-\cos x}}=2\times\dfrac{(3-\cos x)'}{2\sqrt{3-\cos x}}$.

For more visit: L9ray.com

L9RAY

Donc les fonctions primitives de f sont les fonctions F définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x)=2\sqrt{3-\cos x}+C \quad \text{où} \quad C\in\mathbb{R}$$

d) On a pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f(x)=\sin\left(3x-\frac{5\pi}{6}\right)+\cos(4x)-1$.

Donc les fonctions primitives de f sont les fonctions F définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x)=-\frac{1}{3}\cos\left(3x-\frac{5\pi}{6}\right)+\frac{1}{4}\sin(4x)-x+C \quad \text{où} \quad C\in\mathbb{R}$$

e) On a pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f(x)=\dfrac{2x-3}{\left(x^2-3x+5\right)^2}=\dfrac{\left(x^2-3x+5\right)'}{\left(x^2-3x+5\right)^2}$.

Donc les fonctions primitives de f sont les fonctions F définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x)=-\frac{1}{x^2-3x+5}+C \quad \text{où} \quad C\in\mathbb{R}$$

f) On a pour tout $x\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$: $f(x)=\tan^3 x+\tan x=\tan x.\left(\tan^2 x+1\right)=\tan x.(\tan x)'$.

Donc les fonctions primitives de f sont les fonctions F définies sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ par :

$$F(x)=\frac{1}{2}\tan^2 x+C \quad \text{où} \quad C\in\mathbb{R}$$

g) On a pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$: $f(x)=\dfrac{1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x}}=\dfrac{1}{\sqrt[6]{x}}+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}}+\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x}}=x^{-\frac{1}{6}}+x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}}+x^{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}=x^{-\frac{1}{6}}+x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{6}}$.

Donc les fonctions primitives de f sont les fonctions F définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$F(x)=\frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}}+\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}}+C \quad \text{où} \quad C\in\mathbb{R}$$

h) On a pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$: $f(x)=x^5-4x+\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{4}{\sqrt{x}}=x^5-4x+2x^{-3}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{8}{2\sqrt{x}}$

Donc les fonctions primitives de f sont les fonctions F définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$F(x)=\frac{x^6}{6}-2x^2-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}-8\sqrt{x}+C \quad \text{où} \quad C\in\mathbb{R}$$

i) On a pour tout $x\in\left]1;+\infty\right[$: $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}+\sqrt[3]{x-1}=\dfrac{(2x+1)'}{2\sqrt{2x+1}}+(x-1)^{\frac{1}{3}}$

Donc les fonctions primitives de f sont les fonctions F définies sur $\left]1;+\infty\right[$ par :

$$F(x)=\sqrt{2x+1}+\frac{3}{4}(x-1)^{\frac{4}{3}}+C \quad \text{où} \quad C\in\mathbb{R}$$

j) On a pour tout $x\in\mathbb{R}^+$: $f(x)=3x\sqrt[5]{x}-\dfrac{x}{\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{6}}}=3x.x^{\frac{1}{5}}-x\left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{6}}=3.x^{\frac{6}{5}}-\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)'\left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{6}}$.

For more visit: L9ray.com

Donc les fonctions primitives de f sont les fonctions F définies sur $]1;+\infty[$ par :

$$F(x)=\frac{15}{11}x^{\frac{11}{5}}-\frac{3}{5}\left(x^2+1\right)^{\frac{5}{6}}+C \quad \text{où} \quad C\in\mathbb{R}$$

2) On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $I=]1;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{x^5-2x^3+5x}{\left(x^2-1\right)^2}$.

a) La fonction f est continue sur l'intervalle I car c'est la restriction d'une fonction rationnelle sur I.

Donc, elle admet une primitive définie sur l'intervalle I.

b) On a pour tout $x\in I$:

$$\begin{aligned}x+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{(x+1)^2}&=\frac{x(x-1)^2(x+1)^2+(x+1)^2-(x-1)^2}{\left(x^2-1\right)^2}\\&=\frac{x\left(x^2-1\right)^2+(x+1)^2-(x-1)^2}{\left(x^2-1\right)^2}\\&=\frac{x\left(x^4-2x^2+1\right)+4x}{\left(x^2-1\right)^2}\\&=\frac{x^5-2x^3+x+4x}{\left(x^2-1\right)^2}\\&=\frac{x^5-2x^3+5x}{\left(x^2-1\right)^2}\\&=f(x)\end{aligned}$$

Par suite : $\left(\forall x\in]1;+\infty[\right)\ f(x)=x+\dfrac{1}{(x-1)^2}-\dfrac{1}{(x+1)^2}$.

c) Les fonctions primitives F de la fonction f sur l'intervalle I sont définies par :

$$F(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}+C \quad \text{où} \quad C\in\mathbb{R}$$

d) Déterminons la primitive F de la fonction f s'annulant en 2 :

Une telle primitive est définie sur $]1;+\infty[$ par : $F(x)=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}+C$ où $C\in\mathbb{R}$.

La condition $F(2)=0$ donne : $\dfrac{2^2}{2}-\dfrac{1}{2-1}+\dfrac{1}{2+1}+C=0$, c'est-à-dire : $C=-\dfrac{4}{3}$.

Par suite : $\left(\forall x\in]1;+\infty[\right)\ F(x)=F(x)=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{4}{3}$.

For more visit: L9ray.com

L9RAY

EXERCICES D'APPLICATION

DÉRIVABILITÉ D'UNE FONCTION EN UN POINT

EXERCICE 01

En utilisant la définition, montrer que la fonction f est dérivable en x_0 en déterminant le nombre dérivé $f'(x_0)$ dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$; $x_0=0$

2) $f(x)=2x-\sqrt[3]{x}$; $x_0=1$

3) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2}$; $x_0=-2$

4) $f(x)=x|x|$; $x_0=0$

6) $f(x)=\cos x-\sin^2 x+\tan(4x)$; $x_0=0$

7) $f(x)=\sqrt[3]{x^3-7}$; $x_0=2$

8) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} & \text{si } x\neq 0 \\ f(0)=\dfrac{1}{2} \end{cases}$; $x_0=0$

EXERCICE 02

Étudier la dérivabilité à droite en x_0 de la fonction f puis interpréter le résultat obtenu :

1) $f(x)=\sqrt{x-2}$; $x_0=2$

2) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$; $x_0=-1$

3) $f(x)=\sqrt{x^2+x-2}$; $x_0=1$

4) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x}+5}$; $x_0=0$

5) $f(x)=x-\sqrt{x^2-3x}$; $x_0=3$

6) $f(x)=|x^2-1|$; $x_0=1$

7) $f(x)=\sqrt{|x^2-4|}$; $x_0=-2$

EXERCICE 03

Étudier la dérivabilité à gauche en x_0 de la fonction f puis interpréter le résultat obtenu :

1) $f(x)=x+\sqrt[3]{1-x}$; $x_0=1$

2) $f(x)=\sqrt{x^2-5x+4}$; $x_0=1$

3) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}$; $x_0=0$

4) $f(x)=\sqrt{x^2+x-2}$; $x_0=-2$

5) $f(x)=\sqrt{8-x^3}$; $x_0=2$

EXERCICE 04

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

1) a) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}^*)\ |f(x)|\leq x^2$.

b) En déduire que f est continue en 0.

2) Étudier la dérivabilité de la fonction f en 0.

EXERCICE 05

Soit f la fonction numérique définie sur $[-2;2]$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4-x^2}}{x} & \text{si } x\neq 0 \\ f(0)=-\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

1) Montrer que la fonction f est continue en 0.

2) a) Montrer que la fonction f est dérivable en 0.

b) Écrire l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f au point d'abscisse 0.

3) Étudier la dérivabilité à gauche de la fonction f au point $x_0=2$ puis interpréter le résultat obtenu.

For more visit: L9ray.com

EXERCICE 06

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x}$$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.

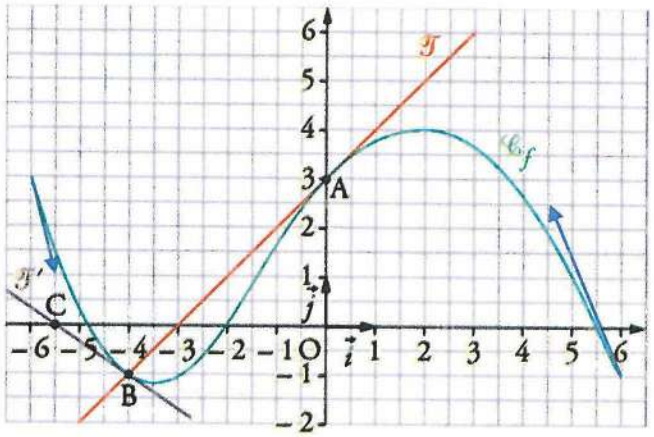
2) Étudier la continuité de la fonction f sur D_f.

3) Étudier la dérivabilité à gauche de la fonction f au point $x_0 = -4$ puis interpréter le résultat obtenu.

4) Étudier la dérivabilité à droite de la fonction f en 0 puis interpréter le résultat obtenu.

EXERCICE 07

La figure en-dessous représente la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction numérique f.



À partir de cette courbe :

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.

2) a) Préciser les valeurs de :

$$f'(-4) \ ; \ f'(0) \ ; \ f'_d(-6) \ ; \ f'_g(6)$$

b) Déterminer une équation cartésienne de chacun des tangentes $\mathscr{T}$ et $\mathscr{T}'$.

3) Résoudre dans D_f l'équation : $f'(x) = 0$.

EXERCICE 08

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{|x-2| - 2}$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.

2) Étudier la dérivabilité à droite et à gauche de la fonction f au point $x_0 = 2$ puis interpréter géométriquement les résultats obtenus.

EXERCICE 09

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = ax^2 + bx & \text{si } x \le 1 \\ f(x) = x^3 + 3x^2 - 5 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{où } (a;b) \in \mathbb{R}^2.$$

Déterminer les valeurs de a et b sachant que la fonction numérique f est dérivable au point $x_0 = 1$.

EXERCICE 10

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2} & \text{si } x \ge 0 \\ f(x) = 4\sqrt{1-x} + x - 4 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1) Montrer que la fonction f est continue en 0.

2) Étudier la dérivabilité à gauche de la fonction f au point $x_0 = 0$ puis interpréter le résultat obtenu.

EXERCICE 11

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R} - \{4\}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x - \sqrt[3]{1-x} & \text{si } x < 1 \\ f(x) = \dfrac{1}{2 - \sqrt{x}} & \text{si } x \ge 1 \text{ et } x \ne 4 \end{cases}$$

1) Étudier la dérivabilité à droite et à gauche de la fonction f au point $x_0 = 1$.

2) Interpréter géométriquement les résultats obtenus.

EXERCICE 12

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\begin{cases} f(x) = (1+x)\sqrt{1-x^2} & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1) Étudier la dérivabilité à droite et à gauche de la fonction f au point $x_0 = 1$.

2) Interpréter géométriquement les résultats obtenus.

For more visit: L9ray.com

L9RAY

2 EXERCICES ET PROBLÈMES

DÉRIVATION ET APPROXIMATION

EXERCICE 13

Soit f la fonction numérique définie sur $[-1;+\infty[$ par : $f(x)=\sqrt[3]{1+x}$

1) Justifier que la fonction f est dérivable en 0.

2) En déduire l'approximation affine de la fonction f au voisinage de 0.

3) Déterminer des valeur approchées des nombres : $\sqrt[3]{0,991}$ et $\sqrt[3]{1,007}$

EXERCICE 14

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

1) Étudier la dérivabilité de la fonction f en 1.

2) En déduire l'approximation affine de la fonction f au voisinage de 1.

3) En déduire une valeur approchée de : $\dfrac{1}{\sqrt{1,00032}}$

EXERCICE 15

1) Étudier la dérivabilité en 0 de la fonction numérique $f : x \mapsto (x+1)^3$

2) Déterminer l'approximation affine de la fonction f au voisinage de 0.

En déduire une valeur approchée de : $(1,008)^3$.

3) On considère la fonction $g : x \mapsto -x^2+3x+1$.

Montrer que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont une tangente commune en un point dont on déterminera les coordonnées.

4) Donner l'approximation affine au voisinage de 0 de chacune des expressions $\dfrac{1}{(x+1)^2}$ et $\sin x$ puis en déduire des valeurs approchées aux nombres : $\dfrac{1}{(1,02)^2}$ et $\sin(0,1^\circ)$

CALCUL DE LA FONCTION DÉRIVÉE

EXERCICE 16

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$f(x)=4x^5+8x^2-13x+7$; $g(x)=x^4+\dfrac{1}{x^4}$

$h(x)=-2x^3+10\sqrt{x}+\dfrac{5}{x}$; $k(x)=\dfrac{x+1}{x^2+x+1}$

$u(x)=\sqrt{x}(2x^2+7x+4)$; $v(x)=(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}$

EXERCICE 17

Calculer $f'(x)$ dans chacun des cas suivants :

$f(x)=\sqrt{x^2-3x+5}$; $f(x)=\sqrt[3]{x^2-2x}+\sqrt[4]{4x+1}$

$f(x)=\sqrt{\dfrac{x^3}{3x+2}}$; $f(x)=\dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-4x+5}}$

$f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x^2+3x-1}{2-x}}$; $f(x)=\left(\sqrt[3]{x}-\dfrac{4}{x}\right)^3$

$f(x)=3x^{\frac{2}{3}}-6x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}$; $f(x)=(1-3x^2)^{\frac{2}{3}}$

$f(x)=\sqrt{5-x^2}.\sqrt[4]{x^3+1}$; $f(x)=\sqrt[3]{(1-3x^2)^2}$

$f(x)=\dfrac{5}{\sqrt{x^4+1}}$; $f(x)=(x^2+5x+4\cos x)^7$

$f(x)=\sqrt{\dfrac{2x^3+x+2}{x^2+x}}$; $f(x)=(x^4+x+2)\sin(8x)$

EXERCICE 18

Calculer $f'(x)$ dans chacun des cas suivants :

$f(x)=\cos(x^2+x+1)$; $f(x)=\sin\left(\sqrt{x^2+3}\right)$

$f(x)=\dfrac{3}{2}\cos(2x)-\dfrac{4}{5}\sin(5x)+\tan(2x)$

$f(x)=\dfrac{5}{3+\sin x-\cos^2 x}$; $f(x)=\sin\left(\dfrac{x-1}{2x+3}\right)$

$f(x)=\tan\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$; $f(x)=\dfrac{1+2\cos x}{2-\sin x}+3\tan^2 x$

For more visit: L9ray.com

EXERCICE 19

Calculer $f'(x)$ dans chacun des cas suivants :

$f(x)=(x^2+3x)\sqrt[3]{2x}$; $f(x)=\left(\sqrt[3]{x^2}-5\right)^7$

$f(x)=\sqrt[3]{x^2+3x-4}$; $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2+x}{x-1}}$

$f(x)=-x+\sqrt[3]{2x+1}$; $f(x)=\sqrt[3]{(x-2)^4}$

$f(x)=\dfrac{4\sqrt[3]{x}}{x\sqrt{x}+1}$; $f(x)=x.\sqrt[3]{\dfrac{x+2}{x-2}}$

$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2-2x}}$; $f(x)=\sqrt[4]{\dfrac{x}{x^2+3}}$

$f(x)=\cos\left(3x+4\sqrt{x}\right)$; $f(x)=\dfrac{3\sin x-1}{\sin x-1}$

$f(x)=\left(\dfrac{x+1}{x^2+3x+7}\right)^3$; $f(x)=\sqrt{x^3+x^2}$

$f(x)=\cos\left(\dfrac{2x+1}{3x-2}\right)$; $f(x)=\sin\left(\dfrac{1+x}{1+x^2}\right)$

$f(x)=\cos(3x+1).\sin(2x)$; $f(x)=x^2\tan\left(\dfrac{1}{x}\right)$

DÉRIVATION ET CALCUL DES LIMITES

EXERCICE 20

1) Montrer que la fonction $f:x\mapsto(2x-1)^{15}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculer la limite :

$$\lim_{x\to1}\frac{(2x-1)^{15}-1}{x-1}$$

2) On considère la fonction $g:x\mapsto 3\cos^2 x-\sin^2 x$.

Calculer $g'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ puis calculer la limite : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{3\cos^2 x-\sin^2 x}{3x-\pi}$

3) Montrer que la fonction $h:x\mapsto\sqrt[3]{5x-2}-\sqrt{x+2}$ est dérivable sur $[1;+\infty[$ puis calculer la limite :

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt[3]{5x-2}-\sqrt{x+2}}{x-2}$$

EXERCICE 21

En utilisant le nombre dérivé, calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^4-625}{x-5}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{10}-1}{x}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x}$

$\lim\limits_{x\to6}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt[3]{4x+3}}{x-3}$; $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{x+\sin^2 x-\pi}{x-\pi}$

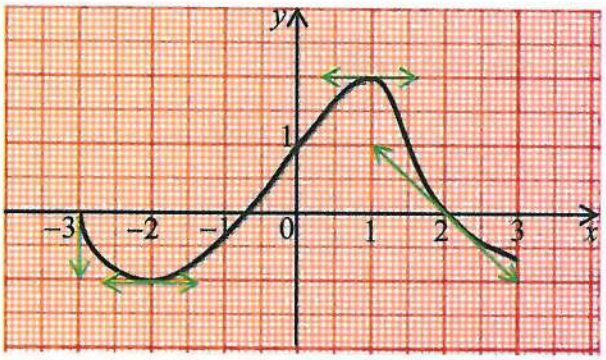
$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^{12}+1}-\cos(x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{\sqrt[3]{7-4\sin x}-\sqrt[3]{5}}{x-\frac{\pi}{6}}$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{4\cos^2 x-1}{3x-\pi}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{\tan x-x}$; $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{4}}\dfrac{2\cos x-\sqrt{2}}{\tan x+1}$

DÉRIVATION ET MONOTONIE

EXERCICE 22

Le dessin suivant présente la courbe d'une fonction f sur l'intervalle $[-3;3]$:



1) Résoudre l'équation $f'(x)=0$.

2) Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)}{x-2}$,

$\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x>-3}}\dfrac{f(x)-f(-3)}{x+3}$

3) a) Résoudre dans $[-3;3]$ l'inéquation : $f'(x)\geq0$

b) Dresser le tableau de variations de f.

4) Donner l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ aux points d'abscisses 1 et 2.

For more visit: L9ray.com

L9RAY

2 EXERCICES ET PROBLÈMES

EXERCICE 23

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{3x+3}{\sqrt{2x-1}}$.

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f puis calculer les limites aux bornes de D_f.

2) Montrer que : $(\forall x\in D_f)\ f'(x)=\dfrac{3(x-2)}{\left(\sqrt{2x-1}\right)^3}$

3) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

EXERCICE 24

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\begin{cases} f(x)=x-3\sqrt[3]{x-1} & \text{si } x\geq 1 \\ f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } 0<x<1 \end{cases}$$

1) Étudier la dérivabilité de la fonction f en 1 puis interpréter les résultats obtenus.

2) a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in\left]0;1\right[$.

b) Montrer que f est dérivable sur $\left]1;+\infty\right[$ et que pour tout $x\in\left]1;+\infty\right[$:

$$f'(x)=\frac{(x-2)\left(\sqrt[3]{x-1}+1\right)}{\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^2\left[\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^2+\sqrt[3]{x-1}+1\right]}$$

3) Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f.

EXERCICE 25

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2-4}\right).$$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.

2) Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

3) Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 2 et à gauche en -2 puis interpréter les résultats obtenus.

4) Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in D_f-\{-2;2\}$.

5) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

EXERCICE 26

On considère la fonction f définie sur $\left[-1;+\infty\right[$ par :

$$f(x)=x-\sqrt[3]{x+1}$$

1) Vérifier que $f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{9}-1\right)=\dfrac{-2\sqrt{3}}{9}-1$ puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) Étudier la dérivabilité à droite de f en -1 puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3) Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in\left]-1;+\infty\right[$ puis dresser le tableau des variations de f.

EXERCICE 27

Pour chacune des fonctions suivantes, calculer $f'(x)$ puis dresser son tableau de variations :

1) $f(x)=x^3+2x-1$; 2) $f(x)=x^4-4x$

3) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{(x+1)^2}$; 4) $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$

5) $f(x)=6x-4x\sqrt[3]{x}+1$; 6) $f(x)=\sqrt[3]{x^2+2x}$

7) $f(x)=(2x-3)\sqrt{x}$; 8) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}-\dfrac{x^2}{3}$

EXERCICE 28

Pour chacune des fonctions suivantes, calculer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations sur I :

1) $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x^2+8}$; $I=\mathbb{R}^+$

2) $f(x)=\sqrt{x^2-x+1}-x$; $I=\mathbb{R}$

3) $f(x)=3\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)+\cos(x)-3x$; $I=\mathbb{R}$

4) $f(x)=2\sin x+\cos(2x)$; $I=\left]-\pi;\pi\right]$

5) $f(x)=\dfrac{\tan x-1}{\tan x+1}$; $I=\left]-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right[$

For more visit: L9ray.com

EXERCICE 29

Soit f la fonction numérique définie sur $I=\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ par : $f(x)=\sin x-\frac{2}{\pi}x$

1) a) Montrer que l'équation $f'(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle I.

b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle I.

c) Montrer que : $(\forall x\in I)\ \frac{2}{\pi}x\le\sin x$.

2) Montrer que : $(\forall x\in I)\ \frac{2}{\pi}x\le\sin x\le x$.

EXERCICE 30

Soit f la fonction numérique définie sur $I=\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x)=2\sin x+\tan x-3x$

1) Montrer que pour tout $x\in I$:

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}\left(2\cos^3 x-3\cos^2 x+1\right)$$

2) Soit la fonction $P: t\mapsto 2t^3-3t^2+1$.

En remarquant que $P(1)=0$, montrer que :

$$(\forall t\in[0;1])\ P(t)\ge 0$$

3) En déduire les variations de la fonction f sur I.

4) Montrer que : $(\forall x\in I)\ 3x\le 2\sin x+\tan x$

EXERCICE 31

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $I=\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ par : $f(x)=\frac{4}{\pi}x-\tan x$

1) a) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout $x\in I$.

b) Étudier les variations de la fonction f'.

2) a) Montrer que l'équation $f'(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle I.

b) Déterminer le signe de $f'(x)$ pour tout $x\in I$.

3) a) En déduire les variations de la fonction f.

b) Montrer que : $(\forall x\in I)\ \tan x\le\frac{4}{\pi}x$

DÉRIVABILITÉ DE LA FONCTION RÉCIPROQUE

EXERCICE 32

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x)=x\sqrt{x^3+1}$$

1) a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}^+$.

b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

2) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

3) a) Montrer que f^{-1} est dérivable sur l'intervalle J.

b) Déterminer $f(2)$ puis calculer $\left(f^{-1}\right)'(6)$.

c) Déterminer $\left(f^{-1}\right)'(0)$.

EXERCICE 33

On considère la fonction g définie sur $[1;+\infty[$ par :

$$g(x)=x-3+\sqrt{x^2-x}$$

1) Étudier la dérivabilité de la fonction g à droite en 1 puis interpréter le résultat géométriquement.

2) Étudier les variations de la fonction g.

3) a) Montrer que g admet une fonction réciproque dont on déterminera le domaine de définition.

b) Montrer que g^{-1} est dérivable en $\left(\sqrt{2}-1\right)$ puis calculer $\left(g^{-1}\right)'\left(\sqrt{2}-1\right)$.

EXERCICE 34

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I=\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ par : $f(x)=\cos(2x)$

1) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

2) Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable en 0 puis calculer $\left(f^{-1}\right)'(0)$.

For more visit: L9ray.com

L9RAY

2 EXERCICES ET PROBLÈMES

EXERCICE 35

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=x^3-3x-3$$

1) Étudier les variations de la fonction f.

2) Soit g la restriction de f sur $[1,+\infty[$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J à déterminer.

b) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α et que $2<\alpha<3$.

c) Montrer que : $\left(g^{-1}\right)'(0)=\dfrac{1}{3\left(\alpha^2-1\right)}$.

EXERCICE 36

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x)=x+2\sqrt{x}-\frac{1}{x}$$

1) Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$ et en déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

3) Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable en 2 puis calculer $\left(f^{-1}\right)'(2)$.

EXERCICE 37

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I=\left[0;\dfrac{\pi}{3}\right]$ par : $f(x)=\sqrt[3]{2\cos x-1}$

1) Étudier la continuité de f sur l'intervalle I.

2) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

3) a) Calculer $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ puis montrer que la fonction f^{-1} est dérivable en $\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}$

b) Calculer $\left(f^{-1}\right)'\left(\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}\right)$.

CONCAVITÉ ET POINTS D'INFLEXION

EXERCICE 38

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=x^3-3x^2+2x-5$$

1) Étudier les variations de la fonction f.

2) Calculer $f''(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

3) Étudier la concavité de la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f et déterminer ses points d'inflexion.

EXERCICE 39

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}-\{1\}$ par :

$$f(x)=(x-1)^2-\frac{1}{x-1}$$

1) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}-\{1\}$:

$$f''(x)=\frac{2(x-2)\left(x^2-x+1\right)}{(x-1)^3}$$

2) Étudier la concavité de la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f et déterminer ses points d'inflexion.

EXERCICE 40

Dans chacun des cas suivants, étudier la concavité de de la courbe $\mathscr{C}_f$ de f en déterminant ses éventuels points d'inflexion :

1) $f(x)=x^3-3x^2+2$; 2) $f(x)=\sqrt[3]{x^2+x}+x$

3) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$; 4) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$

5) $f(x)=x+\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; 6) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-x-2}$

7) $f(x)=x^2+16\sqrt{x-1}$; 8) $f(x)=\sqrt[3]{1+x^3}+2x$

9) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{(x-1)^2}$; 10) $f(x)=(2x-1)^{\frac{2}{5}}$

11) $f(x)=x+1-\dfrac{1}{4}\sqrt{x+4}-\dfrac{1}{\sqrt{x+4}}$.

For more visit: L9ray.com

EXERCICE 41

Dans chacun des cas suivants, étudier la concavité de de la courbe $\mathscr{C}_f$ de f sur l'intervalle $[0;\pi]$ en déterminant ses éventuels points d'inflexion :

1) $f(x)=\cos x-2\sin x+3$.

2) $f(x)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$; 3) $f(x)=\frac{\sin^2 x}{\cos(2x)}$

4) $f(x)=-\cos^2 x-2\sin x$.

5) $f(x)=\cos^2 x+2\cos x-1$.

AXE DE SYMÈTRIE - CENTRE DE SYMÉTRIE

EXERCICE 42

Dans chacun des cas suivants, montrer que la droite (Δ) est un axe de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$ de f :

1) $f(x)=\sqrt[3]{x^2-4x+1}$ et $(\Delta):x=2$

2) $f(x)=\sin^4 x-5\cos^2 x+7$ et $(\Delta):x=\frac{\pi}{2}$

3) $f(x)=\frac{1}{x(x+4)}$ et $(\Delta):x=-2$

4) $f(x)=\frac{2-\sin^4 x}{\cos x+3}$ et $(\Delta):x=0$

EXERCICE 43

Dans chacun des cas suivants, montrer que le point Ω est un centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$ de f :

1) $f(x)=x^3-3x^2+x+1$ et $\Omega(1;0)$

2) $f(x)=\frac{3x^2+8x+4}{x+1}$ et $\Omega(-1;2)$

3) $f(x)=2x+1+\frac{1}{x-2}$ et $\Omega(2;5)$

4) $f(x)=\frac{1+2x}{x^2+x-2}$ et $\Omega\left(-\frac{1}{2};0\right)$

5) $f(x)=\sqrt{3}\cos(2x)+\sin(2x)$ et $\Omega\left(\frac{\pi}{3};0\right)$

EXERCICE 44

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x)=\frac{1}{(x-3)^2(x-5)^2}$$

et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f .

2) Montrer que la droite (Δ) d'équation $x=4$ est un axe de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$.

3) Sachant que f est strictement décroissante sur l'intervalle $]5;+\infty[$, déterminer le sens de variation de f sur l'intervalle $]-\infty;-1[$.

EXERCICE 45

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=3x^5-5x^3-180x+2$$

1) Montrer que le point $\Omega(0;2)$ est un centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f .

2) Sachant que f est strictement croissante sur $[2;+\infty[$, déterminer le sens de variation de f sur $]-\infty;-2]$.

BRANCHES INFINIES D'UNE COURBE

EXERCICE 46

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\frac{\sqrt{4x^2+1}}{x-3}$

Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f admet uniquement des asymptotes parallèles aux axes des de coordonnées.

EXERCICE 47

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\sqrt{x^2+5}+3x$

Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f admet deux asymptotes obliques à déterminer.

For more visit: L9ray.com

L9RAY

2 EXERCICES ET PROBLÈMES

EXERCICE 48

Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=2x-1+\dfrac{4}{x^2}$; 2) $f(x)=\sqrt[3]{x^2+1}+2x$

3) $f(x)=\dfrac{1-2x}{x^2+1}$; 4) $f(x)=\dfrac{2x^2+x+3}{x+1}$

5) $f(x)=\dfrac{2x+5}{x^3-8}$; 6) $f(x)=3x-1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

7) $f(x)=\sqrt[3]{x^3-x}+x$; 8) $f(x)=2x-\sqrt{x^2+1}$

9) $f(x)=\sqrt{x^2+2x}-5x-3$

10) $f(x)=x\sqrt{x}+2$; 11) $f(x)=\sqrt[3]{x^2-4}$

12) $f(x)=x-\sqrt{\dfrac{x+3}{x-2}}$; 13) $f(x)=\dfrac{x^3-x^2+3}{x^2-4}$

14) $f(x)=\sqrt[3]{x^4+x}+\sqrt{x}$; 15) $f(x)=x.\sqrt[3]{2-x}$

16) $f(x)=\sqrt{x+2}+\sqrt{x}$; 17) $f(x)=3x^{\frac{2}{3}}-2x^{\frac{3}{2}}$

18) $\begin{cases} f(x)=x\sqrt{x^2+1} & \text{si } x\le 0 \\ f(x)=\sqrt{x+1}-1 & \text{si } x>0 \end{cases}$

PÉRIODICITÉ D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE

EXERCICE 49

Déterminer, dans chacun des cas suivants, une période de la fonction f puis déterminer son ensemble d'étude :

1) $f(x)=\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)\cos(3x)$

2) $f(x)=\cos\left(4x+\dfrac{\pi}{6}\right)$

3) $f(x)=\sin(2x)-\cos^2 x$

4) $f(x)=\tan^2\left(\dfrac{x}{2}\right)-\cos(2x)$

FONCTIONS PRIMITIVES

EXERCICE 50

Dans chacun des cas suivants, Déterminer une primitive de la fonction f ainsi les intervalles où elle est définie :

1) $f(x)=5x^3-6x^2+4x-7$; 2) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}$

3) $f(x)=\dfrac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+10}}$; 4) $f(x)=x\sqrt{x^2+1}$

5) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{1}{x}-1\right)^3$; 6) $f(x)=\sqrt[3]{x+1}$

7) $f(x)=x\sqrt[3]{x^2-1}$; 8) $f(x)=x^2+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}$

9) $f(x)=(2x-3)\sqrt[3]{x^2-3x+8}$; 10) $f(x)=\tan^2 x$

10) $f(x)=\sin x.\cos^3 x$; 11) $f(x)=\sin x.\sin 2x$

12) $f(x)=3\cos\dfrac{x}{2}-5\sin\dfrac{2x}{3}+\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

13) $f(x)=\sin x.\cos x.\sqrt{1-\cos 2x}$

14) $f(x)=\sin(3x).\cos(5x)$

15) $f(x)=\dfrac{1}{(2x+1)^2}-\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{x+1}{(x^2+2x+7)^2}$

16) $f(x)=\dfrac{x}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}}+\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{x^3-1}}$

EXERCICE 51

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\sin^4 x$.

1) Calculer $f''(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

2) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$f(x)=-\frac{1}{4}f''(x)+\frac{3}{8}-\frac{3}{8}\cos(4x)$$

3) En déduire une fonction primitive de f sur $\mathbb{R}$.

4) Déterminer la fonction primitive F de la fonction f telle que : $F(\pi)=0$.

For more visit: L9ray.com

EXERCICES DE PERFECTIONNEMENT

EXERCICE 52

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x)=\sqrt[3]{x^3+3x}$

1) Étudier la dérivabilité à droite en 0 de la fonction f puis interpréter le résultat obtenu.

2) Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in]0;+\infty[$ et en déduire la monotonie de la fonction f.

3) Montrer que l'équation $f(x)=1$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]0;+\infty[$.

4) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

5) Montrer que f^{-1} est dérivable en 1 et que :

$$\left(f^{-1}\right)'(1)=\frac{\alpha}{1-2\alpha}$$

6) Déterminer l'approximation affine de la fonction f^{-1} au voisinage de 1.

EXERCICE 53

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x)=\left(x\sqrt{x}-1\right)^2$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Justifier la continuité de f sur $\mathbb{R}^+$.

2) Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

3) Étudier la dérivabilité à droite en 0 de la fonction f puis interpréter le résultat obtenu.

4) a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$.

b) Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f.

6) Écrire l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 4.

7) Déterminer les points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec les axes du repère.

8) Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un unique point d'inflexion et dont l'abscisse est $\sqrt[3]{\frac{1}{16}}$.

9) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une solution unique α dans $[0;1]$ puis vérifier que : $\sqrt{\alpha}=\frac{1}{1+\alpha}$

10) Construire la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

11) Soit g la restriction de la fonction f sur $I=[0;1]$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b) Calculer $g\left(\frac{1}{4}\right)$ puis déterminer $\left(g^{-1}\right)'\left(\frac{49}{64}\right)$.

c) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$.

EXERCICE 54

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\frac{\sin^2 x}{\cos(2x)}$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.

2) a) Vérifier que la fonction f est paire.

b) Montrer que f est périodique de période π.

c) En déduire D_E un domaine d'étude de f.

3) Calculer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f sur D_E.

4) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$ de f.

5) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ sur $[-2\pi;2\pi]\cap D_f$.

For more visit: L9ray.com

L9RAY

2 EXERCICES ET PROBLÈMES

EXERCICE 55

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^3 + 12x - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = \sqrt{1+x^2} - x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2) Étudier la continuité de la fonction de f sur $\mathbb{R}$.

3) Étudier la dérivabilité à droite en 0 de la fonction f.

4) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$.

5) a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

b) En déduire que f est strictement croissante sur $]-\infty;0[$ et strictement croissante sur $]0;+\infty[$ puis dresser le tableau de variations de f.

6) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]-\infty;0[$ puis vérifier que $\alpha \in \left]-\frac{1}{12};0\right[$.

8) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$.

9) Soit g la restriction de la fonction f sur $]0;+\infty[$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b) Étudier la continuité et la dérivabilité de g^{-1} sur l'intervalle J.

c) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

EXERCICE 56

Soit f la fonction numérique définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt[3]{\alpha x^2} - \frac{2}{3}x \quad (\text{où } \alpha \in \mathbb{R}_+^*)$$

1) Étudier la dérivabilité à droite en 0 de la fonction f.

2) a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0;+\infty[$.

b) Étudier les variations de la fonction f.

c) En déduire que pour tout α et x de $]0;+\infty[$:

$$\alpha^{\frac{1}{3}} \times x^{\frac{2}{3}} \leq \frac{1}{3}\alpha + \frac{2}{3}x$$

EXERCICE 57

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = x - 1 - \sqrt{\frac{x}{x-1}}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Vérifier que : $D_f =]-\infty;0] \cup]1;+\infty[$.

2) Calculer $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ et interpréter le résultat obtenu.

3) a) Montrer que la droite (D): $y = x - 2$ est une asymptote oblique de $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

b) Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite (D).

4) Étudier la dérivabilité à gauche en 0 de la fonction f puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

5) a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D_f - \{0\}$.

b) Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f.

6) Écrire l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.

7) Construire la courbe $\mathscr{C}_f$.

8) a) Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en unique point et dont l'abscisse α appartient à l'intervalle $\left]2;\frac{5}{2}\right[$.

b) Montrer que : $\alpha - \sqrt[3]{\alpha} = 1$.

9) Construire la courbe $\mathscr{C}_f$.

10) Soit g la restriction de la fonction f sur $I =]1;+\infty[$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1}

For more visit: L9ray.com

définie sur un intervalle J à déterminer.

b) Démontrer que g^{-1} est dérivable sur J.

c) Monter que : $\left(g^{-1}\right)'(0)=\dfrac{2(\alpha-1)^3}{1+2(\alpha-1)^3}$.

d) Tracer la courbe $\mathscr{C}_{g^{-1}}$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

EXERCICE 58

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=x+2-2\sqrt{x+1} & \text{si } x\geq -1 \\ f(x)=\dfrac{1-x}{\sqrt{2x^2+2}} & \text{si } x<-1 \end{cases}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Montrer que la fonction f est continue en -1.

2) Étudier la dérivabilité de la fonction f en -1 puis donner des interprétations géométriques aux résultats obtenus.

3) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

4) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$.

5) a) Montrer que :

$$\begin{cases} f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+1}+1\right)} & \text{si } x>-1 \\ f'(x)=-\dfrac{x+1}{\sqrt{2\left(1+x^2\right)^3}} & \text{si } x<-1 \end{cases}$$

b) Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f.

6) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

EXERCICE 59

Première partie :

Soit u la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$u(x)=3-\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}$$

1) Calculer $u'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$.

2) En déduire que u est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

3) a) Calculer $u(1)$.

b) En déduire que $u(x)\geq 0$ pour tout $x\in[1;+\infty[$ et que $u(x)\leq 0$ pour tout $x\in]0;1]$.

Deuxième partie :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x)=4\sqrt{x}-3x-\frac{1}{x}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a) Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$.

2) a) Justifier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}_+^*$ puis montrer que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right)\ f'(x)=-u(x)$.

b) Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f.

5) a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in D_f-\{0\}$.

b) Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f.

c) En déduire que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right)\ 4\sqrt{x}\leq 3x+\dfrac{1}{x}$

6) Construire la courbe $\mathscr{C}_f$.

7) Discuter suivant les valeurs du paramètre $m\in\mathbb{R}$ le nombre de solutions de l'équation :

$$3x^2+1=\left(m+4\sqrt{x}\right)$$

EXERCICE 60

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $I=]1;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{2x+5}{(x-1)^3}$

1) Déterminer les réels a et b tels que :

$$(\forall x\in I)\ f(x)=\frac{a}{(x-1)^2}+\frac{b}{(x-1)^3}$$

2) En déduire la primitive de la fonction f sur I qui s'annule en 2.

For more visit: L9ray.com

L9RAY

2 EXERCICES ET PROBLÈMES

EXERCICE 61

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a) Vérifier que $D_f=]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$.

b) Montrer que la fonction f est impaire.

2) Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$.

4) a) Montrer que pour tout $x\in D_f$:

$$f'(x)=-\frac{1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$$

b) Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f.

5) a) Montrer que : $(\forall x\in D_f)\ f''(x)=\dfrac{3x}{(x^2-1)^{\frac{5}{2}}}$

b) Étudier la concavité de la courbe $\mathscr{C}_f$.

6) Construire la courbe $\mathscr{C}_f$.

8) Soit g la restriction de la fonction f sur $I=]1;+\infty[$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b) Montrer que g^{-1} est dérivable en $\sqrt{2}$ et calculer la valeur de $(g^{-1})'(\sqrt{2})$.

c) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$.

EXERCICE 62

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x)=\frac{2x-4}{\sqrt{x^2-4x+5}}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a) Vérifier que $D_f=\mathbb{R}$.

b) Montrer que le point $I(2;0)$ est un centre de symétrie pour la courbe $\mathscr{C}_f$.

2) a) Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b) En déduire la nature des branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$.

3) a) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})\ f'(x)=\dfrac{2}{(x^2-4x+5)^{\frac{3}{2}}}$.

b) Dresser le tableau de variations de f.

4) Écrire l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.

5) a) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})\ f''(x)=\dfrac{-6(x-2)}{(x^2-4x+5)^{\frac{5}{2}}}$.

b) Étudier la concavité de la courbe $\mathscr{C}_f$.

6) Tracer (T) et $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

EXERCICE 63

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^2$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité : $2cm$).

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ puis en déduire la nature de la branche infinie de la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $-\infty$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat.

2) a) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})\ \sqrt{1+x^2}>x$.

b) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})\ f'(x)=\dfrac{-2f(x)}{\sqrt{1+x^2}}$.

c) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

3) Écrire l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

For more visit: L9ray.com

4) Tracer (T) et $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

5) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J qu'on déterminera.

b) Justifier que f^{-1} est dérivable sur J.

Déterminer $\left(f^{-1}\right)'(1)$.

c) Dresser le tableau de variations de f^{-1}.

d) Tracer la courbe $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

e) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

EXERCICE 64

Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x - \sqrt{1-x} & \text{si } x < 1 \\ f(x) = \dfrac{1}{2-\sqrt{x}} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a) Montrer que $D_f =]-\infty;4[\cup]4;+\infty[$.

b) Montrer que la fonction f est continue en 1.

2) a) Étudier la dérivabilité à droite de f en 1.

b) Étudier la dérivabilité à gauche de f en 1 puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3) Calculer les limites de f aux bornes de D_f.

4) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$.

5) a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D_f - \{1\}$.

b) Dresser le tableau de variations de f.

6) Écrire l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

7) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]-\infty;1]$.

Vérifier que : $\dfrac{1}{2} < \alpha < \dfrac{3}{4}$.

8) Tracer $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

EXERCICE 65

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos^2 x - 2\cos x - 1$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a) Vérifier que la fonction f est paire.

b) Montrer que f est périodique de période 2π.

c) En déduire qu'on peut restreindre l'étude de la fonction f sur l'intervalle $[0;\pi]$.

3) a) Montrer que pour tout $x \in [0;\pi]$:

$$f'(x) = 2\sin x(1-\cos x)$$

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

4) a) Montrer que pour tout $x \in [0;\pi]$:

$$f'(x) = 2(1-\cos x)(1+2\cos x)$$

b) En déduire que le point $I\left(\dfrac{2\pi}{3};\dfrac{1}{4}\right)$ est un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.

5) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ sur $[-2\pi;2\pi]$.

6) Résoudre graphiquement l'inéquation :

$$x \in [-2\pi;2\pi] \quad f(x) \leq \frac{1}{4}$$

EXERCICE 66

Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 - x} + x + 2 & \text{si } x < 0 \\ f(x) = x + 1 - \dfrac{1}{x\sqrt{x} - 1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a) Montrer que $D_f =]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$.

b) Montrer que la fonction f est continue en 0.

2) Étudier la dérivabilité à droite et à gauche de la fonction f en 0 puis interpréter géométriquement les résultats obtenus.

For more visit: L9ray.com

3) a) Calculer : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$ puis interpréter géométriquement les résultats obtenus.

b) Montrer que la droite $(D): y = x+1$ est une asymptote oblique de $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

4) a) Montrer que :

$$\begin{cases} f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2-x}\left(2x-1-2\sqrt{x^2-x}\right)} & \text{si } x<0 \\ f'(x) = 1+\dfrac{3\sqrt{x}}{2\left(x\sqrt{x}-1\right)^2} & \text{si } x>0 \end{cases}$$

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

5) Résoudre dans $]1;+\infty[$ l'équation : $f(x) = x$

6) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $\left]\frac{9}{8};2\right[$.

7) Construire la courbe $\mathscr{C}_f$.

8) Discuter suivant les valeurs du paramètre $m \in \mathbb{R}$ le nombre de solutions de l'équation : $f(x) = m$.

9) Soit g la restriction de la fonction f sur $\mathbb{R}_-^*$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

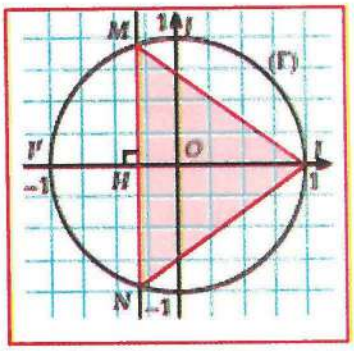
b) Montrer que g^{-1} est dérivable en $\sqrt{2}$ et calculer la valeur de $\left(g^{-1}\right)'\left(\sqrt{6}\right)$.

c) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

d) Tracer la courbe $\mathscr{C}_{g^{-1}}$ dans le repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

EXERCICE 67

Dans un repère orthonormé $(O;I,J)$, Soit (Γ) le cercle de centre O et de rayon 1 et le point $I'(-1;0)$. La perpendiculaire à la droite (II') passant par un point H sur $[II']$, distinct de I et I' coupe (Γ) aux points M et N. (Voir figure en-dessous)



Soit f la fonction numérique définie sur $[-1;1]$ par :

$$f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$$

1) Exprimer l'aire du triangle MIN en fonction de l'abscisse x du point H.

2) Étudier la dérivabilité de f en -1 et 1.

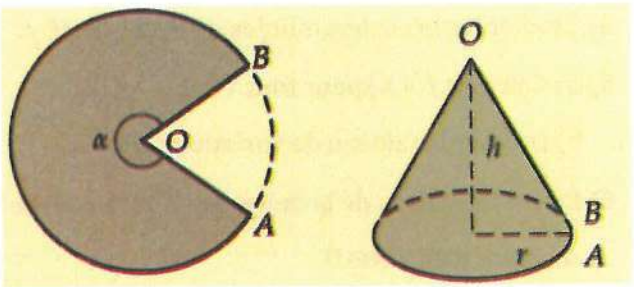
3) a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-1;1[$ et étudier son signe.

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

4) Montrer que le triangle MIN d'aire maximale est équilatéral.

EXERCICE 68

À partir d'un secteur angulaire $\widehat{AOB}$ de mesure α, on forme un cône en joignant les segments $[OA]$ et $[OB]$. Le but est de déterminer quelle mesure en radian de α donne au cône son volume maximal.



1) Exprimer le rayon r et la hauteur h du cône en fonction de OA et α.

2) Prouver que le volume du cône en fonction de α est donné par : $V(\alpha) = \dfrac{OA^3}{24\pi^2}\alpha^2\sqrt{4\pi^2-\alpha^2}$

For more visit: L9ray.com

3) a) Calculer $V'(\alpha)$ pour tout $\alpha \in]0;2\pi[$.

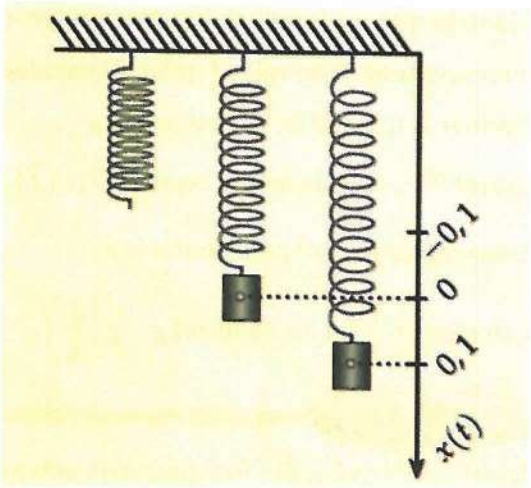
b) Étudier les variations de V sur $]0;2\pi[$.

c) En déduire que V admet un maximum puis répondre au problème posé.

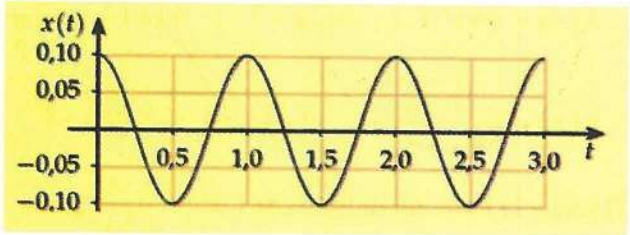
EXERCICE 69

On étudie les oscillations (supposées non amorties) d'un pendule élastique vertical constitué d'un ressort à spires non jointives, de masse négligeable et de constante de raideur k, auquel on accroche un solide de masse $m = 0,1\,kg$.

Le ressort s'allonge et un équilibre est atteint. Puis, on étire le ressort verticalement et on le lâche.
La position du centre d'inertie du solide est repérée par x (en mètre) en fonction du temps t (en seconde)



Un enregistrement de 3 secondes a donné la représentation graphiques suivantes :



1) Lire graphiquement $x(0)$ et $x'(0)$.

2) Pour tout $t \geq 0$, on définit la fonction x par :

$$x(t) = \alpha \sin(2\pi t + \varphi) \text{ avec } 0 \leq \varphi \leq \pi$$

a) Montrer que la fonction x est périodique de période 1.

b) Déterminer α et φ.

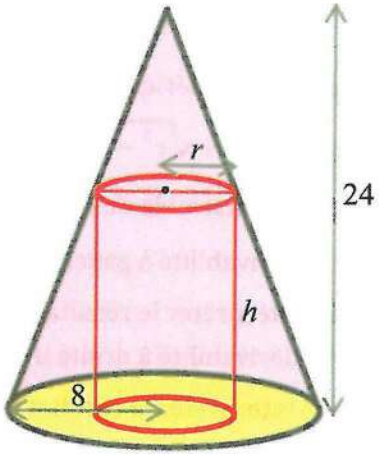
3) L'équation que vérifie l'abscisse x du centre d'inertie du solide, appelée équation différentielle, s'écrit : $mx''(t) + kx(t) = 0$

Calculer la valeur exacte de la constante de raideur k du ressort.

EXERCICE 70

La hauteur d'un cône de révolution est $24\,cm$ et le rayon de sa base est $8\,cm$.

On se propose de construire à l'intérieur de ce cône un cylindre de volume maximal.



Soit h la hauteur du cylindre et r le rayon de sa base.

1) Montrer que $h = 3(8-r)$ et déterminer le volume du cylindre $V(r)$ en fonction de r.

2) Étudier les variations de la fonction $V : r \mapsto V(r)$ en déduire les valeurs de r et h.

EXERCICE 71

Soit $(\mathscr{C})$ l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que : $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 4$

Construire l'ensemble $(\mathscr{C})$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

For more visit: L9ray.com

PROBLÈMES DE SYNTHÈSE

SE PRÉPARER AUX DEVOIRS

DEVOIR 1

A) Dans chacun des cas suivants, Justifier la dérivabilité de la fonction f sur $\mathbb{R}$ puis calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$:

1er cas : $f(x)=(x-1)^3\left(x^2-x+5\right)^2$.

2ème cas : $f(x)=\dfrac{4x-1}{\left(x^2+2\right)^3}$.

3ème cas : $f(x)=\sqrt[3]{4x^2-2x+7}$.

4ème cas : $f(x)=\cos\left(\sqrt{x^4+5}\right)$.

B) Soit g la fonction numérique définie par :

$$g(x)=x-2+\sqrt{x^2-3x+2}$$

1) Déterminer D_g l'ensemble de définition de g .

2) a) Étudier la dérivabilité à gauche de la fonction g en 1 puis interpréter le résultat obtenu.

b) Étudier la dérivabilité à droite de la fonction g en 2 puis interpréter le résultat obtenu.

3) Montrer que la fonction g est dérivable sur chacun des intervalles $]2;+\infty[$ et $]-\infty;1[$.

4) Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in D_g-\{1;2\}$.

C) Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2}{2-x} & \text{si } x\in[0;1] \\ f(x)=x-\sqrt{x^2-x} & \text{si } x\in]-\infty;0[\cup]1;+\infty[\end{cases}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Montrer que la fonction f est continue en 0 et en 1.

2) Étudier la dérivabilité à gauche et à droite de la fonction f aux points 0 et 1 puis donner des interprétations géométriques des résultats obtenus.

3) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et en déduire la nature de la branche infinie au voisinage de $+\infty$.

b) Montrer que la droite (Δ) est une asymptote oblique de la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

4) a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}-\{0;1\}$.

b) Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f .

5) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$.

6) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $]0;1[$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J qu'on déterminera.

b) Donner le tableau de variations de g^{-1} .

c) Tracer $\mathscr{C}_{g^{-1}}$ dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

d) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

e) Calculer $g\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et en déduire $\left(g^{-1}\right)'\left(\dfrac{1}{6}\right)$.

DEVOIR 2

A) Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f(x)=3x^{\frac{2}{3}}-6x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}} \quad ; \quad g(x)=\tan\left(\sqrt{x^2+3}\right)$$

$$h(x)=\sqrt[3]{4x^2+x}-5\sqrt{3x+7} \quad ; \quad k(x)=\frac{x}{\sqrt[3]{1-x}}$$

$$u(x)=x\sqrt{\frac{x-2}{x+3}} \quad ; \quad v(x)=\sqrt[3]{1-x^2}.\sqrt[4]{x^3+1}$$

B) Soit g la fonction définie sur $I=\left]-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right[$ par :

$$g(x)=4\sin^2 x+\tan(2x)$$

1) Montrer que la fonction g est impaire.

2) Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in I$.

For more visit: L9ray.com

3) En déduire le calcul de la limite :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{4\sin^2 x+\tan(2x)-\sqrt{3}-1}{6x-\pi}$$

B) Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1} & \text{si } x\geq 0 \\ f(x)=\sqrt{x^2-2x}-x & \text{si } x<0 \end{cases}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Montrer que $D_f=\mathbb{R}$.

2) a) Étudier la continuité de la fonction f en 0.

b) Étudier la dérivabilité à gauche et à droite de la fonction f en 0 puis interpréter graphiquement les résultats obtenus.

4) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Montrer que la droite (D) d'équation $y=-2x+1$ est une asymptote oblique de la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $-\infty$.

c) Montrer que pour tout $x\in\left]-\infty;0\right[$:

$$f(x)-(-2x+1)=\frac{1}{x-1-\sqrt{x^2-2x}}$$

puis en déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite (D) sur l'intervalle $\left]-\infty;0\right[$.

5) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$ puis interpréter graphiquement ce résultat.

b) Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite $(\Delta):y=x$.

6) a) Montrer que :

$$\begin{cases} f'(x)=\dfrac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2} & \text{si } x>0 \\ f'(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}-1 & \text{si } x<0 \end{cases}$$

b) Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f.

7) Donner l'équation de tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

8) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$. (On admet que $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion d'abscisse $\sqrt{3}$).

9) Soit g la restriction de la fonction f sur $\mathbb{R}^+$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b) Calculer $g(1)$ puis montrer que la fonction g^{-1} est dérivable en $\frac{1}{2}$.

c) Déterminer $\left(g^{-1}\right)'\left(\frac{1}{2}\right)$.

d) Tracer la courbe $\mathscr{C}_{g^{-1}}$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

DEVOIR 3

A) Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x)=x^3-6x^2+9x-2$$

et soit $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_g$.

2) Calculer $g'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variations de la fonction g.

3) a) Montrer que $I(2;0)$ est un centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_g$.

b) Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point I.

4) Étudier la concavité de la courbe $\mathscr{C}_g$.

5) Tracer (T) et $\mathscr{C}_g$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

6) a) Déterminer toutes les primitives de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

b) En déduire la primitive de la fonction G de la fonction g telle que : $G(2)=0$.

For more visit: L9ray.com

L9RAY

B) Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 2x} - 4 & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = x - 4 + \sqrt{x^2 + x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) a) Étudier la continuité de la fonction f en 0.

b) Étudier la dérivabilité à gauche et à droite de la fonction f en 0 puis interpréter graphiquement les résultats obtenus.

3) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x - \dfrac{7}{2}$ est une asymptote oblique de la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

4) a) Montrer que :

$$\begin{cases} f'(x) = \dfrac{2(x-1)}{3\sqrt[3]{(x^2-2x)^2}} & \text{si } x > 0 \\ f'(x) = 1 + \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

b) Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f.

5) Donner l'équation de tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -2.

6) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

7) Soit g la restriction de la fonction f sur $]-\infty;0[$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]-\infty;0[$ puis vérifier que : $-8 < \alpha < -7$.

c) Montrer que la fonction g^{-1} est dérivable en -2 et préciser la valeur de $\left(g^{-1}\right)'(-2)$.

d) Calculer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

DEVOIR 4

Première Partie :

Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$g(x) = 6x - 8x\sqrt{x} - \frac{1}{2}$$

1) Étudier les variations de la fonction g et dresser son tableau de variations.

2) En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ g(x) \leq 0$.

Deuxième Partie :

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = (4x-1)\sqrt{x} - 4x^2 + 1$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0 puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3) a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\ f'(x) = \dfrac{g(x)}{\sqrt{x}}$.

b) Dresser le tableau de variations de f.

4) Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $\dfrac{1}{4}$.

5) Étudier la nature de la branche infinie de $\mathscr{C}_f$.

6) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f''(x) = \frac{\left(1-2\sqrt{x}\right)\left(16x+2\sqrt{x}+1\right)}{4x\sqrt{x}}$$

b) Étudier la concavité de la courbe $\mathscr{C}_f$.

7) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Troisième Partie :

Soit h la restriction de f sur l'intervalle $I = [1;+\infty[$.

For more visit: L9ray.com

1) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

2) Tracer la courbe $\mathscr{C}_{h^{-1}}$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

3) Déterminer : $\lim\limits_{x\to+\infty} h^{-1}(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{h^{-1}(x)}{x}$.

Quatrième Partie :

Soit φ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\varphi(x)=\frac{12x-1}{2\sqrt{x}}$$

1) Vérifier que : $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)\ \varphi(x)=\dfrac{g(x)}{\sqrt{x}}+8x$.

2) En déduire les primitives de φ sur $\mathbb{R}_+^*$.

3) Déterminer la primitive H de φ sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $H(1)=3$.

DEVOIR 5

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=x-1+2\sqrt{1-x} & \text{si } x<1 \\ f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^3+1} & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) a) Montrer que la fonction f est continue en 1.

b) Étudier la dérivabilité à gauche et à droite de la fonction f en 1 puis interpréter graphiquement les résultats obtenus.

3) a) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]1;+\infty[$.

b) Montrer que pour tout $x\in]-\infty;1[$:

$$f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{1-x}\left(1+\sqrt{1-x}\right)}$$

c) Dresser le tableau de variations de f.

4) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$.

5) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

6) Soit g la restriction de la fonction f sur $[1;+\infty[$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b) Calculer $g^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$.

DEVOIR 6

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x)=x-3+\frac{x}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Vérifier que $D_f=[0;1[\cup]1;+\infty[$.

2) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to1} f(x)$.

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-2)\right]=0$ puis interpréter graphiquement ce résultat.

3) Montrer que f est dérivable à droite en 0.

Préciser la valeur de $f'_d(0)$.

4) a) Montrer que pour tout $x\in D_f-\{0\}$:

$$f'(x)=\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)^3}$$

b) Vérifier que :

$$(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)\ x-\sqrt{x}+1=\left(\sqrt{x}-1\right)^2+\sqrt{x}$$

c) Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f.

5) Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 4.

6) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$.

For more visit: L9ray.com

L9RAY

3

SUITES NUMÉRIQUES

HISTOIRE

Les suites sont depuis longtemps l'outil privilégié pour la modélisation des évolutions de phénomènes « discrets » :

- Croissance d'une population d'animaux ;
- Présence de médicaments dans le sang ;
- propagation d'une épidémie ;
- ...etc.

Au début du XIIIe siècle le mathématicien italien Leonard de Pisae connu sous le nom de Fibonacci, introduit une suite sous la forme amusante suivante : Partant d'un couple de lapins, combien en obtiendra-t-on après un nombre donné de mois, sachant que chaque couple produit chaque mois un nouveau couple, lequel ne devient productif qu'après deux mois. Si on note Fn le nombre de couples au bout de n mois, on aboutit à la relation $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Le rapport F_{n+1}/F_n tend vers le nombre d'or $(1+\sqrt{5})/2$.

Dans les arts également, la reproduction « à l'infini » de phénomènes est une source d'inspiration.

Source : https://fr.wikipedia.org

LEONARDO FIBONACCI (1180 – 1250)





GIUSEPPE PEANO (1858 – 1932)

CAPACITÉS ATTENDUES

- Utiliser les suites arithmétiques et les suites géométriques pour étudier des exemples de suites de la forme :

$$u_{n+1} = au_n + b \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}$$

- Utiliser les suites de référence et les critères de convergence pour déterminer les limites de suites numériques ;
- Utiliser les suites numériques pour résoudre des problèmes variés de différents domaines ;
- Déterminer la limite d'une suite convergente (u_n) de la forme :

$u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction continue sur un intervalle I et $f(I) \subset I$;

PLAN DU COURS

- Activités Préparatoires..... 145
- Connaissances Fondamentales
  - Généralités sur les suites numériques (rappel) 150
  - Limite d'une suite numérique..... 151
  - Critères de convergence Limite d'une suite géométrique 158
  - Suites de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ et $v_n = f(u_n)$ 163
- Techniques Et Astuces 166
- Exercices Et Problèmes
  - Exercices d'application..... 177
  - Exercices de perfectionnement..... 181
  - Problèmes de synthèse..... 189

For more visit: L9ray.com

1 SUITES NUMÉRIQUES (RAPPELS)

A. Suite bornée – Monotonie d'une suite numérique

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \frac{2u_n}{1+u_n^2}$.

1. Calculer u_1 et u_2.

2. Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 \leq u_n \leq 1$.

3. a) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \geq \frac{1}{2}$.

B. Suite arithmétique :

1. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $r = 4$ et de premier terme $u_0 = -6$.

a) Exprimer u_n en fonction de n et en déduire la valeur de u_{56}.

b) Exprimer la somme $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ en fonction de n.

2. Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \frac{7u_n - 25}{u_n - 3}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = \frac{1}{u_n - 5}$

a) Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique. Préciser la raison et le premier terme.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

C. Suite géométrique :

1. Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{5}$ et de premier terme $u_0 = 3$.

a) Exprimer u_n en fonction de n.

b) Exprimer la somme $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ en fonction de n.

2. Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \frac{2n+1}{4n+6} u_n$

a) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 < u_n \leq 1$.

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c) Soit (v_n) la suite numérique définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $v_n = (2n+1)u_n$.

c1) Montrer que la suite (v_n) est géométrique. Préciser la raison et le premier terme.

c2) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_{n-1}$.

Exprimer S_n en fonction de de n.

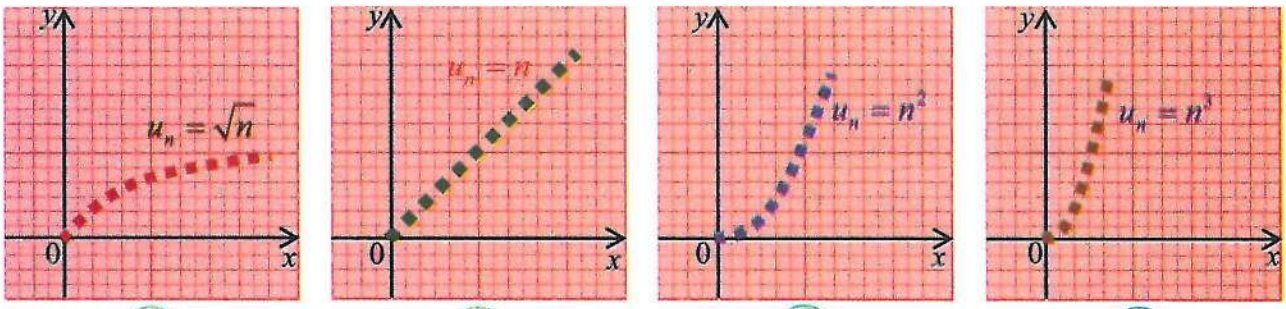
For more visit: L9ray.com

L9RAY

3 ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES

2 LIMITE D'UNE SUITE DE RÉFÉRENCE

Les figures suivantes (1) , (2) , (3) et (4) présentent successivement les graphes des suites numériques $\left(\sqrt{n}\right)$, (n) , $\left(n^2\right)$ et $\left(n^3\right)$



1 2 3 4

1. En s'inspirant des graphes ci-dessus, quelle remarque peut-on tirer sur les termes de ces suites quand n prend des valeurs assez grandes ?

2. a) Recopier et compléter le tableau en-dessous :

n	9	100	10^4	10^6	10^8	10^{10}
$\sqrt{n}$						
n^2						
n^3						

b) Déterminer l'ensemble de tous les entiers naturels n tels que : $n^2 \in \left[10^{10} ; +\infty\right[$.

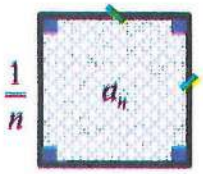
Remarquer qu'à partir du rang $N = 100000$, tous les termes de la suite $\left(n^2\right)$ sont plus grands que 10^{10} .

De manière générale, les termes de la suite $\left(n^2\right)$ sont tous aussi grands qu'on veut sous réserve que le rang soit suffisamment grand. Autrement dit, tout intervalle du type $\left]M ; +\infty\right[$ (où $M \in \mathbb{R}$) contient tous termes de la suite $\left(n^2\right)$ pour n dans un certain intervalle $\left[N ; +\infty\right[$.

On dit alors que la suite $\left(n^2\right)$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ et on écrit : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$.

c) Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{n\to+\infty} n$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3$; $\lim\limits_{n\to+\infty} n^p$ (avec $p \in \mathbb{N}^*$)

3. On considère un carré de côté $\frac{1}{n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et a_n son aire.



a) Exprimer a_n en fonction de n .

b) Pour quelles valeurs de n a-t-on $a_n \leq 10^{-10}$?

For more visit: L9ray.com

c) Recopier et compléter le tableau en-dessous :

n	10	100	10^4	10^6	10^8	10^{10}
$\frac{1}{n}$						
$\frac{1}{n^2}$						

Remarquer bien que lorsque l'entier naturel n prend des valeurs de plus en plus grands, les termes généraux des suites numériques $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ et $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\geq 1}$ s'approchent de plus en plus de 0.

On dit alors que les suites numériques $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ et $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\geq 1}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et on écrit :

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}=0$.

d) Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^3}$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^p}$ (avec $p\in\mathbb{N}^*$)

3 LIMITES D'UNE SUITE ASSOCIÉE À UNE FONCTION

A. Étude de comportement d'une suite à l'aide d'un tableur « Excel » :

On considère la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x)=2+\frac{1}{x}$

1. Étudier les variations de la fonction f puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

2. Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

3. On considère maintenant la suite numérique $(u_n)_{n\geq 1}$ définie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par : $u_n=2+\frac{1}{n}$

a) Placer dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ les points $M_n(n,u_n)$ pour $n\in\{1;2;3;4\}$.

b) Le tableau ci-contre donne les valeurs de u_n.

Quelle remarque peut-on tirer sur les termes de la suite (u_n) pour des valeurs de n assez grandes ?

n	u_n
1	3
2	2,5
3	2,33333333
4	2,25
5	2,2
6	2,16666667
7	2,14285714
8	2,125
9	2,11111111
10	2,1
11	2,09090909
12	2,08333333
13	2,07692308

100	2,01
101	2,00990099
102	2,00980392
103	2,00970874
104	2,00961538
105	2,00952381
106	2,00943396
107	2,00934579
108	2,00925926
109	2,00917431
110	2,00909091
111	2,00900901
112	2,00892857
113	2,00884956

4. On considère l'intervalle ouvert I de centre 2 et de rayon 10^{-2} : $I=]1,99;2,01[$

Montrer qu'à partir d'un rang N à déterminer, tous les termes de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ appartiennent à I.

For more visit: L9ray.com

L9RAY

3 ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES

On dit que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ tend vers 2 quand n tend vers $+\infty$ et on écrit : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$ ou $\lim u_n = 2$

B. Généralisation :

On admet le résultat suivant :

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle du type $[n_0 ; +\infty[$ où $n_0 \in \mathbb{N}$.

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq n_0}$ définie pour tout entier $n \geq n_0$ par : $u_n = f(n)$. Alors :

- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ où $\ell \in \mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

  On dit alors que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est convergente et sa limite est égale à ℓ.

- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

  On dit alors que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est divergente et sa limite est égale à $+\infty$.

- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

  On dit alors que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est divergente et sa limite est égale à $-\infty$.

En s'inspirant du résultat ci-dessus, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ dans chacun des cas suivants :

1er cas : $u_n = \dfrac{5n+3}{2n+1}$; 2ème cas : $u_n = \dfrac{2n+1}{\sqrt[3]{n^2+n+4}}$; 3ème cas : $u_n = \dfrac{3n^2+4}{\sqrt{n}+5n}$

4ème cas : $u_n = \sqrt{n}+3-n$; 5ème cas : $u_n = n^{\frac{3}{4}} - 2n^{\frac{1}{2}} + n$; 6ème cas : $u_n = \sqrt{3n+1} - \sqrt{3n+5}$

4 OPÉRATIONS SUR LES LIMITES DES SUITES – CRITÈRES DE CONVERGENCE

A. Opérations sur les limites de suites :

On admet que les opérations sur les limites des fonctions numériques en $+\infty$ restent aussi valables pour les limites des suites.

1. Calculer les limites éventuelles des suites (u_n) et (v_n) puis celles des suites $(u_n + v_n)$, $(u_n v_n)$ et $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ pour :

a) $u_n = \dfrac{2n}{n+\sqrt{n}}$ et $v_n = \sqrt{\dfrac{3n+5}{n+2}}$; b) $u_n = \dfrac{n^2+1}{2(n+3)^2}$ et $v_n = n - \sqrt{n^2+3}$

2. Calculer la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants :

1er cas : $u_n = n^2 - \sqrt{n} - 3$; 2ème cas : $u_n = (1-2n)(\sqrt[3]{n}+5)$; 3ème cas : $u_n = 3n^2 - 4 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

4ème cas : $u_n = \left(\dfrac{2}{n}-1\right)\left(5 - \dfrac{7}{2\sqrt{n}}\right)$; 5ème cas : $u_n = \sqrt[3]{n} - 2\sqrt{n}$; 6ème cas : $u_n = \dfrac{n-\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n}+1}$

For more visit: L9ray.com

B. Critères de convergence :

On admet que toutes les propriétés des limites et ordre pour les fonctions numériques restent aussi valables pour les suites numériques.

1) La convergence :

a) On considère la suite numérique (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \dfrac{n+\cos 3n}{n+1}$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $1-\dfrac{2}{n+1} \leq u_n \leq 1$ puis en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

b) On considère la suite numérique $(v_n)_{n\geq 1}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = \dfrac{3n+\sin n}{n}$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $|v_n - 3| \leq \dfrac{1}{n}$ puis en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

2) La divergence :

a) On considère la suite numérique (a_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = (-1)^n + \sqrt{n} + \sin n$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n \geq \sqrt{n} - 1$ puis en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

b) On considère la suite numérique (b_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $b_n = -n^2 + 2n\cos\left(\sqrt{n}\right) - 1$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $b_n \leq -(n-1)^2$ puis en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

5 LIMITE D'UNE SUITE RÉCURRENTE DE LA FORME $u_{n+1} = f(u_n)$

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = 5 - \dfrac{4}{x}$

1. a) Vérifier que f est continue et strictement croissante sur $I = [3;4]$ puis montrer que $f(I) \subset I$.

b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \in I$.

c) Montrer que la suite (u_n) est croissante et majorée.

2. a) Représenter graphiquement la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

b) Tracer dans le même repère la droite (Δ) d'équation $y = x$ après avoir étudié la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite (Δ).

c) En utilisant $\mathscr{C}_f$ et (Δ), représenter les cinq premiers termes de la suite (u_n). Conjecturer alors la limite de (u_n).

3. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}(4-u_n)$.

b) En déduire par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq 4 - u_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

c) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $2^n \geq n$.

d) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq 4 - u_n \leq \dfrac{1}{n}$.

Que peut-on déduire alors sur la convergence de la suite (u_n) ? Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

For more visit: L9ray.com

L9RAY

1 GÉNÉRALITÉS SUR LES SUITES NUMÉRIQUES (RAPPEL)

Soit n_0 un entier naturel. On pose $I = \{n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$ et on considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq n_0}$.

1.1. SUITE MAJORÉE – SUITE MINORÉE – SUITE BORNÉE

Définition 1

- On dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est majorée s'il existe un réel M tel que : $(\forall n \in I)\ u_n \leq M$.
- On dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est minorée s'il existe un réel m tel que : $(\forall n \in I)\ u_n \geq m$.
- On dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

1.2. MONOTONIE D'UNE SUITE NUMÉRIQUE

Définition 2

- On dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante si : $(\forall n \in I)\ u_{n+1} - u_n \geq 0$.
- On dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est décroissante si : $(\forall n \in I)\ u_{n+1} - u_n \leq 0$.
- On dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est constante si : $(\forall n \in I)\ u_{n+1} = u_n$.

Remarque

- Si la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante, alors : $(\forall n \in I)\ u_n \geq u_{n_0}$.
- Si la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est décroissante, alors : $(\forall n \in I)\ u_n \leq u_{n_0}$.

1.3. SUITE ARITHMÉTIQUE

Définition 3

On dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est arithmétique s'il existe un réel r (indépendant de n) tel que :

$$(\forall n \in I)\ u_{n+1} - u_n = r$$

Le nombre r est appelé la raison de la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$.

Propriété 1

Si la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite arithmétique de raison r, alors pour tout $(n;p) \in I^2$:

$$u_n = u_p + (n-p)r \qquad \text{et} \qquad u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = \frac{n-p+1}{2}(u_p + u_n)$$

For more visit: L9ray.com

1.4. SUITE GÉOMÉTRIQUE

Définition 4

On dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est géométrique s'il existe un réel q (indépendant de n) tel que :

$$(\forall n \in I)\ u_{n+1} = qu_n$$

Le nombre q est appelé la raison de la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$.

Propriété 2

Si la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}^* - \{1\}$, alors pour tout $(n;p) \in I^2$:

$$u_n = u_p.q^{n-p} \quad \text{et} \quad u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = u_p.\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} \quad (n \geq p)$$

2 LIMITE D'UNE SUITE NUMÉRIQUE

2.1. SUITE DE LIMITE INFINIE

Définition 5

- On dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ a pour limite $+\infty$ si tout intervalle de type $]A,+\infty[$, où $A>0$, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

  On dit alors que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ diverge vers $+\infty$ et on notera : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou $\lim u_n = +\infty$.

- On dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ a pour limite $-\infty$ si tout intervalle de type $]-\infty,-A[$, où $A>0$, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

  On dit alors que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ diverge vers $-\infty$ et on notera : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ ou $\lim u_n = -\infty$.

Remarques

- L'étude de la limite d'une suite numérique se fait seulement quand n tend vers $+\infty$.
  C'est pour cela l'écriture $\lim u_n$ suffit.
- Si $k \in \mathbb{R}_+^*$ alors on a l'implication : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} ku_n = +\infty$
- Une signification intuitive de l'écriture $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ est la suivante :

  Chaque fois que l'entier n prend des valeurs grandes, les termes u_n prennent des valeurs positives et grandes telles qu'on puisse rendre ces termes plus grands que tout nombre A donné à l'avance, à partir d'un certain rang.

For more visit: L9ray.com

- Une signification intuitive de l'écriture $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ est la suivante :

Chaque fois que l'entier n prend des valeurs grandes, les termes u_n prennent des valeurs négatives dont les valeurs absolues sont grandes et telles qu'on puisse rendre ces termes plus petits que tout nombre A donné à l'avance, à partir d'un certain rang.

- On a les équivalences suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}(-u_n) = -\infty \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}(-u_n) = +\infty$$

2.2. LIMITE INFINIE DES SUITES USUELLES

Proposition 1

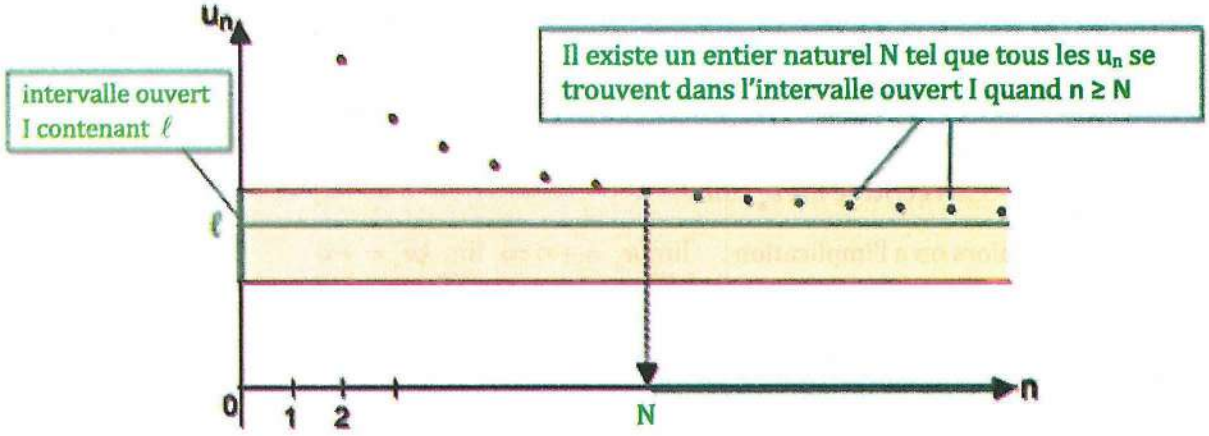
Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 4. Alors :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} n^p = +\infty$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[3]{n} = +\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[p]{n} = +\infty$.

2.3. CONVERGENCE D'UNE SUITE NUMÉRIQUE

Définition 6

Étant donné une suite numérique $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $\ell \in \mathbb{R}$, on dit que $(u_n)_{n\geq n_0}$ tend vers ℓ, ou encore converge vers ℓ, si tout intervalle ouvert centré en ℓ contient tous les termes de la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ à partir d'un certain rang. On écrit : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ou $\lim u_n = \ell$.



On peut dire que les termes u_n s'accumulent autour de ℓ !

For more visit: L9ray.com

Définition 7

On dit qu'une suite numérique est convergente si elle admet une limite réelle. Dans le cas contraire, on dit qu'elle est divergente.

Exemple

Montrons que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = (-1)^n$ est divergente :

Supposons par l'absurde que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers un réel ℓ. Alors pour tout réel strictement positif r, l'intervalle ouvert $I =]\ell - r ; \ell + r[$ contient tous les termes de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ à partir d'un certain rang. Donc pour $r = \frac{1}{2}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait : $u_n \in \left]\ell - \frac{1}{2} ; \ell + \frac{1}{2}\right[$;

c'est-à-dire : $(\forall n \geq N) \quad \left|(-1)^n - \ell\right| < \frac{1}{2}$.

- Lorsque $n \geq N$ et n est pair, on obtient : $|1 - \ell| < \frac{1}{2}$; c'est-à-dire : $\ell \in \left]\frac{1}{2} ; \frac{3}{2}\right[$.
- Lorsque $n \geq N$ et n est impair, on obtient : $|-1 - \ell| < \frac{1}{2}$; c'est-à-dire : $\ell \in \left]-\frac{3}{2} ; -\frac{1}{2}\right[$.

Ceci est absurde car : $\left]\frac{1}{2} ; \frac{3}{2}\right[\cap \left]-\frac{3}{2} ; -\frac{1}{2}\right[= \varnothing$.

Remarques

- Dire qu'une suite diverge (ou qu'elle est divergente), ne signifie pas qu'elle tend vers l'infinie. Cela signifie exactement que la suite n'a pas de limite ou qu'elle est tend vers l'infini.
- La limite d'une suite numérique, lorsqu'elle existe, est unique.

2.4. CONVERGENCE DES SUITES USUELLES

Proposition 2

Soit k un réel et p un entier naturel non nul. Alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{k}{n^p} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{k}{\sqrt{n}} = 0$.

En particulier : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

Proposition 3

Étant donné une suite numérique $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $\ell \in \mathbb{R}$, alors on a les équivalences suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} (u_n - \ell) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} |u_n - \ell| = 0$$

For more visit: L9ray.com

Exemple

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite numérique définie par : $u_n = \dfrac{3n^2+(-1)^n}{n^2}$. Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$:

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $|u_n - 3| = \left|\dfrac{3n^2+(-1)^n}{n^2} - 3\right| = \left|\dfrac{(-1)^n}{n^2}\right| = \dfrac{1}{n^2}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - 3| = 0$. Par suite : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

2.5. OPÉRATIONS SUR LES LIMITES FINIES

Proposition 4

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ deux suites numériques convergentes. Alors :

- La suite $(u_n + v_n)_{n\geq n_0}$ est convergente et de plus : $\lim(u_n + v_n) = \lim(u_n) + \lim(v_n)$.
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la suite $(\lambda u_n)_{n\geq n_0}$ est convergente et de plus : $\lim(\lambda u_n) = \lambda \lim(u_n)$.
- La suite $(u_n v_n)_{n\geq n_0}$ est convergente et de plus : $\lim(u_n v_n) = \lim(u_n) \times \lim(v_n)$.
- Si $\lim(v_n) \neq 0$, alors la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\geq n_0}$ est convergente et de plus : $\lim\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = \dfrac{\lim(u_n)}{\lim(v_n)}$.

Exemples

1) Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite numérique définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $u_n = 3 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{4}{\sqrt{n}}$

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3 - \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} + \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4}{\sqrt{n}} = 3$ (car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4}{\sqrt{n}} = 0$)

2) Soit (v_n) la suite définie par : $v_n = \dfrac{2\sqrt{n}+7}{3n-2}$.

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n}\left(2+\dfrac{7}{\sqrt{n}}\right)}{n\left(3-\dfrac{2}{n}\right)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} \times \dfrac{2+\dfrac{7}{\sqrt{n}}}{3-\dfrac{2}{n}}$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{7}{\sqrt{n}} = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

3) Calculons la limite de la suite (w_n) définie par : $w_n = \sqrt{4n^2+2n+1} - 2n$.

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{4n^2+2n+1} - 2n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4n^2+2n+1-4n^2}{\sqrt{4n^2+2n+1}+2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n+1}{\sqrt{4n^2+2n+1}+2n}$

For more visit: L9ray.com

Par conséquent :

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n^2\left(4+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}+2n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n\left(2+\frac{1}{n}\right)}{n\left(\sqrt{\left(4+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}+2\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{\sqrt{\left(4+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}+2}$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}=0$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \frac{2+0}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{2}$.

Applications

Calculer la limite de chacune des suites suivantes définies par :

$$u_n = \frac{2\sqrt{n}-7}{7\sqrt{n}+3} \quad ; \quad v_n = \frac{n^2-3n+4}{n^2+5n+7} \quad ; \quad w_n = \frac{2n-3}{n^3+3n^2+1} \quad ; \quad x_n = \frac{(n+4)(-3n^2+1)}{5n^3+8n}$$

$$a_n = \sqrt{n+3}-\sqrt{n+2} \quad ; \quad b_n = \sqrt{9n^2-4n+5}-3n+2 \quad ; \quad c_n = (n+1)\sqrt[3]{\frac{1}{n^5}}$$

2.6. EXTENSION DES OPÉRATIONS SUR LA LIMITE DE SUITE

On admet que les résultats sur les limites des fonctions restent valables pour les limites des suites :

➢ Limite de la somme :

$\lim u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim(u_n+v_n)$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

➢ Limite du produit :

$\lim u_n$	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim v_n$	ℓ'	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim(u_n\times v_n)$	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	Forme indéterminée

➢ Limite de l'inverse :

$\lim u_n$	$\ell\neq 0$	$+\infty$ ou $+\infty$	0
$\lim\frac{1}{u_n}$	$\frac{1}{\ell}$	0	$\lim\frac{1}{\lvert u_n\rvert}=+\infty$

For more visit: L9ray.com

L9RAY

2.7. LIMITES ET ORDRE

Proposition 5

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ deux suites numériques convergentes. Alors :

- Si la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est positive, alors : $\lim u_n \geq 0$.
- Si $u_n \leq v_n$ pour tout entier $n \geq n_0$, alors : $\lim u_n \leq \lim v_n$.

Remarques

- Une suite strictement positive (à partir d'un certain rang) et convergente peut avoir une limite nulle. Par exemple : On a : $\frac{1}{n} > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

  De façon générale, le passage à la limite fait perdre les inégalités strictes.
- Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite convergente pour laquelle on souhaite montrer que la limite est strictement positive, alors il suffit de chercher un réel $m > 0$ tel que $u_n \geq m$ à partir d'un certain rang.

2.8. MONOTONIE ET CONVERGENCE

Théorème 1

- Toute suite croissante majorée est convergente.
- Toute suite décroissante minorée est convergente.

Ce résultat porte le nom de « Théorème de la convergence monotone ».

Remarque

- Le théorème ci-dessus assure la convergence de la suite mais ne détermine pas sa limite.

Exemples

1) On considère la suite numérique (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq u_n \leq 2$

- Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 0$; donc : $0 \leq u_0 \leq 2$.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $0 \leq u_n \leq 2$ et montrons que $0 \leq u_{n+1} \leq 2$.

  On a : $0 \leq u_n \leq 2 \Rightarrow 2 \leq 2+u_n \leq 4 \Rightarrow \sqrt{2} \leq \sqrt{2+u_n} \leq 2 \Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 2$
- Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq u_n \leq 2$

Étudions maintenant la monotonie de la suite (u_n) :

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

For more visit: L9ray.com

$$u_{n+1}-u_n=\sqrt{2+u_n}-u_n=\frac{2+u_n-u_n^2}{\sqrt{2+u_n}+u_n}=\frac{(u_n+1)(2-u_n)}{\sqrt{2+u_n}+u_n}$$

Comme $0\le u_n\le 2$ alors $\frac{(u_n+1)(2-u_n)}{\sqrt{2+u_n}+u_n}\ge 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, donc $u_{n+1}-u_n\ge 0$.

Ainsi, la suite (u_n) est croissante majorée par 2, donc elle est convergente.

2) On considère la suite numérique (u_n) définie par $u_0=\frac{3}{2}$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}=\frac{u_n^2+1}{2u_n}$.

Montrons par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_n>1$

- Initialisation : Pour $n=0$, on a $u_0=\frac{3}{2}$; donc $u_0>1$.
- Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons que $u_n>1$ et montrons que $u_{n+1}>1$.

On a : $u_{n+1}-1=\frac{u_n^2+1}{2u_n}-1=\frac{(u_n-1)^2}{2u_n}$. Comme $u_n>1$, alors $\frac{(u_n-1)^2}{2u_n}>0$; d'où : $u_{n+1}>1$.

- Conclusion : Pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_n>1$

Étudions maintenant la monotonie de la suite (u_n) :

On a pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n^2+1}{2u_n}-u_n=\frac{1-u_n^2}{2u_n}$.

Puisque $u_n>1$, alors $u_n^2>1$. Donc : $\frac{1-u_n^2}{2u_n}<0$, c'est-à-dire : $u_{n+1}-u_n<0$.

Ainsi, la suite (u_n) est décroissante. De plus, elle est minorée par 1, donc elle est convergente.

Applications

1. Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0=-\frac{3}{2}$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}=\frac{3u_n+4}{u_n+6}$.

a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $-4<u_n<1$.

b) Montrer que la suite (u_n) est croissante et en déduire qu'elle est convergente.

2. Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0=\sqrt[3]{\frac{2}{7}}$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}=\sqrt[3]{\frac{1+u_n^3}{8}}$.

a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_n>\sqrt[3]{\frac{1}{7}}$.

b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$.

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3. Soit (v_n) la suite numérique définie par $v_0=\frac{3}{2}$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$: $v_{n+1}=v_n^2-2v_n+2$.

a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $1<v_n\le\frac{3}{2}$.

For more visit: L9ray.com

b) Prouver que la suite (v_n) est décroissante. Que peut-on conclure ?

4. Soit $(S_n)_{n\geq 1}$ la suite numérique définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2}$.

a) Déterminer S_1, S_2 et S_3.

b) Montrer que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

c) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ S_n \leq 2 - \frac{1}{n}$.

d) En déduire que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est convergente.

3 CRITÈRES DE CONVERGENCE LIMITE D'UNE SUITE GÉOMÉTRIQUE

3.1. CRITÈRES DE CONVERGENCE

Proposition 6

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ deux suites numériques telles que pour tout $n \geq n_0$: $u_n \leq v_n$.

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Exemples

1) Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_n = -n + \cos\sqrt{n} - 1$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\cos\sqrt{n} \leq 1$. Donc : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n \leq -n$.

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}(-n) = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

2) Soit (u_n) la suite numérique définie par : $v_n = \sqrt[3]{n^6 + 1 - \sin n}$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\sin n \leq 1$, donc $-\sin n \geq -1$. Il s'ensuit donc que : $n^6 + 1 - \sin n \geq n^6$,

c'est-à-dire : $\sqrt[3]{n^6 + 1 - \sin n} \geq \sqrt[3]{n^6}$. Par conséquent : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n \geq n^2$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

3) On considère la suite numérique (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n > n^2$.

- Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1$; donc : $u_0 > 0$.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n > n^2$ et montrons que $u_{n+1} > (n+1)^2$.

For more visit: L9ray.com

On a : $u_n > n^2$, donc : $u_n + 2n + 3 > n^2 + 2n + 3 > (n+1)^2$.

• Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n > n^2$.

Déterminons maintenant la limite de la suite (u_n) :

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n > n^2$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Théorème 2

Soit $(v_n)_{n\geq n_0}$ et $(w_n)_{n\geq n_0}$ deux suites numériques convergeant vers une limite commune ℓ.

Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite vérifiant l'encadrement $v_n \leq u_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang, alors la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ converge et sa limite vaut ℓ. Ce résultat est appelé « Théorème des limites comparées»

Exemples

1) On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 1}$ définie sur $\mathbb{N}^*$: $u_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^4+1}} + \dfrac{n}{\sqrt{n^4+2}} + \ldots + \dfrac{n}{\sqrt{n^4+n}}$.

Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{n^2}{\sqrt{n^4+n}} \leq u_n \leq \dfrac{n^2}{\sqrt{n^4+1}}$.

Pour tout $k \in \{1,2,\ldots,n\}$, on a :

$$1 \leq k \leq n \Leftrightarrow n^4+1 \leq n^4+k \leq n^4+n \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n^4+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^4+k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^4+1}}$$

Par conséquent : $\dfrac{n}{\sqrt{n^4+n}} \leq \dfrac{n}{\sqrt{n^4+k}} \leq \dfrac{n}{\sqrt{n^4+1}}$. En particulier :

$$\frac{n}{\sqrt{n^4+n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^4+1}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^4+1}}$$
$$\frac{n}{\sqrt{n^4+n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^4+2}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^4+1}}$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$\frac{n}{\sqrt{n^4+n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^4+n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^4+1}}$$

En additionnant les membres de ces inégalités, terme à terme, et après simplification on obtient :

$$\frac{n}{\sqrt{n^4+n}} + \frac{n}{\sqrt{n^4+n}} + \ldots + \frac{n}{\sqrt{n^4+n}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^4+1}} + \frac{n}{\sqrt{n^4+1}} + \ldots + \frac{n}{\sqrt{n^4+1}}$$

Ce qui donne : $\dfrac{n^2}{\sqrt{n^4+n}} \leq u_n \leq \dfrac{n^2}{\sqrt{n^4+1}}$. D'où le résultat.

Déterminons maintenant la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$:

For more visit: L9ray.com

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2}{\sqrt{n^4+n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2}{\sqrt{n^4\left(1+\dfrac{1}{n^3}\right)}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{\left(1+\dfrac{1}{n^3}\right)}}=1$ car : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^3}=0$.

et : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2}{\sqrt{n^4+1}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2}{\sqrt{n^4\left(1+\dfrac{1}{n^4}\right)}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{\left(1+\dfrac{1}{n^4}\right)}}=1$ car : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^4}=0$.

D'après le théorème des limites comparées, on en déduit que $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$.

2) On considère la suite numérique (v_n) définie par : $v_n=\dfrac{n+\cos n}{n^2+1}$.

Montrons que la suite (v_n) est convergente et calculons sa limite :

On a pour tout $n\in\mathbb{N}$: $-1\leq\cos n\leq 1$. Donc : $n-1\leq n+\cos n\leq n+1$.

Il en résulte donc que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\dfrac{n-1}{n^2+1}\leq v_n\leq\dfrac{n+1}{n^2+1}$.

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n-1}{n^2+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n^2}}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n+1}{n^2+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n^2}}=0$.

D'après le théorème des limites comparées, on en déduit que (v_n) est convergente et que $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$.

3) On considère la suite numérique (w_n) définie par : $w_n=\dfrac{5n+(-1)^n}{3n+2}$.

Montrons que la suite (w_n) est convergente et calculons sa limite :

On a pour tout $n\in\mathbb{N}$: $-1\leq(-1)^n\leq 1$. Donc : $5n-1\leq 5n+(-1)^n\leq 5n+1$.

Il en résulte donc que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\dfrac{5n-1}{3n+2}\leq w_n\leq\dfrac{5n+1}{3n+2}$.

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{5n-1}{3n+2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{5-\dfrac{1}{n}}{3+\dfrac{2}{n}}=\dfrac{5}{3}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{5n+1}{3n+2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{5+\dfrac{1}{n}}{3+\dfrac{2}{n}}=\dfrac{5}{3}$ car : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$.

D'après le théorème des limites comparées, on en déduit que (w_n) est convergente et que $\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=\dfrac{5}{3}$.

Applications

1. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite numérique définie par : $u_n=\dfrac{3n+\cos\dfrac{5}{n}}{n+1}$.

a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ \dfrac{3n-1}{n+1}\leq u_n\leq\dfrac{3n+1}{n+1}$.

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

For more visit: L9ray.com

2. Soit (v_n) la suite numérique définie par : $v_n = \dfrac{\sqrt{n}\sin(n)}{n+1}$.

Montrer que la suite (v_n) est convergente et calculer sa limite.

3. Soit $(S_n)_{n\geq 1}$ la suite numérique définie par : $S_n = \dfrac{n}{n^2+\sqrt{1}} + \dfrac{n}{n^2+\sqrt{2}} + \ldots + \dfrac{n}{n^2+\sqrt{n}}$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{n^2}{n^2+\sqrt{n}} \leq S_n \leq \dfrac{n^2}{n^2+\sqrt{1}}$.

b) En déduire que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

Corollaire

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite numérique et ℓ un nombre réel. S'il existe une suite $(v_n)_{n\geq n_0}$ tendant vers 0 telle que pour tout $n \geq n_0$, $|u_n - \ell| \leq v_n$, alors la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ converge et sa limite vaut ℓ.

Preuve

On a pour tout $n \geq n_0$: $|u_n - \ell| \leq v_n \Leftrightarrow \ell - v_n \leq u_n \leq \ell + v_n$.

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(\ell - v_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}(\ell + v_n) = \ell$. D'après le théorème des gendarmes, on en déduit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ converge et sa limite vaut ℓ. D'où le résultat.

Exemples

1) Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite numérique définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = 2 + \dfrac{\sin n}{n^2}$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $|u_n - 2| = \dfrac{|\sin n|}{n^2}$ et $|\sin n| \leq 1$. Par conséquent : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ |u_n - 2| \leq \dfrac{1}{n^2}$.

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$, alors la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente et de plus : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

2) Soit (v_n) la suite numérique définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = -3 + \dfrac{(-1)^n}{n+1}$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $|v_n + 3| = \dfrac{|(-1)^n|}{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$. Par conséquent : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ |v_n + 3| \leq \dfrac{1}{n}$.

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, alors la suite (v_n) est convergente et de plus : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -3$.

Applications

1. On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par : $u_n = \dfrac{1}{2} + (-1)^n\left(\sqrt{n^2+1} - n\right)$

a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} \leq \dfrac{1}{2n}$

For more visit: L9ray.com

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\left|u_n - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2n}$.

c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

2. Soit $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite numérique définie par : $v_n = -5 + \frac{(-1)^n \cos n}{n+2}$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $|v_n + 5| \leq \frac{1}{n}$.

b) En déduire que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

3.2. LIMITE D'UNE SUITE GÉOMÉTRIQUE

Proposition 7

Soit q un nombre réel non nul.

- Si $q > 1$ alors $\lim q^n = +\infty$.
- Si $-1 < q < 1$ alors $\lim q^n = 0$.
- Si $q = 1$ alors $\lim q^n = 1$.
- Si $q \leq -1$ alors la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite.

Exemples

1) On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = 0$ car : $-1 < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$. De même : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n = 0$ car $-1 < -\frac{1}{4} < 1$.

2) On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$ car $\frac{3}{2} > 1$. Par contre, la suite $\left(\left(-\frac{3}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite quand n tend vers $+\infty$.

3) Calculons la limite de la suite (u_n) définie par : $u_n = \frac{2^n + 5^n}{3^n - 5^n}$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^n + 1}{\left(\frac{3}{5}\right)^n - 1}$. Puisque $\left|\frac{2}{5}\right| < 1$ et $\left|\frac{3}{5}\right| < 1$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$

Par suite : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$.

Applications

1. Pour chacun des cas suivants, déterminer la limite de la suite (u_n) définie par :

a) $u_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n$; b) $u_n = \left(-\frac{3}{7}\right)^n$; c) $u_n = \left(\frac{\pi}{3}\right)^n$; d) $u_n = \frac{4^n}{3^{2n}}$; e) $u_n = \frac{2^n - 1}{2^n + 4}$

For more visit: L9ray.com

2. Déterminer la limite de chacune des suites définies par :

$$a_n = \left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^n \quad ; \quad b_n = \frac{3^n+5^n}{2^n+7^n} \quad ; \quad c_n = \frac{7\times(-0,8)^n+9}{(-0,8)^n+17} \quad ; \quad d_n = \frac{7^n-5^{n+1}}{7^n+11\times 2^n}$$

3. Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{7u_n+6}{u_n+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ u_n > 0$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_{n+1}-6| \le \frac{1}{2}|u_n-6|$.

c) En utilisant un raisonnement par récurrence, montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ |u_n-6| \le 5\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

d) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

4 SUITES DE LA FORME $U_{n+1}=f(U_n)$ ET $V_n=f(U_n)$

4.1. LIMITE D'UNE SUITE DE LA FORME $V_n=f(U_n)$

Proposition 8

Si une suite (u_n) est convergente vers ℓ et f est une fonction continue en ℓ, alors la suite (v_n) définie par $v_n = f(u_n)$ est convergente et sa limite est $f(\ell)$.

Exemple

Soit (v_n) la suite numérique définie par : $v_n = \tan\left(\dfrac{\pi n+1}{3n+2}\right)$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \dfrac{\pi n+1}{3n+2}$. On a donc $v_n = f(u_n)$ avec $f(x) = \tan x$.

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\pi n+1}{3n+2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\pi+\frac{1}{n}}{3+\frac{2}{n}} = \dfrac{\pi}{3}$. Puisque la fonction f est continue en $\dfrac{\pi}{3}$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

En résumé : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \sqrt{3}$.

Applications

Déterminer les limites des suites numériques définies par :

$$u_n = \sqrt[3]{\frac{24n^4-n+1}{3n^4-n^2-7}} \quad ; \quad v_n = \sqrt[4]{\frac{2n^2+1}{16n^3-3n+1}} \quad ; \quad w_n = \cos\left(\frac{n\pi-2}{n^2+1}\right) \quad ; \quad t_n = \sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$$

For more visit: L9ray.com

L9RAY

4.2. LIMITE DE LA SUITE (n^r) OÙ $r \in \mathbb{Q}^*$

Proposition 9

Soit r un nombre rationnel non nul.

- Si $r > 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n^r = +\infty$.
- Si $r < 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n^r = 0$.

Exemples

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{5}{6}} = +\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{2}{7}} = +\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{-\frac{2}{3}} = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{-\frac{20}{17}} = 0$

4.3. SUITE DE LA FORME $U_{n+1} = f(U_n)$

Proposition 10

Soit f une fonction continue sur un intervalle I telle que $f(I) \subset I$.

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite réelle définie par $u_{n_0} \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier $n \geq n_0$.

Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est convergente de limite ℓ et $\ell \in I$, alors ℓ est solution dans I de l'équation $f(x) = x$.

Exemple

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+u_n}{2}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Étudions la convergence de la suite (u_n) :

On considère la fonction numérique f définie sur $I = [0;1]$ par : $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$

- La fonction f est continue et croissante sur I ; donc : $f(I) = [f(0); f(1)] = \left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$.

  Par conséquent : $f(I) \subset I$.

- Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$:

  Initialisation: Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1$ donc $0 \leq u_0 \leq 1$.

  Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $0 \leq u_n \leq 1$ et montrons que $0 \leq u_{n+1} \leq 1$.

  On a $0 \leq u_n \leq 1$, c'est-à-dire $u_n \in I$, donc $f(u_n) \in f(I)$. Comme $u_{n+1} = f(u_n)$ et $f(I) \subset I$, alors $u_{n+1} \in I$, d'où $0 \leq u_{n+1} \leq 1$.

  Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.

For more visit: L9ray.com

▪ Étudions la monotonie de la suite (u_n) :

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1}-u_n=\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}-u_n=\left(\frac{1+u_n}{2}-u_n^2\right)\frac{1}{\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}+u_n}=\frac{1+u_n-2u_n^2}{2\left(\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}+u_n\right)}=-\frac{(2u_n+1)(1-u_n)}{2\left(\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}+u_n\right)}$$

Puisque $0 \le u_n \le 1$ alors $-\dfrac{(2u_n+1)(1-u_n)}{2\left(\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}+u_n\right)} \le 0$, et donc $u_{n+1}-u_n \le 0$. La suite (u_n) est décroissante.

▪ Puisque la suite (u_n) est décroissante minorée par 0, alors elle est convergente. Soit ℓ sa limite.

D'après la proposition 10, la limite ℓ vérifie : $f(\ell)=\ell$ et $0 \le \ell \le 1$

On a : $f(\ell)=\ell \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1+\ell}{2}}=\ell \Leftrightarrow 2\ell^2-\ell-1=0 \Leftrightarrow \left(\ell=0 \text{ ou } \ell=-\frac{1}{2}\right)$

Comme $0 \le \ell \le 1$ alors $\ell=0$. Ainsi, la suite (u_n) converge vers 0.

Applications

1. Soit f la fonction numérique définie sur $I=[4;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x}-1}$

a) Étudier les variations de la fonction f.

b) Montrer que pour tout $x \in I$: $f(x) \le x$.

c) On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0=5$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c$_1$) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n \ge 4$.

c$_2$) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c$_3$) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

2. Soit f la fonction numérique définie sur $[0;2]$ par : $f(x)=\sqrt[3]{x^2+2x}$

a) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0;2]$.

b) En déduire que : $f([0;2])=[0;2]$.

c) Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0=\dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1}=\sqrt[3]{u_n^2+2u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c$_1$) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0<u_n<2$

c$_2$) Montrer que pour tout $x \in [0;2]$: $f(x)>x$.

c$_3$) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

c$_4$) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

For more visit: L9ray.com

L9RAY

A LIMITE D'UNE SUITE – CRITÈRES DE CONVERGENCE

1) Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la suite (u_n) :

a) $u_n = \dfrac{-3n^2+n}{4n^3+2}$; b) $u_n = 2n+3-\sqrt{4n^2-n}$; c) $u_n = \sin\left(\dfrac{\pi n+1}{4n+3}\right)$; d) $u_n = \tan\left(\dfrac{\sqrt[3]{n}}{n+1}\right)$

2) Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la suite (u_n) :

a) $u_n = \dfrac{4^n}{3^{2n}}$; b) $u_n = \left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^n$; c) $u_n = \left(-\dfrac{2}{5}\right)^n$; d) $u_n = \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{3}}\right)^n$; e) $u_n = \dfrac{2^n+5^n}{3^n+7^n}$

3) Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_n = 5n+3\sin n-1$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \geq 5n-4$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4) Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_n = -4\sqrt{n}+3\cos^2 n+2(-1)^n$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leq -4\sqrt{n}+5$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

5) Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite numérique définie par : $u_n = \dfrac{1}{n+\sqrt{1}}+\dfrac{1}{n+\sqrt{2}}+\ldots+\dfrac{1}{n+\sqrt{n}}$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1} \leq u_n \leq \dfrac{n}{n+1}$.

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

6) Soit α un nombre réel et (u_n) une suite numérique vérifiant :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |u_{n+1}-\alpha| \leq k|u_n-\alpha| \quad \text{avec } k \in]0;1[$$

a) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ |u_n-\alpha| \leq k^n|u_0-\alpha|$.

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

SOLUTION

1) Détermination de la limite de la suite (u_n) :

a) On a :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\left(-3+\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(4n+\frac{2}{n^2}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-3+\frac{1}{n}}{4n+\frac{2}{n^2}} = 0 \quad \text{car : } \lim_{n\to+\infty}\left(-3+\frac{1}{n}\right) = -3 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}\left(4n+\frac{2}{n^2}\right) = +\infty$$

b) On a :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left(2n+3-\sqrt{4n^2-n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(3+\frac{4n^2-\left(4n^2-n\right)}{2n+\sqrt{4n^2-n}}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(3+\frac{n}{2n+\sqrt{4n^2-n}}\right)$$

For more visit: L9ray.com

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(3+\dfrac{n}{n\left(2+\sqrt{4-\dfrac{1}{n}}\right)}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(3+\dfrac{1}{2+\sqrt{4-\dfrac{1}{n}}}\right) = 3+\dfrac{1}{4} = \dfrac{13}{4}$ car : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$.

c) On a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\pi n+1}{4n+3} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n\left(\pi+\dfrac{1}{n}\right)}{n\left(4+\dfrac{3}{n}\right)} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\pi+\dfrac{1}{n}}{4+\dfrac{3}{n}} = \dfrac{\pi}{4}$ car $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$.

Puisque la fonction sin est continue en $\dfrac{\pi}{4}$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

d) On a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n}}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n}}{n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)} = 0$ car $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[3]{n^2}=+\infty$.

Puisque la fonction tan est continue en 0, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \tan 0 = 0$.

- En termes de notation, comme la limite d'une suite s'étudiera toujours lorsque $n\to+\infty$, on peut écrire indifféremment $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ou $\lim u_n$.
- Les règles sur les limites de suites ne s'appliquent pas toujours. On peut se trouver en présence de ce qu'on appelle des « formes indéterminées ».
  Avant de tenter de calculer une limite, il faut analyser la situation et se ramener à des situations où les règles sur les opérations s'appliquent.



2) Détermination de la limite de la suite (u_n) :

a) On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{4^n}{3^{2n}} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{4}{9}\right)^n = 0$ car : $-1<\dfrac{4}{9}<1$.

b) On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^n = 0$ car : $-1<\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}<1$.

c) On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\dfrac{2}{5}\right)^n = 0$ car : $-1<-\dfrac{2}{5}<1$.

d) On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{3}}\right)^n = +\infty$ car : $\dfrac{1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{3}}>1$.

e) On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{7^n\left(\left(\dfrac{2}{7}\right)^n+\left(\dfrac{5}{7}\right)^n\right)}{7^n\left(\left(\dfrac{3}{7}\right)^n+1\right)} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\left(\dfrac{2}{7}\right)^n+\left(\dfrac{5}{7}\right)^n}{\left(\dfrac{3}{7}\right)^n+1} = 0$ car :

For more visit: L9ray.com

L9RAY

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{7}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{7}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{7}\right)^n = 0$ (les réels $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}$ et $\frac{5}{7}$ appartiennent à l'intervalle $]-1;1[$)

3) Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_n = 5n + 3\sin n - 1$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\sin n \geq -1$; donc : $3\sin n - 1 \geq -4$. D'où : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n \geq 5n - 4$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}(5n-4) = +\infty$, alors d'après les critères de convergence : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

4) Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_n = -4\sqrt{n} + 3\cos^2 n + 2(-1)^n$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\cos^2 n \leq 1$ et $(-1)^n \leq 1$; donc : $3\cos^2 n + 2(-1)^n \leq 5$.

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n \leq -4\sqrt{n} + 5$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-4\sqrt{n}+5\right) = -\infty$, alors d'après les critères de convergence : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.



- Pour montrer qu'une suite (u_n) converge et trouver sa limite, on essaie d'exprimer le terme général u_n de façon à pouvoir appliquer les théorèmes généraux comme :
  - Les théorèmes d'encadrement ou des limites comparées :

$$\begin{cases} v_n \leq u_n \leq w_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \quad ; \quad \begin{cases} |u_n - \ell| \leq v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$

  - Les opérations sur les limites :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = \ell + \ell' \\ \lim\limits_{n\to+\infty}(u_n v_n) = \ell\ell' \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \neq 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell' \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\ell} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{v_n} = \sqrt{\ell'} \end{cases}$$

  - Utilisation des limites des fonctions numériques : $\begin{cases} u_n = f(n) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.
  - Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et f est continue en ℓ, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$.
  - Si $q \in]-1;1[$ alors la suite (q^n) est convergente et de limite nulle : $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.
- On retiendra que lorsque l'on « passe » aux limites dans des inégalités, on perd les inégalités strictes.
- Il ne faut pas « passer » à la limite dans des inégalités avant de prouver que toutes les suites concernées convergent.
- Pour encadrer une somme, il suffit parfois d'encadrer chacun des termes de la somme.

5) Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite numérique définie par : $u_n = \frac{1}{n+\sqrt{1}} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{n+\sqrt{n}}$

a) Pour tout $k \in \{1;2;3;\ldots;n\}$, on a : $1 \leq \sqrt{k} \leq \sqrt{n}$. Il en résulte donc : $n+1 \leq n+\sqrt{k} \leq n+\sqrt{n}$

et alors : $\frac{1}{n+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n+\sqrt{k}} \leq \frac{1}{n+1}$. En particulier :

For more visit: L9ray.com

$$\frac{1}{n+\sqrt{n}} \le \frac{1}{n+\sqrt{1}} \le \frac{1}{n+1}$$
$$\frac{1}{n+\sqrt{n}} \le \frac{1}{n+\sqrt{2}} \le \frac{1}{n+1}$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$\frac{1}{n+\sqrt{n}} \le \frac{1}{n+\sqrt{n}} \le \frac{1}{n+1}$$

En additionnant les membres de ces inégalités, terme à terme, et après simplification on obtient :

$$\frac{n}{n+\sqrt{n}} \le u_n \le \frac{n}{n+1}$$

Par suite : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1} \le u_n \le \frac{n}{n+1}$.

b) D'après la question précédente, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1} \le u_n \le \frac{n}{n+1}$.

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$ car : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

D'après les critères de convergence, la suite $(u_n)_{n\ge1}$ est convergente et on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

6) Soit α un nombre réel et (u_n) une suite numérique vérifiant :

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ |u_{n+1} - \alpha| \le k|u_n - \alpha| \quad \text{avec } k \in]0;1[$$

a) Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ |u_n - \alpha| \le k^n |u_0 - \alpha|$.

Initialisation : Pour $n = 0$, on a bien : $|u_0 - \alpha| \le k^0 |u_0 - \alpha|$ $(k^0 = 1)$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $|u_n - \alpha| \le k^n |u_0 - \alpha|$ et montrons que : $|u_{n+1} - \alpha| \le k^{n+1} |u_0 - \alpha|$.

On a : $|u_n - \alpha| \le k^n |u_0 - \alpha|$; donc : $k|u_n - \alpha| \le k^{n+1} |u_0 - \alpha|$.

Puisque $|u_{n+1} - \alpha| \le k|u_n - \alpha|$, alors : $|u_{n+1} - \alpha| \le k|u_n - \alpha| \le k^{n+1} |u_0 - \alpha|$.

On conclut donc que : $|u_{n+1} - \alpha| \le k^{n+1} |u_0 - \alpha|$.

Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N})\ |u_n - \alpha| \le k^n |u_0 - \alpha|$

b) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_n - \alpha| \le k^n |u_0 - \alpha|$.

Puisque $k \in]0;1[$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} k^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} k^n |u_0 - \alpha| = 0$.

D'après les critères de convergence, la suite (u_n) est convergente et de plus : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

For more visit: L9ray.com

B ÉTUDE D'UNE SUITE RÉCURRENTE (1)

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $I=[2;3]$ par : $f(x)=\dfrac{x^2+4}{2x}$.

1) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle I puis en déduire que $f(I)\subset I$.

2) On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0=\dfrac{5}{2}$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

a) Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ 2\le u_n\le 3$.

b) Étudier la monotonie de la suite (u_n).

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

SOLUTION

1) La fonction f est dérivable sur l'intervalle I et on a pour tout $x\in I$:

$$f'(x)=\left(\frac{x^2+4}{2x}\right)'=\frac{2x\left(x^2+4\right)'-(2x)'\left(x^2+4\right)}{4x^2}=\frac{x^2-4}{2x^2}$$

On a pour tout $x\in\left]2;3\right]$: $x^2>4$; ce qui entraîne que $f'(x)>0$.

Ainsi, la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle I.

Puisque la fonction f est continue et strictement croissante sur I, alors :

$f(I)=f([2;3])=[f(2);f(3)]=\left[2;\dfrac{13}{6}\right]$. Par suite : $f(I)\subset I$.

2) On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0=\dfrac{5}{2}$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

a) Montrons par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ 2\le u_n\le 3$.

Initialisation : Pour $n=0$, on a : $u_0=\dfrac{5}{2}$. Donc : $2\le u_0\le 3$.

Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons que : $2\le u_n\le 3$ et montrons que : $2\le u_{n+1}\le 3$.

On a : $2\le u_n\le 3$, donc : $u_n\in I$ et alors $f(u_n)\in f(I)$.

D'après la question précédente, on a : $f(I)\subset I$. Il s'ensuit donc que $f(u_n)\in I$, c'est-à-dire $u_{n+1}\in I$.

Par suite : $2\le u_{n+1}\le 3$

Conclusion : $(\forall n\in\mathbb{N})\ 2\le u_n\le 3$

b) Monotonie de la suite (u_n) :

On a pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_n^2+4}{2u_n}-u_n=\dfrac{u_n^2+4-2u_n^2}{2u_n}=\dfrac{4-u_n^2}{2u_n}=\dfrac{(2-u_n)(2+u_n)}{2u_n}$.

For more visit: L9ray.com

Puisque $2 \le u_n \le 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors : $2-u_n < 0$ et $2+u_n > 0$ et $2u_n > 0$.

Il en résulte donc $\dfrac{(2-u_n)(2+u_n)}{2u_n} < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} - u_n < 0$.

Ainsi, la suite (u_n) est strictement décroissante.

c) Puisque la suite (u_n) est décroissante minorée par 2, alors elle est convergente.

Calculons maintenant sa limite :

On a les conditions suivantes :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 \in I$;
- La fonction f est continue sur l'intervalle I avec $f(I) \subset I$.
- La suite (u_n) est convergente.

Il s'ensuit donc que la limite de la suite (u_n) est solution de l'équation $f(x) = x$.

On a : $f(x) = x \Leftrightarrow \dfrac{x^2+4}{2x} = x \Leftrightarrow x^2+4 = 2x^2 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow (x = 2 \text{ ou } x = -2)$.

Comme $2 \le u_n \le 3$, alors : $2 \le \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \le 3$. Par suite : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

- Pour montrer qu'une suite (u_n) diverge, on essaye d'exprimer le terme général u_n de façon à pouvoir appliquer les théorèmes généraux comme :
  - Les théorèmes d'encadrement ou des limites comparées:

$$\begin{cases} v_n \le u_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \quad ; \quad \begin{cases} u_n \le v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$

  - Les opérations sur les limites : (À titre d'exemple)

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = \pm\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = \pm\infty \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{u_n} = +\infty \end{cases}$$

  - Utilisation des limites des fonctions numériques : $\begin{cases} u_n = f(n) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$

- Lorsque l'on sait qu'une suite (u_n) est croissante (respectivement décroissante) pour démontrer qu'elle est convergente, il suffit de montrer qu'elle est majorée (respectivement minorée).
- Pour déterminer la limite des suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$, on se base sur la propriété suivante :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I tel que $f(I) \subset I$ et $u_0 \in I$.

Si la suite (u_n) converge, alors sa limite ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

un tel réel ℓ est appelé point fixe de la fonction f.

For more visit: L9ray.com

C ÉTUDE D'UNE SUITE RÉCURRENTE (2)

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2}{2u_n + 3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On étudiera la suite numérique (u_n) par trois méthodes différentes.

1ère méthode :

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ u_n \geq 1$.

2) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ u_{n+1} - u_n = \dfrac{2(1-u_n)(1+u_n)}{2u_n + 3}$ puis préciser la monotonie de la suite (u_n).

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq u_{n+1} - 1 \leq \dfrac{1}{5}(u_n - 1)$.

b) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ |u_n - 1| \leq \left(\dfrac{1}{5}\right)^n$.

c) En déduire la limite de la suite (u_n).

2ème méthode :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$

1) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{5}$.

2) Exprimer v_n et u_n en fonction de n.

3) Déterminer la limite de la suite (u_n).

3ème méthode :

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $I = [1;2]$ par : $f(x) = \dfrac{3x+2}{2x+3}$.

1) a) Étudier les variations de la fonction f sur I et en déduire que : $f(I) \subset I$.

b) Montrer que pour tout $x \in I$: $f(x) \leq x$.

2) a) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ 1 \leq u_n \leq 2$.

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.

SOLUTION

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2}{2u_n + 3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1ère méthode :

1) Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ u_n \geq 1$.

For more visit: L9ray.com

Initialisation : Pour $n=0$, on a : $u_0=2$. Donc : $u_0 \geq 1$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que : $u_n \geq 1$ et montrons que : $u_{n+1} \geq 1$.

On a : $u_{n+1}-1=\dfrac{3u_n+2}{2u_n+3}-1=\dfrac{3u_n+2-2u_n-3}{2u_n+3}=\dfrac{u_n-1}{2u_n+3}$

Par hypothèse, on a : $u_n \geq 1$, donc : $u_n-1 \geq 0$ et $2u_n+3>0$, et alors : $\dfrac{u_n-1}{2u_n+3} \geq 0$. Par suite : $u_{n+1} \geq 1$

Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n \geq 1$.

2) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1}-u_n=\dfrac{3u_n+2}{2u_n+3}-u_n=\dfrac{3u_n+2-2u_n^2-3u_n}{2u_n+3}=\dfrac{2\left(1-u_n^2\right)}{2u_n+3}$

Par suite : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1}-u_n=\dfrac{2(1-u_n)(1+u_n)}{2u_n+3}$

Monotonie de la suite (u_n) :

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \geq 1$; donc : $1-u_n \leq 0$ et $1+u_n \geq 0$ et $2u_n+3>0$.

Il s'ensuit donc que : $\dfrac{2(1-u_n)(1+u_n)}{2u_n+3} \leq 0$, c'est-à-dire : $u_{n+1}-u_n \leq 0$.

Ainsi, la suite (u_n) est décroissante.

3) Puisque la suite (u_n) est décroissante minorée par 1, alors elle est convergente.

4) a) Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq u_{n+1}-1 \leq \dfrac{1}{5}(u_n-1)$.

D'après la question 1), on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \geq 1$. Il s'ensuit donc que : $u_{n+1} \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Par conséquent : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 \leq u_{n+1}-1$.

D'autre part, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{5}(u_n-1)-(u_{n+1}-1)=\frac{1}{5}(u_n-1)-\frac{u_n-1}{2u_n+3}=(u_n-1)\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2u_n+3}\right)=\frac{(u_n-1)(2u_n-2)}{5(2u_n+3)}$$

Par conséquent, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{5}(u_n-1)-(u_{n+1}-1)=\frac{2(u_n-1)^2}{5(2u_n+3)}$$

On sait que : $(u_n-1)^2 \geq 0$ et $2u_n+3>0$; il s'ensuit donc que : $\dfrac{2(u_n-1)^2}{5(2u_n+3)} \geq 0$, c'est-à-dire :

$u_{n+1}-1 \leq \dfrac{1}{5}(u_n-1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq u_{n+1}-1 \leq \dfrac{1}{5}(u_n-1)$.

For more visit: L9ray.com

L9RAY

b) Montrer par récurrence que : $|u_n - 1| \leq \left(\frac{1}{5}\right)^n$.

Initialisation : Pour $n = 0$, on a bien : $|u_0 - 1| \leq \left(\frac{1}{5}\right)^0$ $(1 \leq 1)$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $|u_n - 1| \leq \left(\frac{1}{5}\right)^n$ et montrons que : $|u_{n+1} - 1| \leq \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$.

On a : $|u_n - 1| \leq \left(\frac{1}{5}\right)^n$; donc : $\frac{1}{5}|u_n - 1| \leq \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$ (1)

Puisque $0 \leq u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{5}(u_n - 1)$, alors : $|u_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{5}|u_n - 1|$ (2)

De (1) et (2), on en déduite que : $|u_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{5}|u_n - 1| \leq \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$.

Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N})\ |u_n - 1| \leq \left(\frac{1}{5}\right)^n$

c) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_n - 1| \leq \left(\frac{1}{5}\right)^n$. Puisque $\frac{1}{5} \in]-1;1[$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$.

D'après les critères de convergence, on en déduite que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

2ème méthode :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$

1) Montrons que la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$:

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} = \frac{\frac{3u_n + 2}{2u_n + 3} - 1}{\frac{3u_n + 2}{2u_n + 3} + 1} = \frac{3u_n + 2 - 2u_n - 3}{3u_n + 2 + 2u_n + 3} = \frac{u_n - 1}{5(u_n + 1)} = \frac{1}{5} v_n$$

Ainsi, la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$.

2) Expression de v_n et u_n en fonction de n.

Puisque la suite (v_n) est géométrique, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = v_0 q^n$ avec $q = \frac{1}{5}$ et $v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 1} = \frac{1}{3}$.

Par conséquent : $(\forall n \in \mathbb{N})\ v_n = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n$.

De l'égalité $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$, on tire : $v_n(u_n + 1) = u_n - 1$, ce qui donne : $u_n(v_n - 1) = -1 - v_n$.

For more visit: L9ray.com

Il en résulte donc : $u_n = \dfrac{1+v_n}{1-v_n} = \dfrac{1+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1-\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{5}\right)^n}$. Par suite : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n = \dfrac{3+\left(\frac{1}{5}\right)^n}{3-\left(\frac{1}{5}\right)^n}$

3) Détermination de la limite de la suite (u_n) :

On a pour tout : $u_n = \dfrac{3+\left(\frac{1}{5}\right)^n}{3-\left(\frac{1}{5}\right)^n}$. Puisque $\frac{1}{5} \in]-1;1[$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$.

Par conséquent : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{3+0}{3-0} = 1$.

3ème méthode :

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $I=[1;2]$ par : $f(x)=\dfrac{3x+2}{2x+3}$.

1) a) Variations de la fonction f sur I :

La fonction f étant dérivable sur I et on a pour tout $x \in I$: $f'(x) = \left(\dfrac{3x+2}{2x+3}\right)' = \dfrac{5}{(2x+3)^2}$.

Puisque $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$, alors la fonction f est strictement croissante sur I.

Comme la fonction f est continue et strictement croissante sur I, alors :

$$f(I) = f([1;2]) = [f(1);f(2)] = \left[1;\frac{8}{7}\right]$$

Par suite : $f(I) \subset I$.

b) Montrons que pour tout $x \in I$: $f(x) \le x$.

On a pour tout $x \in I$: $x - f(x) = x - \dfrac{3x+2}{2x+3} = \dfrac{2x^2+3x-3x-2}{2x+3} = \dfrac{2(x^2-1)}{2x+3} = \dfrac{2(x-1)(x+1)}{2x+3}$.

Comme $1 \le x \le 2$, alors : $x-1 \ge 0$ et $x+1 \ge 0$ et $2x+3 > 0$. D'où : $\dfrac{2(x-1)(x+1)}{2x+3} \ge 0$.

Par suite, pour tout $x \in I$: $f(x) \le x$.

2) a) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 1 \le u_n \le 2$.

Initialisation : Pour $n=0$, on a : $u_0 = 2$. Donc : $1 \le u_0 \le 2$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que : $1 \le u_n \le 3$ et montrons que : $1 \le u_{n+1} \le 2$.

On a : $1 \le u_n \le 2$, donc : $u_n \in I$ et alors $f(u_n) \in f(I)$.

D'après la question précédente, on a : $f(I) \subset I$. Il s'ensuit donc que $f(u_n) \in I$, c'est-à-dire $u_{n+1} \in I$.

Par suite : $1 \le u_{n+1} \le 2$

Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 1 \le u_n \le 2$.

For more visit: L9ray.com

L9RAY

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante :

D'après la question **1)** b), on a pour tout $x \in I$: $f(x) \leq x$.

Par ailleurs, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \in I$. Il en résulte donc que : $f(u_n) \leq u_n$, c'est-à-dire : $u_{n+1} \leq u_n$.

Ainsi, la suite (u_n) est décroissante.

c) Puisque la suite (u_n) est décroissante minorée par 1, alors elle est convergente.

Déterminons maintenant sa limite :
On a les conditions suivantes :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 \in I$;
- La fonction f est continue sur l'intervalle I avec $f(I) \subset I$.
- La suite (u_n) est convergente.

Il s'ensuit donc que la limite de la suite (u_n) est solution de l'équation $f(x) = x$.

On a : $f(x) = x \Leftrightarrow \dfrac{3x+2}{2x+3} = x \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x = 1 \text{ ou } x = -1)$

Comme $1 \leq u_n \leq 2$, alors : $1 \leq \lim\limits_{n \to +\infty} u_n \leq 2$. Par suite : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

- Pour comparer deux éléments d'un intervalle I, on peut comparer leurs images par une fonction f **strictement monotone** sur I. Plus précisément : soient $(x; y) \in I^2$.
  - Si f est strictement croissante sur I avec $f(x) \leq f(y)$ alors $x \leq y$.
  - Si f est strictement décroissante sur I avec $f(x) \leq f(y)$ alors $x \geq y$.



For more visit: L9ray.com

EXERCICES D'APPLICATION

LIMITE D'UNE SUITE NUMÉRIQUE

EXERCICE 01

Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la suite (u_n) définie par :

1) $u_n = 2n^3 - 3n^2 + 4n + 7$; 2) $u_n = n^2 - 5\sqrt{n}$

3) $u_n = \dfrac{1-2n}{3n-5}$; 4) $u_n = \dfrac{6n^2 - 3n + 4}{n-7}$

5) $u_n = \dfrac{3n+4}{n^3 - n + 3}$; 6) $u_n = \dfrac{n^2 + 5n}{3n^2 + 1}$

7) $u_n = \dfrac{-n^3 + 4n^2}{3n^2 - 5n + 9}$; 8) $u_n = \dfrac{1-n}{1+\sqrt{n}}$

EXERCICE 02

Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la suite (u_n) définie par :

1) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$; 2) $u_n = \sqrt{3n^2 + 4} - \sqrt{n^2 + 5}$

3) $u_n = \dfrac{n\sqrt{n+1} - 1}{n+1}$; 4) $u_n = \dfrac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}}$

5) $u_n = \dfrac{n+1}{\sqrt{n+2}} - \dfrac{n+1}{\sqrt{n+3}}$; 6) $u_n = \dfrac{\sqrt[3]{8n^3 - n^2 + 1}}{3n-2}$

7) $u_n = \dfrac{\sqrt{2n^2 + 3n + 2}}{2n - \sqrt{4n^2 + 1}}$; 8) $u_n = \dfrac{\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 1}}{\sqrt{n^2 + 1}}$

EXERCICE 03

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2 + n} - 3n + \dfrac{1}{n}\right)$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{4n^2 + n} - 2n + 1\right)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n^2 - n - \sqrt[3]{n} + 1\right)$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n-1}\right)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n^{\frac{2}{3}} - n^{-\frac{1}{3}}\right)$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^{\frac{3}{5}} + n^{\frac{6}{7}}}{n^{\frac{2}{3}} + n^{\frac{4}{9}}}$

EXERCICE 04

Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la suite (u_n) définie par :

1) $u_n = \left(\dfrac{4}{5}\right)^n$; 2) $u_n = \left(-\dfrac{2}{3}\right)^n$; 3) $u_n = \left(\dfrac{6}{5}\right)^n$

4) $u_n = \dfrac{2^{n-1}}{5^n}$; 5) $u_n = \dfrac{1}{4^n} - 2$; 6) $u_n = \dfrac{2^n + 3^n}{5^n}$

7) $u_n = \dfrac{3^{2n}}{2^{3n}}$; 8) $u_n = \dfrac{3^n - 5}{3^n + 8}$; 9) $u_n = \dfrac{5^n - 4^n}{3^n - 2^n}$

10) $u_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n + \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$; 11) $u_n = \left(\dfrac{5}{3}\right)^n + \left(\dfrac{2}{9}\right)^n$

12) $u_n = \left(1 - \sqrt{2}\right)^n$; 13) $u_n = \dfrac{4^n - (-2)^n}{3^n + (-2)^n}$

14) $u_n = \dfrac{2^n - \pi^n + 3^n}{3^n + \pi^n + 2^n}$; 15) $u_n = \dfrac{7 \times (-0,8)^n + 9}{(-0,8)^n + 17}$

UTILISATION DES CRITÈRES DE CONVERGENCE

EXERCICE 05

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ les suites numériques définies sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$ et $v_n = \dfrac{\cos(3n)}{\sqrt{n}}$

1) a) Montrer que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right) \; -\dfrac{1}{n} \leq u_n - 1 \leq \dfrac{1}{n}$.

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

2) a) Montrer que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right) \; |v_n| \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

b) En déduire que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

For more visit: L9ray.com

L9RAY

3 EXERCICES ET PROBLÈMES

EXERCICE 06

1) Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_n = n - \sin\sqrt{n} + 2$$

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ u_n \geq n$.

b) En déduire la limite de la suite (u_n).

2) Soit (v_n) la suite numérique définie par :

$$v_n = -2n + \cos\left(n^2\right) - 1$$

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ v_n \leq -2n$.

b) En déduire la limite de la suite (v_n).

3) Soit (w_n) la suite numérique définie par :

$$w_n = \frac{n + \sin n}{2n + \cos n}$$

a) Montrer que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)\ \ \frac{n-1}{2n+1} \leq w_n \leq \frac{n+1}{2n-1}$.

b) En déduire la limite de la suite (w_n).

EXERCICE 07

Soit $(u_n)_{n\geq 2}$ la suite numérique définie par :

$$u_n = 3 + \frac{\sqrt{n}}{n + (-1)^n}$$

1) Établir que pour tout $n \geq 2$: $\frac{\sqrt{n}}{n+1} \leq u_n - 3 \leq \frac{\sqrt{n}}{n-1}$

2) En déduire $\lim u_n$.

EXERCICE 08

Dans chaque cas, déterminer la limite de la suite (u_n) définie par son terme général :

1) $u_n = -2n + \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$; 2) $u_n = \sqrt{n} - \cos^2 n$

3) $u_n = \frac{n^2 + \sin n}{n^4}$; 4) $u_n = \frac{2n + (-1)^n\sqrt{n}}{n+2}$

5) $u_n = 2 - \frac{\cos\left(n^4\right)}{n}$; 6) $u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n \sin(n)$

7) $u_n = \frac{1}{n(3 - \sin n)}$; 8) $u_n = \frac{3n + E(n)}{n+5}$

EXERCICE 09

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$u_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n}$$

1) Calculer u_1 et u_2

2) a) Montrer que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)\ \ \frac{n}{n+1} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$

b) En déduire $\lim u_n$.

EXERCICE 10

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

1) Justifier que pour tous k et n de $\mathbb{N}^*$:

$$k \leq n \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$$

2) Montrer que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)\ \ \sqrt{n} \leq u_n$.

3) En déduire $\lim u_n$.

EXERCICE 11

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - n - \frac{1}{2} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1) Montrer par récurrence que :

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ \ u_n \leq 3 - 2n$$

2) Déterminer la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 12

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1 \leq u_n \leq 2$$

2) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

For more visit: L9ray.com

EXERCICE 13

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$u_0 = \frac{5}{4}$ et $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{3}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n < 2$.

b) Étudier la monotonie de la suite (u_n).

La suite (u_n) est -elle convergente ? Justifier.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = u_n - 2$.

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n = 2 - \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^n$

puis déterminer la limite de la suite (u_n).

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_{n-1}$.

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ S_n = 2n - 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

b) En déduire la limite $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

EXERCICE 14

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Calculer u_0 et u_1.

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $1 \leq u_n < 2$.

2) Étudier la monotonie de la suite (u_n) puis en déduire qu'elle est convergente.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = \frac{u_n + 1}{u_n - 2}$.

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

b) Exprimer v_n et u_n en fonction de n.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$.

Exprimer S_n en fonction de n puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

EXERCICE 15

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{5u_n}{3u_n + 5}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n > 0$.

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c) Que peut-on conclure ?

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = \frac{5}{u_n}$.

a) Montrer que la suite (v_n) est arithmétique dont on déterminera la raison et le premier terme.

b) Exprimer v_n et u_n en fonction de n.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 16

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n^2 + u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n > 0$.

2) Montrer que (u_n) est strictement décroissante.

3) a) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n > 2^n$

b) En déduire la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 17

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 12}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ 0 \leq u_n \leq 4$.

2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{(u_n - 4)(u_n + 3)}{\sqrt{u_n + 12} + u_n}$$

Puis déterminer la monotonie de la suite (u_n).

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ |u_{n+1} - 4| \leq \frac{1}{4}|u_n - 4|$

For more visit: L9ray.com

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ |u_n - 4| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

c) Calculer la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

SUITES DE TYPE $V_n = f(U_n)$

EXERCICE 18

Dans chaque cas, déterminer la limite de la suite (u_n) définie par son terme général :

1) $u_n = \sqrt{\frac{3n-4}{2n+1}}$; 2) $u_n = n^2 \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

3) $u_n = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{n}\right)$; 4) $u_n = \cos\left(\frac{n\pi - 3}{2n+1}\right)$

5) $u_n = 4^n\left(1 - \cos\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$; 6) $u_n = \sqrt{3^n - 2^n}$

7) $u_n = \frac{6n}{2n-5}\tan\left(\frac{\pi n + 7}{6n-1}\right)$; 8) $u_n = \sqrt[3]{\left|\frac{-2n+1}{n+1}\right|}$

SUITES DE TYPE $U_{n+1} = f(U_n)$

EXERCICE 19

Soit f la fonction numérique définie sur $I = [0;2]$ par : $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 2x}$

1) Montrer que f est continue et strictement croissante sur l'intervalle I.

2) Déterminer $f(I)$.

3) Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 \leq u_n \leq 2$.

b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

c) En déduire que (u_n) est convergente.

d) Calculer la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 20

Soit f la fonction définie sur $I = \left[0;\frac{1}{4}\right]$ par :

$$f(x) = x^2 + \frac{3}{4}x$$

1) Déterminer $f(I)$.

2) Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$u_0 = \frac{1}{5}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 \leq u_n \leq \frac{1}{4}$

b) Étudier la monotonie de la suite (u_n).

c) En déduire que (u_n) est convergente.

d) Calculer la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 21

Soit g la fonction définie sur $I =]1;+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$$

1) Montrer que pour tout $x \in I$: $g(x) \geq 3$

2) On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$u_0 = 5$ et $u_{n+1} = g(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ u_n \geq 3$

b) Montrer que la suite (u_n) est monotone.

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente puis calculer sa limite.

EXERCICE 22

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = u_n + 1 - \sqrt{1 + u_n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 < u_n < 1$.

2) a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3) Calculer la limite de la suite (u_n).

For more visit: L9ray.com

EXERCICES DE PERFECTIONNEMENT

EXERCICE 23

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$u_0 = 20$ et $u_{n+1} = \frac{7}{8}u_n + 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n > 16$

2) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{7}{8} + \frac{2}{u_n}$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$

puis déterminer la monotonie de la suite (u_n).

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = u_n - 16$.

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n = 4\left(\frac{7}{8}\right)^n + 16$

c) Calculer la limite de la suite (u_n).

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$S_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$ et $T_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$

a) Exprimer S_n et T_n en fonction de n.

b) Calculer les limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$.

EXERCICE 24

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$u_n = \frac{1}{2} + (-1)^n\left(\sqrt{n^2+1} - n\right)$$

1) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} \leq \frac{1}{2n}$

2) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ \left|u_n - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2n}$

puis déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

EXERCICE 25

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{\left(1+\sqrt{u_n}\right)^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = \frac{1}{\sqrt{u_n}}$.

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n > 0$.

2) a) Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ \frac{1}{\left(1+\sqrt{u_n}\right)^2} < 1$.

b) En déduire que la suite (u_n) est décroissante puis qu'elle est convergente.

3) a) Montrer que la suite (v_n) est arithmétique.

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n = \frac{1}{(n+1)^2}$.

Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

EXERCICE 26

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$u_0 = -\frac{1}{3}$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{3(1-2u_n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Calculer u_1 et u_2.

2) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n < 0$.

3) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{3}$.

b) En déduire que la suite (u_n) est croissante puis qu'elle est convergente.

4) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ |u_{n+1}| \leq \frac{1}{3}|u_n|$.

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ |u_n| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$.

c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

For more visit: L9ray.com

L9RAY

EXERCICE 27

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2}{3} + 2} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \geq \sqrt{3}$

2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.

EXERCICE 28

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = 3 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{8(u_n - 1)}{u_n + 2} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 2 < u_n < 4$

2) Étudier la monotonie de la suite (u_n) puis en déduire qu'elle est convergente.

3) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 4 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(4 - u_n)$

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$

Puis déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

4) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \frac{u_n - 4}{u_n - 2}$

a) Établir que la suite (v_n) est géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c) Retrouver la valeur de la limite de (u_n).

5) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1}$

Exprimer S_n en fonction de n puis conclure $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

EXERCICE 29

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = 7 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{u_n + 8\sqrt{2 + u_n}}{9} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1) Calculer u_1 et u_2.

2) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n > 2$.

3) Montrer que (u_n) est strictement décroissante.

4) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \sqrt{2 + u_n} - 2$

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 30

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = \sqrt[3]{\frac{2}{7}} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \sqrt[3]{\frac{1 + u_n^3}{8}} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n > \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$

2) Montrer que la suite (u_n) est convergente.

3) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \frac{7}{8}u_n^3 - \frac{1}{8}$

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique.

b) Exprimer u_n en fonction de n puis donner $\lim u_n$.

EXERCICE 31

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = 3 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{2u_n^2 + u_n - 2}{u_n^2} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1) Calculer u_1 et u_2.

2) Montrer que la suite (u_n) est minorée par 2.

3) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} - 2 \leq \frac{1}{4}(u_n - 2)$

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 \leq u_n - 2 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$

c) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

For more visit: L9ray.com

EXERCICE 32

Soit (x_n) la suite numérique définie par :

$$x_0 = 5 \quad \text{et} \quad x_{n+1} = \frac{5x_n - 4}{x_n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1) a) Calculer x_1 et x_2.

b) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ x_n > 4$

2) a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{(x_n - 1)(4 - x_n)}{x_n}$$

b) Montrer que la suite (x_n) est décroissante et en déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ x_n \leq 5$.

3) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $y_n = \frac{x_n - 4}{x_n - 1}$.

a) Montrer que la suite (y_n) est géométrique de raison $\frac{1}{4}$ puis écrire y_n en fonction de n.

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ x_n = \frac{1 - 4^{n+2}}{1 - 4^{n+1}}$ puis calculer la limite de la suite (x_n).

4) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1} \quad \text{et} \quad v_n = \cos(\pi u_n)$$

Montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \frac{1}{2}$.

EXERCICE 33

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 2 - \frac{4}{u_n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ 2 \leq u_n \leq 4$

2) Montrer que la suite (u_n) est croissante et en déduire qu'elle est convergente.

3) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 4 - u_{n+1} \leq \frac{4 - u_n}{2}$

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 \leq 4 - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

c) Calculer la limite de la suite (u_n).

6) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ S_n \geq 4n - 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

EXERCICE 34

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 2 - \frac{1}{2 + u_n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1) Montrer par récurrence que :

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ \ 1 \leq u_n < \sqrt{3}$$

2) Montrer que la suite (u_n) est croissante, déduisez-en qu'elle est convergente.

3) a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sqrt{3} - u_{n+1} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + u_n}\left(\sqrt{3} - u_n\right)$$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 < \sqrt{3} - u_n \leq \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{3}\right)^n$$

et trouver la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 35

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{2u_n^3}{3u_n^2 + 1} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n > 0$

2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$.

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

c) Préciser la limite de la suite (u_n).

For more visit: L9ray.com

L9RAY

3 EXERCICES ET PROBLÈMES

EXERCICE 36

Soit (x_n) la suite numérique définie par :

$$x_0 = 1 \quad \text{et} \quad x_{n+1} = \frac{12x_n - 4}{9x_n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1) a) Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad x_{n+1} - \frac{2}{3} = \frac{2(3x_n - 2)}{9x_n}$

b) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad x_n > \frac{2}{3}$

2) a) Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad x_{n+1} - x_n = -\frac{(3x_n - 2)^2}{9x_n}$

b) Montrer que la suite (x_n) est convergente.

3) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $y_n = \frac{3}{3x_n - 2}$.

a) Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad x_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{y_n}$

b) Montrer que la suite (y_n) est arithmétique de raison $\frac{3}{2}$.

c) Déterminer y_n puis x_n en fonction de n.

Calculer alors la limite de la suite (x_n).

EXERCICE 37

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - n - \frac{8}{3} \quad ; \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

et on pose : $v_n = u_n + \alpha n - 1$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

1) Déterminer la valeur de α pour laquelle la suite numérique (v_n) est géométrique.

Dans ce qui suit, on prend pour α la valeur trouvée.

2) Calculer v_n et u_n en fonction de n.

3) Exprimer la somme $S_n = v_0 + \ldots + v_n$ en fonction de n puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

4) Exprimer $T_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ en fonction de de n.

En déduire la limite de la suite (T_n).

EXERCICE 38

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}(4 + u_n)^2 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

2) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} - u_n \geq \frac{5}{2}$

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \geq 2 + \frac{5n}{2}$

c) Calculer la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 39

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \frac{x^2 + 4}{2x}$.

1) Montrer que : $f([2;3]) \subset [2;3]$.

2) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par :

$$u_1 = 3 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 4}{2u_n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est minorée par 2.

b) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

c) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

3) Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

EXERCICE 40

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \frac{x}{1 + \sqrt[3]{x}}$.

1) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) \quad f(x) \leq x$

2) Montrer que : $f([0;1]) \subset [0;1]$.

3) On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \in [0;1]$.

b) Étudier la monotonie de la suite (u_n).

c) Montrer que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.

For more visit: L9ray.com

EXERCICE 41

1) On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $I=[1;+\infty[$ par : $f(x)=1+\sqrt[3]{x-1}$.

a) Justifier que f est strictement croissante sur I .

b) En déduire que : $f([1;2])=[1;2]$.

2) On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0=\frac{3}{2} \text{ et } u_{n+1}=f(u_n) \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}.$$

a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad 1\le u_n\le 2$.

b) Étudier la monotonie de la suite (u_n).

En déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad u_n\ge\frac{3}{2}$.

c) Montrer que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite .

EXERCICE 42

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0=-1\ ;\ u_1=1 \\ u_{n+2}=u_{n+1}-\frac{1}{4}u_n\ ;\ (n\in\mathbb{N}) \end{cases}$$

Soit (v_n) et (w_n) les suites numériques définies par :

$$v_n=u_{n+1}-\frac{1}{2}u_n \quad \text{et} \quad w_n=2^n u_n$$

1) a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.

b) En déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad v_n=\frac{3}{2^{n+1}}$.

c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

2) a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad w_{n+1}-w_n=2^{n+1}v_n$.

b) Montrer que la suite (w_n) est arithmétique.

c) En déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad u_n=\frac{3n-1}{2^n}$

d) Montrer par récurrence que : $(\forall n\ge 4)\quad n^2\le 2^n$

e) En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$.

EXERCICE 43

Soit $(u_n)_{n\ge1}$ la suite numérique définie par :

$$u_1=\frac{3}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{2}{u_n}\right) \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}^*.$$

1) Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad u_n>0$

2) Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1}-\sqrt{2}=\frac{(u_n-\sqrt{2})^2}{2u_n}$$

et en déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad u_n>\sqrt{2}$

3) a) Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1}-\sqrt{2}=\frac{1}{2}(u_n-\sqrt{2})+\frac{1}{u_n}-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

b) En déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad u_n-\sqrt{2}<\frac{1}{2^n}$

c) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\ge1}$.

EXERCICE 44

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{x}{x^2+x+1}$

1) a) Étudier les variations de la fonction f .

b) Déterminer l'image de l'intervalle $[0;1]$ par f .

2) Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0=1 \quad \text{et} \quad u_{n+1}=f(u_n) \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}.$$

a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad 0\le u_n\le 1$.

b) Montrer que (u_n) est strictement décroissante.

c) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad f\left(\frac{1}{n}\right)\le\frac{1}{n+1}$.

d) En déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad 0\le u_n\le\frac{1}{n}$

3) Montrer que la suite (u_n) est convergente puis calculer sa limite.

For more visit: L9ray.com

L9RAY

3 EXERCICES ET PROBLÈMES

EXERCICE 45

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 1}{u_n + 3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

et soit f la fonction numérique définie sur $I = [1;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{5x-1}{x+3}$

1) Montrer que f est strictement croissante sur I et en déduire que : $f([1;+\infty[) \subset [1;+\infty[$

2) Montrer que : $(\forall x \in I)\ f(x) - x = -\dfrac{(x-1)^2}{x+3}$ puis en déduire que : $(\forall x \in I)\ f(x) \leq x$

3) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n > 1$

4) Montrer que la suite (u_n) est décroissante puis en déduire qu'elle est convergente.

5) Calculer la limite de la suite (u_n).

6) Soit (v_n) la suite définie par : $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$.

a) Montrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison $r = \dfrac{1}{4}$.

b) Exprimer v_n et u_n en fonction de n.

c) Retrouver la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 46

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$u_0 = \dfrac{1}{10}$ et $u_{n+1} = \dfrac{8}{5}u_n(1-u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 2 \leq u_n \leq 4$

2) Montrer que la suite (u_n) est croissante puis en déduire qu'elle est convergente.

3) a) Montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 \leq \frac{3}{8} - u_{n+1} \leq \frac{21}{25}\left(\frac{3}{8} - u_n\right)$$

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 \leq \dfrac{3}{8} - u_n \leq \left(\dfrac{21}{25}\right)^n$.

c) Préciser la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 47

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$u_0 = a$ et $u_{n+1} = u_n(2-u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

où a est un réel de l'intervalle $]0;1[$.

1) On suppose dans cette question que $a = \dfrac{1}{8}$.

a) Calculer u_1 et u_2.

b) Dans un repère orthonormé (unité : $8\,cm$), tracer sur l'intervalle $[0;2]$ la droite (D) d'équation $y = x$ et la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction $f : x \mapsto x(2-x)$.

c) Utiliser (D) et $\mathscr{C}_f$ pour placer sur l'axe des abscisses les points A_1, A_2 et A_3 d'abscisses u_1, u_2 et u_3.

2) On suppose dans cette question que $a \in]0;1[$.

a) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 < u_n < 1$

b) Montrer que la suite (u_n) est croissante puis en déduire qu'elle est convergente.

3) On suppose dans cette question que $a = \dfrac{1}{8}$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = 1 - u_n$.

a) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.

b) Montrer par récurrence que :

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ v_n = \left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}$$

c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

EXERCICE 48

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$u_0 = \dfrac{1}{10}$ et $u_{n+1} = \dfrac{8}{5}u_n(1-u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 2 \leq u_n \leq 4$

For more visit: L9ray.com

2) Montrer que la suite (u_n) est croissante puis en déduire qu'elle est convergente.

3) a) Montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 \leq \frac{3}{8} - u_{n+1} \leq \frac{21}{25}\left(\frac{3}{8} - u_n\right)$$

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 \leq \frac{3}{8} - u_n \leq \left(\frac{21}{25}\right)^n$.

c) Préciser la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 49

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \ ; \ u_1 = 1 \\ \frac{1}{u_{n+2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u_{n+1}} + \frac{1}{u_n}\right) \ ; \ (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

1) Calculer u_2 et u_3.

2) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{2u_n}{4u_n - 1}$$

3) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ \frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$

4) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \frac{1}{u_n} - \frac{4}{3}$

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.

b) Exprimer v_n et u_n en fonction de n.

c) Préciser $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

EXERCICE 50

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{u_n^2 - 3u_n + 6}{u_n - 1} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ u_n \geq 3$

2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

3) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

EXERCICE 51

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 \leq u_n \leq 1$

2) Montrer que la suite (u_n) est croissante et en déduire qu'elle est convergente.

3) a) Montrer par récurrence que :

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^n \times 3}\right)$$

(On rappelle que : $1 + \cos(2x) = 2\cos^2 x$)

b) En déduire la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 52

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}u_n^2 + 2} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = u_n^2 - 4$

1) a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

b) Exprimer v_n et u_n en fonction de n.

c) En déduire la limite de la suite (u_n).

2) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 \leq u_n \leq 2$.

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 2 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(2 - u_n)$

c) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ |u_n - 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

d) Déterminer de nouveau la limite de la suite (u_n).

3) Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x^2 + 2}$$

a) Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0;2]$ et que : $f([0;2]) \subset [0;2]$.

For more visit: L9ray.com

L9RAY

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ u_n \in [0;2]$.

c) Montrer que : $(\forall x \in [0;2])\ \ f(x) \geq x$.

d) Étudier la monotonie de la suite (u_n).

e) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

EXERCICE 53

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x}-1}$.

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.

2) Montrer que pour tout $x \in D_f - \{0\}$:

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{2\left(\sqrt{x}-1\right)^2}$$

3) Dresser le tableau de variations de f.

4) a) Montrer que pour tout $x \in D_f$:

$$f(x) - x = \frac{x(4-x)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

b) En déduire que : $(\forall x \in [4;+\infty[)\ \ f(x) \leq x$.

5) On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$u_0 = 9$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ u_n > 4$.

b) Étudier la monotonie de la suite (u_n).

(On pourra utiliser le résultat de 4) b).

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.

EXERCICE 54

On considère la suite numérique définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n + \frac{2}{u_n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ u_n > 0$.

2) Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ u_{n+1}^2 - u_n^2 \geq 4$.

3) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ u_n \geq 2\sqrt{n}$

4) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

5) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = u_{n+1}^2 - u_n^2$.

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ 4 \leq v_n \leq 4 + \dfrac{1}{n}$.

b) En déduire la limite de la suite (v_n).

EXERCICE 55

On considère les fonctions numériques f, g et h définies sur $I = \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ par : $f(x) = x - \sin x$

$$g(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \cos x \quad \text{et} \quad h(x) = x - \frac{x^3}{3} - \sin x$$

1) Dresser le tableau de variations de chacune des fonctions f, g et h sur l'intervalle I.

2) En déduire que : $(\forall x \in I)\ \ x - \dfrac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$

3) On considère maintenant les suites numériques (u_n), (v_n) et (w_n) définies par :

$$u_n = \sin\frac{1}{n} \ ; \ v_n = n\sin\frac{1}{n} \ ; \ w_n = n^2 \sin\frac{1}{n} - n$$

En utilisant le résultat de la question 3, calculer les limites des suites (u_n), (v_n) et (w_n).

4) Soit (S_n) la suite numérique définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$S_n = \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) + \sin\left(\frac{2}{n^2}\right) + \ldots + \sin\left(\frac{n}{n^2}\right)$$

a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2n} - \frac{(n+1)^2}{24n^4} \leq S_n \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$

c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

For more visit: L9ray.com

PROBLÈMES DE SYNTHÈSE

SE PRÉPARER AUX DEVOIRS

DEVOIR 1

Soit a et b deux nombres réels tels que $a > b > 0$.

Le **nombre d'or** est défini comme l'unique rapport des deux longueurs a et b tel que : $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$.

On note ce nombre d'or φ.

Partie A : Quelques propriétés algébriques

1) a) Démontrer que φ est la solution positive de l'équation : $x^2 - x - 1 = 0$.

b) En déduire la valeur exacte de φ puis une valeur approchée à 10^{-2} près.

2) Vérifier que : $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$ et $\varphi = \sqrt{1+\varphi}$.

Partie B : Une approximation du nombre d'or

1) On considère les suites numériques (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = 1 + \frac{1}{v_n}$$

2) a) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n \leq \varphi$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{(u_n - \varphi)(u_n + \varphi^{-1})}{\sqrt{1+u_n} + u_n}$$

et en déduire que la suite (u_n) est croissante.

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

3) a) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ v_n \geq 1$.

b) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n - \varphi = \frac{\varphi - v_n}{\varphi v_n}$

c) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ |v_{n+1} - \varphi| \leq \frac{1}{\varphi}|v_n - \varphi|$

d) Montrer par récurrence que :

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ |v_n - \varphi| \leq \left(\frac{1}{\varphi}\right)^n$$

Quelle est la limite de la suite (v_n) ?

e) À l'aide de la calculatrice, calculer v_5 et écrire sous forme de fraction irréductible.

Avec quelle précision le résultat obtenu approche-t-il le nombre d'or ?

DEVOIR 2

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x}{2}\left(x + \sqrt{x^2+4}\right)$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Première Partie :

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis étudier la branche infinie de la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

b) Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}_-^*)\ f(x) = -\frac{2}{1+\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}$

c) Étudier la nature de la branche infinie de la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $-\infty$.

2) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)^2}{2\sqrt{x^2+4}}$$

b) Donner le tableau de variations de la fonction f.

3) Tracer $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Deuxième Partie :

1) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

2) Dresser le tableau de variations de la fonction f^{-1}.

For more visit: L9ray.com

3) Montrer que : $(\forall x \in J)\ f^{-1}(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$.

4) Montrer que pour tout $x \in J$:

$$f^{-1}(x) - x = \frac{-x^2}{\sqrt{x+1}\left(1+\sqrt{1+x}\right)}$$

5) En déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ et la droite (Δ) d'équation $y = x$.

6) Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable en 0 puis calculer $\left(f^{-1}\right)'(0)$

7) Tracer la courbe $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Troisième Partie :

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = f^{-1}(u_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1) Montrer par récurrence que :

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 \le u_n \le 1$$

2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.

DEVOIR 3

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0;4]$ par : $f(x) = \left(\dfrac{4\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}\right)^2$.

1) a) Étudier les variations de la fonction f.

b) En déduire que $f([0;4]) \subset [0;4]$.

2) On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

a) Calculer u_1.

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 \le u_n \le 4$.

c) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

d) Montrer que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = 1 - \dfrac{2}{\sqrt{u_n}}$.

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$.

b) Exprimer v_n et u_n en fonction de n.

c) Retrouver à nouveau la limite de la suite (u_n).

DEVOIR 4

Soit (u_n) et (v_n) deux suites numériques définies par : $u_0 = 3$, $v_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

1) Calculer u_1 et v_1.

2) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont strictement positives.

3) a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{(v_n - u_n)^2}{2(u_n + v_n)}$$

b) Étudier la monotonie de chacune des suites (u_n) et (v_n).

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $w_n = v_n - u_n$.

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 \le w_{n+1} \le \dfrac{1}{2} w_n$.

b) En déduire que :

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 \le w_n \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

c) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n$.

5) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $p_n = u_n v_n$.

a) Montrer par récurrence que :

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ p_n = 15$$

b) Montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \sqrt{15}$

For more visit: L9ray.com

SE PRÉPARER AUX EXAMENS

PROBLÈME 1

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$u_0 = 11$ et $u_{n+1} = \frac{10}{11}u_n + \frac{12}{11}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}(u_n - 12)$

2) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n < 12$

b) Montrer que (u_n) est strictement croissante.

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = u_n - 12$.

a) En utilisant la question 1), montrer que la suite numérique (v_n) est géométrique de raison $\frac{10}{11}$ puis exprimer v_n en fonction de n.

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n = 12 - \left(\frac{10}{11}\right)^n$ puis déterminer la limite de la suite (u_n).

Examen National 2012 (Session Normale)

PROBLÈME 2

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{u_n + 3}{u_n - 5}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) a) Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} - 3 = \frac{4(u_n - 3)}{2 + (3 - u_n)}$

b) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n < 3$.

2) Soit (v_n) la suite numérique définie par :

$v_n = \frac{u_n - 1}{3 - u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ puis déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

b) Montrer que $u_n = \frac{1 + 3v_n}{1 + v_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis écrire u_n en fonction de n.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

Examen National 2016 (Session Normale)

PROBLÈME 3

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{6u_n}{1 + 15u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) a) Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{u_n - \frac{1}{3}}{15u_n + 1}$

b) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n > \frac{1}{3}$.

2) Soit (v_n) la suite numérique définie par :

$v_n = 1 - \frac{1}{3u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{6}$ puis écrire v_n en fonction de n.

b) Montrer que $u_n = \frac{1}{3 - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Examen National 2011 (Session De Rattrapage)

PROBLÈME 4

On considère la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$u_1 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{25}{1 - u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1) a) Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ 5 - u_{n+1} = \frac{5(5 - u_n)}{5 + (5 - u_n)}$

b) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ 5 - u_n > 0$.

2) Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par :

$v_n = \frac{5}{5 - u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

For more visit: L9ray.com

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_{n+1} = \dfrac{10-u_n}{5-u_n}$

puis vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ v_{n+1} - v_n = 1$.

b) Montrer que $v_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ puis en déduire que $u_n = 5 - \dfrac{5}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Examen National 2013 (Session Normale)

PROBLÈME 5

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{5u_n}{2u_n+3} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n > 1$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n}$

a) Montrer que (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{3}{5}$

puis écrire v_n en fonction de n.

b) Montrer que $u_n = \dfrac{2}{2-\left(\frac{3}{5}\right)^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

puis déterminer la limite de la suite (u_n).

Examen National 2008 (Session De Rattrapage)

PROBLÈME 6

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 3 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{4u_n+3}{3u_n+4} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n > 1$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $1 - v_n = \dfrac{2}{u_n+1}$

puis en déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 1 - v_n > 0$.

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n = \dfrac{1+v_n}{1-v_n}$.

3) a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{7}$ puis écrire v_n en fonction de n.

b) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ puis en déduire la limite de la suite (u_n).

Examen National 2012 (Session De Rattrapage)

PROBLÈME 7

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{3u_n}{21+u_n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n > 0$.

2) Démontrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} < \dfrac{1}{7}u_n$

3) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante et en déduire qui elle est convergente.

4) a) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n < \left(\dfrac{1}{7}\right)^n$

b) Déterminer la limite de la suite (u_n).

Examen National 2010 (Session De Rattrapage)

PROBLÈME 8

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n - 4n - 1) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

On pose : $v_n = u_n + n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$.

2) a) Calculer v_n en fonction de n.

b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n \quad \text{et} \quad T_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$$

Montrer que :

$$T_n = \frac{1}{4}\left(5 - \frac{1}{5^n}\right) \quad \text{et} \quad S_n = T_n - \frac{(n+1)(n-2)}{2}$$

Examen National 2007 (Session De Rattrapage)

For more visit: L9ray.com

PROBLÈME 9

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = \frac{2}{5}u_{n+1} - \frac{1}{25}u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{5}u_n \quad \text{et} \quad w_n = 5^n u_n$$

1) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ puis écrire v_n en fonction de n.

2) a) Montrer que (w_n) est une suite arithmétique de raison 5 puis écrire w_n en fonction de n.

b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

3) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ 0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{5}u_n$.

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ 0 < u_n \leq \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$ puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Examen National 2006 (Session De Rattrapage)

PROBLÈME 10

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $g(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

1) a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ g(x) \leq x$.

b) Montrer que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et en déduire que $g(\mathbb{R}^+) = [0;1[$.

2) Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = g(u_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

a) Montrer par récurrence que :

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 < u_n < 1.$$

b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.

Examen Bac 1999 (Session De Février)

PROBLÈME 11

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{u_n^3}{3u_n^2 + 1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n > 0$.

b) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

2) a) Démontrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} \leq \frac{1}{3}u_n$.

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$ puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Examen National 2004 (Session De Rattrapage)

PROBLÈME 12

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } u_n = \frac{u_{n-1} + 5}{3} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

et soit $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par : $v_n = \frac{u_n - u_{n-1}}{3}$.

1) Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

2) Exprimer v_n en fonction de n.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$.

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ u_n = 3S_n + 1$

b) Exprimer S_n et u_n en fonction de n.

c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Examen Bac 2002 (Session De Février)

For more visit: L9ray.com

L9RAY

4

FONCTIONS LOGARITHMES

HISTOIRE

C'est un Écossais, John Napier, souvent francisé en Neper, qui inventa les logarithmes. Pour le faire, il considéra deux véhicules, l'un allant à une vitesse uniforme et l'autre à une vitesse proportionnelle à la distance restant à parcourir. Il considère que la distance parcourue par le second est le logarithme de celle restant à parcourir par le premier.

Par la suite, c'est mathématicien suisse Léonard Euler (1707 - 1783) qui relie véritablement le logarithme à l'analyse en l'utilisant pour calculer des dérivées et des intégrales. L'idée « d'échelle logarithmique » constitue un modèle toujours actuel pour de nombreux phénomènes scientifiques : de l'intensité des séismes à la magnitude des étoiles en passant par la mesure du bruit.

Source : https://fr.wikipedia.org

JOHN NAPIER (1550 – 1617)



CAPACITÉS ATTENDUES

- Maitriser le calcul algébrique sur les logarithmes ;
- Maitriser la résolution des équations, des inéquations et des systèmes comportant des logarithmes ;
- Reconnaitre et appliquer le logarithme décimal (surtout pour la résolution des équations de la forme $10^x = a$) et des inéquations de la forme $10^x \leq a$ où de la forme $10^x \geq a$) ;
- Maitriser et appliquer les limites logarithmiques essentielles ;
- Étudier et représenter des fonctions dont l'expression comporte le logarithme népérien ;
- Étudier et représenter des fonctions dont l'expression comporte le logarithme népérien ;

PLAN DU COURS

- Activités Préparatoires 195
- Connaissances Fondamentales
  - Fonction logarithme népérien 199
  - Fonction logarithme de base a 208
- Techniques Et Astuces 211
- Exercices Et Problèmes
  - Exercices d'application 218
  - Exercices de perfectionnement 225
  - Problèmes de synthèse 234

For more visit: L9ray.com

1 RAPPELS

1. Déterminer les primitives de la fonction f sur l'intervalle I dans chacun des cas suivants :

a) $f(x)=x^3$ sur $I=\mathbb{R}$; b) $f(x)=\dfrac{1}{x^n}$ sur $I=\mathbb{R}_+^*$ où $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$

c) $f(x)=2x\left(x^2-3\right)^{2019}$ sur $I=\mathbb{R}$; d) $f(x)=\dfrac{x^3+x}{\left(x^4+2x^2+5\right)^2}$ sur $I=\mathbb{R}$

2. Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle $I=]-1;1[$ par : $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

a) Justifier que la fonction g admet une primitive définie sur I.

Dans la suite, on note G la primitive de la fonction g s'annulant en 0.

b) Montrer que la fonction G est impaire. (Indication : On pourra considérer la fonction $h : x\mapsto G(x)+G(-x)$).

c) Montrer que G est continue et strictement croissante sur I.

d) En déduire que $G(x)\geq 0$ pour tout $x\in[0;1[$ et que $G(x)\leq 0$ pour tout $x\in]-1;0]$.

2 FONCTION TRANSFROMANT UN PRODUIT EN UNE SOMME

A. Première Partie :

1. Montrer que la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ admet une primitive sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

> La primitive de la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$ qui s'annule en 1 est appelée **la fonction logarithme népérienne** et on la note **ln**.

Il résulte de cette définition que :

- L'ensemble de définition de la fonction ln est $D_{\ln}=]0;+\infty[$;
- $\ln(1)=0$;
- La fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on a : $(\forall x\in]0;+\infty[)\ (\ln)'(x)=\dfrac{1}{x}$.

2. a) Montrer que la fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

b) En déduire le signe de chacun des nombres $\ln 2$ et $\ln\dfrac{1}{2}$.

3. Soit a un élément de $]0;+\infty[$. On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\ln(ax)$

a) Montrer que f est une primitive de la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

b) En déduire que pour tout $x\in]0;+\infty[$: $f(x)=\ln(x)+\ln(a)$

Puis écrire les nombres $\ln(6)$, $\ln\left(\dfrac{2}{3}\right)$, $\ln\left(\dfrac{1}{6}\right)$ et $\ln(72)$ en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(3)$.

For more visit: L9ray.com

L9RAY

4 ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES

4. a) En utilisant la calculatrice, vérifier que $\ln(2,71) < 1 < \ln(2,72)$ puis en déduire qu'il existe un unique nombre strictement positif e tel que $\ln e = 1$. Donner un encadrement de e.

b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\ln(e^n) = n$ puis en déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ln(e^{-n}) = -n$.

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les deux équations suivantes : $\ln x = 2$ et $\ln x = -1$

B. Deuxième Partie :

1. Montrer que si a et b sont des réels strictement positifs alors le signe de $\ln(a) - \ln(b)$ est celui de $a - b$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\ln(x) = \ln(e^2)$; b) $\ln(x+1) = \ln(3-x)$; c) $\frac{1}{2}\ln(x+2) = \ln(x)$; d) $\ln^2(x) = 2\ln(x)$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $\ln(x) > 2$; b) $\ln(x+1) > \ln(3-x)$; c) $\ln(x) + \ln(x+4) > \ln(2x-1)$

d) $\ln(2) + 2\ln(x) > \ln(3x-8)$; e) $\ln(x^2+1) > \ln(x+5) + \ln(x-2)$

3 LIMITES DE LA FONCTION ln ET SA REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

1. a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\ln(20^n) = n\ln(20)$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\ln\left(\frac{1}{20^n}\right) = -n\ln(20)$

c) Sachant que $\ln(2) \approx 0,69$ et $\ln(5) \approx 1,61$, donner une valeur approchée du nombre $\ln(20)$.

d) Remplir le tableau suivant :

x	20^{10}	20^{10^2}	20^{10^3}	20^{10^4}	20^{10^5}	20^{10^6}	20^{10^7}	20^{10^8}	20^{10^9}	$20^{10^{10}}$	$20^{10^{11}}$
$\ln(x)$											
$\frac{\ln(x)}{x}$											
$\ln\left(\frac{1}{x}\right)$											

e) À partir des résultats du tableau ci-dessus, deviner les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x$ puis interpréter graphiquement ces limites.

2. Soit (L) la courbe de la fonction **ln** dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

a) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe (L) aux points d'abscisses 1 et e.

b) Tracer l'allure de la courbe (L).

For more visit: L9ray.com

4 LE LOGARITHME DÉCIMAL ET SES APPLICATIONS

A. On considère la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{\ln x}{\ln 10}$

La fonction f est appelée la fonction logarithme décimale et on la note log.

1. Calculer : $\log(1)$; $\log(10)$; $\log(100)$; $\log(0,1)$; $\log(0,01)$.

2. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{Z}$: $\log\left(10^n\right)=n$

3. Étudier les variations de la fonction log puis dresser son tableau de variations.

B. Applications du logarithme décimal :

1. Autour de la convergence des suites numériques :

En utilisant la calculatrice, déterminer tous les entiers naturels n vérifiant chacune des inégalités suivantes :

a) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\le 10^{-12}$; b) $(1,02)^n\ge 10^9$; c) $\left(\dfrac{1}{0,015}\right)^n\ge 10^{1407}$

2. Nombre de chiffres d'un entier naturel :

Le nombre de chiffres $N(x)$ d'un entier naturel non nul x est : $N(x)=1+E(\log x)$.

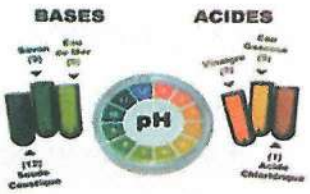
($E(a)$ étant la partie entière du réel a)

Le plus grand nombre premier découvert en 2018 est : $P=2^{77232917}-1$.

À l'aide de la calculatrice, déterminer le nombre de chiffres du nombre P.

3. En chimie :

La relation liant le pH d'une solution aqueuse et la concentration $\left[H_3O^+\right]$ est donnée par la formule : $\text{pH}=-\log\left[H_3O^+\right]$



a) Calculer le pH d'une solution aqueuse sachant que : $\left[H_3O^+\right]=6.10^{-5}\ mol/l$

b) Calculer la concentration $\left[H_3O^+\right]$ dans une solution aqueuse sachant que $\text{pH}=7$.

4. En séismologie :

La magnitude d'un tremblement de terre est une mesure de quantité de l'énergie libérée au foyer d'un séisme.

Elle se calcule à l'aide de la formule : $M=\log\left(\dfrac{I}{I_0}\right)$ (Sur l'échelle de Richter)

où I_0 est une intensité de référence et I l'intensité du séisme.



Calculer la valeur de M dans chacun des cas suivants :

a) Al Hoceima (2003) : $I_1=1,995\times10^8\,I_0$

b) El Salvador (2001) : $I_2=3,98\times10^7\,I_0$

c) Californie (1992) : $I_2=3,98\times10^7\,I_0$

For more visit: L9ray.com

L9RAY

4 CONNAISSANCES FONDAMENTALES

1 FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIENNE

1.1. DÉFINITION DE LA FONCTION ln

Définition 1

La primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$ et qui s'annule en 1 est appelée la fonction logarithme népérienne, et on la note ln.

Remarques

- L'ensemble de définition de la fonction ln est $]0;+\infty[$ et $\ln(1)=0$.
- La fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ et de plus :

$$(\forall x \in]0;+\infty[) \quad \ln'(x)=\frac{1}{x}$$

On rappelle que toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive définie sur cet intervalle.

Exemples

On considère les fonctions numériques f, g et h définies par :

$$f(x)=\ln x+\ln(x-1) \quad ; \quad g(x)=\ln(x^2-x) \quad ; \quad h(x)=\ln\left(\frac{x-4}{x+1}\right)$$

Déterminons leurs ensembles de définition :

- L'expression $f(x)$ a un sens si $x>0$ et $x-1>0$, c'est-à-dire si $x>1$. Par suite : $D_f=]1;+\infty[$
- L'expression $g(x)$ a un sens si $x^2-x>0$. Donc : $D_g=]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$.
- L'expression $h(x)$ a un sens si $\frac{x-4}{x+1}>0$. Donc : $D_h=]-\infty;-1[\cup]4;+\infty[$.

Applications

Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions f, g et h définies par :

$$f(x)=\ln(x+4)-\ln(25-x^2) \quad ; \quad g(x)=\ln(x^2-8x+7) \quad ; \quad h(x)=\sqrt{(x-1)\ln x}$$

1.2. MONOTONIE DE LA FONCTION ln

Proposition 1

La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$. On a alors :

- Pour tout $(x;y)\in(]0;+\infty[)^2$: $\ln x<\ln y \Leftrightarrow x<y$ et $\ln x=\ln y \Leftrightarrow x=y$
- Pour tout $x\in]0;+\infty[$:

$$\ln x=0 \Leftrightarrow x=1 \quad \text{et} \quad \ln x>0 \Leftrightarrow x>1 \quad \text{et} \quad \ln x<0 \Leftrightarrow x<1$$

For more visit: L9ray.com

Exemples

1) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\ln(x^2-4)=\ln(4x-6)$

Cette équation est définie si $x^2-x>0$ et $4x-6>0$, c'est-à-dire si $x\in\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$.

On a maintenant pour tout $x\in\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$:

$$\ln(x^2-x)=\ln(4x-6)\Leftrightarrow x^2-x=4x-6\Leftrightarrow x^2-5x+6=0$$

Les solutions de l'équation $x^2-5x+6=0$ sont 2 et 3. Comme $2\in\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ et $3\in\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$, alors $S=\{2;3\}$.

2) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $\ln(14-x)>\ln(10+7x-3x^2)$

Cette inéquation est définie si $14-x>0$ et $10+7x-3x^2>0$, c'est-à-dire si $x\in\left]-1;\frac{10}{3}\right[$.

On a maintenant pour tout $x\in\left]-1;\frac{10}{3}\right[$:

$$\ln(14-x)>\ln(10+7x-3x^2)\Leftrightarrow 14-x>10+7x-3x^2\Leftrightarrow 3x^2-8x+4>0\Leftrightarrow (x-2)(3x-2)>0$$

L'ensemble solution de l'inéquation $(x-2)(3x-2)>0$ dans $\mathbb{R}$ est $S_1=\left]-\infty;\frac{2}{3}\right[\cup]2;+\infty[$.

Par suite, l'ensemble solution de l'inéquation $\ln(14-x)>\ln(10+7x-3x^2)$ est :

$$S=S_1\cap\left]-1;\frac{10}{3}\right[=\left]-1;\frac{2}{3}\right[\cup\left]2;\frac{10}{3}\right[$$

Applications

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes :

$\ln(2x-3)=\ln(4-x)$; $\ln(x^2+x)=\ln(-2x-2)$; $\ln(3x^2+4x+2)=0$

$\ln(4x-5)>\ln(2x+3)$; $\ln(x^2+3x)-\ln(x+2)\geq 0$; $\ln(3x^2-4x+1)\geq 0$

2. Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

$f(x)=\sqrt{\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)}$; $g(x)=\frac{1}{\ln(|x-2|-1)}$; $h(x)=\frac{1}{(\ln x)^3}+\frac{x}{\ln(x+2)}$

1.3. PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES

Proposition 2

Pour deux réels strictement positifs x et y on a : $\ln(xy)=\ln x+\ln y$ (Propriété fondamentale)

De cette propriété fondamentale on peut déduire les propriétés algébriques suivantes :

For more visit: L9ray.com

L9RAY

Proposition 3

1) Pour tout réel strictement positif x, on a : $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$.

2) Pour tout $(x;y) \in (]0;+\infty[)^2$ on a : $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tous réels strictement positifs x_1, x_2,..., x_n, on a :

$$\ln(x_1\, x_2 \ldots\ldots x_n) = \ln(x_1) + \ln(x_2) + \ldots + \ln(x_n)$$

4) Pour tout $x \in]0;+\infty[$ et pour tout $r \in \mathbb{Q}$, on a : $\ln(x^r) = r \ln x$

Preuve

1) Soit x un réel strictement positif. D'après la proposition 2 on a : $\ln x + \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \ln\left(x.\frac{1}{x}\right) = \ln 1 = 0$

Il s'ensuit donc que : $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$.

2) Soit x et y deux réels strictement positifs. D'après la proposition 2, on a :

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln\left(x \times \frac{1}{y}\right) = \ln x + \ln\left(\frac{1}{y}\right) = \ln x - \ln y \text{ , d'où le résultat.}$$

3) La relation $\ln(x_1.x_2.....x_n) = \ln(x_1) + \ln(x_2) + \ldots + \ln(x_n)$ s'établie simplement à l'aide d'un raisonnement par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

4) De la relation 3), on peut tirer la relation $\ln(x^n) = n\ln(x)$, et ceci pour tout $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

On a de même les relations : $\ln(x^{-n}) = \ln\left(\frac{1}{x^n}\right) = -\ln(x^n) = -n\ln x$ et $\ln(x^0) = \ln 1 = 0$.

Par conséquent, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $\ln(x^p) = p\ln(x)$.

Soit maintenant $r = \frac{p}{q}$ un rationnel de $\mathbb{Q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. On donc :

$q\ln(x^r) = q\ln\left(x^{\frac{p}{q}}\right) = \ln(x^p) = p\ln(x)$, et alors $\ln(x^r) = \frac{p}{q}\ln(x)$. Ainsi : $\ln(x^r) = r\ln x$.

Remarques

- Soit a et b deux réels strictement négatifs. On a alors $ab > 0$ et $\frac{a}{b} > 0$. Il s'ensuit donc :

$$\ln(ab) = \ln|a| + \ln|b| \quad \text{et} \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln|a| - \ln|b|$$

- On a pour tout $x \in]0,+\infty[$ et pour tout entier $n \geq 2$: $\ln\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2}\ln(x)$ et $\ln\left(\sqrt[n]{x}\right) = \frac{1}{n}\ln(x)$.

For more visit: L9ray.com

Exemple

Soit a et b deux réels strictement positifs. On pose : $\alpha = \ln(a)$ et $\beta = \ln(b)$.

Exprimons $\ln\left(a^2b^5\right)$ et $\ln\left(\frac{1}{\sqrt[6]{a^7b}}\right)$ en fonction de α et β :

$$\ln\left(a^2b^5\right) = \ln\left(a^2\right) + \ln\left(b^5\right) = 2\ln(a) + 5\ln(b) = 2\alpha + 5\beta$$

$$\ln\left(\frac{1}{\sqrt[6]{a^7b}}\right) = \ln\left(a^{-\frac{7}{6}}.b^{-\frac{1}{6}}\right) = \ln\left(a^{-\frac{7}{6}}\right) + \ln\left(b^{-\frac{1}{6}}\right) = -\frac{7}{6}\alpha - \frac{1}{6}\beta$$

1.4. LIMITES USUELLES

Proposition 4

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$

1.5. TABLEAU DE VARIATIONS DE LA FONCTION ln

x	0		1		$+\infty$
$\ln'(x)$	‖		$+$		
$\ln(x)$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

Proposition 5

- $\ln\left(]0;+\infty[\right) = \mathbb{R}$.
- L'équation $\ln(x) = 1$ admet une unique solution dans $]0;+\infty[$. On la note e : $\ln(x) = 1 \Leftrightarrow x = e$

Remarques

- Á l'aide de la calculatrice, on trouve comme valeur approchée de e : $e \approx 2,718281828$
- On a pour tout $r \in \mathbb{Q}$: $\ln\left(e^r\right) = r$

Exemples

1) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $(E) : 3(\ln x)^2 + 2\ln x - 1 = 0$

L'ensemble de définition de cette équation est $\mathbb{R}_+^*$. En posant $t = \ln x$, l'équation devient $3t^2 + 2t - 1 = 0$.

Les solutions de l'équation $3t^2 + 2t - 1 = 0$ sont -1 et $\frac{1}{3}$. Par conséquent :

For more visit: L9ray.com

$$(E) \Leftrightarrow \left(\ln x = -1 \text{ ou } \ln x = \frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow \left(x = e^{-1} \text{ ou } x = e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e}\right)$$

Par suite, l'ensemble solution de l'équation (E) est : $S = \left\{e^{-1}; \sqrt[3]{e}\right\}$

2) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $(I) : \ln(x+1) \geq -\ln(x+3) + \ln(x+7)$

Notons D l'ensemble de définition de cette inéquation. On a alors :

$$x \in D \Leftrightarrow (x+1>0 \text{ et } x+3>0 \text{ et } x+7>0) \Leftrightarrow x > -1$$

Donc : $D =]-1; +\infty[$.

On a pour tout $x \in D$:

$$\begin{aligned}(I) &\Leftrightarrow \ln(x+1) + \ln(x+3) \geq \ln(x+7)\\ &\Leftrightarrow \ln\left[(x+1)(x+3)\right] \geq \ln(x+7)\\ &\Leftrightarrow (x+1)(x+3) \geq x+7\\ &\Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 \geq 0\end{aligned}$$

Le discriminant du trinôme $x^2 + 3x - 4$ est : $\Delta = 3^2 - 4\times 1\times(-4) = 25$. Donc le trinôme $x^2 + 3x - 4$ admet deux racines distinctes qui sont : $x_1 = -4$ et $x_2 = 1$.

Le tableau de signe du trinôme $x^2 + 3x - 4$ est :

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$x^2 + 3x - 4$		$+$	0	$-$	0	$+$	

En notant S l'ensemble solution de l'inéquation (I), on conclut que :

$$x \in S \Leftrightarrow \left(x \in]-\infty; -4] \cup [1; +\infty[\text{ et } x \in D\right) \Leftrightarrow x \in [1; +\infty[$$

Par suite : $S = [1; +\infty[$.

3) Résolvons le système suivant : $(S) : \begin{cases} 4\ln x - 3\ln y = 10 \\ 2\ln x + 5\ln y = -8 \end{cases}$

Si $(x; y)$ est une solution du système (S), alors : $x > 0$ et $y > 0$.

Pour résoudre ce système, on pose : $X = \ln x$ et $Y = \ln y$. Le système (S) devient :

$$(S') : \begin{cases} 4X - 3Y = 10 \\ 2X + 5Y = -8 \end{cases}$$

On a : $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 20 + 6 = 26$ et $\Delta_X = \begin{vmatrix} 10 & -3 \\ -8 & 5 \end{vmatrix} = 50 - 24 = 26$ et $\Delta_Y = \begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 2 & -8 \end{vmatrix} = -32 - 20 = -52$

Comme $\Delta \neq 0$, alors le système (S') admet une unique solution $(X; Y)$ avec :

$$X = \frac{\Delta_X}{\Delta} = \frac{26}{26} = 1 \quad \text{et} \quad Y = \frac{\Delta_Y}{\Delta} = \frac{-52}{26} = -2$$

For more visit: L9ray.com

Il s'ensuit donc que : $\ln x = 1$ et $\ln y = -2$, ce qui donne : $x = e$ et $y = e^{-2}$

En résumé, l'ensemble solution du système (S) est : $S = \{(e; e^{-2})\}$.

Applications

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$\ln(2x-1) = -\frac{3}{5} \quad ; \quad \ln\sqrt{x} = 3\ln 2 \quad ; \quad (\ln x)^2 - 5\ln x + 4 = 0 \quad ; \quad \frac{\ln x + 2}{\ln x - 1} = 3$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$\ln x \geq 3 \quad ; \quad \ln^2 x - 5\ln x + 6 > 0 \quad ; \quad -2\ln^2 x + 3\ln x + 5 \geq 0 \quad ; \quad \frac{\ln x - 1}{\ln x + 2} \leq 0$$

3. Déterminer l'esnemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{3\ln x - 4}{\ln x + 5} \quad ; \quad g(x) = \sqrt{\ln x - 2} \quad ; \quad h(x) = \frac{\sqrt{1 - \ln x}}{1 + \ln x} \quad ; \quad k(x) = \sqrt{\frac{1 - \ln x}{1 + \ln x}}$$

4. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

$$(S_1): \begin{cases} \ln x - \ln y = 2 \\ 2\ln x - 3\ln y = 5 \end{cases} \quad ; \quad (S_2): \begin{cases} x + y = 4 \\ \ln x + \ln y = \ln 3 \end{cases} \quad ; \quad (S_3): \begin{cases} \ln x - \ln y = -1 \\ \ln^2 x + \ln^2 y = 5 \end{cases}$$

$$(S_4): \begin{cases} x^2 + y^2 = 218 \\ \ln x + \ln y = \ln 91 \end{cases} \quad ; \quad (S_5): \begin{cases} \ln\sqrt{x} - \ln y^2 = 1 \\ -\ln x + 4\ln y = 6 \end{cases} \quad ; \quad (S_6): \begin{cases} xy = e^3 \\ 3\ln x - 4\ln y = 2 \end{cases}$$

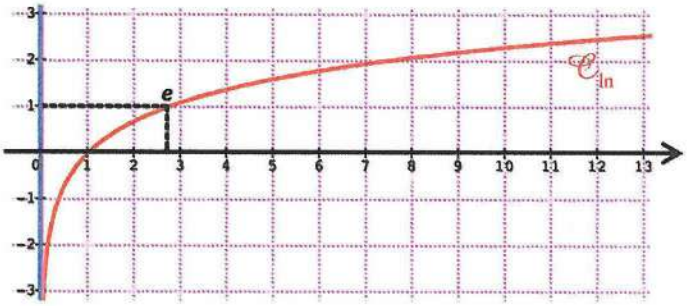
Proposition 6

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction ln dans un repère orthonormé. Alors :

- La courbe $\mathscr{C}$ admet l'axe des ordonnées comme asymptote : $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$.
- La courbe $\mathscr{C}$ admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.
- La courbe $\mathscr{C}$ est concave sur $]0; +\infty[$.

1.6. LA COURBE DE LA FONCTION ln

Courbe de la fonction $x \mapsto \ln x$.



For more visit: L9ray.com

L9RAY

1.7. LIMITES FONDAMENTALES

Proposition 7

- On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$ et $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.
- On a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x^n} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n\ln(x) = 0$.

Exemples

Calculons les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^2 x}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(\sin x)$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x-1)}{\ln(x+2)}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3\ln^2 x - 7\ln x\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\ln x - x}{\ln x + 2x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x+2+\ln\left(x^2-x+1\right)\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\dfrac{7}{x}\right)$

Réponses :

- On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^2 x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)^2 = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\dfrac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$. En posant $t=\sqrt{x}$, on obtient :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x}{x} = \lim_{t\to+\infty} 4\left(\frac{\ln t}{t}\right)^2 = 0 \quad (\text{Car} : \lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t} = 0)$$

- On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(\sin x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{\sin x}\times\sin x\ln(\sin x)$. On sait que $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{\sin x} = 1$.

D'autre part, en posant $X=\sin x$, on obtient : $\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x\ln(\sin x) = \lim\limits_{X\to 0^+} X\ln(X) = 0$.

Par suite : $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(\sin x) = 1\times 0 = 0$.

- On a : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{\cos x-1}\times\dfrac{\cos x-1}{x^2} = 1\times\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}$ car :

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{\cos x-1} = \lim\limits_{X\to 1}\dfrac{\ln(X)}{X-1} = 1$ (Ici on a posé $X=\cos x$)

- On a pour tout $x\in\left]1;+\infty\right[$:

$$\frac{\ln(x-1)}{\ln(x+2)} = \frac{\ln\left(x\left(1-\frac{1}{x}\right)\right)}{\ln\left(x\left(1+\frac{2}{x}\right)\right)} = \frac{\ln x+\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\ln x+\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)} = \frac{1+\frac{1}{\ln x}\times\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}{1+\frac{1}{\ln x}\times\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}$$

Comme : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\ln x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right) = 0$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x-1)}{\ln(x+2)} = 1$

For more visit: L9ray.com

• On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3\ln^2 x-7\ln x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3\ln x-7\right)\ln x$.

Comme : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3\ln^2 x-7\ln x\right)=+\infty$.

• On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\ln x-x}{\ln x+2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(2\dfrac{\ln x}{x}-1\right)}{x\left(\dfrac{\ln x}{x}+2\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\dfrac{\ln x}{x}-1}{\dfrac{\ln x}{x}+2}$.

Comme : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\ln x-x}{\ln x+2x}=\dfrac{2\times0-1}{0+2}=-\dfrac{1}{2}$.

• On a pour tout $x\in]0;+\infty[$:

$$-x+2+\ln\left(x^2-x+1\right)=-x+2+\ln\left(x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\right)=-x+2+2\ln x+\ln\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$$

Donc : $-x+2+\ln\left(x^2-x+1\right)=x\left(-1+\dfrac{2}{x}+2\dfrac{\ln x}{x}\right)+\ln\left(1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x+2+\ln\left(x^2-x+1\right)\right)=-\infty$.

• On a pour tout $x\in]0;+\infty[$: $x\ln\left(1+\dfrac{7}{x}\right)=7\times\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{7}{x}\right)}{\dfrac{7}{x}}$. En posant $X=\dfrac{7}{x}$, on obtient :

$$\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{7}{x}\right)=\lim_{X\to0}7\times\frac{\ln(1+X)}{X}=7.$$

Applications

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt[3]{x}\ln x$; $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{\sqrt[5]{x}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-7x-5\ln x\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(x^{2020}+x+1\right)}{x}$; $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{\ln x+3}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}x^2\ln\left(1+\dfrac{4}{x^2}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\ln\left(x^2-1\right)}$; $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x}{x-3}\ln\left(\dfrac{x}{3}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$; $\lim\limits_{x\to0^-}x\ln\left(x^2-3x\right)$

1.8. DÉRIVÉE LOGARITHMIQUE

Proposition 8

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que : $(\forall x\in I)\ u(x)\neq0$

Alors la fonction $x\mapsto\ln|u(x)|$ est dérivable sur I et on a : $\left(\ln|u(x)|\right)'=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

For more visit: L9ray.com

L9RAY

Preuve

Pour tout $x \in I$, on pose : $f(x) = \ln|u(x)|$

Puisque u est continue sur I (car elle est dérivable) et ne s'annule pas sur I alors u est soit strictement positive ou soit strictement négative sur I.

Si u est strictement positive sur I alors pour tout $x \in I$, $f(x) = \ln\big(u(x)\big)$, c'est-à-dire que : $f = \ln o\, u$.

Par application de la proposition de la dérivabilité de la composée de deux fonctions, on déduit que la fonction f est dérivable sur I et que pour tout $x \in I$:

$$f'(x) = (\ln' o\, u)(x) \times u'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Si u est strictement négative sur I alors pour tout $x \in I$, $f(x) = \ln\big(-u(x)\big)$, c'est-à-dire que : $f = \ln o(-u)$

Par application de la proposition de la dérivabilité de la composée de deux fonctions, on déduit que la fonction f est dérivable sur I et que pour tout $x \in I$:

$$f'(x) = \big(\ln' o(-u)\big)(x) \times (-u)'(x) = \frac{-u'(x)}{-u(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Exemples

On considère les fonctions numérique f et g définies par :

$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \quad \text{et} \quad g(x) = \ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|$$

- La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$. En effet, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} < \sqrt{x^2+1}$.

  Il s'ensuit donc que pour $x \in \mathbb{R}$, $-x \le |x| < \sqrt{x^2+1}$. Par suite : $(\forall x \in \mathbb{R})\ x + \sqrt{x^2+1} > 0$.

  D'après la proposition précédente, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'}{x+\sqrt{x^2+1}} = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) \times \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

- La fonction g est définie pour les réels x tels que $\frac{x-2}{x+1} \neq 0$ et $x+1 \neq 0$, c'est-à-dire que $x \in \mathbb{R} - \{2,-1\}$.

  Sur chacun des intervalles $]-\infty;-1[$, $]-1;2[$ et $]2;+\infty[$, la fonction $x \mapsto \frac{x-2}{x+1}$ est dérivable et ne s'annule pas. Donc, la fonction g est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty;-1[$, $]-1;2[$ et $]2;+\infty[$.

  De plus, on a pour tout $x \in \mathbb{R} - \{2;-1\}$:

$$g'(x) = \frac{\left(\frac{x-2}{x+1}\right)'}{\frac{x-2}{x+1}} = \frac{\frac{3}{(x+1)^2}}{\frac{x-2}{x+1}} = \frac{3}{(x+1)(x-2)}$$

For more visit: L9ray.com

Applications

Déterminer la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle I donné, dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=\ln\left(x^2-3x+7\right)$ et $I=\mathbb{R}$; 2) $f(x)=\left(x^2+2x\right)\ln\left(x^2-4\right)$ et $I=]2;+\infty[$

3) $f(x)=x.\sqrt[3]{\ln x-1}$ et $I=]e;+\infty[$; 4) $f(x)=\ln\left|x+2-\sqrt{x^2+4}\right|$ et $I=]-\infty;0[$

5) $f(x)=\ln(\cos x)$ et $I=\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$; 6) $f(x)=\ln\left(\frac{2x-\sqrt{x}}{x-3}\right)$ et $I=]3;+\infty[$

7) $f(x)=\sqrt{\ln^2 x-2\ln x}$ et $I=]0;1[$; 8) $f(x)=\frac{2+\ln x}{1-\ln x}$ et $I=]0;e[$

Définition 2

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I telle que : $(\forall x\in I)\ u(x)\neq 0$

La fonction $\frac{u'}{u}$ est appelée la dérivée logarithmique de la fonction u sur l'intervalle I.

Proposition 9

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I telle que : $(\forall x\in I)\ u(x)\neq 0$

Les primitives de la fonction $x\mapsto\frac{u'(x)}{u(x)}$ sur I sont les fonctions $x\mapsto\ln|u(x)|+\lambda$ où $\lambda\in\mathbb{R}$.

Exemples

1) Les primitives de la fonction numérique $f:x\mapsto\frac{1}{x-1}$ sur l'intervalle $]-\infty;1[$ sont les fonctions numériques $F:x\mapsto\ln(1-x)+\lambda$ où $\lambda\in\mathbb{R}$.

2) Les primitives de la fonction numérique $g:x\mapsto\frac{\cos x}{\sin x}$ sur l'intervalle $\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right[$ sont les fonctions numériques $G:x\mapsto\ln|\sin x|+\lambda$ où $\lambda\in\mathbb{R}$.

3) On considère la fonction f définie sur $]-2;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{\sqrt[4]{x^3+8}}{\left(x^2+1\right)^3}$

Calculons la dérivée de la fonction f en utilisant la dérivée logarithmique :

On a pour tout $x\in]-2;+\infty[$: $\ln(f(x))=\ln\left(\sqrt[4]{x^3+8}\right)-\ln\left(\left(x^2+1\right)^3\right)=\frac{1}{4}\ln\left(x^3+8\right)-3\ln\left(x^2+1\right)$

Il s'ensuit donc que pour tout $x\in]-2;+\infty[$: $\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{3x^2}{4\left(x^3+8\right)}-\frac{6x}{x^2+1}=\frac{-3x\left(7x^3-x+64\right)}{4\left(x^2+1\right)\left(x^3+8\right)}$

For more visit: L9ray.com

Par suite : $\left(\forall x \in]-2;+\infty[\right)\ f'(x)=\dfrac{-3x\left(7x^3-x+64\right)}{4\sqrt[4]{\left(x^3+8\right)^3}\left(x^2+1\right)^4}$

Applications

1. Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives de la fonction f sur l'intervalle I :

a) $f(x)=\dfrac{1}{2-3x}$ sur $I=\left]\dfrac{2}{3};+\infty\right[$; b) $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2-6x}$ sur $I=\mathbb{R}_-^*$

c) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ sur $I=\mathbb{R}_+^*$; d) $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$ sur $I=]1;+\infty[$

e) $f(x)=\dfrac{\sin(2x)}{5+\sin^2 x}$ sur $I=\mathbb{R}$; f) $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ sur $I=]-1;+\infty[$

g) $f(x)=\dfrac{1}{x+\sqrt{x}}$ sur $I=\mathbb{R}_+^*$; h) $f(x)=\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}$ sur $I=\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$

2. Déterminer la primitive F de la fonction $f: x\mapsto \tan x$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ telle que : $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$.

3. On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ par : $f(x)=\dfrac{3x+1}{(2x+1)^2}$.

a) Déterminer les réels a et b tels que pour tout $x\in\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$: $f(x)=\dfrac{a}{2x+1}+\dfrac{b}{(2x+1)^2}$.

b) En déduire l'ensemble des primitives de la fonction f sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$.

c) Déterminer la primitive F de la fonction f sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ qui s'annule en 0.

4. Calculer la dérivée logarithmique de la fonction g définie par : $g(x)=\dfrac{x^{17}.\sqrt[3]{x^6-5x^3+7}}{\sqrt[32]{x^{32}-32x+1}}$.

5. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $h(x)=1-x+\ln x$.

Étudier les variations de la fonction h sur $\mathbb{R}_+^*$ puis en déduire que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right)\ \ln x\le x-1$

2 FONCTION LOGARITHME DE BASE a

2.1. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS

Définition 3

Soit a un réel strictement positif et différent de 1. La fonction logarithme de base a est la fonction numérique, notée par $\log_a$, définie sur $]0;+\infty[$ par : $\log_a(x)=\dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$

For more visit: L9ray.com

Remarques

- La fonction logarithme de base e est la fonction logarithme népérien car pour tout réel x strictement positif : $\log_e(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(e)} = \ln(x)$.
- On a : $\log_a(a) = 1$ et $\log_a(1) = 0$ et $\log_a(a^r) = r$ pour $r \in \mathbb{Q}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\log_a'(x) = \dfrac{1}{x \ln a}$.
  - Si $a > 1$ alors la fonction $\log_a$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
  - Si $0 < a < 1$ alors la fonction $\log_a$ est strictement décroissante $]0;+\infty[$.

Proposition 10

- Pour tous réels strictement positifs x et y, et pour tout $r \in \mathbb{Q}$ on a :

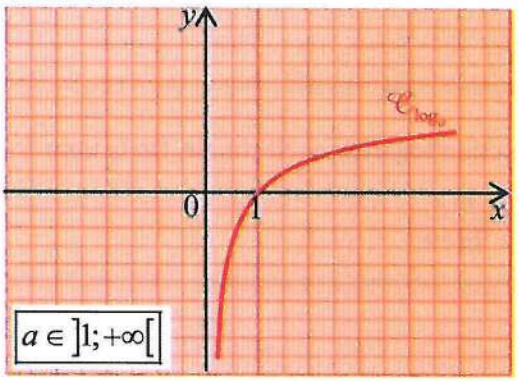
$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y) \quad ; \quad \log_a(x^r) = r\log_a(x)$$

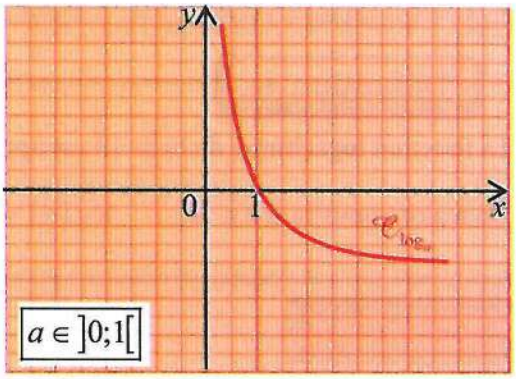
$$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x) \quad ; \quad \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tous réels strictement positifs x_1, x_2,..., x_n, on a :

$$\log_a(x_1 \times x_2 . \times .... \times x_n) = \log_a(x_1) + \log_a(x_2) + ... + \log_a(x_n)$$

2.2. LA COURBE DE LA FONCTION $\log_a$





La courbe $\mathscr{C}_{\log_a}$ admet une branche parabolique dirigée vers l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$

For more visit: L9ray.com

L9RAY

Exemples

1) On considère les nombres réels suivants : $\alpha = \log_{40}(100)$ et $\beta = \log_{16}(25)$.

Déterminons β en fonction de α :

On a : $\alpha = \dfrac{\ln(100)}{\ln(40)} = \dfrac{\ln(2^2 \times 5^2)}{\ln(2^3 \times 5)} = \dfrac{2\ln(2)+2\ln(5)}{3\ln(2)+\ln(5)}$ et $\beta = \dfrac{\ln(25)}{\ln(16)} = \dfrac{2\ln(5)}{4\ln(2)} = \dfrac{\ln(5)}{2\ln(2)}$

Il s'ensuit donc : $\alpha = \dfrac{2+2\dfrac{\ln(5)}{\ln(2)}}{3+\dfrac{\ln(5)}{\ln(2)}} = \dfrac{2+4\beta}{3+2\beta}$. Ainsi : $\beta = \dfrac{2-3\alpha}{2(\alpha-2)}$

2) Résolvons l'équation suivante : $\log_{2x}(4x) + \log_{4x}(16x) = 4$

L'équation est définie si $x > 0$, $2x \neq 1$ et $4x \neq 1$, c'est-à-dire si $x \in \mathbb{R}_+^* - \left\{\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right\}$.

On a maintenant pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* - \left\{\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right\}$:

$$\log_{2x}(4x) + \log_{4x}(16x) = 4 \Leftrightarrow \log_{2x}(2) + \log_{2x}(2x) + \log_{4x}(4) + \log_{4x}(4x) = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln 2}{\ln(2x)} + \frac{\ln 4}{\ln(4x)} = 2 \quad (\text{car : } \log_{2x}(2x) = \log_{4x}(4x) = 1)$$

Ce qui donne $\dfrac{1}{1+\log_2(x)} + \dfrac{2}{2+\log_2(x)} = 2$, c'est-à-dire $2(\log_2(x))^2 + 3\log_2(x) = 0$. Ainsi :

$\log_2(x) = 0$ ou $\log_2(x) = -\dfrac{3}{2}$. Par suite, l'ensemble solution est : $S = \left\{1; \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right\}$

2.3. LOGARITHME DÉCIMAL

Définition 4

La fonction logarithme de base 10 est appelée la fonction logarithme décimale. On la note $\log$.

On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\log(x) = \log_{10}(x) = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$

Applications

1. Calculer : $\log 1000$; $\log 100000$; $\log(0,01)$; $\log(0,00001)$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ ce qui suit :

$$\log(x+11) + \log(x-4) = 2 \quad ; \quad \log(x) + 1 = \log(x+3) \quad ; \quad (\log(x+2))^2 - \log(x+2) - 2 \geq 2$$

3. Résoudre les systèmes suivants : $\begin{cases} x+y=25 \\ \log x + \log y = 2 \end{cases}$ et $\begin{cases} xy = 100 \\ 2\log^2(x) + 2\log^2(y) = 5 \end{cases}$

For more visit: L9ray.com

A MANIPULATION DES LOGARITHMES

1) Soit $(a;b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$. Simplifier le réel : $X=\ln(ab^2)-\ln\sqrt[3]{a^2b^5}+\ln\dfrac{a}{\sqrt{b}}-\ln\sqrt[4]{a^2b^6}$.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes :

$2\ln x=1$; $(\ln x)^2-4=0$; $\ln x^2=5$; $\ln(2x-1)+\ln(x-4)=2\ln 2$

$\ln(x^2-3x+2)=0$; $\ln(3x^2-x)\le\ln x+\ln 2$; $-(\ln x)^2-\ln x+6\ge 0$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes : $\begin{cases}\ln(x).\ln(y)=-10\\ \ln x+\ln y=3\end{cases}$; $\begin{cases}\ln x^2+\ln y^5=16\\ \ln x^3+\ln y^3=6\end{cases}$

SOLUTION

1) Soit $(a,b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$. On a :

$$X=\ln a+2\ln b-\frac{1}{3}(\ln a^2+\ln b^5)+\ln a-\ln\sqrt{b}-\frac{1}{4}(\ln a^2+\ln b^6)$$

$$=\ln a+2\ln b-\frac{1}{3}(2\ln a+5\ln b)+\ln a-\frac{1}{2}\ln b-\frac{1}{4}(2\ln a+6\ln b)$$

$$=\frac{5}{6}\ln a-\frac{5}{3}\ln b$$

2) **Résolution des équations et inéquations :**

- Pour l'équation $2\ln x=1$:

L'équation $2\ln x=1$ signifie $\ln x=\dfrac{1}{2}$, ce qui donne $x=\sqrt{e}$. Par suite : $S=\{\sqrt{e}\}$

- Pour l'équation $(\ln x)^2-4=0$:

L'équation $(\ln x)^2-4=0$ signifie $\ln x=2$ ou $\ln x=-2$, ce qui donne $x=e^2$ ou $x=e^{-2}$. D'où : $S=\{e^2;e^{-2}\}$

- Pour l'équation $\ln x^2=5$:

L'équation $\ln x^2=5$ signifie $x^2=e^5$, ce qui donne $x=e^2\sqrt{e}$ ou $x=-e^2\sqrt{e}$. D'où : $S=\{e^2\sqrt{e};-e^2\sqrt{e}\}$

- Pour l'équation $\ln(2x-1)+\ln(x-4)=2\ln 2$:

Cette équation a un sens si $2x-1>0$ et $x-4>0$, c'est-à-dire si $x\in]4;+\infty[$. On a pour tout $x>4$:

$$\ln(2x-1)+\ln(x-4)=2\ln 2\Leftrightarrow\ln[(2x-1)(x-4)]=\ln 4\Leftrightarrow 2x^2-9x=0\Leftrightarrow x=\frac{9}{2}$$

Par suite : $S=\left\{\dfrac{9}{2}\right\}$

- Pour l'équation $\ln(x^2-3x+2)=0$:

Cette équation a un sens si $x^2-3x+2>0$, c'est-à-dire si $x\in]-\infty;1[\cup]2;+\infty[$.

For more visit: L9ray.com

On a alors pour tout $x \in]-\infty;1[\cup]2;+\infty[$: $\ln\left(x^2-3x+2\right)=0 \Leftrightarrow x^2-3x+1=0$. Cette dernière équation a pour solutions $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Comme $x \in]-\infty;1[\cup]2;+\infty[$ alors : $S=\left\{\frac{3-\sqrt{5}}{2};\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$

- Pour l'inéquation $\ln\left(3x^2-x\right) \leq \ln x+\ln 2$:

Cette inéquation a un sens si $x>0$ et $3x^2-x>0$, c'est-à-dire $x \in \left]\frac{1}{3};+\infty\right[$. On a pour tout $x \in \left]\frac{1}{3};+\infty\right[$:

$$\ln\left(3x^2-x\right) \leq \ln x+\ln 2 \Leftrightarrow \ln\left(3x^2-x\right) \leq \ln(2x) \Leftrightarrow 3x^2-x \leq 2x \Leftrightarrow 3x^2 \leq 3x$$

Comme $x>0$ alors $3x^2 \leq 3x$ est équivalente à $x \leq 1$. Enfin : $S=\left]\frac{1}{3};1\right]$

- Pour l'inéquation $-(\ln x)^2-\ln x+6 \geq 0$:

Cette inéquation a un sens si $x \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $X=\ln x$. L'inéquation devient $-X^2-X+6 \geq 0$.

En dressant le tableau de signes de $-X^2-X+6$, on en déduit que $-X^2-X+6 \geq 0$ est valable si et seulement si $X \in [-3;2]$. Donc $\ln x \in [-3;2]$. Puisque la fonction $x \mapsto \ln x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, alors l'ensemble solution de cette inéquation est $S=\left[e^{-3};e^2\right]$.

3) Résolution des systèmes :

- Pour le système $\begin{cases}\ln(x).\ln(y)=-10\\ \ln x+\ln y=3\end{cases}$:

Posons $X=\ln(x)$ et $Y=\ln(y)$. Le système devient $\begin{cases}X.Y=-10\\ X+Y=3\end{cases}$. On en déduit alors que X et Y sont les solutions de l'équation $t^2-3t-10=0$. Cette dernière équation a pour solutions $t=-2$ et $t=5$.

Il s'ensuit donc que $(X;Y)=(-2;5)$ ou $(X;Y)=(5;-2)$, et alors $(x;y)=\left(e^{-2};e^5\right)$ ou $(x;y)=\left(e^5;e^{-2}\right)$

L'ensemble solution est $S=\left\{\left(e^{-2};e^5\right);\left(e^5;e^{-2}\right)\right\}$.

- Pour le système $\begin{cases}\ln x^2+\ln y^5=16\\ \ln x^3+\ln y^3=6\end{cases}$:

Ce système a un sens si les nombres x^2, x^3, y^3 et y^5 sont strictement positifs. Donc le système a un sens si $x>0$ et $y>0$. On a pour tous $x>0$ et $y>0$, le système donné est équivalent à :

$$\begin{cases}2\ln x+5\ln y=16\\ 3\ln x+3\ln y=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2\ln x+5\ln y=16\\ \ln x+\ln y=2\end{cases}$$

En posant $X=\ln(x)$ et $Y=\ln(y)$, ce système devient $\begin{cases}2X+5Y=16\\ X+Y=2\end{cases}$, ce qui donne $(X;Y)=(-2;4)$.

Par conséquent : $(x;y)=\left(e^{-2};e^4\right)$. L'ensemble solution du système est $S=\left\{\left(e^{-2};e^4\right)\right\}$.

For more visit: L9ray.com

- On n'écrit $\ln x$ que si le réel x est strictement positif.
- On retiendra que la fonction logarithme transforme les produits en sommes.
- Parmi les erreurs fatales qu'il faut éviter lors des calculs avec la fonction ln :

$$\frac{\ln a}{\ln b}=\ln(a-b)\ ;\ (\ln a)\times(\ln b)=\ln(a+b)\ ;\ (\ln a)^n=n\ln a\ ;\ \frac{1}{\ln a}=-\ln a$$

- Pour résoudre une équation de genre $\ln(f(x))=\ln(g(x))$, on détermine d'abord l'ensemble de définition de cette équation puis on utilise les propriétés algébriques de la fonction ln.
- Pour tout $m\in\mathbb{Q}$, l'équation $\ln x=m$ a pour unique solution $x=e^m$.
- La formule $\ln(x^n)=n\ln x$ n'est valable que si $x>0$. En particulier : $(\forall x\in\mathbb{R}^*)\ \ln(x^2)=2\ln|x|$.
- Pour résoudre des inéquations contenant $x\mapsto\ln x$, on utilise le fait que la fonction $x\mapsto\ln x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

B CALCUL DES LIMITES

1) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x+2}{x^2\ln x}\ ;\ \lim_{x\to-\infty}\left(x+\ln(x^4+5)\right)\ ;\ \lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x^3-1}\ ;\ \lim_{x\to+\infty}(x^2+1)\ln\left(1+\frac{1}{x^3}\right)$$

2) a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}^+$: $x-\frac{x^2}{2}\le\ln(x+1)\le x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$

Indication : On pourra étudier les variations de chacune des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}^+$:

$$f:x\mapsto\frac{x^2}{2}-x+\ln(x+1)\quad\text{et}\quad g:x\mapsto x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ln(x+1)$$

b) En déduire la limite : $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(x+1)-x}{x^2}$

SOLUTION

1) Calcul des limites :

- $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x+2}{x^2\ln x}=-\infty$ (car $\lim\limits_{x\to0^+}(x+2)=2$ et $\lim\limits_{x\to0^+}x^2\ln x=0^-$)
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\ln(x^4+5)\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\ln\left(x^4\left(1+\frac{5}{x^4}\right)\right)\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+4\ln(-x)+\ln\left(1+\frac{5}{x^4}\right)\right)$

et donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\ln(x^4+5)\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(1-4\frac{\ln(-x)}{-x}+\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{5}{x^4}\right)\right)=-\infty$ (car : $\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{\ln X}{X}=0$)

- $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{x^3-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{x-1}\times\dfrac{1}{x^2+x+1}=1\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}$

For more visit: L9ray.com

L9RAY

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+1\right)\ln\left(1+\frac{1}{x^3}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x^3}\times\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}{\frac{1}{x^3}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)\times\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}{\frac{1}{x^3}}=0\times1=0$

2) a) On considère les fonctions f et g définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x)=\frac{x^2}{2}-x+\ln(x+1)\quad\text{et}\quad g(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ln(x+1)$$

On vérifie aisément que les fonctions f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}^+$ et on a pour tout $x\in\mathbb{R}^+$:

$$f'(x)=x-1+\frac{1}{x+1}=\frac{x^2}{x+1}\quad\text{et}\quad g'(x)=1-x+x^2-\frac{1}{x+1}=\frac{x^3}{x+1}$$

On a donc pour tout $x\in\mathbb{R}^+$, $f'(x)\geq0$ et $g'(x)\geq0$. Il s'ensuit donc que f et g sont croissantes sur $\mathbb{R}^+$.

Il en résulte donc que pour tout $x\in\mathbb{R}^+$, $f(x)\geq f(0)$ et $g(x)\geq g(0)$, d'où $f(x)\geq0$ et $g(x)\geq0$.

Ces deux dernières inégalités donnent : $\frac{x^2}{2}-x+\ln(x+1)\geq0$ et $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ln(x+1)\geq0$.

Par suite, pour tout $x\in\mathbb{R}^+$: $x-\frac{x^2}{2}\leq\ln(x+1)\leq x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$

b) On a pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$x-\frac{x^2}{2}\leq\ln(x+1)\leq x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\Leftrightarrow-\frac{x^2}{2}\leq\ln(x+1)-x\leq-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\Leftrightarrow-\frac{1}{2}\leq\frac{\ln(x+1)-x}{x^2}\leq-\frac{1}{2}+\frac{x}{3}$$

Puisque $\lim\limits_{x\to0^+}-\frac{1}{2}=\lim\limits_{x\to0^+}\left(-\frac{1}{2}+\frac{x}{3}\right)=-\frac{1}{2}$; alors : $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(x+1)-x}{x^2}=-\frac{1}{2}$



• Il est évidemment essentiel de connaître les limites de référence à savoir : $(r>0)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$; $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$; $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=0$; $\lim\limits_{x\to0^+}x^r\ln x=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^r}=0$; $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}=1$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$

• Pour enlever l'indétermination dans les limites contenant l'expression $\ln(u(x))$, on essaye de voir où tend l'expression $u(x)$. En gros, on rencontre les situations suivantes :

- Si $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=+\infty$, on utilise la limite : $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\ln(u(x))}{u(x)}=0$.
- Si $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=0^+$, on utilise les limites : $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)\ln(u(x))=0^-$ et $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\ln(1+u(x))}{u(x)}=1$.
- Si $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=1$, on utilise la limite : $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\ln(u(x))}{u(x)-1}=1$.

For more visit: L9ray.com

C ÉTUDE D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE

Soit f la fonction définie pour tout $x \in]-1;+\infty[$ par : $f(x) = x\ln(1+x)+1-x$

$\mathscr{C}_f$ est sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$.

2) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$.

3) a) Calculer $f''(x)$ pour tout $x \in]-1;+\infty[$

b) Dresser le tableau de variations complet de la fonction f'.

c) En déduire qu'il existe un unique réel $\alpha \in]-1;+\infty[$ tel que $f'(\alpha) = 0$.

d) Vérifier que $0 < \alpha < 1$ puis préciser le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]-1;+\infty[$.

e) Dresser le tableau de variations complet de la fonction f.

4) Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $I = [1;+\infty[$

a) Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à préciser.

b) Dresser le tableau de variations de la fonction inverse g^{-1}.

c) Calculer $\left(g^{-1}\right)'(\ln 2)$.

d) Tracer $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_{g^{-1}}$ dans le même repère.

SOLUTION

Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par : $f(x) = x\ln(1+x)+1-x$.

1) Calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x\ln(1+x)+1-x\right) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\ln(1+x)+\frac{1}{x}-1\right) = +\infty \quad .$$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^+}\left(x\ln(1+x)+1-x\right) = +\infty \text{ car } \lim_{x\to-1^+}\ln(1+x) = -\infty .$$

2) Étude des branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$:

On a : $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$; donc la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = -1$.

Au voisinage de $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, on doit donc calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\ln(1+x)+1-x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(1+x)+\dfrac{1}{x}-1\right) = +\infty$

Par suite, $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

For more visit: L9ray.com

3) a) La fonction f est deux fois dérivable sur $]-1,+\infty[$ car les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \ln(1+x)$ le sont.

De plus, on a pour tout $x \in]-1;+\infty[$: $f'(x) = \left(x\ln(1+x)+1-x\right)' = \ln(1+x)+\dfrac{x}{1+x}-1$

Et donc pour tout $x \in]-1;+\infty[$: $f''(x) = \dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{(1+x)^2} = \dfrac{2+x}{(1+x)^2}$

b) On a pour tout $x \in]-1;+\infty[$, $\dfrac{2+x}{(1+x)^2} > 0$, c'est-à-dire que $f''(x) > 0$, d'où le tableau de variation de f' :

x	-1		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$+$	
$f'(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

$\left(\lim\limits_{x\to -1^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{(1+x)\ln(1+x)-1}{1+x} = -\infty \text{ car } \lim\limits_{x\to -1^+}(1+x)\ln(1+x) = \lim\limits_{t\to 0^+} t\ln t = 0\right)$

c) La fonction f' est continue et strictement croissante sur $]-1;+\infty[$. Par conséquent :

$$f'(]-1;+\infty[) = \left]\lim_{x\to -1^+} f'(x); \lim_{x\to +\infty} f'(x)\right[=]-\infty;+\infty[= \mathbb{R}$$

Puisque $0 \in \mathbb{R}$ alors il existe un unique réel $\alpha \in]-1;+\infty[$ tel que $f'(\alpha) = 0$.

d) La fonction f' est continue et strictement croissante sur $]-1;+\infty[$. De plus :

$$f'(0) = -1 \quad , \quad f'(\alpha) = 0 \quad , \quad f'(1) = \ln(2)-\frac{1}{2} \qquad \left(\ln(2)-\frac{1}{2} \approx 0{,}2\right)$$

Comme $f'(0) < f'(\alpha) < f'(1)$, alors $0 < \alpha < 1$. Le signe de $f'(x)$ sur $]-1;+\infty[$:

- Pour $x \in]-1;\alpha[$: $f'(x) < 0$;
- Pour $x \in]\alpha;+\infty[$: $f'(x) > 0$.

e) Tableau de variation de f :

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

For more visit: L9ray.com

4) a) La fonction g est continue et strictement croissante sur l'intervalle I. D'après le théorème de la fonction réciproque, la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle J tel que :

$$J = g(I) = g([1;+\infty[) = \left[g(1) ; \lim_{x\to+\infty} g(x) \right[= [\ln 2;+\infty[$$

Ainsi : $J = [\ln 2;+\infty[$.

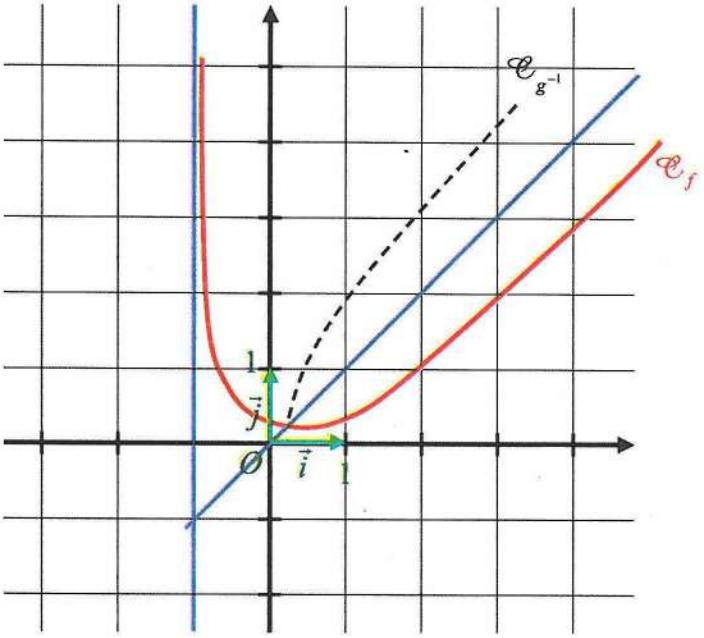
b) Tableau de variations de f^{-1} :

x	$\ln 2$	$+\infty$
$g^{-1}(x)$	1	$\nearrow$ $+\infty$

c) On a $g(1) = \ln 2$ et $g'(1) = \ln 2 - \frac{1}{2}$. Puisque $g'(1) \neq 0$ alors g^{-1} est dérivable en $\ln 2$, et de plus :

$$\left(g^{-1}\right)'(\ln 2) = \frac{1}{g'(1)} = \frac{1}{\ln 2 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{\ln(4) - 1}$$

d) Construction des courbe $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_{g^{-1}}$:



For more visit: L9ray.com

L9RAY

EXERCICES D'APPLICATION

CALCUL SUR LES LOGARITHMES

EXERCICE 01

Simplifier les écritures suivantes :

$\ln 7+\ln\left(\frac{1}{7}\right)$; $\ln\left(\frac{1}{16}\right)+3\ln 2$; $\ln 36-2\ln 3$

$2\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)$; $\ln\left(e^2\sqrt{8}\right)-\frac{1}{2}\ln 2$; $\ln\left(e^{-3}\right)-\frac{1}{2}\ln\left(e^6\right)$

$\ln\left(\sqrt{5}-2\right)+\ln\left(\sqrt{5}+2\right)$; $\ln 42+2\ln 28-3\ln 14$

$\ln\left(\sqrt{\sqrt{11}-3}\right)+\ln\left(\sqrt{\sqrt{11}+3}\right)$; $\ln\left(\frac{1}{e}\right)^2-\left(\ln\frac{1}{e}\right)^2$

EXERCICE 02

Simplifier les écritures suivantes :

$A=\ln\left(\frac{4\sqrt{2}}{27}\right)+\ln\left(12\sqrt{3}\right)+\ln\left(3\sqrt{3}\right)$

$B=\ln\left(7+4\sqrt{3}\right)^{15}+\ln\left(7-4\sqrt{3}\right)^{15}$

$C=\ln 2+\ln\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)+\ln\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$

$D=\frac{7}{16}\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)-4\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-\frac{25}{8}\ln\left(\sqrt{2}-1\right)$

$X=2\ln\left(e\sqrt{e}\right)-3\ln\left(e^3\right)-2\ln\left(e^{-6}\right)$

$Y=\ln\left(\frac{1}{2}\right)+\ln\left(\frac{2}{3}\right)+\ldots+\ln\left(\frac{98}{99}\right)+\ln\left(\frac{99}{100}\right)$

$Z=\frac{3}{8}\ln\left(7+4\sqrt{3}\right)-\ln\left(2+\sqrt{3}\right)-\frac{1}{4}\ln\left(2-\sqrt{3}\right)$

EXERCICE 03

Calculer en fonction de $a=\ln 5$ et $b=\ln 2$ ce qui suit :

$x=\ln\left(16\sqrt{\frac{4}{5}}\right)$; $y=\ln(1000)$; $z=\ln(0,64)$

$u=\ln\left(\frac{8}{125}\right)$; $v=\ln\left(\frac{5}{16}\right)+\frac{1}{3}\ln 50-4\ln\sqrt[3]{5}$

EXERCICE 04

Soit a, b et c trois réels strictement positifs. On pose :

$A=\ln a$ et $B=\ln b$ et $C=\ln c$

Exprimer ce qui suit en fonction de a, b et c :

$X=\ln\left(a^8b^9c^{-\frac{3}{2}}\right)$; $Y=\ln\left(\frac{a}{b^7}\right)+\ln\left(\frac{a^{-1}}{c^3}\right)$

$Z=\ln\left(\sqrt{abc}.\sqrt[5]{a}.\sqrt[4]{b}\right)$; $T=\ln\left(\sqrt[5]{\sqrt{a}}.\sqrt[3]{b^{-2}}.c\sqrt{c}\right)$

EXERCICE 05

Soit a et b deux réels strictement positifs tels que :

$\ln\left(\frac{a+b}{3}\right)=\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)$

Calculer le rapport $\frac{a}{b}$.

EXERCICE 06

Soit a et b deux réels strictement positifs.

1) Montrer que : $\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}$.

2) En déduire que : $\frac{\ln a+\ln b}{2}\le\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

EXERCICE 07

Soit x et y deux réels strictement positifs.

Montrer que : $(x+y)\ln(x+y)>x\ln x+y\ln y$

EXERCICE 08

Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction numérique f dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=\ln(3-2x)$; 2) $f(x)=\ln\left(x^2-5x\right)$

3) $f(x)=\ln|x+1|$; 4) $f(x)=\ln^2 x-3\ln x$

5) $f(x)=\ln\left((x-1)^2\right)$; 6) $f(x)=\sqrt{2-\ln x}$

7) $f(x)=\ln(x+2)+\ln(x-1)$

For more visit: L9ray.com

8) $f(x)=\ln\big((x+2)(x-1)\big)$; 9) $f(x)=\ln(\ln x)$

10) $f(x)=\ln\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)$; 11) $f(x)=\frac{x+3}{x\ln x}$

12) $f(x)=\ln\left(\frac{2+x}{x-3}\right)$; 13) $f(x)=\ln\left|\frac{2x+3}{x-5}\right|$

14) $f(x)=\ln\left|\sqrt{x}-1\right|$; 15) $f(x)=\sqrt{x\ln(x+1)}$

16) $f(x)=\sqrt{\ln^2 x+\ln x-6}$; 17) $f(x)=\sqrt{\frac{1-\ln x}{1+\ln x}}$

18) $f(x)=\frac{\sqrt{2-\ln x}}{\ln^2 x-3\ln x-4}$.

EXERCICE 09

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $\ln x=0$; 2) $\ln x=1$; 3) $2\ln x+3=0$

4) $\ln x=3\ln 2$; 5) $2\ln x=\ln 3+\ln 27$

6) $2\ln x=\ln(x^2)$; 8) $\ln^2 x=4$; 9) $\ln x^2=-2$

EXERCICE 10

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $\ln(7x-1)=\ln(5x+1)$; 2) $\ln(x^2-x)=\ln(x+1)$

3) $\ln(x-3)+\ln(x-1)=\ln(2x+3)$.

4) $\ln\big[(x-3)(x-1)\big]=\ln(2x+3)$.

5) $\ln(x-1)+\ln(x+3)=\ln(x^2+4x+9)$.

6) $(1+3\ln x)(1-\ln x)=0$; 7) $\ln^2 x+\ln x=0$

8) $(\ln x)^3=3\ln(x^2)$; 9) $3(\ln x)^2-7\ln x+10=0$

10) $\frac{1}{2}\ln(4x)=\ln(3-2x)-\ln\left(\sqrt{2x+1}\right)$.

11) $\ln\left(\sqrt{2x-3}\right)=\ln(6-x)-\frac{1}{2}\ln x$.

12) $\ln|x-1|+\ln|2x-1|=0$; 13) $\ln|3x+1|=5\ln 2$

14) $\ln\left(\frac{x+5}{x+2}\right)+2\ln(x+2)=\ln(3x+9)$

15) $\ln\left(\sqrt{2x+1}\right)=-\frac{1}{2}\ln x$

EXERCICE 11

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $2\ln x-5\geq 0$; 2) $1-\ln x<0$; 3) $\ln x\leq -1$

4) $\ln(x+5)<\ln(3x+11)$; 5) $(x-1)\ln x\geq 0$

6) $\ln^2 x-\ln x\geq 0$; 7) $\ln^2 x-6\ln x+5\leq 0$

8) $(\ln x-1)(3-2\ln x)\geq 0$; 9) $\ln(x^2+3x+3)\geq 0$

10) $\ln(2x-3)+2\ln(x+1)>\ln(x-3)$

11) $\frac{\ln x}{\ln x+2}\geq 0$; 12) $\frac{2-\ln x}{\ln x}\leq 3$; 13) $\ln^2 x-4\geq 0$

14) $\ln(x+1)-\ln x\leq\ln(2-x)$; 15) $\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)\geq\ln x$

16) $\ln x+\ln(4-x)>0$; 17) $\ln(x^2-5)\leq\ln(-4x)$

18) $\ln\sqrt{2x-3}+\ln(x+1)<\frac{1}{2}\ln(x-3)$.

EXERCICE 12

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$(E_1):\ln\left(\sqrt{x-1}\right)=\ln(3-x)-\frac{1}{2}\ln(x-1)$

$(E_2):\ln^3 x-3\ln^2 x-6\ln x+8=0$

$(E_3):\ln|x-1|+\ln|x+2|=\ln|4x^2+3x-7|$

2) Résoudre les inéquations suivantes :

$(I_1):\ln(x^2-2x)\leq\ln x$; $(I_2):\ln\left(\frac{3x-7}{4x+5}\right)\geq 0$

$(I_2):-\ln^2 x-\ln x+2>0$; $(I_4):\frac{\ln|x-2|}{3+\ln x}>0$

$(I_5):0<\frac{\ln x}{\ln x-1}<1$; $(I_6):\ln^3 x-3\ln^2 x+2>0$

EXERCICE 13

Pour chacun des cas suivants, déterminer le plus petit entier naturel n vérifiant l'inégalité correspondante :

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^n\leq 10^{-5}$; 2) $(1,1)^n\geq 100$; 3) $\frac{1}{4^n}<0,03$

4) $25\left(1+\frac{7}{100}\right)^n\geq 4$; 5) $40\left(1-\frac{5,5}{100}\right)^n\leq 1$

For more visit: L9ray.com

L9RAY

4 EXERCICES ET PROBLÈMES

EXERCICE 14

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

$\begin{cases} 4\ln x - 3\ln y = 6 \\ 2\ln x + 5\ln y = 16 \end{cases}$; $\begin{cases} 3\ln x - 5\ln y = -9 \\ 2\ln x + \ln y = 7 \end{cases}$

$\begin{cases} x + y = 10 \\ \ln x + \ln y = 4\ln 2 \end{cases}$; $\begin{cases} 4x + 5y = 8 \\ \ln x + \ln y = 2\ln 2 - \ln 5 \end{cases}$

$\begin{cases} \ln x - \ln y = 1 \\ \ln^2 x + \ln^2 y = 13 \end{cases}$; $\begin{cases} \ln x \times \ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = 3 \\ \ln x - \ln y = 2 \end{cases}$

$\begin{cases} \ln(xy) = -5 \\ \ln x . \ln y + 14 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x + y = e \\ \ln x + \ln y = 2 + \ln 3 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ \ln x + \ln y = \ln 12 \end{cases}$; $\begin{cases} \ln(x^5) + \ln(y^2) = 16 \\ \ln(x^3) + \ln(y^3) = 15 \end{cases}$

$\begin{cases} \ln(x^3 y^2) = 5 \\ \ln x - 4\ln\sqrt{y} = -3 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2 + y^2 = 52 \\ \ln(-x) + \ln(-y) = \ln 24 \end{cases}$

CALCUL DES LIMITES

EXERCICE 15

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{\ln x} + x\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x - 2 - \dfrac{\ln x}{x^5}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{(\ln x)^2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x - 3x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2 - 2x - 5\ln x)$

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^3 \ln x$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\ln x$; $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln^2 x$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln^2 x - 3\ln x + 2)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2 - x - 3\ln x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^2}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{3x}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x^2 - 1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2 - 1}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x - \ln x}{4x + \ln x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+2)\ln x}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(x^2 + 3x) - x\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\ln x - x\ln(x+2))$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x + \ln(x^2 - 1)\right)$; $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)\ln\sqrt{x^2 + 2x - 3}$

EXERCICE 16

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{3\ln x - 2}{1 + \ln x}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1 + \ln(-x)}{3 + \ln(-x)}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln^2 x + \ln x\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(2\ln\left(1 + \sqrt{x}\right) - \ln x\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x + 4 + \ln(x+2)}{x+2}$; $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{\ln\left(1 + \sqrt{x-3}\right)}{x-3}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$; $\lim\limits_{x\to 2^+}(x^2 - 5x + 6)\ln(x-2)$

$\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln^2 x - 3\ln x + 2}{x - e}$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2\ln x}{2 - \ln x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{3x-2}{4x+1}\right)$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(x^2+1)}{x^3 + 1}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^3)}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{\ln(5x+3)}$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\left(1 + \sqrt[3]{x}\right)}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{\ln(1+x)}$

$\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)\ln(x^3 - 8)$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(x^2 - 3x + 7)}{2x + 3}$

$\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{3x}{x-2} + \ln(x-2)\right)$; $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x}{x-2}\ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$

$\lim\limits_{x\to -1^+}(x+1)\ln(x^2 + x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\sqrt{x^2 + 3} - x\right)$

EXERCICE 17

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln\left(2x + \sqrt{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt[3]{x}\ln^5 x$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\sin(x)\ln x$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln(\tan x)}{4x - \pi}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^3 + 5x + 2)}{1 - \ln x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(2x-1)}{x^2 + x - 2}$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\left(1 + \sqrt{x}\right)}{x\ln x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{\ln(1+2x)}$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{x}{x-1} + \ln\sqrt{x-1}\right)$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2\ln|x| + 3x}{\ln|x| - 4x}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{2-3x}{2+5x}\right)$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{1 + 5\sin x}{1 + 3\tan x}\right)$

For more visit: L9ray.com

CALCUL DES FONCTIONS DÉRIVÉES

EXERCICE 18

Dans chacun des cas suivants, montrer que la fonction f est dérivable sur l'intervalle I puis calculer $f'(x)$ pour tout $x \in I$:

1) $f(x) = x\ln x - x + 1$ et $I =]0;+\infty[$.

2) $f(x) = \ln(x^2 - 2x)$ et $I =]-\infty;0[$.

3) $f(x) = \ln|x^2 - 8x + 12|$ et $I =]2;6[$.

4) $f(x) = \ln(\ln x)$ et $I =]1;+\infty[$.

5) $f(x) = \ln^2 x - 3\ln x + 5$ et $I =]0;+\infty[$.

6) $f(x) = \dfrac{3\ln x + 2}{\ln x - 1}$ et $I =]0;e[$.

7) $f(x) = \ln\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)$ et $I = \mathbb{R}$.

8) $f(x) = \ln\left(\dfrac{2x+1}{x-3}\right)$ et $I = \left]-\infty;-\dfrac{1}{2}\right[$.

9) $f(x) = \sqrt{1 - \ln^2 x}$ et $I =]0;e[$.

10) $f(x) = \dfrac{1}{x} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$ et $I =]0;+\infty[$.

11) $f(x) = \ln\left(\sqrt{1-4x}\right)$ et $I = \left]-\infty;\dfrac{1}{4}\right[$.

12) $f(x) = \ln\left|\dfrac{x^2 - 4x}{x+4}\right|$ et $I =]4;+\infty[$.

13) $f(x) = \sqrt{\ln^2 x - 3\ln x + 5}$ et $I =]0;+\infty[$.

14) $f(x) = \ln\left|x + 3 - \sqrt{x^2+9}\right|$ et $I =]0;+\infty[$.

15) $f(x) = \ln(\tan x)$ et $I = \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

16) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 - \ln^2 x}}$ et $I =]e^{-1};e[$.

17) $f(x) = x^2\left(2 - \dfrac{3}{\ln x}\right)^4$ et $I =]1;+\infty[$.

EXERCICE 20

En utilisant la dérivée logarithmique, déterminer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle I dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+3x}}{(x^3+1)^5}$ et $I =]0;+\infty[$.

2) $f(x) = \left(\dfrac{\sqrt[3]{x^3+2x-3}}{\sqrt{x^4+3}}\right)^5$ et $I =]1;+\infty[$.

3) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x^4+1}}{x\sqrt{x^2+4}}$ et $I = \mathbb{R}$.

VARIATIONS ET ÉTUDE DE FONCTIONS

EXERCICE 21

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \ln(x^2 - 2x)$ et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Déterminer D_f ensemble de définition de f.

2) Montrer que la droite (Δ): $x = 1$ est un axe de syémtrie de la courbe $\mathscr{C}_f$

3) Calculer les limites de f aux bornes de D_f.

4) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$.

5) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D_f$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f.

6) Déterminer les points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.

7) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$.

8) Soit g la restriction de la fonction f sur $I =]2;+\infty[$.

a) Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J à déterminer.

b) Calculer $\left(g^{-1}\right)'(0)$.

For more visit: L9ray.com

L9RAY

4 EXERCICES ET PROBLÈMES

EXERCICE 22

Soit f la fonction numérique définie sur $]-1;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x)=(x+1)\ln(x+1) & \text{si } x>-1 \\ f(-1)=0 \end{cases}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Montrer que f est continue à droite en $x_0=-1$.

2) Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite au point $x_0=-1$ puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

3) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

Que peut-on déduire ?

4) Étudier les variations de la fonction f.

6) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$.

EXERCICE 23

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x)=\frac{2x+1+\ln x}{x}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Calculer : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$.

3) Étudier les variations de la fonction f.

4) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)\ f''(x)=\dfrac{2\ln x-1}{x^3}$

puis étudier la concavité de la courbe $\mathscr{C}_f$.

5) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

EXERCICE 24

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=x-1-\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) a) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

b) Montrer que la droite (D) d'équation $y=x-1$ est une asymptote oblique de $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

c) Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite (D) sur $]0;+\infty[$.

3) a) Montrer que pour tout $x\in]0;+\infty[$:

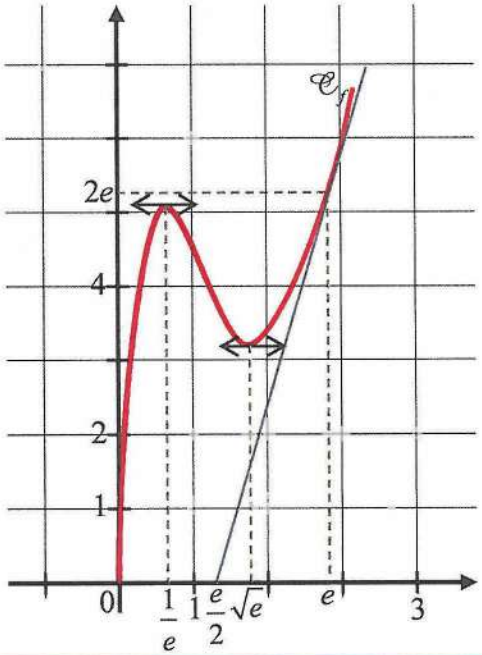
$$f'(x)=\frac{1}{2x\sqrt{x}}\left[\ln x+2\left(x\sqrt{x}-1\right)\right]$$

b) Montrer que f est décroissante sur l'intervalle $]0;1[$ et que f est croissante sur $]1;+\infty[$ puis dresser le tableau de variations de f.

4) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

EXERCICE 25

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est tracée en-dessous avec sa tangente au point d'abscisse e.



For more visit: L9ray.com

On admet l'égalité suivante :

$$f(x)=2x\left[a\ln^2 x+b\ln x+c\right]$$

où a, b et c désignent des réels.

1) a) Exprimer $f'(x)$ en fonction de a, b et c.

b) À l'aide des informations données sur le graphique, déterminer les valeurs de $f'(e)$, $f'\left(\sqrt{e}\right)$ et $f'\left(\frac{1}{e}\right)$.

c) En déduire que pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$f(x)=2x\left[2\ln^2 x-3\ln x+2\right]$$

2) a) Lire graphiquement le sens de variations de la fonction f.

b) Étudier le signe de $f'(x)$ et retrouver ainsi les résultats précédents.

EXERCICE 26

Soit f la fonction définie sur $D=[0;1[\cup]1;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x)=x\left(1-\dfrac{1}{\ln x}\right)^2 & \text{si } x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1) Montrer que f est continue à droite en 0.

2) Montrer que f est dérivable à droite en 0.

3) Calculer $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

4) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$.

5) a) Montrer que pour tout $x\in D-\{0\}$:

$$f'(x)=\left(\frac{\ln x-1}{\ln x}\right)\left(\frac{\ln^2 x-\ln x+2}{\ln^2 x}\right)$$

b) Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f.

6) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$.

CALCUL DES PRIMITIVES

EXERCICE 27

Pour chacun des cas suivants, déterminer toutes les primitives de la fonction f sur l'intervalle I :

1) $f(x)=-\dfrac{5}{x}$; $I=]0;+\infty[$

2) $f(x)=-\dfrac{1}{x}$; $I=]-\infty;0[$

3) $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$; $I=]-2;+\infty[$

4) $f(x)=\dfrac{1}{3-4x}$; $I=]1;+\infty[$

5) $f(x)=\dfrac{x^3}{1+x^4}$; $I=\mathbb{R}$

6) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x+4}$; $I=\mathbb{R}$

7) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x-5}$; $I=]2;5[$

8) $f(x)=\dfrac{2x^3+x^2+x-7}{x}$; $I=]0;+\infty[$

EXERCICE 28

Pour chacun des cas suivants, déterminer les primitives de la fonction g sur l'intervalle I :

1) $g(x)=x^2-2-\dfrac{4}{x+1}$; $I=[0;+\infty[$

2) $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{1}{x\ln x}$; $I=]1;+\infty[$

3) $g(x)=\dfrac{2}{x\sqrt{1-\ln x}}$; $I=]0;e[$

4) $g(x)=\tan x$; $I=\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$

6) $g(x)=\dfrac{x}{(x+1)^2}$; $I=]-1;+\infty[$

7) $g(x)=\dfrac{1}{x+\sqrt{x}}$; $I=]0;+\infty[$

For more visit: L9ray.com

L9RAY

4 EXERCICES ET PROBLÈMES

EXERCICE 29

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $I = \left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ par : $f(x)=\frac{3x+1}{(2x+1)^2}$.

1) Déterminer les réels a et b tels que pour tout $x \in I$:

$$f(x)=\frac{a}{2x+1}+\frac{b}{(2x+1)^2}$$

2) En déduire l'ensemble des primitives de la fonction numérique f sur l'intervalle I.

3) Déterminer la primitive F da la fonction f sur I qui s'annule en 0.

EXERCICE 30

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x)=a\ln^3 x+b\ln^2 x+1$

où a et b désignent des réels.

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Déterminer les réels a et b sachant que la courbe $\mathscr{C}_f$ passe par le point $A(e;0)$ et admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses en ce point.

2) Dans ce qui suit, on prend : $a=2$ et $b=-3$.

a) Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^n x}{x}=0$.

(On pourra poser : $x=X^n$)

c) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$.

3) Déterminer les points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses puis tracer $\mathscr{C}_f$.

4) Soit F la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$F(x)=xf(x)-6\ln^2 x+6\ln x-1$$

Montrer que F est la primitive da la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1.

FONCTION LOGARITHME DE BASE a

EXERCICE 31

Simplifier les expressions suivantes :

$\log_4(2)+\log_2(16)+\log_8(4)$

$\log_2(8)-\log_2(\sqrt[3]{32})+\log_2(9)-\log_2(3)$

$\log_3\left(\frac{15}{4}\right)+\log_2\left(\frac{1}{27}\right)+\log_2\left(\frac{4}{5}\right)$

$\log 100-\log\left(10^{2017}\right)+\log\left(\frac{1}{10^{100}}\right)$

$\frac{\log(0,008)-4\log(0,3)}{\log 9-\log 8}$

EXERCICE 32

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$5(\log_2 x)^2-\log_2 x-4=0$; $(\log x)^2-2\log x=0$

$-3\left(\log_{\frac{5}{4}} x\right)^2+\log_{\frac{5}{4}} x+10=0$

$\log_3 x=\frac{1}{2}+\log_9(4x+15)$

2) Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases}\log_3\left(\frac{1}{x^2}\right)-\log_3 y^4=-4\\ \log_3\left(x^3y^5\right)=3\end{cases}$$

EXERCICE 33

1) Résoudre les équations suivantes :

$(\log_{\sqrt{2}} x).(\log_2 x).(\log_{2\sqrt{2}} x).(\log_4 x)=54$

$\log_2 x=1-(x-2)^2$; $\log_2 x=\frac{1}{2}+\log_4(4x+10)$

2) Résoudre les inéquations suivantes :

$\log_{\frac{3}{4}}(3x+2)>2$; $\log_5(x)+\log_5(2x-3)\geq 1$

$\log_2 x\leq\log_8(5x-4)$; $\log_x\left(x^2-\frac{1}{4}\right)>4$

For more visit: L9ray.com

EXERCICES DE PERFECTIONNEMENT

EXERCICE 34

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 (\ln x)^2 & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue à droite en 0.

2) a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f(x) = 4x\left(\sqrt{x}\ln\left(\sqrt{x}\right)\right)^2$$

b) Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0 et interpréter géométriquement le résultat.

3) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et étudier son signe.

4) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

EXERCICE 35

1) Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$g(x) = 1 - \frac{1}{x} + \ln x$$

a) Étudier les variations de la fonction g.

b) Calculer $g(1)$ et en déduire que $g(x) > 0$ pour tout $x > 1$ et $g(x) < 0$ pour tout $0 < x < 1$.

2) Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = (x-1)\ln x$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

a) Calculer : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$.

c) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\ f'(x) = g(x)$.

d) Dresser le tableau de variations de f.

e) Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l'inéquation : $f(x) \geq x - 1$.

e) Construire la courbe $\mathscr{C}_f$.

EXERCICE 36

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = \frac{x}{2} + 2 + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Montrer que : $D_f =]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$.

2) Calculer : $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$ puis interpréter graphiquement les résultats obtenus.

3) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = \frac{x}{2} + 2$ est une asymptote oblique de a courbe $\mathscr{C}_f$ aux voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

c) Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite (D).

4) Montrer que le point $I(0;2)$ est un centre de symétrie pour la courbe $\mathscr{C}_f$.

5) Construire la courbe $\mathscr{C}_f$.

EXERCICE 37

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = e^3 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \sqrt[3]{e^2 u_n^2} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n \geq e^2$.

2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = \ln(u_n) - 2$.

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.

b) Exprimer v_n et u_n en fonction de n.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

For more visit: L9ray.com

L9RAY

4 EXERCICES ET PROBLÈMES

EXERCICE 38

Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x \ln x}{1+\ln x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Montrer que : $D_f = \left[0;\frac{1}{e}\right[\cup \left]\frac{1}{e};+\infty\right[$.

2) Montrer que f est continue à droite en 0.

3) Calculer : $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{e}\right)^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{e}\right)^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

4) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$.

5) Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu.

6) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et en déduire la nature de la branche infinie au voisinage de $+\infty$.

b) Montrer que la droite (Δ) est une asymptote oblique de la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

7) a) Montrer que pour tout $x \in D_f - \{0\}$:

$$f'(x) = \frac{\ln^2 x + \ln x + 1}{(1+\ln x)^2}$$

et en déduire que : $(\forall x \in D_f - \{0\})\ f'(x) > 0$.

b) Dresser le tableau de variations de f.

8) Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

9) a) Montrer que pour tout $x \in D_f - \{0\}$:

$$f''(x) = \frac{\ln^2 x - 1}{x(1+\ln x)^4}$$

b) Étudier la concavité de la courbe $\mathscr{C}_f$.

10) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$.

11) Soit g la restriction de f sur $I = \left]\frac{1}{e};+\infty\right[$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b) Donner le tableau de variations de g^{-1}.

c) Déterminer $\left(g^{-1}\right)'\left(\frac{e}{2}\right)$.

c) Tracer $\mathscr{C}_{g^{-1}}$ dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

EXERCICE 39

Première Partie :

Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$g(x) = (\ln x)^3 + \ln x - 2$$

a) Montrer que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Calculer $g(e)$ et en déduire le signe de $g(x)$

Deuxième Partie :

On considère la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = \ln x - \frac{1}{\ln x} + \frac{1}{(\ln x)^2}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Montrer que : $D_f =]0;1[\cup]1;+\infty[$.

2) Calculer les limites de f aux bornes de D_f.

3) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$.

4) a) Montrer que : $(\forall x \in D_f)\ f'(x) = \dfrac{g(x)}{x(\ln x)^3}$.

b) Dresser le tableau de variations de f.

5) Écrire l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse e.

6) Montrer qu'il existe un unique réel α dans l'intervalle $\left]\frac{1}{e^e};\frac{1}{e}\right[$ tel que : $f(\alpha) = 0$.

7) Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la courbe (Γ) d'équation $y = \ln x$.

8) Tracer les courbe $\mathscr{C}_f$ et (Γ) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

For more visit: L9ray.com

EXERCICE 40

Première Partie :

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $h(x) = x - \ln x$.

1) Calculer : $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$.

2) Calculer $h'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ puis dresser le tableau de variations de h.

3) En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\ x - \ln x \geq 1$.

Deuxième Partie :

On considère la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{x - \ln x} \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Vérifier que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Que peut-on déduire ?

3) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

4) Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

5) a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\ f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2}$

b) Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f.

6) Démontrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ coupe la droite (Δ) d'équation $y = x$ en deux points dont on déterminera les coordonnées.

7) a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f(x) - x = \frac{x(1 - h(x))}{h(x)}$$

b) En déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite (Δ).

8) Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

9) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$.

Troisième Partie :

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = \frac{1}{5} \text{ et } u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 \leq u_n \leq 1$.

2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante. (On pourra utiliser le résultat de 7) de la deuxième partie)

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.

EXERCICE 41

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle par $I = [0;+\infty[$: $f(x) = \ln\left(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x}\right)$ et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$. Que peut-on déduire ?

3) Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.
(On pourra poser : $t = x + \sqrt{x^2 + 2x}$).

4) a) Montrer que : $(\forall x \in]0;+\infty[)\ f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 2x}}$.

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

5) Construire la courbe $\mathscr{C}_f$.

6) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J qu'on déterminera.

b) Donner le tableau de variations de f^{-1}.

c) Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable en $\ln\left(2 + \sqrt{3}\right)$ puis déterminer $\left(f^{-1}\right)'\left(\ln\left(2 + \sqrt{3}\right)\right)$.

d) Tracer $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

For more visit: L9ray.com

L9RAY

4 EXERCICES ET PROBLÈMES

EXERCICE 42

Soit f et g les fonctions numériques définies sur l'intervalle $[1;+\infty[$ par :

$$f(x)=\ln(x+1)-\ln x-\frac{1}{x+1}$$

et : $g(x)=\frac{1}{x}-\ln(x+1)+\ln x$

1) a) Montrer que pour tout $x\in[1;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{-1}{x(x+1)^2} \quad \text{et} \quad g'(x)=\frac{-1}{x^2(x+1)}$$

b) Dresser les tableaux de variations de f et g.

c) En déduire que pour tout $x\in[1;+\infty[$:

$$\frac{1}{x+1}\le \ln(x+1)-\ln x\le \frac{1}{x}$$

2) On considère la suite numérique $(u_n)_{n\ge1}$ définie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par : $u_n=1+\frac{1}{2}+..+\frac{1}{n}$

a) Calculer u_1, u_2 et u_3.

b) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ u_n\ge\ln(n+1)$.

c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

EXERCICE 43

Soit f la fonction numérique définie sur $[1;+\infty[$ par :

$$f(x)=x\sqrt{\ln x}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a) Vérifier que pour tout $x\in]1;+\infty[$:

$$\frac{f(x)}{x-1}=x\sqrt{\frac{\ln x}{x-1}\times\frac{1}{x-1}}$$

b) Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 1 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) Montrer que : $(\forall x\in]1;+\infty[)\ f'(x)=\frac{2\ln x+1}{2\sqrt{\ln x}}$

Puis dresser le tableau de variation de f.

3) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ puis déterminer la nature de la branche infinie de la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

4) a) Montrer que :

$$(\forall x\in]1;+\infty[)\ f'(x)=\frac{2\ln x-1}{4x\sqrt{\ln^3 x}}$$

b) En déduire que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un unique point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.

5) Construire la courbe $\mathscr{C}_f$.

6) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J qu'on déterminera.

b) Donner le tableau de variations de f^{-1}.

c) Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable en e puis calculer $\left(f^{-1}\right)'(e)$.

d) Tracer $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

EXERCICE 44

Première Partie :

Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$g(x)=\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)+\frac{x}{x+2}$$

1) Calculer : $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$.

2) Calculer $g'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$ puis dresser le tableau de variations de g.

3) En déduire que : $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)\ g(x)>0$.

Deuxième Partie :

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\begin{cases} f(x)=x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) & \text{si } x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

2) a) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

For more visit: L9ray.com

b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x+2$ est une asymptote oblique de a courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

3) Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0 puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

4) a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\ f'(x) = g(x)$.

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

5) Construire la courbe $\mathscr{C}_f$.

EXERCICE 45

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x\ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right) & \text{si} \quad x>0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Montrer que f est continue à droite en 0.

2) Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$. (Poser : $X = \dfrac{2}{x}$)

Que peut-on déduire à propos de la courbe $\mathscr{C}_f$?

4) a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ puis vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\ f''(x) = \dfrac{-4}{x(x+2)^2}$

b) Étudier les variations de la fonction f' et déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$.

c) En déduire le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f.

5) Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.

6) Construire (T) et $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

7) Soit h la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$h(x) = \frac{2x}{x+2}$$

a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\ f(x) - h(x) = xf'(x)$.

b) En déduire la position relative des courbes des fonctions h et f.

8) On propose dans cette question la détermination de toutes les fonctions g dérivables sur $]0;+\infty[$ et vérifiant la relation (R) suivante :

$$(\forall x \in]0;+\infty[)\ g(x) - xg'(x) = h(x)$$

On pose : $G(x) = \dfrac{g(x)}{x}$ pour tout $x \in]0;+\infty[$.

a) Montrer que la fonction g vérifie la relation (R) si, et seulement si :

$$(\forall x \in]0;+\infty[)\ G'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x}$$

b) En déduire les fonctions g vérifiant (R).

EXERCICE 46

Première Partie :

Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$g(x) = x - 2\ln x$$

1) Calculer : $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2) Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ puis dresser le tableau de variations de g.

3) En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\ g(x) > 0$.

Deuxième Partie :

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = x + 1 - \ln^2 x$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) a) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (poser : $x = X^2$)

b) Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

For more visit: L9ray.com

c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f(x) \geq x \Leftrightarrow x \in \left[\frac{1}{e}; e\right]$$

3) a) Montrer que : $\left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*\right)\ f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$.

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

4) a) Montrer que : $\left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*\right)\ f''(x) = \dfrac{2(-1+\ln x)}{x^2}$.

b) Étudier la concavité de la courbe $\mathscr{C}_f$.

5) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$.

6) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J qu'on déterminera.

c) Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable en 2 puis calculer $\left(f^{-1}\right)'(2)$.

d) Tracer $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Troisième Partie :

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right)\ \dfrac{1}{e} \leq u_n \leq e$.

2) Montrer que la suite (u_n) est croissante. (On pourra utiliser le résultat de 2) c) de la deuxième partie).

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.

EXERCICE 47

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = \dfrac{2+\ln x}{\sqrt{x}}$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f.

3) a) Montrer que : $\left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*\right)\ f''(x) = \dfrac{3\ln x - 2}{4x^2\sqrt{x}}$.

b) Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un unique point d'inflexion que l'on déterminera.

4) a) Déterminer l'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.

b) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$.

EXERCICE 48

Première Partie :

Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$g(x) = 2x^2 - \left(x^2+1\right)\ln\left(x^2+1\right)$$

1) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:

$$g'(x) = 2x\left[1 - \ln\left(x^2+1\right)\right]$$

b) Montrer que la fonction g est strictement croissante sur $\left[0;\sqrt{e-1}\right]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $\left[\sqrt{e-1};+\infty\right[$.

c) Donner le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}^+$.

3) Montrer qu'il existe un unique réel α dans l'intervalle $\left[\sqrt{e-1};\sqrt{e^2-1}\right]$ tel que : $g(\alpha) = 0$.

4) En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}^+$.

Deuxième Partie :

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Montrer que la fonction f est dérivable à droite en 0 puis déterminer $f_d'(0)$.

2) a) Montrer que : $\left(\forall x \geq 1\right)\ 0 \leq f(x) \leq \dfrac{\ln\left(2x^2\right)}{x}$.

For more visit: L9ray.com

b) En déduire : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3) a) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)\ f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2(1+x^2)}$.

b) Dresser le tableau de variations de f.

4) Montrer que : $f(\alpha)=\dfrac{2\alpha}{1+\alpha^2}$.

5) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

EXERCICE 49

Première Partie :

Soit h la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$h(x)=x+1+\ln x$$

1) a) Calculer $h'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$

b) Donner le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) Montrer que l'équation $h(x)=0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}_+^*$ puis vérifier que : $\dfrac{1}{e^2}<\alpha<\dfrac{1}{e}$.

3) En déduire que $h(x)>0$ pour tout $x\in]\alpha;+\infty[$ et que $h(x)<0$ pour tout $x\in]0;\alpha[$ puis dresser le tableau de signe de la fonction h sur $\mathbb{R}_+^*$.

Deuxième Partie :

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x\ln x}{x+1} & \text{si} \quad x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Montrer que f est continue à droite en 0.

2) Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3) Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

4) a) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)\ f'(x)=\dfrac{h(x)}{(x+1)^2}$

b) Vérifier que $f(\alpha)=-\alpha$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f.

6) a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$f''(x)=-\frac{2x\ln x+(x^2-1)}{x(x+1)^3}$$

b) Montrer que $2x\ln x$ et x^2-1 ont le même signe sur chacun des intervalles $]0;1[$ et $]1;+\infty[$.

c) Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un unique point d'inflexion que l'on déterminera.

7) Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

8) Construire (T) et $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

9) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I=]\alpha;+\infty[$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b) Vérifier que $g\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)=1$.

c) Montrer que la fonction g^{-1} est dérivable en 1 et que : $\left(g^{-1}\right)'(1)=\dfrac{1}{\alpha}$.

EXERCICE 50

Soit $a\in\mathbb{R}_+^*$. On considère la fonction numérique f définie par : $f(x)=2\ln\dfrac{x}{x+a}+\dfrac{a}{x}+\dfrac{a}{x+a}$.

1) Montrer que : $D_f=]-\infty;-a[\cup]0;+\infty[$.

2) Montrer que pour tout $x\in D_f$:

$$(-a-x)\in D_f \quad \text{et} \quad f(-a-x)+f(x)=0$$

Interpréter géométriquement ce résultat.

3) a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$f(x)=\frac{2x\ln x+a}{x}+\frac{a}{x+a}-2\ln(x+a)$$

b) En déduire $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ puis montrer que :

$$\lim_{\substack{x\to-a\\x<-a}} f(x)=-\infty$$

For more visit: L9ray.com

L9RAY

c) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

4) Étudier les variations de la fonction f.

EXERCICE 51

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{1+(\ln x)^2} & \text{si } x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Montrer que f est continue à droite en 0.

2) Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3) a) Montrer que pour tout $x\in]0;+\infty[$:

$$f(x)=\frac{1}{\dfrac{1}{x}+\left(\dfrac{2\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2}$$

b) En déduire que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

c) Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$

4) a) Montrer que pour tout $x\in]0;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{(\ln x-1)^2}{(1+\ln^2 x)^2}$$

b) Dresser le tableau de variations de f.

4) a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$ puis vérifier que : $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)\ f''(x)=\dfrac{-4}{x(x+2)^2}$

b) Étudier les variations de la fonction f' et déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$.

c) En déduire le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f.

5) Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

6) Montrer que : $(\forall x\in]0;+\infty[)\ f(x)\le x$.

Interpréter géométriquement ce résultat.

7) Construire (T) et $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

8) Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$u_0=1$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ 1\le u_n\le e$.

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

(On pourra utiliser le résultat de la question 6).

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.

EXERCICE 52

Une vibration sonore se mesure par sa fréquence et donc son intensité (I) exprimée en W/m^2. Le décibel (dB) est, quant à lui, utilisé pour exprimer le rapport de deux intensités acoustiques. On définit le nombre de décibels, que l'on note N, engendré par une vibration sonore d'intensité I par : $N=10\log\left(\dfrac{I}{I_0}\right)$.

(I_0 est la plus faible intensité perceptible par l'oreille humaine ; I_0 est voisin de $10^{-12}\ W/m^2$).

1) Que vaut N lorsque $I=I_0$? Lorsque $I=10I_0$?

2) Le chuchotement (discret) de deux élèves en classe est voisin de $20\,dB$. Qu'en est-il de l'intensité sonore émise par rapport à I_0 ? Même question, pour une conversation de deux personnes, émettant $50\,dB$.

3) On dit que le seuil de douleur est atteint à partir de $120\,dB$. Qu'en est-il alors de l'intensité émise par rapport à I_0 ?

4) Le dernier concert des Stringers in the night, a été mesuré de $105\,dB$!

Qu'en est-il du rapport $\dfrac{I}{I_0}$?



For more visit: L9ray.com

EXERCICE 53

Première Partie :

Soit u la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$u(x)=x^2-2+\ln x$$

1) Étudier les variations de la fonction u et préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.

2) a) Montrer que l'équation $u(x)=0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

b) Vérifier que : $1,3<\alpha<1,4$

(on donne : $\ln(1,3)\approx 0,26$ et $\ln(1,3)\approx 0,34$).

3) Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de la variable x.

4) Justifier que : $\ln\alpha=1-\alpha^2$.

Deuxième Partie :

Soit f la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=\sqrt{x^2+(2-\ln x)^2}$$

1) Exprimer $f'(x)$ en fonction de $u(x)$ pour tout x de l'intervalle $]0;+\infty[$.

2) En déduire les variations de f sur $]0;+\infty[$.

Troisième Partie :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, on note :

- (Γ) la courbe représentative de la fonction ln (logarithme népérien) ;
- A le point de coordonnées $(0;2)$;
- M le point de (Γ) d'abscisse $x\in]0;+\infty[$.

1) Montrer que la distance AM est donnée par :

$$AM=f(x)$$

2) a) Montrer que la distance AM est minimale en un point de (Γ), noté P, dont on précisera les coordonnées.

b) Montrer que : $AP=\alpha\sqrt{1+\alpha^2}$.

3) La droite (AP) est-elle perpendiculaire à la tangente à (Γ) au point P ? Justifier la réponse

EXERCICE 54

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 1}$ définie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par : $u_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}$.

1) Calculer : u_1 ; u_2 ; u_3 ; u_4.

2) Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2(n+1)(2n+1)}$$

En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

3) Soit f la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\ln x-(x-1)$

a) Étudier les variations de la fonction f puis en déduire que : $(\forall x\in]0;+\infty[)\ \ln x\leq x-1$.

b) En utilisant le changement de variable $X=\frac{1}{x}$ dans l'inégalité précédente, montrer que :

$$(\forall x\in]0;+\infty[)\ 1-\frac{1}{x}\leq\ln x$$

c) Déduire des deux questions précédentes que pour tout $p\in\mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{p+1}\leq\ln\left(\frac{p+1}{p}\right)\leq\frac{1}{p}.$$

4) Soit n un entier naturel non nul.

a) Écrire l'encadrement du 3) c) pour tous les valeurs de p allant de n à $2n-1$.

b) En additionnant membre à membre les inégalités obtenues, démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$u_n\leq\ln 2\leq u_n+\frac{1}{2n}$$

c) En déduire un encadrement de $\ln 2-u_n$ puis prouver que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers $\ln 2$.

For more visit: L9ray.com

PROBLÈMES DE SYNTHÈSE

SE PRÉPARER AUX DEVOIRS

DEVOIR 1

Première Partie :

On considère les fonctions numériques g et h définies sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$g(x)=x-1-\ln x \quad \text{et} \quad h(x)=x+(x-2)\ln x$$

1) a) Calculer $g'(x)$ pour tout $x\in]0;+\infty[$ puis étudier les variations de la fonction g.

b) En déduire que : $(\forall x\in]0;+\infty[)\ g(x)\geq 0$.

2) a) Vérifier que pour tout $x\in]0;+\infty[$:

$$h(x)=1+g(x)+(x-1)\ln x$$

b) Montrer que : $(\forall x\in]0;+\infty[)\ (x-1)\ln x\geq 0$.

c) En déduire que : $(\forall x\in]0;+\infty[)\ h(x)>0$.

Deuxième Partie :

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=1+x\ln x-(\ln x)^2$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis étudier la branche infinie de la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

2) a) Montrer que : $(\forall x\in]0;+\infty[)\ f'(x)=\dfrac{h(x)}{x}$.

b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

3) Soit (Δ) la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A(1;1)$.

a) Montrer que $y=x$ est une équation cartésienne de la droite (Δ).

b) Vérifier que pour tout $x\in]0;+\infty[$:

$$f(x)-x=(\ln x-1)g(x)$$

c) Étudier le signe de $f(x)-x$ puis en déduire la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite (Δ).

4) Construire (Δ) et $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

(On admet que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion dont l'abscisse appartient à $\left]1;\dfrac{3}{2}\right[$)

Troisième Partie :

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0=\sqrt{2} \text{ et } u_{n+1}=f(u_n) \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}$$

1) Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ 1<u_n<e$.

2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante. (On pourra utiliser le résultat de **3)** c) de la deuxième partie)

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.

DEVOIR 2

Première Partie :

Soit g fonctions numérique définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x)=x-1+2\ln x$$

1) Étudier les variations de la fonction g.

2) Calculer $g(1)$ puis déterminer le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

3) En déduire que pour tout $x\in]0;+\infty[$:

$$x>1\Rightarrow g\left(\frac{1}{x}\right)<0 \quad \text{et} \quad 0<x<1\Rightarrow g\left(\frac{1}{x}\right)>0$$

Deuxième Partie :

Soit f fonctions numérique définie sur $[0;+\infty[$ par :

For more visit: L9ray.com

$$\begin{cases} f(x) = x - x^2 \ln x & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité : $2cm$)

1) Montrer que la fonction f est dérivable à droite en 0.

2) Montrer que : $(\forall x \in]0;+\infty[)\ f'(x) = xg\left(\frac{1}{x}\right)$.

3) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

4) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$.

5) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α tel que : $\frac{7}{4} < \alpha < 2$.

6) Soit (Δ) la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point O.

a) Montrer que $y = x$ est une équation cartésienne de la droite (Δ).

b) Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite (Δ).

7) Construire (Δ) et $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Troisième Partie :

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$u_0 \in]0;1[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 < u_n < 1$.

2) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.

DEVOIR 3

Soit f la fonction numérique définie sur $]0;2[$ par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{x}{2-x}\right)$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$.

b) Montrer que : $(\forall x \in]0;2[)\ f'(x) = \frac{2}{x(2-x)}$.

c) Dresser le tableau de variations de f.

2) a) Montrer que le point $A(1;0)$ est un centre de symétrie pour la courbe $\mathscr{C}_f$.

b) Écrire l'équation de la tangent (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A(1;0)$.

3) Pour tout $x \in]0;2[$, on pose : $\varphi(x) = f(x) - x$.

a) Montrer que : $\varphi\left(\frac{3}{2}\right) < 0$ et $\varphi\left(\frac{7}{4}\right) > 0$.

(On prend : $\ln 3 \approx 1{,}1$ et $\ln 7 \approx 1{,}94$)

b) En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α tel que : $\frac{3}{2} < \alpha < \frac{7}{4}$ puis interpréter géométriquement le résultat.

4) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

DEVOIR 4

Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Montrer que : $D_f = [0;1[\cup]1;+\infty[$.

2) Calculer les limites aux bornes de D_f.

3) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$.

4) Montrer que f est continue à droite en 0.

5) Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu.

6) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D_f - \{0\}$.

7) Dresser le tableau de variations de f.

8) Écrire l'équation de la tangent (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A(e;0)$ puis construire la courbe $\mathscr{C}_f$.

For more visit: L9ray.com

DEVOIR 5

On considère la fonction numérique f définie par :

$$f(x)=\frac{1}{x(1-\ln x)}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. (Unité : $2cm$)

Première Partie :

1) Montrer l'ensemble de définition de la fonction f est : $D_f=]0;e[\cup]e;+\infty[$

2) a) Calculer $\lim\limits_{x\to e^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to e^-} f(x)$. Interpréter géométriquement les résultats obtenus.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

En déduire que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet, au voisinage de $+\infty$, une asymptote que l'on déterminera.

c) Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ puis interpréter géométriquement ce résultat.

3) a) Montrer que pour tout $x\in D_f$:

$$f'(x)=\frac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$$

b) Montrer que la fonction f est décroissante sur l'intervalle $]0;1]$ et croissante sur chacun des intervalles $[1;e[$ et $[e;+\infty[$.

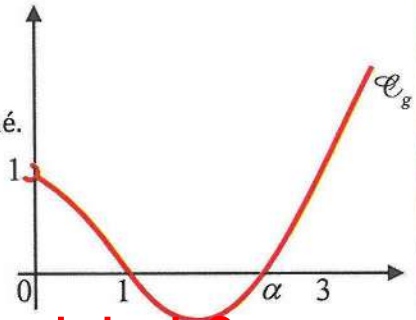
c) Dresser le tableau de variations de f sur D_f.

Deuxième Partie :

Soit g fonctions numérique définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x)=1-x^2(1-\ln x)$$

et soit $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé. (Voir figure)



1) a) Déterminer graphiquement le nombre de solutions dans $]0;+\infty[$ de l'équation : $g(x)=0$.

b) On donne le tableau de valeurs suivant :

x	2,1	2,2	2,3	2,4
$g(x)$	- 0,14	- 0,02	0,12	0,28

Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution α telle que : $g(x)=0$.

2) a) Vérifier que pour tout $x\in D_f$:

$$f(x)-x=\frac{g(x)}{x(1-\ln x)}$$

b) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y=x$ coupe la courbe $\mathscr{C}_f$ aux deux points d'abscisses 1 et α.

c) Déterminer, à partir de la courbe $\mathscr{C}_g$, le signe de $g(x)$ sur $[1;\alpha]$ et montrer que $f(x)-x\le 0$ pour tout $x\in[1;\alpha]$.

3) Construire dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, la droite (Δ) et la courbe $\mathscr{C}_f$.

Troisième Partie :

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$u_0=2$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

1) Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ 0\le u_n\le\alpha$.

2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

(On pourra utiliser le résultat de la question 2) c) de la deuxième partie)

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.

For more visit: L9ray.com

SE PRÉPARER AUX EXAMENS

PROBLÈME 1

Première Partie :

Soit g fonctions numérique définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x)=x^2+x-2+2\ln x$$

1) Vérifier que : $g(1)=0$.

2) À partir du tableau de variations de la fonction g en-dessous :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

Montrer que $g(x)\le 0$ pour tout $x\in]0;1]$ et que $g(x)\ge 0$ pour tout $x\in[1;+\infty[$.

Deuxième Partie :

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=x+\left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. (Unité : $1cm$)

1) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) a) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

b) Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction la droite (D) d'équation $y=x$.

3) a) Montrer que : $(\forall x\in]0;+\infty[)\ f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$.

b) En déduire que la fonction f est décroissante sur l'intervalle $]0;1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$.

c) Dresser le tableau de variations de f sur $]0;+\infty[$.

4) a) Résoudre dans l'intervalle $]0;+\infty[$ l'équation :

$$\left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x=0$$

b) En déduire que $\mathscr{C}_f$ coupe la droite (D) en deux points dont on déterminera les coordonnées.

c) Montrer que pour tout $x\in[1;2]$: $f(x)\le x$ et en déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite (D) sur l'intervalle $[1;2]$.

5) Construire (D) et $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

(On admet que $\mathscr{C}_f$ possède un seul point d'inflexion dont l'abscisse est comprise entre $2,4$ et $2,5$).

Troisième Partie :

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$u_0=\sqrt{3}$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1) Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ 1\le u_n\le 2$.

2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

(On pourra utiliser le résultat de la question **4)** c) de la deuxième partie).

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.

Examen National 2017 (Session Normale)

PROBLÈME 2

Première Partie :

Soit g fonctions numérique définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x)=\frac{2}{x}-1+2\ln x$$

Le tableau en-dessous donne les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0;+\infty[$:

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	$g(1)$	↗ $+\infty$

For more visit: L9ray.com

L9RAY

1) Calculer $g(1)$.

2) Déduire à partir du tableau que :

$$g(x) > 0 \text{ pour tout } x \in]0;+\infty[$$

Deuxième Partie :

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = 3 - 3x + 2(x+1)\ln x$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. (Unité : $2\,cm$)

1) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ et donner une interprétation géométrique de ce résultat.

2) a) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. (Pour calculer la limite, on pourra écrire $f(x)$ sous la forme :

$$f(x) = x\left[\frac{3}{x} - 3 + 2\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln x\right])$$

b) Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinages de $+\infty$.

3) a) Montrer que : $(\forall x \in]0;+\infty[)\ f'(x) = g(x)$.

b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f sur $]0;+\infty[$.

4) a) Montrer que $I(1;0)$ est un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.

b) Montrer que $y = x - 1$ est une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ en ce point.

c) Construire, dans le même repère, la droite (T) et la courbe $\mathscr{C}_f$.

5) Résoudre graphiquement dans l'intervalle $]0;+\infty[$ l'inéquation : $(x+1)\ln x \geq \frac{3}{2}(x-1)$

Examen National 2016 (Session De Rattrapage)

PROBLÈME 3

Première Partie :

Soit g fonctions numérique définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x) = 1 - x + x\ln x$$

1) a) Montrer que $g'(x) = \ln x$ pour tout $x \in]0;+\infty[$.

b) Montrer que g est décroissante sur $]0;1]$ et que g est croissante sur $[1;+\infty[$.

2) Calculer $g(1)$ et en déduire que :

$$(\forall x \in]0;+\infty[)\ g(x) \geq 0$$

Deuxième Partie :

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{2\ln x}{x}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. (Unité : $1\,cm$)

1) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ et donner une interprétation géométrique de ce résultat.

(Pour calculer la limite, remarquer que :

$$f(x) = \frac{3x^2 - 1 - 2x\ln x}{x^2}$$

2) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$. En déduire la nature de la branche infinie de $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

3) a) Montrer que : $(\forall x \in]0;+\infty[)\ f'(x) = \frac{2g(x)}{x^3}$.

b) Interpréter géométriquement le résultat $f'(1) = 0$.

c) Montrer que f est croissante sur $]0;+\infty[$.

4) Construire $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

(On admet que $\mathscr{C}_f$ a deux points d'inflexion dont l'un a pour abscisse 1 et l'autre a une abscisse comprise entre 2 et 2,5. On prend : $f(0,3) \approx 0$).

5) Soit h la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$h(x) = 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{\ln(x^2)}{|x|}$$

For more visit: L9ray.com

a) Montrer que la fonction f est paire et que :

$$(\forall x \in]0;+\infty[)\ \ h(x)=f(x)$$

b) Construire, dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, la courbe $\mathscr{C}_h$ de la fonction h.

Examen National 2015 (Session De Rattrapage)

PROBLÈME 4

Première Partie :

Soit g fonctions numérique définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x)=1-\frac{1}{x^2}+\ln x$$

1) Montrer que : $(\forall x \in]0;+\infty[)\ \ g'(x)=\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x}$.

En déduire que g est croissante sur $]0;+\infty[$.

2) Vérifier que $g(1)=0$ et en déduire que :

- $g(x)\le 0$ pour tout $x \in]0;1]$.
- $g(x)\ge 0$ pour tout $x \in [1;+\infty[$.

Deuxième Partie :

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=(1+\ln x)^2+\frac{1}{x^2}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. (Unité : $1cm$)

1) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$.

Interpréter géométriquement ce résultat.

2) a) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(1+\ln x)^2}{x}=0$ puis montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$. (On pourra poser $t=\sqrt{x}$)

c) Déterminer la branche infinie de la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

3) a) Montrer que : $(\forall x \in]0;+\infty[)\ \ f'(x)=\frac{2g(x)}{x}$

puis en déduire que :

- la fonction f est décroissante sur $]0;1]$.
- la fonction f est croissante sur $[1;+\infty[$.

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $]0;+\infty[$ puis en déduire que :

$$(\forall x \in]0;+\infty[)\ \ f(x)\ge 2$$

4) Construire la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

(On admet que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet unique point d'inflexion que l'on ne cherchera pas à déterminer)

Examen National 2014 (Session Normale)

PROBLÈME 5

Première Partie :

Soit g fonctions numérique définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x)=x^2-x-\ln x$$

1) a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$2x^2-x-1=(2x+1)(x-1)$$

b) Montrer que pour tout $x \in]0;+\infty[$:

$$g'(x)=\frac{2x^2-x-1}{x}$$

et en déduire que la fonction g est croissante sur $]0;1]$ et décroissante sur $[1;+\infty[$.

2) Montrer que $g(x)\ge 0$ pour tout $x \in]0;+\infty[$.

(Remarquer que : $g(1)=0$)

Deuxième Partie :

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=x^2-1-(\ln x)^2$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. (Unité : $1cm$)

1) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ puis interpréter géométriquement ce résultat.

b) Montrer que :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$$

For more visit: L9ray.com

(Remarquer que : $f(x)=x^2\left(1-\frac{1}{x^2}-\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\right)$)

c) En déduire que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ dont on déterminera la direction.

2) a) Montrer que pour tout $x\in]0;+\infty[$:

$$f'(x)=2\left(\frac{x^2-\ln x}{x}\right)$$

b) Vérifier que pour tout $x\in]0;+\infty[$:

$$\frac{g(x)}{x}+1=\frac{x^2-\ln x}{x}$$

et en déduire que f est croissante sur $]0;+\infty[$.

3) a) Montrer que $y=2x-2$ est une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $A(1;0)$.

b) Construire, dans le même repère, la droite (T) et la courbe $\mathscr{C}_f$. (On admet que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet $A(1;0)$ comme unique point d'inflexion).

Examen National 2013 (Session De Rattrapage)

PROBLÈME 6

Première Partie :

Soit g fonctions numérique définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x)=x^2-1+2x^2\ln x$$

1) Montrer que x^2-1 et $2x^2\ln x$ ont le même signe sur l'intervalle $]0;1[$ puis en déduire que $g(x)\le 0$ pour tout $x\in]0;1[$.

2) Montrer que x^2-1 et $2x^2\ln x$ ont le même signe sur $]1;+\infty[$ puis en déduire que $g(x)\ge 0$ pour tout $x\in]1;+\infty[$.

Deuxième Partie :

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=(x^2-1)\ln x$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. (Unité : $2\,cm$)

1) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ puis interpréter géométriquement ce résultat.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis montrer que :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$. (On pourra écrire $\frac{f(x)}{x}$ sous la forme : $\frac{f(x)}{x}=\left(\frac{x^2-1}{x}\right)\ln x$).

En déduire que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ dont on déterminera la direction.

2) a) Montrer que : $(\forall x\in]0;+\infty[)\ f'(x)=\frac{g(x)}{x}$ et interpréter géométriquement $f'(1)=0$.

b) En déduire que la fonction f est décroissante sur l'intervalle $]0;1[$ et croissante sur $]1;+\infty[$.

c) Dresser le tableau de variations de la fonction f puis montrer que : $(\forall x\in]0;+\infty[)\ f(x)\ge 0$.

3) Construire la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Examen National 2012 (Session Normale)

PROBLÈME 7

Première Partie :

Soit g fonctions numérique définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x)=x^3-x-2\ln x+3$$

1) a) Vérifier que pour tout $x\in]0;+\infty[$:

$$3x^3-x-2=(x-1)(3x^2+3x+2)$$

b) Montrer que pour tout $x\in]0;+\infty[$:

$$g'(x)=\frac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$$

2) a) Vérifier que : $(\forall x\in]0;+\infty[)\ \frac{3x^2+3x+2}{x}>0$

b) En déduire que le signe de $g'(x)$ est celui de $x-1$

For more visit: L9ray.com

sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

3) a) Montrer que la fonction g st décroissante sur $]0;1]$ et croissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$.

b) En déduire que $g(x)>0$ pour tout $x\in]0;+\infty[$.

Deuxième Partie :

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=x-1+\frac{x-1+\ln x}{x^2}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. (Unité : $1cm$)

1) Montrer que : $(\forall x\in]0;+\infty[)\ f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$

puis en déduire que f est croissante sur $]0;+\infty[$.

2) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ puis interpréter géométriquement ce résultat.

b) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1+\ln x}{x^2}=0$ puis que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

c) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y=x-1$ est une asymptote oblique de la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$

3) a) Montrer que $y=3(x-1)$ est une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point de coordonnées $(1;0)$.

b) Construire, dans le même repère, la droite (T) et la courbe $\mathscr{C}_f$. (On admet que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet unique point d'inflexion que l'on ne cherchera pas à déterminer).

Examen National 2010 (Session De Rattrapage)

PROBLÈME 8

Première Partie :

Soit g fonctions numérique définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x)=x^3-1-2\ln^2 x+2\ln x$$

Le tableau suivant donne les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0;+\infty[$:

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	$\|$	$+$	
$g(x)$	$\|$ $-\infty$	↗	$+\infty$

1) Calculer $g(1)$.

2) À partir du tableau de variations de la fonction g, déterminer le signe de $g(x)$ sur $]0;1]$ et $[1;+\infty[$.

Deuxième Partie :

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2x^2}+\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. (Unité : $1cm$)

1) a) Vérifier que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

b) Montrer que la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y=x-\frac{1}{2}$ est une asymptote de $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

c) Déterminer la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite $(\mathscr{D})$.

2) Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ puis interpréter géométriquement ce résultat.

3) a) Montrer que : $(\forall x\in]0;+\infty[)\ f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$.

b) Montrer que f est décroissante sur $]0;1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$.

4) Construire $(\mathscr{D})$ et $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Examen National 2018 (Session De Rattrapage)

For more visit: L9ray.com

L9RAY

5

NOMBRES COMPLEXES (1ÈRE PARTIE)

HISTOIRE

Les nombres complexes tels que nous les connaissons et utilisons aujourd'hui datent du XIXème siècle. Ils étaient cependant connus et utilisés depuis plusieurs siècles sous le nom de nombres imaginaires (terme qui est resté dans l'expression « partie imaginaire ») et sont apparus lorsqu'on a essayé de résoudre les équations du 3ème degré.

La notion de nombre complexe a été introduite par les mathématiciens italiens Jérôme Cardan, Raphaël Bombelli et Tartaglia comme intermédiaire de calcul pour trouver des solutions aux équations polynomiales du troisième degré. Il semblerait que ce soit Héron d'Alexandrie qui ait inventé le nombre impossible. L'aspect géométrique des nombres complexes ne se développe qu'à partir du XIXème siècle avec les travaux de l'abbé Buée et Jean-Robert Argand, puis ensuite Carl Friedrich Gauss et Augustin Louis Cauchy.

Source : https://fr.wikipedia.org

JÉRÔME CARDAN (1501 – 1576)





JEAN - ROBERT ARGAND (1768 – 1822)

CAPACITÉS ATTENDUES

- Maitriser le calcul sur les nombres complexes ;
- Passer de l'écriture algébrique à l'écriture trigonométrique d'un nombre complexe et inversement ;
- Reconnaitre les formules trigonométriques de base en utilisant les nombres complexes ;
- Utiliser les nombres complexes pour résoudre des problèmes géométriques (Alignement, orthogonalité,.....)

PLAN DU COURS

- Activités Préparatoires..... 243
- Connaissances Fondamentales
  - L'ensemble des nombres complexes 251
  - Opérations sur les nombres complexes 252
  - La représentation géométrique d'un nombre complexe 256
  - Conjugué d'un nombre complexe 261
  - Module d'un nombre complexe 263
  - La forme trigonométrique d'un nombre complexe 267
- Techniques Et Astuces 276
- Exercices Et Problèmes
  - Exercices d'application..... 284
  - Exercices de perfectionnement..... 292
  - Problèmes de synthèse..... 296

For more visit: L9ray.com

1 GÉOMÉTRIE PLANE (RAPPELS)

A. Autour de la trigonométrie :

1. a) On sait que $-\dfrac{2019\pi}{7}$ est une mesure d'un angle orienté ; déterminer sa mesure principale.

b) Calculer $\cos\left(\dfrac{17\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(-\dfrac{213\pi}{4}\right)$.

2. a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\cos(3x)+\sqrt{3}\sin(3x)=2\cos\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos(3x)+\sqrt{3}\sin(3x)=-1$.

3. a) Résoudre dans $]-\pi,\pi]$ l'équation : $\sin(3x)+\sin(2x)+\sin x=0$.

b) Résoudre dans $]-2\pi,3\pi]$ l'équation : $\tan^2 x-\left(1+\sqrt{3}\right)\tan x+\sqrt{3}=0$.

B. Autour des angles orientés et coordonnées :

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{I};\vec{J})$.

1. Soit A le point du plan $\mathcal{P}$ déterminé par : $OA=2$ et $\left(\vec{I};\overrightarrow{OA}\right)\equiv\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

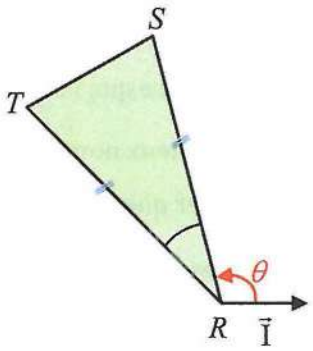
a) À l'aide de la règle et du compas, construire le point A en indiquant les étapes suivies.

b) Déterminer les coordonnées du point A.

2. Dans la figure ci-contre, RST est un triangle isocèle en R tel que :

$$RS=RT=2 \quad \text{et} \quad \left(\overrightarrow{RS};\overrightarrow{RT}\right)\equiv\frac{\pi}{6}\ [2\pi] \quad \text{et} \quad \left(\vec{I};\overrightarrow{RS}\right)\equiv\theta\ [2\pi]$$

où θ est un réel donné.



Montrer que les coordonnées du point T dans le repère $(R,\vec{I},\vec{J})$ sont :

$$\begin{cases} x_T=\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta \\ y_T=\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta \end{cases}$$

3. On considère le point $E\left(\sqrt{3};1\right)$.

a) Calculer la distance OE et déterminer une mesure de l'angle orienté $\left(\vec{I};\overrightarrow{OE}\right)$.

b) Soit F le point du plan $\mathcal{P}$ tel que : $OF=2OE$ et $\left(\overrightarrow{OE};\overrightarrow{OF}\right)\equiv\dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$

- En utilisant les formules de transformation, calculer : $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$
- En déduire les coordonnées du point F.

4. On note (U) le cercle trigonométrique associé au repère $(O;\vec{I};\vec{J})$.

Représenter sur le cercle (U) les points M_k dont les abscisses curvilignes sont : $\dfrac{5\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{2}$ où $k\in\mathbb{Z}$.

For more visit: L9ray.com

L9RAY

5 ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES

C. Autour des cercles :

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{I};\vec{J})$.

1. Dans chacun des cas suivants, déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble des points $M(x;y)$ vérifiant la condition donnée :

1er cas : $x^2+y^2+4x-8y-5=0$; 2ème cas : $(x-2)(x-1)+(y+1)(y-3)=0$

3ème cas : $\begin{cases} x=2+3\cos t \\ y=-1+3\sin t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$; 4ème cas : $x^2+y^2-4x+6y-13=0$

2. On considère les points : $A(-4;5)$; $B(-2;7)$; $C(0;3)$

a) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b) Écrire l'équation du cercle circonscrit au triangle ABC.

2 LE NOMBRE i ET LES NOMBRES COMLEXES

A) On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $(E_1): x^3-13x+12=0$

Déterminer une solution triviale de cette équation puis la résoudre.

B) On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $(E_2): x^3-9x-11=0$

1. a) Étudier les variations de la fonction numérique f définie par : $f(x)=x^3-9x-11$.

b) En déduire que l'équation (E_2) admet une solution unique α et que $\alpha\in[3;4]$.

2. Soit u et v deux nombres réels.

a) Montrer que le nombre $u+v$ est une solution de (E_2) si, et seulement si : $u^3+v^3+3(uv-3)(u+v)-11=0$

b) Montrer que si : $\begin{cases} u^3+v^3=11 \\ uv=3 \end{cases}$, alors le nombre $u+v$ est une solution l'équation (E_2).

c) On suppose que : $u^3+v^3=11$ et $uv=3$. Vérifier que :

$(\forall X\in\mathbb{R})\ (X-u^3)(X-v^3)=X^2-11X+27$

puis déterminer u^3 et v^3 ; puis en déduire u et v.

d) Déterminer l'unique solution de (E_2) puis vérifier que la solution trouvée correspond bien à la formule donnée par Cardan dans « la position historique ».

Position Historique

En 1545, Jérôme Cardan publie l'Ars Magna dans lequel il fournit des formules de résolution d'une équation de la forme $x^3=px+q$ avec p et q entiers positifs. Il développe des méthodes empruntées à Nicolo Tartaglia et découvre que si $27q^2-4p^3\geq 0$, alors le réel positif :

$$\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

est une solution de l'équation.

C) On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $(E): x^3=15x+4$

1. a) Étudier les variations de la fonction numérique g définie par : $g(x)=x^3-15x-4$.

b) En déduire que l'équation (E) admet trois solutions réelles.

For more visit: L9ray.com

2. a) Montrer que si $\begin{cases} u^3+v^3=4 \\ uv=5 \end{cases}$, alors $u+v$ est une solution de (E).

b) Établir que s'il existe deux réels u^3 et v^3 vérifiant ($u^3+v^3=4$ et $u^3v^3=125$) alors ils seront des solutions de l'équation : $(F): X^2-4X+125=0$

c) Justifier que l'équation (F) n'admet pas une solution réelle.

3. a) Montrer que l'équation (F) est équivalente à l'équation : $(F_1):(X-2)^2=-121$

b) On admet l'existence d'un nombre « imaginaire », qu'on note i, vérifiant $i^2=-1$.

En utilisant les mêmes règles de calcul vues dans $\mathbb{R}$, vérifier que l'équation (F_1) admet les nombres $2+11i$ et $2-11i$ pour solutions.

c) Calculer $(2+i)^3$ et $(2-i)^3$, et déduire de ce qui précède que le nombre 4 est une solution de (E).

4. Vérifier que pour tout $x\in\mathbb{R}$: $x^3-15x-4=(x-4)(x^2+4x+11)$, puis résoudre l'équation (E).

3 OPÉRATIONS SUR LES NOMBRES COMPLEXES

L'écriture $z=x+iy$ où $(x;y)\in\mathbb{R}^2$ s'appelle **la forme algébrique du nombre complexe** z : x est **la partie réelle** de z et on écrit $x=\mathrm{Re}(z)$; y est **la partie imaginaire** de z et on écrit $y=\mathrm{Im}(z)$.

Si $z=iy$ avec $y\in\mathbb{R}$, on dit que z est **imaginaire pur**. L'ensemble des imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$.

A) On considère les nombres complexes : $z_1=1+2i$ et $z_2=1-\frac{3}{2}i$

1. Écrire sous la forme algébrique les complexes suivants :

$-2(z_2+i)$; iz_1 ; z_1+z_2 ; z_1-z_2 ; z_1z_2 ; z_1^2 ; $-2z_1+z_2^2$; $(2z_2-z_1+4i)^{2020}$

2. Vérifier que : $\frac{1}{z_1}=\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$ et $\frac{1}{z_2}=\frac{4}{13}+\frac{6}{13}i$

3. Montrer que si z est un nombre complexe non nul de forme algébrique $z=x+iy$ avec $(x;y)\in\mathbb{R}^2-\{(0;0)\}$ alors : $\frac{1}{z}=\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{-y}{x^2+y^2}i$

B) Soit $z=x+iy$ où $(x;y)\in\mathbb{R}^2$ un nombre complexe.

Déterminer, en fonction de x et y, la partie réelle et la partie imaginaire de chacun des nombres complexes suivants : $U=3z^2-2z+1$; $V=z(iz+3)$; $W=\frac{2z}{iz-1}$ (ici $z\neq -i$)

C) Déterminer les nombres réels α et β sachant que : $\frac{\alpha+i}{2-i}=5+\beta i$.

D) On considère les nombres complexes : $z_1=7+9i$ et $z_2=(1+4i)a+i(b-7)$ où $(a;b)\in\mathbb{R}^2$.

Déterminer les réels a et b pour que : $z_1=z_2$

For more visit: L9ray.com

L9RAY

5 ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES

4 REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE D'UN COMPLEXE

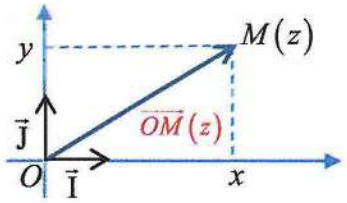
Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{I};\vec{J})$.

À tout nombre complexe $z = x + iy$ où $(x;y) \in \mathbb{R}^2$ on associe le point $M(x;y)$ du plan $(\mathcal{P})$.

Inversement, à chaque point $M(x,y)$ du plan $\mathcal{P}$ on associe le nombre complexe $z = x + iy$.

Le point M s'appelle l'image du nombre complexe z.

Le nombre z s'appelle l'affixe du point M ; on écrit $M(z)$.



On écrit z_M pour désigner l'affixe du point M ou $Aff(M)$

À chaque vecteur $\vec{u}$ du plan on associe un unique point M du plan $\mathcal{P}$ tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.

Le complexe $z_M = z$ est appelé aussi l'affixe du vecteur $\vec{u}$ et on écrit $\vec{u}(z)$.

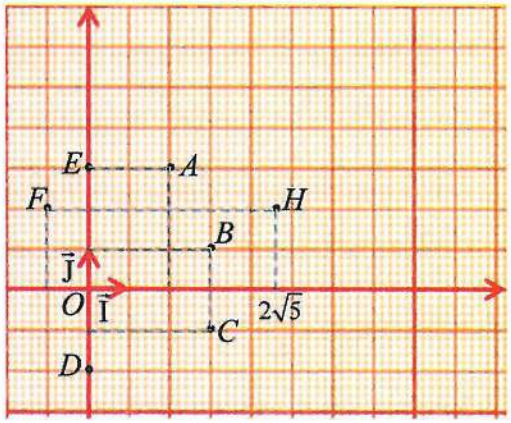
Le plan $\mathcal{P}$ est appelé alors le plan complexe.

A)

1. Représenter dans le plan $\mathcal{P}$ les images des nombres complexes suivants :

$z_1 = 0$; $z_2 = 1$; $z_3 = -1$; $z_4 = i$

$z_5 = -4i$; $z_6 = 1 - i$; $z_7 = \dfrac{1+i}{2}$; $z_8 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$



2. Déterminer les affixes des points A, B, C, D, E, F et H indiqués sur la figure ci-contre.

3. On considère les points $K(1;1)$, $L(2;2)$ et $N\left(\dfrac{1}{2};1\right)$.

Déterminer les affixes des vecteurs suivants :

$\overrightarrow{OK}$; $\overrightarrow{OL}$; $\overrightarrow{ON}$; $\overrightarrow{KN}$; $\overrightarrow{LN}$; $2\overrightarrow{KL} - \overrightarrow{NK}$

B) Soit M et M' deux points du plan complexe.

1. Montrer que l'affixe du vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{MM'}$ est : $z_{\vec{v}} = z_{M'} - z_M$

2. Montrer que pour tout $(\lambda;\mu) \in \mathbb{R}^2$ et pour tous vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ du plan, on a :

$$Aff(\lambda\vec{v} + \mu\vec{v}') = \lambda Aff(\vec{v}) + \mu Aff(\vec{v}')$$

3. Soit G le barycentre du système pondéré $\{(A;\alpha);(B;\beta)\}$ avec α et β deux réels non nuls avec $\alpha + \beta \neq 0$.

Montrer que l'affixe du point G est : $z_G = \dfrac{\alpha z_A + \beta z_B}{\alpha + \beta}$

4. Soit $A(z_A)$, $B(z_B)$ et $C(z_C)$ trois points deux à deux distincts du plan $\mathcal{P}$. Montrer que :

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (\text{Les points } A, B \text{ et } C \text{ sont alignés})$$

For more visit: L9ray.com

5 NOMBRES COMPLEXES ET GÉOMÉTRIE

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{I};\vec{J})$, on considère les points A, B, C et E d'affixes respectives : $z_A = -2+2i$, $z_B = 3+4i$, $z_C = 4+7i$ et $z_E = 1+\frac{9}{2}i$.

1. Déterminer l'affixe du point D pour lequel $ABCD$ est un parallélogramme.
2. Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$; En déduire que les points A, E et C sont alignés.
3. Déterminer deux réels α et β tels que : $\alpha+\beta=1$ et E le barycentre du système $\{(A;\alpha);(C;\beta)\}$.
4. Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des points $M(z)$ tels que : $(\exists\lambda\in\mathbb{R})\ ;\ z = 6\lambda-2+i(5\lambda+2)$

   Montrer que $\mathcal{D}$ est la droite (AC).

6 CONJUGUÉ D'UN NOMBRE COMPLEXE

A) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{I};\vec{J})$, on considère les points suivants :

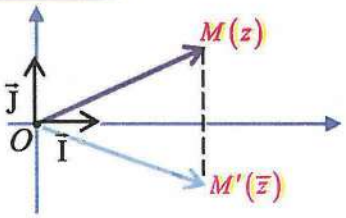
$$A(1+i) \quad ; \quad B(-2i) \quad ; \quad C(-3+2i) \quad ; \quad D(-2)$$

1. Représenter les points ci-dessus.
2. Soit A', B', C' et D' les symétriques des points A, B, C et D respectivement par rapport à l'axe des abscisses.
   a) Déterminer les affixes des points A', B', C' et D'.
   b) Comparer $\mathrm{Re}(z_A)$ et $\mathrm{Re}(z_{A'})$ puis $\mathrm{Re}(z_B)$ et $\mathrm{Re}(z_{B'})$ puis $\mathrm{Re}(z_C)$ et $\mathrm{Re}(z_{C'})$.
   c) Comparer $\mathrm{Im}(z_A)$ et $\mathrm{Im}(z_{A'})$ puis $\mathrm{Im}(z_B)$ et $\mathrm{Im}(z_{B'})$ puis $\mathrm{Im}(z_C)$ et $\mathrm{Im}(z_{C'})$.

> Soit x et y deux nombres réels et z le nombre complexe défini par $z = x+iy$.
> Le nombre complexe $x-iy$ est appelé le conjugué de z et est noté $\overline{z}$.

3. Quelle est la nature de la transformation :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \to & \mathcal{P} \\ M(z) & \mapsto & M'(\overline{z}) \end{array} \ ?$$



4. Déterminer le conjugué de chacun des complexes suivants :

$$z_1 = 5-i \quad ; \quad z_2 = -3 \quad ; \quad z_3 = -3i \quad ; \quad z_4 = \frac{1}{2}+i(1+i) \quad ; \quad z_5 = (1+i)-i(3-i)$$

B) Soit z et z' deux nombres complexes.

1. a) Vérifier que : $\overline{\overline{z}} = z$ et $z+\overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$ et $z-\overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$
   b) Montrer que : $z\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = z$ et $z\in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = -z$
2. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{I};\vec{J})$, déterminer les ensembles suivants :

$$\mathcal{D}_1 = \{M(z)/(z-2i)\in\mathbb{R}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_2 = \{M(z)/(z-2i)\in i\mathbb{R}\}$$

For more visit: L9ray.com

L9RAY

5 ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES

3. Soit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ deux nombres complexes avec x, y, x' et y' des réels.

a) Montrer que : $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ et $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$

c) On suppose que $z \neq 0$. Déterminer $\frac{1}{z}$ en fonction de $\overline{z}$ et $z.\overline{z}$.

d) Montrer que si $z \neq 0$ alors : $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$ et $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\overline{z'}}{\overline{z}}$

e) Déterminer de deux façons différentes les conjugués des nombres complexes suivants :

$$Z_1 = (2+5i)(4-3i) \quad ; \quad Z_2 = \frac{1-i}{3+i} \quad ; \quad Z_3 = (5-2i)^2 \quad ; \quad Z_4 = \frac{(2+5i)i}{(4-i)^2}$$

4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $3\overline{z} + 2z = 5 - i$.

5. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ du plan pour lesquels $z^2 + 2z + \overline{z}$ est réel.

6. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ du plan pour lesquels $3\overline{z} + i \neq 0$ et $\frac{1+i\overline{z}}{3\overline{z}+i} \in \mathbb{R}$.

7 MODULE D'UN NOMBRE COMPLEXE

A) Le plan complexe $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{I}; \vec{J})$.

1. Soit $z = x + iy$ un nombre complexe avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ et M l'image du nombre z dans le plan $\mathcal{P}$.

a) Calculer la distance OM en fonction de x et y puis vérifier que : $OM = \sqrt{z.\overline{z}}$

> Le nombre positif $\sqrt{z.\overline{z}}$ est appelé le module du nombre complexe z, et est noté $|z|$.
>
> On a donc : $|z| = \sqrt{z.\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$

b) Représenter les points $M(z)$ et $N(\overline{z})$ dans le plan $\mathcal{P}$ puis en déduire que : $|z| = |\overline{z}|$

c) Calculer : $|\sqrt{3}+i|$; $|\sqrt{2}-i\sqrt{2}|$; $|-5|$; $|-i|$; $|\pi - 2|$

2. On considère les deux points $A(z_A)$ et $B(z_B)$ et le vecteur $\vec{u}$ d'affixe z.

a) Montrer que : $\|\vec{u}\| = |z|$ et $AB = |z_B - z_A|$.

b) Dans cette question, on suppose que : $A(-1+i)$ et $B(1+3i)$.

Montrer que le triangle OAB est rectangle en A.

B) Le plan complexe $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{I}; \vec{J})$.

1. Soit z et z' deux nombres complexes et M et M' leurs images respectives, dans le plan $\mathcal{P}$.

a) Montrer que : $(|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0)$ et $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$ et $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$.

For more visit: L9ray.com

b) Construire le point $S(z+z')$ dans le plan $\mathcal{P}$ puis en déduire que : $|z+z'| \leq |z|+|z'|$

cette inégalité est appelée : « Inégalité triangulaire »

c) Montrer que $|z.z'| = |z| \times |z'|$ puis en déduire par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $|z^n| = |z|^n$

d) En déduire que si $z \neq 0$ alors : $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ et $\left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$.

e) Calculer le module de chacun des complexes suivants :

$$z_1 = \left(5+i\sqrt{3}\right)\left(1-i\sqrt{6}\right) \quad ; \quad z_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i} \quad ; \quad z_3 = \frac{(1-2i)^5}{1+i} \quad ; \quad z_4 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)^{2018}$$

$$z_5 = \frac{2}{1-3i}+\frac{3}{1+i} \quad ; \quad z_6 = \left(\sqrt{5}-2i\right)\left(\sin\frac{\pi}{7}-i\cos\frac{\pi}{7}\right) \quad ; \quad z_7 = 1+i\tan\theta \quad \left(\text{ici : } \theta \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right)$$

2. Dans le plan complexe, déterminer les ensembles suivants :

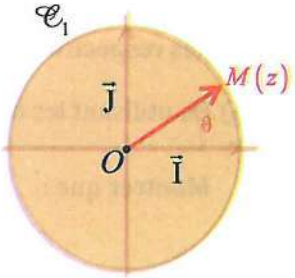
$$\mathcal{C} = \{M(z) / |z-3+4i| = 2\} \quad ; \quad \mathcal{D} = \{M(z) / |z-5+2i| = |z+1|\}$$

8 ARGUMENT D'UN COMPLEXE - FORME TRIGONOMÉTRIQUE D'UN COMPLEXE

A. Argument d'un nombre complexe non nul – Forme trigonométrique :

1. Soit $\mathcal{C}_1$ le cercle de centre O et de rayon 1.

Soit $M(x;y)$ un point du cercle $\mathcal{C}_1$ et θ une mesure de l'angle orienté $\left(\vec{I};\overrightarrow{OM}\right)$.



Montrer que l'affixe z_M du point M est déterminée par la relation :

$$z_M = \cos\theta + i\sin\theta$$

2. Soit r un réel strictement positif, et soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon r.

On considère le point $M(z)$ de $\mathcal{C}$ et on pose : $\left(\vec{I};\overrightarrow{OM}\right) \equiv \theta \ [2\pi]$

Montrer que : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

3. Soit $r \in \mathbb{R}_+^*, \theta \in \mathbb{R}$ et $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Montrer que le point $M(z)$ appartient au cercle de centre O et de rayon r.

Toute mesure θ (en rad) de l'angle orienté $\left(\vec{I};\overrightarrow{OM}\right)$ est appelée un argument du nombre complexe z, et on le note $\arg z$, et on écrit : $\arg z \equiv \theta \ [2\pi]$.

L'écriture $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ où $r = |z|$ et $\theta \equiv \arg z$ est appelée une forme trigonométrique du nombre complexe z. On peut aussi écrire : $z = [r;\theta]$.

For more visit: L9ray.com

L9RAY

4. Écrire chacun des nombres complexes suivants sous forme trigonométrique :

$z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$; $z_2 = -2 + 2i$; $z_3 = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\,i$; $z_4 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $z_5 = -5i$; $z_6 = -3$

$z_7 = 2i$; $z_8 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $z_9 = -2\sqrt{3} - 2i$; $z_{10} = i$; $z_{11} = -i$; $z_{12} = 2020$; $z_{13} = \sqrt{2} - \sqrt{6}i$.

B. Argument d'un nombre complexe non nul et opérations dans $\mathbb{C}$:

1. Soit z un nombre complexe non nul et $M(z)$ le point du plan complexe $\mathcal{P}$ dont l'affixe est z .

a) Représenter les points $M_1(\overline{z})$ et $M_2(-z)$ dans le plan $\mathcal{P}$.

b) En déduire que : $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$ et $\arg(-z) \equiv \pi + \arg(z)\ [2\pi]$.

2. Soit $z = [r;\theta]$ et $z' = [r';\theta']$ deux nombres complexes.

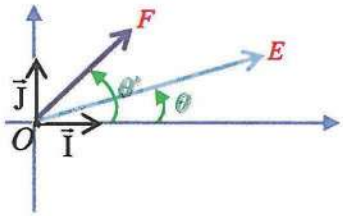
a) Écrire $z \times z'$ sous forme algébrique et en déduire que : $\arg(z \times z') \equiv \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$.

b) En écrivant $1 = z \times \frac{1}{z}$, établir que : $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$.

c) En déduire que : $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$.

C. Applications géométriques :

Dans le plan complexe $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{I};\vec{J})$, on considère les points A , B et C d'affixes respectives z_A , z_B et z_C .



1. a) En utilisant les deux points E et F tels que $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{AC}$,

Montrer que : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)\ [2\pi]$.

b) Déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ dans le cas où : $A(1)$ et $B(2+i)$ et $C(2+i\sqrt{3})$.

2. a) On suppose, et seulement dans cette question, que : $A\left(\frac{7}{5} + \frac{1}{5}i\right)$ et $B(-1+i)$ et $C(1-i)$

Montrer que le triangle ABC est rectangle en A .

b) Dans le cas général, montrer l'équivalence suivante : ABC est rectangle en $A \Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$.

3. Montrer l'équivalence suivante : (Le triangle ABC est équilatéral) $\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[1;\pm\frac{\pi}{3}\right]$

4. Soit A , B , C et D quatre points deux à deux distincts et non alignés.

Montrer les points A , B , C et D sont cocycliques si et seulement si : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \div \frac{z_C - z_D}{z_B - z_D} \in \mathbb{R}$.

On rappelle que les points A , B , C et D sont cocycliques (c'est-à-dire qu'ils appartiennent au même cercle) si, et seulement si :

$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) \equiv \left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}\right)\ [\pi]$$

For more visit: L9ray.com

1 L'ENSEMBLE DES NOMBRES COMPLEXES

1.1. NOTION DE NOMBRE COMPLEXE

Théorème 1

Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$ contenant $\mathbb{R}$,

- muni d'une addition notée $+$ et d'une multiplication notée $\times$, ou le plus souvent implicitement (c'est-à-dire sans symbole, comme dans $\mathbb{R}$) possédant les mêmes propriétés comme dans $\mathbb{R}$.
- possédant un élément noté i dont le carré vaut -1 : $i^2 = -1$.
- où tout élément z, appelé nombre complexe ou complexe, s'écrit de manière unique sous la forme $z = x + iy$, avec x et y réels.

Remarques

- On a alors : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- L'addition et la multiplication des nombres réels se prolongent aux nombres complexes et les règles de calcul restent les mêmes.
- Contrairement à $\mathbb{R}$, l'ensemble $\mathbb{C}$ n'est usuellement muni d'aucune relation d'ordre et nous ne pourrons donc pas dire qu'un nombre complexe est inférieur à un autre ou non plus qu'il est positif.
- Les nombres complexes $x + iy$ et $x + yi$ où $(x;y) \in \mathbb{R}^2$ représentent le même nombre complexe.

On a : $\mathbb{C} = \{x + iy / (x;y) \in \mathbb{R}^2\}$

1.2. LA FORME ALGÉBRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE

Définition 1

Étant donné $z \in \mathbb{C}$, il existe un unique couple $(x;y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = x + iy$.

- L'écriture $x + iy$ s'appelle la forme algébrique du nombre complexe z,
  - Le nombre x est la partie réelle de z, notée $\mathrm{Re}(z)$.
  - Le nombre y est la partie imaginaire de z, notée $\mathrm{Im}(z)$.
- Un nombre complexe est réel lorsque sa partie imaginaire est nulle : $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0$
- Un nombre complexe est dit imaginaire pur si sa partie réelle est nulle : $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0$

Exemple

On considère le nombre complexe : $z = 5 + 2i(1 - 3i)$

On a : $z = 5 + 2i - 6i^2 = 5 + 2i + 6 = 11 + 2i$. On a alors : $\mathrm{Re}(z) = 11$ et $\mathrm{Im}(z) = 2$.

For more visit: L9ray.com

1.3. ÉGALITÉ DE DEUX NOMBRES COMPLEXES

Proposition 1

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont mêmes parties réelles et mêmes parties imaginaires. En d'autres termes :

$$\left(\forall (z;z') \in \mathbb{C}^2\right) \quad z = z' \Leftrightarrow \left(\text{Re}(z) = \text{Re}(z') \text{ et } \text{Im}(z) = \text{Im}(z')\right)$$

Remarques

- Le résultat de la proposition 1 est une conséquence immédiate de l'unicité de la forme algébrique d'un nombre complexe.
- Pour tout nombre complexe z : $z = 0 \Leftrightarrow \left(\text{Re}(z) = 0 \text{ et } \text{Im}(z) = 0\right)$

Exemple

On considère deux nombres complexes : $z_1 = x - 1 + (y+2)i$ et $z_2 = -2xi + y$ où $(x;y) \in \mathbb{R}^2$

Déterminons x et y pour que $z_1 = z_2$:

On a : $z_1 = z_2 \Leftrightarrow (x - 1 = y \text{ et } y + 2 = -2x) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \left(x = -\frac{1}{3} \text{ et } y = -\frac{4}{3}\right)$

2 OPÉRATIONS SUR LES NOMBRES COMPLEXES

2.1. ADDITION ET MULTICATION DANS $\mathbb{C}$

Proposition 2

Soit z et z' deux nombres complexes tels que : $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ avec $(x, x', y, y') \in \mathbb{R}^4$.

On a :

- $z + z' = x + x' + i(y + y')$ et $z \times z' = xx' - yy' + i(xy' + xy')$.
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda z = \lambda x + i(\lambda y)$.

Exemple

On considère les nombres complexes suivants : $z_1 = 5 - 4i$; $z_2 = 3 + 6i$; $z_3 = 3 + i\sqrt{2}$

Écrivons les nombres complexes suivants sous forme algébrique : $z_1 + z_2$; $z_1 \times z_2$; $z_1 \times z_3$; $-5z_2$

- $z_1 + z_2 = 5 - 4i + 3 + 6i = 8 + 2i$.
- $z_1 \times z_2 = (5 - 4i)(3 + 6i) = 15 + 30i - 12i + 24 = 39 + 18i$.
- $z_1 \times z_3 = (5 - 4i)\left(3 + i\sqrt{2}\right) = 15 + 5\sqrt{2}i - 12i + 4\sqrt{2} = \left(15 + 4\sqrt{2}\right) + \left(-12 + 5\sqrt{2}\right)i$.
- $-5z_2 = -5(3 + 6i) = -15 - 30i$.

For more visit: L9ray.com

Remarques

- Pour tout $(z;z') \in \mathbb{C}^2$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(z+z') = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z') \\ \mathrm{Im}(z+z') = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z') \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mathrm{Re}(\lambda z) = \lambda\,\mathrm{Re}(z) \\ \mathrm{Im}(\lambda z) = \lambda\,\mathrm{Im}(z) \end{cases}$$

- Si $k \in \mathbb{N}$, alors $i^{2k} = (i^2)^k = (-1)^k$. Il en résulte donc : $i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$, $i^{4k+3} = -i$.

2.2. OPPOSÉ D'UN COMPLEXE – DIFFÉRENCE DE DEUX COMPLEXES

Proposition 3

Tout nombre complexe $z = x + iy$, où x et y sont des réels, possède un opposé dans $\mathbb{C}$, noté $-z$, qui est le nombre complexe $-x - iy$, et on écrit : $-z = -x - iy$. Donc :

$$\mathrm{Re}(-z) = -\mathrm{Re}(z) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(-z) = -\mathrm{Im}(z)$$

Définition 2

La différence de deux nombres complexes z et z' est le nombre : $z - z' = z + (-z')$

Remarques

- Si x, x', y et y' sont des nombres réels alors : $(x+iy) - (x'+iy') = x - x' + i(y - y')$
- Les identités remarquables vues dans $\mathbb{R}$ restent aussi valables dans $\mathbb{C}$. Ainsi, pour tous nombres complexes z_1 et z_2, on a :

$$(z_1+z_2)^2 = z_1^2 + 2z_1.z_2 + z_2^2 \quad ; \quad (z_1-z_2)^2 = z_1^2 - 2z_1.z_2 + z_2^2 \quad ; \quad (z_1+z_2)(z_1-z_2) = z_1^2 - z_2^2$$

En particulier, on a les égalités suivantes, valables pour tout $(a;b) \in \mathbb{R}^2$:

$$(a+ib)^2 = a^2 - b^2 + 2abi \quad ; \quad (a-ib)^2 = a^2 - b^2 - 2abi \quad ; \quad (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2$$

On a aussi : $(z_1+z_2)^3 = z_1^3 + 3z_1^2.z_2 + 3z_1.z_2^2 + z_2^3$; $(z_1-z_2)^3 = z_1^3 - 3z_1^2.z_2 + 3z_1.z_2^2 - z_2^3$

$$z_1^3 - z_2^3 = (z_1-z_2)(z_1^2 + z_1.z_2 + z_2^2) \quad ; \quad z_1^3 + z_2^3 = (z_1+z_2)(z_1^2 - z_1.z_2 + z_2^2)$$

- Un produit de nombres complexes est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul.

En particulier : $(\forall (z;z') \in \mathbb{C}^2) \quad z \times z' = 0 \Leftrightarrow (z = 0 \text{ ou } z' = 0)$

Exemples

1) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose : $z_1 = 5 - iz$ et $z_2 = z + i(z^2 + 1)$

Écrivons les nombres z_1 et z_2 sous leur forme algébrique dans chacun des cas suivants :

a) $z = i$; b) $z = 2 + 3i$; c) $z = (1 - 3i)^2$

For more visit: L9ray.com

L9RAY

a) On a : $z_1 = 5 - i^2 = 5 - (-1) = 6$ et $z_2 = i + i(i^2 + 1) = i + i(-1 + 1) = i$

b) On a : $z_1 = 5 - i(2 + 3i) = 5 - 2i - 3i^2 = 5 - 2i + 3 = 8 - 2i$

et : $z_2 = 2 + 3i + i\left((2 + 3i)^2 + 1\right) = 2 + 3i - i(-4 + 12i) = -10 - i$.

c) On a : $z_1 = 5 - i(1 - 3i)^2 = 5 - i(-8 - 6i) = 5 + 8i - 6 = -1 + 8i$

et : $z_2 = (1 - 3i)^2 + i\left((1 - 3i)^4 + 1\right) = -8 - 6i + i\left((-8 - 6i)^2 + 1\right) = -8 - 6i + i(29 + 96i) = -104 + 23i$

2) On considère le nombre complexe : $t = 1 + \sqrt{3} + i\left(1 - \sqrt{3}\right)$

Calculons puis mettons sous forme algébrique les nombres t^2, t^4 et t^6 :

- On a : $t^2 = \left(1 + \sqrt{3}\right)^2 - \left(1 - \sqrt{3}\right)^2 + 2i\left(1 + \sqrt{3}\right)\left(1 - \sqrt{3}\right) = 4\left(\sqrt{3} - i\right) = 4\sqrt{3} - 4i$.
- On a : $t^4 = \left[4\left(\sqrt{3} - i\right)\right]^2 = 16\left(\sqrt{3} - i\right)^2 = 16\left(2 - 2i\sqrt{3}\right) = 32 - 32\sqrt{3}\,i$.
- On a : $t^6 = t^2 \times t^4 = 4\left(\sqrt{3} - i\right) \times 32\left(1 - i\sqrt{3}\right) = 128\left(\sqrt{3} - i\right)\left(1 - i\sqrt{3}\right) = 128(-4i) = -512i$.
- On a : $t^{12} = \left(t^6\right)^2 = (-512i)^2 = \left(-2^9 i\right)^2 = -2^{18}$.

2.3. INVERSE D'UN NOMBRE COMPLEXE NON NUL QUOTIENT DE DEUX NOMBRES COMPLEXES

Proposition 4

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe non nul tels que $(x; y) \in \mathbb{R} - \{(0,0)\}$.

L'inverse du nombre z est le nombre complexe noté $\frac{1}{z}$ ou z^{-1} tel que :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{1}{x^2 + y^2}(x - iy) = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}$$

Exemples

1) Déterminons l'inverse du nombre complexe $z = (1 - 2i)(3 + 2i)$:

On a : $z = 3 + 2i - 6i + 4 = 7 - 4i$. Donc : $\frac{1}{z} = \frac{1}{7 - 4i} = \frac{7 + 4i}{7^2 + (-4)^2} = \frac{7}{65} + \frac{4}{65}i$.

2) Écrivons sous forme algébrique le nombre complexe : $z = \frac{1}{1 + 2i} + \frac{1}{3 - 4i}$

On a : $z = \frac{1}{1 + 2i} + \frac{1}{3 - 4i} = \frac{1 - 2i}{1^2 + 2^2} + \frac{3 + 4i}{3^2 + (-4)^2} = \frac{1 - 2i}{5} + \frac{3 + 4i}{25} = \frac{5 - 10i + 3 + 4i}{25} = \frac{8}{25} - \frac{6}{25}i$.

3) L'inverse du nombre complexe i est le nombre : $\frac{1}{i} = -i$.

For more visit: L9ray.com

Applications

1. Écrire sous forme algébrique le nombre complexe suivant : $Z=\left(2+i\sqrt{3}\right)(3-4i)+\left(1+\frac{1}{2}i\right)^2$.

2. Déterminer la forme algébrique du nombre $u=\frac{1}{z}-\frac{1}{z'}$ sachant que : $z=1-3i$ et $z'=\frac{3}{2}+5i$.

3. Soit : $j=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

a) Calculer j^2 et j^3.

b) Soit $k\in\mathbb{N}$. Calculer j^k selon les valeurs de k.

c) Vérifier que : $1+j+j^2=0$.

d) Calculer la somme : $1+j+j^2+\ldots+j^{2018}$.

4. Pour tout $z\in\mathbb{C}$ on pose : $f(z)=z^2-z+2$

Déterminer tous les complexes z tels que $f(z)\in\mathbb{R}$. (Indication : Poser $z=x+iy$ avec $(x;y)\in\mathbb{R}^2$).

5. Soit z un nombre complexe différent de $-i$. Prouver que : $\frac{1}{z+i}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \operatorname{Im} z=-1$.

Proposition 5

Soit $z=x+iy$ et $z'=x'+iy'$ deux complexe où x, x', y et y' des réels tels que $(x,y)\neq(0,0)$.

Le quotient de z' par z est le nombre complexe noté $\frac{z'}{z}$ tel que : $\frac{z'}{z}=z'\times\frac{1}{z}$ et on a :

$$\frac{z'}{z}=\frac{x'+iy'}{x+iy}=\frac{xx'+yy'}{x^2+y^2}+i\,\frac{xy'-yx'}{x^2+y^2}$$

Exemples

1) Calculons le nombre : $z=\frac{\sqrt{3}+2i}{\sqrt{3}-2i}+\frac{\sqrt{3}-2i}{\sqrt{3}+2i}$

On a immédiatement : $z=\frac{\left(\sqrt{3}+2i\right)^2+\left(\sqrt{3}-2i\right)^2}{\left(\sqrt{3}-2i\right)\left(\sqrt{3}+2i\right)}=\frac{-1+2i\sqrt{3}-1-2i\sqrt{3}}{3+4}=-\frac{2}{7}$

2) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $(E):(4+i)z=2+i-z$.

L'équation (E) est équivalente à $z+(4+i)z=2+i$, c'est-à-dire $(5+i)z=2+i$. Il s'ensuit donc :

$$z=\frac{2+i}{5+i}=\frac{(2+i)(5-i)}{5^2+1^2}=\frac{11+3i}{26}=\frac{11}{26}+\frac{3}{26}i$$

Par suite, l'ensemble solution de cette équation est : $S=\left\{\frac{11}{26}+\frac{3}{26}i\right\}$

For more visit: L9ray.com

3) Soit $z = x + iy$ un nombre complexe avec $(x;y) \in \mathbb{R}^2$. On pose $f(z) = \dfrac{z+i}{z-1}$.

Déterminons les nombres complexes z distincts de 1 pour que $f(z)$ soit un réel.

On a : $f(z) = \dfrac{x+i(y+1)}{(x-1)+iy} = \dfrac{(x+i(y+1))((x-1)-iy)}{(x-1)^2+y^2} = \dfrac{x^2+y^2-x+y}{(x-1)^2+y^2} + i\dfrac{x-y-1}{(x-1)^2+y^2}$

Il s'ensuit donc que : $\mathrm{Re}(f(z)) = \dfrac{x^2+y^2-x+y}{(x-1)^2+y^2}$ et $\mathrm{Im}(f(z)) = \dfrac{x-y-1}{(x-1)^2+y^2}$

On a alors : $f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f(z)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-y-1=0 \\ (x-1)^2+y^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x-1 \\ (x;y) \neq (1;0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x+i(x-1) \\ x \neq 1 \end{cases}$

Par suite, l'ensemble des nombres complexes z tel que $f(z) \in \mathbb{R}$ est : $\{x+(x-1)i \,/\, x \in \mathbb{R} - \{1\}\}$.

Applications

1. Écrire sous forme algébrique le nombre complexe suivant : $Z = (1+i)\left(\dfrac{2+i}{1-i}\right)^2 - (1+3i)\left(\dfrac{2+i}{1-i}\right) + 6$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

(E_1) $(-1+4i)z + (1-2i) = iz + 3$; (E_2) $\dfrac{1+3iz}{1+3z} = i\dfrac{z+2}{z-5}$

3. Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ les systèmes suivants :

$(S_1) : \begin{cases} 2iz + 3z' = i \\ iz + z' = 2 \end{cases}$; $(S_2) : \begin{cases} 3z - 2z' = -11 \\ iz + (1+i)z' = 3(4-i) \end{cases}$

4. Soit $z = x + iy$ un nombre complexe tel que $(x;y) \in \mathbb{R}^2$.

Déterminer tous les nombres complexes z dans chacun des cas suivants :

a) $iz^2 \in \mathbb{R}$; b) $z^2 + z + 1 \in \mathbb{R}$; c) $\dfrac{1-iz}{1+z} \in i\mathbb{R}$; d) $\dfrac{z-1}{iz} \in i\mathbb{R}$

3 LA REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE

3.1. AFFIXE D'UN POINT – AFFIXE D'UN VECTEUR

Définition 3

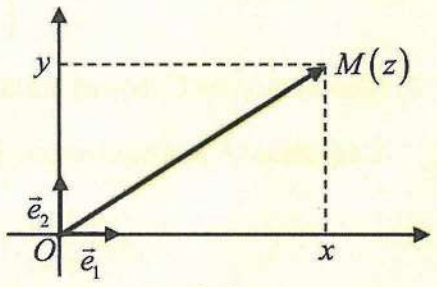
Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$.

- Soit $z = x + iy$ où $(x;y) \in \mathbb{R}^2$ un nombre complexe.

  L'unique point M, de coordonnées $(x;y)$ dans $(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$, est appelé l'image du complexe z et on écrit $M(z)$.

- Soit M un point, de coordonnées $(x;y)$ dans $(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$.

  Le nombre complexe $z = x + iy$ est appelé l'affixe du point M. On le note $Aff(M)$ ou z_M.



For more visit: L9ray.com

Remarques

- Le plan $\mathcal{P}$ étant muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$. À partir de la définition 3, on peut identifier l'ensemble $\mathbb{C}$ au plan $\mathcal{P}$ de la façon suivante :
  - À tout nombre complexe $z = x + iy$ on associe le point $M(x;y)$.
  - À tout point $M(x;y)$ du plan $\mathcal{P}$ on associe le nombre complexe $z = x + iy$. Ainsi :

  Le plan $\mathcal{P}$ est appelé alors le plan complexe et on a pour tous points M et N du plan $\mathcal{P}$:
  $$Aff(M) = Aff(N) \Leftrightarrow M = N$$
- Tout point de l'axe des abscisses est l'image d'un nombre réel, c'est pour cela l'axe des abscisses s'appelle l'axe réel. Donc : $M(z) \in (O;\vec{e}_1) \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.
- Tout point $B(0,b)$ de l'axe des ordonnées est l'image d'un nombre imaginaire pur ($Aff(B) = bi$), c'est pourquoi l'axe des ordonnées s'appelle l'axe imaginaire. Donc : $M(z) \in (O;\vec{e}_2) \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$.

Définition 4

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$.

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe où $(x;y) \in \mathbb{R}^2$.

Le vecteur $\vec{u} = x.\vec{i} + y.\vec{j}$ est appelé l'image vectorielle du complexe z, et on écrit $\vec{u}(z)$.

De même, le nombre z est appelé l'affixe du vecteur $\vec{u}$, et on écrit $Aff(\vec{u}) = z$ ou parfois $z_{\vec{u}} = z$.

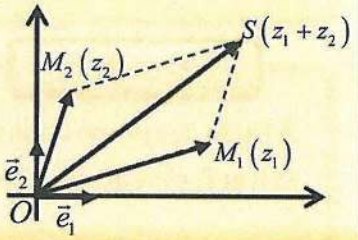
Remarques

- Soit z un nombre complexe. On a : $z = Aff(M) \Leftrightarrow z = Aff(\overrightarrow{OM})$.
- Soit $\mathcal{V}_2$ l'ensemble des vecteurs du plan. On a pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathcal{V}_2$:
$$\left(\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow Aff(\vec{u}) = Aff(\vec{v})\right)$$

3.2. INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DE LA SOMME, DE LA DIFFÉRENCE ET DE LA MULTIPLICATION PAR UN RÉEL

Proposition 6

- Si $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont deux vecteurs du plan d'affixes respectives z_1 et z_2, alors l'affixe du vecteur $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ est $z_1 + z_2$. En d'autres termes : $Aff(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = Aff(\vec{v}_1) + Aff(\vec{v}_2)$.
- Si M_1 et M_2 sont les images respectives des affixes z_1 et z_2, alors l'image du nombre complexe $z_1 + z_2$ est le point S tel que : $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$ (c'est-à-dire OM_1SM_2 est un parallélogramme).



For more visit: L9ray.com

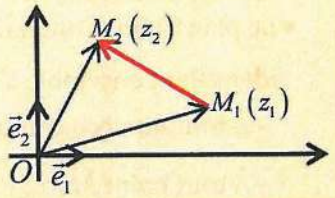
L9RAY

Proposition 7

Soit $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$ deux points du plan complexe.

Alors l'affixe du vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ est $z_2 - z_1$.

En d'autres termes : $Aff\left(\overrightarrow{M_1M_2}\right) = Aff(M_2) - Aff(M_1)$.



Exemple

On considère les points A et B d'affixes respectives : $z_A = 3 + 2i$ et $z_B = 1 + 5i$.

Déterminons l'affixe du point C pour lequel $OABC$ est un parallélogramme :

Le quadrilatère $OABC$ est un parallélogramme si, et seulement si : $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}$

D'après la proposition 7, l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A = -2 + 3i$.

Et puisque l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OC}$ est celle du point C alors l'affixe du point C est : $z_C = z_B - z_C = -2 + 3i$.

Applications

1. On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = -2 + i$, $z_B = 4 - 3i$ et $z_C = -5 + 2i$

a) Placer dans le plan complexe les points A, B et C.

b) Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{OA}$.

2. Soit A, B, C et D des points du plan d'affixes respectives a, b, c et d.

Montrer que : $ABCD$ est un parallélogramme $\Leftrightarrow a + c = b + d$

3. Soit A, B et E des points du plan d'affixes respectives : $a = 3 - 4i$ et $b = 7 - i$ et $e = 1 + i$

Et soit M le point du plan défini par : $-\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{EM} = \vec{0}$

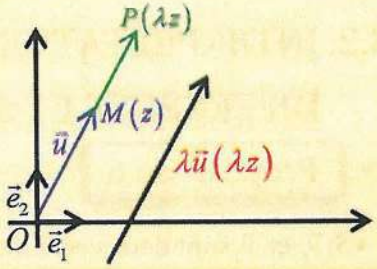
Déterminer l'affixe du point M. Quelle est la nature du quadrilatère $ABME$?

Proposition 8

- Si $\vec{u}$ est un vecteur d'affixe z et λ un nombre réel, alors l'affixe du vecteur $\lambda\vec{u}$ est λz. En d'autres termes :

$$Aff(\lambda\vec{u}) = \lambda Aff(\vec{u})$$

- Si $M(z)$ est un point du plan, alors l'image du nombre complexe λz est le point P défini par : $\overrightarrow{OP} = \lambda\overrightarrow{OM}$.



Remarque

À l'aide des propositions 6 et 8, on peut établir le résultat suivant :

Si $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont deux vecteurs du plan, alors pour tout $(\lambda_1 ; \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$Aff(\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2) = \lambda_1 Aff(\vec{v}_1) + \lambda_2 Aff(\vec{v}_2)$$

For more visit: L9ray.com

3.3. INTERPRÉTATION COMPLEXE DE LA LINÉARITÉ, DU PARALLÉLISME ET DU BARYCENTRE

Proposition 9

Soit A, B et C des points deux à deux distincts d'affixes respectives z_A, z_B et z_C.

Les points A, B et C sont alignés si, et seulement si : $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$.

Preuve

Les points A, B et C sont alignés si, et seulement si : $(\exists \lambda \in \mathbb{R})$; $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$

Puisque l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A$ et celui de $\overrightarrow{AC}$ est $z_C - z_A$, alors l'égalité $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$ est équivalente à $z_C - z_A = \lambda(z_B - z_A)$, c'est-à-dire : $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$.

Exemples

1) Soit A, B et C les points du plan complexe d'affixes respectives : $z_A = 6 - i$ et $z_C = 1 - 11i$ et $z_C = 7 + i$.

On a : $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \dfrac{1+2i}{-5-10i} = \dfrac{1+2i}{-5(1+2i)} = -\dfrac{1}{5}$.

Puisque $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$, alors les points A, B et C sont alignés.

2) Déterminons l'ensemble des points $M(z)$ du plan complexe tels que $\dfrac{z+5i}{z-3i} \in \mathbb{R}$:

On considère les deux points $A(-5i)$ et $B(3i)$. On a alors :

$$\frac{z+5i}{z-3i} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{z-z_A}{z-z_B} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (\text{les points } A,\ B \text{ et } M \text{ sont alignés et } M \neq B)$$

Par suite, l'ensemble des points demandé est la droite (AB) privée du point B.

Proposition 10

Soit A, B, C et D quatre points du plan d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D tels que $A \neq B$ et $C \neq D$.

Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si : $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$.

Preuve

Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si : $(\exists k \in \mathbb{R})$; $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$, ce qui signifie que $z_D - z_C = k(z_B - z_A)$, c'est-à-dire que $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = k \in \mathbb{R}$, d'où le résultat.

For more visit: L9ray.com

L9RAY

Proposition 11

Soit A et B deux points du plan d'affixes respectives z_A et z_B, et soit $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha+\beta \neq 0$.

L'affixe du barycentre G du système pondéré $\{(A;\alpha);(B;\beta)\}$ est le complexe : $z_G = \dfrac{\alpha z_A + \beta z_B}{\alpha+\beta}$

Remarques

- Si $A(z_A)$ et $B(z_B)$, alors l'affixe du milieu I du segment $[AB]$ est le nombre complexe $z_I = \dfrac{z_A+z_B}{2}$.
  En fait ceci n'est rien qu'un cas particulier du barycentre où les poids sont égaux.
- On peut généraliser le résultat de la proposition 11 pour le barycentre de plus de deux points.
  Plus précisément : si n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ des réels tels que $\alpha_1+\alpha_2+....+\alpha_n \neq 0$, alors le barycentre G du système pondéré $\{(A_1;\alpha_1);(A_2;\alpha_2);...;(A_n;\alpha_n)\}$ a pour affixe : $z_G = \dfrac{\alpha_1.z_{A_1}+\alpha_2.z_{A_2}+....+\alpha_n.z_{A_n}}{\alpha_1+\alpha_2+....+\alpha_n}$

Exemple

Soit A, B et C les points du plan d'affixes respectives : $z_A = 3+3i$ et $z_B = 5-2i$ et $z_C = 7+10i$

- Le milieu du segment $[AB]$ est le point I d'affixe : $z_I = \dfrac{z_A+z_B}{2} = 4+\dfrac{1}{2}i$.

- Le barycentre H du système pondéré $\{(B;-1);(C;5)\}$ a pour affixe : $z_H = \dfrac{-z_B+5z_C}{4} = \dfrac{15}{2}+13i$.

- Le centre de gravité du triangle ABC est le point G d'affixe : $z_G = \dfrac{z_A+z_B+z_C}{3} = 5+\dfrac{11}{3}i$.

Applications

1. Soit A, B et C les points du plan d'affixes respectives : $a = 3+7i$ et $b = 4+5i$ et $c = 2+i$.

Déterminer l'affixe du point G barycentre du système pondéré $\{(A,2),(B,1),(C,1)\}$ et l'affixe du point H barycentre du système pondéré $\{(A;1);(B;2);(C;1)\}$.

2. Soit x et y deux nombres réels. Soit les points A, B, C et G du plan complexe d'affixes respectives :

$z_A = 1+iy$, $z_B = 2i$, $z_C = x-i$ et $z_G = 1-i$.

Déterminer les valeurs des réels x et y pour que le point G soit le barycentre des points pondérés $(A;2),(B;-1)$ et $(C;3)$.

3. Soit A, B, C et D les points du plan d'affixes respectives : $a = 2+3i$, $b = -5+4i$, $c = 7-2i$ et $d = 8i$.

a) Déterminer l'affixe du vecteur : $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{CD}$.

b) Déterminer l'affixe du point G centre de gravité du triangle BCD.

c) Déterminer l'affixe du point H barycentre des points pondérés $(B;-4),(G;3)$ et $(D;-5)$.

For more visit: L9ray.com

2. Soit (v_n) la suite numérique définie par : $v_n = \dfrac{\sqrt{n}\sin(n)}{n+1}$.

Montrer que la suite (v_n) est convergente et calculer sa limite.

3. Soit $(S_n)_{n\geq 1}$ la suite numérique définie par : $S_n = \dfrac{n}{n^2+\sqrt{1}} + \dfrac{n}{n^2+\sqrt{2}} + \ldots + \dfrac{n}{n^2+\sqrt{n}}$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{n^2}{n^2+\sqrt{n}} \leq S_n \leq \dfrac{n^2}{n^2+\sqrt{1}}$.

b) En déduire que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

Corollaire

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite numérique et ℓ un nombre réel. S'il existe une suite $(v_n)_{n\geq n_0}$ tendant vers 0 telle que pour tout $n \geq n_0$, $|u_n - \ell| \leq v_n$, alors la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ converge et sa limite vaut ℓ.

Preuve

On a pour tout $n \geq n_0$: $|u_n - \ell| \leq v_n \Leftrightarrow \ell - v_n \leq u_n \leq \ell + v_n$.

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(\ell - v_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}(\ell + v_n) = \ell$. D'après le théorème des gendarmes, on en déduit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ converge et sa limite vaut ℓ. D'où le résultat.

Exemples

1) Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite numérique définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = 2 + \dfrac{\sin n}{n^2}$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $|u_n - 2| = \dfrac{|\sin n|}{n^2}$ et $|\sin n| \leq 1$. Par conséquent : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ |u_n - 2| \leq \dfrac{1}{n^2}$.

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$, alors la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente et de plus : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

2) Soit (v_n) la suite numérique définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = -3 + \dfrac{(-1)^n}{n+1}$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $|v_n + 3| = \dfrac{|(-1)^n|}{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$. Par conséquent : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ |v_n + 3| \leq \dfrac{1}{n}$.

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, alors la suite (v_n) est convergente et de plus : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -3$.

Applications

1. On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par : $u_n = \dfrac{1}{2} + (-1)^n\left(\sqrt{n^2+1} - n\right)$

a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} \leq \dfrac{1}{2n}$

For more visit: L9ray.com

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\left|u_n - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2n}$.

c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

2. Soit $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite numérique définie par : $v_n = -5 + \frac{(-1)^n \cos n}{n+2}$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $|v_n + 5| \leq \frac{1}{n}$.

b) En déduire que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

3.2. LIMITE D'UNE SUITE GÉOMÉTRIQUE

Proposition 7

Soit q un nombre réel non nul.

- Si $q > 1$ alors $\lim q^n = +\infty$.
- Si $-1 < q < 1$ alors $\lim q^n = 0$.
- Si $q = 1$ alors $\lim q^n = 1$.
- Si $q \leq -1$ alors la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite.

Exemples

1) On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = 0$ car : $-1 < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$. De même : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n = 0$ car $-1 < -\frac{1}{4} < 1$.

2) On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$ car $\frac{3}{2} > 1$. Par contre, la suite $\left(\left(-\frac{3}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite quand n tend vers $+\infty$.

3) Calculons la limite de la suite (u_n) définie par : $u_n = \frac{2^n + 5^n}{3^n - 5^n}$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^n + 1}{\left(\frac{3}{5}\right)^n - 1}$. Puisque $\left|\frac{2}{5}\right| < 1$ et $\left|\frac{3}{5}\right| < 1$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$

Par suite : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$.

Applications

1. Pour chacun des cas suivants, déterminer la limite de la suite (u_n) définie par :

a) $u_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n$; b) $u_n = \left(-\frac{3}{7}\right)^n$; c) $u_n = \left(\frac{\pi}{3}\right)^n$; d) $u_n = \frac{4^n}{3^{2n}}$; e) $u_n = \frac{2^n - 1}{2^n + 4}$

For more visit: L9ray.com

2. Déterminer la limite de chacune des suites définies par :

$$a_n = \left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^n \quad ; \quad b_n = \frac{3^n+5^n}{2^n+7^n} \quad ; \quad c_n = \frac{7\times(-0,8)^n+9}{(-0,8)^n+17} \quad ; \quad d_n = \frac{7^n-5^{n+1}}{7^n+11\times 2^n}$$

3. Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{7u_n+6}{u_n+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ u_n > 0$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_{n+1}-6| \le \frac{1}{2}|u_n-6|$.

c) En utilisant un raisonnement par récurrence, montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ |u_n-6| \le 5\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

d) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

4 SUITES DE LA FORME $U_{n+1}=f(U_n)$ ET $V_n=f(U_n)$

4.1. LIMITE D'UNE SUITE DE LA FORME $V_n=f(U_n)$

Proposition 8

Si une suite (u_n) est convergente vers ℓ et f est une fonction continue en ℓ, alors la suite (v_n) définie par $v_n = f(u_n)$ est convergente et sa limite est $f(\ell)$.

Exemple

Soit (v_n) la suite numérique définie par : $v_n = \tan\left(\dfrac{\pi n+1}{3n+2}\right)$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \dfrac{\pi n+1}{3n+2}$. On a donc $v_n = f(u_n)$ avec $f(x) = \tan x$.

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\pi n+1}{3n+2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\pi+\frac{1}{n}}{3+\frac{2}{n}} = \dfrac{\pi}{3}$. Puisque la fonction f est continue en $\dfrac{\pi}{3}$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

En résumé : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \sqrt{3}$.

Applications

Déterminer les limites des suites numériques définies par :

$$u_n = \sqrt[3]{\frac{24n^4-n+1}{3n^4-n^2-7}} \quad ; \quad v_n = \sqrt[4]{\frac{2n^2+1}{16n^3-3n+1}} \quad ; \quad w_n = \cos\left(\frac{n\pi-2}{n^2+1}\right) \quad ; \quad t_n = \sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$$

For more visit: L9ray.com

L9RAY

4.2. LIMITE DE LA SUITE (n^r) OÙ $r \in \mathbb{Q}^*$

Proposition 9

Soit r un nombre rationnel non nul.

- Si $r > 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n^r = +\infty$.
- Si $r < 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n^r = 0$.

Exemples

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{5}{6}} = +\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{2}{7}} = +\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{-\frac{2}{3}} = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{-\frac{20}{17}} = 0$

4.3. SUITE DE LA FORME $U_{n+1} = f(U_n)$

Proposition 10

Soit f une fonction continue sur un intervalle I telle que $f(I) \subset I$.

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite réelle définie par $u_{n_0} \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier $n \geq n_0$.

Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est convergente de limite ℓ et $\ell \in I$, alors ℓ est solution dans I de l'équation $f(x) = x$.

Exemple

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+u_n}{2}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Étudions la convergence de la suite (u_n) :

On considère la fonction numérique f définie sur $I = [0;1]$ par : $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$

- La fonction f est continue et croissante sur I ; donc : $f(I) = [f(0); f(1)] = \left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$.

  Par conséquent : $f(I) \subset I$.

- Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$:

  Initialisation: Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1$ donc $0 \leq u_0 \leq 1$.

  Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $0 \leq u_n \leq 1$ et montrons que $0 \leq u_{n+1} \leq 1$.

  On a $0 \leq u_n \leq 1$, c'est-à-dire $u_n \in I$, donc $f(u_n) \in f(I)$. Comme $u_{n+1} = f(u_n)$ et $f(I) \subset I$, alors $u_{n+1} \in I$, d'où $0 \leq u_{n+1} \leq 1$.

  Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.

For more visit: L9ray.com

▪ Étudions la monotonie de la suite (u_n) :

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1}-u_n=\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}-u_n=\left(\frac{1+u_n}{2}-u_n^2\right)\frac{1}{\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}+u_n}=\frac{1+u_n-2u_n^2}{2\left(\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}+u_n\right)}=-\frac{(2u_n+1)(1-u_n)}{2\left(\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}+u_n\right)}$$

Puisque $0 \le u_n \le 1$ alors $-\dfrac{(2u_n+1)(1-u_n)}{2\left(\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}+u_n\right)} \le 0$, et donc $u_{n+1}-u_n \le 0$. La suite (u_n) est décroissante.

▪ Puisque la suite (u_n) est décroissante minorée par 0, alors elle est convergente. Soit ℓ sa limite.

D'après la proposition 10, la limite ℓ vérifie : $f(\ell)=\ell$ et $0 \le \ell \le 1$

On a : $f(\ell)=\ell \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1+\ell}{2}}=\ell \Leftrightarrow 2\ell^2-\ell-1=0 \Leftrightarrow \left(\ell=0 \text{ ou } \ell=-\frac{1}{2}\right)$

Comme $0 \le \ell \le 1$ alors $\ell=0$. Ainsi, la suite (u_n) converge vers 0.

Applications

1. Soit f la fonction numérique définie sur $I=[4;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x}-1}$

a) Étudier les variations de la fonction f.

b) Montrer que pour tout $x \in I$: $f(x) \le x$.

c) On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0=5$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c$_1$) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n \ge 4$.

c$_2$) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c$_3$) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

2. Soit f la fonction numérique définie sur $[0;2]$ par : $f(x)=\sqrt[3]{x^2+2x}$

a) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0;2]$.

b) En déduire que : $f([0;2])=[0;2]$.

c) Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0=\dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1}=\sqrt[3]{u_n^2+2u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c$_1$) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0<u_n<2$

c$_2$) Montrer que pour tout $x \in [0;2]$: $f(x)>x$.

c$_3$) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

c$_4$) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

For more visit: L9ray.com

L9RAY

A LIMITE D'UNE SUITE – CRITÈRES DE CONVERGENCE

1) Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la suite (u_n) :

a) $u_n = \dfrac{-3n^2+n}{4n^3+2}$; b) $u_n = 2n+3-\sqrt{4n^2-n}$; c) $u_n = \sin\left(\dfrac{\pi n+1}{4n+3}\right)$; d) $u_n = \tan\left(\dfrac{\sqrt[3]{n}}{n+1}\right)$

2) Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la suite (u_n) :

a) $u_n = \dfrac{4^n}{3^{2n}}$; b) $u_n = \left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^n$; c) $u_n = \left(-\dfrac{2}{5}\right)^n$; d) $u_n = \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{3}}\right)^n$; e) $u_n = \dfrac{2^n+5^n}{3^n+7^n}$

3) Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_n = 5n+3\sin n-1$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \geq 5n-4$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4) Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_n = -4\sqrt{n}+3\cos^2 n+2(-1)^n$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leq -4\sqrt{n}+5$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

5) Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite numérique définie par : $u_n = \dfrac{1}{n+\sqrt{1}}+\dfrac{1}{n+\sqrt{2}}+\ldots+\dfrac{1}{n+\sqrt{n}}$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1} \leq u_n \leq \dfrac{n}{n+1}$.

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

6) Soit α un nombre réel et (u_n) une suite numérique vérifiant :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |u_{n+1}-\alpha| \leq k|u_n-\alpha| \quad \text{avec } k \in]0;1[$$

a) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ |u_n-\alpha| \leq k^n|u_0-\alpha|$.

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

SOLUTION

1) Détermination de la limite de la suite (u_n) :

a) On a :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\left(-3+\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(4n+\frac{2}{n^2}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-3+\frac{1}{n}}{4n+\frac{2}{n^2}} = 0 \quad \text{car : } \lim_{n\to+\infty}\left(-3+\frac{1}{n}\right) = -3 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}\left(4n+\frac{2}{n^2}\right) = +\infty$$

b) On a :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left(2n+3-\sqrt{4n^2-n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(3+\frac{4n^2-\left(4n^2-n\right)}{2n+\sqrt{4n^2-n}}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(3+\frac{n}{2n+\sqrt{4n^2-n}}\right)$$

For more visit: L9ray.com

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(3+\dfrac{n}{n\left(2+\sqrt{4-\dfrac{1}{n}}\right)}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(3+\dfrac{1}{2+\sqrt{4-\dfrac{1}{n}}}\right) = 3+\dfrac{1}{4} = \dfrac{13}{4}$ car : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$.

c) On a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\pi n+1}{4n+3} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n\left(\pi+\dfrac{1}{n}\right)}{n\left(4+\dfrac{3}{n}\right)} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\pi+\dfrac{1}{n}}{4+\dfrac{3}{n}} = \dfrac{\pi}{4}$ car $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$.

Puisque la fonction sin est continue en $\dfrac{\pi}{4}$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

d) On a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n}}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n}}{n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)} = 0$ car $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[3]{n^2}=+\infty$.

Puisque la fonction tan est continue en 0, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \tan 0 = 0$.

- En termes de notation, comme la limite d'une suite s'étudiera toujours lorsque $n\to+\infty$, on peut écrire indifféremment $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ou $\lim u_n$.
- Les règles sur les limites de suites ne s'appliquent pas toujours. On peut se trouver en présence de ce qu'on appelle des « formes indéterminées ».
  Avant de tenter de calculer une limite, il faut analyser la situation et se ramener à des situations où les règles sur les opérations s'appliquent.



2) Détermination de la limite de la suite (u_n) :

a) On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{4^n}{3^{2n}} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{4}{9}\right)^n = 0$ car : $-1<\dfrac{4}{9}<1$.

b) On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^n = 0$ car : $-1<\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}<1$.

c) On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\dfrac{2}{5}\right)^n = 0$ car : $-1<-\dfrac{2}{5}<1$.

d) On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{3}}\right)^n = +\infty$ car : $\dfrac{1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{3}}>1$.

e) On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{7^n\left(\left(\dfrac{2}{7}\right)^n+\left(\dfrac{5}{7}\right)^n\right)}{7^n\left(\left(\dfrac{3}{7}\right)^n+1\right)} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\left(\dfrac{2}{7}\right)^n+\left(\dfrac{5}{7}\right)^n}{\left(\dfrac{3}{7}\right)^n+1} = 0$ car :

For more visit: L9ray.com

L9RAY

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{7}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{7}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{7}\right)^n = 0$ (les réels $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}$ et $\frac{5}{7}$ appartiennent à l'intervalle $]-1;1[$)

3) Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_n = 5n + 3\sin n - 1$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\sin n \geq -1$; donc : $3\sin n - 1 \geq -4$. D'où : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n \geq 5n - 4$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}(5n-4) = +\infty$, alors d'après les critères de convergence : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

4) Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_n = -4\sqrt{n} + 3\cos^2 n + 2(-1)^n$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\cos^2 n \leq 1$ et $(-1)^n \leq 1$; donc : $3\cos^2 n + 2(-1)^n \leq 5$.

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n \leq -4\sqrt{n} + 5$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-4\sqrt{n}+5\right) = -\infty$, alors d'après les critères de convergence : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.



- Pour montrer qu'une suite (u_n) converge et trouver sa limite, on essaie d'exprimer le terme général u_n de façon à pouvoir appliquer les théorèmes généraux comme :
  - Les théorèmes d'encadrement ou des limites comparées :

$$\begin{cases} v_n \leq u_n \leq w_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \quad ; \quad \begin{cases} |u_n - \ell| \leq v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$

  - Les opérations sur les limites :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = \ell + \ell' \\ \lim\limits_{n\to+\infty}(u_n v_n) = \ell\ell' \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \neq 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell' \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\ell} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{v_n} = \sqrt{\ell'} \end{cases}$$

  - Utilisation des limites des fonctions numériques : $\begin{cases} u_n = f(n) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.
  - Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et f est continue en ℓ, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$.
  - Si $q \in]-1;1[$ alors la suite (q^n) est convergente et de limite nulle : $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.
- On retiendra que lorsque l'on « passe » aux limites dans des inégalités, on perd les inégalités strictes.
- Il ne faut pas « passer » à la limite dans des inégalités avant de prouver que toutes les suites concernées convergent.
- Pour encadrer une somme, il suffit parfois d'encadrer chacun des termes de la somme.

5) Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite numérique définie par : $u_n = \frac{1}{n+\sqrt{1}} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{n+\sqrt{n}}$

a) Pour tout $k \in \{1;2;3;\ldots;n\}$, on a : $1 \leq \sqrt{k} \leq \sqrt{n}$. Il en résulte donc : $n+1 \leq n+\sqrt{k} \leq n+\sqrt{n}$

et alors : $\frac{1}{n+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n+\sqrt{k}} \leq \frac{1}{n+1}$. En particulier :

For more visit: L9ray.com

$$\frac{1}{n+\sqrt{n}} \le \frac{1}{n+\sqrt{1}} \le \frac{1}{n+1}$$
$$\frac{1}{n+\sqrt{n}} \le \frac{1}{n+\sqrt{2}} \le \frac{1}{n+1}$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$\frac{1}{n+\sqrt{n}} \le \frac{1}{n+\sqrt{n}} \le \frac{1}{n+1}$$

En additionnant les membres de ces inégalités, terme à terme, et après simplification on obtient :

$$\frac{n}{n+\sqrt{n}} \le u_n \le \frac{n}{n+1}$$

Par suite : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1} \le u_n \le \frac{n}{n+1}$.

b) D'après la question précédente, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1} \le u_n \le \frac{n}{n+1}$.

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$ car : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

D'après les critères de convergence, la suite $(u_n)_{n\ge1}$ est convergente et on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

6) Soit α un nombre réel et (u_n) une suite numérique vérifiant :

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ |u_{n+1} - \alpha| \le k|u_n - \alpha| \quad \text{avec } k \in]0;1[$$

a) Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ |u_n - \alpha| \le k^n |u_0 - \alpha|$.

Initialisation : Pour $n = 0$, on a bien : $|u_0 - \alpha| \le k^0 |u_0 - \alpha|$ $(k^0 = 1)$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $|u_n - \alpha| \le k^n |u_0 - \alpha|$ et montrons que : $|u_{n+1} - \alpha| \le k^{n+1} |u_0 - \alpha|$.

On a : $|u_n - \alpha| \le k^n |u_0 - \alpha|$; donc : $k|u_n - \alpha| \le k^{n+1} |u_0 - \alpha|$.

Puisque $|u_{n+1} - \alpha| \le k|u_n - \alpha|$, alors : $|u_{n+1} - \alpha| \le k|u_n - \alpha| \le k^{n+1} |u_0 - \alpha|$.

On conclut donc que : $|u_{n+1} - \alpha| \le k^{n+1} |u_0 - \alpha|$.

Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N})\ |u_n - \alpha| \le k^n |u_0 - \alpha|$

b) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_n - \alpha| \le k^n |u_0 - \alpha|$.

Puisque $k \in]0;1[$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} k^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} k^n |u_0 - \alpha| = 0$.

D'après les critères de convergence, la suite (u_n) est convergente et de plus : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

For more visit: L9ray.com

B ÉTUDE D'UNE SUITE RÉCURRENTE (1)

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $I=[2;3]$ par : $f(x)=\dfrac{x^2+4}{2x}$.

1) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle I puis en déduire que $f(I)\subset I$.

2) On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0=\dfrac{5}{2}$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

a) Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ 2\le u_n\le 3$.

b) Étudier la monotonie de la suite (u_n).

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

SOLUTION

1) La fonction f est dérivable sur l'intervalle I et on a pour tout $x\in I$:

$$f'(x)=\left(\frac{x^2+4}{2x}\right)'=\frac{2x\left(x^2+4\right)'-(2x)'\left(x^2+4\right)}{4x^2}=\frac{x^2-4}{2x^2}$$

On a pour tout $x\in\left]2;3\right]$: $x^2>4$; ce qui entraîne que $f'(x)>0$.

Ainsi, la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle I.

Puisque la fonction f est continue et strictement croissante sur I, alors :

$f(I)=f([2;3])=[f(2);f(3)]=\left[2;\dfrac{13}{6}\right]$. Par suite : $f(I)\subset I$.

2) On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0=\dfrac{5}{2}$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

a) Montrons par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ 2\le u_n\le 3$.

Initialisation : Pour $n=0$, on a : $u_0=\dfrac{5}{2}$. Donc : $2\le u_0\le 3$.

Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons que : $2\le u_n\le 3$ et montrons que : $2\le u_{n+1}\le 3$.

On a : $2\le u_n\le 3$, donc : $u_n\in I$ et alors $f(u_n)\in f(I)$.

D'après la question précédente, on a : $f(I)\subset I$. Il s'ensuit donc que $f(u_n)\in I$, c'est-à-dire $u_{n+1}\in I$.

Par suite : $2\le u_{n+1}\le 3$

Conclusion : $(\forall n\in\mathbb{N})\ 2\le u_n\le 3$

b) Monotonie de la suite (u_n) :

On a pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_n^2+4}{2u_n}-u_n=\dfrac{u_n^2+4-2u_n^2}{2u_n}=\dfrac{4-u_n^2}{2u_n}=\dfrac{(2-u_n)(2+u_n)}{2u_n}$.

For more visit: L9ray.com

Puisque $2 \le u_n \le 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors : $2-u_n < 0$ et $2+u_n > 0$ et $2u_n > 0$.

Il en résulte donc $\dfrac{(2-u_n)(2+u_n)}{2u_n} < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} - u_n < 0$.

Ainsi, la suite (u_n) est strictement décroissante.

c) Puisque la suite (u_n) est décroissante minorée par 2, alors elle est convergente.

Calculons maintenant sa limite :

On a les conditions suivantes :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 \in I$;
- La fonction f est continue sur l'intervalle I avec $f(I) \subset I$.
- La suite (u_n) est convergente.

Il s'ensuit donc que la limite de la suite (u_n) est solution de l'équation $f(x) = x$.

On a : $f(x) = x \Leftrightarrow \dfrac{x^2+4}{2x} = x \Leftrightarrow x^2+4 = 2x^2 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow (x = 2 \text{ ou } x = -2)$.

Comme $2 \le u_n \le 3$, alors : $2 \le \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \le 3$. Par suite : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

- Pour montrer qu'une suite (u_n) diverge, on essaye d'exprimer le terme général u_n de façon à pouvoir appliquer les théorèmes généraux comme :
  - Les théorèmes d'encadrement ou des limites comparées:

$$\begin{cases} v_n \le u_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \quad ; \quad \begin{cases} u_n \le v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$

  - Les opérations sur les limites : (À titre d'exemple)

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = \pm\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = \pm\infty \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{u_n} = +\infty \end{cases}$$

  - Utilisation des limites des fonctions numériques : $\begin{cases} u_n = f(n) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$

- Lorsque l'on sait qu'une suite (u_n) est croissante (respectivement décroissante) pour démontrer qu'elle est convergente, il suffit de montrer qu'elle est majorée (respectivement minorée).
- Pour déterminer la limite des suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$, on se base sur la propriété suivante :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I tel que $f(I) \subset I$ et $u_0 \in I$.

Si la suite (u_n) converge, alors sa limite ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

un tel réel ℓ est appelé point fixe de la fonction f.

For more visit: L9ray.com

C ÉTUDE D'UNE SUITE RÉCURRENTE (2)

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2}{2u_n + 3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On étudiera la suite numérique (u_n) par trois méthodes différentes.

1ère méthode :

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ u_n \geq 1$.

2) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ u_{n+1} - u_n = \dfrac{2(1-u_n)(1+u_n)}{2u_n + 3}$ puis préciser la monotonie de la suite (u_n).

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq u_{n+1} - 1 \leq \dfrac{1}{5}(u_n - 1)$.

b) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ |u_n - 1| \leq \left(\dfrac{1}{5}\right)^n$.

c) En déduire la limite de la suite (u_n).

2ème méthode :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$

1) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{5}$.

2) Exprimer v_n et u_n en fonction de n.

3) Déterminer la limite de la suite (u_n).

3ème méthode :

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $I = [1;2]$ par : $f(x) = \dfrac{3x+2}{2x+3}$.

1) a) Étudier les variations de la fonction f sur I et en déduire que : $f(I) \subset I$.

b) Montrer que pour tout $x \in I$: $f(x) \leq x$.

2) a) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ 1 \leq u_n \leq 2$.

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.

SOLUTION

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2}{2u_n + 3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1ère méthode :

1) Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ u_n \geq 1$.

For more visit: L9ray.com

Initialisation : Pour $n=0$, on a : $u_0=2$. Donc : $u_0 \geq 1$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que : $u_n \geq 1$ et montrons que : $u_{n+1} \geq 1$.

On a : $u_{n+1}-1=\dfrac{3u_n+2}{2u_n+3}-1=\dfrac{3u_n+2-2u_n-3}{2u_n+3}=\dfrac{u_n-1}{2u_n+3}$

Par hypothèse, on a : $u_n \geq 1$, donc : $u_n-1 \geq 0$ et $2u_n+3>0$, et alors : $\dfrac{u_n-1}{2u_n+3} \geq 0$. Par suite : $u_{n+1} \geq 1$

Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n \geq 1$.

2) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1}-u_n=\dfrac{3u_n+2}{2u_n+3}-u_n=\dfrac{3u_n+2-2u_n^2-3u_n}{2u_n+3}=\dfrac{2\left(1-u_n^2\right)}{2u_n+3}$

Par suite : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1}-u_n=\dfrac{2(1-u_n)(1+u_n)}{2u_n+3}$

Monotonie de la suite (u_n) :

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \geq 1$; donc : $1-u_n \leq 0$ et $1+u_n \geq 0$ et $2u_n+3>0$.

Il s'ensuit donc que : $\dfrac{2(1-u_n)(1+u_n)}{2u_n+3} \leq 0$, c'est-à-dire : $u_{n+1}-u_n \leq 0$.

Ainsi, la suite (u_n) est décroissante.

3) Puisque la suite (u_n) est décroissante minorée par 1, alors elle est convergente.

4) a) Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq u_{n+1}-1 \leq \dfrac{1}{5}(u_n-1)$.

D'après la question 1), on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \geq 1$. Il s'ensuit donc que : $u_{n+1} \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Par conséquent : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 \leq u_{n+1}-1$.

D'autre part, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{5}(u_n-1)-(u_{n+1}-1)=\frac{1}{5}(u_n-1)-\frac{u_n-1}{2u_n+3}=(u_n-1)\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2u_n+3}\right)=\frac{(u_n-1)(2u_n-2)}{5(2u_n+3)}$$

Par conséquent, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{5}(u_n-1)-(u_{n+1}-1)=\frac{2(u_n-1)^2}{5(2u_n+3)}$$

On sait que : $(u_n-1)^2 \geq 0$ et $2u_n+3>0$; il s'ensuit donc que : $\dfrac{2(u_n-1)^2}{5(2u_n+3)} \geq 0$, c'est-à-dire :

$u_{n+1}-1 \leq \dfrac{1}{5}(u_n-1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq u_{n+1}-1 \leq \dfrac{1}{5}(u_n-1)$.

For more visit: L9ray.com

L9RAY

b) Montrer par récurrence que : $|u_n - 1| \leq \left(\frac{1}{5}\right)^n$.

Initialisation : Pour $n = 0$, on a bien : $|u_0 - 1| \leq \left(\frac{1}{5}\right)^0$ $(1 \leq 1)$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $|u_n - 1| \leq \left(\frac{1}{5}\right)^n$ et montrons que : $|u_{n+1} - 1| \leq \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$.

On a : $|u_n - 1| \leq \left(\frac{1}{5}\right)^n$; donc : $\frac{1}{5}|u_n - 1| \leq \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$ (1)

Puisque $0 \leq u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{5}(u_n - 1)$, alors : $|u_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{5}|u_n - 1|$ (2)

De (1) et (2), on en déduite que : $|u_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{5}|u_n - 1| \leq \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$.

Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N})\ |u_n - 1| \leq \left(\frac{1}{5}\right)^n$

c) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_n - 1| \leq \left(\frac{1}{5}\right)^n$. Puisque $\frac{1}{5} \in]-1;1[$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$.

D'après les critères de convergence, on en déduite que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

2ème méthode :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$

1) Montrons que la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$:

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} = \frac{\frac{3u_n + 2}{2u_n + 3} - 1}{\frac{3u_n + 2}{2u_n + 3} + 1} = \frac{3u_n + 2 - 2u_n - 3}{3u_n + 2 + 2u_n + 3} = \frac{u_n - 1}{5(u_n + 1)} = \frac{1}{5} v_n$$

Ainsi, la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$.

2) Expression de v_n et u_n en fonction de n.

Puisque la suite (v_n) est géométrique, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = v_0 q^n$ avec $q = \frac{1}{5}$ et $v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 1} = \frac{1}{3}$.

Par conséquent : $(\forall n \in \mathbb{N})\ v_n = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n$.

De l'égalité $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$, on tire : $v_n(u_n + 1) = u_n - 1$, ce qui donne : $u_n(v_n - 1) = -1 - v_n$.

For more visit: L9ray.com

Il en résulte donc : $u_n = \dfrac{1+v_n}{1-v_n} = \dfrac{1+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1-\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{5}\right)^n}$. Par suite : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n = \dfrac{3+\left(\frac{1}{5}\right)^n}{3-\left(\frac{1}{5}\right)^n}$

3) Détermination de la limite de la suite (u_n) :

On a pour tout : $u_n = \dfrac{3+\left(\frac{1}{5}\right)^n}{3-\left(\frac{1}{5}\right)^n}$. Puisque $\frac{1}{5} \in]-1;1[$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$.

Par conséquent : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{3+0}{3-0} = 1$.

3ème méthode :

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $I=[1;2]$ par : $f(x)=\dfrac{3x+2}{2x+3}$.

1) a) Variations de la fonction f sur I :

La fonction f étant dérivable sur I et on a pour tout $x \in I$: $f'(x) = \left(\dfrac{3x+2}{2x+3}\right)' = \dfrac{5}{(2x+3)^2}$.

Puisque $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$, alors la fonction f est strictement croissante sur I.

Comme la fonction f est continue et strictement croissante sur I, alors :

$$f(I) = f([1;2]) = [f(1);f(2)] = \left[1;\frac{8}{7}\right]$$

Par suite : $f(I) \subset I$.

b) Montrons que pour tout $x \in I$: $f(x) \le x$.

On a pour tout $x \in I$: $x - f(x) = x - \dfrac{3x+2}{2x+3} = \dfrac{2x^2+3x-3x-2}{2x+3} = \dfrac{2(x^2-1)}{2x+3} = \dfrac{2(x-1)(x+1)}{2x+3}$.

Comme $1 \le x \le 2$, alors : $x-1 \ge 0$ et $x+1 \ge 0$ et $2x+3 > 0$. D'où : $\dfrac{2(x-1)(x+1)}{2x+3} \ge 0$.

Par suite, pour tout $x \in I$: $f(x) \le x$.

2) a) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 1 \le u_n \le 2$.

Initialisation : Pour $n=0$, on a : $u_0 = 2$. Donc : $1 \le u_0 \le 2$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que : $1 \le u_n \le 3$ et montrons que : $1 \le u_{n+1} \le 2$.

On a : $1 \le u_n \le 2$, donc : $u_n \in I$ et alors $f(u_n) \in f(I)$.

D'après la question précédente, on a : $f(I) \subset I$. Il s'ensuit donc que $f(u_n) \in I$, c'est-à-dire $u_{n+1} \in I$.

Par suite : $1 \le u_{n+1} \le 2$

Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 1 \le u_n \le 2$.

For more visit: L9ray.com

L9RAY

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante :

D'après la question **1)** b), on a pour tout $x \in I$: $f(x) \leq x$.

Par ailleurs, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \in I$. Il en résulte donc que : $f(u_n) \leq u_n$, c'est-à-dire : $u_{n+1} \leq u_n$.

Ainsi, la suite (u_n) est décroissante.

c) Puisque la suite (u_n) est décroissante minorée par 1, alors elle est convergente.

Déterminons maintenant sa limite :
On a les conditions suivantes :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 \in I$;
- La fonction f est continue sur l'intervalle I avec $f(I) \subset I$.
- La suite (u_n) est convergente.

Il s'ensuit donc que la limite de la suite (u_n) est solution de l'équation $f(x) = x$.

On a : $f(x) = x \Leftrightarrow \dfrac{3x+2}{2x+3} = x \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x = 1 \text{ ou } x = -1)$

Comme $1 \leq u_n \leq 2$, alors : $1 \leq \lim\limits_{n \to +\infty} u_n \leq 2$. Par suite : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

- Pour comparer deux éléments d'un intervalle I, on peut comparer leurs images par une fonction f **strictement monotone** sur I. Plus précisément : soient $(x; y) \in I^2$.
  - Si f est strictement croissante sur I avec $f(x) \leq f(y)$ alors $x \leq y$.
  - Si f est strictement décroissante sur I avec $f(x) \leq f(y)$ alors $x \geq y$.



For more visit: L9ray.com

EXERCICES D'APPLICATION

LIMITE D'UNE SUITE NUMÉRIQUE

EXERCICE 01

Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la suite (u_n) définie par :

1) $u_n = 2n^3 - 3n^2 + 4n + 7$; 2) $u_n = n^2 - 5\sqrt{n}$

3) $u_n = \dfrac{1-2n}{3n-5}$; 4) $u_n = \dfrac{6n^2 - 3n + 4}{n-7}$

5) $u_n = \dfrac{3n+4}{n^3 - n + 3}$; 6) $u_n = \dfrac{n^2 + 5n}{3n^2 + 1}$

7) $u_n = \dfrac{-n^3 + 4n^2}{3n^2 - 5n + 9}$; 8) $u_n = \dfrac{1-n}{1+\sqrt{n}}$

EXERCICE 02

Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la suite (u_n) définie par :

1) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$; 2) $u_n = \sqrt{3n^2 + 4} - \sqrt{n^2 + 5}$

3) $u_n = \dfrac{n\sqrt{n+1} - 1}{n+1}$; 4) $u_n = \dfrac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}}$

5) $u_n = \dfrac{n+1}{\sqrt{n+2}} - \dfrac{n+1}{\sqrt{n+3}}$; 6) $u_n = \dfrac{\sqrt[3]{8n^3 - n^2 + 1}}{3n-2}$

7) $u_n = \dfrac{\sqrt{2n^2 + 3n + 2}}{2n - \sqrt{4n^2 + 1}}$; 8) $u_n = \dfrac{\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 1}}{\sqrt{n^2 + 1}}$

EXERCICE 03

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2 + n} - 3n + \dfrac{1}{n}\right)$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{4n^2 + n} - 2n + 1\right)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n^2 - n - \sqrt[3]{n} + 1\right)$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n-1}\right)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n^{\frac{2}{3}} - n^{-\frac{1}{3}}\right)$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^{\frac{3}{5}} + n^{\frac{6}{7}}}{n^{\frac{2}{3}} + n^{\frac{4}{9}}}$

EXERCICE 04

Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la suite (u_n) définie par :

1) $u_n = \left(\dfrac{4}{5}\right)^n$; 2) $u_n = \left(-\dfrac{2}{3}\right)^n$; 3) $u_n = \left(\dfrac{6}{5}\right)^n$

4) $u_n = \dfrac{2^{n-1}}{5^n}$; 5) $u_n = \dfrac{1}{4^n} - 2$; 6) $u_n = \dfrac{2^n + 3^n}{5^n}$

7) $u_n = \dfrac{3^{2n}}{2^{3n}}$; 8) $u_n = \dfrac{3^n - 5}{3^n + 8}$; 9) $u_n = \dfrac{5^n - 4^n}{3^n - 2^n}$

10) $u_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n + \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$; 11) $u_n = \left(\dfrac{5}{3}\right)^n + \left(\dfrac{2}{9}\right)^n$

12) $u_n = \left(1 - \sqrt{2}\right)^n$; 13) $u_n = \dfrac{4^n - (-2)^n}{3^n + (-2)^n}$

14) $u_n = \dfrac{2^n - \pi^n + 3^n}{3^n + \pi^n + 2^n}$; 15) $u_n = \dfrac{7 \times (-0,8)^n + 9}{(-0,8)^n + 17}$

UTILISATION DES CRITÈRES DE CONVERGENCE

EXERCICE 05

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ les suites numériques définies sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$ et $v_n = \dfrac{\cos(3n)}{\sqrt{n}}$

1) a) Montrer que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right) \; -\dfrac{1}{n} \leq u_n - 1 \leq \dfrac{1}{n}$.

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

2) a) Montrer que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right) \; |v_n| \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

b) En déduire que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

For more visit: L9ray.com

L9RAY

3 EXERCICES ET PROBLÈMES

EXERCICE 06

1) Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_n = n - \sin\sqrt{n} + 2$$

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ u_n \geq n$.

b) En déduire la limite de la suite (u_n).

2) Soit (v_n) la suite numérique définie par :

$$v_n = -2n + \cos\left(n^2\right) - 1$$

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ v_n \leq -2n$.

b) En déduire la limite de la suite (v_n).

3) Soit (w_n) la suite numérique définie par :

$$w_n = \frac{n + \sin n}{2n + \cos n}$$

a) Montrer que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)\ \ \frac{n-1}{2n+1} \leq w_n \leq \frac{n+1}{2n-1}$.

b) En déduire la limite de la suite (w_n).

EXERCICE 07

Soit $(u_n)_{n\geq 2}$ la suite numérique définie par :

$$u_n = 3 + \frac{\sqrt{n}}{n + (-1)^n}$$

1) Établir que pour tout $n \geq 2$: $\frac{\sqrt{n}}{n+1} \leq u_n - 3 \leq \frac{\sqrt{n}}{n-1}$

2) En déduire $\lim u_n$.

EXERCICE 08

Dans chaque cas, déterminer la limite de la suite (u_n) définie par son terme général :

1) $u_n = -2n + \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$; 2) $u_n = \sqrt{n} - \cos^2 n$

3) $u_n = \frac{n^2 + \sin n}{n^4}$; 4) $u_n = \frac{2n + (-1)^n\sqrt{n}}{n+2}$

5) $u_n = 2 - \frac{\cos\left(n^4\right)}{n}$; 6) $u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n \sin(n)$

7) $u_n = \frac{1}{n(3 - \sin n)}$; 8) $u_n = \frac{3n + E(n)}{n+5}$

EXERCICE 09

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$u_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n}$$

1) Calculer u_1 et u_2

2) a) Montrer que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)\ \ \frac{n}{n+1} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$

b) En déduire $\lim u_n$.

EXERCICE 10

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

1) Justifier que pour tous k et n de $\mathbb{N}^*$:

$$k \leq n \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$$

2) Montrer que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)\ \ \sqrt{n} \leq u_n$.

3) En déduire $\lim u_n$.

EXERCICE 11

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - n - \frac{1}{2} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1) Montrer par récurrence que :

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ \ u_n \leq 3 - 2n$$

2) Déterminer la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 12

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1 \leq u_n \leq 2$$

2) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

For more visit: L9ray.com

EXERCICE 13

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$u_0 = \frac{5}{4}$ et $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{3}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n < 2$.

b) Étudier la monotonie de la suite (u_n).

La suite (u_n) est -elle convergente ? Justifier.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = u_n - 2$.

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n = 2 - \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^n$

puis déterminer la limite de la suite (u_n).

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_{n-1}$.

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ S_n = 2n - 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

b) En déduire la limite $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

EXERCICE 14

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Calculer u_0 et u_1.

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $1 \leq u_n < 2$.

2) Étudier la monotonie de la suite (u_n) puis en déduire qu'elle est convergente.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = \frac{u_n + 1}{u_n - 2}$.

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

b) Exprimer v_n et u_n en fonction de n.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$.

Exprimer S_n en fonction de n puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

EXERCICE 15

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{5u_n}{3u_n + 5}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n > 0$.

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c) Que peut-on conclure ?

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = \frac{5}{u_n}$.

a) Montrer que la suite (v_n) est arithmétique dont on déterminera la raison et le premier terme.

b) Exprimer v_n et u_n en fonction de n.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 16

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n^2 + u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n > 0$.

2) Montrer que (u_n) est strictement décroissante.

3) a) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n > 2^n$

b) En déduire la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 17

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 12}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ 0 \leq u_n \leq 4$.

2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{(u_n - 4)(u_n + 3)}{\sqrt{u_n + 12} + u_n}$$

Puis déterminer la monotonie de la suite (u_n).

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ |u_{n+1} - 4| \leq \frac{1}{4}|u_n - 4|$

For more visit: L9ray.com

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ |u_n - 4| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

c) Calculer la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

SUITES DE TYPE $V_n = f(U_n)$

EXERCICE 18

Dans chaque cas, déterminer la limite de la suite (u_n) définie par son terme général :

1) $u_n = \sqrt{\frac{3n-4}{2n+1}}$; 2) $u_n = n^2 \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

3) $u_n = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{n}\right)$; 4) $u_n = \cos\left(\frac{n\pi - 3}{2n+1}\right)$

5) $u_n = 4^n\left(1 - \cos\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$; 6) $u_n = \sqrt{3^n - 2^n}$

7) $u_n = \frac{6n}{2n-5}\tan\left(\frac{\pi n + 7}{6n-1}\right)$; 8) $u_n = \sqrt[3]{\left|\frac{-2n+1}{n+1}\right|}$

SUITES DE TYPE $U_{n+1} = f(U_n)$

EXERCICE 19

Soit f la fonction numérique définie sur $I = [0;2]$ par : $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 2x}$

1) Montrer que f est continue et strictement croissante sur l'intervalle I.

2) Déterminer $f(I)$.

3) Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 \leq u_n \leq 2$.

b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

c) En déduire que (u_n) est convergente.

d) Calculer la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 20

Soit f la fonction définie sur $I = \left[0;\frac{1}{4}\right]$ par :

$$f(x) = x^2 + \frac{3}{4}x$$

1) Déterminer $f(I)$.

2) Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$u_0 = \frac{1}{5}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 \leq u_n \leq \frac{1}{4}$

b) Étudier la monotonie de la suite (u_n).

c) En déduire que (u_n) est convergente.

d) Calculer la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 21

Soit g la fonction définie sur $I =]1;+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$$

1) Montrer que pour tout $x \in I$: $g(x) \geq 3$

2) On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$u_0 = 5$ et $u_{n+1} = g(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ u_n \geq 3$

b) Montrer que la suite (u_n) est monotone.

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente puis calculer sa limite.

EXERCICE 22

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = u_n + 1 - \sqrt{1 + u_n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 < u_n < 1$.

2) a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3) Calculer la limite de la suite (u_n).

For more visit: L9ray.com

EXERCICES DE PERFECTIONNEMENT

EXERCICE 23

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$u_0 = 20$ et $u_{n+1} = \frac{7}{8}u_n + 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n > 16$

2) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{7}{8} + \frac{2}{u_n}$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$

puis déterminer la monotonie de la suite (u_n).

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = u_n - 16$.

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n = 4\left(\frac{7}{8}\right)^n + 16$

c) Calculer la limite de la suite (u_n).

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$S_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$ et $T_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$

a) Exprimer S_n et T_n en fonction de n.

b) Calculer les limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$.

EXERCICE 24

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$u_n = \frac{1}{2} + (-1)^n\left(\sqrt{n^2+1} - n\right)$$

1) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} \leq \frac{1}{2n}$

2) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ \left|u_n - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2n}$

puis déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

EXERCICE 25

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{\left(1+\sqrt{u_n}\right)^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = \frac{1}{\sqrt{u_n}}$.

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n > 0$.

2) a) Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ \frac{1}{\left(1+\sqrt{u_n}\right)^2} < 1$.

b) En déduire que la suite (u_n) est décroissante puis qu'elle est convergente.

3) a) Montrer que la suite (v_n) est arithmétique.

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n = \frac{1}{(n+1)^2}$.

Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

EXERCICE 26

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$u_0 = -\frac{1}{3}$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{3(1-2u_n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Calculer u_1 et u_2.

2) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n < 0$.

3) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{3}$.

b) En déduire que la suite (u_n) est croissante puis qu'elle est convergente.

4) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ |u_{n+1}| \leq \frac{1}{3}|u_n|$.

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ |u_n| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$.

c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

For more visit: L9ray.com

L9RAY

EXERCICE 27

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2}{3} + 2} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \geq \sqrt{3}$

2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.

EXERCICE 28

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = 3 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{8(u_n - 1)}{u_n + 2} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 2 < u_n < 4$

2) Étudier la monotonie de la suite (u_n) puis en déduire qu'elle est convergente.

3) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 4 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(4 - u_n)$

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$

Puis déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

4) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \frac{u_n - 4}{u_n - 2}$

a) Établir que la suite (v_n) est géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c) Retrouver la valeur de la limite de (u_n).

5) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1}$

Exprimer S_n en fonction de n puis conclure $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

EXERCICE 29

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = 7 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{u_n + 8\sqrt{2 + u_n}}{9} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1) Calculer u_1 et u_2.

2) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n > 2$.

3) Montrer que (u_n) est strictement décroissante.

4) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \sqrt{2 + u_n} - 2$

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 30

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = \sqrt[3]{\frac{2}{7}} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \sqrt[3]{\frac{1 + u_n^3}{8}} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n > \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$

2) Montrer que la suite (u_n) est convergente.

3) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \frac{7}{8}u_n^3 - \frac{1}{8}$

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique.

b) Exprimer u_n en fonction de n puis donner $\lim u_n$.

EXERCICE 31

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = 3 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{2u_n^2 + u_n - 2}{u_n^2} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1) Calculer u_1 et u_2.

2) Montrer que la suite (u_n) est minorée par 2.

3) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} - 2 \leq \frac{1}{4}(u_n - 2)$

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 \leq u_n - 2 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$

c) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

For more visit: L9ray.com

EXERCICE 32

Soit (x_n) la suite numérique définie par :

$$x_0 = 5 \quad \text{et} \quad x_{n+1} = \frac{5x_n - 4}{x_n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1) a) Calculer x_1 et x_2.

b) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ x_n > 4$

2) a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{(x_n - 1)(4 - x_n)}{x_n}$$

b) Montrer que la suite (x_n) est décroissante et en déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ x_n \leq 5$.

3) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $y_n = \frac{x_n - 4}{x_n - 1}$.

a) Montrer que la suite (y_n) est géométrique de raison $\frac{1}{4}$ puis écrire y_n en fonction de n.

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ x_n = \frac{1 - 4^{n+2}}{1 - 4^{n+1}}$ puis calculer la limite de la suite (x_n).

4) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1} \quad \text{et} \quad v_n = \cos(\pi u_n)$$

Montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \frac{1}{2}$.

EXERCICE 33

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 2 - \frac{4}{u_n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ 2 \leq u_n \leq 4$

2) Montrer que la suite (u_n) est croissante et en déduire qu'elle est convergente.

3) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 4 - u_{n+1} \leq \frac{4 - u_n}{2}$

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 \leq 4 - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

c) Calculer la limite de la suite (u_n).

6) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ S_n \geq 4n - 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

EXERCICE 34

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 2 - \frac{1}{2 + u_n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1) Montrer par récurrence que :

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ \ 1 \leq u_n < \sqrt{3}$$

2) Montrer que la suite (u_n) est croissante, déduisez-en qu'elle est convergente.

3) a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sqrt{3} - u_{n+1} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + u_n}\left(\sqrt{3} - u_n\right)$$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 < \sqrt{3} - u_n \leq \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{3}\right)^n$$

et trouver la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 35

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{2u_n^3}{3u_n^2 + 1} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n > 0$

2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$.

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

c) Préciser la limite de la suite (u_n).

For more visit: L9ray.com

L9RAY

3 EXERCICES ET PROBLÈMES

EXERCICE 36

Soit (x_n) la suite numérique définie par :

$$x_0 = 1 \quad \text{et} \quad x_{n+1} = \frac{12x_n - 4}{9x_n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1) a) Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad x_{n+1} - \frac{2}{3} = \frac{2(3x_n - 2)}{9x_n}$

b) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad x_n > \frac{2}{3}$

2) a) Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad x_{n+1} - x_n = -\frac{(3x_n - 2)^2}{9x_n}$

b) Montrer que la suite (x_n) est convergente.

3) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $y_n = \frac{3}{3x_n - 2}$.

a) Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad x_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{y_n}$

b) Montrer que la suite (y_n) est arithmétique de raison $\frac{3}{2}$.

c) Déterminer y_n puis x_n en fonction de n.

Calculer alors la limite de la suite (x_n).

EXERCICE 37

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - n - \frac{8}{3} \quad ; \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

et on pose : $v_n = u_n + \alpha n - 1$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

1) Déterminer la valeur de α pour laquelle la suite numérique (v_n) est géométrique.

Dans ce qui suit, on prend pour α la valeur trouvée.

2) Calculer v_n et u_n en fonction de n.

3) Exprimer la somme $S_n = v_0 + \ldots + v_n$ en fonction de n puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

4) Exprimer $T_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ en fonction de de n.

En déduire la limite de la suite (T_n).

EXERCICE 38

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}(4 + u_n)^2 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

2) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} - u_n \geq \frac{5}{2}$

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \geq 2 + \frac{5n}{2}$

c) Calculer la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 39

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \frac{x^2 + 4}{2x}$.

1) Montrer que : $f([2;3]) \subset [2;3]$.

2) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par :

$$u_1 = 3 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 4}{2u_n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est minorée par 2.

b) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

c) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

3) Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

EXERCICE 40

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \frac{x}{1 + \sqrt[3]{x}}$.

1) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) \quad f(x) \leq x$

2) Montrer que : $f([0;1]) \subset [0;1]$.

3) On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \in [0;1]$.

b) Étudier la monotonie de la suite (u_n).

c) Montrer que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.

For more visit: L9ray.com

EXERCICE 41

1) On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $I=[1;+\infty[$ par : $f(x)=1+\sqrt[3]{x-1}$.

a) Justifier que f est strictement croissante sur I .

b) En déduire que : $f([1;2])=[1;2]$.

2) On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0=\frac{3}{2} \text{ et } u_{n+1}=f(u_n) \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}.$$

a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad 1\le u_n\le 2$.

b) Étudier la monotonie de la suite (u_n).

En déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad u_n\ge\frac{3}{2}$.

c) Montrer que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite .

EXERCICE 42

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0=-1\ ;\ u_1=1 \\ u_{n+2}=u_{n+1}-\frac{1}{4}u_n\ ;\ (n\in\mathbb{N}) \end{cases}$$

Soit (v_n) et (w_n) les suites numériques définies par :

$$v_n=u_{n+1}-\frac{1}{2}u_n \quad \text{et} \quad w_n=2^n u_n$$

1) a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.

b) En déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad v_n=\frac{3}{2^{n+1}}$.

c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

2) a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad w_{n+1}-w_n=2^{n+1}v_n$.

b) Montrer que la suite (w_n) est arithmétique.

c) En déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad u_n=\frac{3n-1}{2^n}$

d) Montrer par récurrence que : $(\forall n\ge 4)\quad n^2\le 2^n$

e) En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$.

EXERCICE 43

Soit $(u_n)_{n\ge1}$ la suite numérique définie par :

$$u_1=\frac{3}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{2}{u_n}\right) \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}^*.$$

1) Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad u_n>0$

2) Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1}-\sqrt{2}=\frac{(u_n-\sqrt{2})^2}{2u_n}$$

et en déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad u_n>\sqrt{2}$

3) a) Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1}-\sqrt{2}=\frac{1}{2}(u_n-\sqrt{2})+\frac{1}{u_n}-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

b) En déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad u_n-\sqrt{2}<\frac{1}{2^n}$

c) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\ge1}$.

EXERCICE 44

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{x}{x^2+x+1}$

1) a) Étudier les variations de la fonction f .

b) Déterminer l'image de l'intervalle $[0;1]$ par f .

2) Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0=1 \quad \text{et} \quad u_{n+1}=f(u_n) \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}.$$

a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad 0\le u_n\le 1$.

b) Montrer que (u_n) est strictement décroissante.

c) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad f\left(\frac{1}{n}\right)\le\frac{1}{n+1}$.

d) En déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad 0\le u_n\le\frac{1}{n}$

3) Montrer que la suite (u_n) est convergente puis calculer sa limite.

For more visit: L9ray.com

L9RAY

3 EXERCICES ET PROBLÈMES

EXERCICE 45

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 1}{u_n + 3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

et soit f la fonction numérique définie sur $I = [1;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{5x-1}{x+3}$

1) Montrer que f est strictement croissante sur I et en déduire que : $f([1;+\infty[) \subset [1;+\infty[$

2) Montrer que : $(\forall x \in I)\ f(x) - x = -\dfrac{(x-1)^2}{x+3}$ puis en déduire que : $(\forall x \in I)\ f(x) \leq x$

3) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n > 1$

4) Montrer que la suite (u_n) est décroissante puis en déduire qu'elle est convergente.

5) Calculer la limite de la suite (u_n).

6) Soit (v_n) la suite définie par : $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$.

a) Montrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison $r = \dfrac{1}{4}$.

b) Exprimer v_n et u_n en fonction de n.

c) Retrouver la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 46

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$u_0 = \dfrac{1}{10}$ et $u_{n+1} = \dfrac{8}{5}u_n(1-u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 2 \leq u_n \leq 4$

2) Montrer que la suite (u_n) est croissante puis en déduire qu'elle est convergente.

3) a) Montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 \leq \frac{3}{8} - u_{n+1} \leq \frac{21}{25}\left(\frac{3}{8} - u_n\right)$$

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 \leq \dfrac{3}{8} - u_n \leq \left(\dfrac{21}{25}\right)^n$.

c) Préciser la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 47

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$u_0 = a$ et $u_{n+1} = u_n(2-u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

où a est un réel de l'intervalle $]0;1[$.

1) On suppose dans cette question que $a = \dfrac{1}{8}$.

a) Calculer u_1 et u_2.

b) Dans un repère orthonormé (unité : $8\,cm$), tracer sur l'intervalle $[0;2]$ la droite (D) d'équation $y = x$ et la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction $f : x \mapsto x(2-x)$.

c) Utiliser (D) et $\mathscr{C}_f$ pour placer sur l'axe des abscisses les points A_1, A_2 et A_3 d'abscisses u_1, u_2 et u_3.

2) On suppose dans cette question que $a \in]0;1[$.

a) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 < u_n < 1$

b) Montrer que la suite (u_n) est croissante puis en déduire qu'elle est convergente.

3) On suppose dans cette question que $a = \dfrac{1}{8}$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = 1 - u_n$.

a) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.

b) Montrer par récurrence que :

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ v_n = \left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}$$

c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

EXERCICE 48

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$u_0 = \dfrac{1}{10}$ et $u_{n+1} = \dfrac{8}{5}u_n(1-u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 2 \leq u_n \leq 4$

For more visit: L9ray.com

2) Montrer que la suite (u_n) est croissante puis en déduire qu'elle est convergente.

3) a) Montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 \leq \frac{3}{8} - u_{n+1} \leq \frac{21}{25}\left(\frac{3}{8} - u_n\right)$$

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 \leq \frac{3}{8} - u_n \leq \left(\frac{21}{25}\right)^n$.

c) Préciser la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 49

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \ ; \ u_1 = 1 \\ \frac{1}{u_{n+2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u_{n+1}} + \frac{1}{u_n}\right) \ ; \ (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

1) Calculer u_2 et u_3.

2) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{2u_n}{4u_n - 1}$$

3) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ \frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$

4) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \frac{1}{u_n} - \frac{4}{3}$

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.

b) Exprimer v_n et u_n en fonction de n.

c) Préciser $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

EXERCICE 50

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{u_n^2 - 3u_n + 6}{u_n - 1} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ u_n \geq 3$

2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

3) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

EXERCICE 51

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 \leq u_n \leq 1$

2) Montrer que la suite (u_n) est croissante et en déduire qu'elle est convergente.

3) a) Montrer par récurrence que :

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^n \times 3}\right)$$

(On rappelle que : $1 + \cos(2x) = 2\cos^2 x$)

b) En déduire la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 52

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}u_n^2 + 2} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = u_n^2 - 4$

1) a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

b) Exprimer v_n et u_n en fonction de n.

c) En déduire la limite de la suite (u_n).

2) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 \leq u_n \leq 2$.

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 2 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(2 - u_n)$

c) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ |u_n - 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

d) Déterminer de nouveau la limite de la suite (u_n).

3) Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x^2 + 2}$$

a) Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0;2]$ et que : $f([0;2]) \subset [0;2]$.

For more visit: L9ray.com

L9RAY

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ u_n \in [0;2]$.

c) Montrer que : $(\forall x \in [0;2])\ \ f(x) \geq x$.

d) Étudier la monotonie de la suite (u_n).

e) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

EXERCICE 53

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x}-1}$.

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.

2) Montrer que pour tout $x \in D_f - \{0\}$:

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{2\left(\sqrt{x}-1\right)^2}$$

3) Dresser le tableau de variations de f.

4) a) Montrer que pour tout $x \in D_f$:

$$f(x) - x = \frac{x(4-x)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

b) En déduire que : $(\forall x \in [4;+\infty[)\ \ f(x) \leq x$.

5) On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$u_0 = 9$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ u_n > 4$.

b) Étudier la monotonie de la suite (u_n).

(On pourra utiliser le résultat de 4) b).

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.

EXERCICE 54

On considère la suite numérique définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n + \frac{2}{u_n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ u_n > 0$.

2) Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ u_{n+1}^2 - u_n^2 \geq 4$.

3) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ u_n \geq 2\sqrt{n}$

4) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

5) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = u_{n+1}^2 - u_n^2$.

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ 4 \leq v_n \leq 4 + \dfrac{1}{n}$.

b) En déduire la limite de la suite (v_n).

EXERCICE 55

On considère les fonctions numériques f, g et h définies sur $I = \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ par : $f(x) = x - \sin x$

$$g(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \cos x \quad \text{et} \quad h(x) = x - \frac{x^3}{3} - \sin x$$

1) Dresser le tableau de variations de chacune des fonctions f, g et h sur l'intervalle I.

2) En déduire que : $(\forall x \in I)\ \ x - \dfrac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$

3) On considère maintenant les suites numériques (u_n), (v_n) et (w_n) définies par :

$$u_n = \sin\frac{1}{n} \ ; \ v_n = n\sin\frac{1}{n} \ ; \ w_n = n^2 \sin\frac{1}{n} - n$$

En utilisant le résultat de la question 3, calculer les limites des suites (u_n), (v_n) et (w_n).

4) Soit (S_n) la suite numérique définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$S_n = \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) + \sin\left(\frac{2}{n^2}\right) + \ldots + \sin\left(\frac{n}{n^2}\right)$$

a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2n} - \frac{(n+1)^2}{24n^4} \leq S_n \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$

c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

For more visit: L9ray.com

PROBLÈMES DE SYNTHÈSE

SE PRÉPARER AUX DEVOIRS

DEVOIR 1

Soit a et b deux nombres réels tels que $a > b > 0$.

Le **nombre d'or** est défini comme l'unique rapport des deux longueurs a et b tel que : $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$.

On note ce nombre d'or φ.

Partie A : Quelques propriétés algébriques

1) a) Démontrer que φ est la solution positive de l'équation : $x^2 - x - 1 = 0$.

b) En déduire la valeur exacte de φ puis une valeur approchée à 10^{-2} près.

2) Vérifier que : $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$ et $\varphi = \sqrt{1+\varphi}$.

Partie B : Une approximation du nombre d'or

1) On considère les suites numériques (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = 1 + \frac{1}{v_n}$$

2) a) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n \leq \varphi$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{(u_n - \varphi)(u_n + \varphi^{-1})}{\sqrt{1+u_n} + u_n}$$

et en déduire que la suite (u_n) est croissante.

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

3) a) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ v_n \geq 1$.

b) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n - \varphi = \frac{\varphi - v_n}{\varphi v_n}$

c) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ |v_{n+1} - \varphi| \leq \frac{1}{\varphi}|v_n - \varphi|$

d) Montrer par récurrence que :

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ |v_n - \varphi| \leq \left(\frac{1}{\varphi}\right)^n$$

Quelle est la limite de la suite (v_n) ?

e) À l'aide de la calculatrice, calculer v_5 et écrire sous forme de fraction irréductible.

Avec quelle précision le résultat obtenu approche-t-il le nombre d'or ?

DEVOIR 2

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x}{2}\left(x + \sqrt{x^2+4}\right)$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Première Partie :

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis étudier la branche infinie de la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

b) Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}_-^*)\ f(x) = -\frac{2}{1+\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}$

c) Étudier la nature de la branche infinie de la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $-\infty$.

2) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)^2}{2\sqrt{x^2+4}}$$

b) Donner le tableau de variations de la fonction f.

3) Tracer $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Deuxième Partie :

1) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

2) Dresser le tableau de variations de la fonction f^{-1}.

For more visit: L9ray.com

3) Montrer que : $(\forall x \in J)\ f^{-1}(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$.

4) Montrer que pour tout $x \in J$:

$$f^{-1}(x) - x = \frac{-x^2}{\sqrt{x+1}\left(1+\sqrt{1+x}\right)}$$

5) En déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ et la droite (Δ) d'équation $y = x$.

6) Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable en 0 puis calculer $\left(f^{-1}\right)'(0)$

7) Tracer la courbe $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Troisième Partie :

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = f^{-1}(u_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1) Montrer par récurrence que :

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 \le u_n \le 1$$

2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.

DEVOIR 3

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0;4]$ par : $f(x) = \left(\dfrac{4\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}\right)^2$.

1) a) Étudier les variations de la fonction f.

b) En déduire que $f([0;4]) \subset [0;4]$.

2) On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

a) Calculer u_1.

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 \le u_n \le 4$.

c) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

d) Montrer que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = 1 - \dfrac{2}{\sqrt{u_n}}$.

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$.

b) Exprimer v_n et u_n en fonction de n.

c) Retrouver à nouveau la limite de la suite (u_n).

DEVOIR 4

Soit (u_n) et (v_n) deux suites numériques définies par : $u_0 = 3$, $v_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

1) Calculer u_1 et v_1.

2) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont strictement positives.

3) a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{(v_n - u_n)^2}{2(u_n + v_n)}$$

b) Étudier la monotonie de chacune des suites (u_n) et (v_n).

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $w_n = v_n - u_n$.

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 \le w_{n+1} \le \dfrac{1}{2} w_n$.

b) En déduire que :

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 \le w_n \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

c) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n$.

5) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $p_n = u_n v_n$.

a) Montrer par récurrence que :

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ p_n = 15$$

b) Montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \sqrt{15}$

For more visit: L9ray.com

SE PRÉPARER AUX EXAMENS

PROBLÈME 1

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$u_0 = 11$ et $u_{n+1} = \frac{10}{11}u_n + \frac{12}{11}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}(u_n - 12)$

2) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n < 12$

b) Montrer que (u_n) est strictement croissante.

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = u_n - 12$.

a) En utilisant la question 1), montrer que la suite numérique (v_n) est géométrique de raison $\frac{10}{11}$ puis exprimer v_n en fonction de n.

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n = 12 - \left(\frac{10}{11}\right)^n$ puis déterminer la limite de la suite (u_n).

Examen National 2012 (Session Normale)

PROBLÈME 2

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{u_n + 3}{u_n - 5}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) a) Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} - 3 = \frac{4(u_n - 3)}{2 + (3 - u_n)}$

b) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n < 3$.

2) Soit (v_n) la suite numérique définie par :

$v_n = \frac{u_n - 1}{3 - u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ puis déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

b) Montrer que $u_n = \frac{1 + 3v_n}{1 + v_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis écrire u_n en fonction de n.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

Examen National 2016 (Session Normale)

PROBLÈME 3

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{6u_n}{1 + 15u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) a) Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{u_n - \frac{1}{3}}{15u_n + 1}$

b) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n > \frac{1}{3}$.

2) Soit (v_n) la suite numérique définie par :

$v_n = 1 - \frac{1}{3u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{6}$ puis écrire v_n en fonction de n.

b) Montrer que $u_n = \frac{1}{3 - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Examen National 2011 (Session De Rattrapage)

PROBLÈME 4

On considère la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$u_1 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{25}{1 - u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1) a) Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ 5 - u_{n+1} = \frac{5(5 - u_n)}{5 + (5 - u_n)}$

b) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ 5 - u_n > 0$.

2) Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par :

$v_n = \frac{5}{5 - u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

For more visit: L9ray.com

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_{n+1} = \dfrac{10-u_n}{5-u_n}$

puis vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ v_{n+1} - v_n = 1$.

b) Montrer que $v_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ puis en déduire que $u_n = 5 - \dfrac{5}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Examen National 2013 (Session Normale)

PROBLÈME 5

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{5u_n}{2u_n+3} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n > 1$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n}$

a) Montrer que (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{3}{5}$

puis écrire v_n en fonction de n.

b) Montrer que $u_n = \dfrac{2}{2-\left(\frac{3}{5}\right)^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

puis déterminer la limite de la suite (u_n).

Examen National 2008 (Session De Rattrapage)

PROBLÈME 6

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 3 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{4u_n+3}{3u_n+4} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n > 1$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $1 - v_n = \dfrac{2}{u_n+1}$

puis en déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 1 - v_n > 0$.

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n = \dfrac{1+v_n}{1-v_n}$.

3) a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{7}$ puis écrire v_n en fonction de n.

b) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ puis en déduire la limite de la suite (u_n).

Examen National 2012 (Session De Rattrapage)

PROBLÈME 7

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{3u_n}{21+u_n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n > 0$.

2) Démontrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} < \dfrac{1}{7}u_n$

3) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante et en déduire qui elle est convergente.

4) a) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n < \left(\dfrac{1}{7}\right)^n$

b) Déterminer la limite de la suite (u_n).

Examen National 2010 (Session De Rattrapage)

PROBLÈME 8

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n - 4n - 1) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

On pose : $v_n = u_n + n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$.

2) a) Calculer v_n en fonction de n.

b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n \quad \text{et} \quad T_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$$

Montrer que :

$$T_n = \frac{1}{4}\left(5 - \frac{1}{5^n}\right) \quad \text{et} \quad S_n = T_n - \frac{(n+1)(n-2)}{2}$$

Examen National 2007 (Session De Rattrapage)

For more visit: L9ray.com

PROBLÈME 9

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = \frac{2}{5}u_{n+1} - \frac{1}{25}u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{5}u_n \quad \text{et} \quad w_n = 5^n u_n$$

1) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ puis écrire v_n en fonction de n.

2) a) Montrer que (w_n) est une suite arithmétique de raison 5 puis écrire w_n en fonction de n.

b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

3) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ 0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{5}u_n$.

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ 0 < u_n \leq \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$ puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Examen National 2006 (Session De Rattrapage)

PROBLÈME 10

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $g(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

1) a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ g(x) \leq x$.

b) Montrer que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et en déduire que $g(\mathbb{R}^+) = [0;1[$.

2) Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = g(u_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

a) Montrer par récurrence que :

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 < u_n < 1.$$

b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.

Examen Bac 1999 (Session De Février)

PROBLÈME 11

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{u_n^3}{3u_n^2 + 1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n > 0$.

b) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

2) a) Démontrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} \leq \frac{1}{3}u_n$.

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$ puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Examen National 2004 (Session De Rattrapage)

PROBLÈME 12

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } u_n = \frac{u_{n-1} + 5}{3} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

et soit $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par : $v_n = \frac{u_n - u_{n-1}}{3}$.

1) Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

2) Exprimer v_n en fonction de n.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$.

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ u_n = 3S_n + 1$

b) Exprimer S_n et u_n en fonction de n.

c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Examen Bac 2002 (Session De Février)

For more visit: L9ray.com

L9RAY

4

FONCTIONS LOGARITHMES

HISTOIRE

C'est un Écossais, John Napier, souvent francisé en Neper, qui inventa les logarithmes. Pour le faire, il considéra deux véhicules, l'un allant à une vitesse uniforme et l'autre à une vitesse proportionnelle à la distance restant à parcourir. Il considère que la distance parcourue par le second est le logarithme de celle restant à parcourir par le premier.

Par la suite, c'est mathématicien suisse Léonard Euler (1707 - 1783) qui relie véritablement le logarithme à l'analyse en l'utilisant pour calculer des dérivées et des intégrales. L'idée « d'échelle logarithmique » constitue un modèle toujours actuel pour de nombreux phénomènes scientifiques : de l'intensité des séismes à la magnitude des étoiles en passant par la mesure du bruit.

Source : https://fr.wikipedia.org

JOHN NAPIER (1550 – 1617)



CAPACITÉS ATTENDUES

- Maitriser le calcul algébrique sur les logarithmes ;
- Maitriser la résolution des équations, des inéquations et des systèmes comportant des logarithmes ;
- Reconnaitre et appliquer le logarithme décimal (surtout pour la résolution des équations de la forme $10^x = a$) et des inéquations de la forme $10^x \leq a$ où de la forme $10^x \geq a$) ;
- Maitriser et appliquer les limites logarithmiques essentielles ;
- Étudier et représenter des fonctions dont l'expression comporte le logarithme népérien ;
- Étudier et représenter des fonctions dont l'expression comporte le logarithme népérien ;

PLAN DU COURS

- Activités Préparatoires 195
- Connaissances Fondamentales
  - Fonction logarithme népérien 199
  - Fonction logarithme de base a 208
- Techniques Et Astuces 211
- Exercices Et Problèmes
  - Exercices d'application 218
  - Exercices de perfectionnement 225
  - Problèmes de synthèse 234

For more visit: L9ray.com

1 RAPPELS

1. Déterminer les primitives de la fonction f sur l'intervalle I dans chacun des cas suivants :

a) $f(x)=x^3$ sur $I=\mathbb{R}$; b) $f(x)=\dfrac{1}{x^n}$ sur $I=\mathbb{R}_+^*$ où $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$

c) $f(x)=2x\left(x^2-3\right)^{2019}$ sur $I=\mathbb{R}$; d) $f(x)=\dfrac{x^3+x}{\left(x^4+2x^2+5\right)^2}$ sur $I=\mathbb{R}$

2. Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle $I=]-1;1[$ par : $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

a) Justifier que la fonction g admet une primitive définie sur I.

Dans la suite, on note G la primitive de la fonction g s'annulant en 0.

b) Montrer que la fonction G est impaire. (Indication : On pourra considérer la fonction $h : x\mapsto G(x)+G(-x)$).

c) Montrer que G est continue et strictement croissante sur I.

d) En déduire que $G(x)\geq 0$ pour tout $x\in[0;1[$ et que $G(x)\leq 0$ pour tout $x\in]-1;0]$.

2 FONCTION TRANSFROMANT UN PRODUIT EN UNE SOMME

A. Première Partie :

1. Montrer que la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ admet une primitive sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

> La primitive de la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$ qui s'annule en 1 est appelée **la fonction logarithme népérienne** et on la note **ln**.

Il résulte de cette définition que :

- L'ensemble de définition de la fonction ln est $D_{\ln}=]0;+\infty[$;
- $\ln(1)=0$;
- La fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on a : $(\forall x\in]0;+\infty[)\ (\ln)'(x)=\dfrac{1}{x}$.

2. a) Montrer que la fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

b) En déduire le signe de chacun des nombres $\ln 2$ et $\ln\dfrac{1}{2}$.

3. Soit a un élément de $]0;+\infty[$. On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\ln(ax)$

a) Montrer que f est une primitive de la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

b) En déduire que pour tout $x\in]0;+\infty[$: $f(x)=\ln(x)+\ln(a)$

Puis écrire les nombres $\ln(6)$, $\ln\left(\dfrac{2}{3}\right)$, $\ln\left(\dfrac{1}{6}\right)$ et $\ln(72)$ en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(3)$.

For more visit: L9ray.com

L9RAY

4 ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES

4. a) En utilisant la calculatrice, vérifier que $\ln(2,71) < 1 < \ln(2,72)$ puis en déduire qu'il existe un unique nombre strictement positif e tel que $\ln e = 1$. Donner un encadrement de e.

b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\ln(e^n) = n$ puis en déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ln(e^{-n}) = -n$.

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les deux équations suivantes : $\ln x = 2$ et $\ln x = -1$

B. Deuxième Partie :

1. Montrer que si a et b sont des réels strictement positifs alors le signe de $\ln(a) - \ln(b)$ est celui de $a - b$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\ln(x) = \ln(e^2)$; b) $\ln(x+1) = \ln(3-x)$; c) $\frac{1}{2}\ln(x+2) = \ln(x)$; d) $\ln^2(x) = 2\ln(x)$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $\ln(x) > 2$; b) $\ln(x+1) > \ln(3-x)$; c) $\ln(x) + \ln(x+4) > \ln(2x-1)$

d) $\ln(2) + 2\ln(x) > \ln(3x-8)$; e) $\ln(x^2+1) > \ln(x+5) + \ln(x-2)$

3 LIMITES DE LA FONCTION ln ET SA REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

1. a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\ln(20^n) = n\ln(20)$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\ln\left(\frac{1}{20^n}\right) = -n\ln(20)$

c) Sachant que $\ln(2) \approx 0,69$ et $\ln(5) \approx 1,61$, donner une valeur approchée du nombre $\ln(20)$.

d) Remplir le tableau suivant :

x	20^{10}	20^{10^2}	20^{10^3}	20^{10^4}	20^{10^5}	20^{10^6}	20^{10^7}	20^{10^8}	20^{10^9}	$20^{10^{10}}$	$20^{10^{11}}$
$\ln(x)$											
$\frac{\ln(x)}{x}$											
$\ln\left(\frac{1}{x}\right)$											

e) À partir des résultats du tableau ci-dessus, deviner les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x$ puis interpréter graphiquement ces limites.

2. Soit (L) la courbe de la fonction **ln** dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

a) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe (L) aux points d'abscisses 1 et e.

b) Tracer l'allure de la courbe (L).

For more visit: L9ray.com

4 LE LOGARITHME DÉCIMAL ET SES APPLICATIONS

A. On considère la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{\ln x}{\ln 10}$

La fonction f est appelée la fonction logarithme décimale et on la note log.

1. Calculer : $\log(1)$; $\log(10)$; $\log(100)$; $\log(0,1)$; $\log(0,01)$.

2. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{Z}$: $\log\left(10^n\right)=n$

3. Étudier les variations de la fonction log puis dresser son tableau de variations.

B. Applications du logarithme décimal :

1. Autour de la convergence des suites numériques :

En utilisant la calculatrice, déterminer tous les entiers naturels n vérifiant chacune des inégalités suivantes :

a) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\le 10^{-12}$; b) $(1,02)^n\ge 10^9$; c) $\left(\dfrac{1}{0,015}\right)^n\ge 10^{1407}$

2. Nombre de chiffres d'un entier naturel :

Le nombre de chiffres $N(x)$ d'un entier naturel non nul x est : $N(x)=1+E(\log x)$.

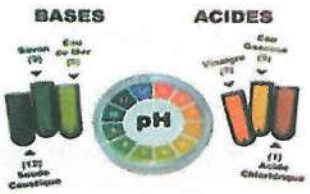
($E(a)$ étant la partie entière du réel a)

Le plus grand nombre premier découvert en 2018 est : $P=2^{77232917}-1$.

À l'aide de la calculatrice, déterminer le nombre de chiffres du nombre P.

3. En chimie :

La relation liant le pH d'une solution aqueuse et la concentration $\left[H_3O^+\right]$ est donnée par la formule : $\text{pH}=-\log\left[H_3O^+\right]$



a) Calculer le pH d'une solution aqueuse sachant que : $\left[H_3O^+\right]=6.10^{-5}\ mol/l$

b) Calculer la concentration $\left[H_3O^+\right]$ dans une solution aqueuse sachant que $\text{pH}=7$.

4. En séismologie :

La magnitude d'un tremblement de terre est une mesure de quantité de l'énergie libérée au foyer d'un séisme.

Elle se calcule à l'aide de la formule : $M=\log\left(\dfrac{I}{I_0}\right)$ (Sur l'échelle de Richter)

où I_0 est une intensité de référence et I l'intensité du séisme.



Calculer la valeur de M dans chacun des cas suivants :

a) Al Hoceima (2003) : $I_1=1,995\times10^8\,I_0$

b) El Salvador (2001) : $I_2=3,98\times10^7\,I_0$

c) Californie (1992) : $I_2=3,98\times10^7\,I_0$

For more visit: L9ray.com

L9RAY

4 CONNAISSANCES FONDAMENTALES

1 FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIENNE

1.1. DÉFINITION DE LA FONCTION ln

Définition 1

La primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$ et qui s'annule en 1 est appelée la fonction logarithme népérienne, et on la note ln.

Remarques

- L'ensemble de définition de la fonction ln est $]0;+\infty[$ et $\ln(1)=0$.
- La fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ et de plus :

$$(\forall x \in]0;+\infty[) \quad \ln'(x)=\frac{1}{x}$$

On rappelle que toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive définie sur cet intervalle.

Exemples

On considère les fonctions numériques f, g et h définies par :

$$f(x)=\ln x+\ln(x-1) \quad ; \quad g(x)=\ln(x^2-x) \quad ; \quad h(x)=\ln\left(\frac{x-4}{x+1}\right)$$

Déterminons leurs ensembles de définition :

- L'expression $f(x)$ a un sens si $x>0$ et $x-1>0$, c'est-à-dire si $x>1$. Par suite : $D_f=]1;+\infty[$
- L'expression $g(x)$ a un sens si $x^2-x>0$. Donc : $D_g=]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$.
- L'expression $h(x)$ a un sens si $\frac{x-4}{x+1}>0$. Donc : $D_h=]-\infty;-1[\cup]4;+\infty[$.

Applications

Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions f, g et h définies par :

$$f(x)=\ln(x+4)-\ln(25-x^2) \quad ; \quad g(x)=\ln(x^2-8x+7) \quad ; \quad h(x)=\sqrt{(x-1)\ln x}$$

1.2. MONOTONIE DE LA FONCTION ln

Proposition 1

La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$. On a alors :

- Pour tout $(x;y)\in(]0;+\infty[)^2$: $\ln x<\ln y \Leftrightarrow x<y$ et $\ln x=\ln y \Leftrightarrow x=y$
- Pour tout $x\in]0;+\infty[$:

$$\ln x=0 \Leftrightarrow x=1 \quad \text{et} \quad \ln x>0 \Leftrightarrow x>1 \quad \text{et} \quad \ln x<0 \Leftrightarrow x<1$$

For more visit: L9ray.com

Exemples

1) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\ln(x^2-4)=\ln(4x-6)$

Cette équation est définie si $x^2-x>0$ et $4x-6>0$, c'est-à-dire si $x\in\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$.

On a maintenant pour tout $x\in\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$:

$$\ln(x^2-x)=\ln(4x-6)\Leftrightarrow x^2-x=4x-6\Leftrightarrow x^2-5x+6=0$$

Les solutions de l'équation $x^2-5x+6=0$ sont 2 et 3. Comme $2\in\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ et $3\in\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$, alors $S=\{2;3\}$.

2) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $\ln(14-x)>\ln(10+7x-3x^2)$

Cette inéquation est définie si $14-x>0$ et $10+7x-3x^2>0$, c'est-à-dire si $x\in\left]-1;\frac{10}{3}\right[$.

On a maintenant pour tout $x\in\left]-1;\frac{10}{3}\right[$:

$$\ln(14-x)>\ln(10+7x-3x^2)\Leftrightarrow 14-x>10+7x-3x^2\Leftrightarrow 3x^2-8x+4>0\Leftrightarrow (x-2)(3x-2)>0$$

L'ensemble solution de l'inéquation $(x-2)(3x-2)>0$ dans $\mathbb{R}$ est $S_1=\left]-\infty;\frac{2}{3}\right[\cup]2;+\infty[$.

Par suite, l'ensemble solution de l'inéquation $\ln(14-x)>\ln(10+7x-3x^2)$ est :

$$S=S_1\cap\left]-1;\frac{10}{3}\right[=\left]-1;\frac{2}{3}\right[\cup\left]2;\frac{10}{3}\right[$$

Applications

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes :

$\ln(2x-3)=\ln(4-x)$; $\ln(x^2+x)=\ln(-2x-2)$; $\ln(3x^2+4x+2)=0$

$\ln(4x-5)>\ln(2x+3)$; $\ln(x^2+3x)-\ln(x+2)\geq 0$; $\ln(3x^2-4x+1)\geq 0$

2. Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

$f(x)=\sqrt{\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)}$; $g(x)=\frac{1}{\ln(|x-2|-1)}$; $h(x)=\frac{1}{(\ln x)^3}+\frac{x}{\ln(x+2)}$

1.3. PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES

Proposition 2

Pour deux réels strictement positifs x et y on a : $\ln(xy)=\ln x+\ln y$ (Propriété fondamentale)

De cette propriété fondamentale on peut déduire les propriétés algébriques suivantes :

For more visit: L9ray.com

L9RAY

Proposition 3

1) Pour tout réel strictement positif x, on a : $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$.

2) Pour tout $(x;y) \in (]0;+\infty[)^2$ on a : $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tous réels strictement positifs x_1, x_2,..., x_n, on a :

$$\ln(x_1\, x_2 \ldots\ldots x_n) = \ln(x_1) + \ln(x_2) + \ldots + \ln(x_n)$$

4) Pour tout $x \in]0;+\infty[$ et pour tout $r \in \mathbb{Q}$, on a : $\ln(x^r) = r \ln x$

Preuve

1) Soit x un réel strictement positif. D'après la proposition 2 on a : $\ln x + \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \ln\left(x.\frac{1}{x}\right) = \ln 1 = 0$

Il s'ensuit donc que : $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$.

2) Soit x et y deux réels strictement positifs. D'après la proposition 2, on a :

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln\left(x \times \frac{1}{y}\right) = \ln x + \ln\left(\frac{1}{y}\right) = \ln x - \ln y \text{ , d'où le résultat.}$$

3) La relation $\ln(x_1.x_2.....x_n) = \ln(x_1) + \ln(x_2) + \ldots + \ln(x_n)$ s'établie simplement à l'aide d'un raisonnement par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

4) De la relation 3), on peut tirer la relation $\ln(x^n) = n\ln(x)$, et ceci pour tout $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

On a de même les relations : $\ln(x^{-n}) = \ln\left(\frac{1}{x^n}\right) = -\ln(x^n) = -n\ln x$ et $\ln(x^0) = \ln 1 = 0$.

Par conséquent, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $\ln(x^p) = p\ln(x)$.

Soit maintenant $r = \frac{p}{q}$ un rationnel de $\mathbb{Q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. On donc :

$q\ln(x^r) = q\ln\left(x^{\frac{p}{q}}\right) = \ln(x^p) = p\ln(x)$, et alors $\ln(x^r) = \frac{p}{q}\ln(x)$. Ainsi : $\ln(x^r) = r\ln x$.

Remarques

- Soit a et b deux réels strictement négatifs. On a alors $ab > 0$ et $\frac{a}{b} > 0$. Il s'ensuit donc :

$$\ln(ab) = \ln|a| + \ln|b| \quad \text{et} \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln|a| - \ln|b|$$

- On a pour tout $x \in]0,+\infty[$ et pour tout entier $n \geq 2$: $\ln\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2}\ln(x)$ et $\ln\left(\sqrt[n]{x}\right) = \frac{1}{n}\ln(x)$.

For more visit: L9ray.com

Exemple

Soit a et b deux réels strictement positifs. On pose : $\alpha = \ln(a)$ et $\beta = \ln(b)$.

Exprimons $\ln\left(a^2b^5\right)$ et $\ln\left(\frac{1}{\sqrt[6]{a^7b}}\right)$ en fonction de α et β :

$$\ln\left(a^2b^5\right) = \ln\left(a^2\right) + \ln\left(b^5\right) = 2\ln(a) + 5\ln(b) = 2\alpha + 5\beta$$

$$\ln\left(\frac{1}{\sqrt[6]{a^7b}}\right) = \ln\left(a^{-\frac{7}{6}}.b^{-\frac{1}{6}}\right) = \ln\left(a^{-\frac{7}{6}}\right) + \ln\left(b^{-\frac{1}{6}}\right) = -\frac{7}{6}\alpha - \frac{1}{6}\beta$$

1.4. LIMITES USUELLES

Proposition 4

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$

1.5. TABLEAU DE VARIATIONS DE LA FONCTION ln

x	0		1		$+\infty$
$\ln'(x)$	‖		$+$		
$\ln(x)$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

Proposition 5

- $\ln\left(]0;+\infty[\right) = \mathbb{R}$.
- L'équation $\ln(x) = 1$ admet une unique solution dans $]0;+\infty[$. On la note e : $\ln(x) = 1 \Leftrightarrow x = e$

Remarques

- Á l'aide de la calculatrice, on trouve comme valeur approchée de e : $e \approx 2,718281828$
- On a pour tout $r \in \mathbb{Q}$: $\ln\left(e^r\right) = r$

Exemples

1) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $(E) : 3(\ln x)^2 + 2\ln x - 1 = 0$

L'ensemble de définition de cette équation est $\mathbb{R}_+^*$. En posant $t = \ln x$, l'équation devient $3t^2 + 2t - 1 = 0$.

Les solutions de l'équation $3t^2 + 2t - 1 = 0$ sont -1 et $\frac{1}{3}$. Par conséquent :

For more visit: L9ray.com

$$(E) \Leftrightarrow \left(\ln x = -1 \text{ ou } \ln x = \frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow \left(x = e^{-1} \text{ ou } x = e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e}\right)$$

Par suite, l'ensemble solution de l'équation (E) est : $S = \left\{e^{-1}; \sqrt[3]{e}\right\}$

2) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $(I) : \ln(x+1) \geq -\ln(x+3) + \ln(x+7)$

Notons D l'ensemble de définition de cette inéquation. On a alors :

$$x \in D \Leftrightarrow (x+1>0 \text{ et } x+3>0 \text{ et } x+7>0) \Leftrightarrow x > -1$$

Donc : $D =]-1; +\infty[$.

On a pour tout $x \in D$:

$$\begin{aligned}(I) &\Leftrightarrow \ln(x+1) + \ln(x+3) \geq \ln(x+7)\\ &\Leftrightarrow \ln\left[(x+1)(x+3)\right] \geq \ln(x+7)\\ &\Leftrightarrow (x+1)(x+3) \geq x+7\\ &\Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 \geq 0\end{aligned}$$

Le discriminant du trinôme $x^2 + 3x - 4$ est : $\Delta = 3^2 - 4\times 1\times(-4) = 25$. Donc le trinôme $x^2 + 3x - 4$ admet deux racines distinctes qui sont : $x_1 = -4$ et $x_2 = 1$.

Le tableau de signe du trinôme $x^2 + 3x - 4$ est :

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$x^2 + 3x - 4$		$+$	0	$-$	0	$+$	

En notant S l'ensemble solution de l'inéquation (I), on conclut que :

$$x \in S \Leftrightarrow \left(x \in]-\infty; -4] \cup [1; +\infty[\text{ et } x \in D\right) \Leftrightarrow x \in [1; +\infty[$$

Par suite : $S = [1; +\infty[$.

3) Résolvons le système suivant : $(S) : \begin{cases} 4\ln x - 3\ln y = 10 \\ 2\ln x + 5\ln y = -8 \end{cases}$

Si $(x; y)$ est une solution du système (S), alors : $x > 0$ et $y > 0$.

Pour résoudre ce système, on pose : $X = \ln x$ et $Y = \ln y$. Le système (S) devient :

$$(S') : \begin{cases} 4X - 3Y = 10 \\ 2X + 5Y = -8 \end{cases}$$

On a : $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 20 + 6 = 26$ et $\Delta_X = \begin{vmatrix} 10 & -3 \\ -8 & 5 \end{vmatrix} = 50 - 24 = 26$ et $\Delta_Y = \begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 2 & -8 \end{vmatrix} = -32 - 20 = -52$

Comme $\Delta \neq 0$, alors le système (S') admet une unique solution $(X; Y)$ avec :

$$X = \frac{\Delta_X}{\Delta} = \frac{26}{26} = 1 \quad \text{et} \quad Y = \frac{\Delta_Y}{\Delta} = \frac{-52}{26} = -2$$

For more visit: L9ray.com

Il s'ensuit donc que : $\ln x = 1$ et $\ln y = -2$, ce qui donne : $x = e$ et $y = e^{-2}$

En résumé, l'ensemble solution du système (S) est : $S = \{(e; e^{-2})\}$.

Applications

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$\ln(2x-1) = -\frac{3}{5} \quad ; \quad \ln\sqrt{x} = 3\ln 2 \quad ; \quad (\ln x)^2 - 5\ln x + 4 = 0 \quad ; \quad \frac{\ln x + 2}{\ln x - 1} = 3$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$\ln x \geq 3 \quad ; \quad \ln^2 x - 5\ln x + 6 > 0 \quad ; \quad -2\ln^2 x + 3\ln x + 5 \geq 0 \quad ; \quad \frac{\ln x - 1}{\ln x + 2} \leq 0$$

3. Déterminer l'esnemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{3\ln x - 4}{\ln x + 5} \quad ; \quad g(x) = \sqrt{\ln x - 2} \quad ; \quad h(x) = \frac{\sqrt{1 - \ln x}}{1 + \ln x} \quad ; \quad k(x) = \sqrt{\frac{1 - \ln x}{1 + \ln x}}$$

4. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

$$(S_1): \begin{cases} \ln x - \ln y = 2 \\ 2\ln x - 3\ln y = 5 \end{cases} \quad ; \quad (S_2): \begin{cases} x + y = 4 \\ \ln x + \ln y = \ln 3 \end{cases} \quad ; \quad (S_3): \begin{cases} \ln x - \ln y = -1 \\ \ln^2 x + \ln^2 y = 5 \end{cases}$$

$$(S_4): \begin{cases} x^2 + y^2 = 218 \\ \ln x + \ln y = \ln 91 \end{cases} \quad ; \quad (S_5): \begin{cases} \ln\sqrt{x} - \ln y^2 = 1 \\ -\ln x + 4\ln y = 6 \end{cases} \quad ; \quad (S_6): \begin{cases} xy = e^3 \\ 3\ln x - 4\ln y = 2 \end{cases}$$

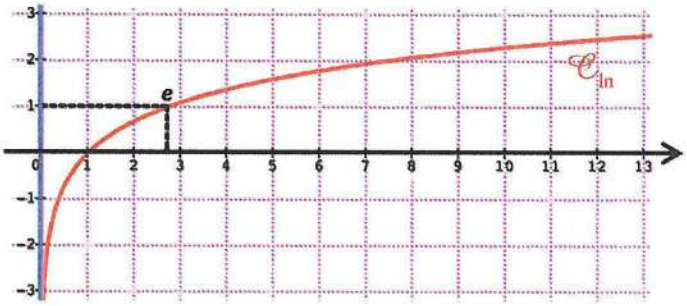
Proposition 6

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction ln dans un repère orthonormé. Alors :

- La courbe $\mathscr{C}$ admet l'axe des ordonnées comme asymptote : $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$.
- La courbe $\mathscr{C}$ admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.
- La courbe $\mathscr{C}$ est concave sur $]0; +\infty[$.

1.6. LA COURBE DE LA FONCTION ln

Courbe de la fonction $x \mapsto \ln x$.



For more visit: L9ray.com

L9RAY

1.7. LIMITES FONDAMENTALES

Proposition 7

- On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$ et $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.
- On a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x^n} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n\ln(x) = 0$.

Exemples

Calculons les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^2 x}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(\sin x)$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x-1)}{\ln(x+2)}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3\ln^2 x - 7\ln x\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\ln x - x}{\ln x + 2x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x+2+\ln\left(x^2-x+1\right)\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\dfrac{7}{x}\right)$

Réponses :

- On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^2 x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)^2 = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\dfrac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$. En posant $t=\sqrt{x}$, on obtient :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x}{x} = \lim_{t\to+\infty} 4\left(\frac{\ln t}{t}\right)^2 = 0 \quad (\text{Car} : \lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t} = 0)$$

- On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(\sin x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{\sin x}\times\sin x\ln(\sin x)$. On sait que $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{\sin x} = 1$.

D'autre part, en posant $X=\sin x$, on obtient : $\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x\ln(\sin x) = \lim\limits_{X\to 0^+} X\ln(X) = 0$.

Par suite : $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(\sin x) = 1\times 0 = 0$.

- On a : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{\cos x-1}\times\dfrac{\cos x-1}{x^2} = 1\times\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}$ car :

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{\cos x-1} = \lim\limits_{X\to 1}\dfrac{\ln(X)}{X-1} = 1$ (Ici on a posé $X=\cos x$)

- On a pour tout $x\in\left]1;+\infty\right[$:

$$\frac{\ln(x-1)}{\ln(x+2)} = \frac{\ln\left(x\left(1-\frac{1}{x}\right)\right)}{\ln\left(x\left(1+\frac{2}{x}\right)\right)} = \frac{\ln x+\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\ln x+\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)} = \frac{1+\frac{1}{\ln x}\times\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}{1+\frac{1}{\ln x}\times\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}$$

Comme : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\ln x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right) = 0$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x-1)}{\ln(x+2)} = 1$

For more visit: L9ray.com

• On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3\ln^2 x-7\ln x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3\ln x-7\right)\ln x$.

Comme : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3\ln^2 x-7\ln x\right)=+\infty$.

• On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\ln x-x}{\ln x+2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(2\dfrac{\ln x}{x}-1\right)}{x\left(\dfrac{\ln x}{x}+2\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\dfrac{\ln x}{x}-1}{\dfrac{\ln x}{x}+2}$.

Comme : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\ln x-x}{\ln x+2x}=\dfrac{2\times0-1}{0+2}=-\dfrac{1}{2}$.

• On a pour tout $x\in]0;+\infty[$:

$$-x+2+\ln\left(x^2-x+1\right)=-x+2+\ln\left(x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\right)=-x+2+2\ln x+\ln\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$$

Donc : $-x+2+\ln\left(x^2-x+1\right)=x\left(-1+\dfrac{2}{x}+2\dfrac{\ln x}{x}\right)+\ln\left(1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x+2+\ln\left(x^2-x+1\right)\right)=-\infty$.

• On a pour tout $x\in]0;+\infty[$: $x\ln\left(1+\dfrac{7}{x}\right)=7\times\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{7}{x}\right)}{\dfrac{7}{x}}$. En posant $X=\dfrac{7}{x}$, on obtient :

$$\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{7}{x}\right)=\lim_{X\to0}7\times\frac{\ln(1+X)}{X}=7.$$

Applications

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt[3]{x}\ln x$; $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{\sqrt[5]{x}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-7x-5\ln x\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(x^{2020}+x+1\right)}{x}$; $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{\ln x+3}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}x^2\ln\left(1+\dfrac{4}{x^2}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\ln\left(x^2-1\right)}$; $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x}{x-3}\ln\left(\dfrac{x}{3}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$; $\lim\limits_{x\to0^-}x\ln\left(x^2-3x\right)$

1.8. DÉRIVÉE LOGARITHMIQUE

Proposition 8

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que : $(\forall x\in I)\ u(x)\neq0$

Alors la fonction $x\mapsto\ln|u(x)|$ est dérivable sur I et on a : $\left(\ln|u(x)|\right)'=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

For more visit: L9ray.com

L9RAY

Preuve

Pour tout $x \in I$, on pose : $f(x) = \ln|u(x)|$

Puisque u est continue sur I (car elle est dérivable) et ne s'annule pas sur I alors u est soit strictement positive ou soit strictement négative sur I.

Si u est strictement positive sur I alors pour tout $x \in I$, $f(x) = \ln\big(u(x)\big)$, c'est-à-dire que : $f = \ln o\, u$.

Par application de la proposition de la dérivabilité de la composée de deux fonctions, on déduit que la fonction f est dérivable sur I et que pour tout $x \in I$:

$$f'(x) = (\ln' o\, u)(x) \times u'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Si u est strictement négative sur I alors pour tout $x \in I$, $f(x) = \ln\big(-u(x)\big)$, c'est-à-dire que : $f = \ln o(-u)$

Par application de la proposition de la dérivabilité de la composée de deux fonctions, on déduit que la fonction f est dérivable sur I et que pour tout $x \in I$:

$$f'(x) = \big(\ln' o(-u)\big)(x) \times (-u)'(x) = \frac{-u'(x)}{-u(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Exemples

On considère les fonctions numérique f et g définies par :

$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \quad \text{et} \quad g(x) = \ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|$$

- La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$. En effet, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} < \sqrt{x^2+1}$.

  Il s'ensuit donc que pour $x \in \mathbb{R}$, $-x \le |x| < \sqrt{x^2+1}$. Par suite : $(\forall x \in \mathbb{R})\ x + \sqrt{x^2+1} > 0$.

  D'après la proposition précédente, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'}{x+\sqrt{x^2+1}} = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) \times \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

- La fonction g est définie pour les réels x tels que $\frac{x-2}{x+1} \neq 0$ et $x+1 \neq 0$, c'est-à-dire que $x \in \mathbb{R} - \{2,-1\}$.

  Sur chacun des intervalles $]-\infty;-1[$, $]-1;2[$ et $]2;+\infty[$, la fonction $x \mapsto \frac{x-2}{x+1}$ est dérivable et ne s'annule pas. Donc, la fonction g est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty;-1[$, $]-1;2[$ et $]2;+\infty[$.

  De plus, on a pour tout $x \in \mathbb{R} - \{2;-1\}$:

$$g'(x) = \frac{\left(\frac{x-2}{x+1}\right)'}{\frac{x-2}{x+1}} = \frac{\frac{3}{(x+1)^2}}{\frac{x-2}{x+1}} = \frac{3}{(x+1)(x-2)}$$

For more visit: L9ray.com

Applications

Déterminer la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle I donné, dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=\ln\left(x^2-3x+7\right)$ et $I=\mathbb{R}$; 2) $f(x)=\left(x^2+2x\right)\ln\left(x^2-4\right)$ et $I=]2;+\infty[$

3) $f(x)=x.\sqrt[3]{\ln x-1}$ et $I=]e;+\infty[$; 4) $f(x)=\ln\left|x+2-\sqrt{x^2+4}\right|$ et $I=]-\infty;0[$

5) $f(x)=\ln(\cos x)$ et $I=\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$; 6) $f(x)=\ln\left(\frac{2x-\sqrt{x}}{x-3}\right)$ et $I=]3;+\infty[$

7) $f(x)=\sqrt{\ln^2 x-2\ln x}$ et $I=]0;1[$; 8) $f(x)=\frac{2+\ln x}{1-\ln x}$ et $I=]0;e[$

Définition 2

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I telle que : $(\forall x\in I)\ u(x)\neq 0$

La fonction $\frac{u'}{u}$ est appelée la dérivée logarithmique de la fonction u sur l'intervalle I.

Proposition 9

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I telle que : $(\forall x\in I)\ u(x)\neq 0$

Les primitives de la fonction $x\mapsto\frac{u'(x)}{u(x)}$ sur I sont les fonctions $x\mapsto\ln|u(x)|+\lambda$ où $\lambda\in\mathbb{R}$.

Exemples

1) Les primitives de la fonction numérique $f:x\mapsto\frac{1}{x-1}$ sur l'intervalle $]-\infty;1[$ sont les fonctions numériques $F:x\mapsto\ln(1-x)+\lambda$ où $\lambda\in\mathbb{R}$.

2) Les primitives de la fonction numérique $g:x\mapsto\frac{\cos x}{\sin x}$ sur l'intervalle $\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right[$ sont les fonctions numériques $G:x\mapsto\ln|\sin x|+\lambda$ où $\lambda\in\mathbb{R}$.

3) On considère la fonction f définie sur $]-2;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{\sqrt[4]{x^3+8}}{\left(x^2+1\right)^3}$

Calculons la dérivée de la fonction f en utilisant la dérivée logarithmique :

On a pour tout $x\in]-2;+\infty[$: $\ln(f(x))=\ln\left(\sqrt[4]{x^3+8}\right)-\ln\left(\left(x^2+1\right)^3\right)=\frac{1}{4}\ln\left(x^3+8\right)-3\ln\left(x^2+1\right)$

Il s'ensuit donc que pour tout $x\in]-2;+\infty[$: $\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{3x^2}{4\left(x^3+8\right)}-\frac{6x}{x^2+1}=\frac{-3x\left(7x^3-x+64\right)}{4\left(x^2+1\right)\left(x^3+8\right)}$

For more visit: L9ray.com

Par suite : $\left(\forall x \in]-2;+\infty[\right)\ f'(x)=\dfrac{-3x\left(7x^3-x+64\right)}{4\sqrt[4]{\left(x^3+8\right)^3}\left(x^2+1\right)^4}$

Applications

1. Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives de la fonction f sur l'intervalle I :

a) $f(x)=\dfrac{1}{2-3x}$ sur $I=\left]\dfrac{2}{3};+\infty\right[$; b) $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2-6x}$ sur $I=\mathbb{R}_-^*$

c) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ sur $I=\mathbb{R}_+^*$; d) $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$ sur $I=]1;+\infty[$

e) $f(x)=\dfrac{\sin(2x)}{5+\sin^2 x}$ sur $I=\mathbb{R}$; f) $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ sur $I=]-1;+\infty[$

g) $f(x)=\dfrac{1}{x+\sqrt{x}}$ sur $I=\mathbb{R}_+^*$; h) $f(x)=\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}$ sur $I=\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$

2. Déterminer la primitive F de la fonction $f: x\mapsto \tan x$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ telle que : $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$.

3. On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ par : $f(x)=\dfrac{3x+1}{(2x+1)^2}$.

a) Déterminer les réels a et b tels que pour tout $x\in\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$: $f(x)=\dfrac{a}{2x+1}+\dfrac{b}{(2x+1)^2}$.

b) En déduire l'ensemble des primitives de la fonction f sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$.

c) Déterminer la primitive F de la fonction f sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ qui s'annule en 0.

4. Calculer la dérivée logarithmique de la fonction g définie par : $g(x)=\dfrac{x^{17}.\sqrt[3]{x^6-5x^3+7}}{\sqrt[32]{x^{32}-32x+1}}$.

5. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $h(x)=1-x+\ln x$.

Étudier les variations de la fonction h sur $\mathbb{R}_+^*$ puis en déduire que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right)\ \ln x\le x-1$

2 FONCTION LOGARITHME DE BASE a

2.1. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS

Définition 3

Soit a un réel strictement positif et différent de 1. La fonction logarithme de base a est la fonction numérique, notée par $\log_a$, définie sur $]0;+\infty[$ par : $\log_a(x)=\dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$

For more visit: L9ray.com

Remarques

- La fonction logarithme de base e est la fonction logarithme népérien car pour tout réel x strictement positif : $\log_e(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(e)} = \ln(x)$.
- On a : $\log_a(a) = 1$ et $\log_a(1) = 0$ et $\log_a(a^r) = r$ pour $r \in \mathbb{Q}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\log_a'(x) = \dfrac{1}{x \ln a}$.
  - Si $a > 1$ alors la fonction $\log_a$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
  - Si $0 < a < 1$ alors la fonction $\log_a$ est strictement décroissante $]0;+\infty[$.

Proposition 10

- Pour tous réels strictement positifs x et y, et pour tout $r \in \mathbb{Q}$ on a :

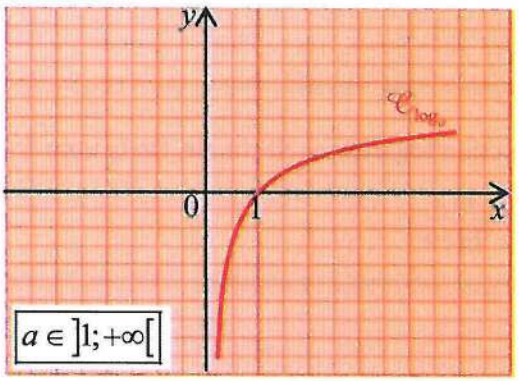
$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y) \quad ; \quad \log_a(x^r) = r\log_a(x)$$

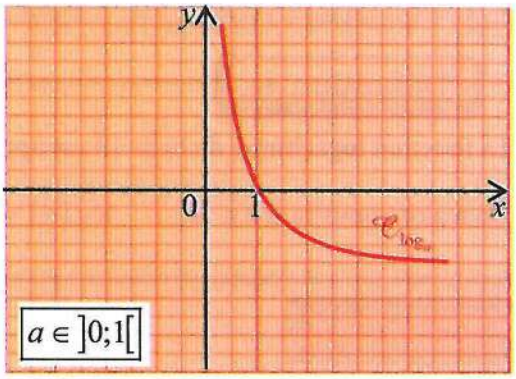
$$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x) \quad ; \quad \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tous réels strictement positifs x_1, x_2,..., x_n, on a :

$$\log_a(x_1 \times x_2 . \times .... \times x_n) = \log_a(x_1) + \log_a(x_2) + ... + \log_a(x_n)$$

2.2. LA COURBE DE LA FONCTION $\log_a$





La courbe $\mathscr{C}_{\log_a}$ admet une branche parabolique dirigée vers l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$

For more visit: L9ray.com

L9RAY

Exemples

1) On considère les nombres réels suivants : $\alpha = \log_{40}(100)$ et $\beta = \log_{16}(25)$.

Déterminons β en fonction de α :

On a : $\alpha = \dfrac{\ln(100)}{\ln(40)} = \dfrac{\ln(2^2 \times 5^2)}{\ln(2^3 \times 5)} = \dfrac{2\ln(2)+2\ln(5)}{3\ln(2)+\ln(5)}$ et $\beta = \dfrac{\ln(25)}{\ln(16)} = \dfrac{2\ln(5)}{4\ln(2)} = \dfrac{\ln(5)}{2\ln(2)}$

Il s'ensuit donc : $\alpha = \dfrac{2+2\dfrac{\ln(5)}{\ln(2)}}{3+\dfrac{\ln(5)}{\ln(2)}} = \dfrac{2+4\beta}{3+2\beta}$. Ainsi : $\beta = \dfrac{2-3\alpha}{2(\alpha-2)}$

2) Résolvons l'équation suivante : $\log_{2x}(4x) + \log_{4x}(16x) = 4$

L'équation est définie si $x > 0$, $2x \neq 1$ et $4x \neq 1$, c'est-à-dire si $x \in \mathbb{R}_+^* - \left\{\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right\}$.

On a maintenant pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* - \left\{\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right\}$:

$$\log_{2x}(4x) + \log_{4x}(16x) = 4 \Leftrightarrow \log_{2x}(2) + \log_{2x}(2x) + \log_{4x}(4) + \log_{4x}(4x) = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln 2}{\ln(2x)} + \frac{\ln 4}{\ln(4x)} = 2 \quad (\text{car : } \log_{2x}(2x) = \log_{4x}(4x) = 1)$$

Ce qui donne $\dfrac{1}{1+\log_2(x)} + \dfrac{2}{2+\log_2(x)} = 2$, c'est-à-dire $2(\log_2(x))^2 + 3\log_2(x) = 0$. Ainsi :

$\log_2(x) = 0$ ou $\log_2(x) = -\dfrac{3}{2}$. Par suite, l'ensemble solution est : $S = \left\{1; \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right\}$

2.3. LOGARITHME DÉCIMAL

Définition 4

La fonction logarithme de base 10 est appelée la fonction logarithme décimale. On la note $\log$.

On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\log(x) = \log_{10}(x) = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$

Applications

1. Calculer : $\log 1000$; $\log 100000$; $\log(0,01)$; $\log(0,00001)$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ ce qui suit :

$$\log(x+11) + \log(x-4) = 2 \quad ; \quad \log(x) + 1 = \log(x+3) \quad ; \quad (\log(x+2))^2 - \log(x+2) - 2 \geq 2$$

3. Résoudre les systèmes suivants : $\begin{cases} x+y=25 \\ \log x + \log y = 2 \end{cases}$ et $\begin{cases} xy = 100 \\ 2\log^2(x) + 2\log^2(y) = 5 \end{cases}$

For more visit: L9ray.com

A MANIPULATION DES LOGARITHMES

1) Soit $(a;b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$. Simplifier le réel : $X=\ln(ab^2)-\ln\sqrt[3]{a^2b^5}+\ln\dfrac{a}{\sqrt{b}}-\ln\sqrt[4]{a^2b^6}$.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes :

$2\ln x=1$; $(\ln x)^2-4=0$; $\ln x^2=5$; $\ln(2x-1)+\ln(x-4)=2\ln 2$

$\ln(x^2-3x+2)=0$; $\ln(3x^2-x)\le\ln x+\ln 2$; $-(\ln x)^2-\ln x+6\ge 0$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes : $\begin{cases}\ln(x).\ln(y)=-10\\ \ln x+\ln y=3\end{cases}$; $\begin{cases}\ln x^2+\ln y^5=16\\ \ln x^3+\ln y^3=6\end{cases}$

SOLUTION

1) Soit $(a,b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$. On a :

$$X=\ln a+2\ln b-\frac{1}{3}(\ln a^2+\ln b^5)+\ln a-\ln\sqrt{b}-\frac{1}{4}(\ln a^2+\ln b^6)$$

$$=\ln a+2\ln b-\frac{1}{3}(2\ln a+5\ln b)+\ln a-\frac{1}{2}\ln b-\frac{1}{4}(2\ln a+6\ln b)$$

$$=\frac{5}{6}\ln a-\frac{5}{3}\ln b$$

2) **Résolution des équations et inéquations :**

- Pour l'équation $2\ln x=1$:

L'équation $2\ln x=1$ signifie $\ln x=\dfrac{1}{2}$, ce qui donne $x=\sqrt{e}$. Par suite : $S=\{\sqrt{e}\}$

- Pour l'équation $(\ln x)^2-4=0$:

L'équation $(\ln x)^2-4=0$ signifie $\ln x=2$ ou $\ln x=-2$, ce qui donne $x=e^2$ ou $x=e^{-2}$. D'où : $S=\{e^2;e^{-2}\}$

- Pour l'équation $\ln x^2=5$:

L'équation $\ln x^2=5$ signifie $x^2=e^5$, ce qui donne $x=e^2\sqrt{e}$ ou $x=-e^2\sqrt{e}$. D'où : $S=\{e^2\sqrt{e};-e^2\sqrt{e}\}$

- Pour l'équation $\ln(2x-1)+\ln(x-4)=2\ln 2$:

Cette équation a un sens si $2x-1>0$ et $x-4>0$, c'est-à-dire si $x\in]4;+\infty[$. On a pour tout $x>4$:

$$\ln(2x-1)+\ln(x-4)=2\ln 2\Leftrightarrow\ln[(2x-1)(x-4)]=\ln 4\Leftrightarrow 2x^2-9x=0\Leftrightarrow x=\frac{9}{2}$$

Par suite : $S=\left\{\dfrac{9}{2}\right\}$

- Pour l'équation $\ln(x^2-3x+2)=0$:

Cette équation a un sens si $x^2-3x+2>0$, c'est-à-dire si $x\in]-\infty;1[\cup]2;+\infty[$.

For more visit: L9ray.com

On a alors pour tout $x \in]-\infty;1[\cup]2;+\infty[$: $\ln\left(x^2-3x+2\right)=0 \Leftrightarrow x^2-3x+1=0$. Cette dernière équation a pour solutions $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Comme $x \in]-\infty;1[\cup]2;+\infty[$ alors : $S=\left\{\frac{3-\sqrt{5}}{2};\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$

- Pour l'inéquation $\ln\left(3x^2-x\right) \leq \ln x+\ln 2$:

Cette inéquation a un sens si $x>0$ et $3x^2-x>0$, c'est-à-dire $x \in \left]\frac{1}{3};+\infty\right[$. On a pour tout $x \in \left]\frac{1}{3};+\infty\right[$:

$$\ln\left(3x^2-x\right) \leq \ln x+\ln 2 \Leftrightarrow \ln\left(3x^2-x\right) \leq \ln(2x) \Leftrightarrow 3x^2-x \leq 2x \Leftrightarrow 3x^2 \leq 3x$$

Comme $x>0$ alors $3x^2 \leq 3x$ est équivalente à $x \leq 1$. Enfin : $S=\left]\frac{1}{3};1\right]$

- Pour l'inéquation $-(\ln x)^2-\ln x+6 \geq 0$:

Cette inéquation a un sens si $x \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $X=\ln x$. L'inéquation devient $-X^2-X+6 \geq 0$.

En dressant le tableau de signes de $-X^2-X+6$, on en déduit que $-X^2-X+6 \geq 0$ est valable si et seulement si $X \in [-3;2]$. Donc $\ln x \in [-3;2]$. Puisque la fonction $x \mapsto \ln x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, alors l'ensemble solution de cette inéquation est $S=\left[e^{-3};e^2\right]$.

3) Résolution des systèmes :

- Pour le système $\begin{cases}\ln(x).\ln(y)=-10\\ \ln x+\ln y=3\end{cases}$:

Posons $X=\ln(x)$ et $Y=\ln(y)$. Le système devient $\begin{cases}X.Y=-10\\ X+Y=3\end{cases}$. On en déduit alors que X et Y sont les solutions de l'équation $t^2-3t-10=0$. Cette dernière équation a pour solutions $t=-2$ et $t=5$.

Il s'ensuit donc que $(X;Y)=(-2;5)$ ou $(X;Y)=(5;-2)$, et alors $(x;y)=\left(e^{-2};e^5\right)$ ou $(x;y)=\left(e^5;e^{-2}\right)$

L'ensemble solution est $S=\left\{\left(e^{-2};e^5\right);\left(e^5;e^{-2}\right)\right\}$.

- Pour le système $\begin{cases}\ln x^2+\ln y^5=16\\ \ln x^3+\ln y^3=6\end{cases}$:

Ce système a un sens si les nombres x^2, x^3, y^3 et y^5 sont strictement positifs. Donc le système a un sens si $x>0$ et $y>0$. On a pour tous $x>0$ et $y>0$, le système donné est équivalent à :

$$\begin{cases}2\ln x+5\ln y=16\\ 3\ln x+3\ln y=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2\ln x+5\ln y=16\\ \ln x+\ln y=2\end{cases}$$

En posant $X=\ln(x)$ et $Y=\ln(y)$, ce système devient $\begin{cases}2X+5Y=16\\ X+Y=2\end{cases}$, ce qui donne $(X;Y)=(-2;4)$.

Par conséquent : $(x;y)=\left(e^{-2};e^4\right)$. L'ensemble solution du système est $S=\left\{\left(e^{-2};e^4\right)\right\}$.

For more visit: L9ray.com

- On n'écrit $\ln x$ que si le réel x est strictement positif.
- On retiendra que la fonction logarithme transforme les produits en sommes.
- Parmi les erreurs fatales qu'il faut éviter lors des calculs avec la fonction ln :

$$\frac{\ln a}{\ln b}=\ln(a-b)\ ;\ (\ln a)\times(\ln b)=\ln(a+b)\ ;\ (\ln a)^n=n\ln a\ ;\ \frac{1}{\ln a}=-\ln a$$

- Pour résoudre une équation de genre $\ln(f(x))=\ln(g(x))$, on détermine d'abord l'ensemble de définition de cette équation puis on utilise les propriétés algébriques de la fonction ln.
- Pour tout $m\in\mathbb{Q}$, l'équation $\ln x=m$ a pour unique solution $x=e^m$.
- La formule $\ln(x^n)=n\ln x$ n'est valable que si $x>0$. En particulier : $(\forall x\in\mathbb{R}^*)\ \ln(x^2)=2\ln|x|$.
- Pour résoudre des inéquations contenant $x\mapsto\ln x$, on utilise le fait que la fonction $x\mapsto\ln x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

B CALCUL DES LIMITES

1) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x+2}{x^2\ln x}\ ;\ \lim_{x\to-\infty}\left(x+\ln(x^4+5)\right)\ ;\ \lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x^3-1}\ ;\ \lim_{x\to+\infty}(x^2+1)\ln\left(1+\frac{1}{x^3}\right)$$

2) a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}^+$: $x-\frac{x^2}{2}\le\ln(x+1)\le x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$

Indication : On pourra étudier les variations de chacune des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}^+$:

$$f:x\mapsto\frac{x^2}{2}-x+\ln(x+1)\quad\text{et}\quad g:x\mapsto x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ln(x+1)$$

b) En déduire la limite : $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(x+1)-x}{x^2}$

SOLUTION

1) Calcul des limites :

- $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x+2}{x^2\ln x}=-\infty$ (car $\lim\limits_{x\to0^+}(x+2)=2$ et $\lim\limits_{x\to0^+}x^2\ln x=0^-$)
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\ln(x^4+5)\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\ln\left(x^4\left(1+\frac{5}{x^4}\right)\right)\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+4\ln(-x)+\ln\left(1+\frac{5}{x^4}\right)\right)$

et donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\ln(x^4+5)\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(1-4\frac{\ln(-x)}{-x}+\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{5}{x^4}\right)\right)=-\infty$ (car : $\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{\ln X}{X}=0$)

- $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{x^3-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{x-1}\times\dfrac{1}{x^2+x+1}=1\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}$

For more visit: L9ray.com

L9RAY

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+1\right)\ln\left(1+\frac{1}{x^3}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x^3}\times\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}{\frac{1}{x^3}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)\times\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}{\frac{1}{x^3}}=0\times1=0$

2) a) On considère les fonctions f et g définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x)=\frac{x^2}{2}-x+\ln(x+1)\quad\text{et}\quad g(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ln(x+1)$$

On vérifie aisément que les fonctions f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}^+$ et on a pour tout $x\in\mathbb{R}^+$:

$$f'(x)=x-1+\frac{1}{x+1}=\frac{x^2}{x+1}\quad\text{et}\quad g'(x)=1-x+x^2-\frac{1}{x+1}=\frac{x^3}{x+1}$$

On a donc pour tout $x\in\mathbb{R}^+$, $f'(x)\geq0$ et $g'(x)\geq0$. Il s'ensuit donc que f et g sont croissantes sur $\mathbb{R}^+$.

Il en résulte donc que pour tout $x\in\mathbb{R}^+$, $f(x)\geq f(0)$ et $g(x)\geq g(0)$, d'où $f(x)\geq0$ et $g(x)\geq0$.

Ces deux dernières inégalités donnent : $\frac{x^2}{2}-x+\ln(x+1)\geq0$ et $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ln(x+1)\geq0$.

Par suite, pour tout $x\in\mathbb{R}^+$: $x-\frac{x^2}{2}\leq\ln(x+1)\leq x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$

b) On a pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$x-\frac{x^2}{2}\leq\ln(x+1)\leq x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\Leftrightarrow-\frac{x^2}{2}\leq\ln(x+1)-x\leq-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\Leftrightarrow-\frac{1}{2}\leq\frac{\ln(x+1)-x}{x^2}\leq-\frac{1}{2}+\frac{x}{3}$$

Puisque $\lim\limits_{x\to0^+}-\frac{1}{2}=\lim\limits_{x\to0^+}\left(-\frac{1}{2}+\frac{x}{3}\right)=-\frac{1}{2}$; alors : $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(x+1)-x}{x^2}=-\frac{1}{2}$



• Il est évidemment essentiel de connaître les limites de référence à savoir : $(r>0)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$; $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$; $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=0$; $\lim\limits_{x\to0^+}x^r\ln x=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^r}=0$; $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}=1$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$

• Pour enlever l'indétermination dans les limites contenant l'expression $\ln(u(x))$, on essaye de voir où tend l'expression $u(x)$. En gros, on rencontre les situations suivantes :

- Si $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=+\infty$, on utilise la limite : $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\ln(u(x))}{u(x)}=0$.
- Si $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=0^+$, on utilise les limites : $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)\ln(u(x))=0^-$ et $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\ln(1+u(x))}{u(x)}=1$.
- Si $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=1$, on utilise la limite : $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\ln(u(x))}{u(x)-1}=1$.

For more visit: L9ray.com

C ÉTUDE D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE

Soit f la fonction définie pour tout $x \in]-1;+\infty[$ par : $f(x) = x\ln(1+x)+1-x$

$\mathscr{C}_f$ est sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$.

2) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$.

3) a) Calculer $f''(x)$ pour tout $x \in]-1;+\infty[$

b) Dresser le tableau de variations complet de la fonction f'.

c) En déduire qu'il existe un unique réel $\alpha \in]-1;+\infty[$ tel que $f'(\alpha) = 0$.

d) Vérifier que $0 < \alpha < 1$ puis préciser le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]-1;+\infty[$.

e) Dresser le tableau de variations complet de la fonction f.

4) Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $I = [1;+\infty[$

a) Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à préciser.

b) Dresser le tableau de variations de la fonction inverse g^{-1}.

c) Calculer $\left(g^{-1}\right)'(\ln 2)$.

d) Tracer $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_{g^{-1}}$ dans le même repère.

SOLUTION

Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par : $f(x) = x\ln(1+x)+1-x$.

1) Calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x\ln(1+x)+1-x\right) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\ln(1+x)+\frac{1}{x}-1\right) = +\infty \quad .$$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^+}\left(x\ln(1+x)+1-x\right) = +\infty \text{ car } \lim_{x\to-1^+}\ln(1+x) = -\infty .$$

2) Étude des branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$:

On a : $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$; donc la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = -1$.

Au voisinage de $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, on doit donc calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\ln(1+x)+1-x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(1+x)+\dfrac{1}{x}-1\right) = +\infty$

Par suite, $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

For more visit: L9ray.com

3) a) La fonction f est deux fois dérivable sur $]-1,+\infty[$ car les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \ln(1+x)$ le sont.

De plus, on a pour tout $x \in]-1;+\infty[$: $f'(x) = \left(x\ln(1+x)+1-x\right)' = \ln(1+x)+\dfrac{x}{1+x}-1$

Et donc pour tout $x \in]-1;+\infty[$: $f''(x) = \dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{(1+x)^2} = \dfrac{2+x}{(1+x)^2}$

b) On a pour tout $x \in]-1;+\infty[$, $\dfrac{2+x}{(1+x)^2} > 0$, c'est-à-dire que $f''(x) > 0$, d'où le tableau de variation de f' :

x	-1		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$+$	
$f'(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

$\left(\lim\limits_{x\to -1^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{(1+x)\ln(1+x)-1}{1+x} = -\infty \text{ car } \lim\limits_{x\to -1^+}(1+x)\ln(1+x) = \lim\limits_{t\to 0^+} t\ln t = 0\right)$

c) La fonction f' est continue et strictement croissante sur $]-1;+\infty[$. Par conséquent :

$$f'(]-1;+\infty[) = \left]\lim_{x\to -1^+} f'(x); \lim_{x\to +\infty} f'(x)\right[=]-\infty;+\infty[= \mathbb{R}$$

Puisque $0 \in \mathbb{R}$ alors il existe un unique réel $\alpha \in]-1;+\infty[$ tel que $f'(\alpha) = 0$.

d) La fonction f' est continue et strictement croissante sur $]-1;+\infty[$. De plus :

$$f'(0) = -1 \quad , \quad f'(\alpha) = 0 \quad , \quad f'(1) = \ln(2)-\frac{1}{2} \qquad \left(\ln(2)-\frac{1}{2} \approx 0{,}2\right)$$

Comme $f'(0) < f'(\alpha) < f'(1)$, alors $0 < \alpha < 1$. Le signe de $f'(x)$ sur $]-1;+\infty[$:

- Pour $x \in]-1;\alpha[$: $f'(x) < 0$;
- Pour $x \in]\alpha;+\infty[$: $f'(x) > 0$.

e) Tableau de variation de f :

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

For more visit: L9ray.com

4) a) La fonction g est continue et strictement croissante sur l'intervalle I. D'après le théorème de la fonction réciproque, la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle J tel que :

$$J = g(I) = g([1;+\infty[) = \left[g(1) ; \lim_{x\to+\infty} g(x) \right[= [\ln 2;+\infty[$$

Ainsi : $J = [\ln 2;+\infty[$.

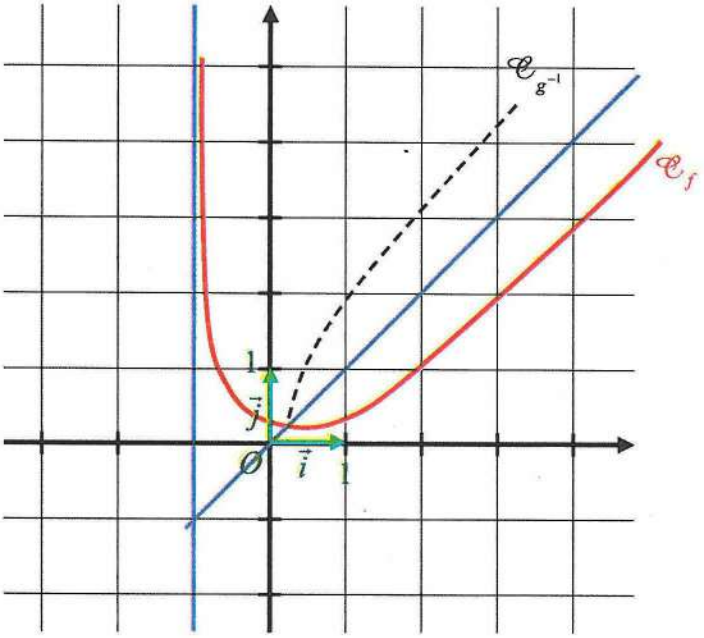
b) Tableau de variations de f^{-1} :

x	$\ln 2$	$+\infty$
$g^{-1}(x)$	1	$\nearrow$ $+\infty$

c) On a $g(1) = \ln 2$ et $g'(1) = \ln 2 - \frac{1}{2}$. Puisque $g'(1) \neq 0$ alors g^{-1} est dérivable en $\ln 2$, et de plus :

$$\left(g^{-1}\right)'(\ln 2) = \frac{1}{g'(1)} = \frac{1}{\ln 2 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{\ln(4) - 1}$$

d) Construction des courbe $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_{g^{-1}}$:



For more visit: L9ray.com

L9RAY

EXERCICES D'APPLICATION

CALCUL SUR LES LOGARITHMES

EXERCICE 01

Simplifier les écritures suivantes :

$\ln 7+\ln\left(\frac{1}{7}\right)$; $\ln\left(\frac{1}{16}\right)+3\ln 2$; $\ln 36-2\ln 3$

$2\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)$; $\ln\left(e^2\sqrt{8}\right)-\frac{1}{2}\ln 2$; $\ln\left(e^{-3}\right)-\frac{1}{2}\ln\left(e^6\right)$

$\ln\left(\sqrt{5}-2\right)+\ln\left(\sqrt{5}+2\right)$; $\ln 42+2\ln 28-3\ln 14$

$\ln\left(\sqrt{\sqrt{11}-3}\right)+\ln\left(\sqrt{\sqrt{11}+3}\right)$; $\ln\left(\frac{1}{e}\right)^2-\left(\ln\frac{1}{e}\right)^2$

EXERCICE 02

Simplifier les écritures suivantes :

$A=\ln\left(\frac{4\sqrt{2}}{27}\right)+\ln\left(12\sqrt{3}\right)+\ln\left(3\sqrt{3}\right)$

$B=\ln\left(7+4\sqrt{3}\right)^{15}+\ln\left(7-4\sqrt{3}\right)^{15}$

$C=\ln 2+\ln\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)+\ln\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$

$D=\frac{7}{16}\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)-4\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-\frac{25}{8}\ln\left(\sqrt{2}-1\right)$

$X=2\ln\left(e\sqrt{e}\right)-3\ln\left(e^3\right)-2\ln\left(e^{-6}\right)$

$Y=\ln\left(\frac{1}{2}\right)+\ln\left(\frac{2}{3}\right)+\ldots+\ln\left(\frac{98}{99}\right)+\ln\left(\frac{99}{100}\right)$

$Z=\frac{3}{8}\ln\left(7+4\sqrt{3}\right)-\ln\left(2+\sqrt{3}\right)-\frac{1}{4}\ln\left(2-\sqrt{3}\right)$

EXERCICE 03

Calculer en fonction de $a=\ln 5$ et $b=\ln 2$ ce qui suit :

$x=\ln\left(16\sqrt{\frac{4}{5}}\right)$; $y=\ln(1000)$; $z=\ln(0,64)$

$u=\ln\left(\frac{8}{125}\right)$; $v=\ln\left(\frac{5}{16}\right)+\frac{1}{3}\ln 50-4\ln\sqrt[3]{5}$

EXERCICE 04

Soit a, b et c trois réels strictement positifs. On pose :

$A=\ln a$ et $B=\ln b$ et $C=\ln c$

Exprimer ce qui suit en fonction de a, b et c :

$X=\ln\left(a^8b^9c^{-\frac{3}{2}}\right)$; $Y=\ln\left(\frac{a}{b^7}\right)+\ln\left(\frac{a^{-1}}{c^3}\right)$

$Z=\ln\left(\sqrt{abc}.\sqrt[5]{a}.\sqrt[4]{b}\right)$; $T=\ln\left(\sqrt[5]{\sqrt{a}}.\sqrt[3]{b^{-2}}.c\sqrt{c}\right)$

EXERCICE 05

Soit a et b deux réels strictement positifs tels que :

$\ln\left(\frac{a+b}{3}\right)=\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)$

Calculer le rapport $\frac{a}{b}$.

EXERCICE 06

Soit a et b deux réels strictement positifs.

1) Montrer que : $\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}$.

2) En déduire que : $\frac{\ln a+\ln b}{2}\le\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

EXERCICE 07

Soit x et y deux réels strictement positifs.

Montrer que : $(x+y)\ln(x+y)>x\ln x+y\ln y$

EXERCICE 08

Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction numérique f dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=\ln(3-2x)$; 2) $f(x)=\ln\left(x^2-5x\right)$

3) $f(x)=\ln|x+1|$; 4) $f(x)=\ln^2 x-3\ln x$

5) $f(x)=\ln\left((x-1)^2\right)$; 6) $f(x)=\sqrt{2-\ln x}$

7) $f(x)=\ln(x+2)+\ln(x-1)$

For more visit: L9ray.com

8) $f(x)=\ln\big((x+2)(x-1)\big)$; 9) $f(x)=\ln(\ln x)$

10) $f(x)=\ln\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)$; 11) $f(x)=\frac{x+3}{x\ln x}$

12) $f(x)=\ln\left(\frac{2+x}{x-3}\right)$; 13) $f(x)=\ln\left|\frac{2x+3}{x-5}\right|$

14) $f(x)=\ln\left|\sqrt{x}-1\right|$; 15) $f(x)=\sqrt{x\ln(x+1)}$

16) $f(x)=\sqrt{\ln^2 x+\ln x-6}$; 17) $f(x)=\sqrt{\frac{1-\ln x}{1+\ln x}}$

18) $f(x)=\frac{\sqrt{2-\ln x}}{\ln^2 x-3\ln x-4}$.

EXERCICE 09

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $\ln x=0$; 2) $\ln x=1$; 3) $2\ln x+3=0$

4) $\ln x=3\ln 2$; 5) $2\ln x=\ln 3+\ln 27$

6) $2\ln x=\ln(x^2)$; 8) $\ln^2 x=4$; 9) $\ln x^2=-2$

EXERCICE 10

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $\ln(7x-1)=\ln(5x+1)$; 2) $\ln(x^2-x)=\ln(x+1)$

3) $\ln(x-3)+\ln(x-1)=\ln(2x+3)$.

4) $\ln\big[(x-3)(x-1)\big]=\ln(2x+3)$.

5) $\ln(x-1)+\ln(x+3)=\ln(x^2+4x+9)$.

6) $(1+3\ln x)(1-\ln x)=0$; 7) $\ln^2 x+\ln x=0$

8) $(\ln x)^3=3\ln(x^2)$; 9) $3(\ln x)^2-7\ln x+10=0$

10) $\frac{1}{2}\ln(4x)=\ln(3-2x)-\ln\left(\sqrt{2x+1}\right)$.

11) $\ln\left(\sqrt{2x-3}\right)=\ln(6-x)-\frac{1}{2}\ln x$.

12) $\ln|x-1|+\ln|2x-1|=0$; 13) $\ln|3x+1|=5\ln 2$

14) $\ln\left(\frac{x+5}{x+2}\right)+2\ln(x+2)=\ln(3x+9)$

15) $\ln\left(\sqrt{2x+1}\right)=-\frac{1}{2}\ln x$

EXERCICE 11

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $2\ln x-5\geq 0$; 2) $1-\ln x<0$; 3) $\ln x\leq -1$

4) $\ln(x+5)<\ln(3x+11)$; 5) $(x-1)\ln x\geq 0$

6) $\ln^2 x-\ln x\geq 0$; 7) $\ln^2 x-6\ln x+5\leq 0$

8) $(\ln x-1)(3-2\ln x)\geq 0$; 9) $\ln(x^2+3x+3)\geq 0$

10) $\ln(2x-3)+2\ln(x+1)>\ln(x-3)$

11) $\frac{\ln x}{\ln x+2}\geq 0$; 12) $\frac{2-\ln x}{\ln x}\leq 3$; 13) $\ln^2 x-4\geq 0$

14) $\ln(x+1)-\ln x\leq\ln(2-x)$; 15) $\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)\geq\ln x$

16) $\ln x+\ln(4-x)>0$; 17) $\ln(x^2-5)\leq\ln(-4x)$

18) $\ln\sqrt{2x-3}+\ln(x+1)<\frac{1}{2}\ln(x-3)$.

EXERCICE 12

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$(E_1):\ln\left(\sqrt{x-1}\right)=\ln(3-x)-\frac{1}{2}\ln(x-1)$

$(E_2):\ln^3 x-3\ln^2 x-6\ln x+8=0$

$(E_3):\ln|x-1|+\ln|x+2|=\ln|4x^2+3x-7|$

2) Résoudre les inéquations suivantes :

$(I_1):\ln(x^2-2x)\leq\ln x$; $(I_2):\ln\left(\frac{3x-7}{4x+5}\right)\geq 0$

$(I_2):-\ln^2 x-\ln x+2>0$; $(I_4):\frac{\ln|x-2|}{3+\ln x}>0$

$(I_5):0<\frac{\ln x}{\ln x-1}<1$; $(I_6):\ln^3 x-3\ln^2 x+2>0$

EXERCICE 13

Pour chacun des cas suivants, déterminer le plus petit entier naturel n vérifiant l'inégalité correspondante :

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^n\leq 10^{-5}$; 2) $(1,1)^n\geq 100$; 3) $\frac{1}{4^n}<0,03$

4) $25\left(1+\frac{7}{100}\right)^n\geq 4$; 5) $40\left(1-\frac{5,5}{100}\right)^n\leq 1$

For more visit: L9ray.com

L9RAY

4 EXERCICES ET PROBLÈMES

EXERCICE 14

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

$\begin{cases} 4\ln x - 3\ln y = 6 \\ 2\ln x + 5\ln y = 16 \end{cases}$; $\begin{cases} 3\ln x - 5\ln y = -9 \\ 2\ln x + \ln y = 7 \end{cases}$

$\begin{cases} x + y = 10 \\ \ln x + \ln y = 4\ln 2 \end{cases}$; $\begin{cases} 4x + 5y = 8 \\ \ln x + \ln y = 2\ln 2 - \ln 5 \end{cases}$

$\begin{cases} \ln x - \ln y = 1 \\ \ln^2 x + \ln^2 y = 13 \end{cases}$; $\begin{cases} \ln x \times \ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = 3 \\ \ln x - \ln y = 2 \end{cases}$

$\begin{cases} \ln(xy) = -5 \\ \ln x . \ln y + 14 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x + y = e \\ \ln x + \ln y = 2 + \ln 3 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ \ln x + \ln y = \ln 12 \end{cases}$; $\begin{cases} \ln(x^5) + \ln(y^2) = 16 \\ \ln(x^3) + \ln(y^3) = 15 \end{cases}$

$\begin{cases} \ln(x^3 y^2) = 5 \\ \ln x - 4\ln\sqrt{y} = -3 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2 + y^2 = 52 \\ \ln(-x) + \ln(-y) = \ln 24 \end{cases}$

CALCUL DES LIMITES

EXERCICE 15

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{\ln x} + x\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x - 2 - \dfrac{\ln x}{x^5}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{(\ln x)^2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x - 3x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2 - 2x - 5\ln x)$

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^3 \ln x$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\ln x$; $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln^2 x$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln^2 x - 3\ln x + 2)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2 - x - 3\ln x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^2}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{3x}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x^2 - 1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2 - 1}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x - \ln x}{4x + \ln x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+2)\ln x}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(x^2 + 3x) - x\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\ln x - x\ln(x+2))$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x + \ln(x^2 - 1)\right)$; $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)\ln\sqrt{x^2 + 2x - 3}$

EXERCICE 16

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{3\ln x - 2}{1 + \ln x}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1 + \ln(-x)}{3 + \ln(-x)}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln^2 x + \ln x\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(2\ln\left(1 + \sqrt{x}\right) - \ln x\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x + 4 + \ln(x+2)}{x+2}$; $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{\ln\left(1 + \sqrt{x-3}\right)}{x-3}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$; $\lim\limits_{x\to 2^+}(x^2 - 5x + 6)\ln(x-2)$

$\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln^2 x - 3\ln x + 2}{x - e}$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2\ln x}{2 - \ln x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{3x-2}{4x+1}\right)$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(x^2+1)}{x^3 + 1}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^3)}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{\ln(5x+3)}$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\left(1 + \sqrt[3]{x}\right)}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{\ln(1+x)}$

$\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)\ln(x^3 - 8)$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(x^2 - 3x + 7)}{2x + 3}$

$\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{3x}{x-2} + \ln(x-2)\right)$; $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x}{x-2}\ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$

$\lim\limits_{x\to -1^+}(x+1)\ln(x^2 + x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\sqrt{x^2 + 3} - x\right)$

EXERCICE 17

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln\left(2x + \sqrt{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt[3]{x}\ln^5 x$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\sin(x)\ln x$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln(\tan x)}{4x - \pi}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^3 + 5x + 2)}{1 - \ln x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(2x-1)}{x^2 + x - 2}$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\left(1 + \sqrt{x}\right)}{x\ln x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{\ln(1+2x)}$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{x}{x-1} + \ln\sqrt{x-1}\right)$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2\ln|x| + 3x}{\ln|x| - 4x}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{2-3x}{2+5x}\right)$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{1 + 5\sin x}{1 + 3\tan x}\right)$

For more visit: L9ray.com

CALCUL DES FONCTIONS DÉRIVÉES

EXERCICE 18

Dans chacun des cas suivants, montrer que la fonction f est dérivable sur l'intervalle I puis calculer $f'(x)$ pour tout $x \in I$:

1) $f(x) = x\ln x - x + 1$ et $I =]0;+\infty[$.

2) $f(x) = \ln(x^2 - 2x)$ et $I =]-\infty;0[$.

3) $f(x) = \ln|x^2 - 8x + 12|$ et $I =]2;6[$.

4) $f(x) = \ln(\ln x)$ et $I =]1;+\infty[$.

5) $f(x) = \ln^2 x - 3\ln x + 5$ et $I =]0;+\infty[$.

6) $f(x) = \dfrac{3\ln x + 2}{\ln x - 1}$ et $I =]0;e[$.

7) $f(x) = \ln\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)$ et $I = \mathbb{R}$.

8) $f(x) = \ln\left(\dfrac{2x+1}{x-3}\right)$ et $I = \left]-\infty;-\dfrac{1}{2}\right[$.

9) $f(x) = \sqrt{1 - \ln^2 x}$ et $I =]0;e[$.

10) $f(x) = \dfrac{1}{x} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$ et $I =]0;+\infty[$.

11) $f(x) = \ln\left(\sqrt{1-4x}\right)$ et $I = \left]-\infty;\dfrac{1}{4}\right[$.

12) $f(x) = \ln\left|\dfrac{x^2 - 4x}{x+4}\right|$ et $I =]4;+\infty[$.

13) $f(x) = \sqrt{\ln^2 x - 3\ln x + 5}$ et $I =]0;+\infty[$.

14) $f(x) = \ln\left|x + 3 - \sqrt{x^2+9}\right|$ et $I =]0;+\infty[$.

15) $f(x) = \ln(\tan x)$ et $I = \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

16) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 - \ln^2 x}}$ et $I =]e^{-1};e[$.

17) $f(x) = x^2\left(2 - \dfrac{3}{\ln x}\right)^4$ et $I =]1;+\infty[$.

EXERCICE 20

En utilisant la dérivée logarithmique, déterminer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle I dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+3x}}{(x^3+1)^5}$ et $I =]0;+\infty[$.

2) $f(x) = \left(\dfrac{\sqrt[3]{x^3+2x-3}}{\sqrt{x^4+3}}\right)^5$ et $I =]1;+\infty[$.

3) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x^4+1}}{x\sqrt{x^2+4}}$ et $I = \mathbb{R}$.

VARIATIONS ET ÉTUDE DE FONCTIONS

EXERCICE 21

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \ln(x^2 - 2x)$ et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Déterminer D_f ensemble de définition de f.

2) Montrer que la droite (Δ): $x = 1$ est un axe de syémtrie de la courbe $\mathscr{C}_f$

3) Calculer les limites de f aux bornes de D_f.

4) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$.

5) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D_f$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f.

6) Déterminer les points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.

7) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$.

8) Soit g la restriction de la fonction f sur $I =]2;+\infty[$.

a) Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J à déterminer.

b) Calculer $\left(g^{-1}\right)'(0)$.

For more visit: L9ray.com

L9RAY

4 EXERCICES ET PROBLÈMES

EXERCICE 22

Soit f la fonction numérique définie sur $]-1;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x)=(x+1)\ln(x+1) & \text{si } x>-1 \\ f(-1)=0 \end{cases}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Montrer que f est continue à droite en $x_0=-1$.

2) Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite au point $x_0=-1$ puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

3) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

Que peut-on déduire ?

4) Étudier les variations de la fonction f.

6) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$.

EXERCICE 23

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x)=\frac{2x+1+\ln x}{x}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Calculer : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$.

3) Étudier les variations de la fonction f.

4) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)\ f''(x)=\dfrac{2\ln x-1}{x^3}$

puis étudier la concavité de la courbe $\mathscr{C}_f$.

5) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

EXERCICE 24

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=x-1-\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) a) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

b) Montrer que la droite (D) d'équation $y=x-1$ est une asymptote oblique de $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

c) Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite (D) sur $]0;+\infty[$.

3) a) Montrer que pour tout $x\in]0;+\infty[$:

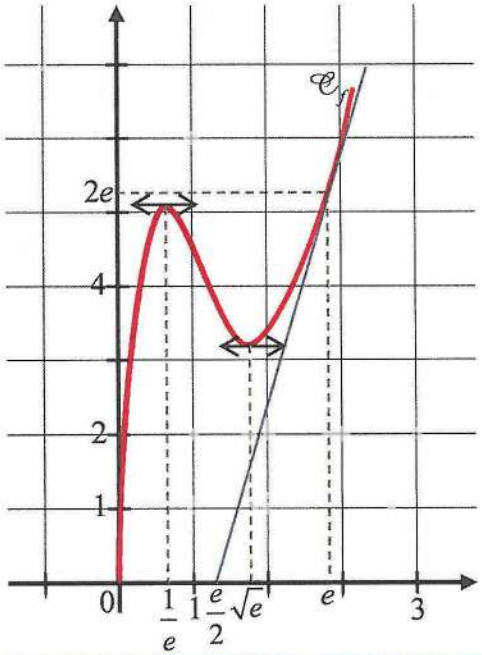
$$f'(x)=\frac{1}{2x\sqrt{x}}\left[\ln x+2\left(x\sqrt{x}-1\right)\right]$$

b) Montrer que f est décroissante sur l'intervalle $]0;1[$ et que f est croissante sur $]1;+\infty[$ puis dresser le tableau de variations de f.

4) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

EXERCICE 25

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est tracée en-dessous avec sa tangente au point d'abscisse e.



For more visit: L9ray.com

On admet l'égalité suivante :

$$f(x)=2x\left[a\ln^2 x+b\ln x+c\right]$$

où a, b et c désignent des réels.

1) a) Exprimer $f'(x)$ en fonction de a, b et c.

b) À l'aide des informations données sur le graphique, déterminer les valeurs de $f'(e)$, $f'\left(\sqrt{e}\right)$ et $f'\left(\frac{1}{e}\right)$.

c) En déduire que pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$f(x)=2x\left[2\ln^2 x-3\ln x+2\right]$$

2) a) Lire graphiquement le sens de variations de la fonction f.

b) Étudier le signe de $f'(x)$ et retrouver ainsi les résultats précédents.

EXERCICE 26

Soit f la fonction définie sur $D=[0;1[\cup]1;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x)=x\left(1-\dfrac{1}{\ln x}\right)^2 & \text{si } x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1) Montrer que f est continue à droite en 0.

2) Montrer que f est dérivable à droite en 0.

3) Calculer $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

4) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$.

5) a) Montrer que pour tout $x\in D-\{0\}$:

$$f'(x)=\left(\frac{\ln x-1}{\ln x}\right)\left(\frac{\ln^2 x-\ln x+2}{\ln^2 x}\right)$$

b) Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f.

6) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$.

CALCUL DES PRIMITIVES

EXERCICE 27

Pour chacun des cas suivants, déterminer toutes les primitives de la fonction f sur l'intervalle I :

1) $f(x)=-\dfrac{5}{x}$; $I=]0;+\infty[$

2) $f(x)=-\dfrac{1}{x}$; $I=]-\infty;0[$

3) $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$; $I=]-2;+\infty[$

4) $f(x)=\dfrac{1}{3-4x}$; $I=]1;+\infty[$

5) $f(x)=\dfrac{x^3}{1+x^4}$; $I=\mathbb{R}$

6) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x+4}$; $I=\mathbb{R}$

7) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x-5}$; $I=]2;5[$

8) $f(x)=\dfrac{2x^3+x^2+x-7}{x}$; $I=]0;+\infty[$

EXERCICE 28

Pour chacun des cas suivants, déterminer les primitives de la fonction g sur l'intervalle I :

1) $g(x)=x^2-2-\dfrac{4}{x+1}$; $I=[0;+\infty[$

2) $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{1}{x\ln x}$; $I=]1;+\infty[$

3) $g(x)=\dfrac{2}{x\sqrt{1-\ln x}}$; $I=]0;e[$

4) $g(x)=\tan x$; $I=\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$

6) $g(x)=\dfrac{x}{(x+1)^2}$; $I=]-1;+\infty[$

7) $g(x)=\dfrac{1}{x+\sqrt{x}}$; $I=]0;+\infty[$

For more visit: L9ray.com

L9RAY

4 EXERCICES ET PROBLÈMES

EXERCICE 29

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $I = \left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ par : $f(x)=\frac{3x+1}{(2x+1)^2}$.

1) Déterminer les réels a et b tels que pour tout $x \in I$:

$$f(x)=\frac{a}{2x+1}+\frac{b}{(2x+1)^2}$$

2) En déduire l'ensemble des primitives de la fonction numérique f sur l'intervalle I.

3) Déterminer la primitive F da la fonction f sur I qui s'annule en 0.

EXERCICE 30

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x)=a\ln^3 x+b\ln^2 x+1$

où a et b désignent des réels.

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Déterminer les réels a et b sachant que la courbe $\mathscr{C}_f$ passe par le point $A(e;0)$ et admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses en ce point.

2) Dans ce qui suit, on prend : $a=2$ et $b=-3$.

a) Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^n x}{x}=0$.

(On pourra poser : $x=X^n$)

c) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$.

3) Déterminer les points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses puis tracer $\mathscr{C}_f$.

4) Soit F la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$F(x)=xf(x)-6\ln^2 x+6\ln x-1$$

Montrer que F est la primitive da la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1.

FONCTION LOGARITHME DE BASE a

EXERCICE 31

Simplifier les expressions suivantes :

$\log_4(2)+\log_2(16)+\log_8(4)$

$\log_2(8)-\log_2(\sqrt[3]{32})+\log_2(9)-\log_2(3)$

$\log_3\left(\frac{15}{4}\right)+\log_2\left(\frac{1}{27}\right)+\log_2\left(\frac{4}{5}\right)$

$\log 100-\log\left(10^{2017}\right)+\log\left(\frac{1}{10^{100}}\right)$

$\frac{\log(0,008)-4\log(0,3)}{\log 9-\log 8}$

EXERCICE 32

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$5(\log_2 x)^2-\log_2 x-4=0$; $(\log x)^2-2\log x=0$

$-3\left(\log_{\frac{5}{4}} x\right)^2+\log_{\frac{5}{4}} x+10=0$

$\log_3 x=\frac{1}{2}+\log_9(4x+15)$

2) Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases}\log_3\left(\frac{1}{x^2}\right)-\log_3 y^4=-4\\ \log_3\left(x^3y^5\right)=3\end{cases}$$

EXERCICE 33

1) Résoudre les équations suivantes :

$(\log_{\sqrt{2}} x).(\log_2 x).(\log_{2\sqrt{2}} x).(\log_4 x)=54$

$\log_2 x=1-(x-2)^2$; $\log_2 x=\frac{1}{2}+\log_4(4x+10)$

2) Résoudre les inéquations suivantes :

$\log_{\frac{3}{4}}(3x+2)>2$; $\log_5(x)+\log_5(2x-3)\geq 1$

$\log_2 x\leq\log_8(5x-4)$; $\log_x\left(x^2-\frac{1}{4}\right)>4$

For more visit: L9ray.com

EXERCICES DE PERFECTIONNEMENT

EXERCICE 34

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 (\ln x)^2 & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue à droite en 0.

2) a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f(x) = 4x\left(\sqrt{x}\ln\left(\sqrt{x}\right)\right)^2$$

b) Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0 et interpréter géométriquement le résultat.

3) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et étudier son signe.

4) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

EXERCICE 35

1) Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$g(x) = 1 - \frac{1}{x} + \ln x$$

a) Étudier les variations de la fonction g.

b) Calculer $g(1)$ et en déduire que $g(x) > 0$ pour tout $x > 1$ et $g(x) < 0$ pour tout $0 < x < 1$.

2) Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = (x-1)\ln x$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

a) Calculer : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$.

c) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\ f'(x) = g(x)$.

d) Dresser le tableau de variations de f.

e) Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l'inéquation : $f(x) \geq x - 1$.

e) Construire la courbe $\mathscr{C}_f$.

EXERCICE 36

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = \frac{x}{2} + 2 + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Montrer que : $D_f =]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$.

2) Calculer : $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$ puis interpréter graphiquement les résultats obtenus.

3) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = \frac{x}{2} + 2$ est une asymptote oblique de a courbe $\mathscr{C}_f$ aux voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

c) Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite (D).

4) Montrer que le point $I(0;2)$ est un centre de symétrie pour la courbe $\mathscr{C}_f$.

5) Construire la courbe $\mathscr{C}_f$.

EXERCICE 37

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = e^3 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \sqrt[3]{e^2 u_n^2} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n \geq e^2$.

2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = \ln(u_n) - 2$.

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.

b) Exprimer v_n et u_n en fonction de n.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

For more visit: L9ray.com

L9RAY

4 EXERCICES ET PROBLÈMES

EXERCICE 38

Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x \ln x}{1+\ln x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Montrer que : $D_f = \left[0;\frac{1}{e}\right[\cup \left]\frac{1}{e};+\infty\right[$.

2) Montrer que f est continue à droite en 0.

3) Calculer : $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{e}\right)^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{e}\right)^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

4) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$.

5) Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu.

6) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et en déduire la nature de la branche infinie au voisinage de $+\infty$.

b) Montrer que la droite (Δ) est une asymptote oblique de la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

7) a) Montrer que pour tout $x \in D_f - \{0\}$:

$$f'(x) = \frac{\ln^2 x + \ln x + 1}{(1+\ln x)^2}$$

et en déduire que : $(\forall x \in D_f - \{0\})\ f'(x) > 0$.

b) Dresser le tableau de variations de f.

8) Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

9) a) Montrer que pour tout $x \in D_f - \{0\}$:

$$f''(x) = \frac{\ln^2 x - 1}{x(1+\ln x)^4}$$

b) Étudier la concavité de la courbe $\mathscr{C}_f$.

10) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$.

11) Soit g la restriction de f sur $I = \left]\frac{1}{e};+\infty\right[$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b) Donner le tableau de variations de g^{-1}.

c) Déterminer $\left(g^{-1}\right)'\left(\frac{e}{2}\right)$.

c) Tracer $\mathscr{C}_{g^{-1}}$ dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

EXERCICE 39

Première Partie :

Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$g(x) = (\ln x)^3 + \ln x - 2$$

a) Montrer que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Calculer $g(e)$ et en déduire le signe de $g(x)$

Deuxième Partie :

On considère la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = \ln x - \frac{1}{\ln x} + \frac{1}{(\ln x)^2}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Montrer que : $D_f =]0;1[\cup]1;+\infty[$.

2) Calculer les limites de f aux bornes de D_f.

3) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$.

4) a) Montrer que : $(\forall x \in D_f)\ f'(x) = \dfrac{g(x)}{x(\ln x)^3}$.

b) Dresser le tableau de variations de f.

5) Écrire l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse e.

6) Montrer qu'il existe un unique réel α dans l'intervalle $\left]\frac{1}{e^e};\frac{1}{e}\right[$ tel que : $f(\alpha) = 0$.

7) Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la courbe (Γ) d'équation $y = \ln x$.

8) Tracer les courbe $\mathscr{C}_f$ et (Γ) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

For more visit: L9ray.com

EXERCICE 40

Première Partie :

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $h(x) = x - \ln x$.

1) Calculer : $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$.

2) Calculer $h'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ puis dresser le tableau de variations de h.

3) En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\ x - \ln x \geq 1$.

Deuxième Partie :

On considère la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{x - \ln x} \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Vérifier que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Que peut-on déduire ?

3) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

4) Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

5) a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\ f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2}$

b) Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f.

6) Démontrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ coupe la droite (Δ) d'équation $y = x$ en deux points dont on déterminera les coordonnées.

7) a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f(x) - x = \frac{x(1 - h(x))}{h(x)}$$

b) En déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite (Δ).

8) Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

9) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$.

Troisième Partie :

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = \frac{1}{5} \text{ et } u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 \leq u_n \leq 1$.

2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante. (On pourra utiliser le résultat de 7) de la deuxième partie)

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.

EXERCICE 41

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle par $I = [0;+\infty[$: $f(x) = \ln\left(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x}\right)$ et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$. Que peut-on déduire ?

3) Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.
(On pourra poser : $t = x + \sqrt{x^2 + 2x}$).

4) a) Montrer que : $(\forall x \in]0;+\infty[)\ f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 2x}}$.

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

5) Construire la courbe $\mathscr{C}_f$.

6) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J qu'on déterminera.

b) Donner le tableau de variations de f^{-1}.

c) Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable en $\ln\left(2 + \sqrt{3}\right)$ puis déterminer $\left(f^{-1}\right)'\left(\ln\left(2 + \sqrt{3}\right)\right)$.

d) Tracer $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

For more visit: L9ray.com

L9RAY

4 EXERCICES ET PROBLÈMES

EXERCICE 42

Soit f et g les fonctions numériques définies sur l'intervalle $[1;+\infty[$ par :

$$f(x)=\ln(x+1)-\ln x-\frac{1}{x+1}$$

et : $g(x)=\frac{1}{x}-\ln(x+1)+\ln x$

1) a) Montrer que pour tout $x\in[1;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{-1}{x(x+1)^2} \quad \text{et} \quad g'(x)=\frac{-1}{x^2(x+1)}$$

b) Dresser les tableaux de variations de f et g.

c) En déduire que pour tout $x\in[1;+\infty[$:

$$\frac{1}{x+1}\le \ln(x+1)-\ln x\le \frac{1}{x}$$

2) On considère la suite numérique $(u_n)_{n\ge1}$ définie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par : $u_n=1+\frac{1}{2}+..+\frac{1}{n}$

a) Calculer u_1, u_2 et u_3.

b) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ u_n\ge\ln(n+1)$.

c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

EXERCICE 43

Soit f la fonction numérique définie sur $[1;+\infty[$ par :

$$f(x)=x\sqrt{\ln x}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a) Vérifier que pour tout $x\in]1;+\infty[$:

$$\frac{f(x)}{x-1}=x\sqrt{\frac{\ln x}{x-1}\times\frac{1}{x-1}}$$

b) Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 1 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) Montrer que : $(\forall x\in]1;+\infty[)\ f'(x)=\frac{2\ln x+1}{2\sqrt{\ln x}}$

Puis dresser le tableau de variation de f.

3) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ puis déterminer la nature de la branche infinie de la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

4) a) Montrer que :

$$(\forall x\in]1;+\infty[)\ f'(x)=\frac{2\ln x-1}{4x\sqrt{\ln^3 x}}$$

b) En déduire que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un unique point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.

5) Construire la courbe $\mathscr{C}_f$.

6) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J qu'on déterminera.

b) Donner le tableau de variations de f^{-1}.

c) Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable en e puis calculer $\left(f^{-1}\right)'(e)$.

d) Tracer $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

EXERCICE 44

Première Partie :

Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$g(x)=\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)+\frac{x}{x+2}$$

1) Calculer : $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$.

2) Calculer $g'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$ puis dresser le tableau de variations de g.

3) En déduire que : $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)\ g(x)>0$.

Deuxième Partie :

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\begin{cases} f(x)=x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) & \text{si } x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

2) a) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

For more visit: L9ray.com

b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x+2$ est une asymptote oblique de a courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

3) Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0 puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

4) a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\ f'(x) = g(x)$.

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

5) Construire la courbe $\mathscr{C}_f$.

EXERCICE 45

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x\ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right) & \text{si} \quad x>0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Montrer que f est continue à droite en 0.

2) Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$. (Poser : $X = \dfrac{2}{x}$)

Que peut-on déduire à propos de la courbe $\mathscr{C}_f$?

4) a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ puis vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\ f''(x) = \dfrac{-4}{x(x+2)^2}$

b) Étudier les variations de la fonction f' et déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$.

c) En déduire le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f.

5) Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.

6) Construire (T) et $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

7) Soit h la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$h(x) = \frac{2x}{x+2}$$

a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\ f(x) - h(x) = xf'(x)$.

b) En déduire la position relative des courbes des fonctions h et f.

8) On propose dans cette question la détermination de toutes les fonctions g dérivables sur $]0;+\infty[$ et vérifiant la relation (R) suivante :

$$(\forall x \in]0;+\infty[)\ g(x) - xg'(x) = h(x)$$

On pose : $G(x) = \dfrac{g(x)}{x}$ pour tout $x \in]0;+\infty[$.

a) Montrer que la fonction g vérifie la relation (R) si, et seulement si :

$$(\forall x \in]0;+\infty[)\ G'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x}$$

b) En déduire les fonctions g vérifiant (R).

EXERCICE 46

Première Partie :

Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$g(x) = x - 2\ln x$$

1) Calculer : $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2) Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ puis dresser le tableau de variations de g.

3) En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\ g(x) > 0$.

Deuxième Partie :

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = x + 1 - \ln^2 x$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) a) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (poser : $x = X^2$)

b) Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

For more visit: L9ray.com

c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f(x) \geq x \Leftrightarrow x \in \left[\frac{1}{e}; e\right]$$

3) a) Montrer que : $\left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*\right)\ f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$.

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

4) a) Montrer que : $\left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*\right)\ f''(x) = \dfrac{2(-1+\ln x)}{x^2}$.

b) Étudier la concavité de la courbe $\mathscr{C}_f$.

5) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$.

6) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J qu'on déterminera.

c) Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable en 2 puis calculer $\left(f^{-1}\right)'(2)$.

d) Tracer $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Troisième Partie :

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right)\ \dfrac{1}{e} \leq u_n \leq e$.

2) Montrer que la suite (u_n) est croissante. (On pourra utiliser le résultat de 2) c) de la deuxième partie).

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.

EXERCICE 47

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = \dfrac{2+\ln x}{\sqrt{x}}$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f.

3) a) Montrer que : $\left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*\right)\ f''(x) = \dfrac{3\ln x - 2}{4x^2\sqrt{x}}$.

b) Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un unique point d'inflexion que l'on déterminera.

4) a) Déterminer l'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.

b) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$.

EXERCICE 48

Première Partie :

Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$g(x) = 2x^2 - \left(x^2+1\right)\ln\left(x^2+1\right)$$

1) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:

$$g'(x) = 2x\left[1 - \ln\left(x^2+1\right)\right]$$

b) Montrer que la fonction g est strictement croissante sur $\left[0;\sqrt{e-1}\right]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $\left[\sqrt{e-1};+\infty\right[$.

c) Donner le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}^+$.

3) Montrer qu'il existe un unique réel α dans l'intervalle $\left[\sqrt{e-1};\sqrt{e^2-1}\right]$ tel que : $g(\alpha) = 0$.

4) En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}^+$.

Deuxième Partie :

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Montrer que la fonction f est dérivable à droite en 0 puis déterminer $f_d'(0)$.

2) a) Montrer que : $\left(\forall x \geq 1\right)\ 0 \leq f(x) \leq \dfrac{\ln\left(2x^2\right)}{x}$.

For more visit: L9ray.com

b) En déduire : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3) a) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)\ f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2(1+x^2)}$.

b) Dresser le tableau de variations de f.

4) Montrer que : $f(\alpha)=\dfrac{2\alpha}{1+\alpha^2}$.

5) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

EXERCICE 49

Première Partie :

Soit h la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$h(x)=x+1+\ln x$$

1) a) Calculer $h'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$

b) Donner le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) Montrer que l'équation $h(x)=0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}_+^*$ puis vérifier que : $\dfrac{1}{e^2}<\alpha<\dfrac{1}{e}$.

3) En déduire que $h(x)>0$ pour tout $x\in]\alpha;+\infty[$ et que $h(x)<0$ pour tout $x\in]0;\alpha[$ puis dresser le tableau de signe de la fonction h sur $\mathbb{R}_+^*$.

Deuxième Partie :

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x\ln x}{x+1} & \text{si} \quad x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Montrer que f est continue à droite en 0.

2) Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3) Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

4) a) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)\ f'(x)=\dfrac{h(x)}{(x+1)^2}$

b) Vérifier que $f(\alpha)=-\alpha$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f.

6) a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$f''(x)=-\frac{2x\ln x+(x^2-1)}{x(x+1)^3}$$

b) Montrer que $2x\ln x$ et x^2-1 ont le même signe sur chacun des intervalles $]0;1[$ et $]1;+\infty[$.

c) Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un unique point d'inflexion que l'on déterminera.

7) Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

8) Construire (T) et $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

9) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I=]\alpha;+\infty[$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b) Vérifier que $g\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)=1$.

c) Montrer que la fonction g^{-1} est dérivable en 1 et que : $\left(g^{-1}\right)'(1)=\dfrac{1}{\alpha}$.

EXERCICE 50

Soit $a\in\mathbb{R}_+^*$. On considère la fonction numérique f définie par : $f(x)=2\ln\dfrac{x}{x+a}+\dfrac{a}{x}+\dfrac{a}{x+a}$.

1) Montrer que : $D_f=]-\infty;-a[\cup]0;+\infty[$.

2) Montrer que pour tout $x\in D_f$:

$$(-a-x)\in D_f \quad \text{et} \quad f(-a-x)+f(x)=0$$

Interpréter géométriquement ce résultat.

3) a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$f(x)=\frac{2x\ln x+a}{x}+\frac{a}{x+a}-2\ln(x+a)$$

b) En déduire $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ puis montrer que :

$$\lim_{\substack{x\to-a\\x<-a}} f(x)=-\infty$$

For more visit: L9ray.com

L9RAY

c) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

4) Étudier les variations de la fonction f.

EXERCICE 51

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{1+(\ln x)^2} & \text{si } x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Montrer que f est continue à droite en 0.

2) Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3) a) Montrer que pour tout $x\in]0;+\infty[$:

$$f(x)=\frac{1}{\dfrac{1}{x}+\left(\dfrac{2\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2}$$

b) En déduire que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

c) Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$

4) a) Montrer que pour tout $x\in]0;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{(\ln x-1)^2}{(1+\ln^2 x)^2}$$

b) Dresser le tableau de variations de f.

4) a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$ puis vérifier que : $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)\ f''(x)=\dfrac{-4}{x(x+2)^2}$

b) Étudier les variations de la fonction f' et déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$.

c) En déduire le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f.

5) Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

6) Montrer que : $(\forall x\in]0;+\infty[)\ f(x)\le x$.

Interpréter géométriquement ce résultat.

7) Construire (T) et $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

8) Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$u_0=1$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ 1\le u_n\le e$.

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

(On pourra utiliser le résultat de la question 6).

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.

EXERCICE 52

Une vibration sonore se mesure par sa fréquence et donc son intensité (I) exprimée en W/m^2. Le décibel (dB) est, quant à lui, utilisé pour exprimer le rapport de deux intensités acoustiques. On définit le nombre de décibels, que l'on note N, engendré par une vibration sonore d'intensité I par : $N=10\log\left(\dfrac{I}{I_0}\right)$.

(I_0 est la plus faible intensité perceptible par l'oreille humaine ; I_0 est voisin de $10^{-12}\ W/m^2$).

1) Que vaut N lorsque $I=I_0$? Lorsque $I=10I_0$?

2) Le chuchotement (discret) de deux élèves en classe est voisin de $20\,dB$. Qu'en est-il de l'intensité sonore émise par rapport à I_0 ? Même question, pour une conversation de deux personnes, émettant $50\,dB$.

3) On dit que le seuil de douleur est atteint à partir de $120\,dB$. Qu'en est-il alors de l'intensité émise par rapport à I_0 ?

4) Le dernier concert des Stringers in the night, a été mesuré de $105\,dB$!

Qu'en est-il du rapport $\dfrac{I}{I_0}$?



For more visit: L9ray.com

EXERCICE 53

Première Partie :

Soit u la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$u(x)=x^2-2+\ln x$$

1) Étudier les variations de la fonction u et préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.

2) a) Montrer que l'équation $u(x)=0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

b) Vérifier que : $1,3<\alpha<1,4$

(on donne : $\ln(1,3)\approx 0,26$ et $\ln(1,3)\approx 0,34$).

3) Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de la variable x.

4) Justifier que : $\ln\alpha=1-\alpha^2$.

Deuxième Partie :

Soit f la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=\sqrt{x^2+(2-\ln x)^2}$$

1) Exprimer $f'(x)$ en fonction de $u(x)$ pour tout x de l'intervalle $]0;+\infty[$.

2) En déduire les variations de f sur $]0;+\infty[$.

Troisième Partie :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, on note :

- (Γ) la courbe représentative de la fonction ln (logarithme népérien) ;
- A le point de coordonnées $(0;2)$;
- M le point de (Γ) d'abscisse $x\in]0;+\infty[$.

1) Montrer que la distance AM est donnée par :

$$AM=f(x)$$

2) a) Montrer que la distance AM est minimale en un point de (Γ), noté P, dont on précisera les coordonnées.

b) Montrer que : $AP=\alpha\sqrt{1+\alpha^2}$.

3) La droite (AP) est-elle perpendiculaire à la tangente à (Γ) au point P ? Justifier la réponse

EXERCICE 54

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 1}$ définie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par : $u_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}$.

1) Calculer : u_1 ; u_2 ; u_3 ; u_4.

2) Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2(n+1)(2n+1)}$$

En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

3) Soit f la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\ln x-(x-1)$

a) Étudier les variations de la fonction f puis en déduire que : $(\forall x\in]0;+\infty[)\ \ln x\leq x-1$.

b) En utilisant le changement de variable $X=\frac{1}{x}$ dans l'inégalité précédente, montrer que :

$$(\forall x\in]0;+\infty[)\ 1-\frac{1}{x}\leq\ln x$$

c) Déduire des deux questions précédentes que pour tout $p\in\mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{p+1}\leq\ln\left(\frac{p+1}{p}\right)\leq\frac{1}{p}.$$

4) Soit n un entier naturel non nul.

a) Écrire l'encadrement du 3) c) pour tous les valeurs de p allant de n à $2n-1$.

b) En additionnant membre à membre les inégalités obtenues, démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$u_n\leq\ln 2\leq u_n+\frac{1}{2n}$$

c) En déduire un encadrement de $\ln 2-u_n$ puis prouver que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers $\ln 2$.

For more visit: L9ray.com

PROBLÈMES DE SYNTHÈSE

SE PRÉPARER AUX DEVOIRS

DEVOIR 1

Première Partie :

On considère les fonctions numériques g et h définies sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$g(x)=x-1-\ln x \quad \text{et} \quad h(x)=x+(x-2)\ln x$$

1) a) Calculer $g'(x)$ pour tout $x\in]0;+\infty[$ puis étudier les variations de la fonction g.

b) En déduire que : $(\forall x\in]0;+\infty[)\ g(x)\geq 0$.

2) a) Vérifier que pour tout $x\in]0;+\infty[$:

$$h(x)=1+g(x)+(x-1)\ln x$$

b) Montrer que : $(\forall x\in]0;+\infty[)\ (x-1)\ln x\geq 0$.

c) En déduire que : $(\forall x\in]0;+\infty[)\ h(x)>0$.

Deuxième Partie :

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=1+x\ln x-(\ln x)^2$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis étudier la branche infinie de la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

2) a) Montrer que : $(\forall x\in]0;+\infty[)\ f'(x)=\dfrac{h(x)}{x}$.

b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

3) Soit (Δ) la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A(1;1)$.

a) Montrer que $y=x$ est une équation cartésienne de la droite (Δ).

b) Vérifier que pour tout $x\in]0;+\infty[$:

$$f(x)-x=(\ln x-1)g(x)$$

c) Étudier le signe de $f(x)-x$ puis en déduire la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite (Δ).

4) Construire (Δ) et $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

(On admet que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion dont l'abscisse appartient à $\left]1;\dfrac{3}{2}\right[$)

Troisième Partie :

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0=\sqrt{2} \text{ et } u_{n+1}=f(u_n) \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}$$

1) Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ 1<u_n<e$.

2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante. (On pourra utiliser le résultat de **3)** c) de la deuxième partie)

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.

DEVOIR 2

Première Partie :

Soit g fonctions numérique définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x)=x-1+2\ln x$$

1) Étudier les variations de la fonction g.

2) Calculer $g(1)$ puis déterminer le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

3) En déduire que pour tout $x\in]0;+\infty[$:

$$x>1\Rightarrow g\left(\frac{1}{x}\right)<0 \quad \text{et} \quad 0<x<1\Rightarrow g\left(\frac{1}{x}\right)>0$$

Deuxième Partie :

Soit f fonctions numérique définie sur $[0;+\infty[$ par :

For more visit: L9ray.com

$$\begin{cases} f(x) = x - x^2 \ln x & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité : $2cm$)

1) Montrer que la fonction f est dérivable à droite en 0.

2) Montrer que : $(\forall x \in]0;+\infty[)\ f'(x) = xg\left(\frac{1}{x}\right)$.

3) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

4) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$.

5) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α tel que : $\frac{7}{4} < \alpha < 2$.

6) Soit (Δ) la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point O.

a) Montrer que $y = x$ est une équation cartésienne de la droite (Δ).

b) Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite (Δ).

7) Construire (Δ) et $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Troisième Partie :

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$u_0 \in]0;1[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 < u_n < 1$.

2) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.

DEVOIR 3

Soit f la fonction numérique définie sur $]0;2[$ par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{x}{2-x}\right)$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$.

b) Montrer que : $(\forall x \in]0;2[)\ f'(x) = \frac{2}{x(2-x)}$.

c) Dresser le tableau de variations de f.

2) a) Montrer que le point $A(1;0)$ est un centre de symétrie pour la courbe $\mathscr{C}_f$.

b) Écrire l'équation de la tangent (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A(1;0)$.

3) Pour tout $x \in]0;2[$, on pose : $\varphi(x) = f(x) - x$.

a) Montrer que : $\varphi\left(\frac{3}{2}\right) < 0$ et $\varphi\left(\frac{7}{4}\right) > 0$.

(On prend : $\ln 3 \approx 1{,}1$ et $\ln 7 \approx 1{,}94$)

b) En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α tel que : $\frac{3}{2} < \alpha < \frac{7}{4}$ puis interpréter géométriquement le résultat.

4) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

DEVOIR 4

Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Montrer que : $D_f = [0;1[\cup]1;+\infty[$.

2) Calculer les limites aux bornes de D_f.

3) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$.

4) Montrer que f est continue à droite en 0.

5) Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu.

6) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D_f - \{0\}$.

7) Dresser le tableau de variations de f.

8) Écrire l'équation de la tangent (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A(e;0)$ puis construire la courbe $\mathscr{C}_f$.

For more visit: L9ray.com

DEVOIR 5

On considère la fonction numérique f définie par :

$$f(x)=\frac{1}{x(1-\ln x)}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. (Unité : $2cm$)

Première Partie :

1) Montrer l'ensemble de définition de la fonction f est : $D_f=]0;e[\cup]e;+\infty[$

2) a) Calculer $\lim\limits_{x\to e^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to e^-} f(x)$. Interpréter géométriquement les résultats obtenus.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

En déduire que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet, au voisinage de $+\infty$, une asymptote que l'on déterminera.

c) Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ puis interpréter géométriquement ce résultat.

3) a) Montrer que pour tout $x\in D_f$:

$$f'(x)=\frac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$$

b) Montrer que la fonction f est décroissante sur l'intervalle $]0;1]$ et croissante sur chacun des intervalles $[1;e[$ et $[e;+\infty[$.

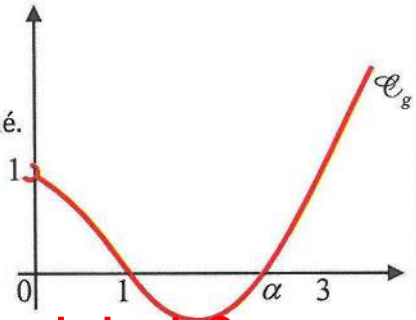
c) Dresser le tableau de variations de f sur D_f.

Deuxième Partie :

Soit g fonctions numérique définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x)=1-x^2(1-\ln x)$$

et soit $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé. (Voir figure)



1) a) Déterminer graphiquement le nombre de solutions dans $]0;+\infty[$ de l'équation : $g(x)=0$.

b) On donne le tableau de valeurs suivant :

x	2,1	2,2	2,3	2,4
$g(x)$	- 0,14	- 0,02	0,12	0,28

Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution α telle que : $g(x)=0$.

2) a) Vérifier que pour tout $x\in D_f$:

$$f(x)-x=\frac{g(x)}{x(1-\ln x)}$$

b) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y=x$ coupe la courbe $\mathscr{C}_f$ aux deux points d'abscisses 1 et α.

c) Déterminer, à partir de la courbe $\mathscr{C}_g$, le signe de $g(x)$ sur $[1;\alpha]$ et montrer que $f(x)-x\le 0$ pour tout $x\in[1;\alpha]$.

3) Construire dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, la droite (Δ) et la courbe $\mathscr{C}_f$.

Troisième Partie :

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$u_0=2$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

1) Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ 0\le u_n\le\alpha$.

2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

(On pourra utiliser le résultat de la question 2) c) de la deuxième partie)

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.

For more visit: L9ray.com

SE PRÉPARER AUX EXAMENS

PROBLÈME 1

Première Partie :

Soit g fonctions numérique définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x)=x^2+x-2+2\ln x$$

1) Vérifier que : $g(1)=0$.

2) À partir du tableau de variations de la fonction g en-dessous :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

Montrer que $g(x)\le 0$ pour tout $x\in]0;1]$ et que $g(x)\ge 0$ pour tout $x\in[1;+\infty[$.

Deuxième Partie :

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=x+\left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. (Unité : $1cm$)

1) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) a) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

b) Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction la droite (D) d'équation $y=x$.

3) a) Montrer que : $(\forall x\in]0;+\infty[)\ f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$.

b) En déduire que la fonction f est décroissante sur l'intervalle $]0;1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$.

c) Dresser le tableau de variations de f sur $]0;+\infty[$.

4) a) Résoudre dans l'intervalle $]0;+\infty[$ l'équation :

$$\left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x=0$$

b) En déduire que $\mathscr{C}_f$ coupe la droite (D) en deux points dont on déterminera les coordonnées.

c) Montrer que pour tout $x\in[1;2]$: $f(x)\le x$ et en déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite (D) sur l'intervalle $[1;2]$.

5) Construire (D) et $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

(On admet que $\mathscr{C}_f$ possède un seul point d'inflexion dont l'abscisse est comprise entre $2,4$ et $2,5$).

Troisième Partie :

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$u_0=\sqrt{3}$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1) Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ 1\le u_n\le 2$.

2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

(On pourra utiliser le résultat de la question **4)** c) de la deuxième partie).

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.

Examen National 2017 (Session Normale)

PROBLÈME 2

Première Partie :

Soit g fonctions numérique définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x)=\frac{2}{x}-1+2\ln x$$

Le tableau en-dessous donne les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0;+\infty[$:

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	$g(1)$	↗ $+\infty$

For more visit: L9ray.com

L9RAY

1) Calculer $g(1)$.

2) Déduire à partir du tableau que :

$$g(x) > 0 \text{ pour tout } x \in]0;+\infty[$$

Deuxième Partie :

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = 3 - 3x + 2(x+1)\ln x$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. (Unité : $2\,cm$)

1) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ et donner une interprétation géométrique de ce résultat.

2) a) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. (Pour calculer la limite, on pourra écrire $f(x)$ sous la forme :

$$f(x) = x\left[\frac{3}{x} - 3 + 2\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln x\right])$$

b) Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinages de $+\infty$.

3) a) Montrer que : $(\forall x \in]0;+\infty[)\ f'(x) = g(x)$.

b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f sur $]0;+\infty[$.

4) a) Montrer que $I(1;0)$ est un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.

b) Montrer que $y = x - 1$ est une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ en ce point.

c) Construire, dans le même repère, la droite (T) et la courbe $\mathscr{C}_f$.

5) Résoudre graphiquement dans l'intervalle $]0;+\infty[$ l'inéquation : $(x+1)\ln x \geq \frac{3}{2}(x-1)$

Examen National 2016 (Session De Rattrapage)

PROBLÈME 3

Première Partie :

Soit g fonctions numérique définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x) = 1 - x + x\ln x$$

1) a) Montrer que $g'(x) = \ln x$ pour tout $x \in]0;+\infty[$.

b) Montrer que g est décroissante sur $]0;1]$ et que g est croissante sur $[1;+\infty[$.

2) Calculer $g(1)$ et en déduire que :

$$(\forall x \in]0;+\infty[)\ g(x) \geq 0$$

Deuxième Partie :

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{2\ln x}{x}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. (Unité : $1\,cm$)

1) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ et donner une interprétation géométrique de ce résultat.

(Pour calculer la limite, remarquer que :

$$f(x) = \frac{3x^2 - 1 - 2x\ln x}{x^2}$$

2) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$. En déduire la nature de la branche infinie de $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

3) a) Montrer que : $(\forall x \in]0;+\infty[)\ f'(x) = \frac{2g(x)}{x^3}$.

b) Interpréter géométriquement le résultat $f'(1) = 0$.

c) Montrer que f est croissante sur $]0;+\infty[$.

4) Construire $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

(On admet que $\mathscr{C}_f$ a deux points d'inflexion dont l'un a pour abscisse 1 et l'autre a une abscisse comprise entre 2 et 2,5. On prend : $f(0,3) \approx 0$).

5) Soit h la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$h(x) = 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{\ln(x^2)}{|x|}$$

For more visit: L9ray.com

a) Montrer que la fonction f est paire et que :

$$(\forall x \in]0;+\infty[)\ \ h(x)=f(x)$$

b) Construire, dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, la courbe $\mathscr{C}_h$ de la fonction h.

Examen National 2015 (Session De Rattrapage)

PROBLÈME 4

Première Partie :

Soit g fonctions numérique définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x)=1-\frac{1}{x^2}+\ln x$$

1) Montrer que : $(\forall x \in]0;+\infty[)\ \ g'(x)=\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x}$.

En déduire que g est croissante sur $]0;+\infty[$.

2) Vérifier que $g(1)=0$ et en déduire que :

- $g(x)\le 0$ pour tout $x \in]0;1]$.
- $g(x)\ge 0$ pour tout $x \in [1;+\infty[$.

Deuxième Partie :

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=(1+\ln x)^2+\frac{1}{x^2}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. (Unité : $1cm$)

1) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$.

Interpréter géométriquement ce résultat.

2) a) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(1+\ln x)^2}{x}=0$ puis montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$. (On pourra poser $t=\sqrt{x}$)

c) Déterminer la branche infinie de la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

3) a) Montrer que : $(\forall x \in]0;+\infty[)\ \ f'(x)=\frac{2g(x)}{x}$

puis en déduire que :

- la fonction f est décroissante sur $]0;1]$.
- la fonction f est croissante sur $[1;+\infty[$.

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $]0;+\infty[$ puis en déduire que :

$$(\forall x \in]0;+\infty[)\ \ f(x)\ge 2$$

4) Construire la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

(On admet que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet unique point d'inflexion que l'on ne cherchera pas à déterminer)

Examen National 2014 (Session Normale)

PROBLÈME 5

Première Partie :

Soit g fonctions numérique définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x)=x^2-x-\ln x$$

1) a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$2x^2-x-1=(2x+1)(x-1)$$

b) Montrer que pour tout $x \in]0;+\infty[$:

$$g'(x)=\frac{2x^2-x-1}{x}$$

et en déduire que la fonction g est croissante sur $]0;1]$ et décroissante sur $[1;+\infty[$.

2) Montrer que $g(x)\ge 0$ pour tout $x \in]0;+\infty[$.

(Remarquer que : $g(1)=0$)

Deuxième Partie :

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=x^2-1-(\ln x)^2$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. (Unité : $1cm$)

1) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ puis interpréter géométriquement ce résultat.

b) Montrer que :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$$

For more visit: L9ray.com

(Remarquer que : $f(x)=x^2\left(1-\frac{1}{x^2}-\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\right)$)

c) En déduire que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ dont on déterminera la direction.

2) a) Montrer que pour tout $x\in]0;+\infty[$:

$$f'(x)=2\left(\frac{x^2-\ln x}{x}\right)$$

b) Vérifier que pour tout $x\in]0;+\infty[$:

$$\frac{g(x)}{x}+1=\frac{x^2-\ln x}{x}$$

et en déduire que f est croissante sur $]0;+\infty[$.

3) a) Montrer que $y=2x-2$ est une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $A(1;0)$.

b) Construire, dans le même repère, la droite (T) et la courbe $\mathscr{C}_f$. (On admet que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet $A(1;0)$ comme unique point d'inflexion).

Examen National 2013 (Session De Rattrapage)

PROBLÈME 6

Première Partie :

Soit g fonctions numérique définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x)=x^2-1+2x^2\ln x$$

1) Montrer que x^2-1 et $2x^2\ln x$ ont le même signe sur l'intervalle $]0;1[$ puis en déduire que $g(x)\le 0$ pour tout $x\in]0;1[$.

2) Montrer que x^2-1 et $2x^2\ln x$ ont le même signe sur $]1;+\infty[$ puis en déduire que $g(x)\ge 0$ pour tout $x\in]1;+\infty[$.

Deuxième Partie :

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=(x^2-1)\ln x$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. (Unité : $2\,cm$)

1) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ puis interpréter géométriquement ce résultat.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis montrer que :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$. (On pourra écrire $\frac{f(x)}{x}$ sous la forme : $\frac{f(x)}{x}=\left(\frac{x^2-1}{x}\right)\ln x$).

En déduire que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ dont on déterminera la direction.

2) a) Montrer que : $(\forall x\in]0;+\infty[)\ f'(x)=\frac{g(x)}{x}$ et interpréter géométriquement $f'(1)=0$.

b) En déduire que la fonction f est décroissante sur l'intervalle $]0;1[$ et croissante sur $]1;+\infty[$.

c) Dresser le tableau de variations de la fonction f puis montrer que : $(\forall x\in]0;+\infty[)\ f(x)\ge 0$.

3) Construire la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Examen National 2012 (Session Normale)

PROBLÈME 7

Première Partie :

Soit g fonctions numérique définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x)=x^3-x-2\ln x+3$$

1) a) Vérifier que pour tout $x\in]0;+\infty[$:

$$3x^3-x-2=(x-1)(3x^2+3x+2)$$

b) Montrer que pour tout $x\in]0;+\infty[$:

$$g'(x)=\frac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$$

2) a) Vérifier que : $(\forall x\in]0;+\infty[)\ \frac{3x^2+3x+2}{x}>0$

b) En déduire que le signe de $g'(x)$ est celui de $x-1$

For more visit: L9ray.com

sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

3) a) Montrer que la fonction g st décroissante sur $]0;1]$ et croissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$.

b) En déduire que $g(x)>0$ pour tout $x\in]0;+\infty[$.

Deuxième Partie :

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=x-1+\frac{x-1+\ln x}{x^2}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. (Unité : $1cm$)

1) Montrer que : $(\forall x\in]0;+\infty[)\ f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$

puis en déduire que f est croissante sur $]0;+\infty[$.

2) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ puis interpréter géométriquement ce résultat.

b) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1+\ln x}{x^2}=0$ puis que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

c) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y=x-1$ est une asymptote oblique de la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$

3) a) Montrer que $y=3(x-1)$ est une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point de coordonnées $(1;0)$.

b) Construire, dans le même repère, la droite (T) et la courbe $\mathscr{C}_f$. (On admet que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet unique point d'inflexion que l'on ne cherchera pas à déterminer).

Examen National 2010 (Session De Rattrapage)

PROBLÈME 8

Première Partie :

Soit g fonctions numérique définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x)=x^3-1-2\ln^2 x+2\ln x$$

Le tableau suivant donne les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0;+\infty[$:

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	$\|$	$+$	
$g(x)$	$\|$ $-\infty$	↗	$+\infty$

1) Calculer $g(1)$.

2) À partir du tableau de variations de la fonction g, déterminer le signe de $g(x)$ sur $]0;1]$ et $[1;+\infty[$.

Deuxième Partie :

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2x^2}+\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. (Unité : $1cm$)

1) a) Vérifier que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

b) Montrer que la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y=x-\frac{1}{2}$ est une asymptote de $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

c) Déterminer la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite $(\mathscr{D})$.

2) Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ puis interpréter géométriquement ce résultat.

3) a) Montrer que : $(\forall x\in]0;+\infty[)\ f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$.

b) Montrer que f est décroissante sur $]0;1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$.

4) Construire $(\mathscr{D})$ et $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Examen National 2018 (Session De Rattrapage)

For more visit: L9ray.com

L9RAY

5

NOMBRES COMPLEXES (1ÈRE PARTIE)

HISTOIRE

Les nombres complexes tels que nous les connaissons et utilisons aujourd'hui datent du XIXème siècle. Ils étaient cependant connus et utilisés depuis plusieurs siècles sous le nom de nombres imaginaires (terme qui est resté dans l'expression « partie imaginaire ») et sont apparus lorsqu'on a essayé de résoudre les équations du 3ème degré.

La notion de nombre complexe a été introduite par les mathématiciens italiens Jérôme Cardan, Raphaël Bombelli et Tartaglia comme intermédiaire de calcul pour trouver des solutions aux équations polynomiales du troisième degré. Il semblerait que ce soit Héron d'Alexandrie qui ait inventé le nombre impossible. L'aspect géométrique des nombres complexes ne se développe qu'à partir du XIXème siècle avec les travaux de l'abbé Buée et Jean-Robert Argand, puis ensuite Carl Friedrich Gauss et Augustin Louis Cauchy.

Source : https://fr.wikipedia.org

JÉRÔME CARDAN (1501 – 1576)





JEAN - ROBERT ARGAND (1768 – 1822)

CAPACITÉS ATTENDUES

- Maitriser le calcul sur les nombres complexes ;
- Passer de l'écriture algébrique à l'écriture trigonométrique d'un nombre complexe et inversement ;
- Reconnaitre les formules trigonométriques de base en utilisant les nombres complexes ;
- Utiliser les nombres complexes pour résoudre des problèmes géométriques (Alignement, orthogonalité,.....)

PLAN DU COURS

- Activités Préparatoires..... 243
- Connaissances Fondamentales
  - L'ensemble des nombres complexes 251
  - Opérations sur les nombres complexes 252
  - La représentation géométrique d'un nombre complexe 256
  - Conjugué d'un nombre complexe 261
  - Module d'un nombre complexe 263
  - La forme trigonométrique d'un nombre complexe 267
- Techniques Et Astuces 276
- Exercices Et Problèmes
  - Exercices d'application..... 284
  - Exercices de perfectionnement..... 292
  - Problèmes de synthèse..... 296

For more visit: L9ray.com