maxi. maths

Exercices résolus

Mathématiques

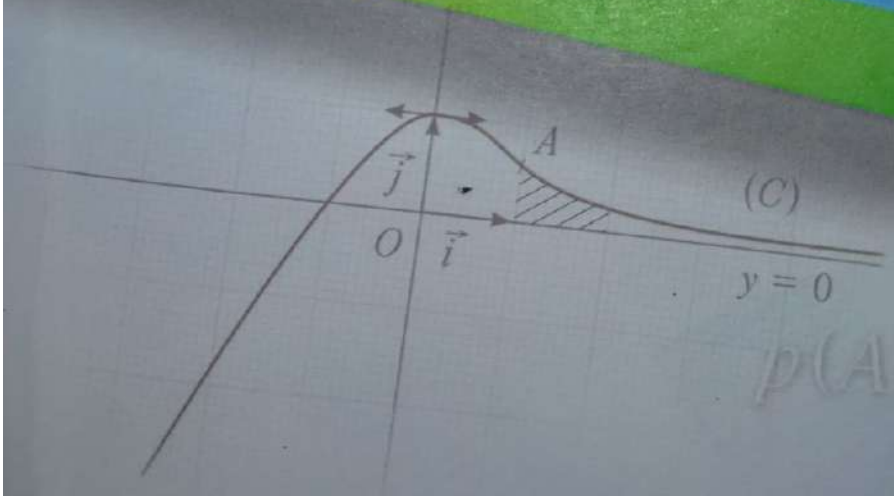
2ème Année Baccalauréat

Sciences Expérimentales et ses filières
Sciences et Technologies Industrielles et ses filières

- Résumés de Cours
- Exercices variés et progressifs
- Problèmes de synthèse
- Extraits de sujets du bac

Tom 2

2ème Bac S-exp



EDITIONS Plus

ProfSalmi.blogspot.com

1 Les nombres complexes

1 Forme algébrique d'un nombre complexe - opérations dans $\mathbb{C}$

$\mathbb{C} = \{z = a + bi / a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}\}$ tel que i est un nombre imaginaire vérifiant $i^2 = -1$.

- i est une solution l'équation $x^2 + 1 = 0$ dans l'ensemble $\mathbb{C}$.
- Tout nombre complexe z s'écrit de manière unique sous la forme $z = a + bi$ où a et b sont deux nombres réels.

$a + bi$ est applée la forme algébrique du nombre complexe z.

- Le réel a est appelé la partie réelle de z et notée : $\mathrm{Re}(z)$
- Le réel b est appelé la partie imaginaire de z et notée: $\mathrm{Im}(z)$
- Si $a = 0$ alors $z = bi$, on dit dans ce cas: z est imaginaire pur.
- L'ensemble des nombres imaginaires purs se note $i\mathbb{R}$ et on a :

$$i\mathbb{R} = \{bi \ / b \in \mathbb{R}\}$$

- $\boxed{z \in \mathbb{R} \iff \mathrm{Im}(z) = 0}$ et $\boxed{z \in i\mathbb{R} \iff \mathrm{Re}(z) = 0}$
- Égalité de deux nombres complexes: soit z et z' deux nombres complexes :

$$z = z' \iff \begin{cases} \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z') \\ \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z') \end{cases}$$

- En particulier : $a + bi = 0 \iff a = b = 0$ où a et b sont deux nombres réels: $z = 0 \iff \mathrm{Re}(z) = 0$ et $\mathrm{Im}(z) = 0$
- Opérations dans l'ensemble $\mathbb{C}$

L'addition et la multiplication des nombres réels se prolongent aux nombres complexes et les règles de calcul restent les mêmes.

Soit $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$ ou a ; b ; a' et b' sont des réels.

$z + z' = (a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i$	(L'addition)
$-z = -(a + bi) = -a - bi$	(L'opposé)
$z \times z' = (a + bi) \times (a' + b'i) = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$	(Le produit)
$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$	(L'inverse)

ProfSalmi.blogspot.com

$\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'} = (a+bi) \times \left(\frac{a'-b'i}{a'^2+b'^2}\right) = \frac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2} + \frac{ba'-ab'}{a'^2+b'^2} i$	(Le quotient)
$z^2 = (a+bi)^2 = a^2 + 2abi + (bi)^2 = a^2 + 2abi - b^2$ $= a^2 - b^2 + 2abi$	identités remarquables
$(z+z')^2 = z^2 + 2zz' + z'^2$	
$(z-z')^2 = z^2 - 2zz' + z'^2$	
$z^2 - z'^2 = (z-z')(z+z')$	
$(z+z')^3 = z^3 + 3z^2z' + 3zz'^2 + z'^3$	
$(z-z')^3 = z^3 - 3z^2z' + 3zz'^2 - z'^3$	
$z^3 - z'^3 = (z-z')(z^2 + zz' + z'^2)$	
$z^3 + z'^3 = (z+z')(z^2 - zz' + z'^2)$	

Exercices

Exercice 1

On pose: $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = -1 + 3i$ et $z_3 = 1 - i$

Écrire sous forme algébrique chacun des nombres suivants: $z_4 = z_1 + z_2 + z_3$, $z_5 = z_1 - 3z_2$, $z_6 = iz_1^2$, $z_7 = -iz_3^3$, $z_8 = z_1 \times z_2$, $z_9 = z_2^4$, $z_{10} = \frac{1}{z_2}$ et $z_{11} = \frac{z_1}{z_3}$

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes :

1. $iz - 1 + 2i = 0$
2. $z + 2i = 3iz - 1$
3. $z^2 + 1 = 0$
4. $z^2 = -3$
5. $(z+2i)^2 = -4$
6. $(2z+1-i)^2 = (iz+2+i)^2$
7. $\frac{2-iz}{z+i} = \frac{i+1}{2-i}$
8. $\frac{-1}{iz+\sqrt{3}} = \frac{iz+\sqrt{3}}{3}$

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 3

On considère les nombres complexes suivants:

$a = 8i$, $b = 4\sqrt{3} - 4i$, $c = 8(\sqrt{3} + i)$, $d = 4\sqrt{3} + 2i$

et $e = 4[(2\sqrt{3} + 3) + (2 - \sqrt{3})i]$

1. Montrer que : $\frac{d-b}{a-c} = -\frac{\sqrt{3}}{4}i$
2. Montrer que le nombre $\frac{c-b}{c-e}$ est un imaginaire pur.
3. Montrer que : $\frac{b-a}{b-c} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Exercice 4

On pose: $z = x + yi$ avec $(x;y) \in \mathbb{R}^2$

et $f(z) = z^2 - z$ et $g(z) = \frac{z+i}{z-1}$ tel que $z \neq 1$

1. Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de $f(z)$ en fonction de x et y
2. Déterminer $\mathrm{Re}(g(z))$ et $\mathrm{Im}(g(z))$ en fonction de x et y
3. Démontrer que : $f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y = 0$ et $x = \frac{1}{2}$
4. Démontrer que: $g(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y = x - 1$ et $(x;y) \neq (1;0)$

Solutions

Solution 1

On a : $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = -1 + 3i$ et $z_3 = 1 - i$

Donc: $z_4 = z_1 + z_2 + z_3$
$= (3 + 2i) + (-1 + 3i) + (1 - i)$
$= (3 - 1 + 1) + (2 + 3 - 1)i$
$= 3 + 4i$

Et $z_5 = z_1 - 3z_2$
$= (3 + 2i) - 3(-1 + 3i)$
$= 3 + 2i + 3 - 9i$
$= (3 + 3) + (2i - 9i)$
$= 6 - 7i$

ProfSalmi.blogspot.com

Et $z_6 = iz_1^2$
$= i(3+2i)^2$
$= i(9+2\times3\times2i+(2i)^2)$
$= i(9+12i-4)$
$= i(5+12i)$
$= 5i+12i^2$
$= 5i-12 = -12+5i$

Et $z_7 = -iz_3^3$
$= -i(1-i)^3$
$= -i(1^3-3\times1^2\times i+3\times1\times i^2-i^3)$
$= -i(1-3i-3+i)$
$= -i(-2-2i)$
$= 2i+2i^2$
$= -2+2i$

info:
$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

Et $z_8 = z_1\times z_2$
$= (3+2i)\times(-1+3i)$
$= -3+9i-2i+6i^2$
$= -3+7i-6$
$= -9+7i$

Et $z_9 = z_2^4$
$= (-1+3i)^4$
$= (-1+3i)^2\times(-1+3i)^2$
$= (1-2\times3i+(3i)^2)\times(1-6i+(3i)^2)$
$= (1-6i-9)(1-6i-9)$
$= (-8-6i)\times(-8-6i)$
$= (8+6i)^2$
$= 8^2+2\times8\times6i+(6i)^2$
$= 64+96i-36$
$= 28+96i$

Et $z_{10} = \frac{1}{z_2}$
$= \frac{1}{-1+3i}$
$= \frac{-1-3i}{(-1+3i)(-1-3i)}$
$= \frac{-1-3i}{(-1)^2-(3i)^2} = \frac{-1-3i}{1+9} = -\frac{1}{10}-\frac{3}{10}i$

ProfSalmi.blogspot.com

Et $z_{11} = \frac{z_1}{z_3}$

$= \frac{3+2i}{1-i}$

$= \frac{(3+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$

$= \frac{3+3i+2i+(2i\times i)}{1^2-i^2}$

$= \frac{3+5i-2}{1+1}$

$= \frac{1+5i}{2}$

$= \frac{1}{2}+\frac{5}{2}i$

info:
$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

Solution 2

Résolvons dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1 $(E_1): iz-1+2i=0$

On a : $iz-1+2i=0 \iff iz=1-2i$

$\iff z=\frac{1-2i}{i}$

$\iff z=\frac{1}{i}-2$ car $\left(\frac{1}{i}=\frac{i}{i\times i}=\frac{i}{-1}=-i\right)$

$\iff z=-i-2$

Donc : $S=\{-2-i\}$

2 $(E_2): z+2i=3iz-1$

On a : $z+2i=3iz-1 \iff z-3iz=-1-2i$

$\iff (1-3i)z=-1-2i$

$\iff z=\frac{-1-2i}{1-3i}$

$\iff z=\frac{(-1-2i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)}$

$\iff z=\frac{-1-3i-2i+6}{1^2+3^2}$

$\iff z=\frac{5}{10}-\frac{5}{10}i$

$\iff z=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$

Donc : $S=\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right\}$

3 $(E_3): z^2+1=0$

ProfSalmi.blogspot.com

On a : $z^2+1=0 \iff z^2-(-1)=0$

$\iff z^2-i^2=0$

$\iff (z-i)(z+i)=0$

$\iff z=i$ ou $z=-i$

Donc : $S=\{-i;i\}$

4 $(E_4): z^2=-3$

On a : $z^2=-3 \iff z^2=(\sqrt{3}i)^2$

$\iff z=\sqrt{3}i$ ou $z=-\sqrt{3}i$

Donc : $S=\{\sqrt{3}i;-\sqrt{3}i\}$

5 $(E_5)\ ; (z+2i)^2=-4$

On a : $(z+2i)^2=-4 \iff (z+2i)^2=(2i)^2$

$\iff z+2i=2i$ ou $z+2i=-2i$

$\iff z=0$ ou $z=-4i$

Donc : $S=\{-4i;0\}$

6 $(E_6): (2z+1-i)^2=(iz+2+i)^2$

On a : $(E_6) \iff \begin{cases} 2z+1-i=iz+2+i \\ ou \\ 2z+1-i=-iz-2-i \end{cases}$

info:

$\forall (z;z') \in \mathbb{C}^2 : z^2=z'^2 \iff \begin{cases} z=z' \\ \text{ou} \\ z=-z' \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 2z-iz=1+2i \\ ou \\ 2z+iz=-3 \end{cases}$

$\iff (2-i)z=1+2i$ ou $(2+i)z=-3$

$\iff z=\dfrac{1+2i}{2-i}$ ou $z=\dfrac{-3}{2+i}$

$\iff z=\dfrac{(1+2i)(2+i)}{5}$ ou $z=\dfrac{-3(2-i)}{5}$

$\iff z=i$ ou $z=-\dfrac{6}{5}+\dfrac{3}{5}i$

Donc : $S=\left\{i\ ;-\dfrac{6}{5}+\dfrac{3}{5}i\right\}$

7 $(E_7): \dfrac{2-iz}{z+i}=\dfrac{i+1}{2-i}$

▸ **Ensemble de définition :**

ProfSalmi.blogspot.com

On a : $z \in D_{(E_7)} \iff z+i \neq 0$

$\iff z \neq -i$

Donc : $D_{(E_7)} = \mathbb{C} - \{-i\}$

▸ **Résolvons l'équation** (E_7) :

Soit z de $\mathbb{C}$ et $z \neq -i$; On a :

$$\frac{2-iz}{z+i} = \frac{i+1}{2-i} \iff (2-iz)(2-i) = (z+i)(i+1)$$

$$\iff 4-2i-2iz-z = iz+z-1+i$$

$$\iff -2iz-z-iz-z = -1+i-4+2i$$

$$\iff (-2-3i)z = -5+3i$$

$$\iff z = \frac{-5+3i}{-2-3i}$$

$$\iff z = \frac{(-5+3i)(-2+3i)}{(-2-3i)(-2+3i)}$$

$$\iff z = \frac{10-15i-6i-9}{(-2)^2+(3)^2}$$

$$\iff z = \frac{1}{13} - \frac{21}{13}i$$

Donc: $S = \left\{\frac{1}{13} - \frac{21}{13}i\right\}$

8 **Résolvons l'équation :** (E_8): $\dfrac{-1}{iz+\sqrt{3}} = \dfrac{iz+\sqrt{3}}{3}$

▸ **Ensemble de définition :** $z \in D_{(E_8)} \iff iz+\sqrt{3} \neq 0$

$\iff z \neq \sqrt{3}\,i$

Donc : $D_{(E_8)} = \mathbb{C} - \{\sqrt{3}\,i\}$

▸ **Résolution de l'équation** (E_8) **:**

(E_8) s'écrit $-3 = (iz+\sqrt{3})^2$

C'est-à-dire : $(iz+\sqrt{3})^2 = (i\sqrt{3})^2$

Donc : $iz+\sqrt{3} = -i\sqrt{3}$ ou $iz+\sqrt{3} = i\sqrt{3}$

Équivaut à : $iz = -\sqrt{3}-i\sqrt{3}$ ou $iz = -\sqrt{3}+i\sqrt{3}$

Équivaut à : $z = -\sqrt{3}+i\sqrt{3}$ ou $z = \sqrt{3}+i\sqrt{3}$

Ainsi: $S = \{\sqrt{3}+i\sqrt{3}\ ;\ -\sqrt{3}+i\sqrt{3}\}$

Solution 3

On a : $a = 8i$ et $b = 4\sqrt{3}-4i$ et $c = 8(\sqrt{3}+i)$

$d = 4\sqrt{3}+2i$ et $e = 4[(2\sqrt{3}+3)+(2-\sqrt{3})i]$

ProfSalmi.blogspot.com

1 **Montrons que:** $\frac{d-b}{a-c}=-\frac{\sqrt{3}}{4}i$

On a : $\frac{d-b}{a-c}=\frac{4\sqrt{3}+2i-4\sqrt{3}+4i}{8i-8(\sqrt{3}+i)}=\frac{6i}{-8\sqrt{3}}$

$=-\frac{3i}{4\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{4}i$

2 On a : $\frac{c-b}{c-e}=\frac{8(\sqrt{3}+i)-4\sqrt{3}+4i}{8(\sqrt{3}+i)-4[(2\sqrt{3}+3)+(2-\sqrt{3})i]}$

$=\frac{4\sqrt{3}+12i}{8\sqrt{3}+8i-8\sqrt{3}-12-8i+4\sqrt{3}i}$

$=\frac{4(\sqrt{3}+3i)}{-12+4\sqrt{3}i}$

$=\frac{4(\sqrt{3}+3i)}{4(-3+\sqrt{3}i)}$

$=\frac{(\sqrt{3}+3i)(-3-\sqrt{3}i)}{(-3+\sqrt{3}i)(-3-\sqrt{3}i)}$

$=\frac{-3\sqrt{3}-3i-9i+3\sqrt{3}}{(-3)^2+(\sqrt{3})^2}$

$=\frac{-12i}{12}=-i$

Donc: $\frac{c-b}{c-e}$ est un imaginaire pur.

3 **Montrons que:** $\frac{b-a}{b-c}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

On a : $\frac{b-a}{b-c}=\frac{4\sqrt{3}-4i-8i}{4\sqrt{3}-4i-8(\sqrt{3}+i)}$

$=\frac{4\sqrt{3}-12i}{-4\sqrt{3}-12i}$

$=\frac{4\sqrt{3}(1-\sqrt{3}i)}{4\sqrt{3}(-1-\sqrt{3}i)}$

$=\frac{(1-\sqrt{3}i)(-1+\sqrt{3}i)}{(-1-\sqrt{3}i)(-1+\sqrt{3}i)}$

$=\frac{-1+\sqrt{3}i+\sqrt{3}i+3}{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}$

$=\frac{2+2\sqrt{3}i}{4}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

ProfSalmi.blogspot.com

Solution 4

1 Déterminons $\mathrm{Re}(f(z))$ **et** $\mathrm{Im}(f(z))$

On a : $f(z) = z^2 - z$

$= (x+yi)^2 - (x+yi)$

$= x^2 + 2xyi - y^2 - x - yi$

$= (x^2 - x - y^2) + (2xy - y)i$

Puisque x et y sont deux réels, alors $\mathrm{Re}(f(z)) = x^2 - x - y^2$

et $\mathrm{Im}(f(z)) = 2xy - y$

2 Déterminons $\mathrm{Re}(g(z))$ **et** $\mathrm{Im}(g(z))$

On a : $g(z) = \dfrac{z+i}{z-1}$

$= \dfrac{(x+yi)+i}{(x+yi)-1}$

$= \dfrac{x+(y+1)i}{(x-1)+yi}$

$= \dfrac{(x+(y+1)i)((x-1)-yi)}{((x-1)+yi)((x-1)-yi)}$

$= \dfrac{x(x-1)-xyi+(y+1)(x-1)i+(y+1)y}{(x-1)^2+y^2}$

$= \dfrac{(x^2-x+y^2+y)+(-xy+xy-y+x-1)i}{(x-1)^2+y^2}$

$= \dfrac{(x^2+y^2-x+y)}{(x-1)^2+y^2} + \dfrac{(x-y-1)}{(x-1)^2+y^2}i$

Donc : $\mathrm{Im}(g(z)) = \dfrac{x-y-1}{(x-1)^2+y^2}$ et $\mathrm{Re}(g(z)) = \dfrac{x^2+y^2-x+y}{(x-1)^2+y}$

Avec $(x;y) \neq (1;0)$

3 Montrons que : $f(z) \in \mathbb{R} \iff y = 0$ **et** $x = \dfrac{1}{2}$

On a : $\mathrm{Im}(f(z)) = 2xy - y$

Donc : $f(z) \in \mathbb{R} \iff \mathrm{Im}(f(z)) = 0$

$\iff 2xy - y = 0$

$\iff y(2x-1) = 0$

$\iff y = 0$ et $x = \dfrac{1}{2}$

4 Montrons que : $g(z) \in \mathbb{R} \iff y = x - 1$ **et** $(x;y) \neq (1;0)$

On a : $(x;y) \neq (1;0)$ et $\mathrm{Im}(g(z)) = \dfrac{x-y-1}{(x-1)^2+y^2}$

ProfSalmi.blogspot.com

Donc : $g(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Im}(g(z)) = 0$

$\Leftrightarrow x - y - 1 = 0$ et $(x;y) \neq (1;0)$

$\Leftrightarrow y = x - 1$ et $(x;y) \neq (1;0)$

2 Conjugué d'un nombre complexe

Définition:

z est un nombre complexe de forme algébrique $z = x + iy$ (x et y sont des réels), le nombre complexe $x - iy$, noté $\overline{z}$ est appelé conjugué de z.

$\overline{z} = \overline{x + yi} = x - yi$

Propriétés:

Pour tout z et z' de $\mathbb{C}$ on a :

$\overline{\overline{z}} = z$; $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$; $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$

$z \neq 0 ; (\forall n \in \mathbb{Z}); z \neq 0; \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$; $z' \neq 0 ; \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$; $\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$

$z + \overline{z} = 2\text{Re}(z)$; $z - \overline{z} = 2i\,\text{Im}(z)$; $z\overline{z} = (R_e(z))^2 + (\text{Im}(z))^2$

$z + \overline{z} \in \mathbb{R}$ $(z - \overline{z}) \in i\mathbb{R}$ $z \times \overline{z} \in \mathbb{R}^+$

$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$

$z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\overline{z}$

Remarque:

Soit $z = x + iy$ tel que $(x,y) \in \mathbb{R}^2 : z \times \overline{z} = x^2 + y^2$; $z + \overline{z} = 2x$; $z - \overline{z} = 2yi$

$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y = 0$

$z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow x = 0$

Exercices

Exercice 5

Déterminer le conjugué de chacun des nombres suivants :

$z_1 = -5 + 7i$; $z_2 = 3i - \frac{1}{2}$; $z_3 = -i$; $z_4 = \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$z_5 = -\frac{5}{2}$; $z_6 = 2 - \sqrt{3}$; $z_7 = (1 - 5i) - 3(2i - 1)$

$z_8 = -3i(-2 + 3i)(2 - i)$; $z_9 = (1 - \sqrt{3}\,i)^5$; $z_{10} = \frac{-7}{i - 2}$; $z_{11} = \frac{\sqrt{2} - i}{2i + \sqrt{2}}$

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 6

Écrire en fonction de z et $\overline{z}$ le conjugué de chacun des nombres suivants :
$Z_1 = iz + 1$ et $Z_2 = z^2 + i\overline{z} - 5$ et $Z_3 = (3\overline{z} - 1)(z + i)$ et $Z_4 = \dfrac{2z - i}{1 - \overline{z}}$; $z \neq 1$

Exercice 7

1 a. Montrer que le nombre $A = z^2 - \overline{z}^2$ est un imaginaire pur pour tout z de $\mathbb{C}$.

b. Montrer que le nombre $B = z^n + \overline{z}^n$ est un réel pour tout z de $\mathbb{C}$ et pour tout n de $\mathbb{N}$.

2 On pose: $X = (2 - \sqrt{5}i)^n + (2 + \sqrt{5}i)^n$ et $Y = (2 - \sqrt{5}i)^n - (2 + \sqrt{5}i)^n$ avec: $n \in \mathbb{N}$.

a. Montrer que le nombre X est un nombre réel.

b. Montrer que le nombre Y est un imaginaire pur.

Exercice 8

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes (écrire les solutions sous la forme algébrique).

1 $i\overline{z} = 3 - i$

2 $(3 - 2i)\overline{z} + i = 0$

3 $(1 - i\overline{z})(z^2 + 2z + 1)(z - \overline{z}) = 0$

4 $z - 2\overline{z} = 2i$

5 $2z + i\overline{z} = 5 - 4i$

6 $\dfrac{2\overline{z} - 1}{z + i} = 1 + i$

7 $\dfrac{\overline{z} + i}{\overline{z} - 2} = \dfrac{z - i}{z + 1}$

Exercice 9

On pose : $f(z) = 2z^2 + z$ pour tout z de $\mathbb{C}$

1 On pose : $a = f(i)$, $b = f(1 - i)$ et $c = f(1 + i)$

a. Vérifier que : $a = -2 + i$, $b = 1 - 5i$ et $c = 1 + 5i$

b. Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants : bc, $\dfrac{a}{b}$ et $a^2 + b^2$.

2 résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = iz$

3 a. vérifier que: $(\forall z \in \mathbb{C})$; $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$

b. Montrer que: $(\forall z \in \mathbb{C})$; $\left(f(z) = f(\overline{z}) \iff \overline{z} = z \text{ ou } \mathrm{Re}(z) = -\dfrac{1}{4}\right)$

c. Déduire l'ensemble : $E = \{z \in \mathbb{C} / f(z) \in \mathbb{R}\}$

ProfSalmi.blogspot.com

Solution 5

Détermination du conjugué .

- $z_1 = -5 + 7i \Rightarrow \overline{z_1} = -5 - 7i$
- $z_2 = 3i - \frac{1}{2} \Rightarrow \overline{z_2} = -3i - \frac{1}{2}$
- $z_3 = -i \Rightarrow \overline{z_3} = i$
- $z_4 = \frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow \overline{z_4} = -\frac{\sqrt{3}}{2}i$
- $z_5 = -\frac{5}{2} \Rightarrow \overline{z_5} = -\frac{5}{2}$
- $z_6 = 2 - \sqrt{3} \Rightarrow \overline{z_6} = 2 - \sqrt{3}$
- $z_7 = (1 - 5i) - 3(2i - 1)$

Méthode 1: $\overline{z_7} = (\overline{1 - 5i}) - 3(\overline{2i - 1})$

$= (1 + 5i) - 3(-2i - 1)$

Méthode 2 : on écrit z_7 sous forme algébrique :

- On a : $z_7 = 1 - 5i - 6i + 3 = 4 - 11i$

donc $\overline{z_7} = 4 + 11i$

- On a : $z_8 = -3i(-2 + 3i)(2 - i)$

Donc : $\overline{z_8} = -\overline{3i}(\overline{-2 + 3i})(\overline{2 - i})$

$= 3i(-2 - 3i)(2 + i)$

- $z_9 = (1 - \sqrt{3}\,i)^5 \Rightarrow \overline{z_9} = (\overline{1 - \sqrt{3}\,i})^5 = (1 + \sqrt{3}\,i)^5$
- $z_{10} = \frac{-7}{i - 2} \Rightarrow \overline{z_{10}} = \frac{\overline{-7}}{\overline{i - 2}} = \frac{-7}{-i - 2} = \frac{7}{2 + i}$
- $z_{11} = \frac{\sqrt{2} - i}{2i + \sqrt{2}} \Rightarrow \overline{z_{11}} = \frac{\overline{\sqrt{2} - i}}{2i + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + i}{-2i + \sqrt{2}}$

Solution 6

- On a : $Z_1 = iz + 1$

Donc : $\overline{Z_1} = \overline{iz} + \overline{1} = \overline{i} \times \overline{z} + 1 = -i\overline{z} + 1$

- On a : $Z_2 = z^2 + i\overline{z} - 5$

Donc : $\overline{Z_2} = \overline{z}^2 + \overline{i} \times \overline{\overline{z}} - \overline{5} = \overline{z}^2 - iz - 5$

- On a : $Z_3 = (3\overline{z} - 1)(z + i)$

Donc : $\overline{Z_3} = (\overline{3\overline{z} - 1})(\overline{z + i}) = (3z - 1)(\overline{z} - i)$

ProfSalmi.blogspot.com

▸ On a : $Z_4 = \dfrac{2z - i}{1 - \overline{z}}$; $z \neq 1$

donc : $\overline{Z_4} = \dfrac{\overline{2z - i}}{\overline{1 - \overline{z}}} = \dfrac{2\overline{z} + i}{1 - z}$

Solution 7

1 a. Montrons que le nombre $A = z^2 - \overline{z}^2$ est un imaginaire pur pour tout z de $\mathbb{C}$.

Soit z un élément de $\mathbb{C}$, on a : $A = z^2 - \overline{z}^2$

Méthode 1: $(A \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{A} = -A)$

On a : $A = z^2 - \overline{z}^2$

Donc : $\overline{A} = \overline{z^2 - \overline{z}^2} = \overline{z}^2 - \overline{\overline{z}^2} = \overline{z}^2 - z^2 = -(z^2 - \overline{z}^2) = -A$

Puisque: $\overline{A} = -A$ alors le nombre A est un imaginaire pur pour tout z de $\mathbb{C}$.

Méthode 2:

info: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

On a : $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$

$z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$

donc :

$A = z^2 - \overline{z}^2 = (z - \overline{z})(z + \overline{z}) = 2i\,\mathrm{Im}(z) \times 2\,\mathrm{Re}(z) = 4i\,\mathrm{Im}(z) \times \mathrm{Re}(z)$

Puisque $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$ sont deux réels, alors A est un imaginaire pur.

b. Montrons que le nombre $B = z^n + \overline{z}^n$ est un réel pour tout z de $\mathbb{C}$ et pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

Soit z un élément de $\mathbb{C}$ et soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

Méthode: $B \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{B} = B$

On a : $B = z^n + \overline{z}^n$

Donc : $\overline{B} = \overline{z^n} + \overline{\overline{z}^n} = (\overline{z})^n + z^n = z^n + \overline{z}^n = B$

Puisque: $\overline{B} = B$ alors, B est un réel.

2 $(n \in \mathbb{N})$; $X = (2 - \sqrt{5}i)^n + (2 + \sqrt{5}i)^n$

a. Montrons que X est un réel.

Méthode 1:

On a : $\overline{X} = \overline{(2 - \sqrt{5}i)^n} + \overline{(2 + \sqrt{5}i)^n} = (2 + \sqrt{5}i)^n + (2 - \sqrt{5}i)^n = X$

Donc : $\overline{X} = X$ d'où X est un réel.

Méthode 2:

On pose : $z = 2 - \sqrt{5}i$

Alors : $X = z^n + \overline{z}^n = B$

ProfSalmi.blogspot.com

Donc X est un réel (d'après la question 1)b)

Remarque: On pourra poser $z = (2-\sqrt{5}\,i)^n$

Donc : $X = z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$

D'où X est un réel.

b. $Y = (2-\sqrt{5}\,i)^n - (2+\sqrt{5}\,i)^n$

Montrons que Y est un imaginaire pur.

Méthode 1:

On a : $Y = (2-\sqrt{5}\,i)^n - (2+\sqrt{5}\,i)^n$

Donc : $\overline{Y} = \overline{(2-\sqrt{5}\,i)^n} - \overline{(2+\sqrt{5}\,i)^n} = (2+\sqrt{5}\,i)^n - (2-\sqrt{5}\,i)^n$

$= -[(2-\sqrt{5}\,i)^n - (2+\sqrt{5}\,i)^n] = -Y$

Puisque: $\overline{Y} = -Y$, alors: Y est un imaginaire pur.

Méthode 2:

On pose: $z = (2-\sqrt{5}\,i)^n$

Alors : $Y = (2-\sqrt{5}\,i)^n - (2+\sqrt{5}\,i)^n = z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$

Donc : Y est un imaginaire pur.

Solution 8

Résolvons dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1 On a : $i\overline{z} = 3 - i \Leftrightarrow \overline{z} = \frac{3}{i} - \frac{i}{i}$

$\Leftrightarrow \overline{z} = -3i - 1$

$\Leftrightarrow z = \overline{-3i-1}$

$\Leftrightarrow z = 3i - 1$

Donc : $S = \{-1+3i\}$

2 On a : $(3-2i)\overline{z} + i = 0 \Leftrightarrow \overline{z} = \frac{-i}{3-2i}$

$\Leftrightarrow z = \left(\overline{\frac{-i}{3-2i}}\right)$

$\Leftrightarrow z = \frac{i}{3+2i}$

$\Leftrightarrow z = \frac{i(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}$

$\Leftrightarrow z = \frac{3i+2}{9+4}$

$\Leftrightarrow z = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$

Donc : $S = \left\{\frac{2}{13} + \frac{3}{13}i\right\}$

ProfSalmi.blogspot.com

3 **Résolvons :** $(1-i\overline{z})(z^2+2z+1)(z-\overline{z})=0$

$(1-i\overline{z})(z^2+2z+1)(z-\overline{z})=0 \Leftrightarrow 1-i\overline{z}=0$ ou $z^2+2z+1=0$

ou $z-\overline{z}=0$

$\Leftrightarrow i\overline{z}=1$ ou $(z+1)^2=0$ ou $\overline{z}=z$

$\Leftrightarrow \overline{z}=\frac{1}{i}=-i$ ou $z=-1$ ou $z\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow z=i$ ou $z\in\mathbb{R}$

Donc: $S=\mathbb{R}\cup\{i\}$

4 **Résolvons l'equation :** $z-2\overline{z}=2i$

On pose: $z=x+yi$ avec : $(x;y)\in\mathbb{R}^2$

On a : $z-2\overline{z}=2i \Leftrightarrow (x+yi)-2(x-yi)=2i$

$\Leftrightarrow -x+3yi=2i$

$\Leftrightarrow -x=0$ ou $3y=2$

$\Leftrightarrow x=0$ ou $y=\frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow z=\frac{2}{3}i$

Donc : $S=\left\{\frac{2}{3}i\right\}$

5 **Résolvons l'équation :** $2z-i\overline{z}=5-4i$

On pose: $z=x+yi$ avec: $(x;y)\in\mathbb{R}^2$

On a : $2z-i\overline{z}=5-4i \Leftrightarrow 2(x+yi)+i(x-yi)=5-4i$

$\Leftrightarrow (2x+y)+(2y+x)i=5-4i$

$\Leftrightarrow \begin{cases}2x+y=5\\x+2y=-4\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}y=5-2x\\x+2(5-2x)=-4\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}y=5-2x\\-3x+10=-4\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}y=5-2\times\frac{14}{3}=-\frac{13}{3}\\x=\frac{14}{3}\end{cases}$

$\Leftrightarrow z=\frac{14}{3}-\frac{13}{3}i$

Donc : $S=\left\{\frac{14}{3}-\frac{13}{5}i\right\}$

6 **Résolvons l'équation :** (E_6): $\frac{2\overline{z}-1}{z+i}=1+i$

ProfSalmi.blogspot.com

▸ **Ensemble de définition:** $z \in D_{(E_6)} \Longleftrightarrow z + i \neq 0$

$\Longleftrightarrow z \neq -i$

Donc : $D_{(E_6)} = \mathbb{C} - \{-i\}$

▸ **Résolution de l'équation:**

$$\frac{2\overline{z}-1}{z+i} = 1+i \Longleftrightarrow 2\overline{z}-1 = (1+i)(z+i)$$

$$\Longleftrightarrow 2\overline{z}-1 = (1+i)z + i(1+i)$$

$$\Longleftrightarrow 2\overline{z}-(1+i)z = 1+i-1$$

$$\Longleftrightarrow 2(x-yi)-(1+i)(x+iy) = i \quad \text{(Avec : } z = x+yi$$

$$\Longleftrightarrow 2x-2yi-x-yi-xi+y = i \quad \text{et } (x;y) \in \mathbb{R}^2)$$

$$\Longleftrightarrow (x+y)+(-3y-x)i = i$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x+y = 0 \\ -3y-x = 1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ 2x = 1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

Donc : $S = \left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right\}$

7 **Résolvons l'équation :** (E_7): $\dfrac{\overline{z}+i}{\overline{z}-2} = \dfrac{z-i}{z+1}$

▸ **Ensemble de défintion :** $z \in D_{(E_7)} \Longleftrightarrow \overline{z}-2 \neq 0$ **et** $z+1 \neq 0$

$\Longleftrightarrow z \neq -1$ et $\Longleftrightarrow z \neq 2$

Donc : $D_{(E_7)} = \mathbb{C} - \{2;-1\}$

▸ **Résolution de l'équation** (E_7):

On a : $\dfrac{\overline{z}+i}{\overline{z}-2} = \dfrac{z-i}{z+1} \Longleftrightarrow (\overline{z}+i)(z+1) = (z-i)(\overline{z}-2)$

$$\Longleftrightarrow \overline{z}z + \overline{z} + iz + i = z\overline{z} - 2z - i\overline{z} + 2i$$

$$\Longleftrightarrow \overline{z} + i\overline{z} + iz + 2z = i$$

$$\Longleftrightarrow (1+i)\overline{z} + (2+i)z = i$$

$$\Longleftrightarrow (1+i)(x-yi) + (2+i)(x+yi) = i$$

(En posant: $z = x+yi$ avec: $(x;y) \in \mathbb{R}^2$)

ProfSalmi.blogspot.com

$$\Leftrightarrow x - yi + xi + y + 2x + 2yi + xi - y = i$$
$$\Leftrightarrow 3x + (2x + y)i = i$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 0 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow z = i \in D_{(E_7)}$$

Donc : $S = \{i\}$

Solution 9

1 a. Vérifions que: $a = -2 + i$, $b = 1 - 5i$ **et** $c = 1 + 5i$

On a : $f(z) = 2z^2 + z$

Donc : ▸ $a = f(i) = 2i^2 + i = 2(-1) + i$
$= -2 + i$

▸ $b = f(1-i) = 2(1-i)^2 + (1-i) = 2(-2i) + 1 - i$
$= -4i - i + 1 = 1 - 5i$

▸ $c = f(1+i) = 2(1+i)^2 + 1 + i = 4i + i + 1$
$= 1 + 5i$

b. Ecriture de bc, $\frac{a}{b}$ **et** $a^2 + b^2$ **sous forme algébrique:**

On a : ▸ $bc = (1 - 5i)(1 + 5i) = 1^2 + 5^2$
$= 26$

▸ $\frac{a}{b} = \frac{-2+i}{1-5i} = \frac{(-2+i)(1+5i)}{(1-5i)(1+5i)} = \frac{-2 - 10i + i - 5}{1^2 + 5^2}$
$= \frac{-7}{26} - \frac{9}{26}i$

▸ $a^2 + b^2 = (-2 + i)^2 + (1 - 5i)^2$
$= (-2)^2 + 2 \times (-2) \times i + i^2 + 1^2 - 2 \times 1 \times 5i + (5i)^2$
$= 4 - 4i - 1 + 1 - 10i - 25$
$= -21 - 14i$

2 Résolvons dans $\mathbb{C}$ **l'équation :** $f(z) = iz$

On a : $f(z) = iz \Leftrightarrow 2z^2 + z = iz$
$\Leftrightarrow 2z^2 + z - iz = 0$
$\Leftrightarrow z(2z + 1 - i) = 0$
$\Leftrightarrow z = 0$ ou $2z + 1 - i = 0$
$\Leftrightarrow z = 0$ ou $z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

ProfSalmi.blogspot.com

Donc : $S=\left\{0;-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right\}$

3 a. Vérifions que: $(\forall z\in\mathbb{C})\ ;\ \overline{f(z)}=f(\overline{z})$

Soit z un élément de $\mathbb{C}$:

On a : $f(z)=2z^2+z \Rightarrow \overline{f(z)}=\overline{2z^2+z}$

$\Rightarrow \overline{f(z)}=2\overline{z^2}+\overline{z}$

$\Rightarrow \overline{f(z)}=2(\overline{z})^2+\overline{z}$

$\Rightarrow \overline{f(z)}=f(\overline{z})$

Donc : $(\forall z\in\mathbb{C})\ ;\ \overline{f(z)}=f(\overline{z})$

b. Montrons que : $(\forall z\in\mathbb{C})\ ;f(z)=f(\overline{z})\Leftrightarrow(\overline{z}=z$ **ou** $\mathrm{Re}(z)=-\frac{1}{4})$

Soit z de $\mathbb{C}$, on a : $f(z)=f(\overline{z})\Leftrightarrow 2z^2+z=2\overline{z}^2+\overline{z}$

$\Leftrightarrow 2z^2-2\overline{z}^2+z-\overline{z}=0$

$\Leftrightarrow 2(z-\overline{z})(z+\overline{z})+(z-\overline{z})=0$

$\Leftrightarrow (z-\overline{z})[2(z+\overline{z})+1]=0$

$\Leftrightarrow z-\overline{z}=0$ ou $2(2\mathrm{Re}(z))+1=0$

$\Leftrightarrow \overline{z}=z$ ou $\mathrm{Re}(z)=-\frac{1}{4}$

c. Déduisons l'ensemble E **où** $E=\{z\in\mathbb{C}\ /\ f(z)\in\mathbb{R}\}$

info: $z+\overline{z}=2\mathrm{Re}(z)$

$z\in E\Leftrightarrow f(z)\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \overline{f(z)}=f(z)$

$\Leftrightarrow f(\overline{z})=f(z)$ (car $\overline{f(z)}=f(\overline{z})$)

$\Leftrightarrow \overline{z}=z$ ou $\mathrm{Re}(z)=-\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$ ou $z=-\frac{1}{4}+yi$ tel que $y\in\mathbb{R}$

Donc : $E=\mathbb{R}\cup\left\{-\frac{1}{4}+yi/\ y\in\mathbb{R}\right\}$

3 Module d'un nombre complexe

Définition:

Soit z un nombre complexe tel que: $z=x+yi$ avec $(x;y)\in\mathbb{R}^2$

▸ Le nombre réel positif $\sqrt{z\overline{z}}$ est appelé le module de z noté: $|z|$; et on a:

$|z|=|x+yi|=\sqrt{z\overline{z}}=\sqrt{x^2+y^2}$

ProfSalmi.blogspot.com

Propriété:

Pour tout z et z' de $\mathbb{C}$, on a :

- $|\overline{z}| = |z| = |-z| = |z|$ et $|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$
- $|z \times z'| = |z| \times |z'|$; $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ et $z \neq 0$; $\left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$ et $z \neq 0$
- $z \neq 0$; $(\forall n \in \mathbb{Z})$; $|z^n| = |z|^n$
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ et $|z - z'| \leq |z| + |z'|$ (L'inégalité triangulaire).

Remarque : Pour tout z et z' de $\mathbb{C}$ avec $z \neq 0$, on a :

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} \text{ et } \frac{z'}{z} = \frac{z' \times \overline{z}}{|z|^2}$$

Exercices

Exercice 10

Calculer le module de chacun des nombres complexes suivants :

$z_1 = 3 + 2i$; $z_2 = 1 + i$; $z_3 = i - 3$; $z_4 = i$

$z_5 = -\sqrt{3}\,i$; $z_6 = 1 - \sqrt{3}$; $z_7 = \sqrt{5} - \sqrt{2}$; $z_8 = (1 - i)(-3 - 2i)$

$z_9 = -i\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$; $z_{10} = (2 - i)^8$; $z_{11} = \frac{-3}{2i + 1}$; $z_{12} = \frac{2 - 3i}{1 - \sqrt{2}}$

$z_{13} = \frac{4 + 2i}{3 - i}$; $z_{14} = \frac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}$; $z_{15} = \frac{\sqrt{2}\,i}{-\frac{3}{2} + i}$; $z_{16} = \left(\frac{1 + 3i}{2 - i}\right)^2$

$z_{17} = \cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}$; $z_{18} = 2\left(\cos\frac{\pi}{7} - i\sin\frac{\pi}{7}\right)$; $z_{19} = r(\cos x + i\sin x)$

(avec: $r \in \mathbb{R}^*$ et $x \in \mathbb{R}$)

Exercice 11

1 Soit z un nombre complexe non nul.

Démontrer que : $|z| = 1 \Longleftrightarrow \overline{z} = \frac{1}{z}$

2 a. Calculer: $|-i|$; $\left|\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right|$; $\left|-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right|$ et $|\cos\alpha + i\sin\alpha|$

b. En déduire la forme algébrique de chacun des nombres suivants :

$z_1 = \frac{1}{-i}$; $z_2 = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}$; $z_3 = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i}$ et $z_4 = \frac{1}{\cos\alpha + i\sin\alpha}$

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 12

On pose: $z = x + yi$ avec: $(x;y) \in \mathbb{R}^2$

1 Démontrer que : $|z - 1 + i| = 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$

2 Démontrer que : $|z - 1 + 2i| = |z - i| \Leftrightarrow -x + 3y + 2 = 0$

Exercice 13

Soit z un nombre complexe distinct du nombre i.

Montrer que : $\left|\frac{z+i}{z-i}\right| = 1$ si et seulement si z est réel.

Solutions

Solution 10

Calculons le module de chacun des nombres complexes:

▸ $z_1 = 3 + 2i$

On a : $|z_1| = |3 + 2i| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

▸ $z_2 = 1 + i$

On a : $|z_2| = |1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

▸ $z_3 = i - 3$

On a : $|z_3| = |-3 + i| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10}$

▸ $z_4 = i$

On a : $|z_4| = |i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$

▸ $z_5 = -\sqrt{3}\,i$

On a : $|z_5| = |-\sqrt{3}\,i| = \sqrt{0^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{3}$

ou $|z_5| = |-\sqrt{3}\,i| = |-\sqrt{3}| \times |i| = \sqrt{3} \times 1 = \sqrt{3}$

▸ $z_6 = 1 - \sqrt{3}$

On a : $|z_6| = |1 - \sqrt{3}| = -(1 - \sqrt{3}) = \sqrt{3} - 1$ (car $1 - \sqrt{3}$ est un réel négatif).

▸ $z_7 = \sqrt{5} - \sqrt{2}$

Puisque z_7 est un réel positif, alors : $|z_7| = \sqrt{5} - \sqrt{2}$

▸ $z_8 = (1 - i)(-3 - 2i)$

On a :
$$\begin{aligned} |z_8| &= |(1 - i)(-3 - 2i)| \\ &= |1 - i| \times |-3 - 2i| \\ &= \sqrt{1^2 + (-1)^2} \times \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} \\ &= \sqrt{2} \times \sqrt{13} \\ &= \sqrt{26} \end{aligned}$$

ProfSalmi.blogspot.com

Remarque: On peut aussi écrire z_8 sous forme algébrique, puis calculer son module

▸ $z_9 = -i\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

On a : $|z_9| = \left|-i\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right|$

$= |-i| \times \left|\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right|$

$= 1 \times \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$

▸ $z_{10} = (2-i)^8$

On a : $|z_{10}| = |2-i|^8 = (\sqrt{2^2 + (-1)^2})^8 = (\sqrt{5})^8 = 5^4$

▸ $z_{11} = \frac{-3}{2i+1}$

On a : $|z_{11}| = \left|\frac{-3}{2i+1}\right| = \frac{|-3|}{|2i+1|} = \frac{3}{\sqrt{4+1}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$

▸ $z_{12} = \frac{2-3i}{1-\sqrt{2}}$

On a : $|z_{12}| = \left|\frac{2-3i}{1-\sqrt{2}}\right|$

$= \frac{|2-3i|}{|1-\sqrt{2}|}$

$= \frac{\sqrt{4+9}}{\sqrt{2}-1}$

$= \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{13}(\sqrt{2}+1)$

▸ $z_{13} = \frac{4+2i}{3-i}$

On a : $|z_{13}| = \left|\frac{4+2i}{3-i}\right|$

$= \frac{|4+2i|}{|3-i|}$

$= \frac{\sqrt{16+4}}{\sqrt{9+1}} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{10}} = \sqrt{2}$

▸ $z_{14} = \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$

On a : $|z_{14}| = \frac{|\sqrt{3}-i|}{|\sqrt{2}+i\sqrt{2}|} = \frac{\sqrt{3+1}}{\sqrt{2+2}} = \frac{2}{\sqrt{4}} = 1$

ProfSalmi.blogspot.com

▸ $z_{15} = \dfrac{\sqrt{2}i}{-\frac{3}{2}+i}$

On a : $|z_{15}| = \dfrac{|\sqrt{2}i|}{\left|-\frac{3}{2}+i\right|} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{9}{4}+1}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{13}}$

▸ $z_{16} = \left(\dfrac{1+3i}{2-i}\right)^2$

On a : $|z_{16}| = \left|\left(\dfrac{1+3i}{2-i}\right)^2\right|$

$= \dfrac{|1+3i|^2}{|2-i|^2}$

$= \dfrac{1^2+3^2}{2^2+(-1)^2} = \dfrac{10}{5} = 2$

▸ $z_{17} = \cos\dfrac{\pi}{5} + i\sin\dfrac{\pi}{5}$

On a : $|z_{17}| = \left|\cos\dfrac{\pi}{5} + i\sin\dfrac{\pi}{5}\right| = \sqrt{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{5}\right)+\sin^2\left(\dfrac{\pi}{5}\right)} = \sqrt{1} = 1$

▸ $z_{18} = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{7} - i\sin\dfrac{\pi}{7}\right)$

info: $(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ \cos^2 x + \sin^2 x = 1$

On a : $|z_{18}| = \left|2\left(\cos\dfrac{\pi}{7} - i\sin\dfrac{\pi}{7}\right)\right|$

$= |2| \times \left|\cos\dfrac{\pi}{7} - i\sin\dfrac{\pi}{7}\right|$

$= 2\sqrt{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{7}\right)+\left(-\sin\left(\dfrac{\pi}{7}\right)\right)^2} = 2\sqrt{1} = 2$

▸ $z_{19} = r(\cos x + i\sin x)$ avec $r \in \mathbb{R}^*$ et $x \in \mathbb{R}$

On a : $|z_{19}| = |r(\cos x + i\sin x)|$

$= |r| \times |\cos x + i\sin x|$

$= |r| \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x}$

$= |r| \times 1$

$= |r|$

Solution 11

1 Montrons que : $|z| = 1 \iff \dfrac{1}{z} = \overline{z}$

Soit z un élément de $\mathbb{C}^*$; $|z| = 1 \iff \sqrt{z\overline{z}} = 1$

$\iff z\overline{z} = 1$

$\iff \overline{z} = \dfrac{1}{z}$

info: $(\forall z \in \mathbb{C})\ ;\ |z| = \sqrt{z\overline{z}}$

Donc: $(\forall z \in \mathbb{C}^*)\ ;\ |z| = 1 \iff \overline{z} = \dfrac{1}{z}$

info: $i = 0 + 1 \times i$

2 a. On a : ▸ $|-i| = 1$

ProfSalmi.blogspot.com

- $\left|\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1$
- $\left|-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right|=\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}=1$
- $|\cos\alpha+i\sin\alpha|=\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=1$

b. Déduisons la forme algébrique des nombres z_k : $k\in\{1;2;3;4\}$

On remarque que chaque nombre s'écrit sous la forme $\frac{1}{Z}$ avec : $|Z|=1$

Donc : $\frac{1}{Z}=\overline{Z}$ d'après la question a)

- $z_1=\frac{1}{-i}=-\overline{i}=i$
- $z_2=\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}=\overline{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$
- $z_3=\frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}=-\overline{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$
- $z_4=\frac{1}{\cos\theta+i\sin\theta}=\overline{\cos\theta+i\sin\theta}=\cos\theta-i\sin\theta$

Solution 12

$z=x+yi$ avec : $(x;y)\in\mathbb{R}^2$

1 On a : $|z-1+i|=2\Leftrightarrow|x+yi-1+i|=2$

$\Leftrightarrow|(x-1)+(y+1)i|=2$

$\Leftrightarrow\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}=2$

$\Leftrightarrow(x-1)^2+(y+1)^2=4$

2 On : $|z-1+2i|=|z-i|\Leftrightarrow|(x-1)+(y+2)i|=|x+(y-1)i|$

$\Leftrightarrow\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}=\sqrt{x^2+(y-1)^2}$

$\Leftrightarrow(x-1)^2+(y+2)^2=x^2+(y-1)^2$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2+4y+4=x^2+y^2-2y+1$

$\Leftrightarrow-2x+6y+4=0$

$\Leftrightarrow -x+3y+2=0$

ProfSalmi.blogspot.com

Solution 13

Soit z un élément de $\mathbb{C}-\{i\}$

info: $|Z|=\sqrt{Z\overline{Z}}$

$$\left|\frac{z+i}{z-i}\right|=1 \iff \frac{|z+i|}{|z-i|}=1$$
$$\iff |z+i|=|z-i|$$
$$\iff (z+i)\overline{(z+i)}=(z-i)\overline{(z-i)}$$
$$\iff (z+i)(\overline{z}-i)=(z-i)(\overline{z}+i)$$
$$\iff z\overline{z}-iz+i\overline{z}+1=z\overline{z}+iz-i\overline{z}+1$$
$$\iff -2iz+2i\overline{z}=0$$
$$\iff 2i(-z+\overline{z})=0$$
$$\iff -z+\overline{z}=0$$
$$\iff \overline{z}=z$$
$$\iff z\in\mathbb{R}$$

Donc : $\left|\frac{z+i}{z-i}\right|=1 \iff z\in\mathbb{R}$

4 Représentation géométrique

Définition:

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$

- A tout nombre complexe $z=x+yi$, avec x et y des réels, on associe le point M de coordonnées $(x;y)$ dans le repère $(O;\vec{u};\vec{v})$ du plan, appelé plan complexe.

On dit que M est le point image du nombre complexe z (ou le point M est l'image du nombre complexe z) et on écrit: $M(z)$,

Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est le vecteur image de z, et on écrit $\overrightarrow{OM}(z)$

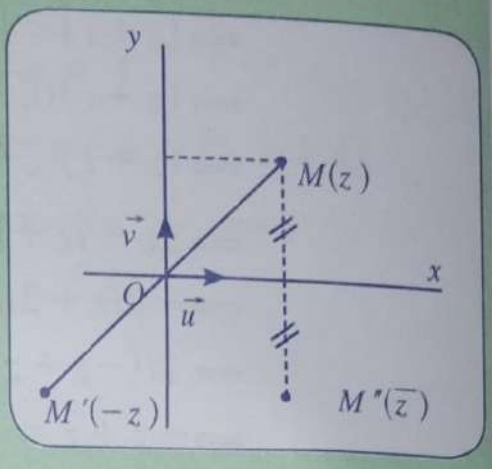
- Inversement, à tout point $M(x;y)$ du plan, on associe le nombre complexe $z=x+iy$.

On dit que z est l'affixe du point M, et on note z_M. On dit aussi que z est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$, et on note $z_{\overrightarrow{OM}}$.

- Si A et B sont deux points du plan, alors l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est z_B-z_A on écrit: $\boxed{z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A}$
- L'affixe du point S tel que: $\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OM'}$ est $z_S=z_M+z_{M'}$ (le quadrilatère $OMSM'$ est un parallélogramme).

ProfSalmi.blogspot.com

- ($ABCD$ est un parallélogramme) $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
  $\Leftrightarrow (z_B - z_A = z_C - z_D)$
- L'affixe du point P tel que : $\overrightarrow{OP} = k.\overrightarrow{OM}$ avec k réel, est $z_P = kz$.
- Les deux points $M(z)$ et $M'(-z)$ sont symétriques par rapport au point O (l'origine du repère).
- Les deux points $M(z)$ et $M''(\overline{z})$ sont symétriques par rapport à l'axe réel (l'axe des abscisses).



- L'affixe du point I milieu du segment $[AB]$ est le nombre complexe: $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$
- Les points A, B et C sont alignés si et seulement si $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}$ est un réel.

(A, B et C sont alignés) $\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R})\ ; \overrightarrow{BA} = k.\overrightarrow{CA}$
$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R})\ ; z_A - z_B = k(z_A - z_C)$

- Le module de z est la distance OM avec $M(z)$: $\boxed{|z| = OM}$
- La distance entre deux points A et B est le module de : $z_A - z_B$:

$\boxed{AB = |z_B - z_A| = |z_A - z_B|}$

Exercices

Exercice 14

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$.
Soit A, B, C, D, E et F les points d'affixes respectives :
$a = 1+3i$, $b = -2-i$, $c = i$, $d = -3$, $e = -2i$ et $f = \sqrt{3}\,i - \frac{1}{2}$

1. Déterminer les coordonnées de chacun de ces points.
2. Déterminer l'affixe de chacun des points suivants:
   $G(-1;1)$, $H(\sqrt{3};-\sqrt{2})$, $I(-4;0)$ et $J(0;5)$
3. Déterminer l'affixe de chacun des points K , L et N les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[CF]$ et $[GH]$ où G et H sont les points de la question 2)
4. On considère les vecteurs: $\vec{w}(3;-2)$, $\vec{t} = 4\vec{u} - \vec{v}$ et $\vec{m} = -2\vec{t} + 3\vec{w}$
   Déterminer l'affixe de chacun des vecteurs $\vec{w}$, $\vec{t}$ et $\vec{m}$.
5. Déterminer l'affixe de chacun des vecteurs suivants: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{IF}$ et $\overrightarrow{HB}$.

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 15

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$.

1. Placer les points $A(3+i)$, $B(-2+3i)$, $C\left(-3+\frac{1}{2}i\right)$ et $D\left(2-\frac{3}{2}i\right)$
2. Calculer $|z_B - z_A|$, $|z_D - z_A|$, BC et DC
3. Montrer que : $(AB) \,//\, (DC)$
4. Montrer que le triangle ABC est rectangle en B, puis déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.

Exercice 16

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$.

A tout nombre complexe z distinct de -1. on associe le nombre $X = \frac{z+2i}{z+1}$

1. On pose : $z = x + yi$ avec $(x;y) \in \mathbb{R}^2$ et $(x;y) \neq (-1;0)$
   - a. Exprimer $\mathrm{Re}(X)$ et $\mathrm{Im}(X)$ en fonction de x et y.
   - b. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que X est un réel.
   - c. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que X est un imaginaire pur.
2. Soit A et B les points d'affixes respectives $a = -2i$ et $b = -1$
   - a. Déterminer géométriquement (Δ), L'ensemble des points $M(z)$ tels que : $|X| = 1$
   - b. Déterminer algébriquement l'ensemble (Δ).

Exercice 17

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$.

Déterminer, dans chacun des cas suivants, l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie la relation donnée :

1. $|z+1-2i| = 3$
2. $|\overline{z}-2-i| = 1$
3. $|iz-1+i| = 2$
4. $|\overline{z}+2-3i| = |z+i|$
5. $|-2i\overline{z}^2| = 8$

Exercice 18

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$a = 2+i$, $b = -1+i$ et $c = -1-2i$

ProfSalmi.blogspot.com

1 Placer les points A, B et C.

2 Déterminer la nature du triangle ABC.

3 En déduire le centre et le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

Exercice 19

Le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$.

A tout nombre complexe z distinct de $-i$, on associe le nombre complexe:

$f(z)=\dfrac{z-2+i}{z+i}$

1 On pose: $u=f(i)$, $v=f(-2i)$ et $w=f(2)$

a. Vérifier que : $u=1+i$, $v=1-2i$ et $w=\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{5}i$

b. Ecrire sous forme algébrique chacun des nombres complexes suivants:

$z_1=\dfrac{u}{v}$, $z_2=\overline{u}^2 v$ et $z_3=5w\overline{v}$

2 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a. $f(z)=2i$

b. $f(z)=\dfrac{2}{3}$

c. $f(z)=0$

3 On pose: $z=x+iy$ avec : $(x;y)\in\mathbb{R}^2-\{(0;-1)\}$

a. Démontrer que : $\mathrm{Re}(f(z))=\dfrac{x^2+y^2-2x+2y+1}{x^2+(y+1)^2}$

b. En déduire (C) l'ensemble des points $M(z)$ tels que $f(z)$ est imaginaire pur.

4 a. Prouver que pour tout $z\in\mathbb{C}-\{-i\}$, on a: $\overline{f(z)}=f(z)\iff z-\overline{z}+2i=0$

b. En déduire (Δ) l'ensemble des points $M(z)$ tels que $f(z)$ est réel.

5 Déterminer (H) l'ensemble des points $M(z)$ tels que : $|f(z)|=1$

Solutions

Solution 14

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$.

1 Le passage de l'affixe aux coordonnées:

- On a : $z_A=1+3i$ donc : $A(1;3)$
- On a : $z_B=-2-i$ donc: $B(-2;-1)$
- On a : $z_C=i$ donc : $C(0;1)$

ProfSalmi.blogspot.com

- On a : $z_D = -3$ donc : $D(-3;0)$
- On a : $z_E = -2i$ donc : $E(0;-2)$
- On a : $z_F = \sqrt{3}i - \frac{1}{2}$ donc : $F\left(-\frac{1}{2};\sqrt{3}\right)$

2 Le passage des coordonnées à l'affixe

On a : $G(-1;1)$ donc : $z_G = -1+i$

On a : $H(\sqrt{3};-\sqrt{2})$ donc : $z_H = \sqrt{3}-\sqrt{2}i$

On a : $I(-4;0)$ donc : $z_I = -4$

On a : $J(0;5)$ donc : $z_J = 5i$

3 Affixe du milieu d'un segment :

On a : K est le milieu du segment $[AB]$

Donc : $z_K = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{(1+3i)+(-2-i)}{2} = \frac{-1+2i}{2} = -\frac{1}{2}+i$

On a : L est le milieu du segment $[CF]$

Donc : $z_L = \frac{z_C + z_F}{2} = \frac{i+\sqrt{3}i-\frac{1}{2}}{2} = -\frac{1}{4}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}i$

On a : N est le milieu du segment $[GH]$

Donc : $z_N = \frac{z_G + z_H}{2} = \frac{(-1+i)+(\sqrt{3}-\sqrt{2}i)}{2} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}+\frac{1-\sqrt{2}}{2}i$

4 Affixe d'un vecteur :

- On a : $\vec{w}(3;-2)$ alors : $z_{\vec{w}} = 3-2i$, $\vec{u}(1;0)$ et $\vec{v}(0;1)$

Donc : $z_{\vec{u}} = 1$ et $z_{\vec{v}} = i$

Et on a : $\vec{t} = 4\vec{u} - \vec{v}$

Donc : $z_{\vec{t}} = 4z_{\vec{u}} - z_{\vec{v}} = 4-i$

On a : $\vec{m} = -2\vec{t} + 3\vec{w}$

Donc : $z_{\vec{m}} = -2z_{\vec{t}} + 3z_{\vec{w}}$

$= -2(4-i)+3(3-2i)$

$= -8+2i+9-6i$

$= 1-4i$

5 Affixe d'un vecteur :

$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = -2-i-(1+3i) = -3-4i$

$z_{\overrightarrow{CD}} = z_D - z_C = -3-i$

$z_{\overrightarrow{IF}} = z_F - z_I = \left(\sqrt{3}i-\frac{1}{2}\right)-(-4) = \frac{7}{2}+\sqrt{3}i$

$z_{\overrightarrow{HB}} = z_B - z_H = -2-i-(\sqrt{3}-\sqrt{2}i) = (-2-\sqrt{3})+(\sqrt{2}-1)i$

ProfSalmi.blogspot.com

Solution 15

$(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$ repère orthonormé

1 **Plaçons les points** $A(3+i)$, $B(-2+3i)$ **et** $C\left(-3+\frac{1}{2}i\right)$ **et** $D\left(2-\frac{3}{2}i\right)$

2 ▸ $|z_B - z_A| = |(-2+3i)-(3+i)|$

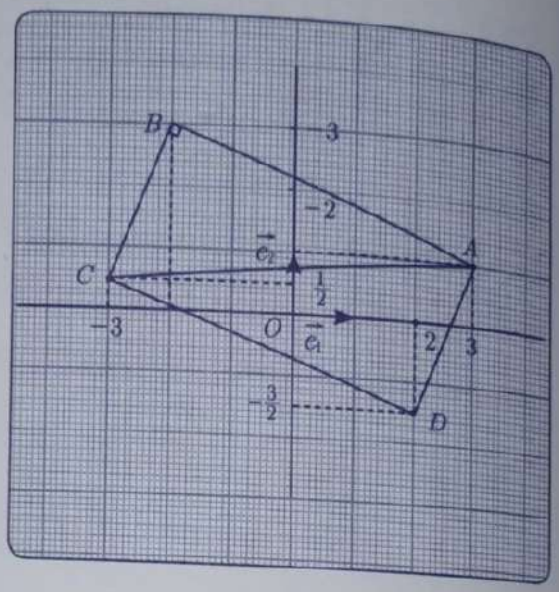
$= |-5+2i|$

$= \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$

▸ $|z_D - z_A| = \left|\left(2-\frac{3}{2}i\right)-(3+i)\right|$

$= \left|-1-\frac{5}{2}i\right|$

$= \sqrt{1+\frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{29}{4}} = \frac{\sqrt{29}}{2}$



▸ $BC = |z_C - z_B|$

$= \left|-3+\frac{1}{2}i-(-2+3i)\right|$

$= \left|-1-\frac{5}{2}i\right|$

$= \sqrt{1+\frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{29}}{2}$

▸ $DC = |z_C - z_D| = \left|-3+\frac{1}{2}i-\left(2-\frac{3}{2}i\right)\right| = |-5+2i| = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$

3 **Montrons que :** $(AB) \,/\!/\, (DC)$

On a : $z_B - z_A = (-2+3i)-(3+i) = -5+2i$

$z_C - z_D = \left(-3+\frac{1}{2}i\right)-\left(2-\frac{3}{2}i\right) = -5+2i$

On remarque : $z_B - z_A = z_C - z_D$

Donc : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

D'où: $ABCD$ est un parallélogramme.

D'où: $(AB) \,/\!/\, (DC)$

info:

$(AB) \,/\!/\, (DC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont colinéairrs

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{DC}$; $k \in \mathbb{R}$

4 **Montrons que le triangle** ABC **est rectangle en** B.

Méthode 1: (utiliser le théorème de pythagore)

On a : $BC = \frac{\sqrt{29}}{2}$

$AB = |z_B - z_A| = \sqrt{29}$

$AC = |z_C - z_A| = \left|\left(-3+\frac{1}{2}i\right)-(3+i)\right|$

$= \left|-6-\frac{1}{2}i\right| = \sqrt{36+\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{145}}{2}$

ProfSalmi.blogspot.com

On a : $AC^2 = \frac{145}{4}$ et $AB^2 + BC^2 = \frac{29}{4} + 29 = \frac{145}{4}$

Donc : $AB^2 + BC^2 = AC^2$

D'où le triangle ABC est rectangle en B.

Déduisons la nature du quadrilatère $ABCD$:

On a : $ABCD$ est un parallélogramme et ABC est un triangle rectangle en B.

Donc : $ABCD$ est un rectangle.

Méthode 2: (utiliser le produit scalaire)

On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}.\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\-\frac{5}{2}\end{pmatrix} = 5 - 5 = 0$

info:

(Le triangle ABC est rectangle en B) $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = 0$

Donc : $(AB) \perp (BC)$ d'où le triangle ABC est rectangle en B.

Solution 16

1 a. Déterminons $\mathrm{Re}(X)$ et $\mathrm{Im}(X)$ en fonction de x et y.

$X = \frac{z+2i}{z+1}$; $z \in \mathbb{C} - \{-1\}$

On pose : $z = x + yi$ avec $(x;y) \in \mathbb{R}^2$ et $(x;y) \neq (-1;0)$

On a : $X = \frac{x+yi+2i}{x+yi+1} = \frac{x+(y+2)i}{(x+1)+yi}$

$= \frac{(x+(y+2)i)((x+1)-yi)}{((x+1)+yi)((x+1)-yi)}$

$= \frac{x(x+1)+y(y+2)+(-yx+(y+2)(x+1))i}{(x+1)^2+y^2}$

$= \frac{x^2+y^2+x+2y}{(x+1)^2+y^2} + \left(\frac{2x+y+2}{(x+1)^2+y^2}\right)i$

Donc : $\mathrm{Re}(X) = \frac{x^2+y^2+x+2y}{(x+1)^2+y^2}$ et $\mathrm{Im}(X) = \frac{2x+y+2}{(x+1)^2+y^2}$

b. Déterminons l'ensemble: $E_1 = \{M(z) \in \mathcal{P} \,/\, X \in \mathbb{R}\}$

$M(z) \in E_1 \Leftrightarrow X \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \mathrm{Im}(X) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{2x+y+2}{(x+1)^2+y^2} = 0$ et $(x;y) \neq (-1;0)$

$\Leftrightarrow 2x + y + 2 = 0$ et $(x;y) \neq (-1;0)$

$\Leftrightarrow y = -2x - 2$ et $(x;y) \neq (-1;0)$

Donc : E_1 est la droite d'équation $y = -2x - 2$ privé du point $A(-1;0)$.

ProfSalmi.blogspot.com

c. Déterminons l'ensemble: $E_2 = \{M(z) \in \mathcal{P} \,/\, X \in i\mathbb{R}\}$

$$M(z) \in E_2 \iff X \in i\mathbb{R}$$
$$\iff \text{Re}(X) = 0$$
$$\iff \frac{x^2+y^2+x+2y}{(x+1)^2+y^2} = 0 \text{ et } (x;y) \neq (-1;0)$$
$$\iff x^2+y^2+x+2y = 0 \quad \text{et} \quad (x;y) \neq (-1;0)$$
$$\iff \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + (y+1)^2 - 1 = 0 \text{ et } (x;y) \neq (-1;0)$$
$$\iff \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + (y+1)^2 = \frac{5}{4} \text{ et } (x;y) \neq (-1;0)$$

Donc, l'ensemble E_2 est le cercle de centre $\Omega\left(-\frac{1}{2};-1\right)$ et de rayon $r = \frac{\sqrt{5}}{2}$ privé du point $A(-1;0)$.

2 a. Déterminons géométriquement l'ensemble: $(\Delta) = \{M(z) \in \mathcal{P} / |X| = 1\}$

$$M(z) \in (\Delta) \iff |X| = 1$$
$$\iff \left|\frac{z+2i}{z+1}\right| = 1$$
$$\iff \frac{|z+2i|}{|z+1|} = 1$$
$$\iff |z-(-2i)| = |z-(-1)|$$
$$\iff |z_M - z_A| = |z_M - z_B|$$
$$\iff AM = BM$$

Donc, l'ensemble (Δ) est la médiatrice du segment $[AB]$ avec : $B(-2i)$ et $A(-1)$.

b. Déterminons algébriquement l'ensemble (Δ).

Soit : $z = x + yi$; avec : $(x;y) \in \mathbb{R}^2$ et $(x;y) \neq (-1;0)$

On a : $M(z) \in (\Delta) \iff |z+2i| = |z+1|$
$$\iff |x+yi+2i| = |x+yi+1|$$
$$\iff |x+(y+2)i| = |(x+1)+yi|$$
$$\iff \sqrt{x^2+(y+2)^2} = \sqrt{(x+1)^2+y^2}$$
$$\iff x^2+(y+2)^2 = (x+1)^2+y^2$$
$$\iff x^2+y^2+4y+4 = x^2+2x+1+y^2$$
$$\iff 2x-4y-3 = 0$$

Donc l'ensemble (Δ) est la droite d'équation $2x-4y-3=0$ (remarquer que: $A(-1;0) \notin \Delta$).

ProfSalmi.blogspot.com

Solution 17

$(O;\vec{u};\vec{v})$ est un repère orthonormé.

1 Déterminons l'ensemble: $E_1 = \{M(z) \in \mathcal{P} / |z+1-2i| = 3\}$

Méthode géométrique:

$$M(z) \in E_1 \Leftrightarrow |z-(-1+2i)| = 3$$
$$\Leftrightarrow |z_M - z_A| = 3 \quad \text{avec : } A(-1+2i) ;$$
$$\Leftrightarrow AM = 3$$
$$\Leftrightarrow M \in \mathscr{C}(A;3)$$

Donc, l'ensemble E_1 est le cercle $\mathscr{C}$ de centre $A(-1+2i)$ et de rayon 3.

Méthode algébrique :

On pose : $z = x + yi$ avec : $(x;y) \in \mathbb{R}^2$

$$M(z) \in E_1 \Leftrightarrow |z+1-2i| = 3$$
$$\Leftrightarrow |x+yi+1-2i| = 3$$
$$\Leftrightarrow |(x+1)+(y-2)i| = 3$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2} = 3$$
$$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y-2)^2 = 9$$

Donc, l'ensemble E_1 est le cercle de centre $A(-1;2)$ et de rayon $r = \sqrt{9} = 3$.

info:
On désigne par $\mathscr{C}(A;r)$ où $r \in \mathbb{R}_+^*$ le cercle de centre A et de rayon r.

info:
$(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$ et $r > 0$ est l'équation du cercle de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon r.

2 Déterminons l'ensemble: $E_2 = \{M(z) \in \mathcal{P} / |\overline{z}-2-i| = 1\}$

Méthode géométrique :

$$M(z) \in E_2 \Leftrightarrow |\overline{z}-2-i| = 1$$
$$\Leftrightarrow |\overline{\overline{z}-2-i}| = 1 \text{ ; (car: } |\overline{Z}| = |Z|)$$
$$\Leftrightarrow |z-2+i| = 1$$
$$\Leftrightarrow |z-(2-i)| = 1$$
$$\Leftrightarrow |z_M - z_B| = 1 \quad \text{; avec : } B(2-i)$$
$$\Leftrightarrow BM = 1$$
$$\Leftrightarrow M \in \mathscr{C}(B;1)$$

Donc l'ensemble E_2 est le cercle de centre B et de rayon 1.

ProfSalmi.blogspot.com

Méthode algébrique :

Soit : $z = x + yi$ avec: x et y deux réels.

$$\begin{aligned} M(z) \in E_2 &\Leftrightarrow |\overline{z} - 2 - i| = 1 \\ &\Leftrightarrow |x - yi - 2 - i| = 1 \\ &\Leftrightarrow |(x-2) + (-y-1)i| = 1 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (-y-1)^2} = 1 \\ &\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = 1 \end{aligned}$$

Donc, l'ensemble E_2 est le cercle de centre $B(2;-1)$ et de rayon $r = \sqrt{1} = 1$.

3 Déterminons l'ensemble: $E_3 = \{M(z) \in \mathcal{P} / |iz - 1 + i| = 2\}$

Méthode géométrique :

$$\begin{aligned} M(z) \in E_3 &\Leftrightarrow |iz - 1 + i| = 2 \\ &\Leftrightarrow \left|i\left(z - \frac{1}{i} + 1\right)\right| = 2 \\ &\Leftrightarrow |i| \times |z + i + 1| = 2 \\ &\Leftrightarrow |z - (-1 - i)| = 2 \\ &\Leftrightarrow |z_M - z_C| = 2 \qquad \text{avec } C(-1-i) \\ &\Leftrightarrow CM = 2 \\ &\Leftrightarrow M \in \mathcal{C}(C;2) \end{aligned}$$

Donc, l'ensemble E_3 est le cercle $C(-1;-1)$ et de rayon $r = 2$.

Méthode algébrique :

Soit : $z = x + yi$ avec : $(x;y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} M(z) \in E_3 &\Leftrightarrow |iz - 1 + i| = 2 \\ &\Leftrightarrow |i(x + yi) - 1 + i| = 2 \\ &\Leftrightarrow |ix - y - 1 + i| = 2 \\ &\Leftrightarrow |(-1-y) + (x+1)i| = 2 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (-1-y)^2} = 2 \\ &\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y+1)^2 = 4 \end{aligned}$$

Donc, l'ensemble E_3 est le cercle de centre $C(-1;-1)$ et de rayon $r = \sqrt{4} = 2$.

4 Déterminons l'ensemble: $E_4 = \{M(z) \in \mathcal{P} / |\overline{z} + 2 - 3i| = |z + i|\}$

Méthode géométrique :

ProfSalmi.blogspot.com

$$M(z)\in E_4 \Leftrightarrow |\overline{z}+2-3i|=|z+i|$$
$$\Leftrightarrow |\overline{\overline{z}+2-3i}|=|z+i|$$
$$\Leftrightarrow |z+2+3i|=|z+i|$$
$$\Leftrightarrow |z-(-2-3i)|=|z-(-i)| \text{ avec } A(-2-3i) \text{ et } B(-i).$$
$$\Leftrightarrow AM=BM$$

Donc, l'ensemble E_4 est la médiatrice du segment $[AB]$.

Méthode algébrique : Soit: $z=x+yi$ avec : $(x;y)\in\mathbb{R}^2$

$$M(z)\in E_4 \Leftrightarrow |\overline{z}+2-3i|=|z+i|$$
$$\Leftrightarrow |x-yi+2-3i|=|x+yi+i|$$
$$\Leftrightarrow |(x+2)+(-3-y)i|=|x+(y+1)i|$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2+(-3-y)^2}=\sqrt{x^2+(y+1)^2}$$
$$\Leftrightarrow x^2+4x+4+y^2+6y+9=x^2+y^2+2y+1$$
$$\Leftrightarrow 4x+4y+12=0$$
$$\Leftrightarrow x+y+3=0$$

Donc, l'ensemble E_4 est la droite d'équation $x+y+3=0$.

5 Déterminons l'ensemble : $E_5=\{M(z)\in\mathcal{P}/|-2i\overline{z}^2|=8\}$

Méthode géométrique :

$$M(z)\in E_5 \Leftrightarrow |-2i\overline{z}^2|=8$$
$$\Leftrightarrow |\overline{-2i\overline{z}^2}|=8$$
$$\Leftrightarrow |2iz^2|=8$$
$$\Leftrightarrow |2i|\times|z^2|=8$$
$$\Leftrightarrow 2\times|z^2|=8$$
$$\Leftrightarrow |z|^2=4$$
$$\Leftrightarrow |z|=2$$
$$\Leftrightarrow OM=2$$
$$\Leftrightarrow M\in\mathcal{C}(O;2)$$

Donc, l'ensemble E_5 est le cercle de centre O et de rayon $r=2$

Méthode algébrique:

Soit : $z=x+yi$ avec: $(x;y)\in\mathbb{R}^2$; $M(z)\in(E_5)$

$$\Leftrightarrow |-2i\overline{z}^2|=8$$
$$\Leftrightarrow |2i|\times|\overline{z}|^2=8$$
$$\Leftrightarrow 2\times|z|^2=8$$
$$\Leftrightarrow |z|=2$$
$$\Leftrightarrow |x+yi|=2$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2}=2$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2=4$$

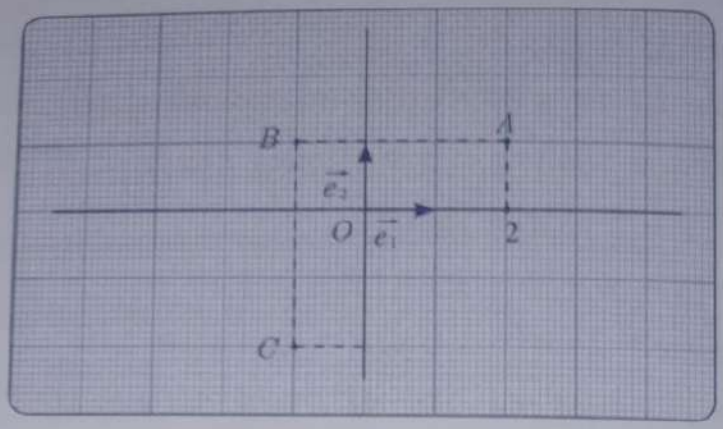
Donc, l'ensemble E_5 est le cercle de centre O de rayon $r=2$.

ProfSalmi.blogspot.com

Solution 18

$(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$ est un repère orthonormé

1 Plaçons les points : $A(2+i)$, $B(-1+i)$ **et** $C(-1-2i)$



2 Déterminons la nature du triangle ABC :

Méthode 1:

On remarque que les deux points A et B ont la même ordonnée et les deux points B et C ont la même abscisse.

Donc : $(AB)\ /\!/\ (O;\vec{e_1})$ et $(BC)\ /\!/\ (O;\vec{e_2})$, puisque le repère est orthogonal alors : $(AB)\perp(BC)$

D'où le triangle ABC est rectangle en B.

Méthode 2:

- On a : $\overrightarrow{AB}(z_B-z_A)$ et $z_B-z_A=(-1+i)-(2+i)=-3$

$\overrightarrow{BC}(z_C-z_B)$ et $z_C-z_B=-1-2i-(-1+i)=-3i$

Donc : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}\cdot\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}=(-3\times0)+0\times(-3)=0$

D'où : $(AB)\perp(BC)$

Vérifions que le triangle ABC est isocèle.

On a : $AB=|z_B-z_A|=|-3|=3$

Et $BC=|z_C-z_B|=|-3i|=3$

Donc : $AB=BC$ d'où le triangle ABC est rectangle et isocèle en B.

3 Déduisons le centre et le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC

Le triangle ABC est rectangle en B.

ProfSalmi.blogspot.com

Donc, le centre du cercle $\mathscr{C}$ est le milieu I du segment $[AC]$

$z_I = \dfrac{z_A + z_C}{2} = \dfrac{2+i-1-2i}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$

Le rayon du cercle $(\mathscr{C})$ est : $r = \dfrac{AC}{2}$

$= \dfrac{|z_C - z_A|}{2}$

$= \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

Solution 19

$f(z) = \dfrac{z-2+i}{z+i}$; $z \neq -i$

1 $u = f(i)$ et $v = f(-2i)$ et $w = f(2)$

a. Vérifions : $u = 1+i$ et $v = 1-2i$ et $w = \dfrac{1}{5} + \dfrac{2}{5}i$

- $u = f(i) = \dfrac{i-2+i}{i+i}$

$= \dfrac{-2+2i}{2i} = \dfrac{-1}{i} + 1 = i + 1 = 1 + i$

- $v = f(-2i) = \dfrac{-2i-2+i}{-2i+i}$

$= \dfrac{-2-i}{-i}$

$= -2i + 1 = 1 - 2i$

- $w = f(2) = \dfrac{2-2+i}{2+i} = \dfrac{i(2-i)}{(2+i)(2-i)}$

$= \dfrac{2i+1}{4+1} = \dfrac{1}{5} + \dfrac{2}{5}i$

b. Ecrivons sous forme algébrique les nombres complexes:

$z_1 = \dfrac{u}{v}$ **et** $z_2 = \overline{u}^2 v$ **et** $z_3 = 5w\overline{v}$

- $z_1 = \dfrac{u}{v} = \dfrac{1+i}{1-2i} = \dfrac{(1+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \dfrac{1+2i+i-2}{1+4}$

$= \dfrac{-1}{5} + \dfrac{3}{5}i$

- $z_2 = \overline{u}^2 v = (1-i)^2 \times (1-2i) = -2i(1-2i)$

$= -2i - 4 = -4 - 2i$

ProfSalmi.blogspot.com

$z_3 = 5w\overline{v} = 5\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i\right)\left(\overline{1-2i}\right)$

$= (1+2i)(1+2i)$

$= 1+2\times(2i)+(2i)^2 = -3+4i$

2 a. Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 2i$

Soit z de $\mathbb{C}-\{-i\}$

$f(z) = 2i \iff \frac{z-2+i}{z+i} = 2i$

$\iff z-2+i = 2i(z+i)$

$\iff z-2+i = 2iz-2$

$\iff z-2iz = -i$

$\iff (1-2i)z = -i$

$\iff z = \frac{-i(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}$

$\iff z = \frac{2-i}{1+4}$

$\iff z = \frac{2}{5}-\frac{1}{5}i$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation $f(z) = 2i$ est : $S = \left\{\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i\right\}$

b. Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = \frac{2}{3}$

$f(z) = \frac{2}{3} \iff \frac{z-2+i}{z+i} = \frac{2}{3}$

$\iff 3(z-2+i) = 2(z+i)$

$\iff z-6+3i-2i = 0$

$\iff z = 6-i$

Donc : $S = \{6-i\}$

c. Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$

$f(z) = 0 \iff \frac{z-2+i}{z+i} = 0$

$\iff z-2+i = 0$

$\iff z = 2-i$

Donc: $S = \{2-i\}$

3 a. Déterminons $\mathrm{Re}(f(z))$ en fonction de x et y.

$z = x+iy$; $(x;y) \in \mathbb{R}^2$ tels que : $(x;y) \neq (0;-1)$

ProfSalmi.blogspot.com

On a : $f(z)=\dfrac{z-2+i}{z+i}$

$$=\frac{x+yi-2+i}{x+yi+i}$$

$$=\frac{((x-2)+(y+1)i)\times(x-(y+1)i)}{(x+(y+1)i)(x-(y+1)i)}$$

$$=\frac{(x-2)x+(y+1)^2+[-(x-2)(y+1)+x(y+1)]i}{x^2+(y+1)^2}$$

$$=\frac{x^2-2x+y^2+2y+1}{x^2+(y+1)^2}+\left(\frac{2y+2}{x^2+(y+1)^2}\right)i$$

Donc : $\mathrm{Re}(f(z))=\dfrac{x^2+y^2-2x+2y+1}{x^2+(y+1)^2}$

b. Déduisons l'ensemble: $E_1=\{M(z)\in\mathcal{P}/f(z)\in i\mathbb{R}\}$

$M(z)\in E_1 \iff f(z)\in i\mathbb{R}$

$\iff \mathrm{Re}(f(z))=0$

$\iff \dfrac{x^2+y^2-2x+2y+1}{x^2+(y+1)^2}=0$ et $(x;y)\neq(0;-1)$

$\iff x^2+y^2-2x+2y+1=0$ et $(x;y)\neq(0;-1)$

$\iff (x-1)^2-1+(y+1)^2-1+1=0$ et $(x;y)\neq(0;-1)$

$\iff (x-1)^2+(y+1)^2=1$ et $(x;y)\neq(0;-1)$

Donc, l'ensemble E_1 est le cercle de centre $I(1;-1)$ et de rayon $r=\sqrt{1}=1$ privé du point $I(0;-1)$.

4 a. Montrer que : $\overline{f(z)}=f(z)\iff z-\overline{z}+2i=0$

Soit z de $\mathbb{C}-\{-i\}$ on a :

$$\overline{f(z)}=f(z) \iff \overline{\left(\frac{z-2+i}{z+i}\right)}=\frac{z-2+i}{z+i}$$

$$\iff \frac{\overline{z}-2-i}{\overline{z}-i}=\frac{z-2+i}{z+i}$$

$$\iff (\overline{z}-2-i)(z+i)=(\overline{z}-i)(z-2+i)$$

$$\iff z\overline{z}+i\overline{z}-2z-2i+1-iz=z\overline{z}-2\overline{z}+i\overline{z}-iz+2i+1$$

$$\iff -2z-2i=-2\overline{z}+2i$$

$$\iff -2z+2\overline{z}-4i=0$$

$$\iff z-\overline{z}+2i=0$$

b. Déduisons l'ensemble : $E_2=\{M(z)\in\mathcal{P}\ /\ f(z)\in\mathbb{R}\}$

ProfSalmi.blogspot.com

$M(z) \in E_2 \Longleftrightarrow f(z) \in \mathbb{R}$

$\Longleftrightarrow \overline{f(z)} = f(z)$

$\Longleftrightarrow z - \overline{z} + 2i = 0$

$\Longleftrightarrow 2i\,\mathrm{Im}(z) + 2i = 0$

$\Longleftrightarrow \mathrm{Im}(z) = -1$

$\Longleftrightarrow y = 1$ (tel que: $z = x + yi$ et $(x;y) \in \mathbb{R}^2$)

Donc, l'ensemble E_2 est la droite d'équation $y = -1$ privée du point $I(0;-1)$.

5 Déterminons l'ensemble : $H = \{M(z) \in \mathcal{P} / |f(z)| = 1\}$

$M(z) \in H \Longleftrightarrow |f(z)| = 1$

$\Longleftrightarrow \left|\frac{z-2+i}{z+i}\right| = 1$

$\Longleftrightarrow \frac{|z-2+i|}{|z+i|} = 1$

$\Longleftrightarrow |z-(2-i)| = |z-(-i)|$

$\Longleftrightarrow AM = IM$; où: $I(-i)$ et $A(2-i)$

Donc, l'ensemble H est la médiatrice du segment $[IA]$ tel que : $I(-i)$ et $A(2-i)$.

5 Argument et forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

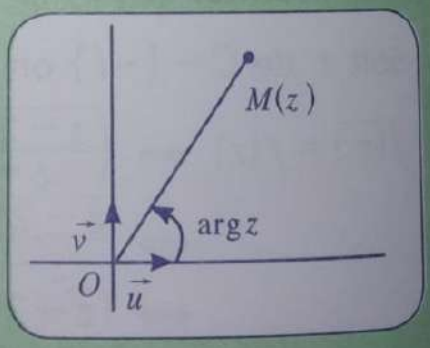
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$

Définition:

Soit z un nombre complexe non nul et M le point d'affixe z.

On appelle argument de z toute mesure en radian de l'angle orienté $(\vec{u};\overrightarrow{OM})$ et on note $\arg z$.

On écrit : $\arg z \equiv \overline{(\vec{u};\overrightarrow{OM})}[2\pi]$



Remarque : 0 est l'unique nombre complexe qui n'a pas d'argument.

Soit z un nombre complexe et b un nombre réel. On a:

$(z \in \mathbb{R}) \Longleftrightarrow (z = 0$ ou $\arg(z) = k\pi$; $(k \in \mathbb{Z}))$

ProfSalmi.blogspot.com

- $(z \in \mathbb{R}^{+*}) \Leftrightarrow \arg(z) = 2k\pi \; ; (k \in \mathbb{Z})$
- $(z \in \mathbb{R}^{-*}) \Leftrightarrow \arg(z) = \pi + 2k\pi \; ; (k \in \mathbb{Z})$
- $(z \in i\,\mathbb{R}) \Leftrightarrow (z = 0 \text{ ou } \arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi \; ; k \in \mathbb{Z})$
- Si : $b > 0$, alors : $\arg(bi) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \; ; \; k \in \mathbb{Z}$
- Si : $b < 0$, alors : $\arg(bi) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \; ; k \in \mathbb{Z}$

- (Argument de $-z$) : $\arg(-z) = \pi + \arg(z) + 2k\pi \; ; k \in \mathbb{Z}$
- (Argument de $\overline{z}$) : $\arg(\overline{z}) = -\arg(z) + 2k\pi \; ; k \in \mathbb{Z}$

Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul :

Soit z un nombre complexe non nul tel que : $z = a + bi$ avec $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ et $(a;b) \neq (0;0)$ et $|z| = r (r \in \mathbb{R}^{*+})$

On pose $\arg(z) \equiv \theta[2\pi]$ on a : $\begin{cases} \cos\theta = \frac{a}{r} \\ \sin\theta = \frac{b}{r} \end{cases}$

donc : $a = r\cos\theta$ et $b = r\sin\theta$

d'où: $z = a + bi = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

L'écriture : $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $\theta \equiv \arg(z)[2\pi]$ est appelée forme trigonométrique du nombre complexe non nul z.

Si z est un nombre complexe non nul tel que $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ avec $r > 0$, alors $|z| = r$ et $\arg(z) \equiv \alpha[2\pi]$

Si z et z' sont deux nombres complexes non nuls

alors : $z = z' \Leftrightarrow (|z| = |z'| \text{ et } \arg z \equiv \arg z'[2\pi])$

Remarque :

$$\cos\theta - i\sin\theta = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$$

$$-\cos\theta + i\sin\theta = \cos(\pi - \theta) + i\sin(\pi - \theta)$$

$$-\cos\theta - i\sin\theta = \cos(\pi + \theta) + i\sin(\pi + \theta)$$

$$\sin\theta + i\cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

1. $\arg(z \times z') \equiv \arg z + \arg z'[2\pi]$: (pour tout z et z de $\mathbb{C}^*$)
2. $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg z[2\pi]$: (pour tout z de $\mathbb{C}^*$)
3. $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg z - \arg'[2\pi]$: (pour tout z et z de $\mathbb{C}^*$)

ProfSalmi.blogspot.com

4 $\arg(z^n) \equiv n \arg z [2\pi]$ pour tout n de $\mathbb{Z}$ et z de $\mathbb{C}^*$

Si : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = r'(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ avec $r > 0$ et $r' > 0$ alors : $z \times z' = rr'(\cos(\theta+\alpha) + i\sin(\theta+\alpha))$

et $\frac{1}{z} = \frac{1}{r(\cos\theta + i\sin\theta)} = \frac{1}{r}(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$

et $\frac{z'}{z} = \frac{r'(\cos\alpha + i\sin\alpha)}{r(\cos\theta + i\sin\theta)} = \frac{r'}{r}(\cos(\alpha-\theta) + i\sin(\alpha-\theta))$

et $z^n = (r(\cos\theta + i\sin\theta))^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$

et $-z = -r(\cos\theta + i\sin\theta) = r(\cos((\pi+\theta) + i\sin(\pi+\theta))$

et $\overline{z} = r(\overline{\cos\theta + i\sin\theta}) = r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ soit $A(z_A)$; $B(z_B)$; $C(z_C)$ et $D(z_D)$ quatre points du plan.

On a : $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{AB}) \equiv \arg(z_B - z_A)[2\pi]$ et $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}) \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$

Alignement de trois points:

- A ; B et C sont alignés si et seulement si $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = k\ \pi\ ; k\in\mathbb{Z}$ (A ; B et C sont 2 à 2 distincts)
- parallélisme et orthogonalité de deux droites:

$(AB) /\!/ (CD) \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_D - z_C}\right) = k\pi \ ;\ k\in\mathbb{Z}$

$(AB) \perp (CD) \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_D - z_C}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi\ ; k\in\mathbb{Z}$

(tel que $A \neq B$ et $C \neq D$)

Remarque :

- L'écriture $z = [r;\theta]$ ne représente plus une forme trigonométrique!
- Toute forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul doit s'écrire forcément: $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ où r est un réel strictement positif (**le module**) et θ un réel (**un argument**).

Exercices

Exercice 20

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.
Déterminer géométriquement un argument de chacun des nombres complexes suivants (en utilisant un graphique)

1 $z_1 = 2$

2 $z_2 = \sqrt{3}$

3 $z_3 = -5$

4 $z_4 = 1 - \sqrt{7}$

ProfSalmi.blogspot.com

5 $z_5 = i$

6 $z_6 = -2i$

7 $z_7 = 1 + i$

8 $z_8 = 1 - i$

Exercice 21

Écrire sous forme trigonométrique chacun des nombres complexes suivants :

1 $z_1 = 1 + \sqrt{3}\,i$

2 $z_2 = \sqrt{3} + i$

3 $z_3 = 2 + 2i$

4 $z_4 = \sqrt{3} - 3i$

5 $z_5 = -2\sqrt{3} + 2i$

3 $z_6 = -\sqrt{3} - \sqrt{3}\,i$

Exercice 22

1 Déterminer le module et un argument de chacun des deux nombres complexes : $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 1 - \sqrt{3}\,i$

2 En déduire le module, un argument et une forme trigonométrique de chacun des nombres suivants :

$z_3 = (1+i)\times(1-\sqrt{3}\,i)$ et $z_4 = \dfrac{1}{1-\sqrt{3}\,i}$ et $z_5 = \dfrac{1+i}{1-\sqrt{3}\,i}$ et $z_6 = (1-\sqrt{3}\,i)^{2016}$

3 a. Écrire z_5 sous forme algébrique;

b. En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{7\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{7\pi}{12}$ puis $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$

Exercice 23 Interprétation géométrique

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$

On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $a = 1 + 3i$ et $b = 7 - i$ et $c = 5 + 9i$

1 Montrer que : $\dfrac{c-a}{b-a} = i$

2 Déterminer une mesure de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)$.

3 En déduire la nature du triangle ABC.

Exercice 24 Bac 2013

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $a = 7 + 2i$, $b = 4 + 8i$ et $c = -2 + 5i$

1 a. Vérifier que : $(1+i)(-3+6i) = -9 + 3i$

ProfSalmi.blogspot.com

b. Montrer que: $\frac{c-a}{b-a} = 1+i$

2 En déduire que : $AC = \sqrt{2}AB$ et donner une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})$.

Exercice 25 **Bac 2009**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives: $a = 2-2i$ et $b = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ et $c = 1+\sqrt{3}+i(1-\sqrt{3})$

1 Écrire sous forme trigonométrique chacun des deux nombres a et b.

2 Montrer que : $OA = OC$

3 Vérifier que $c = ab$

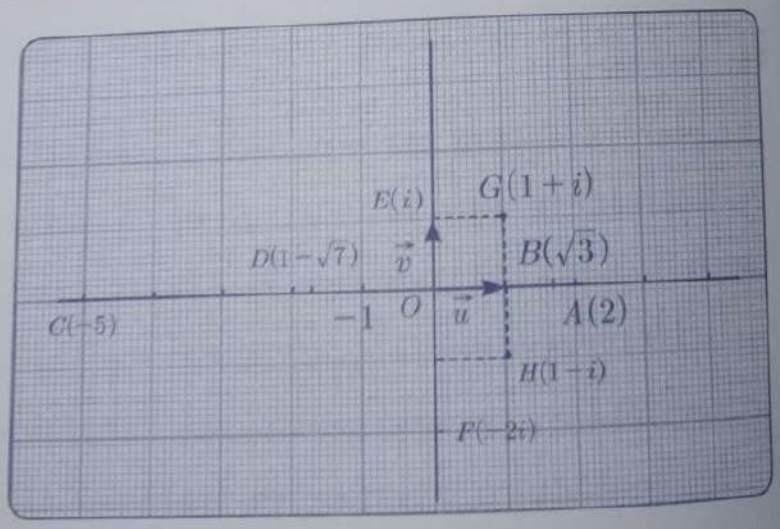
4 En déduire un argument du nombre c puis une forme trigonométrique du nombre c.

5 Quelle est la nature du triangle OAC ?

6 Démontrer que la droite (AD) est perpendiculaire à la droite (OB) où $D(1+(\sqrt{3}-2)i)$

Solutions

Solution 20



Si $M(z)$

Alors : $\arg z \equiv (\vec{u},\overrightarrow{OM})[2\pi]$

On a : $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont colinéaires avec $\vec{u}$ et de même sens que $\vec{u}$ donc, $(\vec{u},\overrightarrow{OB}) \equiv 0[2\pi]$

et $(\vec{u},\overrightarrow{OA}) \equiv 0[2\pi]$

Donc, $\arg(2) \equiv 0[2\pi]$

et $\arg(\sqrt{3}) \equiv 0[2\pi]$

On a : $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OD}$ sont colinéaires à $\vec{u}$ et de sens contraire à $\vec{u}$

donc: $\arg(-5) \equiv \pi[2\pi]$

$\arg(1-\sqrt{7}) \equiv \pi[2\pi]$

ProfSalmi.blogspot.com

On a : $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{OE}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{OF}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Donc : $\arg(i) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $\arg(-2i) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

On a : $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{OG}) \equiv \frac{1}{2}(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})[2\pi]$

Alors : $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{OG}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ donc : $\arg(1+i) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

On a : $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{OH}) \equiv \frac{1}{2}(\overrightarrow{u};-\overrightarrow{v})[2\pi]$ donc : $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{OH}) \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$

D'ou: $\arg(1-i) \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$

Solution 21

Rappel : Soit $z = x + iy$ avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

On pose : $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$

On a : $z = r\left(\frac{x}{r} + i\frac{y}{r}\right)$

Donc : $\exists!\theta \in]-\pi;\pi]$; $\cos\theta = \frac{x}{r}$ et $\sin\theta = \frac{y}{r}$

D'où : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

Écrivons des formes trigonométrique des nombres complexes

1 On a : $|z_1| = 2$ alors : $z_1 = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Donc : $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

2 On a : $|z_2| = 2$ alors : $z_2 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$

$= 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

3 On a : $|z_3| = 2\sqrt{2}$ alors : $z_3 = 2\sqrt{2}\left(\frac{2}{2\sqrt{2}} + i\frac{2}{2\sqrt{2}}\right)$

Donc : $z_3 = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

4 On a : $z_4 = \sqrt{3} - 3i$ alors : $|z_4| = \sqrt{3+9} = 2\sqrt{3}$

Donc : $z_4 = 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} - \frac{3}{2\sqrt{3}}i\right)$

$= 2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

D'où : $z_4 = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

ProfSalmi.blogspot.com

5 On a : $z_5 = -2\sqrt{3} + 2i$ alors : $|z_5| = \sqrt{12+4} = 4$

Donc : $z_5 = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

D'où : $z_5 = 4\left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)\right)$

Ainsi : $z_5 = 4\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$

6 On a : $z_6 = -\sqrt{3} - \sqrt{3}i$ alors : $|z_6| = \sqrt{6}$

donc : $z_6 = \sqrt{6}\left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}i\right)$

$= \sqrt{6}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$= \sqrt{6}\left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)\right)$

D'où : $z_6 = \sqrt{6}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$

Solution 22

1 On a : $z_1 = 1 + i$ donc : $|z_1| = \sqrt{2}$

Donc : $z_1 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

D'où: $\arg(z_1) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ et $|z_1| = \sqrt{2}$

On a aussi : $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$ qui s'écrit $z_2 = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Donc : $z_2 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

D'où : $\arg(z_2) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$ et $|z_2| = 2$

2 ▸ On a : $z_3 = z_1 \times z_2$

donc : $|z_3| = |z_1 \| z_2| = 2\sqrt{2}$

Et $\arg(z_3) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2)[2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

Ainsi : $\arg(z_3) \equiv -\frac{\pi}{12}[2\pi]$

▸ On a : $z_4 = \frac{1}{z_2}$

Donc : $|z_4| = \frac{1}{|z_2|} = \frac{1}{2}$ et $\arg(z_4) \equiv -\arg(z_2)[2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

ProfSalmi.blogspot.com

▸ On a : $z_5 = \frac{z_1}{z_2}$

Donc : $|z_5| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Et $\arg(z_5) \equiv \arg(z_1) - \arg(z_2)[2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}[2\pi]$

D'où : $\arg(z_5) \equiv \frac{7\pi}{12}[2\pi]$

▸ On a : $z_6 = z_2^{2016}$ Donc : $|z_6| = |z_2|^{2016} = 2^{2016}$

Et $\arg(z_6) \equiv 2016 \arg(z_2)[2\pi]$

Ainsi $\arg(z_6) \equiv -\frac{2016}{3}\pi \ [2\pi]$

Puisque : $-\frac{2016}{3}\pi = -672\pi$

Alors : $\arg(z_6) \equiv 0 \ [2\pi]$

3 a. On a : $z_5 = \frac{1+i}{1-i\sqrt{3}}$

$z_5 = \frac{(1+i)(1+i\sqrt{3})}{1+3}$

$z_5 = \frac{1+i\sqrt{3}+i-\sqrt{3}}{4}$

Donc : $z_5 = \frac{1-\sqrt{3}}{4} + i\left(\frac{\sqrt{3}+1}{4}\right)$

b. On a : $z_5 = \left(\frac{1-\sqrt{3}}{4}\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}+1}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)$

Donc : $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\frac{1-\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

Et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\frac{1+\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

Or : $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}$ D'où : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = -\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

ProfSalmi.blogspot.com

Solution 23

1 On a : $a = 1+3i$ et $b = 7-i$ et $c = 5+9i$

Alors : $c-a = 4+6i$ et $b-a = 6-4i = -i\,(4+6i)$

Donc : $\frac{c-a}{b-a} = \frac{1}{-i} = i$ (car $i\times(-i) = 1$)

2 On a : $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \equiv \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)[2\pi]$

Puisque : $\frac{c-a}{b-a} = i$ alors: $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

3 On a : $\frac{c-a}{b-a} = i$ alors : $\left|\frac{c-a}{b-a}\right| = 1$ (car $|i| = 1$)

Donc : $|c-a| = |b-a|$ et $AC = AB$

et comme ı : $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

D'où le triangle : ABC est isocèle et rectangle en A.

Solution 24

1 a. On a : $(1+i)(-3+6i) = -3+6i-3i-6$

Donc : $(1+i)(-3+6i) = -9+3i$

b. On a : $\frac{c-a}{b-a} = \frac{-9+3i}{-3+6i} = \frac{(1+i)(-3+6i)}{-3+6i}$ (d'aprés 1) a)

Donc : $\frac{c-a}{b-a} = 1+i$

2 On a : $|1+i| = \sqrt{2}$

Donc : $1+i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

Par suite : $\frac{c-a}{b-a} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

D'où : $\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ c'est-à-dire : $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ et $\frac{AC}{AB} = \sqrt{2}$

Ainsi : $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ et $AC = \sqrt{2}AB$

ProfSalmi.blogspot.com

Solution 25

1 On a : $|a| = |2-2i| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$

D'où : $a = 2\sqrt{2}\left(\frac{2}{2\sqrt{2}} - \frac{2}{2\sqrt{2}}i\right) = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Donc : $a = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

Et $b = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

2 On a : $OC = |c| = \sqrt{(1+\sqrt{3})^2 + (1-\sqrt{3})^2}$

$= \sqrt{1+2\sqrt{3}+3+1-2\sqrt{3}+3}$

$= \sqrt{8}$

$= 2\sqrt{2} = |a|$

$= OA$

D'où: $OC = OA$

3 On a : $ab = (2-2i)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

$= \sqrt{3} + i - i\sqrt{3} + 1$

$= (\sqrt{3}+1) + i(1-\sqrt{3})$

$= c$

4 Puisque : $c = ab$

Alors : $\arg(c) \equiv \arg a + \arg(b) \quad [2\pi]$

$\equiv -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \quad [2\pi]$

d'où : $\arg(c) \equiv -\frac{\pi}{12} \quad [2\pi]$

Puisque: $|c| = 2\sqrt{2}$ alors : $c = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$

5 On a : $OA = OC$ et $\left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}\right) \equiv \arg(a) - \arg(c)[2\pi]$

$\equiv -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12}[2\pi]$

$\equiv -\frac{\pi}{6} \quad [2\pi]$

D'où le triangle OAC est isocèle

6 Montrons que: $(AD) \perp (OB)$

Méthode 1:

On a : $\overrightarrow{AD}(-1;\sqrt{3})$ et $\overrightarrow{OB}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

D'où : $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{AD} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

ProfSalmi.blogspot.com

D'où (AD) est orthogonale à (OB)

Méthode 2 :

On a : $d-a=(1+(\sqrt{3}-2)i)-(2-2i)$

$=1+\sqrt{3}i-2i-2+2i$

$=-1+i\sqrt{3}$

Donc : $\frac{d-a}{b}=\frac{i(\sqrt{3}+i)}{\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)}=2i$

D'où : $\arg\left(\frac{d-a}{b}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]$

Par suite : $(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{AD})\equiv\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]$

Ainsi : $(AD)\perp(OB)$

6 Les équations du second degré à une inconnue et à coefficients réels dans $\mathbb{C}$

1. L'équation $z^2=a$ avec $a\in\mathbb{R}^*$

On considère dans $\mathbb{C}$ L'équation : $z^2=a$ avec $a\in\mathbb{R}^*$

- Si $a>0$, alors l'équation $z^2=a$ admet deux solutions réelles : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$
- Si $a<0$, alors l'équation $z^2=a$ admet deux solutions complexes et conjuguées : $i\sqrt{-a}$ et $-i\sqrt{-a}$

2. Equation $az^2+bz+c=0$ tels que : $a\in\mathbb{R}^*$; b et c deux réels

Définition:

- Toute équation de la forme $az^2+bz+c=0$ tels que $a\in\mathbb{R}^*$ et b et c deux réels (où z est l'inconnue avec $z\in\mathbb{C}$) est appelée équation du second degré à une inconnue et à coefficients réels dans l'ensemble $\mathbb{C}$.
- Le réel $\Delta=b^2-4ac$ s'appelle le discriminant de l'équation (E) : $az^2+bz+c=0$
- Si : $\Delta>0$, alors l'équation (E) admet deux solutions réelles:

$z_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

- Si : $\Delta=0$, alors l'équation (E) admet une unique solution réelle : $z=\frac{-b}{2a}$

ProfSalmi.blogspot.com

- Si : $\Delta < 0$, alors l'équation (E) admet deux solutions complexes distinctes et conjuguées: $z_1 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \overline{z_1} = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

3. Factorisation de $az^2 + bz + c$ - Somme et produit des deux racines

- Si l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet deux solutions z_1 et z_2, alors on a :
$(\forall z \in \mathbb{C})\ ; az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$
Et on a : $z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $z_1 \times z_2 = \dfrac{c}{a}$
- Si l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet une solution unique z_0, alors :
$(\forall z \in \mathbb{C})\ ; az^2 + bz + c = a(z - z_0)^2$

Exercices

Exercice 26

1 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E)\ z^2 - 2z + 2 = 0$

2 En déduire les solutions des équations suivantes :

$(E_1)\ ; (z - 2i)^2 - 2(z - 2i) + 2 = 0$

$(E_2)\ ; (i\overline{z} + 3i + 3)^2 - 2(i\overline{z} + 3i + 3) + 2 = 0$

$(E_3) : \left(\dfrac{z+i}{z-1}\right)^2 - 2\left(\dfrac{z+i}{z-1}\right) + 2 = 0$

Exercice 27

Soit θ un nombre réel.

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation: $(E_\theta) : z^2 - 4\sqrt{2}(\cos\theta)z + 4\cos^2\theta + 4 = 0$

1 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les deux équations (E_0) et $(E_{\frac{\pi}{2}})$
(c'est-à-dire : pour $\theta = 0$ puis pour $\theta = \dfrac{\pi}{2}$)

2 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ) tel que $\theta \in]-\pi\ ;\ \pi[- \{0\}$

Exercice 28

On pose : $f(z) = z^4 - 6z^3 + 14z^2 - 24z + 40$

1 Déterminer y de $\mathbb{R}^*$ tel que $f(yi) = 0$

2 Déterminer les réels a et b tels que :

$(\forall z \in \mathbb{C})\ ; f(z) = (z - iy)(z + iy)(z^2 + az + b)$

3 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 29

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$

On pose : $P(z)=z^3-z^2+2$ où $z \in \mathbb{C}$

1. Calculer $P(-1)$
2. Déterminer les nombres a et b tels que :
$(\forall z \in \mathbb{C})\ ; P(z)=(z+1)(z^2+az+b)$
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^3-z^2+2=0$
4. Ecrire les solutions de l'équation $P(z)=0$ sous forme trigonométrique.
5. Soit z_0 la solution réelle de l'équation $P(z)=0$ et z_1, z_2 les solutions complexes avec $\mathrm{Im}(z_1)>0$

On considère les points $A(z_0)$ et $B(z_1)$ et $C(z_2)$

a. Calculer AB et AC

b. En déduire la nature du triangle ABC.

Solutions

Solution 26

1. Résolvons l'équation $(E) : z^2-2z+2=0$

On a : $\Delta=b^2-4ac=-4$

Donc : $z_1=\dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\dfrac{2+2i}{2}=1+i$

Et $z_2=\overline{z_1}=1-i$

D'où : $S=\{1-i\ ;1+i\}$

2. Déduisons les solutions de l'équation: $(E_1) : (z-2i)^2-2(z-2i)+2=0$

On pose: $Z=z-2i$

L'équation (E_1) devient alors: $Z^2=2Z+2=0$

et d'après la question 1) $Z=1+i$ ou $Z=1-i$

- $Z=1+i \Leftrightarrow z-2i=1-i$
$\Leftrightarrow z=1+3i$
- $Z=1-i \Leftrightarrow z-2i=1-i$
$\Leftrightarrow z=1+i$

Donc : $S=\{1+3i\ ,1+i\}$

- $(E_2) : (i\overline{z}+3i+3)^2-2(i\overline{z}+3i+3)+2=0$

On pose: $Z=i\overline{z}+3i+3$

$(E_2) \Leftrightarrow z^2-2z+2=0$
$\Leftrightarrow z=1+i$ ou $z=1-i$
$\Leftrightarrow i\overline{z}+3i+3=1-i$ ou $i\overline{z}+3i+3=1+i$

ProfSalmi.blogspot.com

$\Leftrightarrow i\overline{z} = -2-4i$ ou $i\overline{z} = -2-2i$

$\Leftrightarrow \overline{z} = \dfrac{-2-4i}{i}$ ou $\overline{z} = \dfrac{-2-2i}{i}$

$\Leftrightarrow \overline{z} = -i(-2-4i)$ ou $\overline{z} = -i(-2-2i)$

$\Leftrightarrow \overline{z} = -4+2i$ ou $\overline{z} = -2+2i$

$\Leftrightarrow z = \overline{-4+2i}$ ou $z = \overline{-2+2i}$

$\Leftrightarrow z = -4-2i$ ou $z = -2-2i$

Donc : $S = \{-2-2i\ ,-4-2i\}$

▸L'équation: $(E_3) : \left(\dfrac{z+i}{z-1}\right)^2 - 2\left(\dfrac{z+i}{z-1}\right)+2=0$, est définie sur $\mathbb{C}-\{1\}$:

On pose: $Z = \dfrac{z+i}{z-1}$

$(E_3) \Leftrightarrow Z^2-2Z+2=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{z+i}{z-1} = 1-i$ ou $\dfrac{z+i}{z-1} = 1+i$

$\Leftrightarrow z+i = (1-i)z-1+i$ ou $z+i = (1+i)z-1-i$

$\Leftrightarrow iz = -1$ ou $-iz = -1-2i$

$\Leftrightarrow iz = i^2$ ou $-iz = i(i-2)$

$\Leftrightarrow z = i$ ou $z = 2-i$

Donc : $S = \{2-i\ ;i\}$

Solution 27

Soit θ un nombre réel

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E_\theta)\ ; z^2-4\sqrt{2}(\cos\theta)z+4\cos^2\theta+4=0$

1 ▸Résolution de l'équation (E_0), $(E_0) : z^2-4\sqrt{2}z+8=0$ (pour $\theta=0$)

On a : $\Delta = (4\sqrt{2})^2-4\times 8 = 0$

D'où : $z_1 = z_2 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$, Donc : $S = \{2\sqrt{2}\}$

Info : $\cos 0 = 1$

▸**Résolvons l'équation** $(E_{\frac{\pi}{2}})$

$(E_{\frac{\pi}{2}})\ ; z^2+4=0$ c'est-à-dire $z^2=-4$ d'où $z=-2i$ ou $z=2i$

Donc : $S = \{2i\ ,-2i\}$

Info : $\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$

2 Résolvons l'équation (E_θ) dans le cas où: $\theta \in]-\pi;\pi[-\{0\}$

$\Delta = b^2-4ac$

$\Delta = (4\sqrt{2}\cos\theta)^2-4(4\cos^2\theta+4)$

$= 32\cos^2\theta-16\cos^2\theta-16 = 16(\cos^2\theta-1) = -16\sin^2(\theta)$

On a : $\Delta<0$ donc l'équation (E_θ) admet deux solutions complexes conjuguées :

ProfSalmi.blogspot.com

Dans le cas où : $0 < \theta < \pi$; on a : $\sqrt{-\Delta} = 4|\sin\theta| = 4\sin\theta$

D'où : $z_1 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \dfrac{4\sqrt{2}\cos\theta + i4\sin\theta}{2} = 2\sqrt{2}\cos\theta + 2i\sin\theta$

Et on a : $z_2 = \overline{z_1} = 2\sqrt{2}\cos\theta - 2i\sin\theta$

Dans le cas où : $-\pi < \theta < 0$ on a : $\sqrt{-\Delta} = 4|\sin\theta| = -4\sin\theta$

D'où : $z_1 = \dfrac{4\sqrt{2}\cos\theta - 4i\sin\theta}{2} = 2\sqrt{2}\cos\theta - 2i\sin\theta$

Et $z_2 = \overline{z_1} = 2\sqrt{2}\cos\theta + 2i\sin\theta$

Dans les deux cas, on a : $S = \{2\sqrt{2}\cos\theta + 2i\sin\theta \ ; 2\sqrt{2}\cos\theta - 2i\sin\theta\}$

Solution 28

1 On a : $f(z) = z^4 - 6z^3 + 14z^2 - 24z + 40$

Soit y de $\mathbb{R}^*$

On a : $f(iy) = y^4 + 6iy^3 - 14y^2 - 24iy + 40$

$= y^4 - 14y^2 + 40 + i(6y^3 - 24y)$

Donc : $f(iy) = 0 \iff \begin{cases} y^4 - 14y^2 + 40 = 0 & (1) \\ 6y^3 - 24y = 0 & (2) \end{cases}$

Info : $i^3 = -i$ et $i^4 = 1$

On a : $(2) \iff 6y(y^2 - 4) = 0$

$\iff y^2 - 4 = 0$; (car $(y \in \mathbb{R}^*)$

$\iff (y - 2)(y + 2) = 0$

$\iff y = 2$ ou $y = -2$

On vérifie que 2 et -2 sont aussi solution de l'équation (1).

Remarque: On peut aussi résoudre l'équation (1) et prendre les solutions communes aux deux équations:

Résolvons l'équation $(1) \iff y^4 - 14y^2 + 40 = 0$

Donc : $f(iy) = 0 \iff y = 2$ ou $y = -2$

D'où l'équation $f(z) = 0$ admet deux solutions qui sont : $-2i$; $2i$

On pose : $t = y^2$; l'équation (1) devient : $t^2 - 14t + 40 = 0$

$(t - 4)(t - 10) = 0$

Donc : $t = 10$ ou $t = 4$

D'où : $y^2 = 10$ ou $y^2 = 4$

Info : $(x^2 - (a+b)x + ab = (x - a)(x - b))$

Ainsi : $y = -\sqrt{10}$ ou $y = \sqrt{10}$ ou $y = -2$ ou $y = 2$. Donc 2 et -2 sont les

ProfSalmi.blogspot.com

solutions du système.

2 Déterminons a et b tels que : $f(z)=(z-2i)(z+2i)(z^2+az+b)$ pour tout z de $\mathbb{C}$.

On a : $(z-2i)(z+2i)=(z^2+4)$

Donc : $f(z)=(z^2+4)(z^2+az+b)$

D'ou: $(z^2+4)(z^2+az+b) = z^4+(4+b)z^2+az^3+4az+4b$

$= z^4+az^3+(4+b)z^2+4az+4b$

Et on a : $f(z)=z^4-6z^3+14z^2-24z+40$; d'après l'égalité de deux polynômes, on a : $\begin{cases} a=-6 \\ 4+b=14 \\ 4a=-24 \\ 4b=40 \end{cases}$

D'où : $b=10$ et $a=-6$

Donc $f(z)=(z-2i)(z+2i)(z^2-6z+10)$

3 Résolvons l'équation : $f(z)=0$

On a : $f(z)=0 \iff (z-2i)(z+2i)(z^2-6z+10)=0$

$\iff z=2i$ ou $z=-2i$ ou $z^2-6z+10=0$

Résolvons l'équation $z^2-6z+10=0$

$\Delta=b^2-4ac=36-40=-4$

D'où : $z_1=\dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\dfrac{6+2i}{2}=3+i$ et $z_2=\overline{z_1}=3-i$

Donc, l'ensemble de solutionsde l'équation $f(z)=0$ est :

$S=\{2i\ ;-2i;3+i;3-i\}$

Solution 29

1 $P(z)=z^3-z^2+2$

On a : $P(-1)=-1-1+2=0$

2 Déterminons a et b tels que $P(z)=(z+1)(z^2+az+b)$ pour tout z de $\mathbb{C}$

Soit $z\in\mathbb{C}$; on a : $(z+1)(z^2+az+b)=z^3+az^2+bz+z^2+az+b$

$=z^3+(a+1)z^2+(a+b)z+b$

D'après l'égalité de deux polynômes (ou par identification)

On a : $\begin{cases} a+1=-1 \\ a+b=0 \\ b=2 \end{cases} \iff \begin{cases} a=-2 \\ b=2 \end{cases}$

ProfSalmi.blogspot.com

Donc : $P(z) = (z+1)(z^2-2z+2)$ pour tout z de $\mathbb{C}$

3 Résolvons l'équation $P(z) = 0$

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z+1)(z^2-2z+2) = 0$$
$$\Leftrightarrow z = -1 \text{ ou } z^2-2z+2 = 0$$

Résolvons l'équation : $z^2-2z+2=0$

$\Delta = b^2-4ac = 4-8 = -4$

D'où l'équation admet deux solutions complexes conjuguées.

$$z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{2+i2}{2} = 1+i$$

Et $z_2 = \overline{z_1} = 1-i$

Donc, l'ensemble des solutions de l'équation $P(z)=0$ est $\{-1; 1+i; 1-i\}$

4 Ecrivons les solutions de l'équation $P(z)=0$ sous forme trigonométrique

On a : ▸ $z_0 = -1 = \cos\pi + i\sin\pi$

▸ $z_1 = 1+i$ donc: $|z_1| = \sqrt{2}$

$$z_1 = 1+i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

D'où : $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

Et on a : $z_2 = \overline{z_1} = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

info:

Si $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$; alors : $\overline{z} = r(\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha))$

5 On a : $z_0 = -1$; $z_1 = 1+i$ et $z_2 = 1-i$

$A(z_0)$; $B(z_1)$ et $C(z_2)$

a. ▸ On a : $AB = |z_B - z_A| = |z_1 - z_0| = |1+i+1| = |2+i|$

Et $|2+i| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$ d'où: $AB = \sqrt{5}$

▸ On a $AC = |z_2 - z_0| = |1-i+1| = |2-i| = \sqrt{5}$

D'où : $AC = AB = \sqrt{5}$

b. Déduisons la nature du triangle ABC :

▸ On a: $AB = AC$ donc le triangle ABC est isocèle en A.

▸ On a : $BC = |z_C - z_B| = |z_2 - z_1| = |1-i-(1+i)| = |-2i| = 2$

On a : $BC \neq AB$ le triangle ABC n'est donc ni équilatéral, ni rectangle.

Conclusion: le triangle ABC est isocèle en A.

ProfSalmi.blogspot.com

7 Notation exponentielle d'un nombre complexe non nul

Définition:

Soit z un nombre complexe non nul;

Si : $|z| = r$ et $\arg z \equiv \theta [2\pi]$ alors z s'écrit sous forme : $z = re^{i\theta}$; cette écriture est appelée **forme exponentielle** du nombre complexe z.

Et on a : $r(\cos\theta + i \sin\theta) = re^{i\theta}$.

1. Notation exponentielle et opérations

Soit $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$ tels que $r > 0$ et $r' > 0$

On a : $\boxed{z \times z' = re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}}$

$\boxed{\frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}}$ et $\boxed{\frac{z}{z'} = \frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}}$

$\boxed{\overline{z} = re^{i\theta} = re^{-i\theta}}$ et $\boxed{-z = -re^{i\theta} = re^{i(\theta+\pi)}}$

2. Formules d'Euler

Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $\boxed{\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}}$ et $\boxed{\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}}$

3. Formule de Moivre

$(\forall \theta \in \mathbb{R}) ; (\forall n \in \mathbb{N}) ; (\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$

C'est-à-dire : $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

Exercices

Exercice 30

Mettre sous forme exponentielle chacun des nombres suivants:

1. $z_1 = 2(\cos\frac{\pi}{5} - i \sin\frac{\pi}{5})$
2. $z_2 = 3(-\cos\frac{\pi}{7} + i \sin\frac{\pi}{7})$
3. $z_3 = \sqrt{2}(-\cos\frac{\pi}{9} - i \sin\frac{\pi}{9})$
4. $z_4 = -\sqrt{3}(\cos\frac{\pi}{11} + i \sin\frac{\pi}{11})$
5. $z_5 = \frac{3}{2}i$
6. $z_6 = -7$
7. $z_7 = 2 + 2i$
8. $z_8 = -\sqrt{3} - 3i$

Exercice 31

Écrire sous forme exponentielle le nombre complexe z dans chacun des cas suivants :

1. $z = \frac{-2}{\sqrt{3} + i}$
4. $z = (3 - \sqrt{3}i)(-1 + i)$

ProfSalmi.blogspot.com

2 $z = \dfrac{2+2i}{\sqrt{3}+i}$

3 $z = (1-\sqrt{3}\,i)^{2016}$

5 $z = i(1+\sqrt{3}\,i)(-1-i)^3$

6 $z = \dfrac{\sqrt{3}-i}{(-2+2i)^2}$

Exercice 32

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.
On considère les points A, B et C d'affixes respectives z_A, z_B et z_C.
Les points A, B et C sont distincts deux à deux et non alignés.
Déterminer la nature du triangle ABC dans chacun des cas suivants :

1 $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{i\frac{\pi}{2}}$

2 $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

3 $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}$

4 $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{i\frac{\pi}{4}}$

Exercice 33

1 Etablir que : $1 + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}})$ et $1 - e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}})$

2 Écrire sous forme trigonométrique chacun des deux nombres :
$z_1 = 1 + \cos\left(\dfrac{2\pi}{7}\right) + i\,\sin\left(\dfrac{2\pi}{7}\right)$ et $z_2 = 1 - \left(\cos\dfrac{\pi}{5} + i\,\sin\dfrac{\pi}{5}\right)$

3 Écrire sous forme trigonométrique chacun des deux nombres :
$z_3 = 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$ et $z_4 = 2 - \sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$

Exercice 34

Linéariser chacune des expressions suivantes : $\cos^2 x$; $\sin^2 x$; $\cos^3 x$; $\sin^3 x$ et $\cos^2 x \sin^3 x$.

Exercice 35

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $a = 8i$, $b = 4\sqrt{3} - 4i$ et $c = 2(4\sqrt{3} + 4i)$

1 Démontrer que : $\dfrac{a-b}{c-b} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

2 Déterminer une mesure de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}}\right)$.

3 En déduire la nature du triangle ABC.

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 36

On considère le nombre complexe: $z = \sqrt{2} + 1 + i$

1. Montrer que : $z = \sqrt{2}(1 + e^{i\frac{\pi}{4}})$
2. En déduire que : $z = 2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8}e^{i\frac{\pi}{8}}$
3. Montrer que : $2\cos^2\frac{\pi}{8} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$
4. En déduire la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$

Exercice 37

On pose $a = \frac{\sqrt{3}+i}{1+i\sqrt{3}}$ et $b = \frac{6-4i}{5+i}$

Écrire a et b sous forme exponentielle.

Exercice 38

Écrire le nombre complexe $z = -\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$ sous forme trigonométrique.

(Indication : Calculer z^2)

Exercice 39

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$

I) On considère les nombres complexes suivants : $z_1 = \sqrt{3} - i$; $z_2 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ et $z_3 = \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$

1. Écrire sous forme trigonométrique : z_1 ; z_2 et z_3
2. En déduire la valeur exacte de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$
3. Montrer que : ${z_2}^{2016}$ est un réel et que ${z_2}^{2018}$ est un imaginaire pur.

II) On pose : $z' = \frac{iz+1-i}{z-i}$ pour tout z de $\mathbb{C} - \{i\}$

On considère les points $A(i)$; $B(1+i)$; $M(z)$ et $M'(z')$

1. Déterminer géométriquement l'ensemble $(E) = \{M(z)/|z'| = 1\}$
2. Démontrer que : $AM' \times AM = 1$
3. Montrer que: $(\overrightarrow{u;AM'}) + (\overrightarrow{u;AM}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

ProfSalmi.blogspot.com

Solution 30

1 On a : $z_1 = 2(\cos\frac{\pi}{5} - i\ \sin\frac{\pi}{5})$

$= 2(\cos(\frac{-\pi}{5}) + i\sin(\frac{-\pi}{5})) = 2e^{-i\frac{\pi}{5}}$

donc : $z_1 = 2e^{-i\frac{\pi}{5}}$

2 On a : $z_2 = 3(-\cos\frac{\pi}{7} + i\ \sin\frac{\pi}{7})$

$= 3(\cos(\pi - \frac{\pi}{7}) + i\sin(\pi - \frac{\pi}{7})$

$= 3(\cos(\frac{6\pi}{7}) + i\sin(\frac{6\pi}{7}) = 3e^{i\frac{6\pi}{7}}$

donc : $z_2 = 3e^{i\frac{6\pi}{7}}$

3 On a : $z_3 = \sqrt{2}(-\cos\frac{\pi}{9} - i\ \sin\frac{\pi}{9})$

$= \sqrt{2}(\cos(\pi + \frac{\pi}{9}) + i\sin(\pi + \frac{\pi}{9}))$

$= \sqrt{2}(\cos(\frac{10\pi}{9}) + i\sin(\frac{10\pi}{9})) = \sqrt{2}e^{i\frac{10\pi}{9}}$

donc: $z_3 = \sqrt{2}e^{i\frac{10\pi}{9}}$

4 On a : $z_4 = -\sqrt{3}(\cos\frac{\pi}{11} + i\ \sin\frac{\pi}{11})$

$= \sqrt{3}(-\cos(\frac{\pi}{11}) - i\sin(\frac{\pi}{11}))$

$= \sqrt{3}(\cos(\pi + \frac{\pi}{11}) + i\sin(\pi + \frac{\pi}{11}))$

$= \sqrt{3}(\cos(\frac{12\pi}{11}) + i\sin(\frac{12\pi}{11}))$

$= \sqrt{3}e^{i\frac{12\pi}{11}}$

donc : $z_4 = \sqrt{3}e^{i\frac{12\pi}{11}}$

5 On a : $z_5 = \frac{3}{2}i = \frac{3}{2}(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = \frac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$

6 $z_6 = -7 = 7(\cos\pi + i\sin\pi) = 7e^{i\pi}$

donc : $z_6 = 7e^{i\pi}$

7 On a : $z_7 = 2 + 2i = 2\sqrt{2}(\frac{2}{2\sqrt{2}} + \frac{2}{2\sqrt{2}}i)$

$z_7 = 2\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})$

$z_7 = 2\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = 2\sqrt{2}\ e^{i\frac{\pi}{4}}$

ProfSalmi.blogspot.com

donc : $z_7 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

8) On a : $z_8 = -\sqrt{3} - 3i$

Alors : $|z_8| = \sqrt{3+9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

Donc : $z_8 = 2\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} - \frac{3}{2\sqrt{3}}i\right)$

$= 2\sqrt{3}(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)$

$= 2\sqrt{3}(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin(\pi + \frac{\pi}{3})$

$= 2\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin(\frac{4\pi}{3})\right)$

D'où : $z_8 = 2\sqrt{3}e^{i\frac{4\pi}{3}}$

Solution 31

1) On a : : $z = \frac{-2}{\sqrt{3}+i}$ et $-2 = 2(\cos\pi + i\sin\pi) = 2e^{i\pi}$

Et : $\sqrt{3}+i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

Alors: $z = \frac{2e^{i\pi}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}} = e^{i(\pi - \frac{\pi}{6})} = e^{i\frac{5\pi}{6}}$

Donc : $z = e^{i\frac{5\pi}{6}}$

2) On a : $z = \frac{2+2i}{\sqrt{3}+i}$ et $2+2i = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

Et $\sqrt{3}+i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

donc : $z = \frac{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}} = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6})}$

d'où: $z = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{12}}$

3) $z = (1 - \sqrt{3}i)^{2016}$

On a : $|1 - i\sqrt{3}| = 2$

Donc : $1 - i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2(\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)) = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

D'où : $z = (2e^{-i\frac{\pi}{3}})^{2016}$

$= 2^{2016}\,e^{-i\frac{2016}{3}\pi}$

$= 2^{2016}\,e^{-i(672\pi)}$

Ainsi: $z = 2^{2016}e^{io}$ ou $z = 2^{2016}\,e^{i2\pi}$

ProfSalmi.blogspot.com

4 $z = (3 - \sqrt{3}i)(-1 + i)$

On a : $|3 - i\sqrt{3}| = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

Donc : $3 - i\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\left(\frac{3}{2\sqrt{3}} - i\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right)$

$= 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$

$= 2\sqrt{3}\left(\cos(\frac{-\pi}{6}) + i\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right)$

$= 2\sqrt{3}\, e^{-i\frac{\pi}{6}}$

Et on a : $|-1 + i| = \sqrt{2}$

Donc : $-1 + i = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$= \sqrt{2}\left(\cos(\pi - \frac{\pi}{4}) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right)$

$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$

D'où : $z = (3 - \sqrt{3}i)(-1 + i)$

$= 2\sqrt{3}\, e^{-i\frac{\pi}{6}} \times \sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$= 2\sqrt{6}\, e^{i\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{4}\right)}$

$= 2\sqrt{6}\, e^{i\frac{7\pi}{12}}$

5 $z = i(1 + i\sqrt{3})(-1 - i)^3$

On a : $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

- $1 + \sqrt{3}i = 2(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2\, e^{i\frac{\pi}{3}}$
- $-1 - i = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\, e^{i\frac{5\pi}{4}}$

Donc : $z = i(1 + \sqrt{3}i)(-1 - i)^3$

$= e^{i\frac{\pi}{2}} \times 2\, e^{i\frac{\pi}{3}} \times (\sqrt{2})^3 e^{i\frac{15\pi}{4}}$

$= 4\sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + \frac{15\pi}{4}\right)}$

$= 4\sqrt{2} e^{i\frac{55\pi}{12}}$

$= 4\sqrt{2} e^{i\frac{7\pi}{12}}$ (car $\left(\frac{55\pi}{12} - 4\pi = \frac{7\pi}{12}\right)$)

6 $z = \dfrac{\sqrt{3} - i}{(-2 + 2i)^2}$

ProfSalmi.blogspot.com

On a : ▸ $\sqrt{3}-i=2(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2})=2\,e^{-i\frac{\pi}{6}}$

▸ $(-2+2i)^2=4(1-i)^2=-8i=8e^{-i\frac{\pi}{2}}$

Donc : $z=\frac{2e^{-i\frac{\pi}{6}}}{8e^{-i\frac{\pi}{2}}}=\frac{1}{4}e^{i(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2})}=\frac{1}{4}e^{i\frac{\pi}{3}}$

Solution 32

Remarque : Soit r un réel strictement positif et θ un réel.

$$\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=re^{i\theta}\right)\iff \arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)\equiv\theta[2\pi] \text{ et } \left|\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right|=r$$

$$\iff \left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)\equiv\theta[2\pi] \text{ et } \frac{AB}{AC}=r$$

$$\iff \left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)\equiv\theta[2\pi] \text{ et } AB=rAC$$

1 On a : $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=e^{i\frac{\pi}{2}}$

Alors : $\arg\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $\left|\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right|=1$

Donc : $\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $AB=AC$

D'où le triangle ABC est isocèle rectangle en A.

2 : on a : $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=e^{i\frac{\pi}{3}}$

Alors : $\arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ et $\left|\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right|=1$

Donc : $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})=\frac{\pi}{3}[2\pi]$ et $AB=AC$

D'où ABC est un triangle équilatéral.

infos:
Tout triangle isocèle dont l'un des angles mesure $\frac{\pi}{3}$ est un triangle équilatéral.

3 : on a : $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=2e^{-i\frac{\pi}{2}}$

Alors : $\arg\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\equiv\frac{-\pi}{2}[2\pi]$ et $\left|\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right|=2$

C'est-à-dire : $\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)\equiv\frac{-\pi}{2}[2\pi]$ et $\frac{AB}{AC}=2$

Donc : $\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)\equiv\frac{-\pi}{2}[2\pi]$ et $AB=2AC$

D'où le triangle ABC est rectangle en A.

ProfSalmi.blogspot.com

4 : on a : $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{i\frac{\pi}{4}}$

Alors : $\arg\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ et $\left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = 1$

Donc : $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ et $\frac{AB}{AC} = 1$

D'où : $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ et $AB = AC$

Ainsi : le triangle ABC est isocèle en A .

Solution 33

1 Soit $\theta \in \mathbb{R}$, Montrons que: $1 + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}})$

et $1 - e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}})$

info:

- $e^{i\alpha}e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$ et $e^{-i\alpha} = \frac{1}{e^{i\alpha}}$

On a : $e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{\frac{i\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}) = e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2}\right)} + e^{i\frac{\theta}{2}}e^{-i\frac{\theta}{2}}$

$= e^{i\theta} + 1$

Et $e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}) = e^{i\frac{\theta}{2}}e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2}\right)}$ (car : $e^{-i\alpha} \times e^{i\alpha} = 1$)

$= 1 - e^{i\theta}$

Donc : $(\forall\theta \in \mathbb{R}); 1 + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}})$ et $1 - e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}})$

2 Application

info:

- $e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} = 2\cos(\alpha)$
- $e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} = 2i\sin(\alpha)$

$z_1 = 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + i\ \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)$

$= 1 + e^{i\frac{2\pi}{7}}$

$= e^{i\frac{\pi}{7}}(e^{-i\frac{\pi}{7}} + e^{i\frac{\pi}{7}})$

$= e^{i\frac{\pi}{7}}(2\cos\left(\frac{\pi}{7}\right))$

$= 2\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)e^{i\frac{\pi}{7}}$

$= 2\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)(\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7})$

Puisque: $0 < \frac{\pi}{7} < \frac{\pi}{2}$ alors : $\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) > 0$

Donc une forme trigonométrique de z_1 est :

$z_1 = 2\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)(\cos(\frac{\pi}{7}) + i\sin(\frac{\pi}{7}))$

ProfSalmi.blogspot.com

On a : $z_2 = 1 - \left(\cos\frac{\pi}{5} + i\ \sin\frac{\pi}{5}\right)$

$= 1 - e^{i\frac{\pi}{5}}$

$= e^{i\frac{\pi}{10}}(e^{-i\frac{\pi}{10}} - e^{i\frac{\pi}{10}})$

$= e^{i\frac{\pi}{10}}(-2i\ \sin\left(\frac{\pi}{10}\right))$

$= 2\sin\frac{\pi}{10}\, e^{i(\frac{\pi}{10})} \times e^{-i\frac{\pi}{2}}$ $\qquad (-i = e^{-\frac{i\pi}{2}})$

$= 2\sin(\frac{\pi}{10})e^{i(\frac{-2\pi}{5})}$

$= 2\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)\left(\cos\left(\frac{-2\pi}{5}\right) + i\ \sin\left(\frac{-2\pi}{5}\right)\right)$

Et on a : $0 < \frac{\pi}{10} < \frac{\pi}{2}$ donc : $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) > 0$, donc une forme trigonométrique de z_2 est: $z_2 = 2\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)\left(\cos\left(\frac{-2\pi}{5}\right) + i\ \sin\left(\frac{-2\pi}{5}\right)\right)$

3 On a : $z_3 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

$z_3 = 1 + (\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$

$z_3 = 1 + e^{i\frac{\pi}{6}}$

$z_3 = e^{i\frac{\pi}{12}}(e^{i\frac{\pi}{12}} + e^{-i\frac{\pi}{12}})$ $\qquad (\theta = \frac{\pi}{6}\ ;\ \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{12})$

$z_3 = 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)(e^{i\frac{\pi}{12}})$

$= 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})$

Puisque : $0 < \frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{2}$ alors: $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$

donc, une forme trigonométrique du nombre complexe z_3 est :

$z_3 = 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})$

On a : $z_4 = 2 - \sqrt{2} - \sqrt{2}\ i$

$= 2(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i)$

$= 2(1 - (\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}))$

$= 2(1 - (\cos\frac{\pi}{4} + i\ \sin\frac{\pi}{4}))$

$= 2(1 - e^{i\frac{\pi}{4}})$

$= 2e^{i\frac{\pi}{8}}(e^{-i\frac{\pi}{8}} - e^{i\frac{\pi}{8}})$

$= 2e^{i\frac{\pi}{8}}(-2i\ \sin\left(\frac{\pi}{8}\right))$

ProfSalmi.blogspot.com

$$z_4 = 4e^{i\frac{\pi}{8}} \times e^{-i\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

$$z_4 = 4\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$z_4 = 4\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)e^{i\left(\frac{-3\pi}{8}\right)}$$

$$z_4 = 4\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\left(\cos\left(\frac{-3\pi}{8}\right)+i\ \sin\left(\frac{-3\pi}{8}\right)\right)$$

Puisque : $0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$ alors : $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$

Donc, une forme trigonométrique du nombre complexe z_4 est :

$$z_4 = 4\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\left(\cos\left(\frac{-3\pi}{8}\right)+i\ \sin\left(\frac{-3\pi}{8}\right)\right)$$

Solution 34

linéarisation

info:

$$\sin(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} \text{ et } \cos(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$$

▸ On a : $\cos^2 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2 = \frac{e^{i2x} + e^{-2ix} + 2e^{ix}e^{-ix}}{4}$

$$= \frac{2\cos(2x) + 2}{4}$$

$$= \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$$

donc: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$ est la linéarisation de $\cos^2 x$, d'où:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$$

▸ On a : $\sin^2(x) = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 = \frac{e^{i2x} + e^{-i2x} - 2e^{ix}e^{-ix}}{-4} = \frac{2\cos 2x - 2}{-4}$

$$= \frac{\cos(2x) - 1}{-2}$$

Donc: $\sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$

info:

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$$

▸ On a : $\cos^3 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3$

$$= \frac{(e^{ix} + e^{-ix})^3}{8}$$

$$= \frac{e^{i3x} + e^{-i3x} + 3e^{ix}e^{-ix}(e^{ix} + e^{-ix})}{8}$$

$$= \frac{2\cos 3x + 3(2\cos x)}{8}$$

ProfSalmi.blogspot.com

Donc : $\cos^3(x) = \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos x$

▸ On a : $\sin^3 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3$

$$= \frac{e^{i3x} - e^{-i3x} - 3e^{ix}\,e^{-ix}(e^{ix} - e^{-ix})}{-8i}$$

$$= \frac{2i\,\sin(3x) - 3(2i\,\sin x)}{-8i}$$

$$= \frac{2\sin(3x) - 6\sin x}{-8}$$

Donc : $\sin^3 x = -\frac{1}{4}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin x$

▸ On a : $\cos^2 x\ \sin^3 x = (1 - \sin^2 x)\sin^3 x$

$$= \sin^3 x - \sin^5 x$$

En appliquant le triangle de Pascal, on a :

$$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$$
$$= a^5 - b^5 - 5ab(a^3 - b^3) + 10a^2b^2(a-b)$$

Donc : $\sin^5(x) = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^5$

$$= \frac{e^{5ix} - e^{-5ix} - 5(e^{i3x} - e^{-i3x}) + 10(e^{ix} - e^{-ix})}{32i}$$

$$= \frac{2i\sin(5x) - 10i\,\sin(3x) + 20i\,\sin x}{32i} \quad \left(\begin{array}{l}\text{car: } e^{ix} \times e^{-ix} = 1\\ \text{et } e^{2ix} \times e^{-2ix} = 1\end{array}\right)$$

$$= \frac{1}{16}\sin(5x) - \frac{5}{16}\sin(3x) + \frac{5}{8}\sin x$$

D'où : $\cos^2 x\ \sin^3 x = -\frac{1}{4}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{16}\sin(5x)$

$$+ \frac{5}{16}\sin(3x) - \frac{5}{8}\sin x$$

$$= -\frac{1}{16}\sin(5x) + \frac{1}{16}\sin(3x) + \frac{1}{8}\sin(x)$$

Autre méthode: sachant que: $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ et $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

on aura : $\cos^2 x \sin^3 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2 \times \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3$ et après un calcul, on obtient: $\cos^2 x\ \sin^3 x = -\frac{1}{16}\sin(5x) + \frac{1}{16}\sin(3x) + \frac{1}{8}\sin(x)$

ProfSalmi.blogspot.com

Solution 35

1 On a : $a-b=8i-(4\sqrt{3}-4i)$

$=-4\sqrt{3}+12i$

$=4(-\sqrt{3}+3i)$

$=4\sqrt{3}(-1+i\sqrt{3})$

Et on a : $c-b=8\sqrt{3}+8i-(4\sqrt{3}-4i)$

$=4\sqrt{3}+12i$

$=4\sqrt{3}(1+i\sqrt{3})$

Donc : $\frac{a-b}{c-b}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}=\frac{(-1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})}{4}$

$=\frac{-1+i\sqrt{3}+i\sqrt{3}+3}{4}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

2 On a : $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

et on a $\arg\left(\frac{a-b}{c-b}\right)\equiv(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA})[2\pi]$

Alors: $\arg\left(\frac{a-b}{c-b}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

Donc : $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA})\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

D'où une mesure de l'angle orienté $\widehat{(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA})}$ est $\frac{\pi}{3}$

3 On a : $\frac{a-b}{c-b}=e^{i\frac{\pi}{3}}$

Alors : $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA})\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ et $\left|\frac{a-b}{c-b}\right|=1$

Donc : $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA})\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ et $BA=BC$

D'où ABC est un triangle équilatéral.

ProfSalmi.blogspot.com

Solution 36

1 On a : $z = \sqrt{2} + 1 + i$

et $\sqrt{2}(1 + e^{i\frac{\pi}{4}}) = \sqrt{2}(1 + \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$

$= \sqrt{2}(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})$

$= \sqrt{2} + 1 + i$

$= z$

Donc : $z = \sqrt{2}(1 + e^{i\frac{\pi}{4}})$

Autre méthode :

$\sqrt{2} + 1 + i = \sqrt{2}(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}})$

$= \sqrt{2}(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})$

$= \sqrt{2}(1 + \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$

$= \sqrt{2}(1 + e^{i\frac{\pi}{4}})$

2 On a : $1 + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}})$

$= e^{i\frac{\theta}{2}}\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)$

$= 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$

alors : $1 + e^{i\frac{\pi}{4}} = 2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)e^{i\frac{\pi}{8}}$

donc : $z = 2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8}e^{i\frac{\pi}{8}}$

Autre méthode :

$1 + e^{i\theta} = 1 + \cos\theta + i\sin\theta$

$= 2\cos^2\frac{\theta}{2} + 2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$

$= 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$

$= 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$

3 On a : $2\cos^2(\theta) = 1 + \cos(2\theta)$

Donc : $2\cos^2(\frac{\pi}{8}) = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

info:

$1 + \cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$

$1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$

$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$

Méthode 2:

On a: $|z| = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2 + 1^2}$

$= \sqrt{2 + 2\sqrt{2} + 1 + 1}$

$= \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$

$= \sqrt{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$

Et on a : $|z| = 2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8}$

Donc : $2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$

c'est-à-dire: $2\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$

soit $4\cos^2\frac{\pi}{8} = 2 + \sqrt{2}$

D'où : $2\cos^2(\frac{\pi}{8}) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

4 On a : $2\cos^2(\frac{\pi}{8}) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$

C'est-à-dire : $\cos^2(\frac{\pi}{8}) = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$

ProfSalmi.blogspot.com

Puisque : $0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$, alors $\cos\frac{\pi}{8} > 0$

Donc : $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

Et on a : $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 - \frac{2+\sqrt{2}}{4} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$

Or : $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$ donc : $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

Solution 37

▸ On pose: $a = \frac{\sqrt{3}+i}{1+i\sqrt{3}}$

On a : $\sqrt{3}+i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

$= 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$

$= 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

Et on a : $1+i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\ \sin\frac{\pi}{3}) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

Donc : $a = \frac{2\,e^{i\frac{\pi}{6}}}{2\,e^{i\frac{\pi}{3}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)} = e^{-i\frac{\pi}{6}}$

Ainsi : $a = e^{-i\frac{\pi}{6}}$

▸ On pose : $b = \frac{6-4i}{5+i}$

On a: $b = \frac{(6-4i)(5-i)}{25+1}$

$b = \frac{30-6i-20i-4}{26} = \frac{26(1-i)}{26}$

Donc : $b = 1-i$

On a : $|b| = \sqrt{2}$

donc : $b = \sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i)$

$= \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2})$

$= \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

Ainsi : $b = \sqrt{2}\ e^{-i\frac{\pi}{4}}$

ProfSalmi.blogspot.com

Solution 38

On a : $z = -\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$

Donc : $z^2 = \left(-\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2$

$= \left(2+\sqrt{2} - (2-\sqrt{2}) - 2i\sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}\right)$

$= (2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2})$

$= 2(\sqrt{2} - i\sqrt{2})$

$= 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

D'où: $z^2 = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

C'est-à-dire: $z^2 = 4\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$

Donc : $z^2 = (2e^{-i\frac{\pi}{8}})^2$ par conséquent : $z = -2e^{-i\frac{\pi}{8}}$ ou $z = 2e^{-i\frac{\pi}{8}}$

C'est-à-dire : $z = 2e^{i(-\frac{\pi}{8}+\pi)}$ ou $z = 2e^{-i\frac{\pi}{8}}$

Ainsi : $z = 2e^{i(\frac{7\pi}{8})}$ ou $z = 2e^{-i\frac{\pi}{8}}$

Puisque : $\begin{cases} \mathrm{Re}(z) < 0 \\ \mathrm{Im}(z) > 0 \end{cases}$

et $2\cos\frac{\pi}{8} = \mathrm{Re}(2e^{-i\frac{\pi}{8}}) > 0$

$-2\sin\frac{\pi}{8} = \mathrm{Im}(2e^{-i\frac{\pi}{8}}) < 0$

On a $\mathrm{Re}(2e^{i\frac{7\pi}{8}}) = 2\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)$ et $\left(\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) < 0\right)$ car $\left(\frac{7\pi}{8} \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[\right)$

Et $\mathrm{Im}(2e^{i\frac{7\pi}{8}}) = 2\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)$ et $\left(\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right) > 0\right)$

Alors : $z = 2e^{i\frac{7\pi}{8}}$

Donc : $z = 2\left(\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)\right)$

Solution 39

I)

1 On a : $z_1 = \sqrt{3} - i$ et $|z_1| = \sqrt{3+1} = 2$ alors : $z_1 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$

Donc : $z_1 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

Et on a : $z_2 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ et $|z_2| = 2$ alors : $z_2 = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Donc : $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

ProfSalmi.blogspot.com

On a : $z_3 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2e^{-i\frac{\pi}{6}}}{2e^{i\frac{\pi}{4}}}$

$= e^{i(-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4})}$

$= e^{-i\frac{5\pi}{12}}$

Donc : $z_3 = \cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$

2 On a : $z_3 = \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{2}-i\sqrt{2})}{2+2}$

$z_3 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{6}-i\sqrt{2}-\sqrt{2}}{4}$

$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} - i\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)$

Et $z_3 = \cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) - i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

Donc : $\begin{cases} \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{cases}$

3 On a : $z_2^{2016} = (2e^{i\frac{\pi}{4}})^{2016}$

$= 2^{2016}e^{i2016(\frac{\pi}{4})}$

$= 2^{2016}e^{i(504\pi)}$ (car : $e^{i2k\pi} = 1$)

$= 2^{2016}$

Donc : z_2^{2016} est un réel

Et on a : $z_2^{2018} = z_2^2 \quad z_2^{2016}$

$= 2^{2016}(2e^{i\frac{\pi}{4}})^2$

$= 2^{2018}e^{i\frac{\pi}{2}} = i(2^{2018})$

Donc : z_2^{2018} est un imaginaire pur.

II) Soit $z \in \mathbb{C} - \{i\}$

1 On a : $z' = \frac{iz+1-i}{z-i}$

$= \frac{i(z-i-1)}{z-i}$

$= \frac{i(z-z_B)}{z-z_A}$

ProfSalmi.blogspot.com

$$M \in E \Leftrightarrow |z'| = 1$$
$$\Leftrightarrow |i| \left|\frac{z - z_B}{z - z_A}\right| = 1$$
$$\Leftrightarrow \frac{|z - z_B|}{|z - z_A|} = 1$$
$$\Leftrightarrow |z - z_B| = |z - z_A|$$
$$\Leftrightarrow BM = AM$$

Donc, (E) est la médiatrice du segment : $[AB]$

2 On a : $z' - i = \frac{iz + 1 - i}{z - i} - i$

$$= \frac{iz + 1 - i - iz - 1}{z - i}$$
$$= \frac{-i}{z - i}$$

C'est-à-dire : $z' - i = \frac{-i}{z - i}$

Donc : $|z' - i| = \frac{|-i|}{|z - i|}$ d'où : $|z' - z_A| = \frac{1}{|z - z_A|}$ (car $z_A = i$)

C'est-à-dire : $AM' = \frac{1}{AM}$

Par conséquent : $AM' \times AM = 1$

3 On a : $\arg(z' - i) \equiv \arg\left(\frac{-i}{z - i}\right)[2\pi]$

$$\equiv \arg(-i) - \arg(z - i)[2\pi]$$
$$\equiv -\frac{\pi}{2} - \arg(z - i)\,[2\pi]$$

Donc : $\arg(z' - z_A) \equiv -\frac{\pi}{2} - \arg(z - z_A)\,[2\pi]$

D'où : $(\overrightarrow{u; AM'}) \equiv -\frac{\pi}{2} - (\overrightarrow{u; AM})\ [2\pi]$

Par conséquent : $(\overrightarrow{u; AM'}) + (\overrightarrow{u; AM}) \equiv -\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$

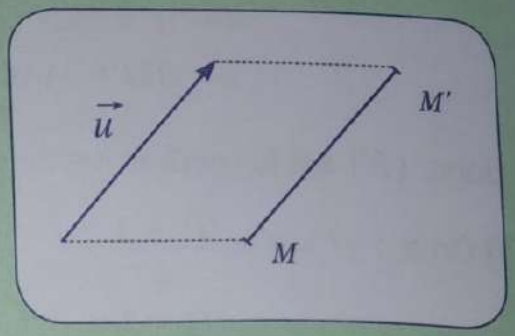
ProfSalmi.blogspot.com

8 Écriture complexe des transformations usuelles

1. Translation

Soit t la translation de vecteur $\vec{u}(z_{\vec{u}})$ et $M(z)$ et $M'(z')$ deux points du plan complexe.

$$t(M(z)) = M'(z') \iff \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$$
$$\iff z' - z = z_{\vec{u}}$$
$$\iff z' = z + z_{\vec{u}}$$



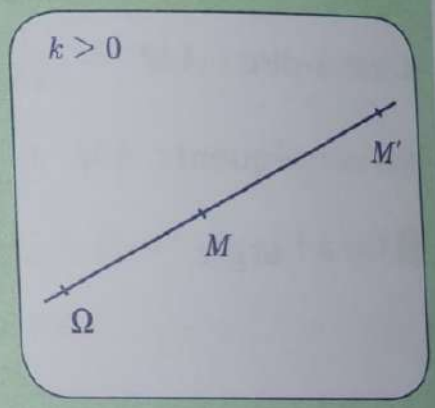
L'écriture $\boxed{z' = z + z_{\vec{u}}}$ est appelée l'écriture (ou expression) complexe de la translation t de vecteur $\vec{u}(z_{\vec{u}})$; avec $M(z)$; $M'(z')$ et $t(M) = M'$

2. Homothétie

Soit h l'homothétie de centre le point $\Omega(\omega)$ et de rapport k (tel que k un réel non nul)

Soit $M(z)$ et $M'(z')$ on a :

$$h_{(\Omega;k)}(M(z)) = M'(z') \iff \overrightarrow{\Omega M'} = k.\overrightarrow{\Omega M}$$
$$\iff z' - \omega = k(z - \omega)$$
$$\iff z' = kz + \omega(1 - k)$$



$\boxed{z' = kz + \omega(1 - k)}$ est appelée **l'écriture (ou expression) complexe de l'homothétie** $h_{(\Omega;k)}$.

cas particulier : (le centre de l'homothétie est l'origine du repère).

L'écriture de l'homothétie de centre O (l'origine du repère) et de rapport k est : $z' = kz$

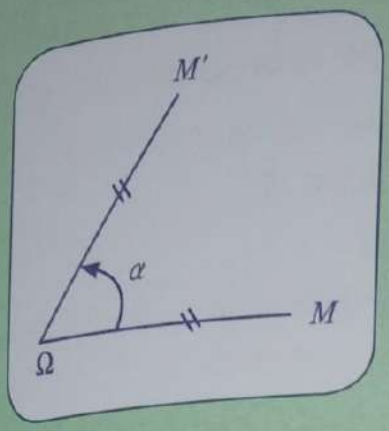
Remarque : Le centre Ω d'une homothétie est l'unique point fixe ou invariant (c'est-à-dire $h(\Omega) = \Omega$ pour $k \neq 1$ (où k est le rapport de h).

ProfSalmi.blogspot.com

3. Rotation

Soit r la rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle α on a : $r(\Omega)=\Omega$.

Soit $M(z)$ et $M'(z')$ tels que $M\neq\Omega$, on a :



$$r_{(\Omega;\alpha)}(M(z))=M'(z') \iff \begin{cases} M\Omega=\Omega M' \\ (\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'})\equiv\alpha[2\pi] \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} |z-\omega|=|z'-\omega| \\ \arg\left(\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right)\equiv\alpha[2\pi] \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \left|\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right|=1 \\ \arg\left(\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right)\equiv\alpha[2\pi] \end{cases}$$

$$\iff \frac{z'-\omega}{z-\omega}=e^{i\alpha}$$

$$\iff z'-\omega=e^{i\alpha}(z-\omega)$$

$$\iff z'=e^{i\alpha}z+\omega(1-e^{i\alpha})$$

la dernière écriture est valable pour $M=\Omega$

$\boxed{z'-\omega=e^{i\alpha}(z-\omega)}$ ou $\boxed{z'=e^{i\alpha}z+\omega(1-e^{i\alpha})}$ est appelée **l'écriture (ou expression) complexe de la rotation** r de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle α où: $r(M(z))=M'(z')$

Cas particulier: (le centre de la rotation est l'origine du repère).

L'écriture complexe de la rotation r de centre O l'origine du repère, et d'angle α est : $z'=ze^{i\alpha}$

Remarque : le centre Ω d'une rotation r est l'unique point invariant (c'est-à-dire $r(\Omega)=\Omega$) (dans le cas $\alpha\not\equiv 0[2\pi]$ où α est l'angle de la rotation).

Exercices

Exercice 40 translation

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$

Soit T la translation de vecteur $\vec{u}=3\vec{e_1}-\vec{e_2}$

1. Déterminer l'écriture complexe de la translation t.
2. Déterminer l'affixe du point B, l'image du point $A(1-2i)$ par la translation T.
3. Déterminer l'affixe du point E dont l'image par T est le point $F(-3+i)$
4. Montrer que le point $G(-4i)$ est l'image du point $H(-3i+2)$ par la

ProfSalmi.blogspot.com

translation T.

5 a. Déterminer la nature du quadrilatère $ABFE$.

b. Montrer que $(AH) // (BK)$

Exercice 41 Translation

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2+i$ et $z_B = -2+3i$ et $z_C = 1-4i$.

Soit t la translation qui transforme le point A au point B.

1 Déterminer l'écriture complexe de la translation t.

2 Montrer que l'affixe du point D qui a pour image le point C par la translation t est : $z_D = 5-6i$

3 a. Déterminer l'affixe du point I milieu du segment $[BC]$.

b. Soit E le symétrique du point D par rapport au point I.

Montrer que le point E est l'image du point B par la translation t puis déterminer l'affixe du point E.

Exercice 42 Homothétie

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$

Soit H l'homothétie de centre $\Omega(-2+i)$ et de rapport $-\frac{1}{2}$

1 Déterminer l'écriture complexe de l'homothétie H.

2 Déterminer l'affixe du point K image du point $N\left(-\frac{3}{2}-2i\right)$ par l'homothétie H.

3 Déterminer l'affixe du point E qui a pour image $F(1-3i)$ par l'homothétie H.

4 Montrer que le quadrilatère $EKFN$ est un trapèze.

Exercice 43 Rotation

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$. Soit r la rotation de centre O qui transforme le point $A(2+i)$ au point $B(1-2i)$.

1 Montrer que $-\frac{\pi}{2}$ est l'angle de la rotation r

2 En déduire la nature du triangle OAB

3 Déterminer l'affixe du point E dont l'image par la rotation r est A.

ProfSalmi.blogspot.com

4 Soit C le symètrique du point O par rapport au point I milieu du segment $[AB]$.

a. Quelle est la nature du quadrilatère $OACB$?

b. Déterminer l'affixe du point C.

Exercice 44 Rotation

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

On considère les points $A(i)$, $B(\sqrt{3}+2i)$ et $I(3i)$

1 Vérifier que : $\frac{z_B - z_I}{z_A - z_I} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

2 En déduire une mesure de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IB}}\right)$

3 Soit R la rotation de centre I qui transforme le point A au point B.

a. Montrer que $\frac{\pi}{3}$ est l'angle de la rotation R.

b. Déterminer la forme complexe de la rotation R.

c. Déterminer l'affixe du point K image du point O par la rotation R.

d. Montrer que : $(AB) /\!/ (OK)$

Solutions

Solution 40

$(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$ est un repère orthonormé et T une translation de vecteur $\vec{u} = 3\vec{e_1} - \vec{e_2}$

1 Déterminons l'écriture complexe de T

Soit $M(z)$ et $M'(z')$ deux points du plan complexe.

On a : $T(M) = M' \iff \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

$\iff z' - z = 3 - i$

$\iff z' = z + 3 - i$

Donc: $T(M(z)) = M'(z) \iff z' = z + 3 - i$

2 Déterminons l'affixe du point B tel que: $T(A) = B$

On a : $T(A) = B \iff z_B = z_A + 3 - i$

$\iff z_B = 1 - 2i + 3 - i$

$\iff z_B = 4 - 3i$

Donc: $B(4-3i)$

ProfSalmi.blogspot.com

3 Déterminons l'affixe du point E dont l'image est F

On a : $T(E) = F \iff z_F = z_E + 3 - i$

$\iff z_E = z_F - 3 + i$

$\iff z_E = -3 + i - 3 + i$

$\iff z_E = -6 + 2i$

Donc : $E(-6+2i)$

4 Montrons que le point K est l'image de H par la translation T

On a : $T(H) = H' \iff z_{H'} = z_H + 3 - i$

$\iff z_{H'} = -3i + 2 + 3 - i$

$\iff z_{H'} = 5 - 4i$

Puisque $z_K = 5 - 4i$, alors : $H' = K$

Donc : $T(H) = K$

4 a. Déterminons la nature du quadrilatère $ABFE$

On a : $T(A) = B \iff \overrightarrow{AB} = \vec{u}$

Et $T(E) = F \iff \overrightarrow{EF} = \vec{u}$

Donc : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$

D'où le quadrilatère $ABFE$ est un parallélogramme.

b. Montrons que : $(AH) \,//\, (BK)$

On a : $T(A) = B$ et $T(H) = K$

Donc: $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{BK}$; D'où: $(AH) \,//\, (BK)$

Solution 41

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$

t est la translation qui transforme $A(2+i)$ en $B(-2+3i)$

1 Déterminons la forme complexe de la translation t.

Soit $M(z)$ et $M'(z')$ deux points du plan complexe

Puisque $t(A) = B$ alors $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur de la translation t.

Donc : $t(M) = M' \iff \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$

$\iff z' - z = z_B - z_A$

$\iff z' = z + (-2 + 3i - 2 - i)$

$\iff z' = z - 4 + 2i$

D'où : $t(M) = M' \iff z' = z - 4 + 2i$

ProfSalmi.blogspot.com

2 **Déterminons l'affixe du point D tel que $t(D)=C$**

On a : $t(D)=C \Leftrightarrow z_C = z_D - 4 + 2i$

$\Leftrightarrow z_D = z_C - (-4+2i)$

$\Leftrightarrow z_D = 1 - 4i + 4 - 2i$

$\Leftrightarrow z_D = 5 - 6i$

Donc : $d = 5 - 6i$ est l'affixe du point D image de C par la translation t.

3 a. **Déterminons l'affixe de I milieu de $[BC]$**

Soit z_I l'affixe du point I milieu de $[BC]$

Alors : $z_I = \dfrac{z_C + z_B}{2} = \dfrac{1-4i+(-2+3i)}{2}$

$= -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$

Donc : $z_I = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$

b. **Montrons que: $t(B)=E$, puis déterminons l'affixe de E**

On a : E est le symétrique de D par rapport au point I, alors I est le milieu de $[DE]$. Puisque le point I est aussi le milieu de segment $[BC]$, alors les deux segments $[BC]$ et $[DE]$ ont le même milieu. Donc, le quadrilatère $BDCE$ est un parallélogramme, Ainsi : $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DC}$.

or : $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$, d'où $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}$ (car $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur de la translation t)

d'où $t(B)=E$

Déterminons l'affixe du point E

Méthode 1 :

On a : $t(B)=E \Leftrightarrow z_E = z_B - 4 + 2i$

$\Leftrightarrow z_E = -2 + 3i - 4 + 2i$

$\Leftrightarrow z_E = -6 + 5i$

Méthode 2 :

E est le symétrique du point D par rapport au point I, donc : $\overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{DI}$

Par suite: $\overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{DI} \Leftrightarrow z_E - z_D = 2(z_I - z_D)$

$\Leftrightarrow z_E = z_D - 2z_D + 2z_I$

$\Leftrightarrow z_E = -z_D + 2z_I$

$\Leftrightarrow z_E = -(5-6i) + 2\left(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i\right)$

$\Leftrightarrow z_E = -5 + 6i - 1 - i$

$\Leftrightarrow z_E = -6 + 5i$

ProfSalmi.blogspot.com

Solution 42

H l'homothétie de centre $\Omega(-2+i)$ et de rapport $-\frac{1}{2}$.

1 Déterminons l'écriture complexe de l'homothétie H

Soit $M(z)$ et $M'(z')$ deux points du plan complexe

On a : $H(M)=M' \iff \overrightarrow{\Omega M'}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega M}$

$\iff z'-\omega=-\frac{1}{2}(z-\omega)$

$\iff z'=-2+i-\frac{1}{2}(z+2-i)$

$\iff z'=-\frac{1}{2}z-3+\frac{3}{2}i$

Donc : $H(M(z))=M'(z') \iff z'=-\frac{1}{2}z-3+\frac{3}{2}i$

2 Déterminons l'affixe de K image de N par l'homothétie H.

On a : $H(N)=K \iff z_K=-\frac{1}{2}z_N-3+\frac{3}{2}i$

$\iff z_K=-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}-2i\right)-3+\frac{3}{2}i$

$\iff z_K=\frac{3}{4}+i-3+\frac{3}{2}i$

$\iff z_K=-\frac{9}{4}+\frac{5}{2}i$

3 Déterminons l'affixe du point E dont l'image est $F(1-3i)$ par l'homothétie H. On a : $H(E)=F \iff z_F=-\frac{1}{2}z_E-3+\frac{3}{2}i$

$\iff \frac{1}{2}z_E=-z_F-3+\frac{3}{2}i$

$\iff z_E=-2z_F-6+3i$

$\iff z_E=-2(1-3i)-6+3i$

$\iff z_E=-8+9i$

4 Montrons que le quadrilatère $EKFN$ est un trapèze.

On a : $H(E)=F$ et $H(N)=K$

Donc : $\overrightarrow{KF}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{NE}$;

d'où : $\overrightarrow{KF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{EN}$

C'est-à-dire: $(KF)\ /\!/\ (EN)$ par suite le quadrilatère $EKFN$ est un trapèze de bases $[NE]$ et $[FK]$.

info?

- $\left.\begin{array}{l} H_{(\Omega;k)}(N)=N' \\ H_{(\Omega;k)}(M)=M' \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{M'N'}=k\overrightarrow{MN}$
- $H(N)=N' \iff \overrightarrow{\Omega N'}=k\overrightarrow{\Omega N}$
- $H(M)=M' \iff \overrightarrow{\Omega M'}=k\overrightarrow{\Omega M}$

$\overrightarrow{M'N'}=\overrightarrow{M'\Omega}+\overrightarrow{\Omega N'}$

$=-k\overrightarrow{\Omega M}+k\overrightarrow{\Omega N}$

$=k(\overrightarrow{M\Omega}+\overrightarrow{\Omega N})$

$=k\overrightarrow{MN}$

ProfSalmi.blogspot.com

Solution 43

$(O;\vec{u};\vec{v})$ est un repère orthonormé direct, r la rotation de centre O et qui transforme le point $A(2+i)$ au point $B(1-2i)$

1 Montrons que $-\frac{\pi}{2}$ est l'angle de la rotation r

on a : $r(A)=B \iff z_B = e^{i\theta} z_A$

$$\iff e^{i\theta} = \frac{z_B}{z_A}$$

$$\iff e^{i\theta} = \frac{1-2i}{2+i} = \frac{(1-2i)(2-i)}{4+1}$$

$$\iff e^{i\theta} = -\frac{5i}{5} = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$$\iff \theta \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

Donc $-\frac{\pi}{2}$ est l'angle de la rotation r.

2 Déduisons la nature du triangle OAB

on a : $r(A)=B \iff \begin{cases} OA = OB \\ (\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

Donc : $OA = OB$ et $\widehat{AOB} = \frac{\pi}{2}$

D'où le triangle OAB est isocèle rectangle en O.

3 Déterminons l'affixe du point E dont l'image par la rotation r est A.

On a : $r(E)=A \iff z_A = e^{-i\frac{\pi}{2}} z_E$

$$\iff z_E = e^{i\frac{\pi}{2}} z_A$$

$$\iff z_E = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) z_A$$

$$\iff z_E = i(2+i)$$

$$\iff z_E = -1+2i$$

4 Soit C le symétrique du point O par rapport au point I milieu de $[AB]$

a. Déterminons la nature du quadrilatère $OACB$

On a : I milieu de $[AB]$ et I milieu de $[OC]$ (car C est le symétrique de O par rapport au point I)

Donc $OACB$ est un parallélogramme (car les diagonales $[AB]$ et $[OC]$ ont le même milieu).

Puisque le triangle OAB est isocèle rectangle en O, alors le quadrilatère $OACB$ est un carré.

b. Déterminons l'affixe du point C

ProfSalmi.blogspot.com

Méthode 1:

On a: I est le milieu de $[OC]$, donc : $z_I = \frac{z_C + z_O}{2} = \frac{z_C}{2}$

D'où : $z_C = 2z_I$

$= 2\left(\frac{z_A + z_B}{2}\right)$

$= z_A + z_B = 2 + i + 1 - 2i = 3 - i$

Donc : $z_C = 3 - i$

Méthode 2:

On a : $OACB$ est un carré, donc : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA} \iff z_C - z_B = z_A$

$\iff z_C = z_A + z_B$

$\iff z_C = 2 + i + 1 - 2i$

$\iff z_C = 3 - i$

Solution 44

$(O;\vec{u};\vec{v})$ est un repère orthonormé direct

1 Vérifions que: $\frac{z_B - z_I}{z_A - z_I} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

On a : $\frac{z_B - z_I}{z_A - z_I} = \frac{\sqrt{3} + 2i - 3i}{i - 3i} = \frac{\sqrt{3} - i}{-2i}$

$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2i}$

$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

2 Déduisons une mesure de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IB}}\right)$

On a : $\left(\widehat{\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IB}}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_B - z_I}{z_A - z_I}\right)[2\pi]$

$\equiv \arg\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)[2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ car: $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$

Donc: $\frac{\pi}{3}$ est une mesure de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IB}}\right)$

3 Soit R la rotation de centre I qui transforme le point A au point B

a. Montrons que $\frac{\pi}{3}$ est l'angle de la la rotation R.

ProfSalmi.blogspot.com

Soit θ l'angle de la retation R.On a : $R(A)=B \Longleftrightarrow \begin{cases} IA=IB \\ (\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IB}) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$

Puisque : $(\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IB}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

Donc : $\frac{\pi}{3}$ est l'angle de la rotation R.

b. Déterminons la forme complexe de la rotation R

R est une rotation de centre $I(3i)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$

Donc : $R(M(z))=M'(z') \Longleftrightarrow z'-z_I=e^{i\frac{\pi}{3}}(z-z_I)$

$$\Longleftrightarrow z'=e^{i\frac{\pi}{3}}z+(1-e^{i\frac{\pi}{3}})z_I$$

$$\Longleftrightarrow z'=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)z+\left(1-\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)z_I$$

$$\Longleftrightarrow z'=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z+\left(1-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(3i)$$

$$\Longleftrightarrow z'=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(3i)$$

$$\Longleftrightarrow z'=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z+\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$$

c. Déterminons l'affixe du point K image du point O par la rotation R

$$R(O)=K \Longleftrightarrow z_K=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\times 0+\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$$

$$\Longleftrightarrow z_K=\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$$

d. Montrons que $(AB)\,//\,(OK)$

Il suffit de montrer que le nombre $\frac{z_B-z_A}{z_K-z_O}$ est un nombre réel

on a : $\frac{z_B-z_A}{z_K-z_O}=\frac{\sqrt{3}+2i-i}{\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i}$

$$=\frac{\sqrt{3}+i}{\frac{3}{2}(\sqrt{3}+i)}$$

$$=\frac{2}{3}$$

Donc : $\frac{z_B-z_A}{z_k-z_o}\in\mathbb{R}$ d'où : $(AB)\,//\,(OK)$

remarque: $\frac{z_B-z_A}{z_k-z_o}=\frac{2}{3} \Longleftrightarrow z_B-z_A=\frac{2}{3}(z_k-z_0)$

$$\Longleftrightarrow \overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OK}$$

Donc: $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{OK}$ sont colinéaires, d'où : les droites (AB) et (OK) sont parallèles.

ProfSalmi.blogspot.com

Exercices d'approfondissement

Exercice 45

1 Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'ensemble des nombres complexes, l'équation :

$z^2 - 12z + 61 = 0$

2 On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{e_1} ; \vec{e_2})$ les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c tels que:

$a = 6 - 5i$, $b = 4 - 2i$ et $c = 2 + i$

a. Calculer $\frac{a-c}{b-c}$, en déduire que les points A, B et C sont alignés.

b. On considère la translation T de vecteur $\vec{u}$ tel que $1 + 5i$ est l'affixe de $\vec{u}$.

Vérifier que $d = 3 + 6i$ est l'affixe du point D image du point C par la translation T.

c. Montrer que $\frac{d-c}{b-c} = -1 + i$ et que $\frac{3\pi}{4}$ est un argument du nombre complexe $-1 + i$.

d. En déduire une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{CB} ; \overrightarrow{CD})$.

Exercice 46

1 Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'ensemble des nombres complexes, l'équation:

$z^2 - 8\sqrt{3}z + 64 = 0$

2 On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$ les points A , B et C d'affixes respectives a , b et c tels que: $a = 8i$; $b = 4\sqrt{3} - 4i$ et $c = 2(4\sqrt{3} + 4i)$

Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' l'image de M par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{4\pi}{3}$

a. Démontrer que : $z' = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$

b. Vérifier que le point B est l'image de A par la rotation R.

ProfSalmi.blogspot.com

c. Montrer que: $\frac{a-b}{c-b}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, puis écrire le nombre $\frac{a-b}{c-b}$ sous forme trigonométrique.

d. En déduire que le triangle ABC est équilatéral.

Exercice 47

On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ les points A , B et C d'affixes respectives a, b et c tels que :

$a=2-2i$, $b=\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ et $c=1-\sqrt{3}+(1+\sqrt{3})i$

1 Écrire sous forme trigonométrique chacun des nombres a et b.

2 Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{5\pi}{6}$

a. Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' l'image de M par la rotation R.

Prouver que $z'=bz$

b. Vérifier que le point C est l'image du point A par la rotation R.

3 Montrer que : $\arg c\equiv \arg a+\arg b\ \ [2\pi]$

puis déduire un argument du nombre complexe c.

Exercice 48

1 Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'ensemble des nombres complexes, l'équation :

$z^2-z\sqrt{2}+2=0$

2 On considère le nombre complexe $u=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i$

a. Montrer que le module de u est égal à $\sqrt{2}$ et $\arg u\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

b. En utilisant l'écriture du nombre u sous forme trigonométrique, prouver que u^6 est réel.

3 On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$ les points A et B d'affixes respectives a et b tels que $a=4-4i\sqrt{3}$ et $b=8$. Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

a . Exprimer z' en fonction de z

ProfSalmi.blogspot.com

b. Vérifier que B est l'image de A par la rotation R, en déduire que le triangle OAB est équilatéral.

Exercice 49

1 Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'ensemble des nombres complexes, l'équation : $z^2 - 4z + 5 = 0$

2 On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$ les points A, B, C, D et Ω d'affixes respectives : $a = 2+i$, $b = 2-i$, $c = i$, $d = -i$ et $\omega = 1$.

a. Montrer que : $\dfrac{a-\omega}{b-\omega} = i$

b. En déduire que le triangle ΩAB est isocèle rectangle en Ω.

3 Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' l'image de M par la rotation R de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

a. Vérifier que : $z' = iz + 1 - i$

b. Vérifier que : $R(A) = C$ et $R(D) = B$

c. Montrer que les points A, B, C et D sont sur un même cercle dont on précisera le centre.

Exercice 50

1 Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'ensemble des nombres complexes, l'équation : $z^2 + 10z + 26 = 0$

2 On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$ les points A, B, C et Ω d'affixes respectives a, b, c et ω tels que : $a = -2+2i$, $b = -5+i$, $c = -5-i$ et $\omega = -3$

a. Montrer que : $\dfrac{b-\omega}{a-\omega} = i$.

b. En déduire la nature du triangle ΩAB.

3 Soit le point D l'image du point C par la translation T de vecteur $\vec{u}$ d'affixes $6+4i$.

a. Montrer que : $d = 1+3i$ est l'affixe du point D.

b. Montrer que : $\dfrac{b-d}{a-d} = 2$, en déduire que le point A est le milieu du segment $[BD]$.

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 51

I) On considère le nombre complexe a tel que $a = 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

1 Montrer que le module du nombre complexe a est égal à $2\sqrt{2+\sqrt{2}}$

2 Vérifier que : $a = 2\left(1 + \cos\frac{\pi}{4}\right) + 2i\sin\frac{\pi}{4}$

3 a. En linéarisant $\cos^2\theta$ où θ est un réel, montrer que:

$1 + \cos(2\theta) = 2\cos^2\theta$

b. Montrer que : $a = 4\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + 4i\cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}$

(Rappel: $\sin 2\theta = 2\cos\theta\sin\theta$)

c. Montrer que $4\cos\frac{\pi}{8}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$ est une forme trigonométrique du nombre a , puis montrer que : $a^4 = \left(2\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^4 i$

II) On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$ les points Ω et A d'affixes respectives ω et a tels que $\omega = \sqrt{2}$ et $a = 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ et la rotation R de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$

1 Montrer que l'affixe b du point B l'image du point A est $2i$.

2 Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - 2i| = 2$.

Exercice 52

1 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$

2 On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$ les points A, B et C d'affixes respectives $a = \sqrt{3} + i$, $b = \sqrt{3} - i$ et $c = 2 + \sqrt{3} - i$

a. Déterminer une forme trigonométrique et exponentielle des nombres a et b.

b. Montrer que la représentation complexe de la rotation R de centre B d'angle $-\frac{\pi}{2}$ est : $z' = -iz + (1+\sqrt{3}) + (-1+\sqrt{3})i$

c. Montrer que C est l'image du point A par la rotation R, en déduire la nature du triangle ABC.

3 Soit D l'image du point B par la translation T de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $-1+i$

Montrer que : $d = \sqrt{3} - 1$, est l'affixe du point d.

Puis montrer que $(AC) \perp (AD)$

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 53

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$

Soit z_1 et z_2 les solutions de l'équation $(E): z^2-8z+25=0$ avec $\text{Im}(z_1)>0$

1 On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a=z_1+i$, $b=z_2-i$ et $c=2-2i$

a. Déterminer z_1 et z_2 et montrer que : $a=4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $b=4\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

b. En déduire la nature du triangle OAB

2 Soit R la rotation de centre $I(2i)$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

a. Montrer que l'écriture complexe de la rotation R est :

$z'=-iz-2+2i$

b. Vérifier que $R(A)=C$

3 Soit h l'homothétie de centre $\Omega(16i)$ et de rapport $\frac{4}{3}$.

a. Montrer que la forme complexe de l'homothétie h est :

$z'=\frac{4}{3}z-\frac{16}{3}i$

b. Soit D le point qui vérifie $h(D)=B$.

Montrer que D est le milieu du segment $[AC]$.

c. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que : $|z-2+2i|=|z|$.

Exercice 54

1 a. Vérifier que pour tout z de $\mathbb{C}$: $z^4+4=(z^2-2z+2)(z^2+2z+2)$

b. En déduire les solutions de l'équation $z^4+4=0$ dans l'ensemble $\mathbb{C}$

2 Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$. on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A=1+i$, $z_B=-1+i$, $z_C=-1-i$ et $z_D=1-i$

a. Écrire sous forme trigonométrique les nombres : z_B et z_C

b. Soit E le point d'affixe $z_E=-1+\sqrt{3}$

Montrer que : $\frac{z_E-z_C}{z_B-z_C}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, puis déduire la nature du triangle BCE

c. Soit F le point d'affixe $z_F=-i-i\sqrt{3}$

Vérifier que : $(2+\sqrt{3})(z_E-z_A)=z_F-z_A$, puis en déduire que les points A, E et F sont alignés.

ProfSalmi.blogspot.com

3 Soit H l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$ et T la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

a. Déterminer l'affixe du point K l'image du point F par l'homothétie h.

b. Déterminer l'affixe du point G l'image du point E par la translation T.

Exercice 55

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

1 a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_1) : $z^2-2z+2=0$

b. Soit z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E_1) telles que $\text{Im}(z_1)>0$

Ecrire z_1 sous forme trigonométrique et z_2 sous forme exponentielle.

c. Én déduire les solutions de l'équation (E_2) :

$(iz-1+2i)^2-2(iz-1+2i)+2=0$ dans $\mathbb{C}$

2 On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $a=1+i$, $b=1-i$ et $c=2b$

a. Montrer que les points A, B et C appartiennent au cercle de centre $I(3)$ et de rayon $\sqrt{5}$.

b. Déterminer la nature du triangle IAC.

3 Soit E l'image du point O par la translation T de vecteur $2\overrightarrow{IC}$.

Déterminer l'affixe du point E.

4 Soit D l'image du point E par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a. Déterminer l'affixe du point D

b. Montrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Exercice 56

Pour tout z de $\mathbb{C}$ on pose : $P(z)=z^3+(-2+\sqrt{2})z^2+2(1-\sqrt{2})z+2\sqrt{2}$

1 a. Déterminer les deux réels a et b tels que :

$(\forall z\in\mathbb{C})\ ; P(z)=(z+\sqrt{2})(z^2+az+b)$

b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): P(z)=0$

c. Écrire sous forme exponentielle les solutions de l'équation (E).

2 On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A=-\sqrt{2}$ et

ProfSalmi.blogspot.com

$z_B = 1+i$ et $z_C = 1-i$

a. Placer les points A, B et C.

b. Déterminer une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{AB})$

3 a. Vérifier que $(\overrightarrow{AO}\ ;\ \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{8}[2\pi]$

b. Écrire le nombre complexe $\frac{z_A - z_B}{z_A}$ sous la forme algébrique et sous forme trigonométrique.

c. En déduire la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$.

Exercice 57

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$.

On considère les points A_n d'affixes a_n tels que :

$a_0 = 8$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$; $a_{n+1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{4} a_n$

1 Écrire les nombres a_1, a_2, a_3 et a_4 sous la forme algébrique.

2 Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $a_n = 2^{3-n} e^{in\frac{\pi}{3}}$

3 On pose : $r_n = |a_n|$ pour tout n de $\mathbb{N}$

a. Montrer que (r_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b. Déterminer la plus petite valeur de l'entier naturel n pour laquelle le point A_n se trouve à l'intérieur du cercle de rayon 10^{-2} et de centre O.

4 On pose $I_n = |a_{n+1} - a_n|$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

a. Calculer I_0, I_1 et I_2 et conjecturer la nature de la suite (I_n)

b. Déterminer I_n en fonction de n.

5 On pose : $L_n = \sum_{k=0}^{n} I_k$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

a. Montrer que : $L_n = 8\sqrt{3}\ (1 - 2^{(-n-1)})$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

b. Déterminer la limite de la suite (L_n).

Exercice 58

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$

1 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$

ProfSalmi.blogspot.com

2 On considère les points $A(\sqrt{3}-i)$, $B(\sqrt{3}+i)$ et C le milieu du segment $[OB]$.

a. Écrire les nombres z_A, z_B et z_C sous forme exponentielle.

b. Montrer que le triangle OAB est équilatéral.

c. Construire les points A, B et C .

3 Soit D le point tel que le triangle OCD est isocèle rectangle en O avec $(\overrightarrow{OC}\ ;\overrightarrow{OD}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Soit E le point tel que le triangle $DABE$ est un parallélogramme.

a. Construire les points D et E.

b. Déterminer d l'affixe du point D puis écrire d sous forme exponentielle.

c. Montrer que l'affixe du point E est : $e=\frac{1}{2}+\left(\frac{4-\sqrt{3}}{2}\right)i$, puis montrer que : $OE=BE=\sqrt{5-2\sqrt{3}}$.

Exercice 59

1 a. Montrer que : $(\forall z\in\mathbb{C})\quad ; z^3+8=(z+2)(z^2-2z+4)$.

b. En déduire dans $\mathbb{C}$ les solutions de l'équation $z^3+8=0$.

2 On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$ direct les points A, B, et C d'affixes respectives : $a=1+i\sqrt{3}$ $b=-2$, et $c=1-i\sqrt{3}$.

a. Écrire sous forme exponentielle, les nombres a; b et c.

b. Montrer que: $\frac{b-a}{c-a}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$, en déduire la nature du triangle ABC.

3 Soit h la transformation du plan qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que : $z'=2z-2i$

a. Montrer que h est l'homothétie de centre $\Omega(2i)$ et de rapport 2.

b. Déterminer les affixes des points A' et B' images respectives des points A et B par l'homothétie h.

c. Montrer que : $(A'B')\ /\!/\ (AB)$

ProfSalmi.blogspot.com

Solution 45

1 Résolutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(E): z^2 - 12z + 61 = 0$

On a : $\Delta = (-12)^2 - 4 \times 61 = -100$

Puisque $\Delta < 0$, alors l'équation (E) admet deux solutions complexes conjuguées:

$z_1 = \dfrac{12 - i\sqrt{100}}{2} = 6 - 5i$ et $z_2 = \overline{z_1} = 6 + 5i$

D'où l'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{C}$ est $S = \{6 - 5i\,; 6 + 5i\}$

2 a. Calculons $\dfrac{a-c}{b-c}$

On a : $\dfrac{a-c}{b-c} = \dfrac{(6-5i)-(2+i)}{(4-2i)-(2+i)} = \dfrac{4-6i}{2-3i} = \dfrac{2(2-3i)}{2-3i} = 2$

ainsi $\dfrac{a-c}{b-c} \in \mathbb{R}$

donc les points A, B et C sont alignés:

Méthode 2: On a : $\dfrac{a-c}{b-c} = 2 \Leftrightarrow a - c = 2(b-c)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{CB}$

alors à $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont colinéaires, donc A, B et C sont alignés.

b. Vérifions que l'affixe du point D est $d = 3 + 6i$

puisque D est l' image de C par la translaction T de vecteur $\vec{u}(1 + 5i)$

alors : $T(C) = D \Leftrightarrow z_D = z_C + 1 + 5i$

$\Leftrightarrow d = 2 + i + 1 + 5i$

$\Leftrightarrow d = 3 + 6i$

Ainsi, l'affixe de D est $d = 3 + 6i$

c. Montrons que: $\dfrac{d-c}{b-c} = -1 + i$

on a : $\dfrac{d-c}{b-c} = \dfrac{3+6i-2-i}{4-2i-2-i} = \dfrac{1+5i}{2-3i}$

$= \dfrac{(1+5i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)}$

$= \dfrac{2+13i-15}{4+9}$

$= \dfrac{-13+13i}{13}$

$= -1 + i$

ProfSalmi.blogspot.com

▸ **Montrons que $\frac{3\pi}{4}$ est un argument de $(-1+i)$**

On a : $|-1+i| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$

Donc : $-1+i = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

$= \sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$= \sqrt{2}\left(\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

Ainsi : $\frac{3\pi}{4}$ est un argument de $(-1+i)$

d. Déduisons une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD}}\right)$

On a : $\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_C}\right)[2\pi]$

$\equiv \arg(-1+i)[2\pi]$

$\equiv \frac{3\pi}{4}[2\pi]$

Donc : $\frac{3\pi}{4}$ est une mesure de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD}}\right)$

Solution 46

1 Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^2-8\sqrt{3}z+64=0$

On a : $\Delta = (-8\sqrt{3})^2-4\times 64$

$= 64\times 3-64\times 4$

$= 64(3-4)$

$= -64$

Puisque $\Delta < 0$, alors l'équation (E) admet deux solutions complexes conjuguées:

$z_1 = \frac{8\sqrt{3}+i\sqrt{64}}{2} = \frac{8\sqrt{3}+8i}{2} = 4\sqrt{3}+4i$ et $z_2 = \overline{z_1} = 4\sqrt{3}-4i$

donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) est : $S = \{4\sqrt{3}+4i\ ;\ 4\sqrt{3}-4i\}$

2 a. Montrons que : $z' = \left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z$

Puisque que R est la rotation de centre O et d'angle $\frac{4\pi}{3}$

alors : $R(M(z)) = M'(z') \iff z' = e^{i\frac{4\pi}{3}}z$

$\iff z' = \left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)z$

$\iff z' = (-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)z$

ProfSalmi.blogspot.com

donc : $z' = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$

b. Vérifions que B est l'image de A par la rotation R :

On pose : $R(A) = A'$

on a : $R(A) = A' \iff z_{A'} = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z_A$

$\iff z_{A'} = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(8i)$

$\iff z_{A'} = 4\sqrt{3} - 4i$

$\iff z_{A'} = z_B$

Donc : $R(A) = B$, c'est-à-dire B est l'image de A par la rotation R

c. Montrons que : $\frac{a-b}{c-b} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

on a : $\frac{a-b}{c-b} = \frac{8i - 4\sqrt{3} + 4i}{2(4\sqrt{3} + 4i) - 4\sqrt{3} + 4i} = \frac{-4\sqrt{3} + 12i}{4\sqrt{3} + 12i}$

$= \frac{-\sqrt{3} + 3i}{\sqrt{3} + 3i} = \frac{(-\sqrt{3} + 3i)(\sqrt{3} - 3i)}{(\sqrt{3} + 3i)(\sqrt{3} - 3i)}$

$= \frac{-(3 - 6\sqrt{3}\,i - 9)}{3 + 9} = \frac{6}{12} + \frac{6\sqrt{3}}{12}i$

$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Écrivons $\frac{a-b}{c-b}$ sous forme trigonométrique.

On a : $\frac{a-b}{c-b} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ et $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$

Donc : $\frac{a-b}{c-b} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$

d. Déduisons que le triangle ABC est équilatéral

on a : $\frac{a-b}{c-b} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} \iff \left|\frac{a-b}{c-b}\right| = 1$ et $\arg\left(\frac{a-b}{c-b}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

Donc : $AB = CB$ $\left(\left|\frac{a-b}{c-b}\right|\right) = \frac{|a-b|}{|c-b|} = \frac{AB}{CB}$ et $\left(\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BA}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[\pi]$

D'où le triangle ABC est équilatéral.

Solution 47

1 Écrivons les nombres a et b sous forme trigonométrique

On a : $|a| = |2 - 2i| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

ProfSalmi.blogspot.com

Donc : $a = 2 - 2i = 2\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i)$

$= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$= 2\sqrt{2}\left(\cos(\frac{-\pi}{4}) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

On a : $|b| = \left|\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$

Donc : $b = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = -\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

2 **a. Montrons que :** $z' = bz$

Soit : $M(z)$ et $M'(z')$ et R la rotation de centre O et d'angle $\frac{5\pi}{6}$

On a : $R(M) = M' \iff z' = e^{i\frac{5\pi}{6}}z$

$\iff z' = (\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})z$

$\iff z' = bz$

donc : $z' = bz$

b. Vérifions que : $R(A) = C$

On a : $z_A = 2 - 2i$ et $z_C = 1 - \sqrt{3} + (1 + \sqrt{3})i$

on a : $R(A) = A' \iff z_{A'} = bz_A$

$\iff z_{A'} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)(2 - 2i)$

$\iff z_{A'} = -\sqrt{3} + \sqrt{3}i + i + 1$

$\iff z_{A'} = (1 - \sqrt{3}) + (\sqrt{3} + 1)i$

$\iff z_{A'} = z_C$

$\iff A' = C$

D'où : $R(A) = C$

3 **Montrons que :** $\arg c \equiv \arg a + \arg b[2\pi]$

On a : $R(A) = C$ alors : $z_c = bz_A$ c'est-à-dire : $c = ba$

Et on a : $c = ba \Rightarrow \arg c \equiv \arg(ba)[2\pi]$

$\Rightarrow \arg c \equiv \arg a + \arg b[2\pi]$

Donc : $\arg(c) \equiv \arg(a) + \arg(b)[2\pi]$

Déterminons un argument de c **:**

On a : $\arg(a) \equiv \frac{-\pi}{4}[2\pi]$ et $\arg(b) \equiv \frac{5\pi}{6}[2\pi]$

ProfSalmi.blogspot.com

Et comme : $\arg(c) \equiv \arg(a) + \arg(b)[2\pi]$

alors : $\arg(c) \equiv \frac{-\pi}{4} + \frac{5\pi}{6}[2\pi]$, Ainsi : $\arg(c) \equiv \frac{7\pi}{12}[2\pi]$

Solution 48

1 On a : (E) : $z^2 - z\sqrt{2} + 2 = 0$

calculons Δ : on a : $\Delta = (-\sqrt{2})^2 - (4 \times 1 \times 2)$

$= 2 - 8$

$= -6$

comme $\Delta < 0$ alors l'équation (E) admet deux solutions complexes conjuguées distinctes : $z_1 = \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i$ et $z_2 = \overline{z_1} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i$

D'où : $S = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i ; \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i\right\}$

2 Soit: $u = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i$

a. Montrons que le module de u est $\sqrt{2}$ et $\arg u \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

on a : $|u| = \left|\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i\right| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}} = \sqrt{2}$

Méthode 2: $|u| = \left|\sqrt{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right| = \sqrt{2} \times \left|\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \sqrt{2} \times 1 = \sqrt{2}$

On a : $u = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i$

$= \sqrt{2}(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)$

$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

Donc : $\arg(u) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

b. Montrons que le nombre u^6 est un réel :

On a : $u = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

Donc : $u^6 = (\sqrt{2})^6\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^6$

$= ((\sqrt{2})^2)^3\left[\cos\left(6 \times \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(6 \times \frac{\pi}{3}\right)\right]$

$= 2^3(\cos 2\pi + i\sin 2\pi)$

$= 8 \times 1 = 8$

ProfSalmi.blogspot.com

Ainsi u^6 est réel

3 Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

a. Ecrivons z' en fonction de z .

on a : $R(M(z)) = M'(z') \iff z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z$

$$\iff z' = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)z$$

$$\iff z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z$$

Donc: $z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z$

b. Vérifions que B est l'image de A par la rotation R

on a : $R(A) = A' \iff z_{A'} = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z_A$

$$\iff z_{A'} = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(4 - 4i\sqrt{3})$$

$$\iff z_{A'} = 2 - 2i\sqrt{3} + 2i\sqrt{3} + 6$$

$$\iff z_{A'} = 8 = z_B$$

$$\iff A' = B$$

Donc : $R(A) = B$

▸ **Déduisons que le triangle OAB est un triangle équilatéral.**

On a: $R(A) = B$, et R est la retation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

et comme $R(A) = B$, alors: $OA = OB$ et $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

Ainsi le triangle OAB est isocèle en O et $\widehat{AOB} = \frac{\pi}{3}$

Donc OAB est un triangle équilatéral.

Solution 49

1 Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2 - 4z + 5 = 0$

On a : $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 5 = -4$

Puisque $\Delta < 0$, donc (E) admet deux solutions complexes conjuguées distinctes : $z_1 = \frac{4 + i\sqrt{4}}{2} = 2 + i$ et $z_2 = \overline{z_1} = 2 - i$

D'où: $S = \{2 - i \ ; \ 2 + i\}$

2 a. Montrons : $\frac{a - \omega}{b - \omega} = i$

ProfSalmi.blogspot.com

On a : $\frac{a-\omega}{b-\omega}=\frac{2+i-1}{2-i-1}=\frac{1+i}{1-i}=\frac{i(-i+1)}{1-i}=i$

(on a aussi $\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{1^2+1^2}=\frac{2i}{2}=i$)

b. Déduisons que le triangle ΩAB est isocèle rectangle en Ω

On a : $\frac{a-\omega}{b-\omega}=i$

Donc : $\left|\frac{a-\omega}{b-\omega}\right|=|i|$ et $\arg\left(\frac{a-\omega}{b-\omega}\right)\equiv\arg(i)[2\pi]$

D'où : $\frac{A\Omega}{B\Omega}=1$ et $\left(\overrightarrow{\Omega B}\ ;\ \overrightarrow{\Omega A}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Et par suite : $A\Omega=B\Omega$ et $A\widehat{\Omega}B=\frac{\pi}{2}$

Donc le triangle $A\Omega B$ est isocèle rectangle en Ω

3 Soit R la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$

a. Montrons que : $z'=iz+1-i$

On a : $R(M(z))=M'(z') \iff z'-\omega=e^{i\frac{\pi}{2}}(z-\omega)$

$\iff z'=i(z-\omega)+\omega$

$\iff z'=i(z-1)+1$

$\iff z'=iz+1-i$

donc : $z'=iz+1-i$

b. Vérifions que : $R(A)=C$ et $R(D)=B$

On a : $R(A)=A' \iff z_{A'}=iz_A+1-i$

$\iff z_{A'}=i(2+i)+1-i$

$\iff z_{A'}=2i-1+1-i$

$\iff z_{A'}=i$

$\iff z_{A'}=z_C$

$\iff A'=C$

D'où : $R(A)=C$

On a : $R(D)=D' \iff z_{D'}=iz_D+1-i$

$\iff z_{D'}=i(-i)+1-i$

$\iff z_{D'}=1+1-i$

$\iff z_{D'}=2-i=z_B$

$\iff D'=B$

D'où : $R(D)=B$

ProfSalmi.blogspot.com

c. Montrons que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle.

On a : $R(A) = C$ donc : $\Omega A = \Omega C$

et $R(D) = B$ donc : $\Omega D = \Omega B$

d'après 2) b) on a : $\Omega A = \Omega B$

D'où : $\Omega A = \Omega B = \Omega D = \Omega C$

Donc, les points A , B, C et D appartiennent au même cercle de centre Ω

Remarque: le rayon de ce cercle est:

$r = \Omega A = |a - \omega| = |2 + i - 1| = |1 + i| = \sqrt{2}$

Solution 50

1 Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 + 10z + 26 = 0$

On a : $\Delta = 10^2 - 4 \times 26 = -4$

$\Delta < 0$, Donc l'équation (E) admet deux solutions complexes conjuguées :

$z_1 = \dfrac{-10 - i\sqrt{4}}{2} = -5 - i$; $z_2 = \overline{z_1} = -5 + i$

D'où : $S = \{-5 + i \ ; \ -5 - i\}$

2 a. Montrons que : $\dfrac{b - \omega}{a - \omega} = i$

On a : $\dfrac{b - \omega}{a - \omega} = \dfrac{-5 + i + 3}{-2 + 2i + 3} = \dfrac{-2 + i}{1 + 2i} = \dfrac{i(2i + 1)}{1 + 2i} = i$

b. Déduisons la nature du triangle ΩAB

On a : $\dfrac{b - \omega}{a - \omega} = i$ et $i = 1\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$

Donc : $\left|\dfrac{b - \omega}{a - \omega}\right| = |i|$ et $\arg\left(\dfrac{b - \omega}{a - \omega}\right) \equiv \arg(i)[2\pi]$

Ainsi : $\dfrac{\Omega B}{\Omega A} = 1$ et $\left(\overrightarrow{\Omega A} \ ; \ \overrightarrow{\Omega B}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

D'où : $\Omega B = \Omega A$ et $\widehat{A\Omega B} = \dfrac{\pi}{2}$

Et par suite le triangle ΩAB est rectangle isocèle en Ω.

3 Soit T la translation de vecteur $\vec{u}(6 + 4i)$

a. Montrons que $z_D = 1 + 3i$ où $D = T(C)$

ProfSalmi.blogspot.com

On a: $T(C)=D \Leftrightarrow \overrightarrow{CD}=\vec{u}$

$\Leftrightarrow z_D - z_C = 6+4i$

$\Leftrightarrow z_D = z_C + 6 + 4i$

$\Leftrightarrow d = -5 - i + 6 + 4i$

$\Leftrightarrow d = 1 + 3i$

D'où : $d = z_D = 1+3i$

b. Montrons que : $\frac{b-d}{a-d}=2$

On a : $\frac{b-d}{a-d} = \frac{-5+i-1-3i}{-2+2i-1-3i} = \frac{-6-2i}{-3-i} = \frac{2(-3-i)}{-3-i} = 2$

Déduisons que A est le milieu de $[BD]$

On a : $\frac{b-d}{a-d}=2 \Leftrightarrow b-d=2(a-d)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DB}=2\overrightarrow{DA}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$

Donc, A est le milieu de $[BD]$

Méthode 2 : $b-d=2a-2d$

équivaut à: $b+d=2a$

équivaut à: $a=\frac{b+d}{2}$

Donc A milieu de $[BD]$

Solution 51

I) On considère le nombre complexe: $a = 2+\sqrt{2}+i\sqrt{2}$

1 Montrons que : $|a| = 2\sqrt{2+\sqrt{2}}$

on a : $|a| = |(2+\sqrt{2})+i\sqrt{2}|$

$= \sqrt{(2+\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}$

$= \sqrt{4+4\sqrt{2}+2+2}$

$= \sqrt{8+4\sqrt{2}}$

$= \sqrt{4(2+\sqrt{2})}$

$= 2\sqrt{2+\sqrt{2}}$

2 Vérifions que : $a = 2\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right)+2i\sin\frac{\pi}{4}$

On a : $a = 2+\sqrt{2}+i\sqrt{2}$

$= 2(1+\frac{\sqrt{2}}{2})+2i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$= 2(1+\cos\frac{\pi}{4})+2i\sin\frac{\pi}{4}$

Donc : $a = 2\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right)+2i\sin\frac{\pi}{4}$

3 a. Montrons que : $1+\cos(2\theta)=2\cos^2\theta$ **par linéarisation de** $\cos^2\theta$

ProfSalmi.blogspot.com

On a : $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$

Donc : $\cos^2\theta = \left(\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2$

$= \dfrac{1}{4}[(e^{i\theta})^2 + 2e^{i\theta}\times e^{-i\theta} + (e^{-i\theta})^2]$

$= \dfrac{1}{4}[e^{i(2\theta)} + 2 + e^{-2i\theta}]$

$= \dfrac{1}{4}[2\cos(2\theta)+2]$

$= \dfrac{1}{2}\cos(2\theta)+\dfrac{1}{2}$

info: $e^{ia}+e^{ia} = 2\cos\alpha$

D'où : $2\cos^2\theta = \cos(2\theta)+1$

b. Montrons que : $a = 4\cos^2\left(\dfrac{\pi}{8}\right) + 4i\cos\dfrac{\pi}{8}\sin\dfrac{\pi}{8}$

On a : $a = 2\left(1+\cos\dfrac{\pi}{4}\right)+2i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$

$= 2\left(2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{8}\right)\right)+2i\left(2\cos\dfrac{\pi}{8}\sin\dfrac{\pi}{8}\right)$

Donc : $a = 4\cos^2\left(\dfrac{\pi}{8}\right)+4i\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$

c. Montrons que : $4\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)\left[\cos\dfrac{\pi}{8}+i\sin\dfrac{\pi}{8}\right]$ **est une forme trigonométrique du nombre** a.

On a : $a = 4\cos^2\left(\dfrac{\pi}{8}\right)+4i\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$

$= 4\cos\dfrac{\pi}{8}\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)\right]$

Comme: $\dfrac{\pi}{8}\in\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$, alors $4\cos\dfrac{\pi}{8}>0$

Donc : $|a| = 4\cos\dfrac{\pi}{8}$ et $\arg a \equiv \dfrac{\pi}{8}[2\pi]$

D'où : $4\cos\dfrac{\pi}{8}\left(\cos\dfrac{\pi}{8}+i\sin\dfrac{\pi}{8}\right)$ est une forme trigonométrique du nombre a

▸ **Montrons que :** $a^4 = (2\sqrt{2+\sqrt{2}})^4 i$

On a : $a = 4\cos\dfrac{\pi}{8}(\cos\dfrac{\pi}{8}+i\sin\dfrac{\pi}{8})$

Donc : $a^4 = |a|^4\left(\cos\left(4\times\dfrac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(4\times\dfrac{\pi}{8}\right)\right)$

$= |a|^4\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right) = |a|^4 i$

Or : $|a| = 2\sqrt{2+\sqrt{2}}$ d'où : $a^4 = (2\sqrt{2+\sqrt{2}})^4 i$

II) Soit R la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

1 Montrons que : $z_B = 2i$ **où** $B = R(A)$

ProfSalmi.blogspot.com

On a : $R(A) = B \iff z_B - z_\Omega = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_A - z_\Omega)$

$\iff z_B = i(2+\sqrt{2}+i\sqrt{2}-\sqrt{2})+\sqrt{2}$

$\iff z_B = 2i-\sqrt{2}+\sqrt{2}$

$\iff b = 2i$

Donc : $b = 2i$ est l'affixe de B image de A par la rotation R.

2 Déterminons l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z-2i|=2$

On a : $|z-2i| = 2 \iff |z_M - z_B| = 2$

$\iff BM = 2$

$\iff M \in \mathscr{C}(B;2)$

Donc, l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z-2i|=2$ est le cercle de centre B et de rayon $R=2$.

Solution 52

1 Soit l'équation : $(E): z^2 - 2\sqrt{3}\,z + 4 = 0$

On a : $\Delta = (2\sqrt{3})^2 - 4\times 4$

$= 4\times 3 - 4\times 4$

$= 4(3-4)$

$= -4$

$\Delta < 0$, donc l'équation (E) admet deux solutions complexes conjuguées distinctes :

$z_1 = \dfrac{2\sqrt{3}-2i}{2} = \sqrt{3}-i$ et $z_2 = \overline{z_1} = \sqrt{3}+i$

D'où : $S = \{\sqrt{3}+i;\sqrt{3}-i\}$

2 a. Écrivons a et b sous forme trigonométrique

On a : $a = \sqrt{3}+i$

Donc : $|a| = \sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2} = \sqrt{4} = 2$

D'où : $a = \sqrt{3}+i$

$= 2(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i)$

$= 2(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\ \sin\dfrac{\pi}{6})$

Et par suite : $a = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

On a : $b = \sqrt{3}-i = \overline{a}$

ProfSalmi.blogspot.com

Donc : $b = 2(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6})$

$= 2(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6}))$

Et par suite : $b = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

b. Écriture complexe de la rotation R de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

Soit M un point d'affixe z et M' d'affixe z' on a :

$$R(M) = M' \iff z' - z_B = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z - z_B)$$
$$\iff z' = -i(z - \sqrt{3} + i) + \sqrt{3} - i$$
$$\iff z' = -iz + \sqrt{3}i + 1 + \sqrt{3} - i$$
$$\iff z' = -iz + (1 + \sqrt{3}) + (-1 + \sqrt{3})i$$

c. Montrons que $R(A) = C$

On a : $R(A) = A' \iff z_{A'} = -iz_A + (1 + \sqrt{3}) + (-1 + \sqrt{3})i$
$$\iff z_{A'} = -i(\sqrt{3} + i) + (1 + \sqrt{3}) + (-1 + \sqrt{3})i$$
$$\iff z_{A'} = -\sqrt{3}i + 1 + 1 + \sqrt{3} - i + \sqrt{3}i$$
$$\iff z_{A'} = 2 + \sqrt{3} - i = z_C$$
$$\iff A' = C$$

D'où : $R(A) = C$

▸ **La nature du triangle ABC :**

On a : $R(A) = C$ donc : $BA = BC$ et $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

D'où : $BA = BC$ et $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{2}$ donc le triangle ABC est rectangle isocèle en B.

3 Soit T la translation de vecteur $\vec{u}(-1 + i)$

▸ **Montrons que : $d = z_D = \sqrt{3} - 1$ où $D = T(B)$**

On a : $T(B) = D \iff \overrightarrow{BD} = \vec{u}$
$$\iff z_D - z_B = -1 + i$$
$$\iff z_D = \sqrt{3} - i - 1 + i$$
$$\iff z_D = \sqrt{3} - 1$$

Donc, l'affixe du point D est : $d = \sqrt{3} - 1$

▸ **Montrons que : $(AC) \perp (AD)$**

Méthode 1 :

On a : $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}) = \arg\left(\frac{d-a}{c-a}\right)[2\pi]$

ProfSalmi.blogspot.com

Et on a : $\frac{d-a}{c-a}=\frac{\sqrt{3}-1-\sqrt{3}-i}{2+\sqrt{3}-i-\sqrt{3}-i}$

$=\frac{-1-i}{2-2i}$

$=\frac{(-1-i)(1+i)}{2(1-i)(1+i)}$

$=\frac{-(1+i)^2}{2(1+1)}$

$=\frac{-2i}{4}$

$=-\frac{1}{2}i$

Comme : $\arg(-\frac{1}{2}i)\equiv\frac{-\pi}{2}[2\pi]$ alors : $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD})\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$ d'où :

$(AC)\perp(AD)$

Méthode 2 : (utilisation du produit scolaire)

On a : $z_A=\sqrt{3}+i$, $z_C=2+\sqrt{3}-i$ et $z_D=\sqrt{3}-1$

Donc : $A(\sqrt{3};1)$, $C(2+\sqrt{3};-1)$ et $D(\sqrt{3}-1;0)$

D'où : $\overrightarrow{AC}(2;-2)$ et $\overrightarrow{AD}(-1;-1)$

On a : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=(-1)\times2+(-1)\times(-2)$

$=-2+2$

$=0$

Donc : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=0$ c'est-à-dire : $(AC)\perp(AD)$

Solution 53

1 a. Déterminons z_1 et z_2 avec $\mathrm{Im}(z_1)>0$

On a : $(E):z^2-8z+25=0$ alors : $\Delta=(-8)^2-4\times25$

$=64-100$

$=-36$

$\Delta<0$ donc, l'équation (E) admet deux solutions complexes conjuguées :

$z'=\frac{8-i\sqrt{36}}{2}=\frac{8-6i}{2}=4-3i$ et $z''=\overline{z'}=4+3i$

Comme: $\mathrm{Im}(z_1)>0$ alors : $z_1=z''$ donc : $z_1=4+3i$ et $z_2=4-3i$

▸ **Montrons que :** $b=4\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ **et** $a=4\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$

ProfSalmi.blogspot.com

▸ **pour** $b = 4\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

On a : $b = z_2 - i$

$= 4 - 3i - i$

$= 4 - 4i$

$= 4(1 - i)$

$= 4\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

$= 4\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$= 4\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$= 4\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

▸ **pour** $a = 4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

Méthode 1:

on a: $a = z_1 + i$

$= \overline{z_2} + i$

$= \overline{z_2 - i}$

$= \overline{b}$

$= \overline{\left(4\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)}$

$= 4\sqrt{2}\ e^{i\frac{\pi}{4}}$

Méthode 2 :

info: $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$

on a : $a = z_1 + i$

$= 4 + 3i + i$

$= 4(1 + i)$

$= 4\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

$= 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\ \sin\frac{\pi}{4}\right)$

$= 4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

b. Déduisons la nature du triangle OAB

On a : $z_A = a = 4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_B = b = 4\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

Donc : $\begin{cases} OA = |a| = 4\sqrt{2} \\ (\vec{u};\overrightarrow{OA}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi] \end{cases}$ et $\begin{cases} OB = |b| = 4\sqrt{2} \\ (\vec{u};\overrightarrow{OB}) \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi] \end{cases}$

Ainsi : $OA = OB = 4\sqrt{2}$ donc OAB est un triangle isocèle en O.

▸ **Déterminons une mesure de** $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$

On a : $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) \equiv (\overrightarrow{OA};\vec{u}) + (\vec{u};\overrightarrow{OB})[2\pi]$

$\equiv -(\vec{u};\overrightarrow{OA}) + (\vec{u};\overrightarrow{OB})[2\pi]$

$\equiv -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}[2\pi]$

$\equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Donc: $\widehat{AOB} = \frac{\pi}{2} = 90°$ et par suite OAB est un triangle rectangle isocèle en O.

ProfSalmi.blogspot.com

2 Soit R la rotation de centre $I(2i)$ d'angle $-\frac{\pi}{2}$

a. Ecriture complexe de la rotation R

Soit $M(z)$ et $M'(z')$ deux points du plan tels que $M' = R(M)$

On a : $R(M) = M' \iff z' - z_I = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z - z_I)$

$\iff z' = -i(z-2i) + 2i$

$\iff z' = -iz - 2 + 2i$

donc, l'écriture complexe de la rotation R est : $z' = -iz - 2 + 2i$

b. Vérifions que : $R(A) = C$

On a : $R(A) = A' \iff z_{A'} = -iz_A - 2 + 2i$

$\iff z_{A'} = -i(4+4i) - 2 + 2i$

$\iff z_{A'} = 2 - 2i = z_C$

$\iff A' = C$

D'où: $R(A) = C$

3 Soit h l'homothétie de centre $\Omega(16i)$ de rapport $\frac{4}{3}$

a. Écriture complexe de h .

Soit $M(z)$ et $M'(z')$ deux points du plan complexe tels que $h(M) = M'$

On a : $h(M) = M' \iff \overrightarrow{\Omega M'} = \frac{4}{3}\overrightarrow{\Omega M}$

$\iff z' - \omega = \frac{4}{3}(z - \omega)$

$\iff z' = \frac{4}{3}z - \frac{4}{3}(16i) + 16i$

$\iff z' = \frac{4}{3}z - \frac{16}{3}i$

Donc la forme complexe de h est : $z' = \frac{4}{3}z - \frac{16}{3}i$

b. Montrons que D est le milieu de $[AC]$ où: $h(D) = B$

On a : $h(D) = B \iff z_B = \frac{4}{3}z_D - \frac{16}{3}i$

$\iff \frac{4}{3}z_D = z_B + \frac{16}{3}i$

$\iff z_D = \frac{3}{4}(4 - 4i) + 4i$

$\iff z_D = 3 + i$

L'affixe du milieu de $[AC]$ est : $\frac{z_A + z_C}{2}$

on a : $\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{4 + 4i + 2 - 2i}{2} = 3 + i = z_D$

ProfSalmi.blogspot.com

Ainsi $z_D = \frac{z_A + z_C}{2}$, donc D est le milieu de $[AC]$

c. Déterminons l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z-2+2i| = |z|$

méthode géomètrique :

On a : $|z-2+2i| = |z| \Leftrightarrow |z_M - (2-2i)| = |z_M|$

$\Leftrightarrow |z_M - z_C| = |z_M - z_O|$

$\Leftrightarrow CM = OM$

D'où l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z-2+2i| = |z|$ est la médiatrice du segment $[OC]$.

Remarque :

On pose : $z = x + yi$ où $(x;y) \in \mathbb{R}^2$

On a : $|z-2+2i| = |z| \Leftrightarrow |(x-2)+(y+2)i| = |x+yi|$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+(y+2)^2} = \sqrt{x^2+y^2}$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y+2)^2 = x^2+y^2$

$\Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2+4y+4 = x^2+y^2$

$\Leftrightarrow -4x+4y+8 = 0$

$\Leftrightarrow -x+y+2 = 0$

Donc l'ensemble des points $M(z)$ tel que $|z-2+2i| = |z|$ est la droite (Δ) d'équation : $-x+y+2 = 0$

Solution 54

1 a. Vérifions que $z^4+4 = (z^2-2z+2)(z^2+2z+2)$

On a : $(z^2-2z+2)(z^2+2z+2) = z^4+2z^3+2z^2-2z^3-4z^2-4z+2z^2+4z+4$

$= z^4+4z^2-4z^2+4$

$= z^4+4$

D'où : $z^4+4 = (z^2-2z+2(z^2+2z+2)$

b. Déduisons les solutions de l'équation $z^4+4=0$ dans $\mathbb{C}$

On a : $z^4+4=0 \Leftrightarrow (z^2-2z+2)(z^2+2z+2) = 0$

$\Leftrightarrow z^2-2z+2 = 0$ ou $z^2+2z+2 = 0$

$\Leftrightarrow (z-1)^2+1 = 0$ ou $(z+1)^2+1 = 0$

$\Leftrightarrow (z-1)^2 = -1 = i^2$ ou $(z+1)^2 = -1 = i^2$

$\Leftrightarrow z-1 = i$ ou $z-1 = -i$ ou $z+1 = i$ ou $z+1 = -i$

$\Leftrightarrow z = 1+i$ ou $z = 1-i$ ou $z = -1+i$ ou $z = -1-i$

ProfSalmi.blogspot.com

Remarque : on peut résoudre les deux équations.

$z^2-2z+2=0$ et $z^2+2z+2=0$ en calculant le discriminanat Δ.

Donc, L'ensemble des solutions de l'équation $z^4+4=0$ est :

$S=\{1+i;1-i;-1+i;-1-i\}$

2 ▸ **Écrivons z_B sous forme trigonométrique :**

On a : $z_B=-1+i$

Alors : $|z_B|=|-1+i|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$

Donc : $z_B=-1+i$

$$=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

▸ **Écrivons z_C sous forme trigonométrique:**

On a : $z_C=-1-i$

Alors : $|z_C|=|-1-i|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

Donc : $z_C=-1-i$

$$=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

Méthode 2: Remarque : $z_C=\overline{z_B}$

D'où : $z_C=\overline{\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)}$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

infos:

▸ $\arg(\overline{z})\equiv-\arg(z)[2\pi]$

▸ $-\frac{3\pi}{4}\equiv\frac{5\pi-8\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}-2\pi$

▸ $-\frac{3\pi}{4}\equiv\frac{5\pi}{4}[2\pi]$

b. Montrons que: $\frac{z_E-z_C}{z_B-z_C}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

On a : $\frac{z_E-z_C}{z_B-z_C}=\frac{-1+\sqrt{3}+1+i}{-1+i+1+i}=\frac{\sqrt{3}+i}{2i}=\frac{\sqrt{3}}{2i}+\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{1}{2}$

ProfSalmi.blogspot.com

donc : $\frac{z_E - z_C}{z_B - z_C} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

▸ **Déduisons la nature du triangle BCE.**

On a : $\begin{cases} \left|\frac{z_E - z_C}{z_B - z_C}\right| = \frac{|z_E - z_C|}{|z_B - z_C|} = \frac{CE}{CB} \\ \left|\frac{z_E - z_C}{z_B - z_C}\right| = \left|\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1 \end{cases}$

Donc : $CE = CB$ (1)

On a : $\arg\left(\frac{z_E - z_C}{z_B - z_C}\right) \equiv (\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CE})[2\pi]$

$$\arg\left(\frac{z_E - z_C}{z_B - z_C}\right) \equiv \arg\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)[2\pi]$$

$$\equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$$

Donc : $(\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CE}) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$

D'où: $CE = CB$ et $B\widehat{C}E = \frac{\pi}{3}$

Ainsi, le triangle BCE est équilatéral .

c. **Vérifions que :** $(2+\sqrt{3})(z_E - z_A) = z_F - z_A$

on a : $(2+\sqrt{3})(z_E - z_A) = (2+\sqrt{3})(-1+\sqrt{3}-1-i)$

$$= (2+\sqrt{3})((\sqrt{3}-2)-i)$$
$$= (\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)-(2+\sqrt{3})i$$
$$= 3-4-(2+\sqrt{3})i$$
$$= -1-(2+\sqrt{3})i$$

Et on a : $z_F - z_A = -i - i\sqrt{3} - 1 - i$

$$= -1-(2+\sqrt{3})i$$

Donc : $(2+\sqrt{3})(z_E - z_A) = z_F - z_A$

Déduisons que les points A, E et F sont alignés.

On a : $(2+\sqrt{3})(z_E - z_A) = z_F - z_A$

Donc : $2+\sqrt{3} = \frac{z_F - z_A}{z_E - z_A}$ (car: $z_E \neq z_A$)

Comme: $(2+\sqrt{3}) \in \mathbb{R}$ alors : $\frac{z_F - z_A}{z_E - z_A} \in \mathbb{R}$

Donc, les points A, E et F sont alignés.

3 On considère l'homothétie h de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$

ProfSalmi.blogspot.com

a. Déterminons l'affixe de K tel que: $K = h(F)$

On a : $h(F) = K \iff \overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$

$$\iff z_K - z_A = \frac{1}{2}(z_F - z_A)$$

$$\iff z_K = \frac{1}{2}z_F + \frac{1}{2}z_A$$

$$\iff z_K = \frac{1}{2}(-i - i\sqrt{3}) + \frac{1}{2}(1+i)$$

$$\iff z_K = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Donc, l'affixe de K est : $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

b. Soit T la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$

Déterminons l'affixe du point G tel que : $G = T(E)$

On a : $T(E) = G \iff \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{BC}$

$$\iff z_G - z_E = z_C - z_B$$

$$\iff z_G = z_E + z_C - z_B$$

$$\iff z_G = -1 + \sqrt{3} - 1 - i + 1 - i$$

$$\iff z_G = -1 + \sqrt{3} - 2i$$

Donc, l'affixe du point G est $-1 + \sqrt{3} - 2i$

Solution 55

1 a. Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2 - 2z + 2 = 0$

On a : $\Delta = (-2)^2 - (4 \times 2) = -4$

Alors : $\Delta < 0$, donc (E) admet deux solutions complexes conjuguées:

$z' = \frac{2 - 2i}{2} = 1 - i$ et $z'' = \overline{z'} = 1 + i$

Donc : $S = \{1 + i; 1 - i\}$

b. On a : $\mathrm{Im}(z_1) > 0$ donc : $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 1 - i$

▸ Écrivons z_1 sous forme trigonométrique

on a : $|z_1| = |1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

alors : $z_1 = 1 + i$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} i \sin\frac{\pi}{4}\right)$$

▸ Écrivons z_2 sous forme trigonométrique

ProfSalmi.blogspot.com

Méthode 1: on a : $z_2 = \overline{z_1} = \overline{(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})} = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

Donc : $\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ est une forme exponentielle de z_2.

Méthode 2: on a : $|z_2| = |\overline{z_1}| = |z_1| = \sqrt{2}$

Et : $\arg(z_2) \equiv \arg(\overline{z_1})[2\pi]$

$\equiv -\arg(z_1)[2\pi]$

$\equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$

Donc : $z_2 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

Méthode 3: on a : $|z_2| = |1-i| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$

Donc : $z_2 = 1-i$

$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$= \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

Donc : $z_2 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

c. Déduisons les solutions de l'équation:

$(E_2): (iz - 1 + 2i)^2 - 2(iz - 1 + 2i) + 2 = 0$

On pose : $Z = iz - 1 + 2i$

L'équation (E_2) s'écrit : $Z^2 - 2Z + 2 = 0$

Et d'après 1) a) on a : $Z = 1 + i$ ou $Z = 1 - i$

On a : $Z = 1 + i \Leftrightarrow iz - 1 + 2i = 1 + i$

$\Leftrightarrow iz = 2 - i$

$\Leftrightarrow z = \frac{2}{i} - \frac{i}{i}$

$\Leftrightarrow z = -2i - 1$

Et on a : $Z = 1 - i \Leftrightarrow iz - 1 + 2i = 1 - i$

$\Leftrightarrow iz = 2 - 3i$

$\Leftrightarrow z = \frac{2}{i} - 3$

$\Leftrightarrow z = -3 - 2i$

Donc, l'ensemble des solutions de l'équation (E_2) est:

$S = \{-3 - 2i; -1 - 2i\}$

2 a. Montrons que les points A, B et C appartiennent à $\mathscr{C}(I(3);\sqrt{5})$ cercle de centre I et de rayon $\sqrt{5}$.

ProfSalmi.blogspot.com

On a : $IA = |z_A - z_I| = |1 + i - 3| = |-2 + i| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

Et : $IB = |z_B - z_I| = |1 - i - 3| = |-2 - i| = \sqrt{5}$

Et : $IC = |z_C - z_I| = |2(1-i) - 3| = |-1 - 2i| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

Comme : $IA = IB = IC = \sqrt{5}$

Alors, les points A, B et C appartiennent à $\mathscr{C}$ le cercle de centre $I(3)$ et derayon $\sqrt{5}$.

b. Nature du triangle IAC.

Comme: $IA = IC$ alors, le triangle IAC est isocèle en I.

On a : $AC = |z_C - z_A| = |2 - 2i - 1 - i| = |1 - 3i| = \sqrt{10}$

Comme : $AC \neq IA$ alors, IAC n'est pas équilatéral.

Remarque : $IA^2 + IC^2 = 5 + 5 = 10 = AC^2$

Donc, le triangle IAC est rectangle en I.

Concluion : Le triangle IAC est isocèle rectangle en I.

3 Soit T la translation de vecteur $2\overrightarrow{IC}$

Déterminons l'affixe du point E où : $E = T(O)$

$$T(O) = E \iff \overrightarrow{OE} = 2\overrightarrow{IC}$$
$$\iff z_E = 2(z_C - z_I)$$
$$\iff z_E = 2(2 - 2i - 3)$$
$$\iff z_E = -2 - 4i$$

4 Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$

a. Déterminons l'affixe de $D = R(E)$

On a : $R(E) = D \iff z_D = e^{i\frac{\pi}{2}} z_E$
$$\iff z_D = i(-2 - 4i)$$
$$\iff z_D = 4 - 2i$$

b. Montrons que: $(AB) \perp (CD)$

Méthode 1: $(AB) \perp (CD) \iff \overline{(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD})} \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$

On a: $\overline{(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD})} \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$

Comme : $\frac{z_D - z_c}{z_B - z_A} = \frac{4 - 2i - 2 + 2i}{1 - i - 1 - i} = \frac{2}{-2i} = i$

Et : $\arg(i) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

Alors : $\overline{(\overrightarrow{AB}; CD)} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ donc : $(AB) \perp (CD)$

ProfSalmi.blogspot.com

Méthode 2: $(AB)\perp(CD)\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0$

On a : $z_A=1+i$, $z_B=1-i$, $z_C=2-2i$ et $z_D=4-2i$

Donc : $A(1;1)$, $B(1;-1)$, $C(2;-2)$ et $D(4;-2)$

Et par suite : $\overrightarrow{AB}(0;-2)$ et $\overrightarrow{CD}(2;0)$

Et comme $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=(0\times 2)-(-2\times 0)=0$

Alors : $(AB)\perp(CD)$

Solution 56

$P(z)=z^3+(\sqrt{2}-2)z^2+2(1-\sqrt{2})z+2\sqrt{2}$

1 a. Déterminons a **et** b **tels que :** $P(z)=(z+\sqrt{2})(z^2+az+b)$

On a : $(z+\sqrt{2})(z^2+az+b)=z^3+az^2+bz+\sqrt{2}z^2+a\sqrt{2}z+b\sqrt{2}$

$=z^3+(a+\sqrt{2})z^2+(b+a\sqrt{2})z+b\sqrt{2}$

Donc : $P(z)=(z+\sqrt{2})(z^2+az+b)\Leftrightarrow\begin{cases}a+\sqrt{2}=\sqrt{2}-2\\ b+a\sqrt{2}=2(1-\sqrt{2})\\ b\sqrt{2}=2\sqrt{2}\end{cases}$

$\Leftrightarrow a=-2$ et $b=2$

et puisque: $(\forall z\in\mathbb{C})$; $P(z)=(z+\sqrt{2})(z^2-2z+2)$

b. Résolvons dans $\mathbb{C}$ **l'équation** (E)**:** $P(z)=0$

$P(z)=0\Leftrightarrow z+\sqrt{2}=0$ ou $z^2-2z+2=0$

$\Leftrightarrow z=-\sqrt{2}$ ou $z^2-2z+2=0$

Soit : (E_0): $z^2-2z+2=0$

On a : $\Delta=(-2)^2-(4\times 2)=-4$

$\Delta<0$ donc (E_0) admet deux solutions complexes conjuguées

$z_1=\dfrac{2+2i}{2}=1+i$ et $z_2=\overline{z_1}=1-i$

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation (E) est: $S=\{-\sqrt{2};1+i;1-i\}$

c. Écrivons sous forme exponentielle les solutions de l'équation (E)**.**

On a : $z_0=-\sqrt{2}=\sqrt{2}e^{i\pi}$

Et : $z_1=1+i$

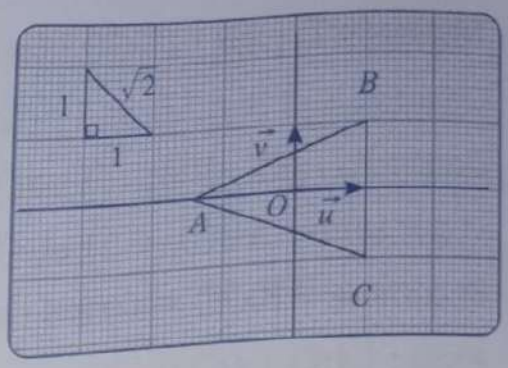
Comme : $|z_1|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

ProfSalmi.blogspot.com

Alors : $z_1 = 1+i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$= \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$



Et comme: $z_2 = \overline{z_1}$

Alors: $z_2 = \overline{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

2 $z_A = -\sqrt{2}$, $z_B = 1+i$ **et** $z_C = 1-i$

a. Représentation des points A, B **et** C.

On a $B(1;1)$ et $C(1;-1)$

$\sqrt{2}$ est la diagonale d'un carré de coté 1.

b. Déterminons une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})$

On a : $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}) \equiv \arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right)[2\pi]$

or : $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{1+i+\sqrt{2}}{1-i+\sqrt{2}} = \frac{[(1+\sqrt{2})+i][(1+\sqrt{2})+i]}{(1+\sqrt{2})^2+1}$

$= \frac{(1+\sqrt{2})^2+2(1+\sqrt{2})i-1}{4+2\sqrt{2}}$

$= \frac{(2+2\sqrt{2})+(2+2\sqrt{2})i}{4+2\sqrt{2}}$

$= \left(\frac{2+2\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}\right)(1+i)$

$= \left(\frac{\sqrt{2}+1}{2+\sqrt{2}}\right)\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

$= \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right)\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Donc : $\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ et $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

3 a. Vérifions que: $(\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{8}[2\pi]$

▸ On remarque que le triangle ABC est isocèle en A:

En effet : : $AC = |z_C - z_A| = |1-i+\sqrt{2}| = \sqrt{(1+\sqrt{2})^2+1}$

Et $AB = |z_B - z_A| = |1+i+\sqrt{2}| = \sqrt{(1+\sqrt{2})^2+1}$

▸ On remarque aussi que la droite (AO) est la médiatrice du segment $[BC]$

ProfSalmi.blogspot.com

donc: $[AO)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{BOC}$.

(car: le repère est orthonormé et $z_B = \overline{z}_C$ donc, C et B sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses et O et A sont deux points de cet axe).

(on peut aussi vérifier que: $OA = OB$)

Donc : $(\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AB}) \equiv \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})[2\pi]$

$\equiv \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{4}[2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{8}[2\pi]$

Conclusion : $(\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{8}[2\pi]$

b. Écrivons: $\frac{z_A - z_B}{z_A}$ sous forme algébrique

On a : $\frac{z_A - z_B}{z_A} = \frac{-\sqrt{2} - 1 - i}{-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i = \frac{2+\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

Écrivons le nombre $\frac{z_A - z_B}{z_A}$ sous forme trigonométrique :

On a : $\left|\frac{z_A - z_B}{z_A}\right| = \left|\frac{2+\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right| = \sqrt{\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2+\sqrt{2}}$

$\arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_A}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_O - z_A}\right)[2\pi]$

$\equiv (\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AB})[2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{8}[2\pi]$

Donc : $\sqrt{2+\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)$ est une forme trigonométrique du nombre complexe $\frac{z_A - z_B}{z_A}$.

c. Déduisons les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$

On a : $\begin{cases} \frac{z_A - z_B}{z_A} = \frac{2+\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ \frac{z_A - z_B}{z_A} = \left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\cos\frac{\pi}{8}\right) + i\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\sin\frac{\pi}{8}\right) \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} \sqrt{2+\sqrt{2}}\cos\frac{\pi}{8} = \frac{2+\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{2+\sqrt{2}}\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

D'où : $\begin{cases} \cos\frac{\pi}{8} = \frac{2+\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \\ \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \end{cases}$

infos:

$\frac{A}{\sqrt{A}} = \sqrt{A}$

ProfSalmi.blogspot.com

Remarque : $\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \dfrac{\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}\times\sqrt{2-\sqrt{2}}}$

$= \dfrac{\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2\sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}}$

$= \dfrac{\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2\sqrt{4-2}}$

$= \dfrac{\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}$

$= \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

Solution 57

$$\begin{cases} a_0 = 8 \\ a_{n+1} = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{4} a_n \; ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1 Écrivons les nombres a_1, a_2, a_3 et a_4 sous forme algébrique:

$a_1 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{4} a_0 = \dfrac{(1+i\sqrt{3})8}{4} = 2(1+i\sqrt{3}) = 2+2\sqrt{3}i$

$a_2 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{4} a_1 = \dfrac{(1+i\sqrt{3})(2+2\sqrt{3}i)}{4} = -1+\sqrt{3}i$

$a_3 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{4} a_2 = \dfrac{(1+i\sqrt{3})(-1+\sqrt{3}i)}{4} = \dfrac{(\sqrt{3}i)^2-1}{4} = -1$

$a_4 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{4} a_3 = -\dfrac{1}{4} - i\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

2 Montrons par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N}) \; ; a_n = 2^{3-n} e^{i\frac{n\pi}{3}}$

- Pour $n = 0$ on a: $a_0 = 8$ et $2^{3-0} e^{i0} = 2^3 \times 1 = 8$

Donc : $a_0 = 2^{3-0} e^{i\frac{0\pi}{3}}$

- Soit $n \in \mathbb{N}$:
- Supposons que: $a_n = 2^{3-n} e^{i\frac{n\pi}{3}}$, et montrons que : $a_{n+1} = 2^{2-n} e^{i\frac{(n+1)\pi}{3}}$

On a : $a_{n+1} = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{4} a_n$

$= \dfrac{1+i\sqrt{3}}{4} \times 2^{3-n} e^{i\frac{n\pi}{3}}$ (d'après l'hypothèse récurrence)

D'où $a_{n+1} = \dfrac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{3}} \times 2^{3-n} \times e^{i\frac{n\pi}{3}}$ (car: $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} i = \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}$)

$= 2^{-1} \times 2^{3-n} \times e^{i\frac{\pi}{3}} \times e^{i\frac{n\pi}{3}}$ $= e^{i\frac{\pi}{3}}$

$= 2^{2-n} e^{i\frac{(n+1)\pi}{3}}$

ProfSalmi.blogspot.com

Ainsi : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; a_n = 2^{3-n} e^{i\frac{n\pi}{3}}$

3 Posons $r_n = |a_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a. Montrons que (r_n) est une suite géométrique

info: $|e^{i\theta}| = 1$

On a : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; a_n = 2^{3-n} \times e^{i\frac{n\pi}{3}}$

Donc : $|a_n| = 2^{3-n} \times |e^{i\frac{n\pi}{3}}| = 2^{3-n}$

Ainsi : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; r_n = 2^{3-n}$

On a : $r_{n+1} = 2^{3-(n+1)} = 2^{3-n-1} = 2^{3-n} \times 2^{-1} = \frac{1}{2} 2^{3-n} = \frac{1}{2} r_n$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; r_{n+1} = \frac{1}{2} r_n$

Et par suite (r_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et du 1er terme $r_0 = 2^3 = 8$.

Remarque : on peut écrire r_n sous la forme : $r_n = 2^{3-n} = \frac{2^3}{2^n} = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Et donc, la suite (r_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et du 1er terme 8.

b. Déterminons le plus petit entier n tel que A_n soit à l'intérieur d'un cercle de rayon 10^{-2}.

On a : $|a_n| = 2^{3-n}$, donc: $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; OA_n = 2^{3-n}$

et par suite : $A_n \in \mathscr{C}(O; 2^{3-n})$

A_n est à l'intérieur du cercle $\mathscr{C}(O; 10^{-2})$

$$\Leftrightarrow OA_n < 10^{-2}$$

$$\Leftrightarrow 2^{3-n} < 10^{-2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{8}{2^n} < 10^{-2}$$

$$\Leftrightarrow 2^n > \frac{8}{10^{-2}}$$

$$\Leftrightarrow 2^n > 800$$

$$\Leftrightarrow \ln(2^n) > \ln 800 \quad \text{(car ln est strictement croissante sur } \mathbb{R}^{*+}\text{)}$$

$$\Leftrightarrow n \ln 2 > \ln(800)$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln 800}{\ln 2} \quad \text{(car : } \ln 2 > 0\text{)}$$

Et comme : $\frac{\ln 800}{\ln 2} \simeq 9{,}64$

Alors, la plus petite valeur de n est 10.

ProfSalmi.blogspot.com

4 On pose $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; I_n = |a_{n+1} - a_n|$

a. Calculons : I_0, I_1 **et** I_2

$I_0 = |a_1 - a_0| = |2 + 2\sqrt{3}\,i - 8| = |-6 + 2\sqrt{3}\,i| = \sqrt{36+12} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

$I_1 = |a_2 - a_1| = |-1 + \sqrt{3}\,i - 2 - 2\sqrt{3}\,i| = |-3 - \sqrt{3}\,i| = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$I_2 = |a_3 - a_2| = |-1 + 1 - \sqrt{3}\,i| = |-\sqrt{3}\,i| = \sqrt{3}$

On remarque que: $I_1 = \frac{1}{2} I_0$; $I_2 = \frac{1}{2} I_1$ et on peut conjecturer que :

$I_{n+1} = \frac{1}{2} I_n$

C'est-à-dire : (I_n) une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$

b. Déterminons I_n **en fonction de** n

Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; I_{n+1} = \frac{1}{2} I_n$

On a : $I_1 = \frac{1}{2} I_0$ Donc la propriété est vraie pour $n = 0$

▸ Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Supposons que : $I_{n+1} = \frac{1}{2} I_n$

- Montrons que : $I_{n+2} = \frac{1}{2} I_{n+1}$

On a : $I_{n+2} = |a_{n+3} - a_{n+2}|$

$$= |2^{3-(n+3)} e^{i\frac{(n+3)\pi}{3}} - 2^{3-(n+2)} e^{i\frac{(n+2)\pi}{3}}|$$

$$= |2^{-1} \times e^{i\frac{\pi}{3}} (2^{3-(n+2)} e^{i\frac{(n+2)\pi}{3}} - 2^{3-(n+1)} e^{i\frac{(n+1)\pi}{3}})|$$

$$= \left|\frac{1}{2} \times e^{i\frac{\pi}{3}}\right| \times |a_{n+2} - a_{n+1}|$$

$$= \frac{1}{2} I_{n+1}$$

Ainsi $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; I_{n+1} = \frac{1}{2} I_n$

C'est-à-dire : (I_n) suite est une géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et du 1er terme $I_0 = 4\sqrt{3}$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; I_n = I_0 \times q^n$

C'est-à-dire : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; I_n = 4\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

5 Posons : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; L_n = \sum_{k=0}^{n} I_k$

ProfSalmi.blogspot.com

a. Montrons que : $L_n = 8\sqrt{3}(1-2^{-n-1})$

On a : $L_n = \sum_{k=0}^{n} I_K$

$= I_0 + I_1 + I_2 + ... + I_{n-1} + I_n$

$= I_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$

$= 4\sqrt{3}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}$

$= 8\sqrt{3}(1-2^{-n-1})$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; L_n = 8\sqrt{3}(1-2^{-n-1})$

b. Déterminons la limite de la suite (L_n)

On a : $L_n = 8\sqrt{3}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

Comme : $-1 < \frac{1}{2} < 1$ alors: $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$

D'où : $\lim_{n\to+\infty} L_n = 8\sqrt{3}$

Solution 58

1 Résolvons dans $\mathbb{C}$ **l'équation** $(E): z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$

On a : $\Delta = (-2\sqrt{3})^2 - 16 = 12 - 16 = -4$

alors: $\Delta < 0$, donc (E) admet deux solutions complexes conjuguées :

$z_1 = \frac{2\sqrt{3}-2i}{2} = \sqrt{3} - i$; $z_2 = \overline{z_1} = \sqrt{3} + i$

D'où l'ensemble des solutions de l'équation (E) est : $S = \{\sqrt{3}+i ; \sqrt{3}-i\}$

2 a. Écrivons z_A **,** z_B **et** z_C **sous forme exponentielle :**

On a : $z_A = \sqrt{3} - i$ et $|z_A| = \sqrt{3+1} = 2$

donc : $z_A = \sqrt{3} - i$

$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$

$= 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

$= 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$

On a : $z_B = \sqrt{3} + i$

ProfSalmi.blogspot.com

Et : $z_B = \sqrt{3} + i = \overline{z_A} = \overline{2e^{-i\frac{\pi}{6}}} = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

On a : C est le milieu du segment $[OB]$, donc : $z_C = \frac{z_O + z_B}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

Et on a : $z_C = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = e^{i\frac{\pi}{6}}$

b. Montrons que le triangle OAB est équilatéral.

On a : $OA = |z_A| = 2$ et $OB = |z_B| = 2$

Et $AB = |z_B - z_A| = |\sqrt{3} + i - \sqrt{3} + i| = |2i| = 2$

Donc : $OA = OB = AB$, et par suite OAB est un triangle équilatéral.

c. Construction des points: A, B et C.

Construction du point A :

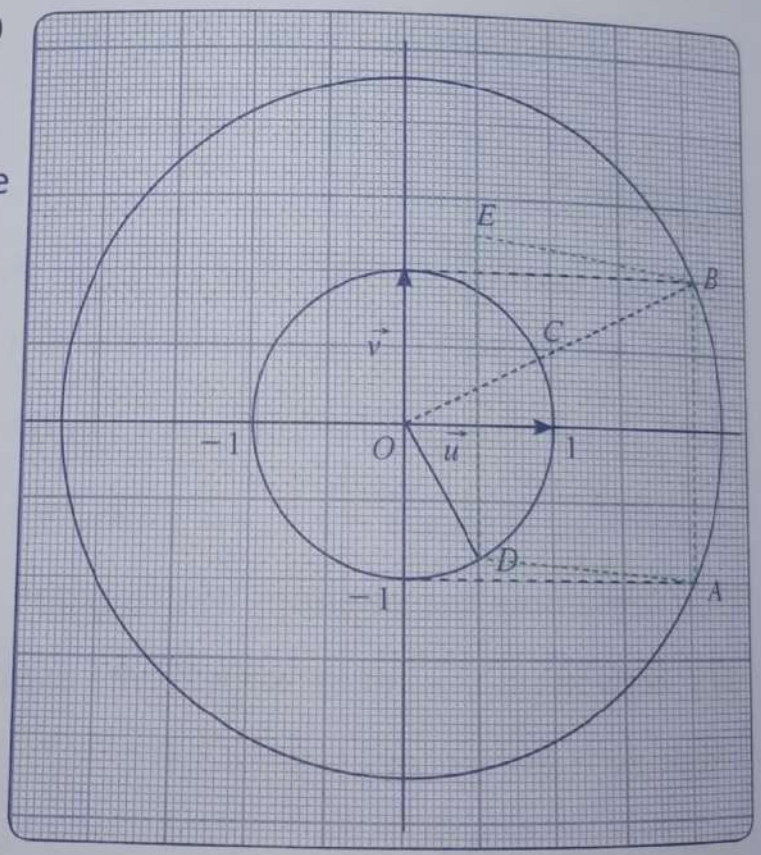
Méthode 1: On a : $|z_A| = 2$ et $\arg(z_A) \equiv -\frac{\pi}{6}[2\pi]$

Ainsi, $A \in \mathscr{C}(O,2)$ et $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{OA}) \equiv -\frac{\pi}{6}[2\pi]$

Méthode 2 : On a: $x_A = \sqrt{3} > 0$

Et $y_A = -1$ et $|z_A| = 2$

Donc, $A \in \mathscr{C}(O;2)$ par la même méthode, on peut construire B et C.



3 Le triangle OCD est isocèle rectangle en O tel que: $(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OD}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $DABE$ est un parallélogramme.

a. Construction des points D et E (voir figure).

b. Déterminer l'affixe du point D.

Méthode 1 : on a : OCD triangle isocèle en O, donc : $OD = OC$

ProfSalmi.blogspot.com

Donc : $|z_D| = |z_C| = \left|\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right| = 1$

on a : $(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OD}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et : $\arg\left(\frac{z_D}{z_C}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Et comme: $\arg\left(\frac{z_D}{z_C}\right) \equiv \arg(z_D) - \arg(z_C)[2\pi]$ et $\arg(z_C) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$

Alors: $\arg(z_D) \equiv -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}[2\pi]$

Ainsi: $\arg(z_D) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$

On a : $|z_D| = 1$ et $\arg(z_D) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$

Donc : $d = z_D = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Écriture de d sous forme exponentielle : $d = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

Méthode 2:

On a : $OC = OD$ et $(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OD}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Donc, D est l'image de C par la rotation R de centre O d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

$R(C) = D \iff z_D = e^{-i\frac{\pi}{2}} z_C$

$\iff z_D = -i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

$\iff d = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Écrivons z_D sous forme exponentielle : $d = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$= \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}$

$= \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$= e^{-i\frac{\pi}{3}}$

c. Montrons que l'affixe de E est : $e = \frac{1}{2} + \left(\frac{4-\sqrt{3}}{2}\right)i$

($DABE$ est un parallélogramme) $\iff \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{DA}$

$\iff z_B - z_E = z_A - z_D$

$\iff z_E = z_B - z_A + z_D$

$\iff z_E = \sqrt{3} + i - \sqrt{3} + i + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$\iff e = \frac{1}{2} + \left(\frac{4-\sqrt{3}}{2}\right)i$

Donc : $z_E = e = \frac{1}{2} + \left(\frac{4-\sqrt{3}}{2}\right)i$

ProfSalmi.blogspot.com

Montrons que: $OE = BE = \sqrt{5-2\sqrt{3}}$

On a : $OE = |z_E| = |e| = \left|\frac{1}{2} + \left(\frac{4-\sqrt{3}}{2}\right)i\right|$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{4-\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{19-8\sqrt{3}}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{20-8\sqrt{3}}{4}}$$

$$= \sqrt{5-2\sqrt{3}}$$

Et $BE = |z_E - z_B| = |e - z_B| = \left|\frac{1}{2} + \left(\frac{4-\sqrt{3}}{2}\right)i - \sqrt{3} - i\right|$

$$= \left|\left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right) + \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)i\right|$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4} - \sqrt{3} + 3 + \frac{7-4\sqrt{3}}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{20-8\sqrt{3}}{4}}$$

$$= \sqrt{5-2\sqrt{3}}$$

Donc : $OE = BE = \sqrt{5-2\sqrt{3}}$

Solution 59

1 a. Montrons que: $(\forall z \in \mathbb{C})\ ; z^3 + 8 = (z+2)(z^2 - 2z + 4)$

Méthode 1: $(z+2)(z^2-2z+4) = z^3 - 2z^2 + 4z + 2z^2 - 4z + 8 = z^3 + 8$

Méthode 2: $z^3 + 8 = z^3 + 2^3 = (z+2)(z^2 - 2z + 2^2) = (z+2)(z^2 - 2z + 4)$

infos:

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

b. Déduisons les solutions de l'équation $z^3 + 8 = 0$ **dans** $\mathbb{C}$.

$z^3 + 8 = 0 \iff (z+2)(z^2 - 2z + 4) = 0$

$\iff z = -2$ ou $z^2 - 2z + 4 = 0$

Résolvons l'équation (E): $z^2 - 2z + 4 = 0$

On a : $\Delta = (-2)^2 - 16 = -12$

$\Delta < 0$ donc (E) admet deux solutions complexes conjuguées :

ProfSalmi.blogspot.com

$z_1 = \dfrac{2 - i\sqrt{12}}{2} = \dfrac{2 - 2i\sqrt{3}}{2} = 1 - i\sqrt{3}$ et $z_2 = \overline{z_1} = 1 + i\sqrt{3}$

Donc, les solutions de l'équation $z^3 + 8 = 0$ sont : $-2; 1 + i\sqrt{3}; 1 - i\sqrt{3}$

Donc : $S = \{-2; 1 + i\sqrt{3}; 1 - i\sqrt{3}\}$

2 a. Déterminons la forme exponentielle des nombres a, b et c.

▸ On a : $a = 1 + i\sqrt{3}$

donc : $|a| = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$

Et par suite : $a = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

D'où : $a = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

▸ On a : $b = -2$

Donc : $b = 2(\cos\pi + i\sin\pi) = 2e^{i\pi}$, donc : $b = 2e^{i\pi}$

▸ On a : $c = 1 - i\sqrt{3}$

Et comme : $|c| = |1 - i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$

Alors : $c = 1 - i\sqrt{3} = 2\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} - i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

$= 2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$

Donc : $c = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

b. Montrons que : $\dfrac{b-a}{c-a} = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

On a : $\dfrac{b-a}{c-a} = \dfrac{-2-1-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}-1-i\sqrt{3}} = \dfrac{-3-i\sqrt{3}}{-2i\sqrt{3}}$

$= \dfrac{3}{2i\sqrt{3}} + \dfrac{1}{2} = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2\times 3}i + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Donc : $\dfrac{b-a}{c-a} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

Nature du triangle ABC :

On a : $\begin{cases} \left|\dfrac{b-a}{c-a}\right| = \dfrac{|b-a|}{|c-a|} = \dfrac{AB}{AC} \\ \left|\dfrac{b-a}{c-a}\right| = \left|\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1 \end{cases}$

Donc : $\dfrac{AB}{AC} = 1$, c'est-à-dire $AB = AC$

Et : $\begin{cases} \arg\left(\dfrac{b-a}{c-a}\right) \equiv (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB})[2\pi] \\ \arg\left(\dfrac{b-a}{c-a}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)[2\pi] \equiv -\dfrac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$

ProfSalmi.blogspot.com

Ainsi : $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$ c'est-à-dire : $B\hat{A}C = \frac{\pi}{3}$

On a : $AB = AC$ et $B\hat{A}C = 60°$, donc le triangle ABC est équilatéral.

infos:
Tout triangle isocèle ayant un angle de $60°$ est équilatéral

3 h la transformation qui a tout point $M(z)$ lui associe le point $M'(z')$ tel que: $z' = 2z - 2i$

a. Montrons que h est une homothétie de centre $\Omega(2i)$ et de rapport 2.

$$\begin{aligned} h(M(z)) = M'(z') &\Leftrightarrow z' = 2z - 2i \\ &\Leftrightarrow z' - 2i = 2z - 4i \\ &\Leftrightarrow z' - z_\Omega = 2(z - z_\Omega) \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = 2\overrightarrow{\Omega M} \end{aligned}$$

Donc, h est une homothétie de centre $\Omega(2i)$ et de rapport 2.

b. Déterminons l'affixe de A' tel que : $h(A) = A'$

On a : $$\begin{aligned} h(A) = A' &\Leftrightarrow z_{A'} = 2z_A - 2i \\ &\Leftrightarrow z_{A'} = 2(1 + i\sqrt{3}) - 2i \\ &\Leftrightarrow z_{A'} = 2 + (2\sqrt{3} - 2)i \end{aligned}$$

D'où : $2 + 2(\sqrt{3} - 1)i$ est l'affixe de A'.

Déterminons l'affixe de B' tel que $h(B) = B'$

On a : $$\begin{aligned} h(B) = B' &\Leftrightarrow z_{B'} = 2z_B - 2i \\ &\Leftrightarrow z_{B'} = 2(-2) - 2i \\ &\Leftrightarrow z_{B'} = -4 - 2i \end{aligned}$$

D'où : $-4 - 2i$ est l'affixe de B'.

c. Montrons que : $(A'B') \,/\!/\, (AB)$

Méthode 1:

On a : $h(A) = A'$ et $h(B) = B'$ donc : $\overrightarrow{A'B'} = 2\overrightarrow{AB}$

d'où : $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, c'est-à-dire : $(A'B') \,/\!/\, (AB)$

Méthode 2: $(A'B') \,/\!/\, (AB) \Leftrightarrow \frac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$

On a : $$\frac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A} = \frac{-4 - 2i - 2 - 2(\sqrt{3} - 1)i}{-2 - 1 - i\sqrt{3}} = \frac{-6 - 2\sqrt{3}\,i}{-3 - i\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2(-3 - i\sqrt{3})}{-3 - i\sqrt{3}} = 2 \in \mathbb{R}$$

Donc : $(A'B') \,/\!/\, (AB)$.

ProfSalmi.blogspot.com

2 Fonctions exponentielles

1 Fonction exponentielle népérienne

Définition :

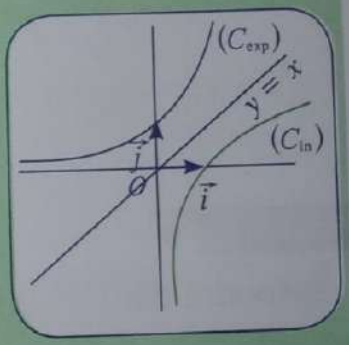
La fonction réciproque de la fonction $\ln$ s'appelle la fonction exponentielle népérienne et on la note $\exp$.

Conséquences :

- La fonction $\exp$ est définie sur $\mathbb{R}$.
- $\exp(0) = 1$ et $\exp(1) = e$
- $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \exp(x) > 0$
- $(\forall x \in \mathbb{R}) ; (\forall y \in]0; +\infty[) ; (y = \exp(x) \Longleftrightarrow x = \ln(y))$
- $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \ln(\exp x) = x$
- $(\forall x \in]0; +\infty[) ; \exp(\ln x) = x$
- La fonction $\exp$ est continue strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- Pour tout x et y de $\mathbb{R}$, $\exp(x) > \exp(y) \Longleftrightarrow x > y$.
- Pour tout x et y de $\mathbb{R}$, $\exp(x) = \exp(y) \Longleftrightarrow x = y$.

Courbe de la fonction exp:

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, La courbe de la fonction $\exp$ est le symétrique de la courbe de la fonction $\ln$ par rapport à la droite d'équation : $y = x$ (la première bissectrice du repère)



Nouvelle écriture : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \exp(x) = e^x$

Conséquences et propriétés :

- $(\forall x \in \mathbb{R}) ; (\forall y \in]0; +\infty[) ; (e^x = y \Longleftrightarrow x = \ln y)$
- $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \ln(e^x) = x$
- $((\forall x \in]0; +\infty[) ; e^{\ln x} = x)$

Pour tout x et y de $\mathbb{R}$ et pour tout r de $\mathbb{Q}$ on a :

- $e^x \times e^y = e^{x+y}$
- $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
- $\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$
- $e^{rx} = (e^x)^r$
- $(e^x > e^y \Longleftrightarrow x > y)$
- $(e^x = e^y \Longleftrightarrow x = y)$

ProfSalmi.blogspot.com

Exercices

Exercice 1

Simplifier les écritures suivantes : $a_1 = e^{2\ln 3} - e^{\ln 3}$; $a_2 = e^{-3\ln(2)}$; $a_3 = e^{\frac{1}{2}\ln(3)}$; $a_4 = e^{\frac{1}{3}\ln(8)}$; $a_5 = e^{1-\ln(2)}$ et $a_6 = e^{2\ln(3)+\frac{1}{2}\ln(3)}$

Exercice 2

Soit x un réel, simplifier les expressions suivantes :

- $a_1(x) = (e^x)^4 \times e^{-3x}$
- $a_2(x) = \dfrac{e^{x-2}}{e^{x+3}}$
- $a_3(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x}$
- $a_4(x) = e^{-x^2} \times e$
- $a_5(x) = \dfrac{e^{4x}}{(e^{-x})^2 \times e^x}$
- $a_6(x) = (e^x)^{\frac{1}{2}} \times (e^{-x})^3$

Exercice 3

Soit x un réel, simplifier les expressions suivantes :

- $b_1(x) = e^{1+2x} \times e^{-2x}$
- $b_2(x) = \dfrac{e^{3+4x}}{e^{1+2x}}$
- $b_3(x) = \dfrac{(e^x)^5}{(e^{2x})^2}$
- $b_4(x) = \dfrac{1+e^{3x}}{e^{3x}} - (e^x)^{-3}$
- $b_5(x) = (e^x + e^{-x})^2$
- $b_6(x) = (e^x + 1)(e^{-x} - 1) - e^x(e^{-x} - 1)$

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $e^{3-x} = 1$
2. $e^{3x} = 5$
3. $e^{x^3} = e^8$
4. $e^{x^2-3} - e^{-2x} = 0$
5. $e^{x^2} = (e^2)^3 \times e^{-x}$
6. $e^{x+1} = e^{\frac{1}{x}}$
7. $e^{\sin x} = \sqrt{e}$
8. $|e^x - 1| = |2e^x - 3|$

Exercice 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $e^{2x} + e^x - 2 = 0$
2. $e^{2x} - 8e^x + 7 = 0$
3. $e^x + e^{-x} = 2$
4. $e^x + 10e^{-x} - 11 = 0$
5. $e^{2x} - 3 = 4e^{-2x}$
6. $e^{6x+2} + e^{3x+1} = 2$
7. $\ln(e^{2x} - 2e^x + 1) = 3$
8. $\ln(2e^x - 3) = x$

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $e^{2x+5} < e^{1-x}$
2. $(e^x)^3 \leq e^{x+6}$
3. $e^{2x} - \frac{1}{e^x} \geq 0$
4. $e^{x^2} \leq e^2$
5. $\frac{e^x + 3}{e^x + 1} > 2$
6. $|e^{x+1} - 3| \leq 2$

Exercice 7

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $(2e^x - 1)(e^x - 2) \leq 0$
2. $e^{2x} - 3e^x + 2 > 0$
3. $\frac{3e^x - 1}{e^x - 1} \leq 0$
4. $2e^x - 5 \geq -2e^{-x}$
5. $e^{4x} - 8e^{2x} + 7 \leq 0$
6. $\ln(e^x - 2e^{-x}) < 0$

Exercice 8

Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} e^x - \frac{1}{2}e^y = 1 \\ 2e^x + e^y = 4 + e \end{cases}$
2. $\begin{cases} e^{4x}.e^y = e^{-2} \\ xy = -2 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x + y = 1 \\ 3e^x - e^{y+3} = 2e^2 \end{cases}$
4. $\begin{cases} e^x.e^y = 10 \\ e^{x-y} = \frac{2}{5} \end{cases}$

Exercice 9

Déterminer D, l'ensemble de définition de la fonction f, dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = \frac{5}{e^x - 1}$
2. $f(x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 2}$
3. $f(x) = \ln(e^x - 2)$
4. $f(x) = \sqrt{x+1}\, e^{-\frac{1}{x}}$
5. $f(x) = \sqrt{e^x - 3}$
6. $f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)$
7. $f(x) = \ln(2 - e^{\frac{1}{x}})$
8. $f(x) = \ln(e^{2x} - 3e^x + 2)$

ProfSalmi.blogspot.com

Solutions

Exercice 1

Simplifions a_1 :

On a : $a^{\ln 3} = 3$ et $a^{2\ln 3} = (e^{\ln 3})^2 = 3^2 = 9$.

Donc : $a_1 = e^{2\ln 3} - e^{\ln 3} = 9 - 3 = 6$.

Simplifions a_2 :

On a : $e^{\ln 2} = 2$, donc : $a_2 = e^{-3\ln 2} = (e^{\ln 2})^{-3} = 2^{-3} = \frac{1}{8}$.

Simplifions a_3 :

On a : $\frac{1}{2}\ln 3 = \ln(\sqrt{3})$, donc : $a_3 = e^{\frac{1}{2}\ln 3} = e^{\ln\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

Simplifions a_4 :

On a : $\frac{1}{3}\ln(8) = \ln\sqrt[3]{8}$ et $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$.

Donc : $a_4 = e^{\frac{1}{3}\ln 8} = e^{\ln(\sqrt[3]{8})} = \sqrt[3]{8} = 2$.

Simplifions a_5 :

On a : $1 - \ln(2) = \ln(e) - \ln(2) = \ln\left(\frac{e}{2}\right)$

Donc : $a_5 = e^{1-\ln(2)} = e^{\ln(\frac{e}{2})} = \frac{e}{2}$

Autre méthode : $a_5 = e^{1-\ln 2} = \frac{e}{e^{\ln 2}} = \frac{e}{2}$

Simplifions a_6 : On a : $a_6 = e^{2\ln(3)+\frac{1}{2}\ln(3)} = e^{2\ln(3)} \times e^{\frac{1}{2}\ln(3)}$

$= (e^{\ln 3})^2 \times (e^{\ln 3})^{\frac{1}{2}}$

$= 3^2 \times 3^{\frac{1}{2}} = 9\sqrt{3}$

Autre méthode : $a_6 = e^{\ln(3^2)+\ln(\sqrt{3})}$

$= e^{\ln(9\sqrt{3})}$

$= 9\sqrt{3}$

Exercice 2

Simplifions $a_1(x)$:

On a : $a_1(x) = (e^x)^4 \times e^{-3x} = e^{4x} \times e^{-3x} = e^{4x-3x} = e^x$

Simplifions $a_2(x)$:

On a : $a_2 = \frac{e^{x-2}}{e^{x+3}} = e^{x-2-(x+3)} = e^{x-2-x-3} = e^{-5}$

Simplifions $a_3(x)$:

On a : $a_3(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x} = \frac{e^x}{e^x} + \frac{e^{-x}}{e^x} = 1 + e^{-x-x} = 1 + e^{-2x}$

ProfSalmi.blogspot.com

▸ **Simplifions $a_4(x)$:**

On a : $a_4(x) = e^{-x^2} \times e = e^{-x^2} \times e^1 = e^{-x^2+1}$

▸ **Simplifions $a_5(x)$:**

On a : $a_5(x) = \dfrac{e^{4x}}{(e^{-x})^2 \times e^x} = \dfrac{e^{4x}}{e^{-2x} \times e^x} = \dfrac{e^{4x}}{e^{-2x+x}}$

$= \dfrac{e^{4x}}{e^{-x}} = e^{4x+x} = e^{5x}$

▸ **Simplifions $a_6(x)$:**

On a : $a_6(x) = (e^x)^{\frac{1}{2}} \times (e^{-x})^3 = e^{\frac{1}{2}x} \times e^{-3x} = e^{\frac{1}{2}x-3x} = e^{-\frac{5x}{2}}$

Exercice 3

▸ **Simplifions $b_1(x)$:**

On a : $b_1(x) = e^{1+2x} \times e^{-2x} = e^{1+2x-2x} = e^1 = e$

▸ **Simplifions $b_2(x)$:**

On a : $b_2(x) = \dfrac{e^{3+4x}}{e^{1+2x}} = e^{3+4x-(1+2x)}$

$= e^{3+4x-1-2x} = e^{2+2x}$

▸ **Simplifions $b_3(x)$:**

On a : $b_3(x) = \dfrac{(e^x)^5}{(e^{2x})^2} = \dfrac{e^{5x}}{e^{4x}} = e^{5x-4x} = e^x$

▸ **Simplifions $b_4(x)$:**

On a : $b_4(x) = \dfrac{1+e^{3x}}{e^{3x}} - (e^x)^{-3} = \dfrac{1}{e^{3x}} + \dfrac{e^{3x}}{e^{3x}} - e^{-3x}$

$= e^{-3x} + 1 - e^{-3x} = 1$

▸ **Simplifions $b_5(x)$:**

On a : $b_5(x) = (e^x + e^{-x})^2 = (e^x)^2 + 2e^x \times e^{-x} + (e^{-x})^2$

$= e^{2x} + 2e^{x-x} + e^{-2x} = e^{2x} + 2 + e^{-2x}$

▸ **Simplifions $b_6(x)$:**

On a : $b_6(x) = (e^x + 1)(e^{-x} - 1) - e^x(e^{-x} - 1)$

$= (e^{-x} - 1)(e^x + 1 - e^x) = e^{-x} - 1$

Exercice 4

1 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{3-x} = 1$

Soit x un réel, on a : $e^{3-x} = 1 \iff e^{3-x} = e^0$

$\iff 3 - x = 0$

$\iff x = 3$

Donc : $S = \{3\}$

ProfSalmi.blogspot.com

2 **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{3x} = 5$**

Soit x un réel, on a : $e^{3x} = 5 \iff \ln(e^{3x}) = \ln 5$

$\iff 3x = \ln 5$

$\iff x = \frac{1}{3}\ln 5$

$\iff x = \ln(\sqrt[3]{5})$

Donc : $S = \{\ln(\sqrt[3]{5})\}$

3 **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{x^3} = e^8$**

Méthode 1:

Soit x un réel, on a : $e^{x^3} = e^8 \iff x^3 = 8$

$\iff x^3 - 8 = 0$

$\iff x^3 - 2^3 = 0$

$\iff (x-2)(x^2+2x+4) = 0$

$\iff x^2 + 2x + 4 = 0$ ou $x = 2$

Puisque le discriminant de l'équation : $x^2 + 2x + 4 = 0$ est $\Delta = -12$, alors : $x^2 + 2x + 4 \neq 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

Donc : $e^{x^3} = e^8 \iff x = 2$

D'où : $S = \{2\}$

Méthode 2:

Soit x un réel, on a : $e^{x^3} = e^8 \iff x^3 = 8$

Puisque : $8 > 0$, alors : $x^3 > 0$, donc : $x > 0$

D'où : $x^3 = 8 \iff \sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{8}$

$\iff x = \sqrt[3]{2^3}$

$\iff x = 2$

Par suite : $S = \{2\}$

4 **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{x^2-3} - e^{-2x} = 0$**

Soit x un réel, on a : $e^{x^2-3} - e^{-2x} = 0 \iff e^{x^2-3} = e^{-2x}$

$\iff x^2 - 3 = -2x$

$\iff x^2 + 2x - 3 = 0$

$\iff x^2 + 2x + 1 - 4 = 0$

$\iff x^2 + 2x + 1 = 4$

$\iff (x+1)^2 = 2^2$

ProfSalmi.blogspot.com

$\Leftrightarrow x+1=2$ ou $x+1=-2$

$\Leftrightarrow x=1$ ou $x=-3$

Donc : $S=\{1;-3\}$

5 **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{x^2}=(e^2)^3\times e^{-x}$**

Soit x un réel, on a : $e^{x^2}=(e^2)^3\times e^{-x} \Leftrightarrow e^{x^2}=e^6\times e^{-x}$

$\Leftrightarrow e^{x^2}=e^{6-x}$

$\Leftrightarrow x^2=6-x$

$\Leftrightarrow x^2+x-6=0$

Le discriminant de l'équation $x^2+x-6=0$ est $\Delta=25$, donc les solutions de cette équation sont :

$x_1=\dfrac{-1+\sqrt{\Delta}}{2}=\dfrac{-1+5}{2}=2$ et $x_2=\dfrac{-1-\sqrt{\Delta}}{2}=-3$

D'où : $e^{x^2}=(e^2)^3\times e^{-x} \Leftrightarrow x=2$ ou $x=-3$

Par suite : $S=\{2;-3\}$

6 **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{x+1}=e^{\frac{1}{x}}$**

L'équation $e^{x+1}=e^{\frac{1}{x}}$ est définie si : $x\neq 0$, c'est-à-dire : $x\in\mathbb{R}^*$

Soit x un réel non nul, on a : $e^{x+1}=e^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow x+1=\dfrac{1}{x}$

$\Leftrightarrow x^2+x-1=0$

Le discriminant de l'équation $x^2+x-1=0$ est $\Delta=5$, donc les solutions de cette équation sont :

$x_1=\dfrac{-1-\sqrt{\Delta}}{2}=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2=\dfrac{-1+\sqrt{\Delta}}{2}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Donc : $e^{x+1}=e^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ ou $x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

D'où : $S=\left\{\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2};\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$

7 **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{\sin x}=\sqrt{e}$**

Soit x un réel, on a : $e^{\sin x}=\sqrt{e} \Leftrightarrow e^{\sin x}=e^{\frac{1}{2}}$

$\Leftrightarrow \sin x=\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \sin x=\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=\pi-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$

ProfSalmi.blogspot.com

Donc : $S = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

8 **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation :** $|e^x - 1| = |2e^x - 3|$

Soit x un réel, on a :

$$|e^x - 1| = |2e^x - 3| \iff e^x - 1 = 2e^x - 3 \text{ ou } e^x - 1 = -2e^x + 3$$
$$\iff e^x = 2 \text{ ou } 3e^x = 4$$
$$\iff e^x = e^{\ln(2)} \text{ ou } e^x = \frac{4}{3} = e^{\ln\left(\frac{4}{3}\right)}$$
$$\iff x = \ln(2) \text{ ou } x = \ln\left(\frac{4}{3}\right)$$

Donc : $S = \left\{\ln(2); \ln\left(\frac{4}{3}\right)\right\}$

Exercice 5

1 **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation :** $(E_1): e^{2x} + e^x - 2 = 0$

Soit x un réel, on pose : $X = e^x$, on a : $X > 0$ et $e^{2x} = (e^x)^2 = X^2$

L'équation (E_1) devient : $X^2 + X - 2 = 0$

Le discriminant de cette équation est $\Delta = 9$, ses solutions sont 1 et -2.

or $X > 0$ donc: $X = 1$

Donc : $X^2 + X - 2 = 0$ et $X > 0 \iff X = 1$

D'où : $e^{2x} + e^x - 2 = 0 \iff e^x = 1$
$$\iff x = 0$$

Par suite : $S = \{0\}$

2 **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation :** $(E_2): e^{2x} - 8e^x + 7 = 0$

Soit x un réel, on pose : $X = e^x$, on a : $X > 0$ et $e^{2x} = (e^x)^2 = X^2$

L'équation (E_2) devient : $X^2 - 8X + 7 = 0$

Le discriminant cette équation est $\Delta = 36$, et ses solutions sont 1et 7.

Donc : $e^{2x} - 8e^x + 7 = 0 \iff e^x = 1$ ou $e^x = 7$
$$\iff x = 0 \text{ ou } x = \ln 7$$

D'où : $S = \{0; \ln 7\}$

3 **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation :** $(E_3): e^x + e^{-x} = 2$

Soit x un réel, on a : $e^x + e^{-x} = 2 \iff e^x + \frac{1}{e^x} - 2 = 0$
$$\iff (e^x)^2 - 2e^x + 1 = 0$$
$$\iff (e^x - 1)^2 = 0$$
$$\iff e^x = 1$$
$$\iff x = 0$$

ProfSalmi.blogspot.com

Donc : $S = \{0\}$

4 **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation** $(E_4): e^x + 10e^{-x} - 11 = 0$

Soit x un réel, on a : $e^x + 10e^{-x} - 11 = 0 \iff e^x + \frac{10}{e^x} - 11 = 0$

$$\iff (e^x)^2 - 11e^x + 10 = 0$$

On pose : $e^x = X$, donc l'équation (E_4) devient : $X^2 - 11X + 10 = 0$

Le discriminant de cette équation est $\Delta = 81$, et ses solutions sont 10 et 1.

Donc : $e^x + 10e^{-x} - 11 = 0 \iff e^x = 1$ ou $e^x = 10$

$$\iff x = 0 \text{ ou } x = \ln 10$$

D'où : $S = \{0; \ln 10\}$

5 **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation** $(E_5): e^{2x} - 3 = 4e^{-2x}$

Soit x un réel, on a: $e^{2x} - 3 = 4e^{-2x} \iff e^{2x} - 3 - \frac{4}{e^{2x}} = 0$

$$\iff (e^{2x})^2 - 3e^{2x} - 4 = 0$$

On pose : $X = e^{2x}$, on a : $X > 0$, et l'équation (E_5) devient : $X^2 - 3X - 4 = 0$

Le discriminant de cette équation est $\Delta = 25$ et ses solutions sont 4 et -1 et puisque $X > 0$, alors sa solution est $X = 4$.

Donc : $e^{2x} - 3 = 4e^{-2x} \iff e^{2x} = 4$

$$\iff 2x = \ln 4 = 2\ln 2$$

$$\iff x = \ln 2$$

D'où : $S = \{\ln 2\}$

6 **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation** $(E_6): e^{6x+2} + e^{3x+1} = 2$

Soit x un réel, on a : $e^{6x+2} + e^{3x+1} = 2 \iff e^{2(3x+1)} + e^{3x+1} - 2 = 0$

$$\iff (e^{3x+1})^2 + e^{3x+1} - 2 = 0$$

On pose : $X = e^{3x+1}$, on a : $X > 0$ et l'équation (E_6) devient : $X^2 + X - 2 = 0$ et ses solutions sont 1 et -2. Puisque $X > 0$ alors sa solution est $X = 1$.

Donc : $X^2 + X - 2 = 0$ et $X > 0 \iff X = 1$

D'où : $e^{6x+2} + e^{3x+1} = 2 \iff e^{3x+1} = 1$

$$\iff 3x + 1 = 0$$

$$\iff x = -\frac{1}{3}$$

Par suite : $S = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$

ProfSalmi.blogspot.com

7 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation (E_7): $\ln(e^{2x}-2e^x+1)=3$

Soit x un réel, l'équation (E_7) est définie si et seulement si: $e^{2x}-2e^x+1>0$

Puisque : $e^{2x}-2e^x+1=(e^x)^2-2e^x+1=(e^x-1)^2$ alors :

$e^{2x}-2e^x+1\geq 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

Ainsi: $e^{2x}-2e^x+1>0 \iff e^x-1\neq 0$

$\iff e^x\neq 1$

$\iff x\neq 0$

Donc l'équation (E_7) est définie sur $\mathbb{R}^*$.

Soit x un réel, on a : $\ln(e^{2x}-2e^x+1)=3 \iff \ln((e^x-1)^2)=3$

$\iff 2\ln|e^x-1|=3$

$\iff \ln|e^x-1|=\frac{3}{2}$

$\iff |e^x-1|=e^{\frac{3}{2}}$

$\iff e^x-1=e^{\frac{3}{2}}$ ou $e^x-1=-e^{\frac{3}{2}}$

$\iff e^x=1+e^{\frac{3}{2}}$ ou $e^x=1-e^{\frac{3}{2}}$

On a: $e^{\frac{3}{2}}>1$ donc: $1-e^{\frac{3}{2}}<0$, et puisque: $e^x>0$ alors, l'équation $e^x=1-e^{\frac{3}{2}}$ est impossible dans $\mathbb{R}$.

Donc : $\ln(e^{2x}-2e^x+1)=3 \iff e^x=1+e^{\frac{3}{2}}$

$\iff x=\ln(1+e^{\frac{3}{2}})=\ln(1+e\sqrt{e})$

D'où : $S=\{\ln(1+e\sqrt{e})\}$

8 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation (E_8): $\ln(2e^x-3)=x$

Soit x un réel, l'équation (E_8) est définie si et seulement si : $2e^x-3>0$

On a : $2e^x-3>0 \iff e^x>\frac{3}{2}$

$\iff x>\ln\left(\frac{3}{2}\right)$

$\iff x\in\left]\ln\left(\frac{3}{2}\right);+\infty\right[$

Donc, l'équation (E_8) est définie sur l'intervalle $D=\left]\ln\left(\frac{3}{2}\right);+\infty\right[$

Soit x un élément de D, on a : $\ln(2e^x-3)=x \iff 2e^x-3=e^x$

$\iff e^x=3$

$\iff x=\ln(3)$

ProfSalmi.blogspot.com

Puisque : $3 > \frac{3}{2}$, alors : $\ln(3) > \ln\left(\frac{3}{2}\right)$, c'est-à-dire : $\ln(3) \in D$

Donc : $S = \{\ln(3)\}$

Exercice 6

1 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $e^{2x+5} < e^{1-x}$

Soit x un réel, on a : $e^{2x+5} < e^{1-x} \iff 2x + 5 < 1 - x$

$\iff 3x < -4$

$\iff x < -\frac{4}{3}$

$\iff x \in \left]-\infty; -\frac{4}{3}\right[$

Donc : $S = \left]-\infty; -\frac{4}{3}\right[$

2 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $(e^x)^3 \leq e^{x+6}$

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $(e^x)^3 \leq e^{x+6} \iff e^{3x} \leq e^{x+6}$

$\iff 3x \leq x + 6$

$\iff 2x \leq 6$

$\iff x \leq 3$

$\iff x \in]-\infty; 3]$

Donc : $S =]-\infty; 3]$

3 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $e^{2x} - \frac{1}{e^x} \geq 0$

Soit x un réel, on a : $e^{2x} - \frac{1}{e^x} \geq 0 \iff e^{2x} \geq \frac{1}{e^x}$

$\iff e^{2x} \geq e^{-x}$

$\iff 2x \geq -x$

$\iff 3x \geq 0$

$\iff x \geq 0$

Donc : $S = [0; +\infty[$

4 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $e^{x^2} \leq e^2$

Soit x un réel, on a : $e^{x^2} \leq e^2 \iff x^2 \leq 2$

$\iff |x| \leq \sqrt{2}$

$\iff -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$

$\iff x \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$

Donc : $S = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$

ProfSalmi.blogspot.com

5 **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :** $\frac{e^x+3}{e^x+1}>2$

Soit x un réel, on a : $e^x>0$, donc : $e^x+1>0$

Donc :
$$\frac{e^x+3}{e^x+1}>2 \iff e^x+3>2(e^x+1)$$
$$\iff e^x+3>2e^x+2$$
$$\iff -e^x>-1$$
$$\iff e^x<1$$
$$\iff x<0$$
$$\iff x\in\,]-\infty;0[$$

D'où : $S=\,]-\infty;0[$

6 **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'néquation :** $|e^{x+1}-3|\leq 2$

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $|e^{x+1}-3|\leq 2 \iff -2\leq e^{x+1}-3\leq 2$
$$\iff 1\leq e^{x+1}\leq 5$$
$$\iff 0\leq x+1\leq \ln(5)$$
$$\iff -1\leq x\leq -1+\ln(5)$$
$$\iff x\in[-1;-1+\ln(5)]$$

Donc : $S=[-1;-1+\ln(5)]$

Exercice 7

1 **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation** (I_1)**:** $(2e^x-1)(e^x-2)\leq 0$

Méthode 1 : Soit x un réel $\mathbb{R}$, on a :

- $e^x-2\geq 0 \iff e^x\geq 2$
$\iff x\geq \ln(2)$

- $e^x-2=0 \iff e^x=2$
$\iff x=\ln(2)$

et :

- $2e^x-1\geq 0 \iff e^x\geq \frac{1}{2}$
$\iff x\geq \ln\left(\frac{1}{2}\right)$
$\iff x\geq -\ln(2)$

- $2e^x-1=0 \iff e^x=\frac{1}{2}$
$\iff x=\ln\left(\frac{1}{2}\right)$
$\iff x=-\ln(2)$

Donc, le tableau de signe de $(2e^x-1)(e^x-2)$ est le suivant :

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$\ln 2$	$+\infty$
e^x-2	$-$		$-$	0	$+$	
$2e^x-1$	$-$	0	$+$		$+$	
$(2e^x-1)(e^x-1)$	$+$	0	$-$	0	$+$	

D'où : $S=[-\ln 2;\ln 2]$

ProfSalmi.blogspot.com

Méthode 2 :

infos:

a et b de $\mathbb{R}$ tels que : $a < b$, on a : $(X-a)(X-b) \leq 0 \Leftrightarrow a \leq X \leq b$

Soit x un réel, on a : $(2e^x - 1)(e^x - 2) \leq 0 \Leftrightarrow 2\left(e^x - \frac{1}{2}\right)(e^x - 2) \leq 0$

$\Leftrightarrow \left(e^x - \frac{1}{2}\right)(e^x - 2) \leq 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq e^x \leq 2$

$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) \leq \ln(e^x) \leq \ln(2)$

$\Leftrightarrow -\ln 2 \leq x \leq \ln(2)$

$\Leftrightarrow x \in [-\ln 2; \ln 2]$

Donc : $S = [-\ln 2; \ln 2]$

2 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (I_2): $e^{2x} - 3e^x + 2 > 0$

Soit x un réel, on pose : $e^x = X$, on a : $X > 0$ et $e^{2x} = (e^x)^2$

Donc, l'inéquation (I_2) devient : $X^2 - 3X + 2 > 0$

On a : 1 est une racine évidente du trinôme $X^2 - 3X + 2$, la deuxième racine est : $\frac{c}{a} = 2$, (vous pouvez aussi calculer le discriminant Δ)

Donc : $X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$

D'où : $e^{2x} - 3e^x + 2 = (e^x - 1)(e^x - 2)$

Le tableau de signe de $X^2 - 3X + 2$ est le suivant :

X	0		1		2	$+\infty$
$X^2 - 3X + 2$	$+$	0		$-$	0	$+$

Donc: $X^2 - 3X + 2 > 0 \Leftrightarrow 0 < X < 1$ ou $X > 2$

Ainsi: $e^{2x} - 3e^x + 2 > 0 \Leftrightarrow e^x < 1$ ou $e^x > 2$

$\Leftrightarrow x < 0$ ou $x > \ln 2$

$\Leftrightarrow x \in]-\infty; 0[\cup]\ln 2; +\infty[$

D'où : $S =]-\infty; 0[\cup]\ln 2; +\infty[$

3 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (I_3): $\frac{3e^x - 1}{e^x - 1} \leq 0$

L'inéquation (I_3) est définie si et seulement si : $e^x - 1 \neq 0$

et on a : $e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1$

$\Leftrightarrow x = 0$

ProfSalmi.blogspot.com

Donc l'inéquation (I_3) est définie sur $D = \mathbb{R}^*$

Soit x de $\mathbb{R}^*$, on a : $\frac{3e^x - 1}{e^x - 1} \leq 0 \iff (3e^x - 1)(e^x - 1) \leq 0$ et $e^x - 1 \neq 0$

info :
Le quotient et le produit ont le même signe : le signe de $\frac{a}{b}$ est celui de ab

$$\iff 3\left(e^x - \frac{1}{3}\right)(e^x - 1) \leq 0 \text{ et } e^x \neq 1$$
$$\iff \left(e^x - \frac{1}{3}\right)(e^x - 1) \leq 0 \text{ et } e^x \neq 1$$
$$\iff \frac{1}{3} \leq e^x \leq 1 \text{ et } e^x \neq 1$$
$$\iff \frac{1}{3} \leq e^x < 1$$
$$\iff \ln\frac{1}{3} \leq \ln(e^x) < \ln(1)$$
$$\iff -\ln 3 \leq x < 0$$
$$\iff x \in [-\ln 3; 0[$$

Donc : $S = [-\ln 3; 0[$

Remarque: (Il est possible d'utiliser aussi un tableau de signe de $\frac{3e^x - 1}{e^x - 1}$)

4 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (I_4): $2e^x - 5 \geq -2e^{-x}$

Soit x un réel, on a : $2e^x - 5 \geq -2e^{-x} \iff 2e^x - 5 + \frac{2}{e^x} \geq 0$

$$\iff 2(e^x)^2 - 5e^x + 2 \geq 0$$

On pose : $X = e^x$, l'inéquation (I_4) devient : $2X^2 - 5X + 2 \geq 0$ et $X > 0$

Le discriminant du trinôme $2X^2 - 5X + 2$ est $\Delta = 9$, et ses solutions sont : 2 et $\frac{1}{2}$. Donc : $2X^2 - 5X + 2 = 2\left(X - \frac{1}{2}\right)(X - 2)$

Le tableau de signe de $2X^2 - 5X + 2$ est le suivant:

X	0		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$2X^2 - 5X + 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a : $2e^x - 5 \geq -2e^{-x} \iff 2e^{2x} - 5e^x + 2 \geq 0$

$$\iff 0 < X \leq \frac{1}{2} \text{ ou } X \geq 2$$
$$\iff e^x \leq \frac{1}{2} \text{ ou } e^x \geq 2$$
$$\iff x \leq \ln\left(\frac{1}{2}\right) \text{ ou } x \geq \ln 2$$
$$\iff x \leq -\ln 2 \text{ ou } x \geq \ln 2$$
$$\iff x \in]-\infty; -\ln 2] \cup [\ln 2; +\infty[$$

Donc : $S =]-\infty; -\ln 2] \cup [\ln 2; +\infty[$

ProfSalmi.blogspot.com

5 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(I_5): e^{4x} - 8e^{2x} + 7 \leq 0$

Soit x un réel, on pose : $X = e^{2x}$, avec : $X > 0$ et $e^{4x} = (e^{2x})^2$

L'inéquation (I_5) devient : $X^2 - 8X + 7 \leq 0$

Le discriminant du trinôme $X^2 - 8X + 7$ est $\Delta = 36$, et ses racines sont 7 et 1.

Donc: $X^2 - 8X + 7 = (X - 1)(X - 7)$

Le tableau de signe de $X^2 - 8X + 7$ est le suivant:

X	0		1		7		$+\infty$
$X^2 - 8X + 7$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a : $X^2 - 8X + 7 \leq 0 \iff 1 \leq X \leq 7$

Donc : $e^{4x} - 8e^{2x} + 7 \leq 0 \iff 1 \leq e^{2x} \leq 7$

$\iff 0 \leq 2x \leq \ln 7$

$\iff 0 \leq x \leq \frac{1}{2}\ln 7$

$\iff x \in \left[0; \frac{1}{2}\ln 7\right]$

D'où : $S = \left[0; \frac{1}{2}\ln 7\right]$

6 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $(I_6): \ln(e^x - 2e^{-x}) < 0$

Soit x un réel, l'inéquation (I_6) est définie si et seulement si : $e^x - 2e^{-x} > 0$

On a : $e^x - 2e^{-x} = e^{-x}(e^{2x} - 2)$ et $e^{-x} > 0$

Donc : $e^x - 2e^{-x} > 0 \iff e^{-x}(e^{2x} - 2) > 0$

$\iff e^{2x} - 2 > 0$

$\iff e^{2x} > 2$

$\iff 2x > \ln 2$

$\iff x > \frac{1}{2}\ln 2$

$\iff x \in \left]\frac{1}{2}\ln 2; +\infty\right[$

D'où l'inéquation (I_6) est définie sur $D = \left]\frac{1}{2}\ln 2; +\infty\right[$

Soit x de D, on a : $\ln(e^x - 2e^{-x}) < 0 \iff \ln(e^x - 2e^{-x}) < \ln(1)$

$\iff e^x - 2e^{-x} < 1$

$\iff e^x - \frac{2}{e^x} - 1 < 0$

$\iff e^{2x} - e^x - 2 < 0$

On pose : $e^x = X$, l'inéquation $e^{2x} - e^x - 2 < 0$ devient : $X^2 - X - 2 < 0$

ProfSalmi.blogspot.com

et $X > 0$

Puisque les racines du trinôme $X^2 - X - 2$ sont -1 et 2 alors on a :
$X^2 - X - 2 = (X+1)(X-2)$

Donc : $\begin{cases} X^2 - X - 2 < 0 \\ X > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < X < 2 \\ X > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < X < 2$ (On peut dresser le tableau de signe de $X^2 - X - 2$).

$\ln(e^x - 2e^{-x}) < 0 \Leftrightarrow X^2 - X - 2 < 0$

$\Leftrightarrow 0 < X < 2$

$\Leftrightarrow 0 < e^x < 2$ et $x > \frac{1}{2}\ln 2$

$\Leftrightarrow x < \ln 2$ et $x > \frac{1}{2}\ln 2$

$\Leftrightarrow x \in \left]\frac{1}{2}\ln 2; \ln 2\right[$

Par suite : $S = \left]\frac{1}{2}\ln 2; \ln 2\right[$

Exercice 8

1 Résolvons dans $\mathbb{R}^2$ le système : $\begin{cases} e^x - \frac{1}{2}e^y = 1 \\ 2e^x + e^y = 4 + e \end{cases}$

Soit $(x;y)$ de $\mathbb{R}^2$; on pose : $X = e^x$ et $Y = e^y$, et le système devient :

$\begin{cases} X - \frac{1}{2}Y = 1 \\ 2X + Y = 4 + e \end{cases}$ c'est-à-dire : $\begin{cases} 2X - Y = 2 \\ 2X + Y = 4 + e \end{cases}$

Donc : $X = \frac{3}{2} + \frac{1}{4}e$ et $Y = 1 + \frac{1}{2}e$

Ainsi : $e^x = \frac{3}{2} + \frac{1}{4}e$ et $e^y = 1 + \frac{1}{2}e$

D'où : $x = \ln\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{4}e\right)$ et $y = \ln\left(1 + \frac{1}{2}e\right)$

Par suite : $S = \left\{\left(\ln\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{4}e\right); \ln\left(1 + \frac{1}{2}e\right)\right)\right\}$

2 Résolvons dans $\mathbb{R}^2$ le système : $\begin{cases} e^{4x}.e^y = e^{-2} \\ xy = -2 \end{cases}$

Soit $(x;y)$ de $\mathbb{R}^2$;

On a : $\begin{cases} e^{4x}.e^y = e^{-2} \\ xy = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{4x+y} = e^{-2} \\ x.y = -2 \end{cases}$

ProfSalmi.blogspot.com

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x+y=-2 \\ x.y=-2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x+y=-2 \\ (4x).y=-8 \end{cases}$$

On pose : $X = 4x$ et $Y = y$, donc le système devient : $\begin{cases} X+Y=-2 \\ X.Y=-8 \end{cases}$

D'où : X et Y sont les solutions de l'équation : $t^2+2t-8=0$ dans $\mathbb{R}$.

(Ce genre d'équation : $t^2-St+P=0$ est vu en T.C.S)

On a : $t^2+2t-8=0 \Leftrightarrow (t+1)^2=9$ (On peut aussi calculer le discriminant Δ)

$\Leftrightarrow t+1=3$ ou $t+1=-3$

$\Leftrightarrow t=2$ ou $t=-4$

Donc : $\begin{cases} X=-4 \\ Y=2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} X=2 \\ Y=-4 \end{cases}$

D'où : $\begin{cases} 4x=-4 \\ y=2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} 4x=2 \\ y=-4 \end{cases}$; c'est-à-dire: $\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=-4 \end{cases}$

Par suite : $S=\left\{(-1;2);\left(\frac{1}{2};-4\right)\right\}$

3 Résolvons dans $\mathbb{R}^2$ le système : $\begin{cases} x+y=1 \\ 3e^x-e^{y+3}=2e^2 \end{cases}$

Soit $(x;y)$ de $\mathbb{R}^2$; on a :

Le système proposé peut s'écrire: $\begin{cases} e^x.e^y=e \\ 3e^x-e^{y+3}=2e^2 \end{cases}$ ($x+y=1 \Leftrightarrow e^{x+y}=e^1 \Leftrightarrow e^x e^y=e$)

c'est-à-dire : $\begin{cases} (3e^x).(-e^{y+3})=-3e^4 \\ 3e^x-e^{y+3}=2e^2 \end{cases}$ (Après multiplication des deux membres de la première équation par $-3e^3$.)

On pose : $X=3e^x$ et $Y=-e^{y+3}$, où : $X>0$ et $Y<0$, le système devient:

$\begin{cases} X.Y=-3e^4 \\ X+Y=2e^2 \end{cases}$

Donc : X et Y sont les solutions de l'équation : $t^2-2e^2t-3e^4=0$ dans $\mathbb{R}$.

Le discriminant réduit de cette équation est $\Delta'=4e^4$, donc ses solutions sont:

$t_1=3e^2$ et $t_2=-e^2$

Puisque : $X>0$ et $Y<0$ alors : $X=3e^2$ et $Y=-e^2$

Donc: $\begin{cases} 3e^x=3e^2 \\ -e^{y+3}=-e^2 \end{cases}$ c'est-à-dire : $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$

ProfSalmi.blogspot.com

Donc : $S = \{(2;-1)\}$

4 **Résolvons dans $\mathbb{R}^2$ le système :** $\begin{cases} e^x.e^y = 10 \\ e^{x-y} = \frac{2}{5} \end{cases}$

Soit $(x;y)$ de $\mathbb{R}^2$; on a : $\begin{cases} e^x.e^y = 10 \\ e^{x-y} = \frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x+y} = 10 \\ e^{x-y} = \frac{2}{5} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \ln(10) \\ x-y = \ln\left(\frac{2}{5}\right) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \ln(2)+\ln(5) & :(E_1) \\ x-y = \ln(2)-\ln(5) & :(E_2) \end{cases}$

$\begin{pmatrix} (E_1)+(E_2) \Rightarrow 2x = 2\ln 2 \\ (E_1)-(E_2) \Rightarrow 2y = 2\ln 5 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln(2) \\ y = \ln(5) \end{cases}$

Donc: $S = \{(\ln(2);\ln(5))\}$

Exercice 9

Déterminons D, l'ensemble de définition de la fonction f.

1 $f(x) = \frac{5}{e^x - 1}$

Soit x un réel, on a : $x \in D \Leftrightarrow e^x - 1 \neq 0$

Et on a : $e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1$

$\Leftrightarrow e^x = e^0$

$\Leftrightarrow x = 0$

Donc : $x \in D \Leftrightarrow x \neq 0$

$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^*$

D'où : $D = \mathbb{R}^*$

2 $f(x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 2}$

Soit x un réel, on a : $x \in D \Leftrightarrow e^x - 2 \neq 0$

Et on a : $e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow e^x = 2$

$\Leftrightarrow \ln(e^x) = \ln(2)$

$\Leftrightarrow x = \ln(2)$

Donc : $x \in D \Leftrightarrow x \neq \ln(2)$

$\Leftrightarrow x \in]-\infty;\ln 2[\cup]\ln 2;+\infty[$

D'où : $D =]-\infty;\ln 2[\cup]\ln 2;+\infty[$

ProfSalmi.blogspot.com

3 $f(x) = \ln(e^x - 2)$

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $x \in D \iff e^x - 2 > 0$

$\iff e^x > 2$

$\iff \ln(e^x) > \ln(2)$

$\iff x > \ln(2)$

$\iff x \in]\ln(2); +\infty[$

Donc : $D =]\ln 2; +\infty[$

4 $f(x) = \sqrt{x+1}\, e^{-\frac{1}{x}}$

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $x \in D \iff x + 1 \geq 0$ et $x \neq 0$

$\iff x \geq -1$ et $x \neq 0$

$\iff x \in [-1; +\infty[$ et $x \neq 0$

$\iff x \in [-1; 0[\cup]0; +\infty[$

Donc : $D = [-1; 0[\cup]0; +\infty[$

5 $f(x) = \sqrt{e^x - 3}$

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $x \in D \iff e^x - 3 \geq 0$

$\iff e^x \geq 3$

$\iff \ln(e^x) \geq \ln(3)$

$\iff x \geq \ln(3)$

$\iff x \in [\ln 3; +\infty[$

Donc : $D = [\ln 3; +\infty[$

6 $f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)$

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $x \in D \iff e^x + 1 \neq 0$ et $\frac{e^x - 1}{e^x + 1} > 0$

Puisque : $e^x > 0$, alors : $e^x + 1 > 0$, donc : $x \in D \iff e^x - 1 > 0$

$\iff e^x > 1$

$\iff \ln(e^x) > \ln(1)$

$\iff x > 0$

$\iff x \in]0; +\infty[$

D'où : $D =]0; +\infty[$

7 $f(x) = \ln(2 - e^{\frac{1}{x}})$

Soit x de $\mathbb{R}$ on a : $x \in D \iff x \neq 0$ et $2 - e^{\frac{1}{x}} > 0$

ProfSalmi.blogspot.com

$\Leftrightarrow x \neq 0$ et $e^{\frac{1}{x}} < 2$

$\Leftrightarrow x \neq 0$ et $\ln(e^{\frac{1}{x}}) < \ln(2)$

$\Leftrightarrow x \neq 0$ et $\frac{1}{x} < \ln(2)$

$\Leftrightarrow x \neq 0$ et $\ln(2) - \frac{1}{x} > 0$

$\Leftrightarrow x \neq 0$ et $\frac{x\ln(2)-1}{x} > 0$

$\Leftrightarrow x(x\ln(2)-1) > 0$

(car le signe du quotient est celui du produit)

Le tableau de signe de $x(x\ln 2 - 1)$ dans $\mathbb{R}$.

On a : ▸ $x(x\ln(2)-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \frac{1}{\ln(2)}$

▸ $x\ln(2) - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{\ln(2)}$

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{\ln(2)}$		$+\infty$
x		-	0	+		+	
$x\ln(2)-1$		-		-	0	+	
$x(x\ln(2)-1)$		+	0	-	0	+	

Donc : $D =]-\infty; 0[\cup]\frac{1}{\ln(2)}; +\infty[$

8 $f(x) = \ln(e^{2x} - 3e^x + 2)$

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $x \in D \Leftrightarrow e^{2x} - 3e^x + 2 > 0$

On pose : $X = e^x$, on a : $e^{2x} - 3e^x + 2 = (e^x)^2 - 3e^x + 2 = X^2 - 3X + 2$

Puisque les racines du trinôme $X^2 - 3X + 2$ sont 1 et 2, alors : $X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$

On a : $X^2 - 3X + 2 > 0 \Leftrightarrow X < 1$ ou $X > 2$ (Vous pouvez faire un tableau de signe).

Donc : $x \in D \Leftrightarrow e^x < 1$ ou $e^x > 2$

$\Leftrightarrow e^x < e^0$ ou $e^x > e^{\ln(2)}$

$\Leftrightarrow x < 0$ ou $x > \ln(2)$

$\Leftrightarrow x \in]-\infty; 0[\cup]\ln(2); +\infty[$

Donc : $D =]-\infty; 0[\cup]\ln(2); +\infty[$

ProfSalmi.blogspot.com

2 Limites usuelles

Au voisinage de $-\infty$	Au voisinage de $+\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$; pour tout $n \in \mathbb{N}^*$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$; pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
Au voisinage de 0 : $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$	

Exercices

Exercice 10

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x}}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x}}{x^3}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{e^x}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{\sqrt{x+1}}$
5. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x}{1-e^{-x}}$
6. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 e^{3x}$
7. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{x+e^{-x}}$
8. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x+e^{-x}}$
9. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+xe^x)}{x}$
10. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\ln(e^{2x}-2x)}{x}$

Exercice 11

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} 3xe^{-x}$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} (x+1)e^x$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} x+2+xe^x$
4. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x-1}{x^3}$
5. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x+e^{-x}}{3+e^x}$
6. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x-1}{2e^x+1}$
7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2e^x+1}{e^x-1}$
8. $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-e^x$
9. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3-e^x$
10. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x}-x^2$

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 12

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} e^{1-\frac{1}{x^2}}$
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} xe^{2x} - e^x$
3. $\lim\limits_{x\to -\infty} (x^4 - x)e^x$
4. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{e^x}{1+x^2}$
5. $\lim\limits_{x\to -\infty} (2-x)e^x - x$
6. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2 - x + 1}$
7. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x^3 + 1}$
8. $\lim\limits_{x\to -\infty} e^{x^2-3x-5}$
9. $\lim\limits_{x\to -\infty} x(e^{2x} - e^x)$
10. $\lim\limits_{x\to -\infty} x^2(e^x - e^{2x})$

Exercice 13

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{\sin x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^x - 1}{x - \sqrt{x}}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x(e^x - 1)}$
4. $\lim\limits_{x\to +\infty} e^x - \ln(x)$
5. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^x - e}{\ln(x)}$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$
7. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$
8. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(1+e^x)}{\sqrt{x}}$
9. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3}{e^{\sqrt{x}}}$
10. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x + 1}{e^{x^2} + 1}$

Exercice 14

Étudier les branches infinies de la courbe de la fonction numérique f, dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \dfrac{2}{e^x + 1}$
2. $f(x) = x - 2 - \dfrac{4}{e^x - 1}$
3. $f(x) = x\left(\dfrac{e^x}{x} - \dfrac{2}{x^3}\right)$
4. $f(x) = e^{2x} - 2xe^x - 1$
5. $f(x) = e^{-2x} - 2e^{-x}$
6. $f(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)e^x$

Exercice 15

Étudier les branches infinies de la courbe de la fonction numérique f, dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = \sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}$
2. $f(x) = \ln(e^x + e^{-x}) + e^x$
3. $f(x) = \dfrac{x}{2} + \ln(1 + e^{-x})$
4. $f(x) = \ln(e^{2x} + e^x + 1)$

ProfSalmi.blogspot.com

Solutions

Exercice 10

1 **Calculons :** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}}{x}$

Soit x de $\mathbb{R}^*$, on a : $\dfrac{e^{2x}}{x}=\dfrac{e^x\times e^x}{x}=e^x\times\dfrac{e^x}{x}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x\times\dfrac{e^x}{x}=+\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}}{x}=+\infty$

2 **Calculons :** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}}{x^3}$

Soit x de $\mathbb{R}^*$, on a : $\dfrac{e^{2x}}{x^3}=\dfrac{e^x\times e^x}{x^3}=e^x\times\dfrac{e^x}{x^3}$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^3}=+\infty$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x\times\dfrac{e^x}{x^3}=+\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^3}=+\infty$

3 **Calculons :** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{e^x}$

Soit x de $]0;+\infty[$, on a : $\dfrac{\sqrt{x}}{e^x}=\dfrac{x}{e^x}\times\dfrac{\sqrt{x}}{x}=\dfrac{x}{e^x}\times\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$, et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0$

donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}\times\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0$ c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{e^x}=0$

4 **Calculons :** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{\sqrt{x+1}}$

Soit x de $]0;+\infty[$, on a : $\dfrac{e^x}{\sqrt{x+1}}=\dfrac{e^x}{x}\times\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$, et $\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}=\sqrt{\dfrac{x^2}{1+x}}$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{1+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^2}{x+1}}=+\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}\times\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}=+\infty$, d'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{\sqrt{x+1}}=+\infty$

5 **Calculons :** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{1-e^{-x}}$

Soit x de $\mathbb{R}^*$, on a : $\dfrac{x}{1-e^{-x}}=\dfrac{xe^x}{e^x(1-e^{-x})}=\dfrac{xe^x}{e^x-1}=\left(\dfrac{x}{e^x-1}\right)e^x$

Puisque : $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$, alors : $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{e^x-1}=1$

ProfSalmi.blogspot.com

et on a : $\lim\limits_{x\to 0} e^x = e^0 = 1$, donc : $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x}{e^x-1}\right)e^x = 1$

D'où : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{1-e^{-x}} = 1$

6 **Calculons :** $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^{3x}$

Soit x de $\mathbb{R}$; on pose : $X = 3x$, on a : $x\to-\infty \Leftrightarrow X\to-\infty$

et $x^2e^{3x} = \left(\frac{X}{3}\right)^2 e^X = \frac{1}{9}X^2e^X$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^{3x} = \lim\limits_{X\to-\infty}\frac{1}{9}X^2e^X = \frac{1}{9}\lim\limits_{X\to-\infty} X^2e^X = \frac{1}{9}\times 0 = 0$

D'où : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^{3x} = 0$

7 **Calculons :** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{x+e^{-x}}$

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $\frac{x}{x+e^{-x}} = \frac{xe^x}{e^x(x+e^{-x})} = \frac{xe^x}{xe^x+1}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$, alors : $\lim\limits_{x\to-\infty} 1+xe^x = 1$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{xe^x}{1+xe^x} = 0$, d'où : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{x+e^{-x}} = 0$

8 **Calculons :** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x+e^{-x}}$

Soit x de $\mathbb{R}^*$, on a : $\frac{x}{x+e^{-x}} = \frac{x}{x(1+\frac{e^{-x}}{x})} = \frac{1}{1+\frac{1}{xe^x}}$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x = +\infty$

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{xe^x} = 0$, ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{xe^x} = 1$

Par suite : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{xe^x}} = 1$, c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x+e^{-x}} = 1$

9 **Calculons :** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+xe^x)}{x}$

Soit x de $]0;+\infty[$, on a : $1+xe^x = xe^x(1+\frac{1}{xe^x})$

Donc : $\ln(1+xe^x) = \ln(xe^x(1+\frac{1}{xe^x}))$

$= \ln(x)+\ln(e^x)+\ln\left(1+\frac{1}{xe^x}\right)$

$= \ln(x)+x+\ln(1+\frac{1}{xe^x})$

D'où : $\frac{\ln(1+xe^x)}{x} = \frac{\ln(x)}{x}+1+\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{xe^x}\right)$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x = +\infty$, (car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$), alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{xe^x} = 0$

ProfSalmi.blogspot.com

C'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{xe^x}=1$

Et on sait que la fonction ln est continue 1, donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+\frac{1}{xe^x})=\ln(1)=0$

Et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{xe^x}\right)=0$

Et on a: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}+1+\frac{1}{x}\ln(1+\frac{1}{xe^x})=1$

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+xe^x)}{x}=1$

10 **Calculons** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(e^{2x}-2x)}{x}$:

Soit x de $]-\infty;0[$, on a : $e^{2x}-2x=-2x\left(1-\frac{e^{2x}}{2x}\right)$

Donc : $\ln(e^{2x}-2x)=\ln\left(-2x(1-\frac{e^{2x}}{2x})\right)=\ln(-2x)+\ln\left(1-\frac{e^{2x}}{2x}\right)$

C'est-à-dire : $\frac{\ln(e^{2x}-2x)}{x}=\frac{\ln(-2x)}{x}+\frac{1}{x}\ln\left(1-\frac{e^{2x}}{2x}\right)$

(En posant $X=-2x$, on a : $x\to-\infty\iff X\to+\infty$)

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(-2x)}{x}=\lim\limits_{X\to+\infty}-2\times\frac{\ln(X)}{X}=0$

Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$, alors : $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{2x})=\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x)^2=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{2x}=0$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}}{2x}=0$

C'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to-\infty}1-\frac{e^{2x}}{2x}=1$ et la fonction ln est continue en 1, donc :

$\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(1-\frac{e^{2x}}{2x})=\ln(1)=0$

Et on a : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$, donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\ln(1-\frac{e^{2x}}{2x})=0$

D'où : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(-2x)}{x}+\frac{1}{x}\ln\left(1-\frac{e^{2x}}{2x}\right)=0$, c'est-à-dire: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(e^{2x}-2x)}{x}=0$

Exercice 11

1 **Calculons :** $\lim\limits_{x\to+\infty}3xe^{-x}$

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $3xe^{-x}=3\times\frac{x}{e^x}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$, donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}3\times\frac{x}{e^x}=0$

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}3xe^{-x}=0$

2 **Calculons :** $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)e^x$

ProfSalmi.blogspot.com

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $(x+1)e^x = xe^x + e^x$

Puisque : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$, alors : $\lim\limits_{x\to-\infty}(xe^x + e^x) = 0$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)e^x = 0$

3 Calculons : $\lim\limits_{x\to-\infty} x + 2 + xe^x$

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} x + 2 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$, donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} x + 2 + xe^x = -\infty$

4 Calculons : $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x - 1}{x^3}$

Soit x et $\mathbb{R}^*$, on a : $\dfrac{e^x - 1}{x^3} = \dfrac{e^x - 1}{x} \times \dfrac{1}{x^2}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$, alors : $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x - 1}{x} \times \dfrac{1}{x^2} = +\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x - 1}{x^3} = +\infty$

5 Calculons : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x + e^{-x}}{3 + e^x}$

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $e^x > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{e^x} = +\infty$

D'où : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x + e^{-x} = +\infty$, et on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} 3 + e^x = 3$

Par suite : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x + e^{-x}}{3 + e^x} = +\infty$

6 Calculons : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x - 1}{2e^x + 1}$

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x - 1 = -1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 2e^x + 1 = 1$

D'où : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x - 1}{2e^x + 1} = -1$

7 Calculons : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2e^x + 1}{e^x - 1}$

Soit x de $]0; +\infty[$, on a : $\dfrac{2e^x + 1}{e^x - 1} = \dfrac{e^x(2 + e^{-x})}{e^x(1 - e^{-x})} = \dfrac{2 + e^{-x}}{1 - e^{-x}}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$, c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} 2 + e^{-x} = 2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + e^{-x} = 1$

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2 + e^{-x}}{1 - e^{-x}} = 2$, c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2e^x + 1}{e^x - 1} = 2$

8 Calculons : $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x - e^x$

Soit x de $\mathbb{R}^*$, on a : $2x - e^x = x(2 - \dfrac{e^x}{x})$

ProfSalmi.blogspot.com

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}2-\frac{e^x}{x}=-\infty$

Et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$, donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(2-\frac{e^x}{x}\right)=-\infty$

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}2x-e^x=-\infty$

9 **Calculons :** $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3-e^x$

Soit x de $\mathbb{R}^*$, on a : $x^3-e^x=x^3(1-\frac{e^x}{x^3})$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^3}=+\infty$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}1-\frac{e^x}{x^3}=-\infty$

Et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$, donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3(1-\frac{e^x}{x^3})=-\infty$

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3-e^x=-\infty$

10 **Calculons :** $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{2x}-x^2$

Soit x de $\mathbb{R}^*$, on a : $e^{2x}-x^2=x^2(\frac{e^{2x}}{x^2}-1)=x^2\left(\left(\frac{e^x}{x}\right)^2-1\right)$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x}\right)^2=+\infty$, c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x^2}=+\infty$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x^2}-1=+\infty$

Et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$; donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(\frac{e^{2x}}{x^2}-1\right)=+\infty$

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{2x}-x^2=+\infty$

Exercice 12

1 **Calculons :** $\lim\limits_{x\to0}e^{1-\frac{1}{x^2}}$

On a : $\lim\limits_{x\to0}1-\frac{1}{x^2}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$, donc, par composée.

$\lim\limits_{x\to0}e^{1-\frac{1}{x^2}}=0$

2 **Calculons :** $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{2x}-e^x$

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $xe^{2x}-e^x=(xe^x-1)e^x$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^x-1=+\infty$

Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty}(xe^x-1)e^x=+\infty$ c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{2x}-e^x=+\infty$

3 **Calculons :** $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^4-x)e^x$

ProfSalmi.blogspot.com

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $(x^4-x)e^x = x^4e^x - xe^x$

Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^4e^x = 0$, alors : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^4e^x - xe^x = 0$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^4-x)e^x = 0$

4 **Calculons** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{1+x^2}$:

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 1+x^2 = +\infty$, donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{1+x^2} = 0$

5 **Calculons :** $\lim\limits_{x\to-\infty}(2-x)e^x - x$

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $(2-x)e^x - x = 2e^x - xe^x - x$

Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} 2e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$, alors : $\lim\limits_{x\to} 2e^x - xe^x = 0$

Et on a : $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x) = +\infty$; donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} 2e^x - xe^x - x = +\infty$

D'où : $\lim\limits_{x\to-\infty}(2-x)e^x - x = +\infty$

6 **Calculons :** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2-x+1}$

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $\dfrac{e^x}{x^2-x+1} = \dfrac{e^x}{x^2}\times\dfrac{x^2}{x^2-x+1}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2-x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1$

alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2}\times\dfrac{x^2}{x^2-x+1} = +\infty$, donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2-x+1} = +\infty$

7 **Calculons :** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^3+1}$

Soit $x>0$, on a : $\dfrac{e^x}{x^3+1} = \dfrac{e^x}{x^3}\times\dfrac{x^3}{x^3+1}$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^3} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x^3+1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1$

alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^3}\times\dfrac{x^3}{x^3+1} = +\infty$, donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^3+1} = +\infty$

8 **Calculons :** $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x^2-3x-5}$

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2-3x-5 = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, donc par composée

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x^2-3x-5} = +\infty$

9 **Calculons :** $\lim\limits_{x\to-\infty} x(e^{2x}-e^x)$

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $x(e^{2x}-e^x) = xe^x(e^x-1)$

Puisque : $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x - 1 = -1$, alors : $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x(e^x-1) = 0$

ProfSalmi.blogspot.com

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} x(e^{2x}-e^{x})=0$

10 **Calculons :** $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2(e^{x}-e^{2x})$

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $x^2(e^{x}-e^{2x})=x^2e^{x}(1-e^{x})$

Et on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 1-e^{x}=1$, car : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^{x}(1-e^{x})=0$, d'où : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2(e^{x}-e^{2x})=0$

Exercice 13

1 **Calculons :** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x}-1}{\sin x}$

Soit x de $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ et $x\neq0$, on a : $\dfrac{e^{x}-1}{\sin x}=\dfrac{e^{x}-1}{x}\times\dfrac{x}{\sin x}$

On a : $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x}-1}{x}=1$, et puisque : $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, alors : $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin x}=1$

Donc : $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x}-1}{x}\times\dfrac{x}{\sin x}=1$, d'où : $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x}-1}{\sin x}=1$

2 **Calculons :** $\lim\limits_{x\to0^{+}}\dfrac{e^{x}-1}{x-\sqrt{x}}$

Soit x de $]0;1[$, on a :

$$\frac{e^{x}-1}{x-\sqrt{x}}=\frac{e^{x}-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}$$

$$=\frac{e^{x}-1}{x}\times\frac{x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}=\frac{e^{x}-1}{x}\times\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$$

Puisque $\lim\limits_{x\to0^{+}}\dfrac{e^{x}-1}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to0^{+}}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=0$

alors : $\lim\limits_{x\to0^{+}}\dfrac{e^{x}-1}{x}\times\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=0$, donc : $\lim\limits_{x\to0^{+}}\dfrac{e^{x}-1}{x-\sqrt{x}}=0$

3 **Calculons :** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x(e^{x}-1)}$

Soit x de $\mathbb{R}^{*}$, on a : $\dfrac{1-\cos x}{x(e^{x}-1)}=\dfrac{1-\cos x}{x}\times\dfrac{1}{e^{x}-1}=\dfrac{1-\cos x}{x^2}\times\dfrac{x}{e^{x}-1}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x}-1}{x}=1$, alors : $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{e^{x}-1}=1$

Et on a : $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$, donc : $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}\times\dfrac{x}{e^{x}-1}=\dfrac{1}{2}$

D'où : $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x(e^{x}-1)}=\dfrac{1}{2}$

4 **Calculons:** $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}-\ln(x)$

Soit x de $]0;+\infty[$, on a : $e^{x}-\ln(x)=x\left(\dfrac{e^{x}-\ln x}{x}\right)=x\left(\dfrac{e^{x}}{x}-\dfrac{\ln x}{x}\right)$

ProfSalmi.blogspot.com

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ alors : $\lim\limits_{x+\infty}\frac{e^x}{x}-\frac{\ln x}{x}=+\infty$

Et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$, donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\frac{e^x}{x}-\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty$

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x-\ln x=+\infty$

5 **Calculons :** $\lim\limits_{x-1}\frac{e^x-e}{\ln(x)}$

Soit x de $]0;+\infty[$ et $x\neq 1$,

On a : $\frac{e^x-e}{\ln(x)}=\frac{e^x-e}{x-1}\times\frac{x-1}{\ln(x)}=\frac{e(e^{x-1}-1)}{x-1}\times\frac{x-1}{\ln(x)}$

Puisque : $\lim\limits_{x-1}\frac{\ln x}{x-1}=1$, alors : $\lim\limits_{x-1}\frac{x-1}{\ln(x)}=1$

Calculons $\lim\limits_{x-1}\frac{e^{x-1}-1}{x-1}$

On pose : $X=x-1$, on a : $x\to 1\iff X\to 0$

Donc : $\lim\limits_{x-1}\frac{e^{x-1}-1}{x-1}=\lim\limits_{X-0}\frac{e^X-1}{X}=1$

D'où : $\lim\limits_{x-1}e\left(\frac{e^{x-1}-1}{x-1}\right)\times\frac{x-1}{\ln(x)}=e$

Par suite : $\lim\limits_{x-1}\frac{e^x-e}{\ln x}=e$

6 **Calculons :** $\lim\limits_{x-0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$

Soit x de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et $x\neq 0$,

On a : $\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\frac{e^{-x}(e^{2x}-1)}{x}\times\frac{x}{\sin x}=e^{-x}(e^x+1)\left(\frac{e^x-1}{x}\times\frac{x}{\sin x}\right)$

Puisque: $\lim\limits_{x-0}\frac{\sin x}{x}=1$, alors : $\lim\limits_{x-0}\frac{x}{\sin x}=1$

Et on a: $\lim\limits_{x-0}\frac{e^x-1}{x}=1$ et $\lim\limits_{x-0}e^{-x}(e^x+1)=2$

Donc : $\lim\limits_{x-0}e^{-x}(e^x+1)(\frac{e^x-1}{x})\times\frac{x}{\sin x}=2$

D'où : $\lim\limits_{x-0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=2$

info-:

$e^{2x}-1=(e^x)^2-1$

$=(e^x-1)(e^x+1)$

7 **Calculons :** $\lim\limits_{x-0^+}\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$

Soit x de $]0;+\infty[$,

On pose : $X=-\frac{1}{x}$, on a : $x\to 0^+\iff X\to-\infty$

Donc : $\lim\limits_{x-0^+}\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}=\lim\limits_{X-\infty}X^2e^X=0$, d'où: $\lim\limits_{x-0^+}\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}=0$

ProfSalmi.blogspot.com

8 **Calculons :** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{\sqrt{x}}$

Soit x de $]0;+\infty[$.

On a : $\ln(1+e^x)=\ln(e^x(\frac{1}{e^x}+1)=\ln(e^x)+\ln(1+\frac{1}{e^x})=x+\ln(1+\frac{1}{e^x})$

Donc : $\dfrac{\ln(1+e^x)}{\sqrt{x}}=\dfrac{x+\ln(1+e^{-x})}{\sqrt{x}}=\dfrac{x}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right))$

$=\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$, donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}1+\dfrac{1}{e^x}=1$

et la fonction ln est continue en 1 donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{e^x}\right)=\ln(1)=0$

et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\ln\left(1+\dfrac{1}{e^x}\right)=+\infty$

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{\sqrt{x}}=+\infty$

9 **Calculons :** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{e^{\sqrt{x}}}$

Soit x de $]0;+\infty[$, on pose : $X=\sqrt{x}$, on a : $x\to+\infty\iff X\to+\infty$

et $x=X^2$, donc : $\dfrac{x^3}{e^{\sqrt{x}}}=\dfrac{X^6}{e^X}$

Puisque : $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{e^X}{X^6}=+\infty$, alors : $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{X^6}{e^X}=0$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{e^{\sqrt{x}}}=\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{X^6}{e^X}=0$, d'où: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{e^{\sqrt{x}}}=0$

10 **Calculons :** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+1}{e^{x^2}+1}$

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $e^x+1=e^x(1+e^{-x})$ et $e^{x^2}+1=e^{x^2}.(1+e^{-x^2})$

Donc : $\dfrac{e^x+1}{e^{x^2}+1}=\dfrac{e^x(1+e^{-x})}{e^{x^2}(1+e^{-x^2})}=\dfrac{e^x}{e^{x^2}}\left(\dfrac{1+e^{-x}}{1+e^{-x^2}}\right)=e^{x-x^2}\times\left(\dfrac{1+e^{-x}}{1+e^{-x^2}}\right)$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}x-x^2=\lim\limits_{x\to+\infty}-x^2=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$,

donc, par composer $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x-x^2}=0$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$, donc: $\lim\limits_{x\to+\infty}1+e^{-x}=1$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{e^x}\right)^2=0$, donc: $\lim\limits_{x\to+\infty}1+e^{-x^2}=1$

Donc, par quotient: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+e^{-x}}{1+e^{-x^2}}=1$

ProfSalmi.blogspot.com

Par suite : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-x^2}\times\left(\frac{1+e^{-x}}{1+e^{-x^2}}\right)=0\times 1=0$

Finalement: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+1}{e^{x^2}+1}=0$

Exercice 14

Étudions les branches infinies de la courbe de la fonction f, telle que :

1 $f(x)=1-\frac{x}{2}-\frac{2}{1+e^x}$

a. Déterminons D l'ensemble de définition de la fonction f :

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $x\in D\iff e^x+1\neq 0$

Puisque $e^x>0$, alors : $e^x+1\neq 0$

Donc : $x\in D\iff x\in\mathbb{R}$

D'où : $D=\mathbb{R}=]-\infty;+\infty[$

b. Calculons : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

▸Au voisinage de $+\infty$: on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$, donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{1+e^x}=0$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\frac{x}{2}=-\infty$; donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\frac{x}{2}-\frac{2}{e^x+1}=-\infty$

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

▸Au voisinage $-\infty$: on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$, donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{e^x+1}=2$

et $\lim\limits_{x\to-\infty} 1-\frac{x}{2}=+\infty$; donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} 1-\frac{x}{2}-\frac{2}{1+e^x}=+\infty$

D'où : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

c. Étudions les branches infinies de (C_f)

▸**Au voisinage de $+\infty$** : soit $x>0$, on a : $f(x)-\left(1-\frac{x}{2}\right)=\frac{-2}{1+e^x}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2}{1+e^x}=0$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-\left(1-\frac{x}{2}\right)=0$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-\left(1-\frac{x}{2}\right)=0$

D'où: la droite d'équation : $y=-\frac{x}{2}+1$ est une asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $+\infty$

▸**Au voisinage de $-\infty$** : soit $x<0$, on a : $f(x)-\left(1-\frac{1}{2}x\right)=\frac{-2}{1+e^x}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2}{1+e^x}=-2$, alors : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(1-\frac{x}{2})=-2$

ProfSalmi.blogspot.com

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-\left(1-\frac{x}{2}\right)+2=0$, c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-\left(-1-\frac{x}{2}\right)=0$

D'où : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(-1-\frac{x}{2})=0$

Par suite, la droite d'équation $y=-\frac{x}{2}-1$ est une asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $-\infty$

2 $f(x)=x-2-\frac{4}{e^x-1}$

a. Déterminons D l'ensemble de définition de la fonction f :

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $x\in D \iff e^x-1\neq 0$

et on a : $e^x-1=0 \iff e^x=1$

$\iff x=0$

Donc : $x\in D \iff x\neq 0$

$\iff x\in\mathbb{R}^*$

D'où : $D=\mathbb{R}^*=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

b. Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$:

▸Au voisinage de $+\infty$:

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$, donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{e^x-1}=0$ et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} x-2=+\infty$.

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} x-2-\frac{4}{e^x-1}=+\infty$

c'est-à-dire : $\lim\limits_{x+\infty} f(x)=+\infty$

▸Au voisinage de $-\infty$:

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$, donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4}{e^x-1}=-4$ et on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} x-2=-\infty$.

D'où : $\lim\limits_{x\to-\infty} x-2-\frac{4}{e^x-1}=-\infty$

c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

▸Au voisinage de 0 :

▸ $e^x-1>0 \iff e^x>1$

$\iff x>0$

▸ $e^x-1=0 \iff e^x=1$

$\iff x=0$

Le tableau de signe de e^x-1 est le suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
e^x-1		$-$	0	$+$	

ProfSalmi.blogspot.com

Puisque : $\lim\limits_{x\to 0} e^x - 1 = 0$, alors : $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{e^x-1} = +\infty$, et $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{e^x-1} = -\infty$

et on a : $\lim\limits_{x\to 0} x - 2 = -2$; donc : $\lim\limits_{x\to 0^+} x - 2 - \frac{4}{e^x-1} = -\infty$

et $\lim\limits_{x\to 0^-} x - 2 - \frac{4}{e^x-1} = +\infty$, d'où : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, et $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$

c. Déterminons les branches infinies de la courbe de f :

▸ **Au voisinage de 0:** on a : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, et $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$

Donc la droite d'équation : $x = 0$ est une asymptote verticale à la courbe de f

▸ **Au voisinage de $+\infty$:** soit $x > 0$, on a : $f(x) - (x-2) = \frac{-4}{e^x-1}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-4}{e^x-1} = 0$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (x-2) = 0$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (x-2) = 0$

D'où la droite d'équation $y = x - 2$ est un asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $+\infty$

▸ **Au voisinage de $-\infty$:**

Soit $x < 0$, on a : $f(x) - (x-2) = \frac{-4}{e^x-1}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-4}{e^x-1} = 4$, alors : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - (x-2) = 4$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - (x-2) - 4 = 0$, c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - (x+2) = 0$

D'où : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - (x+2) = 0$

Par suite, la droite d'équation $y = x + 2$ est une asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $-\infty$.

3 $f(x) = x\left(\frac{e^x}{x} - \frac{2}{x^3}\right)$

a. Déterminons D l'ensemble de définition de la fonction f :

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $x \in D \iff x \neq 0$ et $x^3 \neq 0$

$\iff x \in \mathbb{R}^*$

Donc : $D = \mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

b. Calculons : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$:

▸ **Au voisinage de $+\infty$:** on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x^3} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^x}{x} - \frac{2}{x^3}\right) = +\infty$

ProfSalmi.blogspot.com

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

▸ **Au voisinage de $-\infty$:** soit $x < 0$, on a : $f(x) = x\left(\frac{e^x}{x} - \frac{2}{x^3}\right) = e^x - \frac{2}{x^2}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2}{x^2} = 0$, alors : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x - \frac{2}{x^3} = 0$,

donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

▸ **Au voisinage de 0 :** Soit x de $\mathbb{R}^*$, on a : $f(x) = e^x - \frac{2}{x^2}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to0} e^x = 1$ et $\lim\limits_{x\to0} \frac{2}{x^2} = +\infty$ alors : $\lim\limits_{x\to0} e^x - \frac{2}{x^2} = -\infty$,

donc : $\lim\limits_{x\to0} f(x) = -\infty$

c. Déterminons les branches infinies de la courbe de f :

▸ **Au voisinage de $+\infty$:** soit x de $]0;+\infty[$, on a : $\frac{f(x)}{x} = \frac{e^x}{x} - \frac{2}{x^3}$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} - \frac{2}{x^3} = +\infty$

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

Par suite, la courbe de f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

▸ **Au voisinage de $-\infty$:** on a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, donc la droite d'équation : $y = 0$ est une asymptote horizontale à la courbe de f au voisinage de $-\infty$.

▸ **Au voisinage de 0 :** on a $\lim\limits_{x\to0} f(x) = -\infty$, donc la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale à la courbe de f.

4 $f(x) = e^{2x} - 2xe^x - 1$

a. Déterminons D l'ensemble de définition de la fonction f :

On a : $D = \mathbb{R}$

b. Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$:

▸ **Au voisinage de $+\infty$:** soit x de $]0;+\infty[$, on a :

$f(x) = e^{2x} - 2xe^x - 1 = xe^x(\frac{e^x}{x} - 2) - 1$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x = +\infty$, car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x(\frac{e^x}{x} - 2) - 1 = +\infty$, donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

▸ **Au voisinage de $-\infty$:** on a $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$, et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} (e^x)^2 = 0$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} - 2xe^x - 1 = -1$, c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$

ProfSalmi.blogspot.com

c. Déterminons les branches infinies de la courbe de f :

▸ **Au voisinage de $-\infty$** : on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$, donc la droite d'équation $y = -1$ est une asymptote à la courbe de f au voisinage de $-\infty$.

▸ **Au voisinage de $+\infty$** : soit x de $\mathbb{R}^*$, on a :

$\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{e^{2x}}{x} - 2e^x - \dfrac{1}{x} = e^x\left(\dfrac{e^x}{x} - 2\right) - \dfrac{1}{x}$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ alors :

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x\left(\dfrac{e^x}{x} - 2\right) - \dfrac{1}{x} = +\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$

Donc la courbe de f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

5 $f(x) = e^{-2x} - 2e^{-x}$

a. Déterminons D l'ensemble de définition de la fonction f :

On a : $D = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

b. Calculons : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$:

▸ **Au voisinage de $+\infty$** : soit x de $\mathbb{R}$, on a :

$f(x) = e^{-x}(e^{-x} - 2) = \dfrac{1}{e^x}\left(\dfrac{1}{e^x} - 2\right)$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x}\left(\dfrac{1}{e^x} - 2\right) = 0$, c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

▸ **Au voisinage de $-\infty$** :

Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $e^x > 0$, alors : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{e^x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{e^x} - 2\right) = +\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{e^x}\left(\dfrac{1}{e^x} - 2\right) = +\infty$, c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

c. Déterminons les branches infinies de la courbe de f :

▸ **Au voisinage de $+\infty$** : on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, donc la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à la courbe de f au voisinage de $+\infty$.

▸ **Au voisinage de $-\infty$** : soit x de $]-\infty; 0[$, on a : $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{1}{xe^x}\left(\dfrac{1}{e^x} - 2\right)$

Puisque : $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ et $xe^x < 0$, alors : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{xe^x} = -\infty$

ProfSalmi.blogspot.com

on a : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{e^x}-2\right)=+\infty$, donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{xe^x}\left(\frac{1}{e^x}-2\right)=-\infty$

c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$

D'où : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$

Par suite, la courbe de la fonction f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$.

6 $f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)e^x$

a. Déterminons D l'ensemble de définition de la fonction f :

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $x\in D \iff x\neq 0$

$\iff x\in\mathbb{R}^*$

Donc : $D=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

b. Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$; $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$:

- **Au voisinage de $+\infty$:** on a $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}1-\frac{1}{x}=1$, donc :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)e^x=+\infty$

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

- **Au voisinage de $-\infty$:** on a $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$, et $\lim\limits_{x\to-\infty}1-\frac{1}{x}=1$, donc :

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)e^x=0$

D'où : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$

- **Au voisinage 0 :** on a : $\lim\limits_{x\to0}e^x=1$, et $\lim\limits_{x\to0^-}1-\frac{1}{x}=+\infty$,

et $\lim\limits_{x\to0^+}1-\frac{1}{x}=-\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to0^+}(1-\frac{1}{x})e^x=-\infty$, et $\lim\limits_{x\to0^-}(1-\frac{1}{x})e^x=+\infty$

D'où : $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$, et $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=+\infty$

c. Déterminons les branches infinies de la courbe de f :

- **Au voisinage de $-\infty$:** on a : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$

Donc, la droite d'équation : $y=0$ est une asymptote horizontale à la courbe de f au voisinage de $-\infty$.

- **Au voisinage de 0,** on a : $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=+\infty$, donc

ProfSalmi.blogspot.com

la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale à la courbe de f.

▸ **Au voisinage de $+\infty$:** soit x de $\mathbb{R}^*$, on a : $\frac{f(x)}{x} = \left(1 - \frac{1}{x}\right)\frac{e^x}{x}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1$

alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)\frac{e^x}{x} = +\infty$, donc: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

Par suite, la courbe de f admet une branche parabolique de direction, l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

Exercice 15

Étudions les branches infinies de la courbe de la fonction f, telle que :

1 $f(x) = \sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}$

a. Déterminons D l'ensemble de définition de la fonction f

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $x \in D \iff x \neq 0$ et $e^{\frac{2}{x}} - 1 \geq 0$

$\iff x \neq 0$ et $e^{\frac{2}{x}} \geq 1$

$\iff x \neq 0$ et $\frac{2}{x} \geq 0$

$\iff x > 0$

$\iff x \in]0; +\infty[$

Donc : $D =]0; +\infty[$

b. Calculons $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

▸ **Au voisinage de 0^+ :**

On a : $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{2}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, donc par composée $\lim\limits_{x\to0^+} e^{\frac{2}{x}} = +\infty$

alors : $\lim\limits_{x\to0^+} e^{\frac{2}{x}} - 1 = +\infty$; d'où : $\lim\limits_{x\to0^+} \sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1} = +\infty$

Conclusion : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$

▸ **Au voisinage de $+\infty$:**

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$, donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{2}{x}} = e^0 = 1$

c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{2}{x}} - 1 = 0$; d'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1} = 0$

Finalement : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

c. Déterminons les branches infinies de la courbe de f :

▸ On a : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$, donc la droite d'équation : $x = 0$ est une asymptote

ProfSalmi.blogspot.com

verticale à la courbe de f.

▸ On a : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, donc la droite d'équation : $y = 0$ est une asymptote horizontale à la courbe de f au voisinage de $+\infty$.

2 $f(x) = e^x + \ln(e^x + e^{-x})$

a. Déterminons D l'ensemble de définition de la fonction f :

Soit x de $\mathbb{R}$, on a $e^x > 0$, et $e^{-x} > 0$, donc : $e^x + e^{-x} > 0$

D'où : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $e^x + e^{-x} > 0$

Par suite : $D = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

b. Calculons : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

▸ **Au voisinage de $+\infty$,** on a : $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, et $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

Donc : $\lim_{x\to+\infty} e^x + e^{-x} = +\infty$, et on a : $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$, donc, par composée,

$\lim_{x\to+\infty} \ln(e^x + e^{-x}) = +\infty$

D'où : $\lim_{x\to+\infty} e^x + \ln(e^x + e^{-x}) = +\infty$, c'est-à-dire : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

▸ **Au voisinage de $-\infty$:** on a $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$

donc : $\lim_{x\to-\infty} e^x + e^{-x} = +\infty$ et on a : $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$, donc, par composée,

$\lim_{x\to-\infty} \ln(e^x + e^{-x}) = +\infty$

D'où : $\lim_{x\to-\infty} e^x + \ln(e^x + e^{-x}) = +\infty$, c'est-à-dire : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

b. Étudions les branches infinies de la courbe de la fonction f :

▸ Au voisinage de $+\infty$: on a : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; calculons : $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

Soit $x > 0$, on a : $\frac{f(x)}{x} = \frac{e^x}{x} + \frac{\ln(e^x + e^{-x})}{x}$,

et on a : $\ln(e^x + e^{-x}) = \ln(e^x(1 + e^{-2x})$

$= \ln(e^x) + \ln(1 + e^{-2x}) = x + \ln(1 + e^{-2x})$

Donc : $\frac{f(x)}{x} = \frac{e^x}{x} + \frac{x + \ln(1 + e^{-2x})}{x} = \frac{e^x}{x} + 1 + \frac{\ln(1 + e^{-2x})}{x}$

Puisque : $\lim_{x\to+\infty} 1 + e^{-2x} = 1$ et la fonction $\ln$ est continue en 1, alors :

$\lim_{x\to+\infty} \ln(1 + e^{-2x}) = \ln(1) = 0$

Donc : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1 + e^{-2x})}{x} = 0$

ProfSalmi.blogspot.com

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$; donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}+1+\frac{\ln(1+e^{-2x})}{x}=+\infty$

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$, par suite la courbe de la fonction f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

▸ **Au voisinage de $-\infty$:** soit x de $\mathbb{R}$, on a : $e^x+e^{-x}=e^{-x}(e^{2x}+1)$

donc :

$\ln(e^x+e^{-x})=\ln(e^{-x}(e^{2x}+1)=\ln(e^{-x})+\ln(e^{2x}+1)=-x+\ln(e^{2x}+1)$

D'où : $f(x)=e^x-x+\ln(e^{2x}+1)$, c'est-à-dire : $f(x)+x=e^x+\ln(e^{2x}+1)$

Puisque : $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$, alors : $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{2x}+1=\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x)^2+1=1$

or la fonction ln est continue en 1, donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(1+e^{2x})=\ln(1)=0$

D'où : $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x+\ln(e^{2x}+1)=0$, c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)+x=0$

Par suite : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$, et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)-(-x)=0$

conclusion la droite d'équation : $y=-x$ est une asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $-\infty$.

3 $f(x)=\frac{x}{2}+\ln(1+e^{-x})$

a. Déterminons D l'ensemble de définition de la fonction f

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $x\in D\iff 1+e^{-x}>0$

et on a : $e^{-x}>0$ donc: $e^{-x}+1>0$ donc : $x\in D\iff x\in\mathbb{R}$.

D'où : $D=\mathbb{R}=]-\infty;+\infty[$

b. Calculons : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

▸ **Au voisinage de $+\infty$:** on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$

c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to+\infty}1+e^{-x}=1$, et puisque la fonction ln est continue en 1,

alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+e^{-x})=\ln(1)=0$, et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{2}=+\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{2}+\ln(1+e^{-x})=+\infty$, c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

▸ **Au voisinage de $-\infty$:**

soit $x<0$, on a : $\ln(1+e^{-x})=\ln(e^{-x}(e^x+1)=\ln(e^{-x})+\ln(1+e^x)$

$=-x+\ln(1+e^x)$

ProfSalmi.blogspot.com

Donc : $f(x) = \frac{x}{2} - x + \ln(1+e^x) = -\frac{x}{2} + \ln(1+e^x)$

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} 1+e^x = 1$ et la fonction ln est continue en 1, alors : $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(1+e^x) = \ln(1) = 0$

et on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-x}{2} = +\infty$; donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-x}{2} + \ln(1+e^x) = +\infty$

D'où : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

c. Déterminons les branches infinies de la courbe de la fonction f :

▸Au voisinage de $+\infty$: soit x de $\mathbb{R}$, on a : $f(x) - \frac{x}{2} = \ln(1+e^{-x})$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+e^{-x}) = 0$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - \frac{x}{2} = 0$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - \frac{x}{2} = 0$

D'où la droite d'équation : $y = \frac{x}{2}$ est une asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $+\infty$.

▸Au voisinage de $-\infty$: soit $x < 0$, on a : $f(x) + \frac{x}{2} = \ln(1+e^x)$

Puisque : $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(1+e^x) = 0$, alors : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) + \frac{x}{2} = 0$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) + \frac{x}{2} = 0$

D'où la droite d'équation : $y = -\frac{x}{2}$ est une asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $-\infty$.

4 $f(x) = \ln(e^{2x} + e^x + 1)$

On a : $e^x > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$, donc : $x \in D \iff e^{2x} + e^x + 1 > 0$

$\iff x \in \mathbb{R}$

D'où : $D = \mathbb{R}$

b. Calculons : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

▸Au voisinage de $+\infty$:

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} (e^x) = +\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} + e^x + 1 = +\infty$, et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$, alors, par composée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(e^{2x} + e^x + 1) = +\infty$, d'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

▸Au voisinage de $-\infty$:

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} + e^x = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x(e^x+1) = 0$

D'où : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} + e^x + 1 = 1$, et puisque la fonction ln est continue en 1, alors :

ProfSalmi.blogspot.com

$\lim_{x\to-\infty} \ln(e^{2x}+e^{x}+1) = \ln(1) = 0$, donc : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

c. Déterminons les branches infinies de la courbe de f :

- **Au voisinage de $+\infty$:** soit $x > 0$, on a : $e^{2x}+e^{x}+1 = e^{2x}(1+e^{-x}+e^{-2x})$

Donc : $f(x) = \ln(e^{2x}) + \ln(1+e^{-x}+e^{-2x}) = 2x + \ln(1+e^{-x}+e^{-2x})$

Puisque : $\lim_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$, alors : $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}+e^{-2x} = \lim_{x\to+\infty} e^{-x}(1+e^{-x})$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{x}}(1+\frac{1}{e^{x}}) = 0$

Donc : $\lim_{x\to+\infty} 1+e^{-x}+e^{-2x} = 1$ et puisque la fonction ln est continue en 1, alors: $\lim_{x\to+\infty} \ln(1+e^{-x}+e^{-2x}) = \ln(1) = 0$, d'où : $\lim_{x\to+\infty} f(x) - 2x = 0$

On a : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) - 2x = 0$,

donc, la droite d'équation : $y = 2x$ est une asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $+\infty$.

- **Au voisinage de $-\infty$:**

On a : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, donc la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à la courbe de f au voisinage de $-\infty$.

3 Fonction dérivée de $x \longmapsto e^{x}$ - Conséquences

Propriété :

La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a : $(\forall x\in\mathbb{R})\ \exp'(x) = \exp(x)$

et on écrit : $(e^{x})' = e^{x}$.

Conséquences :

- $\lim_{x\to0} \frac{e^{x}-1}{x} = 1$
- Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors la fonction: $f: x \longmapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I, et on a : $(\forall x\in I)\ ; f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$

et on écrit : $(\forall x\in I)\ ; (e^{u(x)})' = u'(x)e^{u(x)}$.

Propriété :

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors les fonctions primitives de la fonction : $x \longmapsto u'(x)e^{u(x)}$ sur I sont les fonctions définies sur I par : $x \longmapsto e^{u(x)} + k$, où k est un réel.

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 16

Étudier la dérivabilité de la fonction f, et calculer sa fonction dérivée dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = x + 3 - e^x$
2. $f(x) = (x^2 - 2x)e^x$
3. $f(x) = x^2 - 2(x-1)e^x$
4. $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{2e^x + 1}$
5. $f(x) = e^{2x^2+1}$
6. $f(x) = x^3 e^{-\frac{x}{3}}$
7. $f(x) = (x + e^{-2x})^4$
8. $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

Exercice 17

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{2x^2}{e^x - e^{-x}} ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1. Montrer que f est une fonction impaire.
2. Montrer que f est continue au point $x_0 = 0$.
3. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
4. Étudier la dérivabilité de f en zéro.

Exercice 18

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$

1. Déterminer D l'ensemble de définition de f.
2. Calculer les limites de la fonction f aux bornes des intervalles de D
3. a. Montrer que : $f'(x) = \dfrac{-2e^x}{(e^x - 1)^2}$ pour tout x de D
   b. Dresser le tableau de variations de f

Exercice 19

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$f(x) = \dfrac{1}{8}e^{2x} - \dfrac{e^{2x}}{e^x - 1}$

1. a. Déterminer D l'ensemble de définition de f.
   b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = 0$.
2. Calculer les limites de f aux bornes des intervalles de D.
3. a. Montrer que : $(\forall x \in D) ; f'(x) = \dfrac{e^{2x}.(e^x - 3)^2}{4(e^x - 1)^2}$.
   b. Dresser le tableau de variations de f.

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 20

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :
$f(x) = \ln(e^x + e^{-x})$

1 a. Déterminer D l'ensemble de définition de f

b. Vérifier que f est une fonction paire.

2 a. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x$

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = \ln(3)$

3 a. Montrer que : $f'(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$ pour tout x de $\mathbb{R}$

b. Dresser le tableau de variations de f.

Exercice 21

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :
$f(x) = \ln(e^{2x} + e^x + 1)$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1 a. Vérifier que : $D = \mathbb{R}$. (D est l'ensemble de définition de la fonction f)

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = \ln(3)$.

2 a. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

b. Étudier les branches infinies de la courbe (C).

3 a. Calculer $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$

b. Dresser tableau de variations de f.

Exercice 22

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^x - 1$.

1 Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

2 a. Montrer que : $f'(x) = (x+1)e^x$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

b. Dresser le tableau de variations de f.

3 a. Montrer que l'équation : $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[-1; +\infty[$, et que $0 < \alpha < 1$.

b. Étudier le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 23

Soit f et g deux fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = e^x - x - 1$ et $g(x) = e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1$.

1 a. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$, et strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty; 0]$;

b. En déduire que : $f(x) \geq 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

2 a. Montrer que : $g'(x) = f(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$;

b. En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 24

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$.

1 a. Montrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

b. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$.

2 a. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que : $f'(x) = (1 - x^2)e^{-x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

b. Dresser le tableau de variations de f.

3 a. Montrer que l'équation : $f(x) = 2$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que : $-2 < \alpha < -1$.

b. Montrer que le nombre α vérifie : $\alpha = -1 - \sqrt{2}e^{\frac{\alpha}{2}}$.

Exercice 25

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 e^{-x}$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1 a. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

b. Étudier les branches infinies de (C).

2 a. Montrer que : $f'(x) = x^2(3 - x)e^{-x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

b. Dresser le tableau de variations de f.

3 a. Montrer que : $f''(x) = x(x^2 - 6x + 6)e^{-x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

b. Déterminer les abscisses des points d'inflexion de (C).

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 26

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -7e^{-2x} + 8e^{-x} - 1$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1 a. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b. Étudier les branches infinies de la courbe (C).

c. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = 0$.

2 a. Montrer que : $f'(x) = 14e^{-2x} - 8e^{-x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

b. Dresser le tableau de variations de f.

3 Montrer que la courbe (C) admet un seul point d'inflexion d'abscisse $\ln\left(\frac{7}{2}\right)$.

Exercice 27

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{2x} - 2e^{x}$.

1 a. Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

b. Montrer que : $f'(x) = 2e^{x}(e^{x} - 1)$ pour tout x de $\mathbb{R}$,

c. Dresser le tableau de variations de f.

2 Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $g(x) = f(x)$.

a. Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

b. Montrer que : $g^{-1}(x) = \ln(1 + \sqrt{x+1})$ pour tout x de J.

Exercice 28

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{3e^{x}}{e^{2x}+1}$.

1 a. Montrer que f est une fonction paire.

b. Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2 a. Montrer que : $f'(x) = \dfrac{3(1-e^{2x})e^{x}}{(e^{2x}+1)^2}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

b. Dresser le tableau de variations de f.

3 Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $g(x) = f(x)$

a. Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

b. Montrer que : $g^{-1}(x) = \ln\left(\dfrac{3 + \sqrt{9 - 4x^2}}{2x}\right)$ pour tout x de J.

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 29

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{xe^x}{e^x - 1} \; ; x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

1 Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

2 Montrer que f est continue en 0.

3 a. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) \; ; f(-x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$.

b. Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) \; ; f(x) - f(-x) = x$.

c. Montrer que f est dérivable en 0.

Solutions

Exercice 16

Étudions la dérivabilité de f et déterminons f' sa fonction dérivée dans chacun des cas suivants :

1 $f(x) = x + 3 - e^x$

a. Ensemble de définition de f : $Df = \mathbb{R}$

b. Étudions la dérivabilité de f

Les fonctions : $x \longmapsto x + 3$ et $x \longmapsto -e^x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

c. Déterminons la fonction dérivée f'

On a : $(\forall x \in \mathbb{R}) \; ; f'(x) = (x + 3 - e^x)'$

$= 1 - e^x$

2 $f(x) = (x^2 - 2x)e^x$

a. Ensemble de définition de f : $Df = \mathbb{R}$

b. Étudions la dérivabilité de f

Les fonctions $x \longmapsto x^2 - 2x$ et $x \longmapsto e^x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

c. Déterminons la fonction dérivée f'

On a : $(\forall x \in \mathbb{R}) \; ; f'(x) = ((x^2 - 2x)e^x)'$

$= (2x - 2)e^x + (x^2 - 2x)e^x$

$= (2x - 2 + x^2 - 2x)e^x$

$= (x^2 - 2)e^x$

ProfSalmi.blogspot.com

3 $f(x) = x^2 - 2(x-1)e^x$

a. Ensemble de définition de f : $Df = \mathbb{R}$

b. Étudions la dérivabilité de f.

Les fonctions $x \longmapsto x^2$ et $x \longmapsto -2(x-1)$ et $x \longmapsto e^x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme somme et produit des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

c. Déterminons la fonction dérivée f' :

On a : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; f'(x) = (x^2 - 2(x-1)e^x)'$

$$= 2x - 2(e^x + (x-1)e^x)$$
$$= 2x - 2(1 + x - 1)e^x$$
$$= 2x - 2xe^x = 2x(1 - e^x)$$

4 $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{2e^x + 1}$

a. Ensemble de définition de f

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $e^x > 0$, donc : $2e^x + 1 \neq 0$

D'où : $x \in Df \iff 2e^x + 1 \neq 0$

$\iff x \in \mathbb{R}$

Par suite : $Df = \mathbb{R}$

b. Étudions la dérivabilité de f

Les fonctions: $x \longmapsto e^x - 1$ et $x \longmapsto 2e^x + 1$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $2e^x + 1 \neq 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

c. Déterminons la fonction dérivée f'

On a : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; f'(x) = \left(\dfrac{e^x - 1}{2e^x + 1}\right)'$

$$= \frac{e^x(2e^x + 1) - 2e^x(e^x - 1)}{(2e^x + 1)^2}$$
$$= \frac{(2e^x + 1 - 2e^x + 2)e^x}{(2e^x + 1)^2}$$
$$= \frac{3e^x}{(2e^x + 1)^2}$$

5 $f(x) = e^{2x^2+1}$

a. Ensemble de définition de f : $Df = \mathbb{R}$

b. Étudions la dérivabilité de f

ProfSalmi.blogspot.com

La fonction: $u : x \longmapsto 2x^2 + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $f = e^u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

c. Déterminons la fonction dérivée f'

On a : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; f'(x) = (e^{2x^2+1})'$

$$= (2x^2 + 1)' \times e^{2x^2+1} = 4xe^{2x^2+1}$$

6 $f(x) = x^3 e^{-\frac{x}{3}}$

a. Ensemble de définition de f : $Df = \mathbb{R}$

b. Étudions la dérivabilité de la fonction f

La fonction $x \longmapsto -\frac{x}{3}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc la fonction $x \longmapsto e^{-\frac{x}{3}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a la fonction $x \longmapsto x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$; donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

c. Déterminons la fonction dérivée f' :

On a : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; f'(x) = (x^3 e^{-\frac{x}{3}})'$

$$= 3x^2 e^{-\frac{x}{3}} - \frac{1}{3}x^3 e^{-\frac{x}{3}}$$

$$= \left(3x^2 - \frac{1}{3}x^3\right) e^{-\frac{x}{3}}$$

$$= \frac{1}{3}x^2(9 - x)e^{-\frac{x}{3}}$$

7 $f(x) = (x + e^{-2x})^4$

a. Ensemble de définition de f : $Df = \mathbb{R}$

b. Étudions la dérivabilité de la fonction f

La fonction: $x \overset{u}{\longmapsto} x + e^{-2x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, $(f = u^4)$

c. Déterminons la fonction dérivée f'

On a : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; f'(x) = ((x + e^{-2x})^4)'$

$$= 4(x + e^{-2x})'(x + e^{-2x})^3$$

$$= 4(1 - 2e^{-2x})(x + e^{-2x})^3$$

8 $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

a. Ensemble de définition de f

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $x \in Df \iff x \geq 0$

$$\iff x \in [0; +\infty[$$

Donc : $Df = [0; +\infty[$

ProfSalmi.blogspot.com

b. Étudions la dérivabilité de la fonction f

La fonction: $x \longmapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$, donc f est dérivable sur $]0;+\infty[$

▸ Étudions la dérivabilité de f à droite en 0 :

Soit x de $]0;+\infty[$, on a : $f(0) = 1$

et $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{e^{\sqrt{x}}-1}{x} = \dfrac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}} \times \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

On pose : $X = \sqrt{x}$; $x \longrightarrow 0^+ \Longleftrightarrow X \longrightarrow 0^+$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{X\to 0^+} \dfrac{e^X-1}{X} = 1$

Et on a : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$

Par suite f n'est pas dérivable à droite en 0.

c. Déterminons la fonction dérivée f' :

On a : $(\forall x \in]0;+\infty[)\ ; f'(x) = (e^{\sqrt{x}})'$

$= (\sqrt{x})' e^{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$

Exercice 17

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{2x^2}{e^x - e^{-x}} & ; \quad x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1 Montrons que f est une fonction impaire.

Soit x de $\mathbb{R}^*$, on a : $-x \in \mathbb{R}^*$

et $f(-x) = \dfrac{2(-x)^2}{e^{-x} - e^{-(-x)}} = \dfrac{2x^2}{e^{-x} - e^x} = -\left(\dfrac{2x^2}{e^x - e^{-x}}\right) = -f(x)$

et on a : $f(-0) = -f(0) = 0$

donc : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; -x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = -f(x)$

D'où f est une fonction impaire

2 Montrons que f est continue en 0 :

Soit x de $\mathbb{R}^*$, on a : $f(x) = \dfrac{2x^2}{e^x - e^{-x}} = \dfrac{2x^2}{e^{-x}(e^{2x}-1)} = \dfrac{2x^2 e^x}{(e^x-1)(e^x+1)}$

$= \dfrac{2xe^x}{e^x+1} \times \dfrac{x}{e^x-1}$

ProfSalmi.blogspot.com

Et on a : $\lim\limits_{x\to 0} 2xe^x = 0$, et $\lim\limits_{x\to 0} e^x + 1 = 2$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2xe^x}{e^x+1} = 0$

Puisque : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$, c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{e^x-1} = 1$

alors : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2xe^x}{e^x+1} \times \dfrac{x}{e^x-1} = 0$, c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

On a : $f(0) = 0$; donc : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$

D'où f est continue en $x_0 = 0$

3 ▸ **Calculons :** $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

Soit x de $\mathbb{R}^*$, on a : $f(x) = \dfrac{2x^2}{e^x - e^{-x}} = \dfrac{2}{\frac{e^x}{x^2} - \frac{e^{-x}}{x^2}} = \dfrac{2}{\frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{x^2e^x}}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2e^x = +\infty$, alors : $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x^2e^x} = 0$

Et on a : $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$, donc : $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2} - \dfrac{1}{x^2e^x} = +\infty$

D'où : $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2}{\frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{x^2e^x}} = 0$, c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$

▸ **Calculons :** $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

Soit x de $\mathbb{R}^*$, on a : $f(x) = \dfrac{2x^2e^x}{e^{2x}-1}$

Et on a : $\lim\limits_{x\to -\infty} x^2e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} e^{2x} - 1 = \lim\limits_{x\to -\infty} (e^x)^2 - 1 = -1$

Donc : $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x^2e^x}{e^{2x}-1} = 0$, c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0$

4 ▸ **Étudions la dérivabilité de f en 0**

Soit x de $\mathbb{R}^*$, on a : $f(x) = \dfrac{2xe^x}{e^x+1} \times \dfrac{x}{e^x-1}$

Donc : $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{2e^x}{e^x+1} \times \dfrac{x}{e^x-1}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{e^x-1} = 1$, et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2e^x}{e^x+1} = \dfrac{2}{2} = 1$

alors : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2e^x}{e^x+1} \times \dfrac{x}{e^x-1} = 1$

D'où : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1$

Par suite, f est dérivable en 0 et on a : $f'(0) = 1$

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 18

$$f(x)=\frac{e^x+1}{e^x-1}$$

1 Déterminons D :

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $x\in D \iff e^x-1\neq 0$

Puisque : $e^x-1=0 \iff e^x=1=e^0$

$\iff x=0$

alors : $x\in D \iff e^x\neq 1$

$\iff x\neq 0$

$\iff x\in \mathbb{R}^*$

Donc : $D=\mathbb{R}^*=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

2 Calculons les limites de f aux bornes des intervalles de D

▸ **Calculons :** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Soit $x>0$, on a : $f(x)=\frac{e^x-1+2}{e^x-1}=1+\frac{2}{e^x-1}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x-1=+\infty$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x-1}=0$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{2}{e^x-1}=1$, d'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

▸ **Calculons :** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x+1=1$, et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x-1=-1$

donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x+1}{e^x-1}=-1$, D'où : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$

▸ **Calculons :** $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$

On a : $\lim\limits_{x\to0^+} e^x+1=2$, et $\lim\limits_{x\to0^+} e^x-1=0$

comme $e^x-1>0$ pour tout x de $]0;+\infty[$, alors : $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^x+1}{e^x-1}=+\infty$

D'où : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$

▸ **Calculons:** $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$

On a : $\lim\limits_{x\to0^-} e^x+1=2$, et $\lim\limits_{x\to0^-} e^x-1=0$

comme $e^x-1<0$ pour tout x de $]-\infty;0[$, alors : $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{e^x+1}{e^x-1}=-\infty$

D'où : $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=-\infty$

3 a. Montrons que $f'(x)=\frac{-2e^x}{(e^x-1)^2}$ pour tout x de $D=\mathbb{R}^*$:

ProfSalmi.blogspot.com

La fonction f est dérivable sur chacun des intervalles $]0;+\infty[$ et $]-\infty;0[$

Soit x de $\mathbb{R}^*$, on a : $f'(x) = \left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right)'$

$$= \frac{e^x(e^x-1)-e^x(e^x+1)}{(e^x-1)^2}$$

$$= \frac{(e^x-1-e^x-1)e^x}{(e^x-1)^2} = \frac{-2e^x}{(e^x-1)^2}$$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)\ ; f'(x) = \frac{-2e^x}{(e^x-1)^2}$

b. Tableau de variations de f

Soit x de $\mathbb{R}^*$, on a : $e^x > 0$ et $(e^x-1)^2 > 0$, donc : $f'(x) < 0$

D'où $f'(x) < 0$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$.

Ainsi le tableau de variations de f est le suivant:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
f	-1	↘ $-\infty$	‖ $+\infty$	↘	1

Exercice 19

$$f(x) = \frac{1}{8}e^{2x} - \frac{e^{2x}}{e^x-1}$$

1 a. Déterminons D :

Soit x de $\mathbb{R}^*$, on a : $x \in D \iff e^x - 1 \neq 0$

$$\iff e^x \neq 1$$

$$\iff x \neq 0$$

$$\iff x \in \mathbb{R}^*$$

Donc : $D = \mathbb{R}^* =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

b. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = 0$

Soit x de D, on a : $f(x) = 0 \iff \frac{1}{8}e^{2x} - \frac{e^{2x}}{e^x-1} = 0$

$$\iff \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{e^x-1}\right)e^{2x} = 0$$

$$\iff e^{2x} = 0 \text{ ou } \frac{1}{8} - \frac{1}{e^x-1} = 0$$

$$\iff \frac{1}{e^x-1} = \frac{1}{8} \text{ (car } e^{2x} > 0)$$

ProfSalmi.blogspot.com

$\Leftrightarrow e^x - 1 = 8$

$\Leftrightarrow e^x = 9$

$\Leftrightarrow x = \ln(9) = 2\ln(3)$

Donc : $S = \{2\ln(3)\}$

2 Calculons les limites de f aux bornes des intervalles de D.

▸ **Calculons :** $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$

On a : $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{2x} = 1$, et $\lim\limits_{x \to 0^+} e^x - 1 = 0$ et $e^x - 1 > 0$ pour $x > 0$

donc : $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{e^{2x}}{e^x - 1} = +\infty$, c'est-à-dire : $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(-\dfrac{e^{2x}}{e^x - 1}\right) = -\infty$

Et on a : $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{8} e^{2x} = \dfrac{1}{8}$; donc : $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{8} e^{2x} - \dfrac{e^{2x}}{e^x - 1} = -\infty$

D'où : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

▸ **Calculons :** $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$

On a : $\lim\limits_{x \to 0^-} e^{2x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} e^x - 1 = 0$, et $e^x - 1 < 0$ pour $x < 0$

donc : $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{e^{2x}}{e^x - 1} = -\infty$, c'est-à-dire : $\lim\limits_{x \to 0^-} \left(-\dfrac{e^{2x}}{e^x - 1}\right) = +\infty$

Et on a : $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{8} e^{2x} = \dfrac{1}{8}$; donc : $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{8} e^{2x} - \dfrac{e^{2x}}{e^x - 1} = +\infty$, d'où : $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$

▸ **Calculons :** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x - 1 = -1$, et on a :

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} = \lim\limits_{x \to -\infty} (e^x)^2 = 0$

Donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{8} e^{2x} - \dfrac{e^{2x}}{e^x - 1} = 0$, d'où : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

▸ **Calculons :** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

Soit $x > 0$, on a : $f(x) = \left(\dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right) e^{2x}$

Puisque : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} (e^x)^2 = +\infty$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^x - 1} = 0$, donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{e^x - 1} = \dfrac{1}{8}$;

D'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right) e^{2x} = +\infty$

Par suite : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

ProfSalmi.blogspot.com

3 a. Montrons que $(\forall x \in D)\ ; f'(x) = \dfrac{e^{2x}(e^x-3)^2}{4(e^x-1)^2}$:

La fonction f est dérivable sur chacun des intervalles $]0;+\infty[$ et $]-\infty;0[$

Soit x de D, on a : $f'(x) = \left(\dfrac{1}{8}e^{2x} - \dfrac{e^{2x}}{e^x-1}\right)'$

$$= \frac{1}{8} \times 2e^{2x} - \frac{2e^{2x}(e^x-1) - e^{2x}.e^x}{(e^x-1)^2}$$

$$= \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{(2e^x-2-e^x)e^{2x}}{(e^x-1)^2}$$

$$= \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{(e^x-2)e^{2x}}{(e^x-1)^2}$$

$$= \left(\frac{1}{4} - \frac{e^x-2}{(e^x-1)^2}\right)e^{2x}$$

$$= \left(\frac{(e^x-1)^2 - 4(e^x-2)}{4(e^x-1)^2}\right)e^{2x}$$

$$= \left(\frac{e^{2x} - 2e^x + 1 - 4e^x + 8}{4(e^x-1)^2}\right)e^{2x}$$

$$= \left(\frac{e^{2x} - 6e^x + 9}{4(e^x-1)^2}\right)e^{2x} = \frac{(e^x-3)^2.e^{2x}}{4(e^x-1)^2}$$

Donc : $(\forall x \in D)\ ; f'(x) = \dfrac{e^{2x}.(e^x-3)^2}{4(e^x-1)^2}$

b. Tableau de variations de f :

On a : $f'(x) \geq 0$ pour tout x de D, car $e^{2x} > 0$

et $(e^x-3)^2 \geq 0$ et $(e^x-1)^2 > 0$

On a : $f'(x) = 0 \iff (e^x-3)^2 = 0$

$\iff e^x = 3$

$\iff x = \ln(3)$

Donc le tableau de variations de f est :

x	$-\infty$		0		$\ln(3)$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$+$	
f	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗		↗	$+\infty$

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 20

$$f(x) = \ln(e^x + e^{-x})$$

1 a. Déterminons D :

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $x \in D \iff e^x + e^{-x} > 0$

$\iff x \in \mathbb{R}$; (car : $e^x > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$)

Donc : $D = \mathbb{R}$

b. Vérifions que f est une fonction paire

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $-x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = \ln(e^{-x} + e^{-(-x)})$

$= \ln(e^{-x} + e^x) = f(x)$

Donc : $(\forall x \in D)\ ; -x \in D$ et $f(-x) = f(x)$

D'où f est une fonction paire.

2 a. ▸ **Calculons :** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$, donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x + e^{-x} = +\infty$

Et on a : $\lim\limits_{X \to +\infty} \ln(X) = +\infty$; donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(e^x + e^{-x}) = +\infty$

C'est-à-dire : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

▸ **Calculons :** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x$

Soit x de $]0; +\infty[$, on a : $e^x + e^{-x} = e^x(1 + e^{-2x}) = e^x\left(1 + \frac{1}{e^{2x}}\right)$

Donc : $f(x) = \ln\left(e^x\left(1 + \frac{1}{e^{2x}}\right)\right) = \ln(e^x) + \ln\left(1 + \frac{1}{e^{2x}}\right)$

$= x + \ln\left(1 + \frac{1}{e^{2x}}\right)$

C'est-à-dire : $f(x) - x = \ln\left(1 + \frac{1}{e^{2x}}\right)$

Puisque : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^{2x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{e^x}\right)^2 = 0$

Donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \frac{1}{e^{2x}} = 1$, et on a la fonction ln est continue en 1

alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{e^{2x}}\right) = \ln(1) = 0$

Par suite : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{e^{2x}}\right) = 0$

b. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = \ln(3)$

ProfSalmi.blogspot.com

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $f(x) = \ln(3) \iff \ln(e^x + e^{-x}) = \ln(3)$

$\iff e^x + e^{-x} = 3$

$\iff e^x + \frac{1}{e^x} = 3$

$\iff e^x \times e^x + 1 = 3e^x$

$\iff (e^x)^2 - 3e^x + 1 = 0$

On pose : $X = e^x$ avec $X > 0$

L'équation $f(x) = \ln(3)$ devient $(E) : X^2 - 3X + 1 = 0$

Le discriminant de l'équation (E) est: $\Delta = 5$

et les solutions de l'équation (E) sont : $X_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$; $X_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

Donc : $e^x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \iff x = \ln\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$

et : $e^x = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \iff x = \ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$

D'où l'ensemble des solutions de l'équation : $f(x) = \ln(3)$ dans $\mathbb{R}$ est :

$$S = \left\{\ln\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right); \ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\right\}$$

3 a. Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

La fonction: $x \longmapsto e^x + e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $e^x + e^{-x} > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $f'(x) = (\ln(e^x + e^{-x}))'$

$$= \frac{(e^x + e^{-x})'}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{-x}(e^{2x}-1)}{e^{-x}(e^{2x}+1)} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

b. Tableau de variations de f

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $f'(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ et $e^{2x} + 1 > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $e^{2x} - 1$.

et on a : $e^{2x} - 1 = (e^x)^2 - 1 = (e^x + 1)(e^x - 1)$ et $e^x + 1 > 0$

donc le signe de $f'(x)$ est celui de $e^x - 1$:

On a: $f'(x) > 0 \iff e^x - 1 > 0$

$\iff e^x > 1$

$\iff x > 0$

$f'(x) = 0 \iff e^x - 1 = 0$

$\iff e^x = 1$

$\iff x = 0$

ProfSalmi.blogspot.com

Ainsi le tableau de variations de f est le suivant:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	$\ln(2)$	↗	$+\infty$

Exercice 21

$$f(x) = \ln(e^{2x} + e^x + 1)$$

1 a. Vérifions que : $D = \mathbb{R}$

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $x \in D \iff e^{2x} + e^x + 1 > 0$

Puisque : $e^x > 0$ et $e^{2x} > 0$, alors : $e^{2x} + e^x > 0$, donc : $e^{2x} + e^x + 1 > 1$.

C'est-à-dire : $e^{2x} + e^x + 1 > 0$

D'où : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; e^{2x} + e^x + 1 > 0$, par suite : $D = \mathbb{R}$.

b. Résolvions dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = \ln(3)$:

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $f(x) = \ln(3) \iff \ln(e^{2x} + e^x + 1) = \ln(3)$

$$\iff e^{2x} + e^x + 1 = 3$$
$$\iff e^{2x} + e^x - 2 = 0$$
$$\iff (e^x)^2 + e^x - 2 = 0$$
$$\iff (e^x)^2 - 1 + e^x - 1 = 0$$
$$\iff (e^x - 1)(e^x + 1) + e^x - 1 = 0$$
$$\iff (e^x - 1)(e^x + 1 + 1) = 0$$
$$\iff (e^x - 1)(e^x + 2) = 0$$
$$\iff e^x - 1 = 0 \text{ ou } e^x + 2 = 0$$

On peut aussi poser $X = e^x$, et résoudre l'équation : $X^2 + X - 2 = 0$ en utilisant le discriminant Δ.

Puisque $e^x > 0$, alors l'équation $e^x + 2 = 0$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$.

Donc : $f(x) = \ln(3) \iff e^x = 1$

$$\iff \ln(e^x) = \ln(1)$$
$$\iff x = 0$$

D'où : $S = \{0\}$

2 a. Calculons : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

▸ On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} (e^x)^2 = +\infty$, donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x} + e^x + 1 = +\infty$

ProfSalmi.blogspot.com

et on a : $\lim\limits_{X\to+\infty}\ln(X)=+\infty$; donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(e^{2x}+e^{x}+1)=+\infty$

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

▸ On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{2x}=\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{x})^{2}=0$

donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{2x}+e^{x}+1=1$

et la fonction $\ln$ est continue en 1; alors : $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(e^{2x}+e^{x}+1)=\ln(1)=0$

C'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$

b. Étudions les branches infinies de (C) :

▸ Au voisinage de $-\infty$:

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$, donc la droite d'équation : $y=0$ est une asymptote horizontale à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$.

▸ Au voisinage de $+\infty$:

Soit x de $]0;+\infty[$, on a : $e^{2x}+e^{x}+1=e^{2x}\left(1+\frac{1}{e^{x}}+\frac{1}{e^{2x}}\right)$

Donc : $f(x)=\ln\left(e^{2x}\left(1+\frac{1}{e^{x}}+\frac{1}{e^{2x}}\right)\right)$

$$=\ln(e^{2x})+\ln\left(1+\frac{1}{e^{x}}+\frac{1}{e^{2x}}\right)=2x+\ln\left(1+\frac{1}{e^{x}}+\frac{1}{e^{2x}}\right)$$

C'est-à-dire : $f(x)-2x=\ln\left(1+\frac{1}{e^{x}}+\frac{1}{e^{2x}}\right)$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x}=+\infty$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x}}=0$, et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{2x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{(e^{x})^{2}}=0$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}1+\frac{1}{e^{x}}+\frac{1}{e^{2x}}=1$, et puisque la fonction $\ln$ est continue en 1;

alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{e^{x}}+\frac{1}{e^{2x}}\right)=\ln(1)=0$, d'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-2x=0$

Finalement on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=0$

Donc la droite d'équation : $y=2x$ est une asymptote oblique à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

3 a. Calculons $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$

La fonction $x\longmapsto e^{2x}+e^{x}+1$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$,

et on a : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ; f'(x)=\dfrac{(e^{2x}+e^{x}+1)'}{e^{2x}+e^{x}+1}=\dfrac{2e^{2x}+e^{x}}{e^{2x}+e^{x}+1}$

b. Tableau de variations de f :

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $e^{x}>0$, donc : $2e^{2x}+e^{x}>0$, et $e^{2x}+e^{x}+1>0$

ProfSalmi.blogspot.com

ainsi : $\frac{2e^x + e^x}{e^{2x} + e^x + 1} > 0$, c'est-à-dire : $f'(x) > 0$

D'où : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) > 0$

Par suite le tableau de variations de f est le suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	0	↗	$+\infty$

Exercice 22

$$f(x) = xe^x - 1$$

1 Calculons : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$:

▸ Au voisinage de $+\infty$: on a $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^x = +\infty$

c'est-à-dire : $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^x - 1 = +\infty$, d'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

▸ Au voisinage de $-\infty$: on a: $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$, donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x - 1 = -1$,

d'où : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$

2 a. Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = (1+x)e^x$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = (xe^x - 1)'$$
$$= e^x + xe^x = (1+x)e^x$$

b. Tableau de variations de f :

Soit x de $\mathbb{R}$, on a $f'(x) = (x+1)e^x$ et $e^x > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $x+1$.

On a le tableau de signe de $x+1$ est : $(x+1 = 0 \iff x = -1)$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	

Donc le tableau de variations de f est le suivant :

ProfSalmi.blogspot.com

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	$-1-e^{-1}$	↗	-1

3 a. ▸ **Montrons que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[-1;+\infty[$**

Les fonctions $x \longmapsto e^x$ et $x \longmapsto x$ sont continues sur $\mathbb{R}$, et en particulier sur $[-1;+\infty[$, donc la fonction $x \longmapsto xe^x$ est continue sur $[-1;+\infty[$; d'où $f: x \longmapsto xe^x - 1$ est continue sur l'intervalle $[-1;+\infty[$, et on a f est strictement croissante sur $[-1;+\infty[$, d'où :

$f([-1;+\infty[) = [f(-1) ; \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[= [-1-e^{-1}; +\infty[$

Puisque $0 \in [-1-e^{-1}; +\infty[$, alors il existe un unique α de $[-1;+\infty[$, tel que : $f(\alpha)=0$.

C'est-à-dire l'équation : $f(x)=0$ admet une solution unique α dans $[-1;+\infty[$

▸ **Montrons que :** $0<\alpha<1$

On a : $f(0)=-1$ et $f(1)=e-1$, c'est-à-dire : $f(0)<0$ et $f(1)>0$

Donc : $f(0)<0<f(1)$, c'est-à-dire : $f(0)<f(\alpha)<f(1)$

Puisque la fonction f est strictement croissante sur $[-1;+\infty[$, alors $0<\alpha<1$

b. Étudions le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$

La fonction f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty;-1]$, donc :

$f(]-\infty;-1]) = [f(-1) ; \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)[= [-1-e^{-1}; -1[$

c'est-à-dire : $(\forall x \in]-\infty;-1]) ; f(x) < -1$

Donc : $(\forall x \in]-\infty;-1]) ; f(x) < 0$

La fonction f est strictement croissante sur $[-1;+\infty[$ et $\alpha \in [-1;+\infty[$ et $f(\alpha)=0$ donc:

sur l'intervalle $[-1;\alpha[$, on a : $-1 \le x < \alpha \Rightarrow f(x) < f(\alpha)$

$\Rightarrow f(x) < 0$

sur l'intervalle $[\alpha;+\infty[$, on a : $\alpha \le x \Rightarrow f(\alpha) < f(x)$

$\Rightarrow 0 < f(x)$

ProfSalmi.blogspot.com

c'est-à-dire : $(\forall\, x \in [-1\,;\alpha[\,)\ ;\ f(x) < 0$

et $(\forall x \in]\alpha\ ;+\infty[\,) ; f(x) > 0$

Donc le tableau de signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$ est le suivant :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Exercice 23

$f(x) = e^x - x - 1$ et $g(x) = e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1$

1 a. Étudions les variations de f sur $\mathbb{R}$.

Les fonctions $x \longmapsto -x-1$ et $x \longmapsto e^x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a : $(\forall\, x \in \mathbb{R})\ ; f'(x) = (e^x - x - 1)' = e^x - 1$

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $f'(x) \geq 0 \iff e^x - 1 \geq 0$

$\iff x \geq 0$

$\iff x \in [0\ ;+\infty[$

Donc f est croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$

et on a : $f'(x) \leq 0 \iff e^x - 1 - \leq 0$

$\iff x \leq 0$

$\iff x \in]-\infty\ ;\ 0]$

Donc f est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty;0]$

b. Déduction :

La fonction f est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$ et $f(0) = 0$,

donc : $x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(0)$

$\Rightarrow f(x) \geq 0$

et on a la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et $f(0) = 0$,

donc : $x \leq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(0)$

$\Rightarrow f(x) \geq 0$

D'où : $f(x) \geq 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

2 a. Montrons que: $g'(x) = f(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$

Les fonctions $x \longmapsto -\frac{x^2}{2} - x - 1$ et $x \longmapsto e^x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

donc la fonction: g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

ProfSalmi.blogspot.com

Et on a : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ g'(x) = \left(e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1\right)'$

$= e^x - \frac{1}{2} \times 2x - 1 = e^x - x - 1 = f(x)$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ g'(x) = f(x)$

b. Déduction :

On a : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; f(x) \geq 0$ et $(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ g'(x) = f(x)$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ g'(x) \geq 0$

c'est-à-dire la fonction g est croissante sur $\mathbb{R}$, et on a : $g(0) = 0$

Donc : $x \geq 0 \Rightarrow g(x) \geq g(0)$

$\Rightarrow g(x) \geq 0$

et $x \leq 0 \Rightarrow g(x) \leq g(0)$

$\Rightarrow g(x) \leq 0$

Par suite le tableau de signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$ est le suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

Exercice 24

$$f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$$

1 a. Montrons que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

▸ Au voisinage de $+\infty$:

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$

$= (x^2 + 2x + 1)\frac{1}{e^x} = \frac{x^2}{e^x} + 2\frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}$

Puisque : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$

alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$

Donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} + \frac{2x}{e^x} + \frac{1}{e^x} = 0$, d'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

▸ Au voisinage de $-\infty$:

On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $e^x > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$ donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty$

Et on a : $\lim\limits_{x \to -\infty} (x+1)^2 = +\infty$; donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} (x+1)^2 e^{-x} = +\infty$ d'où : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

b. Calculons : $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$

ProfSalmi.blogspot.com

Soit $x < 0$, on a : $\frac{f(x)}{x} = \frac{(x+1)^2 e^{-x}}{x} = (x+1)^2 \times \frac{1}{xe^x}$

Puisque: $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$ et $xe^x < 0$ pour tout x de $]-\infty ; 0[$ alors :

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{xe^x} = -\infty$

Et on a : $\lim\limits_{x \to -\infty} (x+1)^2 = +\infty$; donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} (x+1)^2 \times \frac{1}{xe^x} = -\infty$

D'où : $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

2 a. ▸ **Montrons que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.**

La fonction $x \xmapsto{u} (x+1)^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, car c'est une fonction polynôme.

et la fonction $x \xmapsto{v} e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

donc la fonction $x \xrightarrow{u} \frac{1}{e^x} = e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$; d'où $f = u \times v$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

▸ **Montrons que :** $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = (1-x^2)e^{-x}$

Soit x de $\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= ((x+1)^2 e^{-x})' \\ &= 2(x+1)e^{-x} - (x+1)^2 e^{-x} \\ &= (x+1)(2-x-1)e^{-x} = (1+x)(1-x)e^{-x} = (1-x^2)e^{-x} \end{aligned}$$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = (1-x^2)e^{-x}$

b. Tableau de variations de f :

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $f'(x) = (1-x^2)e^{-x}$ et $e^{-x} > 0$

Donc le signe de $f'(x)$ est celui de $1-x^2$ sur $\mathbb{R}$.

et on a : $1-x^2 \iff x = 1$ ou $x = -1$

Le tableau de signe de $1-x^2$ est le suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc le tableau de variations de f est :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{4}{e}$	↘	0

ProfSalmi.blogspot.com

3 a. ▸ **Montrons que: l'équation $f(x)=2$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$**

▸ Sur l'intervalle $]-\infty;-1]$:

On a la fonction f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty;-1]$

Donc : $f(]-\infty;-1])=[f(-1);\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)[=[0;+\infty[$

Puisque $2\in[0;+\infty[$, alors l'équation $f(x)=2$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]-\infty;-1]$.

▸ Sur l'intervalle $]-1;+\infty[$:

La fonction f admet $\frac{4}{e}$; comme maximum donc: $(\forall x\in]-1;+\infty[);f(x)\leq\frac{4}{e}$

et puisque : $\frac{4}{e}<2$ alors : $(\forall x\in]-1;+\infty[);f(x)<2$

Donc l'équation $f(x)=2$ n'admet pas de solutions dans l'intervalle $]-1;+\infty[$

Conclusion : l'équation $f(x)=2$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$.

▸ **Montrons que :** $-2<\alpha<-1$

On a : $f(-1)=0$ et $f(-2)=e^2$, c'est-à-dire : $f(-1)<2$ et $f(-2)>2$

Donc : $f(-1)<2<f(-2)$, d'où : $f(-1)<f(\alpha)<f(-2)$

Puisque la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty;-1]$ alors : $-2<\alpha<-1$

b. Montrons que : $\alpha=-1-\sqrt{2}e^{\frac{\alpha}{2}}$

On a : $f(\alpha)=2\iff(\alpha+1)^2e^{-\alpha}=2$

$\iff(\alpha+1)^2=2e^{\alpha}$

$\iff|\alpha+1|=\sqrt{2e^{\alpha}}=\sqrt{2}e^{\frac{\alpha}{2}}$

et on a : $-2<\alpha<-1$, c'est-à-dire : $\alpha+1<0$ donc : $|\alpha+1|=-\alpha-1$

d'où : $-\alpha-1=\sqrt{2}e^{\frac{\alpha}{2}}$ finalement : $\alpha=-1-\sqrt{2}e^{\frac{\alpha}{2}}$

Exercice 25

$$f(x)=x^3e^{-x}$$

1 a. Calculons : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

▸ Au voisinage de $+\infty$:

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $f(x)=x^3e^{-x}=\frac{x^3}{e^x}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^3}=+\infty$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x}=0$

ProfSalmi.blogspot.com

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

▸ Au voisinage de $-\infty$:

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $e^x > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3}{e^x} = -\infty$, d'où : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

b) Étudions les branches infinies de (C)

▸ Au voisinage de $+\infty$: On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ donc, la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à (C) au voisinage de $+\infty$.

▸ Au voisinage de $-\infty$: On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Calculons : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

Soit $x < 0$, on a: $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{x^3e^{-x}}{x} = x^2e^{-x} = \dfrac{x^2}{e^x}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $e^x > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$ alors :

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{e^x} = +\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ donc la courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$.

2 a. Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; f'(x) = x^2(3-x)e^{-x}$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ qui sont : $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $f'(x) = (x^3e^{-x})'$

$= 3x^2e^{-x} + x^3 \times (-e^{-x})$

$= 3x^2e^{-x} - x^3e^{-x} = x^2(3-x)e^{-x}$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; f'(x) = x^2(3-x)e^{-x}$

b. Tableau de variations de f :

Le signe de $f'(x)$ est celui de $x^2(3-x)$ sur $\mathbb{R}$, car : $e^{-x} > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

On a le tableau de signe de $x^2(3-x)$ est le suivant :

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$x^2(3-x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	

Donc le tableau de variations de f est :

ProfSalmi.blogspot.com

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	↗	0	↗	$27e^{-3}$	↘	0

3 a. Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; f''(x) = x(x^2 - 6x + 6)e^{-x}$

La fonction f est deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$.

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $f'(x) = x^2(3 - x)e^{-x} = (3x^2 - x^3)e^{-x}$

Donc : $f''(x) = (6x - 3x^2)e^{-x} - (3x^2 - x^3)e^{-x}$

$= (6x - 3x^2 - 3x^2 + x^3)e^{-x}$

$= (x^3 - 6x^2 + 6x)e^{-x} = x(x^2 - 6x + 6)e^{-x}$

D'où : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; f''(x) = x(x^2 - 6x + 6)e^{-x}$

b. Déterminons les abscisses des points d'inflexion de (C)

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $e^{-x} > 0$ donc le signe de $f''(x)$ est celui de $x(x^2 - 6x + 6)$

Le discriminant du trinôme $x^2 - 6x + 6$ est $\Delta = 12$

Donc : $x^2 - 6x + 6 = 0 \iff x = 3 + \sqrt{3}$ ou $x = 3 - \sqrt{3}$

D'où tableau de signe de $f''(x)$ sur $\mathbb{R}$ est le suivant:

x	$-\infty$		0		$3-\sqrt{3}$		$3+\sqrt{3}$		$+\infty$
x	$-$		0	$+$		$+$		$+$	
$x^2 - 6x + 6$	$+$			$+$	0	$-$	0	$+$	
$f''(x)$	$-$		0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $f''(x)$ s'annule et change de signe en : 0 et $3 - \sqrt{3}$ et $3 + \sqrt{3}$, d'où la courbe (C) admet trois points d'inflexion d'abscisses : 0 et $3 - \sqrt{3}$ et $3 + \sqrt{3}$.

Exercice 26

$$f(x) = -7e^{-2x} + 8e^{-x} - 1$$

1 a. Calculons : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

▸ Au voisinage de $+\infty$:

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{(e^x)^2} = 0$

donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} -7e^{-2x} + 8e^{-x} - 1 = -1$, d'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$

ProfSalmi.blogspot.com

▸ Au voisinage de $-\infty$:

▸ Soit x de $]-\infty;0[$, on a :

$f(x) = -7e^{-2x} + 8e^{-x} - 1 = e^{-2x}(-7 + 8e^{x} - e^{2x})$

Puisque : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = \lim\limits_{x\to-\infty}(e^{x})^2 = 0$

alors : $\lim\limits_{x\to-\infty} -7 + 8e^{x} - e^{2x} = -7$

et on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$ et $e^{2x} > 0$ donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{e^{2x}} = +\infty$.

D'où : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-2x}(-7 + 8e^{x} - e^{2x}) = -\infty$

c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

b. Étudions les branches infinies de la courbe (C) :

▸ Au voisinage de $+\infty$:

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$, donc la droite d'équation $y = -1$ est une asymptote horizontale à (C) au voisinage de $+\infty$.

▸ Au voisinage de $-\infty$:

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, calculons : $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$

Soit $x < 0$, on a : $\frac{f(x)}{x} = \frac{e^{-2x}}{x}(-7 + 8e^{x} - e^{2x}) = \frac{1}{xe^{2x}}(-7 + 8e^{x} - e^{2x})$

et on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} -7 + 8e^{x} - e^{2x} = -7$

et puisque : $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x}(xe^{x})^2 = 0$, (car : $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$)

et $xe^{2x} < 0$, alors : $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{xe^{2x}} = -\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{xe^{2x}}(-7 + 8e^{x} - e^{2x}) = +\infty$, d'où : $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, d'où la courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$.

c. Résolvons l'équation : $f(x) = 0$

On a : $f(x) = 0 \iff -7e^{-2x} + 8e^{-x} - 1 = 0$

Soit x de $\mathbb{R}$, on pose : $X = e^{-x}$ avec $X > 0$, on a : $e^{-2x} = (e^{-x})^2$

Donc, l'équation : $-7e^{-2x} + 8e^{-x} - 1 = 0$ devient (E) : $-7X^2 + 8X - 1 = 0$

Les solutions de l'équation (E) sont : $X = 1$ et $X = \frac{1}{7}$

Donc : $f(x) = 0 \iff e^{-x} = 1$ ou $e^{-x} = \frac{1}{7}$

ProfSalmi.blogspot.com

$\Leftrightarrow -x = 0$ ou $-x = \ln\left(\frac{1}{7}\right)$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \ln(7)$

D'où l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 0$ est : $S = \{0; \ln(7)\}$

2 a. Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; f'(x) = 14e^{-2x} - 8e^{-x}$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a :

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ ; f'(x) = (-7e^{-2x} + 8e^{-x} - 1)'$$
$$= -7 \times (-2e^{-2x}) + 8 \times (-e^{-x})$$
$$= 14e^{-2x} - 8e^{-x}$$

b. Tableau de variations de f :

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $f'(x) = 14e^{-2x} - 8e^{-x} = 8e^{-2x}\left(\frac{7}{4} - e^{x}\right)$

On a : $e^{-2x} > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $\frac{7}{4} - e^{x}$ sur $\mathbb{R}$.

On a : ▸ $\frac{7}{4} - e^{x} = 0 \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{7}{4}\right)$

▸ $\frac{7}{4} - e^{x} < 0 \Leftrightarrow \frac{7}{4} < e^{x}$

$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{7}{4}\right) < x$

Donc, le tableau de variations de f est le suivant :

x	$-\infty$		$\ln\left(\frac{7}{4}\right)$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	↗	$\frac{9}{7}$	↘	-1

3 Montrons que la courbe (C) admet un point d'inflexion :

La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $f'(x) = 14e^{-2x} - 8e^{-x}$

Donc : $f''(x) = 14(-2e^{-2x}) - 8(-e^{-x})$

$$= -28e^{-2x} + 8e^{-x} = 8e^{-2x}\left(e^{x} - \frac{7}{2}\right)$$

On a : $8e^{-2x} > 0$; d'où le signe de $f''(x)$ est celui de $e^{x} - \frac{7}{2}$.

On a : ▸ $e^{x} - \frac{7}{2} > 0 \Leftrightarrow e^{x} > \frac{7}{2}$

$\Leftrightarrow x > \ln\left(\frac{7}{2}\right)$

▸ $e^{x} - \frac{7}{2} = 0 \Leftrightarrow e^{x} = \frac{7}{2}$

$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{7}{2}\right)$

ProfSalmi.blogspot.com

Le tableau de signe de $f''(x)$ est le suivant :

x	$-\infty$		$\ln\left(\frac{7}{2}\right)$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

On a : $f''(x)$ s'annule en $\ln\left(\frac{7}{2}\right)$ et change de signe, donc le point d'abscisse $\ln\left(\frac{7}{2}\right)$ est l'unique point d'inflexion de (C).

Exercice 27

$$f(x) = e^{2x} - 2e^{x}$$

1 a. Montrons que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ **et** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$:

▸ Au voisinage de $+\infty$:

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $f(x) = e^{2x} - 2e^{x} = e^{x}(e^{x} - 2)$

et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} - 2 = +\infty$, donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}(e^{x} - 2) = +\infty$.

c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

▸ Au voisinage de $-\infty$:

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} - 2 = -2$, donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}(e^{x} - 2) = 0$,

d'où : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

b. Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; f'(x) = 2e^{x}(e^{x} - 1)$

Les fonctions : $x \longmapsto e^{x}$ et $x \longmapsto e^{x} - 2$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; f'(x) = (e^{2x} - 2e^{x})'$

$$= 2e^{2x} - 2e^{x} = 2e^{x}(e^{x} - 1)$$

c. Tableau de variations de f :

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $f'(x) = 2e^{x}(e^{x} - 1)$ et $e^{x} > 0$.

Donc, le signe de $f'(x)$ est celui de $e^{x} - 1$:

▸ $f'(x) = 0 \iff e^{x} - 1 = 0$

$\iff e^{x} = 1$

$\iff x = 0$

▸ $f'(x) > 0 \iff e^{x} - 1 > 0$

$\iff e^{x} > 1$

$\iff x > 0$

Donc, le tableau de variations de f est le suivant :

ProfSalmi.blogspot.com

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	↘	-1	↗	$+\infty$

2 a. Montrons que la fonction g admet une fonction réciproque :

La fonction g est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$ donc g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle $J = g([0;+\infty[)$

telle que : $J = \left[g(0); \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\right[= [-1;+\infty[$

b. Montrons que : $(\forall x \in [-1;+\infty[)\ ;\ g^{-1}(x) = \ln(1+\sqrt{x+1})$

Soit x de $[-1;+\infty[$ et y de $[0;+\infty[$, tels que : $g^{-1}(x) = y$

On a : $g^{-1}(x) = y \iff g(y) = x$

$\iff e^{2y} - 2e^{y} = x$

$\iff (e^{y})^2 - 2e^{y} + 1 = x + 1$

$\iff (e^{y} - 1)^2 = x + 1$

$\iff |e^{y} - 1| = \sqrt{x+1}$

Puisque : $y \geq 0$, donc : $e^{y} \geq 1$ c'est-à-dire : $e^{y} - 1 \geq 0$, d'où : $|e^{y} - 1| = e^{y} - 1$

Par suite : $g^{-1}(x) = y \iff e^{y} - 1 = \sqrt{x+1}$

$\iff e^{y} = 1 + \sqrt{1+x}$

$\iff y = \ln(1+\sqrt{x+1})$

Donc : $(\forall x \geq -1)\ ;\ g^{-1}(x) = \ln(1+\sqrt{x+1})$

Exercice 28

$$f(x) = \frac{3e^{x}}{e^{2x}+1}$$

On a : $D_f = \mathbb{R}$

1 a. Montrons que f est une fonction paire :

Soit x de D_f, on a : $-x \in D_f$

et $f(-x) = \dfrac{3e^{-x}}{e^{-2x}+1}$

$= \dfrac{e^{2x} \times (3e^{-x})}{e^{2x}(e^{-2x}+1)} = \dfrac{3e^{2x-x}}{e^{2x-2x}+e^{2x}} = \dfrac{3e^{x}}{1+e^{2x}} = f(x)$

ProfSalmi.blogspot.com

Donc : $(\forall x \in D_f)\ ;\ ([-x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)])$

D'où : f est une fonction paire.

b. Calculons : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

Soit $x > 0$, on a : $f(x) = \dfrac{3e^x}{e^x(e^x + e^{-x})} = \dfrac{3}{e^x + e^{-x}}$

Puisque : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$

alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x + e^{-x} = +\infty$, donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{e^x + e^{-x}} = 0$

D'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

2 a. Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ f'(x) = \dfrac{3(1 - e^{2x})e^x}{(e^{2x} + 1)^2}$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $f'(x) = 3\left(\dfrac{e^x(e^{2x} + 1) - 2e^{2x} \times e^x}{(e^{2x} + 1)^2}\right)$

$= 3\left(\dfrac{(e^{2x} + 1 - 2e^{2x})e^x}{(e^{2x} + 1)^2}\right) = \dfrac{3(1 - e^{2x})e^x}{(e^{2x} + 1)^2}$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ f'(x) = \dfrac{3(1 - e^{2x})e^x}{(e^{2x} + 1)^2}$

b. Tableau de variations de f **:**

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $e^x > 0$ et $(e^{2x} + 1)^2 > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - e^{2x}$.

Puisque : $(1 - e^{2x}) = (1 - e^x)(1 + e^x)$ et $1 + e^x > 0$, alors le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - e^x$.

Et on a :

$f'(x) = 0 \iff 1 - e^x = 0$

$\iff e^x = 1$

$\iff x = 0$

$f'(x) > 0 \iff 1 - e^x > 0$

$\iff 1 > e^x$

$\iff 0 > x$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, et puisque f est paire alors : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	↗	$\frac{3}{2}$	↘	0

3 a. Montrons que la fonction g **admet une fonction réciproque :**

ProfSalmi.blogspot.com

La fonction g est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$, donc g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle $J = g([0;+\infty[) = \left]\lim_{x\to+\infty} g(x); g(0)\right] = \left]0;\frac{3}{2}\right]$.

b. Montrons que : $(\forall x \in J)\ ;\ g^{-1}(x) = \ln\left(\frac{3+\sqrt{9-4x^2}}{2x}\right)$

Soit x de $\left]0;\frac{3}{2}\right]$ et y de $[0;+\infty[$, tels que : $g^{-1}(x) = y$

On a : $g^{-1}(x) = y \iff x = g(y)$

$$\iff x = \frac{3e^y}{e^{2y}+1}$$
$$\iff xe^{2y} + x = 3e^y$$
$$\iff xe^{2y} - 3e^y + x = 0$$
$$\iff e^{2y} - \frac{3}{x}e^y + 1 = 0$$

et on a : $e^{2y} - \frac{3}{x}e^y = (e^y)^2 - \frac{3}{x}e^y = \left(e^y - \frac{3}{2x}\right)^2 - \frac{9}{4x^2}$

Donc : $g^{-1}(x) = y \iff \left(e^y - \frac{3}{2x}\right)^2 = \frac{9}{4x^2} - 1 = \frac{9-4x^2}{4x^2}$

$$\iff \left|e^y - \frac{3}{2x}\right| = \sqrt{\frac{9-4x^2}{4x^2}}$$
$$\iff \left|e^y - \frac{3}{2x}\right| = \frac{\sqrt{9-4x^2}}{2x} \text{ (car : } x > 0)$$
$$\iff e^y = \frac{3}{2x} + \frac{\sqrt{9-4x^2}}{2x} \text{ ou } e^y = \frac{3}{2x} - \frac{\sqrt{9-4x^2}}{2x}$$
$$\iff e^y = \frac{1}{2x}(3+\sqrt{9-4x^2}) \text{ ou } e^y = \frac{1}{2x}(3-\sqrt{9-4x^2})$$

On a : $y \geq 0$, donc : $e^y \geq 1$

puisque : $\frac{1}{2x}(3+\sqrt{9-4x^2}) - 1 = \frac{1}{2x}(3-2x+\sqrt{9-4x^2})$

et $0 < x \leq \frac{3}{2}$, c'est-à-dire : $3-2x \geq 0$, alors : $3-2x+\sqrt{9-4x^2} \geq 0$

Donc : $\frac{1}{2x}(3+\sqrt{9-4x^2}) \geq 1$

D'où : $g^{-1}(x) = y \iff e^y = \frac{1}{2x}(3+\sqrt{9-4x^2})$

$$\iff y = \ln\left(\frac{3+\sqrt{9-4x^2}}{2x}\right)$$

Par suite : $\left(\forall x \in \left]0;\frac{3}{2}\right]\right)\ ;\ g^{-1}(x) = \ln\left(\frac{3+\sqrt{9-4x^2}}{2x}\right)$

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 29

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{xe^x}{e^x - 1} & ; \quad x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1 a. Calculons : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

Soit x de $\mathbb{R}^*$, on a : $f(x) = \dfrac{xe^x}{e^x - 1} = \dfrac{xe^x}{e^x\left(1 - \dfrac{1}{e^x}\right)} = \dfrac{x}{1 - \dfrac{1}{e^x}}$

Puisque : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, alors: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$, donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \dfrac{1}{e^x} = 1$

et on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$; donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{1 - \dfrac{1}{e^x}} = +\infty$, d'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Calculons : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x - 1 = -1$

et on a : $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$; donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{xe^x}{e^x - 1} = \dfrac{0}{-1} = 0$

d'où : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

Calculons : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

Soit x de $\mathbb{R}^*$, on a : $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{xe^x}{x(e^x - 1)} = \dfrac{e^x}{e^x - 1}$

On pose : $X = e^x$; on a : $x \to +\infty \iff X \to +\infty$

Donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{e^x - 1} = \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{X}{X - 1} = \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{X}{X} = \lim\limits_{X \to +\infty} 1 = 1$

D'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$

2 Montrons que la fonction f est continue en 0

Soit x de $\mathbb{R}^*$, on a : $f(x) = \dfrac{xe^x}{e^x - 1} = \dfrac{x}{e^x - 1} \times e^x$

Puisque : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$, alors : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{e^x - 1} = 1$

et on a : $\lim\limits_{x \to 0} e^x = e^0 = 1$

Donc : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{e^x - 1} \times e^x = 1$, c'est-à-dire : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{xe^x}{e^x - 1} = 1$

D'où : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$

et on a : $f(0) = 1$, donc : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$

Par suite, f est continue en 0.

ProfSalmi.blogspot.com

3 a. Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; f(-x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$

Soit x de $\mathbb{R}^*$, on a : $f(-x) = \dfrac{-xe^{-x}}{e^{-x} + 1}$

$$= \frac{-xe^{-x}}{e^{-x}(1 - e^x)} = \frac{-x}{1 - e^x} = \frac{x}{e^x - 1}$$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; f(-x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$.

b. Vérifions que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; f(x) - f(-x) = x$

Soit x de $\mathbb{R}^*$, on a : $f(x) = \dfrac{xe^x}{e^x - 1}$ et $f(-x) = \dfrac{e^x}{e^x - 1}$

Donc : $f(x) - f(-x) = \dfrac{xe^x - e^x}{e^x - 1} = \dfrac{x(e^x - 1)}{e^x - 1} = x$.

D'où : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; f(x) - f(-x) = x$

c. Montrons que la fonction f est dérivable en 0

Calculons $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$, c'est-à-dire : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - 1}{x}$.

Soit x de $\mathbb{R}^*$, on a : $f(x) - f(-x) = x$, donc : $\dfrac{f(x) - f(-x)}{x} = 1$

D'où : $\dfrac{f(x) - 1 - f(-x) + 1}{x} = 1$, c'est-à-dire : $\dfrac{f(x) - 1 - (f(-x) - 1)}{x} = 1$

ainsi : $\dfrac{f(x) - 1}{x} - \dfrac{f(-x) - 1}{x} = 1$

Déterminons : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(-x) - 1}{x}$

On pose : $t = -x$, on a : $x \to 0 \iff t \to 0$

Donc : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(-x) - 1}{x} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(t) - 1}{-t} = -\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(t) - 1}{t}$

D'où : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(-x) - 1}{x} = -\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - 1}{x}$

Puisque : $\dfrac{f(x) - 1}{x} - \dfrac{f(-x) - 1}{x} = 1$,

alors: $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{f(x) - 1}{x} - \dfrac{f(-x) - 1}{x} \right) = 1$

ainsi: $2 \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - 1}{x} = 1$, c'est-à-dire : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - 1}{x} = \dfrac{1}{2}$

Donc : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{1}{2}$, d'où f est dérivable en 0, et on a : $f'(0) = \dfrac{1}{2}$

ProfSalmi.blogspot.com

3 Fonction exponentielle de base a ($a > 0$ et $a \neq 1$)

Définition :

Soit a un réel strictement positif et différent de 1.

La fonction exponentielle de base a est la fonction qui à chaque réel x associe le réel $e^{x\ln a}$ que l'on écrit a^x, et on la note $\exp_a$. C'est-à-dire :

$(\forall x \in \mathbb{R})\ ; \exp_a(x) = a^x = e^{x\ln a}$

Conséquences :

- Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $\ln(a^x) = x\ln a$
- Pour tout x et y de $\mathbb{R}$, on a : $a^x = a^y$ équivaut à $x = y$

Propriété :

Pour tout x et y de $\mathbb{R}$, on a :

- $a^x a^y = a^{x+y}$
- $\frac{1}{a^x} = a^{-x}$
- $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $(a^x)^y = a^{xy}$

Remarque :

Ces propriétés sont le prolongement de celles des puissances rationnelles.

Fonction dérivée de la fonction : $x \longmapsto a^x$

Propriété :

- La fonction : $f : x \longmapsto a^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a :

$(\forall x \in \mathbb{R})\ ; f'(x) = (\ln a)a^x$

On écrit : $(a^x)' = (\ln a)a^x$

Remarque : Soit f la fonction: $x \longmapsto a^x$

- Si $0 < a < 1$, alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

donc: $(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2)\ ; (a^x < a^y \iff x > y)$,

- Si $a > 1$, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

donc : $(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2)\ ; (a^x < a^y \iff x < y)$,

Cas particulier : Fonction exponentielle de base10

- La fonction : $x \longmapsto 10^x$ est appelée fonction exponentielle de base 10, et on la note $\exp_{10}$, se note: $x \longmapsto e^{x\ln 10}$ et on a : $10^x = e^{x\ln 10} = \exp_{10}(x)$.
- $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; (\forall y \in]0; +\infty[)\ ; 10^x = y \iff x = \log y$

où $\log$ est le logarithme de base 10 (logarithme décimal).

ProfSalmi.blogspot.com

Exercices

Exercice 30

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $7^{2x} - 5^{3x+1} = 0$
2. $100^x - 10^x = 2$
3. $2^{x+1} + 3 \times 2^{-x} - 7 = 0$
4. $(\sqrt{x})^x = x^{\sqrt{x}}$

Exercice 31

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $1 + \left(\frac{1}{3}\right)^x > 5$
2. $4^x - 3.2^x + 2 \geq 0$
3. $2^{2x-1} - 3^{x+2} + 4^{x+\frac{1}{2}} + 9^{\frac{x}{2}} < 0$
4. $5^{\cos x} + 5^{\cos(\pi - x)+1} \leq 2.5^{\frac{1}{2}}$

Solutions

Exercice 30

1 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $7^{2x} - 5^{3x+1} = 0$

Soit x de $\mathbb{R}$, on a :

$$7^{2x} - 5^{3x+1} = 0 \iff 7^{2x} = 5^{3x+1}$$
$$\iff 2x \ln 7 = (3x+1)\ln 5$$
$$\iff (2\ln 7 - 3\ln 5)x = \ln 5$$
$$\iff x = \frac{\ln 5}{2\ln 7 - 3\ln 5}$$

Donc : $S = \left\{\frac{\ln 5}{2\ln 7 - 3\ln 5}\right\}$

2 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $100^x - 10^x = 2$

Soit x de $\mathbb{R}$, on a :

$$100^x - 10^x = 2 \iff (10^x)^2 - 10^x - 2 = 0$$
$$\iff (10^x + 1)(10^x - 2) = 0$$
$$\iff 10^x = -1 \text{ ou } 10^x = 2$$
$$\iff 10^x = 2$$
$$\iff x = \log(2)$$

Remarque: On peut aussi poser $X = 10^x$ l'équation devient: $X^2 - X - 2 = 0$, puis calculer Δ ...

Donc : $S = \{\log(2)\}$

3 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $2^{x+1} + 3 \times 2^{-x} - 7 = 0$

soit x de $\mathbb{R}$, on a : $2^{x+1} + 3 \times 2^{-x} - 7 = 0 \iff 2(2^x)^2 - 7.2^x + 3 = 0$

$$\iff 2(2^x - 3)\left(2^x - \frac{1}{2}\right) = 0$$

ProfSalmi.blogspot.com

$\Leftrightarrow 2^x = 3$ ou $2^x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = \log_2(3)$ ou $x = -1$

Donc : $S = \{-1; \log_2(3)\}$

4 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : (E) ; $(\sqrt{x})^x = x^{\sqrt{x}}$

▸ Ensemble de définition:

l'équation (E) est définie si et seulement si: $x \in \mathbb{R}^{*+} - \{1\}$

Soit x de $\mathbb{R}^{*+} - \{1\}$

On a : $(\sqrt{x})^x = x^{\sqrt{x}} \Leftrightarrow e^{x\ln\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}\ln x}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x\ln x = \sqrt{x}\ln x$

$\Leftrightarrow (x - 2\sqrt{x})\ln x = 0$

$\Leftrightarrow \ln x = 0$ ou $x - 2\sqrt{x} = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2) = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = 0$ ou $x = 4$

$\Leftrightarrow x = 4$ (car $x > 0$ et $x \neq 1$)

On remarque que : $(\sqrt{1})^1 = 1^1 = 1$ et $1^{\sqrt{1}} = 1^1 = 1$; donc 1 est aussi une solution de l'équation (E)

Donc : $S = \{1; 4\}$

Exercice 31

1 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $1 + \left(\frac{1}{3}\right)^x > 5$.

Soit x de $\mathbb{R}$:

On a : $1 + \left(\frac{1}{3}\right)^x > 5 \Leftrightarrow e^{-x\ln(3)} > 4$

$\Leftrightarrow -x\ln(3) > \ln 4$

$\Leftrightarrow x < -\frac{\ln 4}{\ln 3}$

Donc : $S = \left]-\infty; -\frac{\ln 4}{\ln 3}\right[$

2 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $4^x - 3.2^x + 2 \geq 0$

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $4^x - 3.2^x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 3(2^x) + 2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (2^x - 1)(2^x - 2) \geq 0$

ProfSalmi.blogspot.com

En posant : $X = 2^x$ on a : $(X-1)(X-2) \geq 0 \Leftrightarrow X \leq 1$ ou $X \geq 2$

$\Leftrightarrow 2^x \leq 2^0$ ou $2^x \geq 2^1$

$\Leftrightarrow x \leq 0$ ou $x \geq 1$

Donc : $S =]-\infty; 0] \cup [1; +\infty[$

3 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $2^{2x-1} - 3^{x+2} + 4^{x+\frac{1}{2}} + 9^{\frac{x}{2}} < 0$

Soit x de $\mathbb{R}$, on a :

$$2^{2x-1} - 3^{x+2} + 4^{x+\frac{1}{2}} + 9^{\frac{x}{2}} < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}.4^x - 9.3^x + 2.4^x + 3^x < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{2}.4^x - 8.3^x < 0$$

$$\Leftrightarrow 5 \times 4^x < 16 \times 3^x$$

$$\Leftrightarrow \ln(5 \times 4^x) < \ln(16 \times 3^x)$$

$$\Leftrightarrow \ln 5 + x \ln 4 < \ln 16 + x \ln 3$$

$$\Leftrightarrow (\ln 4 - \ln 3)x < \ln\left(\frac{16}{5}\right)$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{\ln\left(\frac{16}{5}\right)}{\ln 4 - \ln 3} \text{ (car } \ln 4 > \ln 3)$$

Donc : $S = \left]-\infty; \frac{\ln\left(\frac{16}{5}\right)}{\ln 4 - \ln 3}\right[$

4 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $5^{\cos x} + 5^{\cos(\pi - x)+1} \leq 2.5^{\frac{1}{2}}$

Soit x de $\mathbb{R}$, on a :

$$5^{\cos x} + 5^{\cos(\pi - x)+1} \leq 2.5^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 5^{\cos x} + 5.5^{-\cos x} \leq 2\sqrt{5} \quad \Big) \times 5^{\cos x}$$

$$\Leftrightarrow (5^{\cos x})^2 - 2\sqrt{5}.5^{\cos x} + 5 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (5^{\cos x} - \sqrt{5})^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 5^{\cos x} = 5^{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \; ; (k \in \mathbb{Z})$$

Donc : $S = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$

ProfSalmi.blogspot.com

Exercices

Exercice 32

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{2x} + 2e^x - 4x - 3$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1 a. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, et donner une interprétation géométrique des résultats obtenus.

b. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - (-4x - 3)$, et en déduire que (C) admet une asymptote oblique (Δ) dont on déterminera une équation.

2 a. Montrer que : $f'(x) = 2(e^x - 1)(e^x + 2)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$, puis dresser le tableau de variations de f.

3 Tracer la courbe (C).

Exercice 33

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+1)e^{-x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1 a. Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, et interpréter géométriquement le résultat;

b. Montrer que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$, et en déduire la nature de la branche infinie de la courbe (C) au voisinage de $-\infty$.

2 a. Montrer que : $f'(x) = -xe^{-x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$;

b. Dresser le tableau de variations de f.

3 a. Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion d'abscisse 1;

b. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1.

c. Tracer la courbe (C).

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 34

On considère la fonction numérique f définie sur $]-\infty;0]$ par : $f(x)=\sqrt{1-e^x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$:

1 Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$, et interpréter géométriquement le résultat.

2 Montrer que : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$, et en déduire la nature de la branche infinie de (C) au voisinage de $-\infty$.

3 Calculer $f'(x)$ pour tout x de l'intervalle $]-\infty;0[$, et dresser le tableau de variations de f.

4 Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle $[0;1[$, et que : $f^{-1}(x)=\ln(1-x^2)$ pour tout x de $[0;1[$.

5 Tracer dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, la courbe (C) et la courbe (C') de la fonction f^{-1}.

Exercice 35

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$:

1 a. Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$;

b. Interpréter géométriquement les deux résultats trouvés.

2 a. Montrer que : $f'(x)=\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$ pour tout x de $\mathbb{R}$;

b. Dresser le tableau de variations de f.

3 a. Montrer que le point $I\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de la courbe (C)

b. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point I ;

c. Tracer dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, la tangente (T) et la courbe (C).

4 a. Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle $]0;1[$.

b. Montrer que : $f^{-1}(x)=\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$ pour tout x de $]0;1[$.

Exercice 36

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^2-2xe^x+2e^x$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$:

ProfSalmi.blogspot.com

1 Calculer : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, et interpréter géométriquement le résultat obtenu.

2 a. Vérifier que : $f(x) = x^2\left(1 + 2(1-x)\dfrac{e^x}{x^2}\right)$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$;

b. Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, et interpréter géométriquement le résultat obtenu.

3 a. Montrer que : $f'(x) = -2x(e^x - 1)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

b. Dresser le tableau de variations de f.

4 a. Montrer que l'équation : $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que : $1 < \alpha < \dfrac{3}{2}$.

b. Tracer dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, la courbe (C). (on prend : $\alpha \simeq 1{,}3$)

Exercice 37

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = \dfrac{2e^{2x} - 2}{2e^{2x} - 5e^x + 2}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1 Déterminer D l'ensemble de définition de f, et étudier la parité de f.

2 Étudier les variations de f.

3 a. Donner une équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 0.

b. Déterminer les branches infinies de (C).

c. Tracer la courbe (C).

Exercice 38

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)e^x$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$:

1 a. Déterminer les limites de f aux bornes des intervalles de $\mathbb{R}^*$;

b. Étudier les branches infinies de la courbe (C).

2 a. Calculer $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$;

b. Dresser le tableau de variations de f ;

c. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1.

3 a. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}^*$, on a : $f''(x) = \dfrac{(x-1)(x^2+2)}{x^3}.e^x$;

ProfSalmi.blogspot.com

b. Étudier la concavité de (C).

4 Tracer la courbe (C) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Exercice 39

On considère la fonction numérique f définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^x \ ; \ x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$:

1 Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2 Étudier la continuité de f à droite en 0.

3 a. Vérifier que : $(\forall x \in]0;1[)$; $\dfrac{f(x)-1}{x} = \left(\dfrac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}\right)\ln x$;

b. Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu.

4 a. Montrer que : $(\forall x \in]0;+\infty[)$; $f'(x) = f(x)(1+\ln x)$;

b. En déduire le tableau de variations de f.

5 Déterminer la branche infinie de la courbe (C).

6 Tracer la courbe (C).

Exercice 40

I) Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1-(x-2)e^{-x}$

1 Calculer $g'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$, et en déduire que g est décroissante sur $]-\infty;3]$ et croissante sur $[3;+\infty[$.

2 En déduire que : $g(x) > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

II) On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = x+(x-1)e^{-x}$.

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1 a. Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x = 0$, et en déduire la nature de la branche infinie de (C) au voisinage de $+\infty$:

b. Montrer que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$, et en déduire la nature de la branche infinie de (C) au voisinage de $-\infty$.

2 Étudier la position relative de (C) et la droite (Δ) d'équation : $y = x$

ProfSalmi.blogspot.com

3 Montrer que : $f'(x) = g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$, et dresser le tableau de variations de f.

4 a. Montrer que l'équation : $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que : $0 < \alpha < \frac{1}{2}$;

b. Donner une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse0.

5 Tracer dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, la tangente (T) la droite (Δ) et la courbe (C). (on prend : $\alpha \simeq 0,4$)

Exercice 41

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \ln(1 + 2e^x)$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$:

1 a. Montrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$;

b. Vérifier que : $f(x) = x + \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{1}{2e^x}\right)$ pour tout x de $\mathbb{R}$;

c. Étudier les branches infinies de la courbe (C).

2 a. Donner le tableau de variations de la fonction f;

b. Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0;

c. Tracer dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, la tangente (T) et la courbe (C).

3 Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

a. Montrer que $u_{n+1} - u_n > \ln(2)$ pour tout n de $\mathbb{N}$;

b. Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante;

c. Montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

4 Soit (v_n) la suite numérique définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n = 1 + e^{u_n}$:

a. Montrer que $(v_n)_{n \geq 0}$ est une suite géométrique de raison 2;

b. Déterminer u_n en fonction de n pour tout n de $\mathbb{N}$;

c. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{n}$.

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 42

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right)$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$:

1 a. Vérifier que : $f(x) = x\left(\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right)$ pour tout x de $\mathbb{R}$;

b. Montrer que la fonction f est paire et que : $f(x) - x = \frac{-2xe^{-2x}}{1+e^{-2x}}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

c. Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-2xe^{-2x}}{1+e^{-2x}} = 0$, puis en déduire qu la droite (D) d'équation : $y = x$ est une asymptote à courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

2 Montrer que la courbe (C) est au-dessous de (D) sur l'intervalle $[0;+\infty[$

3 a. Montrer que : $f'(x) = \frac{e^{4x}-1+4xe^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$ pour tout x de $\mathbb{R}$, et vérifier que : $f'(0) = 0$;

b. Montrer que : $e^{4x}-1 \geq 0$ pour tout x de $[0;+\infty[$ et en déduire que $e^{4x}-1+4xe^{2x} \geq 0$ pour tout x de $[0;+\infty[$;

c. Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

4 Tracer dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, la courbe (C). (On admet que la courbe (C) a deux points d'inflexion à ne pas déterminer).

Exercice 43

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = -2\sqrt{e^x-1} + e^x$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1 Montrer que l'ensemble de définition de f est : $D = [0;+\infty[$.

2 Calculer $f(0)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3 Étudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu.

4 Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

5 Déterminer la branche infinie de la courbe (C).

6 Tracer la courbe (C).

7 Soit g la restriction de f à l'intervalle $[\ln 2;+\infty[$

a. Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie

ProfSalmi.blogspot.com

sur un intervalle J que l'on déterminera et calculer $g(\ln 5)$;

b. Montrer que la fonction g^{-1} est dérivable en 1 et calculer $(g^{-1})'(1)$;

c. Tracer la courbe de la fonction g^{-1} dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

d. Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout x de J.

8 Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = \ln 2 \\ (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = g^{-1}(u_n) \end{cases}$

a. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n < 2$;

b. Montrer que (u_n) est strictement croissante et en déduire qu'elle est convergente.

Exercice 44

I) Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x + 1}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$:

1 a. Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \frac{1}{e^{-x} + 1} = 1 - \frac{1}{e^x + 1}$.

b. En déduire que f est une fonction impaire.

2 Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

3 a. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2$;

b. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^+$;

c. En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) ; 1 - \frac{2}{e^x + 1} \leq \frac{1}{2}x$.

4 montrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - \left(1 - \frac{1}{2}x\right)\right] = 0$

5 Tracer dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, la droite (D) d'équation : $y = -\frac{1}{2}x + 1$ et la courbe (C).

II) Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$u_0 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = 1 - \frac{2}{e^{u_n} + 1}$

1 Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 0$

2 a. Vérifier en utilisant la question I) 3) c) que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$

b. En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

3 Montrer que : $u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$, puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 45

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{3e^x-1}{e^x+1}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Partie 1 :

1 a. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; f(x)+f(-x)=2$ et en déduire que la courbe (C_f) admet un centre de symétrie que l'on déterminera;

b. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et interpréter géométriquement les deux résultats obtenus.

c. Dresser le tableau de variations de f .

2 a. Donner une quation de la tangente (T) à la courbe de f au point d'abscisse 0;

b. On pose pour tout x de $\mathbb{R}$: $g(x)=f(x)-(x+1)$

Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; g'(x)=-\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$; calculer $g(0)$ et en déduire le signe de g :

c. En déduire la position relative de (C_f) et la tangente (T).

3 Tracer la tangente (T) et la courbe (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Partie 2 :

1 a. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; f(x)=x \iff g(x)=-1$;

b. En déduire que la droite (D) d'équation : $y=x$ coupe la courbe (C_f) en un point d'abscisse α comprise entre 2 et 3.

2 a. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; f(x)=-1+\dfrac{4e^x}{e^x+1}$;

b. En déduire une fonction primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Partie 3 :

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0=3 \\ u_{n+1}=f(u_n);\ n\in\mathbb{N} \end{cases}$

1 Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; 1 \le u_n \le 3$

2 Montrer que la suite (u_n) est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

3 Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\alpha$

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 46

I) Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^{-x} + x - 1$.

1 Calculer $g'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et en déduire que g est croissante sur $[0;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty;0]$.

2 Montrer que : $g(x) \geq 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$, (remarquer que : $g(0) = 0$) et en déduire que $e^{-x} + x \geq 1$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

II) Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = \dfrac{x}{x + e^{-x}}$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$:

1 Montrer que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$ (on peut utiliser le résultat de la question I) 2))

2 a. Montrer que : $f(x) = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{xe^{x}}}$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$;

b. Montrer que : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ et interpréter géométriquement ces deux résultats.

3 a. Montrer que : $f'(x) = \dfrac{(x+1)e^{-x}}{(x + e^{-x})^2}$ pour tout x de $\mathbb{R}$;

b. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.

4 a. Donner une équation de la tangente à (C) au point O;

b. Vérifier que : $x - f(x) = \dfrac{xg(x)}{g(x)+1}$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et étudier le signe de $x - f(x)$ sur $\mathbb{R}$;

c. En déduire la position relative de (C) et la droite (Δ) d'équation : $y = x$.

5 Tracer (Δ) et (C) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ (on prend : $\dfrac{1}{1-e} \simeq -0,6$)

III) On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1 Montrer par récurrence que: $0 \leq u_n \leq 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

2 Montrer que la suite (u_n) est décroissante (On peut utiliser la question II) 4) b))

3 En déduire que la suite (u_n) est convergente puis calculer sa limite.

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 47

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\begin{cases} f(x) = xe^{-\frac{1}{x}} - x + \frac{1}{2}; x > 0 \\ f(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Partie 1 :

1 a. Vérifier que la fonction f est continue à droite en 0;

b. Étudier la dérivabilité f à droite en 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu.

2 a. Calculer: $\lim\limits_{x \to +\infty} (xe^{-\frac{1}{x}} - x)$

b. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}) ; e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} - 1 < 0$;

c. Dresser le tableau de variations de f.

3 a. Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera;

b. Donner le tableau de variations de f^{-1};

c. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}^+$ et que : $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

4 a. Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}) ; f'(x) - 1 < 0$;

b. Montrer que l'équation : $f(x) = x$ admet une unique solution β dans $\mathbb{R}^{*+}$ et que : $0 < \beta < \frac{1}{2}$.

5 Tracer dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (C) et la courbe de f^{-1}.

Partie 2 :

1 Soit n de $\mathbb{N}^*$,

Montrer que l'équation : $f(x) = \frac{1}{2n}$ admet une unique solution x_n dans $\mathbb{R}^+$

2 Quelle est la valeur de x_1 ?

3 Déterminer la monotonie de la suite $(x_n)_{n \geq 1}$.

Exercice 48

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$f(x) = \sqrt{xe^{-x} + x}$

ProfSalmi.blogspot.com

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Partie 1 :

1 a. Vérifier que l'ensemble de définition de la fonction f est $D=[0;+\infty[$

b. Montrer que la fonction f est continue sur l'intervalle $[0;+\infty[$;

c. Étudier la dérivabilité de f à droite en $x_0=0$ et interpréter géométriquement le résultat obtenu.

2 Montrer que : $(\forall x\in]0;+\infty[)\ ;\ e^{-x}-xe^{-x}+1>0$

3 Dresser le tableau de variations de f.

4 a. Étudier la branche infinie de (C) au voisinage de $+\infty$.

Partie 2 :

1 a. Montrer que l'équation : $e^{-x}+1=x$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}^+$ et que : $1<\alpha<2$;

b. Vérifier que : $(\forall x\in[0;\alpha[)\ ;\ e^{-x}+1>x$.

2 a. Résoudre l'équation : $f(x)=x$ dans l'intervalle $[0;+\infty[$;

b. En déduire que : $(\forall x\in]0;\alpha[)\ ;\ f(x)>x$.

3 Montrer que : $f'(\alpha)=1-\frac{1}{2}\alpha$

4 Tracer la courbe (C) (on admet que : $\alpha\simeq 1,25$)

Partie 3 :

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$u_0=\sqrt{\alpha}$ et $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_{n+1}=f(u_n)$

1 Vérifier que : $\sqrt{\alpha}\in]1;\alpha[$.

2 Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ 1<u_n<\alpha$

3 Déterminer la monotonie de (u_n).

4 En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Solutions

Exercice 32

1 a. **Calculons:** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

▸ **Calculons:** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

Soit x de $\mathbb{R}^*$, on a : $f(x)=e^{2x}+2e^{x}-4x-3$

$$=x\left(\frac{e^{2x}}{x}+2\frac{e^{x}}{x}-4\right)-3$$

ProfSalmi.blogspot.com

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}\times e^x=+\infty$

(car : $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ et $e^{2x}=(e^x)^2$); alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x}+2\frac{e^x}{x}-4=+\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\frac{e^{2x}}{x}+2\frac{e^x}{x}-4\right)-3=+\infty$ d'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

▸ **Calculons :** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

Soit $x>0$ on a : $\frac{f(x)}{x}=\frac{e^{2x}}{x}+2\frac{e^x}{x}-4-\frac{3}{x}$

et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x}+2\frac{e^x}{x}-4=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{3}{x}=0$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x}+2\frac{e^x}{x}-4-\frac{3}{x}=+\infty$ d'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$

▸ **Interprétation géométrique:**

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$, donc la courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

b. ▸ **Calculons :** $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{2x}=\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x)^2=0$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{2x}+2e^x=0$

Et on a : $\lim\limits_{x\to-\infty}-4x-3=+\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{2x}+2e^x-4x-3=+\infty$

D'où : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

▸ **Calculons :** $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)-(-4x-3)$

On a : $f(x)-(-4x-3)=e^{2x}+2e^x$ pour tout x de $\mathbb{R}$,

et $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{2x}+2e^x=0$ donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)-(-4x-3)=0$

▸ **Conclusion :**

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)-(-4x-3)=0$

Donc la droite d'équation $y=-4x-3$ est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $-\infty$.

2 a. **Montrons que :** $(\forall x\in\mathbb{R})\,;f'(x)=2(e^x-1)(e^x+2)$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$,

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $f'(x)=(e^{2x}+2e^x-4x-3)'$

$=2e^{2x}+2e^x-4=2(e^{2x}+e^x-2)$

et on a : $(e^x-1)(e^x+2)=e^{2x}+2e^x-e^x-2=e^{2x}+e^x-2$

ProfSalmi.blogspot.com

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; f'(x) = 2(e^x - 1)(e^x + 2)$

b. Étudions le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$,

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $f'(x) = 2(e^x - 1)(e^x + 2)$ et $e^x + 2 > 0$

Donc le signe de $f'(x)$ est celui de $e^x - 1$ c'est-à-dire le signe de x sur $\mathbb{R}$.

(car $e^x - 1 \geq 0 \iff x \geq 0$)

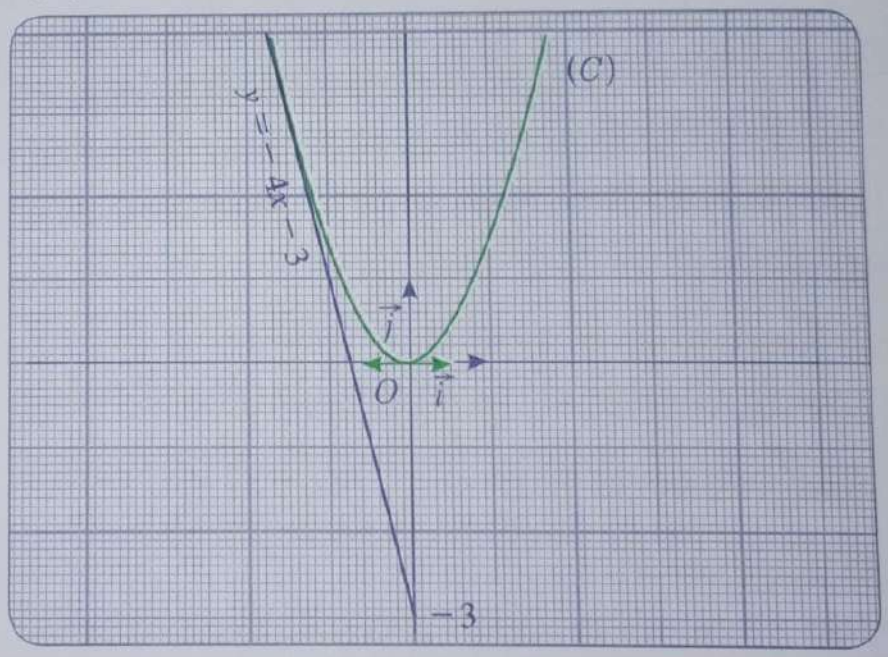
d'où le tableau de signe de $f'(x)$ est le suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

▸ Tableau de variations de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

3 **La courbe (C).**



Exercice 33

$$f(x) = (x + 1)e^{-x}$$

1 **a. Montrons que :** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $f(x) = (x + 1)e^{-x} = \dfrac{x}{e^x} + \dfrac{1}{e^x}$

Puisque : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$,

ProfSalmi.blogspot.com

Donc: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}+\frac{1}{e^x}=0$; c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

Interprétation géométrique:

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ donc la droite d'équation $y=0$ est une asymptote horizontale à (C) au voisinage de $+\infty$.

b. Montrons que : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ **et** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $f(x)=(x+1)e^{-x}$ et $\frac{f(x)}{x}=\left(\frac{x+1}{x}\right)e^{-x}$

Puisque: $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ et $e^x>0$ pourtout x de $\mathbb{R}$, alors: $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x}=+\infty$

Et on a : $\lim\limits_{x\to-\infty}x+1=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}1=1$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)e^{-x}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)e^{-x}=+\infty$

D'où : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$

Déduction :

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$, donc la courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$.

2 a. Montrons que : $(\forall x\in\mathbb{R})\,;f'(x)=-xe^{-x}$

Les fonctions : $u:x\longmapsto x+1$ et $v:x\longmapsto e^{-x}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$,

donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$,

et on a : $(\forall x\in\mathbb{R})\,;f'(x)=(u\times v)'(x)$

$$=u'(x)v(x)+v'(x)u(x)$$
$$=1e^{-x}-e^{-x}(x+1)$$
$$=(1-x-1)e^{-x}=-xe^{-x}$$

b. Tableau de variations de f :

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $f'(x)=-xe^{-x}$ et $e^{-x}>0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $-x$, c'est-à-dire :

- $f'(x)=0\Longleftrightarrow x=0$
- $f'(x)>0\Longleftrightarrow x\in\,]-\infty;0[$
- $f'(x)<0\Longleftrightarrow x\in\,]0;+\infty[$

Donc le tableau de variations de f est le suivant :

ProfSalmi.blogspot.com

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	↗	1	↘	0

3 a. Montrons que la courbe (C) admet un point d'inflexion :

La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

soit x de $\mathbb{R}$, on a : $f'(x) = -xe^{-x}$

donc : $f''(x) = -(e^{-x} - xe^{-x}) = (x-1)e^{-x}$

Puisque : $e^{-x} > 0$ alors le signe de $f''(x)$ est celui de $x-1$ sur $\mathbb{R}$.

Donc le tableau de signe de $f''(x)$ est :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

On a $f''(x)$ s'annule en changeant de signe en 1 et $f(1) = \frac{2}{e}$, donc le point $A\left(1;\frac{2}{e}\right)$ est un point d'inflexion de la courbe (C).

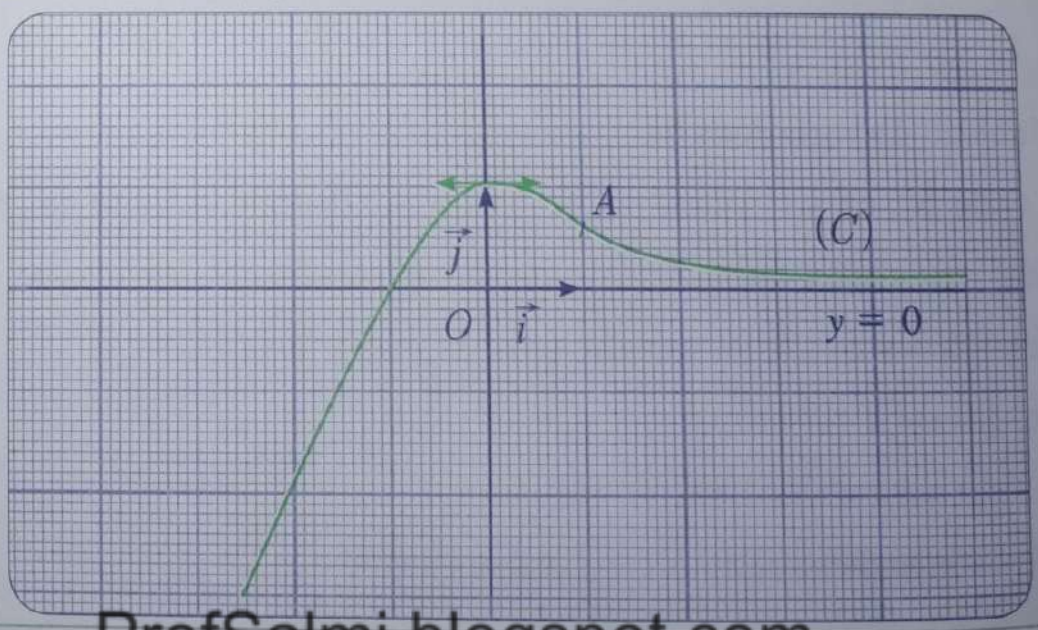
b. Déterminons une équation de la tangente (T) :

On a : $f(1) = \frac{2}{e}$ et $f'(1) = -\frac{1}{e}$, donc une équation de (T) est :

$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$
$$= -\frac{1}{e}(x-1) + \frac{2}{e} = -\frac{x}{e} + \frac{3}{e}$$

D'où : $(T): y = -\frac{x}{e} + \frac{3}{e}$

c. Construction de (C) :



ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 34

$f(x)\sqrt{1-e^x}$

1 Montrons que : $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$

Soit x de $]-\infty;0[$, on a : $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{\sqrt{1-e^x}}{x}=-\sqrt{\dfrac{1-e^x}{x^2}}$

Et on a : $\dfrac{1-e^x}{x^2}=\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)\left(\dfrac{-1}{x}\right)$

Puisque : $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-1}{x}=+\infty$,

alors : $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1-e^x}{x^2}=+\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to 0^-}\sqrt{\dfrac{1-e^x}{x^2}}=+\infty$

c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(-\sqrt{\dfrac{1-e^x}{x^2}}\right)=-\infty$ d'où : $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$

Interprétation géométrique :

On a : $f(0)=0$ et $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$

Donc la fonction f n'est pas dérivable à gauche de 0, et que la courbe (C) de f admet une demi-tangente en O d'équation : $\begin{cases}x=0\\y\geq 0\end{cases}$

2 Montrons que : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}1-e^x=1$

c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1-e^x}=1$. D'où : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$

Nature de la branche infinie :

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$ donc la droite d'équation : $y=1$ est une asymptote horizontale à (C) au voisinage de $-\infty$.

3 Calculons $f'(x)$ pour tout x de $]-\infty;0[$:

On a : la fonction $x\longmapsto 1-e^x$ est dérivable sur $]-\infty;0[$ et $1-e^x>0$ pour tout x de $]-\infty;0[$ donc, la fonction f est dérivable sur $]-\infty;0[$ et on a :

$$(\forall x\in]-\infty;0[)\ ;f'(x)=\frac{(1-e^x)'}{2\sqrt{1-e^x}}=\frac{-e^x}{2\sqrt{1-e^x}}$$

Tableau de variations de f :

Soit x de $]-\infty;0[$, on a : $-e^x<0$ et $2\sqrt{1-e^x}>0$ donc : $f'(x)<0$

D'où : $(\forall x<0)\ ;f'(x)<0$

ProfSalmi.blogspot.com

Le tableau de variations de f est le suivant :

x	$-\infty$		0
$f'(x)$		$-$	$-\infty$ ‖
f	1	↘	0

4 ▸ **Montrons que : f admet une fonction réciproque**

La fonction f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty;0]$ donc f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $f(]-\infty;0])$ telle que :

$f(]-\infty;0]) = [f(0);\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)[= [0;1[$

▸ **Montrons que : $f^{-1}(x) = \ln(1-x^2)$ pour tout x de $[0;1[$**

Soit x de $[0;1[$ et y de $]-\infty;0]$ tels que : $f^{-1}(x) = y$

On a : $f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x$

$\iff \sqrt{1-e^y} = x$

$\iff 1-e^y = x^2$

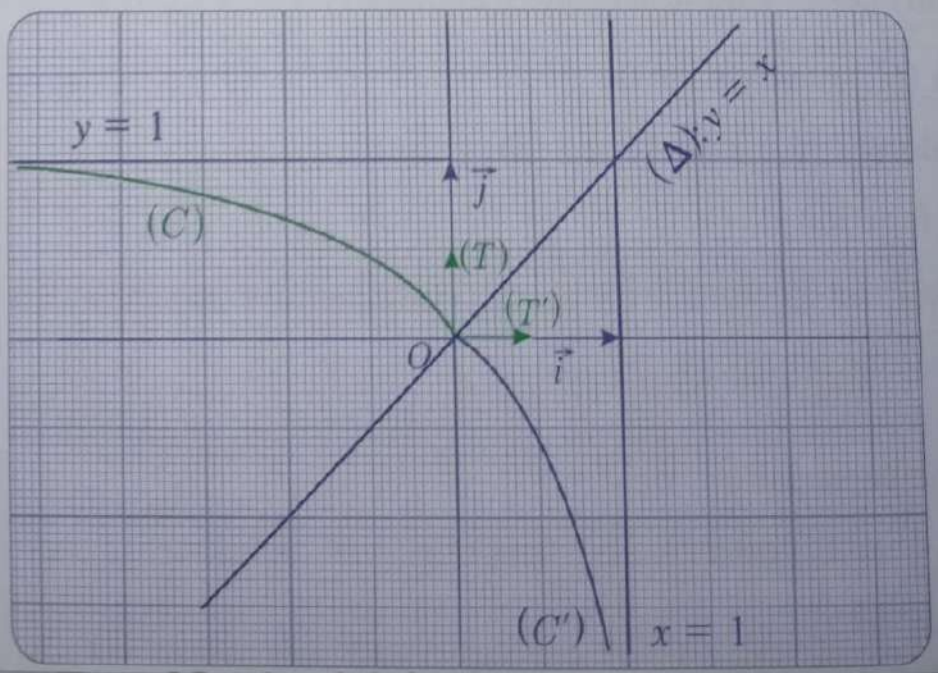
$\iff e^y = 1-x^2$

$\iff y = \ln(1-x^2)$

Donc : $(\forall x \in [0;1[) ; f^{-1}(x) = \ln(1-x^2)$

5 Construction de (C) et (C'):

La courbe (C') est le symétrique de la courbe (C) par rapport à la première bissectrice dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.



ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 35

$f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$

1 a. Calculons: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

Soit x de $]0;+\infty[$, on a : $f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}=\dfrac{e^x}{e^x\left(\frac{1}{e^x}+1\right)}=\dfrac{1}{\frac{1}{e^x}+1}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{1}{e^x}=1$

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+\frac{1}{e^x}}=1$, c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

Et on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 1+e^x=1$ donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{1+e^x}=0$

c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

b. Interprétation géométrique :

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ donc, la droite d'équation $y=1$ est une asymptote horizontale à (C) au voisinage de $+\infty$.

Et on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ donc, la droite d'équation $y=0$ est une asymptote horizontale à (C) au voisinage de $-\infty$.

2 a. Montrons que : $(\forall x\in\mathbb{R})\,;f'(x)=\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$

Les fonctions $x\mapsto e^x$ et $x\mapsto 1+e^x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $f'(x)=\dfrac{e^x(1+e^x)-e^x\times e^x}{(1+e^x)^2}$

$$=\frac{(1+e^x-e^x)e^x}{(1+e^x)^2}=\frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

Donc : $(\forall x\in\mathbb{R})\,;f'(x)=\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$

b. Tableau de variations de f

On a : $e^x>0$ et $(e^x+1)^2>0$ pour tout x de $\mathbb{R}$, donc : $f'(x)>0$ pour tout x de $\mathbb{R}$, d'où f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

D'où le tableau de variations de f est le suivant :

ProfSalmi.blogspot.com

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
f	0	1

3 a. Montrons que le point $I\left(0;\frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de (C):

c'est-à-dire : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; -x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = 1 - f(x)$

- pour tout x de $\mathbb{R}$ on a : $-x \in \mathbb{R}$

- Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $f(-x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}(e^{x}+1)} = \frac{1}{e^{x}+1}$

Donc : $f(-x)+f(x) = \frac{1}{e^{x}+1} + \frac{e^{x}}{1+e^{x}} = \frac{e^{x}+1}{e^{x}+1} = 1$

c'est-à-dire : $f(-x) = 1 - f(x)$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; -x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = 1 - f(x)$

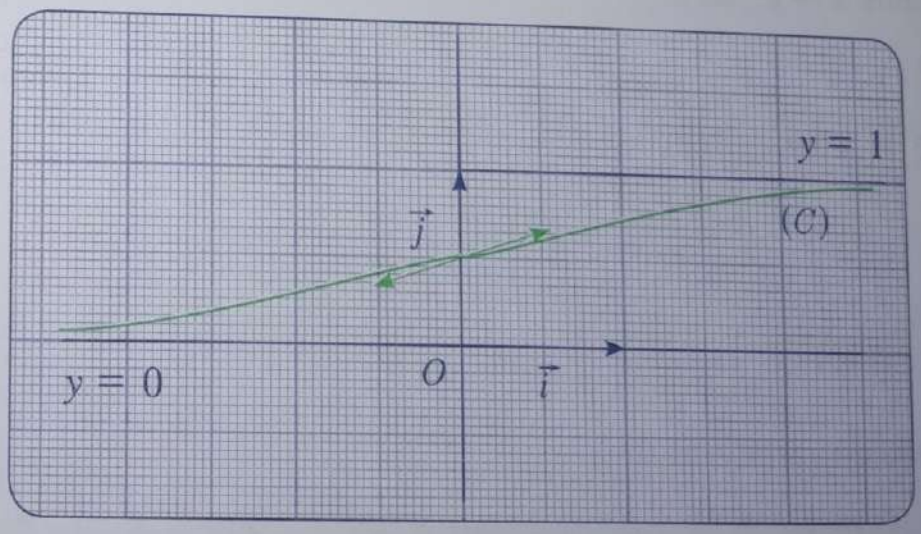
D'où le point $I\left(0;\frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de la courbe (C).

b. Déterminons une équation de la tangente (T) au point I :

On a : $f(0) = \frac{1}{2}$ et $f'(0) = \frac{1}{4}$ donc une équation de la tangente (T) à (C) au point I est : $y = f'(0)(x-0) + f(0) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$

Donc : $(T): y = \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$

c. La construction de (C)



4 a. Montrons que f admet une fonction réciproque f^{-1}

La fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$; donc f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle $f(\mathbb{R})$ telle que :

ProfSalmi.blogspot.com

$f(\mathbb{R}) = f(]-\infty;+\infty[) =]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x); \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[=]0;1[$

b) Montrons que $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$ **pour tout** x **de** $]0;1[$ **:**

Soit x de $]0;1[$ et y de $\mathbb{R}$ tels que : $f^{-1}(x) = y$

On a : $f^{-1}(x) = y \iff x = f(y)$

$$\iff x = \frac{e^y}{e^y+1} = \frac{e^y+1-1}{e^y+1}$$

$$\iff x = 1 - \frac{1}{e^y+1}$$

$$\iff \frac{1}{e^y+1} = 1 - x$$

$$\iff e^y + 1 = \frac{1}{1-x}$$

$$\iff e^y = \frac{1}{1-x} - 1$$

$$\iff y = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

Donc : $(\forall x \in]0;1[) ; f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$

Exercice 36

$$f(x) = x^2 - 2xe^x + 2e^x$$

1 a. **Calculons:** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 - 2xe^x + 2e^x = +\infty$ c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

Calculons: $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$

Soit x de $]-\infty;0[$, on a : $\frac{f(x)}{x} = \frac{x^2 - 2xe^x + 2e^x}{x} = x - 2e^x + 2\frac{e^x}{x}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ alors : $\lim\limits_{x\to-\infty} -2e^x + 2\frac{e^x}{x} = 0$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} x - 2e^x + 2\frac{e^x}{x} = -\infty$, d'où : $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

Interprétation géométrique :

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ donc la courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage $-\infty$.

2 a. **Vérifions que :** $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; f(x) = x^2\left(1 + 2(1-x)\frac{e^x}{x^2}\right)$

ProfSalmi.blogspot.com

Soit x de $\mathbb{R}^*$, on a : $f(x) = x^2 - 2xe^x + 2e^x$

$= x^2 + 2(1-x)e^x = x^2\left(1 + 2(1-x)\frac{e^x}{x^2}\right)$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)\ ; f(x) = x^2\left(1 + 2(1-x)\frac{e^x}{x^2}\right)$

b. Calculons: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$:

Soit x de $\mathbb{R}^*$ ona: $f(x) = x^2\left(1 + 2(1-x)\frac{e^x}{x^2}\right)$ donc: $\frac{f(x)}{x} = x\left(1 + 2(1-x)\frac{e^x}{x^2}\right)$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x) = -\infty$,

alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + 2(1-x)\frac{e^x}{x^2} = -\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(1 + 2(1-x)\frac{e^x}{x^2}\right) = -\infty$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1 + 2(1-x)\frac{e^x}{x^2}\right) = -\infty$

c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

▸ **Interprétation géométrique :**

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$, donc la courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

3 a. Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; f'(x) = -2x(e^x - 1)$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\begin{aligned}(\forall x \in \mathbb{R})\ ; f'(x) &= (x^2 - 2xe^x + 2e^x)' \\ &= 2x - 2(xe^x + e^x) + 2e^x \\ &= 2x - 2xe^x - 2e^x + 2e^x \\ &= 2x - 2xe^x = -2x(e^x - 1)\end{aligned}$$

b. Tableau de variations de f

Soit x de $\mathbb{R}$ on a : $f'(x) = -2x(e^x - 1)$.

Puisque le signe de $e^x - 1$ est celui de x, alors le signe de $f'(x)$ celui de $-2x^2$ sur $\mathbb{R}$ donc : $f'(x) \leq 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

Tableau de variations de f est le suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	-	
f	$+\infty$	↘		↘	$-\infty$

ProfSalmi.blogspot.com

4a. **Montrons que l'équation:** $f(x)=0$ **admet une solution unique** α **dans** $\mathbb{R}$

On a les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto e^x$ sont continue sur $\mathbb{R}$.

Donc la fonction $f: x \mapsto x^2 - 2xe^x + 2e^x$ est continues sur $\mathbb{R}$.

Donc la fonction f est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

D'où : $f(\mathbb{R}) = f(]-\infty;+\infty[) =]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x); \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)[=]-\infty;+\infty[= \mathbb{R}$.

Puisque : $0 \in \mathbb{R}$ alors il existe un unique réel α tel que : $f(\alpha)=0$.

Donc l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$.

Montrons que : $1 < \alpha < \frac{3}{2}$

On a : $f(1)=1$ et $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} - 3e^{\frac{3}{2}} + 2e^{\frac{3}{2}} = \frac{9}{4} - e^{\frac{3}{2}}$

c'est-à-dire : $f\left(\frac{3}{2}\right) \simeq -2,23$

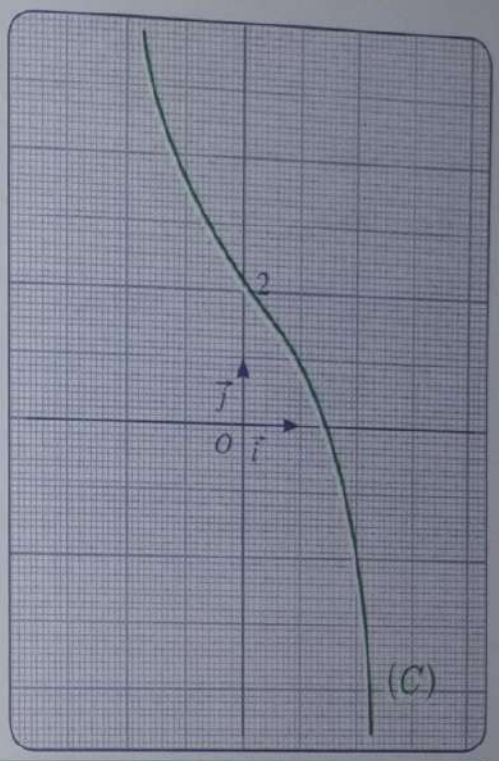
donc : $f\left(\frac{3}{2}\right) < 0$

d'où : $f\left(\frac{3}{2}\right) < 0 < f(1)$

c'est-à-dire : $f\left(\frac{3}{2}\right) < f(\alpha) < f(1)$

Puisque f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$:

alors : $1 < \alpha < \frac{3}{2}$



b. **Construction de** (C)

Exercice 37

$$f(x) = \frac{2e^{2x} - 2}{2e^{2x} - 5e^x + 2}$$

1 **Déterminons** D :

On a : $x \in D \iff x \in \mathbb{R}$ et $2e^{2x} - 5e^x + 2 \neq 0$.

On pose $t = e^x$ avec $t > 0$; l'équation : $2e^{2x} - 5e^x + 2 = 0$ devient : $2t^2 - 5t + 2 = 0$.

Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'équation : $2t^2 - 5t + 2 = 0$.

Le discriminant de cette équation est : $\Delta = 9$, et ses solutions sont : $t_1 = \frac{1}{2}$ et $t_2 = 2$

ProfSalmi.blogspot.com

Donc : $x \in D \Longleftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $e^x \neq 2$ et $e^x \neq \frac{1}{2}$

$\Longleftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $x \neq \ln(2)$ et $x \neq \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

Donc : $D =]-\infty; \ln\left(\frac{1}{2}\right)[\cup]\ln\left(\frac{1}{2}\right); \ln(2)[\cup]\ln(2); +\infty[$

Étudions la parité de f :

Soit x de D, on a : $-x \in D$

et $f(-x) = \dfrac{2e^{-2x} - 2}{2e^{-2x} - 5e^{-x} + 2} = \dfrac{\frac{2}{e^{2x}} - 2}{\frac{2}{e^{2x}} - \frac{5}{e^x} + 2} = \dfrac{2 - 2e^{2x}}{2e^{2x} - 5e^x + 2} = -f(x)$

Donc f est une fonction impaire.

2 Étudions les variations de f

Puisque f est une fonction impaire, alors il suffit de l'étudier sur l'ensemble:

$D_E = \mathbb{R}^+ \cap D = [0; \ln(2)[\cup]\ln(2); +\infty[$

- Calcul des limites

Calculons: $\lim\limits_{x \to \ln(2)^-} f(x)$

Soit x de $]0; \ln(2)[$, on pose : $t = e^x$, on a : $x \longrightarrow (\ln 2)^- \Longrightarrow t \longrightarrow 2^-$

t	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$2t^2 - 5t + 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $\lim\limits_{x \to (\ln 2)^-} f(x) = \lim\limits_{t \to 2^-} \dfrac{2t^2 - 2}{2t^2 - 5t + 2} = \lim\limits_{t \to 2^-} \dfrac{2t^2 - 2}{(2t-1)(t-2)} = -\infty$.

Calculons : $\lim\limits_{x \to \ln(2)^+} f(x)$ **:**

Soit x de $]\ln(2); +\infty[$, on pose : $t = e^x$, on a : $x \longrightarrow (\ln 2)^+ \Longrightarrow t \longrightarrow 2^+$

Donc : $\lim\limits_{x \to (\ln 2)^+} f(x) = \lim\limits_{t \to 2^+} \dfrac{2t^2 - 2}{(2t-1)(t-2)} = +\infty$.

Calculons : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

Soit x de $]\ln(2); +\infty[$, on pose : $t = e^x$, on a : $t \to +\infty \Longleftrightarrow x \to +\infty$

Donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{2t^2 - 2}{2t^2 - 5t + 2} = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{2t^2}{2t^2} = \lim\limits_{t \to +\infty} 1 = 1$.

Calculons : $f'(x)$

La fonction f est dérivable en tout point de son ensemble de définition car c'est le quotient de deux fonctions dérivables.

ProfSalmi.blogspot.com

Soit x de D, on a :

$$f'(x)=\frac{4e^{2x}(2e^{2x}-5e^{x}+2)-(2e^{2x}-2)(4e^{2x}-5e^{x})}{(2e^{2x}-5e^{x}+2)^2}$$
$$=\frac{8e^{4x}-20e^{3x}+8e^{2x}-8e^{4x}+10e^{3x}+8e^{2x}-10e^{x}}{(2e^{2x}-5e^{x}+2)^2}$$
$$=\frac{-10e^{3x}+16e^{2x}-10e^{x}}{(2e^{2x}-5e^{x}+2)^2}$$
$$=\frac{2e^{x}(-5e^{2x}+8e^{x}-5)}{(2e^{2x}-5e^{x}+2)^2}$$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $-5e^{2x}+8e^{x}-5$.

On pose $X=e^{x}$, et on obtient: $-5e^{2x}+8e^{x}-5=-5X^2+8X-5$

Le discriminant de l'équation : $-5X^2+8X-5=0$ est négatif et $-5<0$ donc: $-5X^2+8X-5<0$

D'où: $(\forall x\in D)\,;-5e^{2x}+8e^{x}-5<0$.

Donc f est strictement décroissante sur chacun des intervalles de D.

▸ **Tableau de variations de f**

f est une fonction impaire donc elle conserve la monotonie et inverse les limites:

x	$-\infty$	$\ln\left(\frac{1}{2}\right)$	$\ln(2)$	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	-	
f	-1 ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ 1	

3 a. Equation de la tangente au point d'abscisse 0 :

On a : $f(0)=0$ et $f'(0)=-4$, donc l'équation de la tangente est : $y=-4x$.

b. On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$ donc la droite d'équation $y=1$ est une asymptote horizontale à (C) au voisinage de $+\infty$.

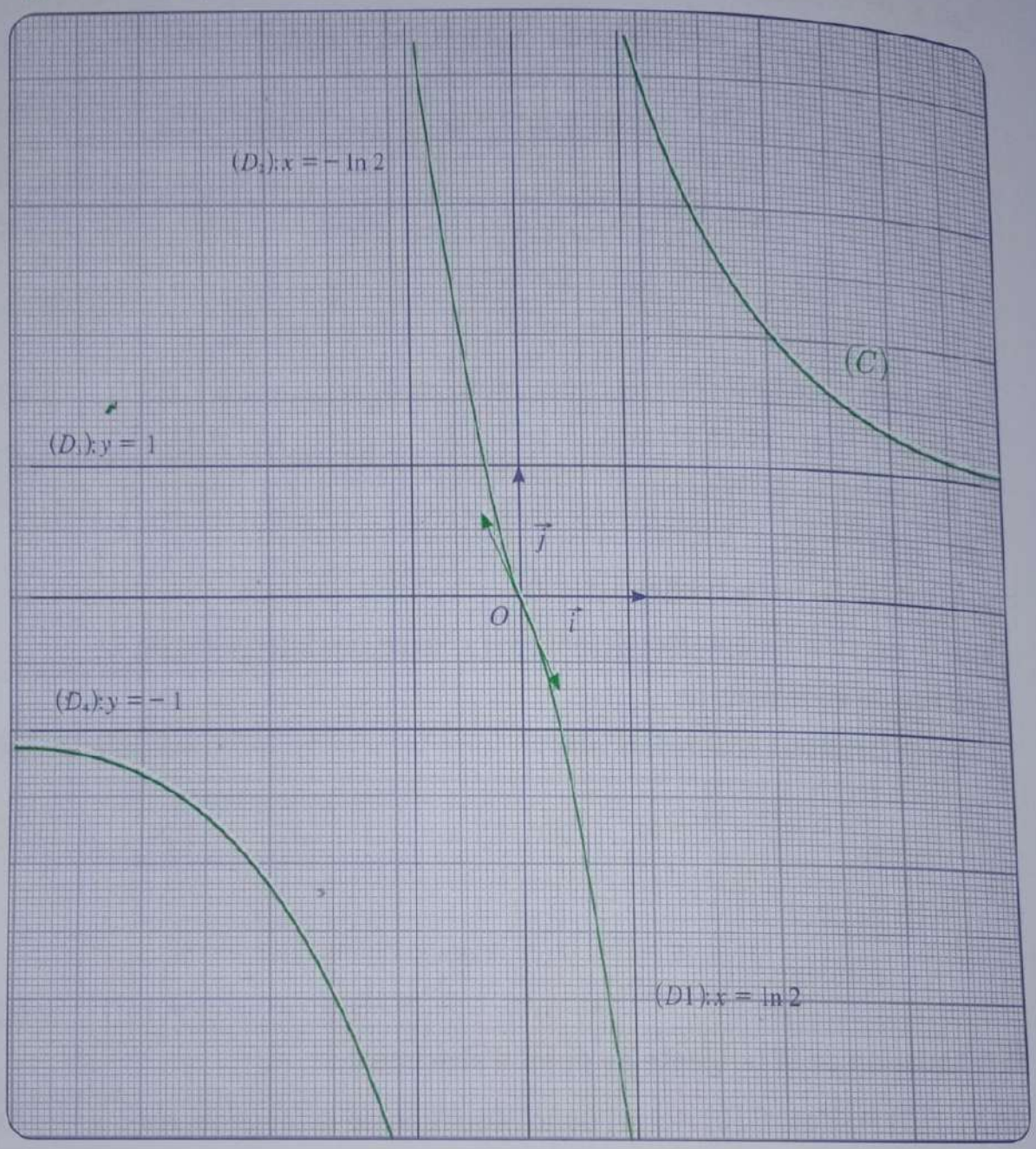
▸ On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-1$ donc la droite d'équation $y=-1$ est une asymptote horizontale à (C) au voisinage de $-\infty$.

▸ On a : $\lim\limits_{x\to(\ln 2)^{+}}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to(\ln 2)^{-}}f(x)=-\infty$ donc (C) admet une asymptote verticale d'équation : $x=\ln(2)$

▸ On a : $\lim\limits_{x\to\left(\ln\frac{1}{2}\right)^{+}}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to\left(\ln\frac{1}{2}\right)^{-}}f(x)=-\infty$ donc (C) admet une asymptote verticale $x=\ln\left(\frac{1}{2}\right)$

ProfSalmi.blogspot.com

c. La courbe (C)



Exercice 38

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)e^x$$

1 a. ▸ **Calculons :** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

On a: $\lim\limits_{x \to -\infty}\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

▸ **Calculons :** $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$

On a : $\lim\limits_{x \to 0^-}\left(1 - \frac{1}{x}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} e^x = 1$ donc : $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$

▸ **Calculons :** $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$

On a: $\lim\limits_{x \to 0^+}\left(1 - \frac{1}{x}\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} e^x = 1$ donc : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

ProfSalmi.blogspot.com

▸ **Calculons:** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

b. Étudions les branches infinies de (C)

▸ On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ donc la courbe (C) admet une asymptote horizontale d'équation : $y=0$ au voisinage de $-\infty$.

▸ On a : $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$ donc la courbe (C) admet une asymptote verticale d'équation: $x=0$.

▸ Au voisinage de $+\infty$: on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ donc (C) admet une branche infinie.

▸ **Calculons :** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

Soit x de $]0;+\infty[$ on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)\frac{e^x}{x}$

puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$

D'où la courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

2 a. Calculons $f'(x)$ **pour tout** x **de** $\mathbb{R}^*$

La fonction f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$

Soit x de $\mathbb{R}^*$, on a :

$$f'(x)=\frac{1}{x^2}e^x+\left(1-\frac{1}{x}\right)e^x=e^x.\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+1\right)=\left(\frac{x^2-x+1}{x^2}\right).e^x$$

b. Tableau de variations de f **:**

On a pour tout x de $\mathbb{R}$: $x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$, donc $f'(x)>0$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$	$+$		‖	$+$	
f	0	↗	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

c. Equation de la tangente (T) **:**

On a : $f(1)=0$ et $f'(1)=e$ donc une équation de (T) est :

$y=e(x-1)=ex-e$

ProfSalmi.blogspot.com

3 a. La fonction f est deux fois dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$.

Soit x de $\mathbb{R}^*$, on a :

$$\left(\frac{x^2-x+1}{x^2}\right)' = \frac{(2x-1)x^2-2x(x^2-x+1)}{x^4} = \frac{2x^3-x^2-2x^3+2x^2-2x}{x^4} = \frac{x-2}{x^3}$$

Donc :

$$f''(x) = \left(\frac{x-2}{x^3}\right)e^x + \left(\frac{x^2-x+1}{x^2}\right)e^x = e^x.\left(\frac{x-2+x^3-x^2+x}{x^3}\right) = \left(\frac{x^3-x^2+2x-2}{x^3}\right)e^x$$

$$= \left(\frac{x^2(x-1)+2(x-1)}{x^3}\right)e^x = \frac{(x-1)(x^2+2)}{x^3}e^x$$

b. **Étudions la concavité de** (C)

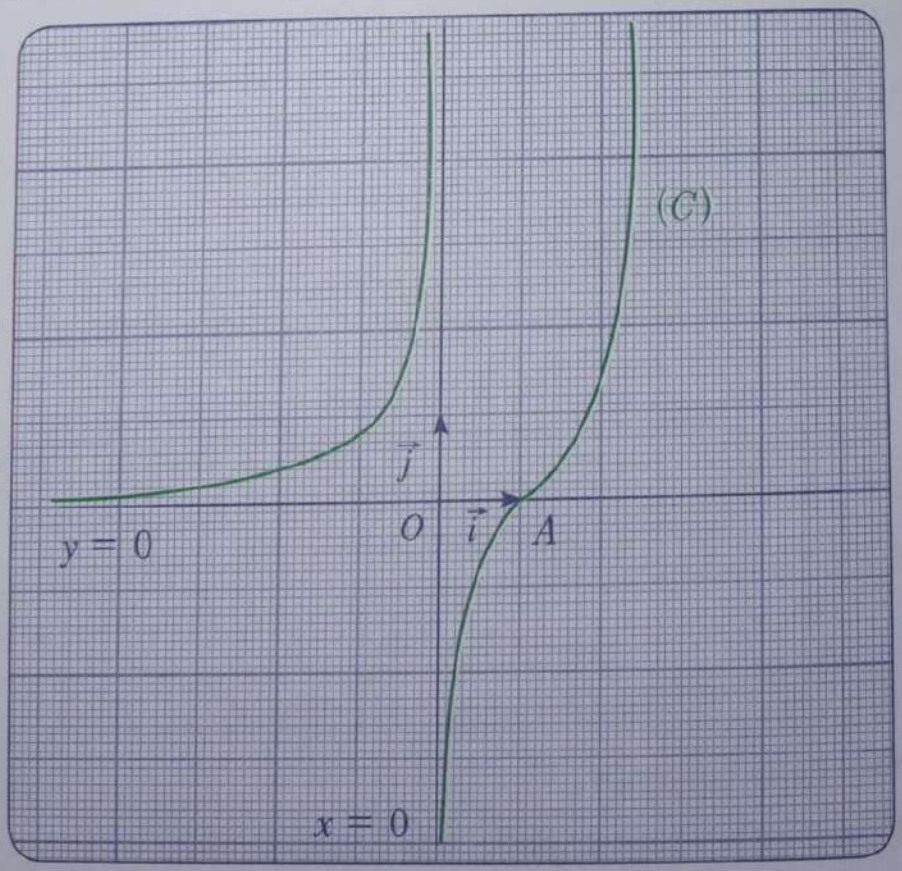
On remarque le signe de $f''(x)$ est celui de $x(x-1)$

Le tableau suivant résume la concavité de (C) :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f''(x)$	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$		
concavité de (C)	∪	$\|\|$	∩		∪		

Le point $A(1;0)$ est un point d'inflexion de (C).

4 **La courbe de la fonction** f.



ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 39

$$\begin{cases} f(x) = x^x \ ; \ x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1 Calculons : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{x \ln x}$

Soit $n > 0$, on pose : $X = x \ln x$, puisque : $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln x = +\infty$

alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x \ln x} = \lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty$, donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2 Étudions la continuité de la fonction f à droite en 0 :

- On a : $f(0) = 1$
- **Calculons :** $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{x \ln x}$

On pose : $X = x \ln x$, puisque : $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0$

alors : $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{x \ln x} = \lim\limits_{X \to 0} e^X = e^0 = 1$

Donc : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1 = f(0)$ d'où : f est continue à droite en 0.

3 a. Vérifions que : $(\forall x \in]0;1[) \ ; \ \dfrac{f(x)-1}{x} = \left(\dfrac{e^{x \ln x} - 1}{x \ln x}\right) \ln x$

Soit x de $]0;1[$, on a :

$$\frac{f(x)-1}{x} = \frac{e^{x \ln x} - 1}{x} = \left(\frac{e^{x \ln x} - 1}{x \ln x}\right) \times \left(\frac{x \ln x}{x}\right) = \left(\frac{e^{x \ln x} - 1}{x \ln x}\right) \times \ln x$$

b. Étudions la dérivabilité de f à droite en 0 :

Soit x de $]0;1[$.

On a : $f(0) = 1$ donc : $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{f(x)-1}{x} = \left(\dfrac{e^{x \ln x} - 1}{x \ln x}\right) \times \ln x$

- On a : $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$
- **Calculons :** $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{e^{x \ln x} - 1}{x \ln x}$

On pose : $X = x \ln x$, puisque : $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0$ alors :

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{e^{x \ln x} - 1}{x \ln x} = \lim\limits_{X \to 0} \dfrac{e^X - 1}{X} = 1$, Donc : $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\left(\dfrac{e^{x \ln x} - 1}{x \ln x}\right) \times \ln x\right) = -\infty$

D'où : $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\infty$

Par suite, f n'est pas dérivable à droite en 0.

Interprétation graphique: la courbe de f admet une demi-tangente verticale dirigée vers le bas au point $A(0;1)$.

ProfSalmi.blogspot.com

4 a) Montrons que : $(\forall x > 0)\ ;\ f'(x) = f(x)(1 + \ln x)$

Soit x de $]0;+\infty[$, on a : $f(x) = e^{x\ln x}$

- La fonction : $u : x \mapsto x\ln x$ est dérivable sur $]0;+\infty[$,

donc, la fonction : $f = e^u$ est dérivable sur $]0;+\infty[$,

et on a : $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$ et $u'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$

Donc : $(\forall x \in]0;+\infty[)\ ; f'(x) = (\ln x + 1)e^{x\ln x} = (1 + \ln x)f(x)$

b. Déduisons le tableau de variations de f :

On a : $(\forall x \in]0;+\infty[)\ ; f'(x) = (1 + \ln x)f(x)$

Puisque : $(\forall x \in]0;+\infty[)\ ; f(x) > 0$ alors, le signe de $f'(x)$ est celui de $1 + \ln x$

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \ln x = 0$
  $\Leftrightarrow \ln x = -1$
  $\Leftrightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$

- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 + \ln x > 0$
  $\Leftrightarrow \ln x > -1$
  $\Leftrightarrow x > \frac{1}{e}$

Donc le tableau de variations de f est le suivant :

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ 1	↘	$e^{-\frac{1}{e}}$	↗	$+\infty$

5 Déterminons la branche infinie de la courbe de f :

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, calculons : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

Soit x de $]0;+\infty[$, on a : $\frac{f(x)}{x} = \frac{e^{x\ln x}}{x} = \left(\frac{e^{x\ln x}}{x\ln x}\right) \times \ln x$

et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x\ln x}}{x\ln x} = +\infty$

(Poser : $X = x\ln x$ et utiliser la limite $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$).

Donc: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ d'où la courbe de f admet une branche parabolique de

ProfSalmi.blogspot.com

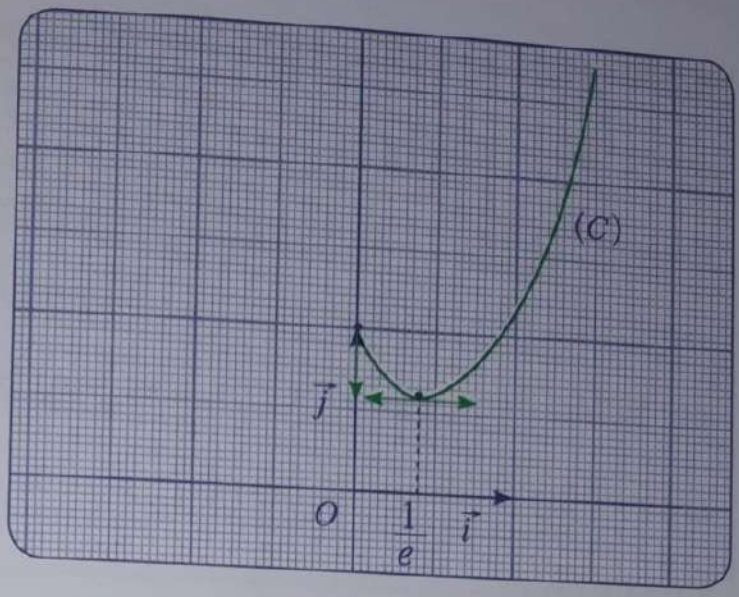
direction l'axe des ordonnées

au voisinage de $+\infty$

6 La courbe de la fonction f :

$\frac{1}{e} \simeq 0,4$

$e^{-\frac{1}{e}} \simeq 0,7$



Exercice 40

$$f(x) = 1 - (x-2)e^{-x}$$

1 Calculons $g'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$:

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\begin{aligned}(\forall x \in \mathbb{R})\ ; g'(x) &= (1-(x-2)e^{-x})' \\ &= -(e^{-x} - (x-2)e^{-x}) \\ &= (x-2)e^{-x} - e^{-x} = (x-3)e^{-x}\end{aligned}$$

Déduction :

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $g'(x) = (x-3)e^{-x}$ et $e^{-x} > 0$

donc le signe de $g'(x)$ est celui de $x-3$.

Donc, on a : $(\forall x \in]-\infty;3])\ ;\ g'(x) \leq 0$

donc g est décroissante sur l'intervalle $]-\infty;3]$

et on a : $(\forall x \in [3;+\infty[)\ ;\ g'(x) \geq 0$ donc g est croissante sur l'intervalle $[3;+\infty[$

2 Déduction :

On a : $g(3) = 1 - e^{-3}$, c'est-à-dire : $g(3) > 0$

Et on a : ▸ g est croissante sur $[3;+\infty[$, donc : $x \geq 3 \Longrightarrow g(x) \geq g(3)$

$\Longrightarrow g(x) > 0$

▸ g est décroissante sur $]-\infty;3]$, donc : $x \leq 3 \Longrightarrow g(x) \geq g(3)$

$\Longrightarrow g(x) > 0$

D'où : $g(x) > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

ProfSalmi.blogspot.com

II) 1 a. **Montrons que :** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=0$

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $f(x)=x+(x-1)e^{-x}=x+\frac{x}{e^x}-\frac{1}{e^x}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$

donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}-\frac{1}{e^x}=0$

par suite : $\lim\limits_{x\to+\infty} x+\frac{x}{e^x}-\frac{1}{e^x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}-\frac{1}{e^x}=0$

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=0$

▸ **Déduction :**

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=0$

Donc, la droite d'équation $y=x$ est une asymptote oblique à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

b. Montrons que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$:

Soit x de $\mathbb{R}^*$, on a : $f(x)=x+(x-1)e^{-x}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x}=+\infty$

(car : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ et $e^x>0$) alors : $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)e^{-x}=-\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} x+(x-1)e^{-x}=-\infty$ c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

et on a : $\frac{f(x)}{x}=\frac{x+(x-1)e^{-x}}{x}=1+\left(1-\frac{1}{x}\right)e^{-x}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to-\infty} 1-\frac{1}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$ alors : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)e^{-x}=+\infty$

donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} 1+\left(1-\frac{1}{x}\right)e^{-x}=+\infty$

D'où : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$.

▸ **Déduction :**

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ donc la courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$.

2 Étudions la position relative de (C) et la droite (Δ) :

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $f(x)=x+(x-1)e^{-x}$,

donc : $f(x)-x=(x-1)e^{-x}$

ProfSalmi.blogspot.com

La position relative de la courbe (C) et de la droite (Δ) dépend du signe de $f(x)-x$ c'est-à-dire de : $(x-1)e^{-x}$

Puisque : $e^{-x}>0$, alors le signe de $f(x)-x$ est celui de $x-1$

Et on a :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		-	0	+	

Le tableau suivant résume la position relative de (C) et (Δ) :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)-x$		-	0	+	
Position relative de (C) et (Δ)	(C) est au-dessous de (Δ)			(C) est au-dessus de (Δ)	

▸La courbe (C) et la droite (Δ) se coupent au point $A(1;1)$.

3 Montrons que : $f'(x)=g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, car: les fonctions: $x\longmapsto x-1$ et $x\longmapsto x$ et $x\longmapsto e^{-x}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

Soit x de $\mathbb{R}$, on a :

$$f'(x)=(x+(x-1)e^{-x})'$$
$$=1+e^{-x}-(x-1)e^{-x}=1-(x-1-1)e^{-x}=1-(x-2)e^{-x}$$

Donc : $(\forall x\in\mathbb{R})\,;f'(x)=g(x)$

▸Tableau de variations de f :

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $f'(x)=g(x)$ et $g(x)>0$ donc : $f'(x)>0$

D'où : $(\forall x\in\mathbb{R})\,;f'(x)>0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		+	
f	$-\infty$	↗	$+\infty$

4 a. ▸Montrons que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$

La fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc :

$f(\mathbb{R})=\left]\lim\limits_{x\to-\infty}f(x);\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right[=]-\infty;+\infty[$

Puisque : $0\in\mathbb{R}$, alors il existe un unique réel α, tel que : $f(\alpha)=0$

ProfSalmi.blogspot.com

c'est-à-dire l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$.

▸ **Montrons que :** $0<\alpha<\frac{1}{2}$

On a : $f(0)=-1$ et $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}\simeq 0,19$

c'est-à-dire : $f(0)=-1$ et $f\left(\frac{1}{2}\right)>0$

Donc : $f(0)<0<f\left(\frac{1}{2}\right)$ c'est-à-dire : $f(0)<f(\alpha)<f\left(\frac{1}{2}\right)$

Puisque f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors : $0<\alpha<\frac{1}{2}$

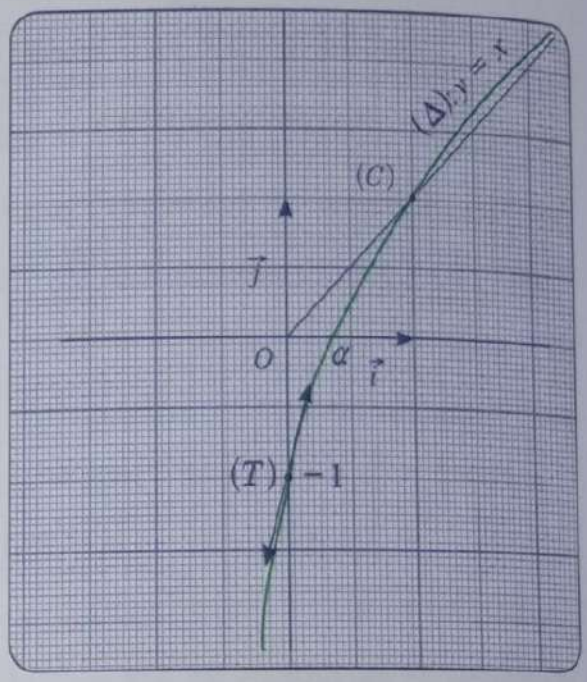
b. Équation de la tangente (T) :

On a : $f(0)=-1$ et $f'(0)=3$ donc l'équation de la tangente (T) est :

$y=3(x-0)-1$

c'est-à-dire : $(T): y=3x-1$.

5 La courbe :



Exercice 41

$$f(x)=\ln(1+2e^{x})$$

1 a. Montrons que : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $f(x)=\ln(1+2e^{x})$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}1+2e^{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\ln(X)=+\infty$

alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+2e^{x})=+\infty$. Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}=0$ donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}1+2e^{x}=1$, et puisque la fonction ln est continue en 1, alors : $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(1+2e^{x})=\ln(1)=0$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$.

ProfSalmi.blogspot.com

b. Vérifions que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) = x + \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{1}{2e^x}\right)$

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $1 + 2e^x = 2e^x\left(\frac{1}{2e^x} + 1\right)$

Donc : $f(x) = \ln\left(2e^x\left(1 + \frac{1}{2e^x}\right)\right)$

$= \ln(2) + \ln(e^x) + \ln\left(1 + \frac{1}{2e^x}\right)$

$= \ln(2) + x + \ln\left(1 + \frac{1}{2e^x}\right)$

D'où : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) = x + \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{1}{2e^x}\right)$

c. Étudions les branches infinies :

- On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ donc, la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$.
- Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $f(x) = x + \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{1}{2e^x}\right)$

c'est-à-dire : $f(x) - (x + \ln(2)) = \ln\left(1 + \frac{1}{2e^x}\right)$

Puisque : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$.

Donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \frac{1}{2e^x} = 1$ et la fonction ln est continue en 1.

alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2e^x}\right) = \ln(1) = 0$, c'est-à-dire : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (x + \ln(2)) = 0$

Par suite : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (x + \ln(2)) = 0$.

Donc, la droite d'équation $y = x + \ln 2$ est une asymptote oblique à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

2 a. Tableau de variations de f :

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = \frac{(1 + 2e^x)'}{1 + 2e^x} = \frac{2e^x}{1 + 2e^x}$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) > 0$ (car : $e^x > 0$)

D'où le tableau de variations de f est le suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	0	↗	$+\infty$

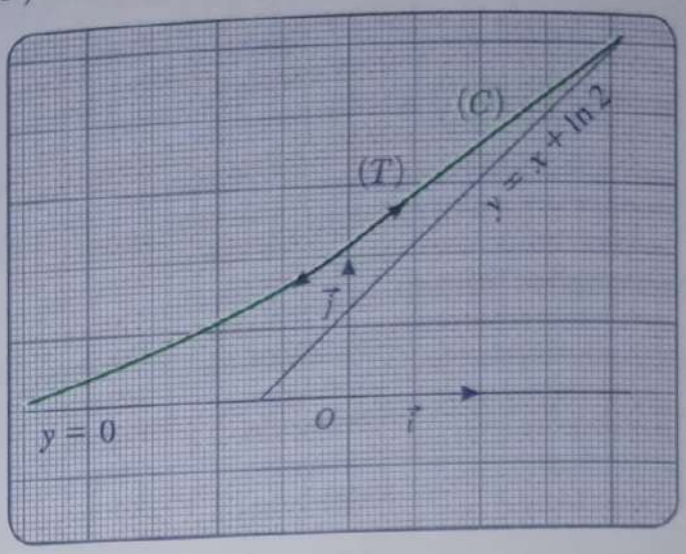
ProfSalmi.blogspot.com

b. Déterminons l'équation de la tangente (T).

On a : $f(0) = \ln(3)$ et $f'(0) = \frac{2}{3}$ donc l'équation de (T) est :

$y = f'(0)(x-0) + f(0) = \frac{2}{3}x + \ln(3)$

c. La courbe (C) :



3 a. Montrons que : $u_{n+1} - u_n > \ln(2)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

Soit n de $\mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} = f(u_n)$

et $f(u_n) = u_n + \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{1}{2e^{u_n}}\right)$ (d'après la question 1) b))

donc : $u_{n+1} = u_n + \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{1}{2e^{u_n}}\right)$

C'est-à-dire : $u_{n+1} - u_n = \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{1}{2e^{u_n}}\right)$

Puisque : $1 + \frac{1}{2e^{u_n}} > 1$ (car : $\frac{1}{2e^{u_n}} > 0$) et la fonction ln est strictement croissante sur $]0; +\infty[$, alors : $\ln\left(1 + \frac{1}{2e^{u_n}}\right) > \ln(1)$

c'est-à-dire : $\ln\left(1 + \frac{1}{2e^{u_n}}\right) > 0$

Donc : $\ln(2) + \ln\left(1 + \frac{1}{2e^{u_n}}\right) > \ln(2)$ d'où : $u_{n+1} - u_n > \ln(2)$

Ainsi : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; u_{n+1} - u_n > \ln(2)$

b. Montrons que la suite (u_n) est strictement croissante :

Soit n de $\mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} - u_n > \ln(2)$ d'après la question précédante.

On a : $\ln(2) > 0$ donc : $u_{n+1} - u_n > 0$, c'est-à-dire : $u_{n+1} > u_n$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; u_{n+1} > u_n$

Donc, la suite (u_n) est strictement croissante.

ProfSalmi.blogspot.com

c. Montrons que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Soit n de $\mathbb{N}^*$, on a : $u_{n+1} - u_n > \ln(2)$

Donc : $\begin{cases} u_1 - u_0 > \ln(2) \\ u_2 - u_1 > \ln(2) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ u_n - u_{n-1} > \ln(2) \end{cases}$

En additionnant membre à membre ces inégalités et après simplification, on obtient : $u_n - u_0 > \underbrace{\ln(2) + \ln(2) + \ldots + \ln(2)}_{n \text{ fois}}$

c'est-à-dire : $u_n - u_0 > n\ln(2)$

c'est-à-dire : $u_n > n\ln(2)$

et on a : $u_0 \geq 0 \times \ln(2)$ (car : $u_0 = 0$)

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; u_n \geq n\ln(2)$

Puisque : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln(2) = +\infty$ alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (d'après les critères de convergence)

4 a. Montrons que : $(v_n)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique de raison 2 :

Soit n de $\mathbb{N}$, on a : $v_{n+1} = 1 + e^{u_{n+1}}$

Puisque $u_{n+1} = f(u_n) = \ln(1 + 2e^{u_n})$ alors : $e^{u_{n+1}} = e^{\ln(1+2e^{u_n})} = 1 + 2e^{u_n}$

Donc : $v_{n+1} = 1 + 1 + 2e^{u_n} = 2(1 + e^{u_n}) = 2v_n$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; v_{n+1} = 2v_n$

Par suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $v_0 = 2$.

b. Déterminons u_n en fonction de n :

Soit n de $\mathbb{N}$, on a : $v_n = v_0 q^n = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$

car (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $v_0 = 2$.

Et on a : $v_n = 1 + e^{u_n} \iff e^{u_n} = v_n - 1$

$\iff \ln(e^{u_n}) = \ln(v_n - 1)$

$\iff u_n = \ln(v_n - 1)$

Donc : $u_n = \ln(2^{n+1} - 1)$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; u_n = \ln(2^{n+1} - 1)$

ProfSalmi.blogspot.com

c. Calculons : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n}$

Soit n de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}u_n &= \ln(2^{n+1}-1)\\ &= \ln\left(2^{n+1}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)\right)\\ &= \ln(2^{n+1})+\ln\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)=(n+1)\ln(2)+\ln\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)\end{aligned}$$

Donc : $\frac{u_n}{n}=\left(\frac{n+1}{n}\right)\ln(2)+\frac{1}{n}\ln\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)$

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)\ln(2)=\ln(2)$

Et on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2^{n+1}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=0$ car : $-1<\frac{1}{2}<1$

donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}1-\frac{1}{2^{n+1}}=1$ puisque la fonction ln est continue en 1,

alors : $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)=\ln(1)=0$

D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n}=\ln(2)$

Exercice 42

$$f(x)=x\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right)$$

1 a. Vérifions que : $(\forall x\in\mathbb{R})\,;f(x)=x\left(\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right)$

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $f(x)=x\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right)$

$$=x\left(\frac{e^{2x}\left(1-\frac{1}{e^{2x}}\right)}{e^{2x}\left(1+\frac{1}{e^{2x}}\right)}\right)=x\left(\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right)$$

car : $e^{2x}>0$ et $\frac{1}{e^{2x}}=e^{-2x}$

Donc : $(\forall x\in\mathbb{R})\,;f(x)=x\left(\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right)$

b. Étudions la parité de f **:**

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $-x\in\mathbb{R}$ et $f(-x)=-x\left(\frac{e^{-2x}-1}{e^{-2x}+1}\right)$

D'après la question précédante, on a : $f(x)=x\left(\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right)=-x\left(\frac{e^{-2x}-1}{1+e^{-2x}}\right)$

donc : $f(-x)=f(x)$

D'où : $(\forall x\in\mathbb{R})\,;-x\in\mathbb{R}$ et $f(-x)=f(x)$

ProfSalmi.blogspot.com

Par suite f est une fonction paire .

Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; f(x) - x = \dfrac{-2xe^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $f(x) = f(-x) = -x\left(\dfrac{e^{-2x}-1}{e^{-2x}+1}\right)$ (car f est paire)

donc : $f(x) - x = f(-x) - x$

$$= -x\left(\frac{e^{-2x}-1}{e^{-2x}+1}\right) - x$$

$$= -x\left(\frac{e^{-2x}-1}{e^{-2x}+1} + 1\right)$$

$$= -x\left(\frac{e^{-2x}-1+e^{-2x}+1}{1+e^{-2x}}\right) = \frac{-2xe^{-2x}}{1+e^{-2x}}$$

D'où : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; f(x) - x = \dfrac{-2xe^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

c. **Montrons que :** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$:

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $f(x) = x\left(\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right)$ et $e^{2x} = (e^x)^2$

Puisque : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x} = +\infty$ alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^{2x}} = 0$

Donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - e^{-2x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + e^{-2x} = 1$

d'où: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = 1$

Par suite : $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right) = +\infty$ c'est-à-dire : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Montrons que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2xe^{-2x}}{1+e^{-2x}} = 0$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + e^{-2x} = 1$

Calculons : $\lim\limits_{x \to +\infty} -2xe^{-2x}$

Soit x de $\mathbb{R}$, on pose : $X = -2x$ on a : $x \longrightarrow +\infty \Longleftrightarrow X \longrightarrow -\infty$

donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} -2xe^{-2x} = \lim\limits_{X \to -\infty} Xe^X = 0$

D'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2xe^{-2x}}{1+e^{-2x}} = \dfrac{0}{1} = 0$

Déduction :

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $f(x) - x = \dfrac{-2xe^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2xe^{-2x}}{1+e^{-2x}} = 0$ donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x = 0$

D'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f(x) - x = 0$

ProfSalmi.blogspot.com

Par suite, la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

2 Montrons que (C) est au-dessous de (D) sur l'intervalle $[0;+\infty[$

Soit x de $[0;+\infty[$, on a : $f(x)-x = \dfrac{-2xe^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

Puisque : $e^{-2x} > 0$ et $1+e^{-2x} > 0$ alors : $\dfrac{2e^{-2x}}{1+e^{-2x}} > 0$

et on a : $(-x) \leq 0$ donc : $\dfrac{-2xe^{-2x}}{1+e^{-2x}} \leq 0$ c'est-à-dire : $f(x)-x \leq 0$

Donc : $f(x) \leq x$ pour tout x de $[0;+\infty[$.

D'où la courbe (C) est au-dessous de la droite (D) d'équation $y = x$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

3 a. Montrons que $f'(x) = \dfrac{e^{4x}-1+4xe^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$ pour tout x de $\mathbb{R}$:

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$

Soit x de $\mathbb{R}$, on a :

$$f'(x) = \left(x\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right)\right)'$$

$$= \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} + x\left(\frac{2e^{2x}(1+e^{2x})-2e^{2x}(e^{2x}-1)}{(e^{2x}+1)^2}\right)$$

$$= \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} + x\left(\frac{2e^{2x}(1+e^{2x}-e^{2x}+1)}{(e^{2x}+1)^2}\right) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} + \frac{4xe^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$$

$$= \frac{(e^{2x}-1)(e^{2x}+1)+4xe^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$$

$$= \frac{(e^{2x})^2-1+4xe^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} = \frac{e^{4x}-1+4xe^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; f'(x) = \dfrac{e^{4x}-1+4xe^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$

Et on a : $f'(0) = \dfrac{1-1+0\times 1}{(1+1)^2} = \dfrac{0}{4} = 0$

b. Montrons que : $e^{4x}-1 \geq 0$ pour tout x de $[0;+\infty[$:

Soit x de $[0;+\infty[$, on a la fonction $x \mapsto e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Donc : $x \geq 0 \Longrightarrow 4x \geq 0$

$\Longrightarrow e^{4x} \geq e^0$

$\Longrightarrow e^{4x} \geq 1$

$\Longrightarrow e^{4x}-1 \geq 0$

ProfSalmi.blogspot.com

D'où : $(\forall x \geq 0) ; e^{4x} - 1 \geq 0$

Déduction :

Soit x de $[0; +\infty[$, on a : $e^x > 0$, donc : $xe^x \geq 0$ c'est-à-dire : $4xe^x \geq 0$

et on a : $e^{4x} - 1 \geq 0$ donc : $e^{4x} - 1 + 4xe^x \geq 0$

D'où : $(\forall x \in [0; +\infty[) ; e^{4x} - 1 + 4xe^x \geq 0$

c. Tableau de variations de f sur $[0; +\infty[$

Soit x de $[0; +\infty[$, on a : $f'(x) = \dfrac{e^{4x} - 1 + 4xe^x}{(e^{2x} + 1)^2}$

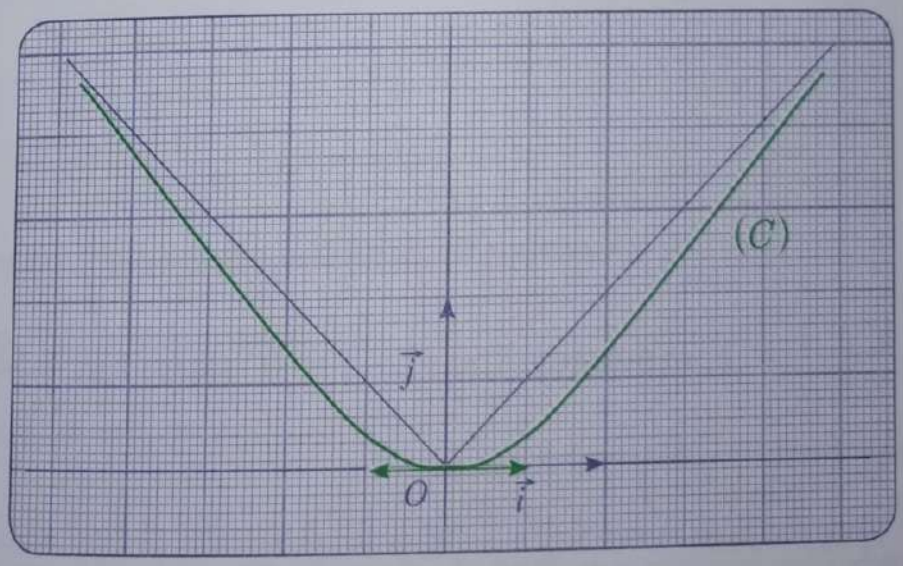
Puisque : $(e^{2x} + 1)^2 > 0$ et $e^{4x} - 1 + 4xe^x \geq 0$ alors : $f'(x) \geq 0$

Donc : $(\forall x \geq 0) ; f'(x) \geq 0$ et $f'(0) = 0$

Par suite le tableau de variations de f sur $[0; +\infty[$ est le suivant :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	
f	0	↗	$+\infty$

4 La courbe (C)



Exercice 43

$$f(x) = -2\sqrt{e^x - 1} + e^x$$

1 Déterminons D l'ensemble de définition de f

Soit x de $\mathbb{R}$, on a :

ProfSalmi.blogspot.com

$$x \in D \Leftrightarrow e^x - 1 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow e^x \geq 1$$
$$\Leftrightarrow x \geq 0$$

Donc : $D = [0; +\infty[$

2 Calculons: $f(0)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

On a : $f(0) = -2\sqrt{e^0 - 1} + e^0 = 1$, car : $e^0 = 1$.

Soit x de $[0; +\infty[$, on a :

$f(x) = -2\sqrt{e^x - 1} + e^x = \sqrt{e^x}\left[-2\sqrt{1 - \frac{1}{e^x}} + \sqrt{e^x}\right]$

Puisque : $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{e^x} = +\infty$ car : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

et $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(1 - \frac{1}{e^x}\right) = 1$ alors : $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(-2\sqrt{1 - \frac{1}{e^x}} + \sqrt{e^x}\right) = +\infty$

donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{e^x}\left(-2\sqrt{1 - \frac{1}{e^x}} + \sqrt{e^x}\right) = +\infty$ d'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

3 Étudions la dérivabilité de f à droite en 0:

Soit x de l'intervalle $]0; +\infty[$

On a : $f(0) = 1$ et $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{-2\sqrt{e^x - 1} + e^x - 1}{x}$

$$= \frac{-2\sqrt{e^x - 1}}{x} + \frac{e^x - 1}{x}$$
$$= -\frac{2}{\sqrt{e^x - 1}} \times \left(\frac{e^x - 1}{x}\right) + \frac{e^x - 1}{x}$$
$$= \left(\frac{e^x - 1}{x}\right)\left[-\frac{2}{\sqrt{e^x - 1}} + 1\right]$$

On a: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, et puisque: $\lim\limits_{x \to 0^+} e^x - 1 = 0^+$ alors : $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{-2}{\sqrt{e^x - 1}} = -\infty$

c'est-à-dire : $\lim\limits_{x \to 0^+}\left(\frac{-2}{\sqrt{e^x - 1}} + 1\right) = -\infty$

Donc : $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty$ d'où f n'est pas dérivable à droite en 0.

Interprétation géométrique :

La courbe de la fonction f admet une demi-tangente verticale dirigée vers le bas au point $A(0;1)$.

4 Étudions les variations de la fonction f

- La fonction $x \longmapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $]0; +\infty[$.

ProfSalmi.blogspot.com

On a: $e^x - 1 > 0$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

Donc, la fonction $x \longmapsto \sqrt{e^x - 1}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$.

D'où la fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$.

Soit x de $]0;+\infty[$, on a :

$$f'(x) = -2.\frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}} + e^x = e^x\left[1 - \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\right] = e^x\left[\frac{\sqrt{e^x-1}-1}{\sqrt{e^x-1}}\right]$$

Donc : $(\forall x \in]0;+\infty[)\ ; f'(x) = e^x\left[\frac{e^x-2}{\sqrt{e^x-1}(\sqrt{e^x-1}+1)}\right]$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $e^x - 2$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

On a : $f'(x) = 0 \iff e^x = 2$

$\iff x = \ln 2$

et : $f'(x) > 0 \iff e^x > 2$

$\iff x > \ln 2$

Donc, la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[\ln 2\ ;+\infty[$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[0\ ;\ln 2[$

Tableau de variations de f

x	0		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	1	↘	0	↗	$+\infty$

5 Déterminons la branche infinie de la courbe de f

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, calculons : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

Soit x de $]0;+\infty[$, on a :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{-2\sqrt{e^x-1}+e^x}{x} = \frac{e^x}{x}\left[1 - 2\frac{\sqrt{e^x}\sqrt{1-\frac{1}{e^x}}}{e^x}\right] = \frac{e^x}{x}\left[1 - 2\frac{\sqrt{1-\frac{1}{e^x}}}{\sqrt{e^x}}\right]$$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{e^x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1-\frac{1}{e^x}}}{\sqrt{e^x}} = 0$ d'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - 2\frac{\sqrt{1-\frac{1}{e^x}}}{\sqrt{e^x}}\right) = 1$

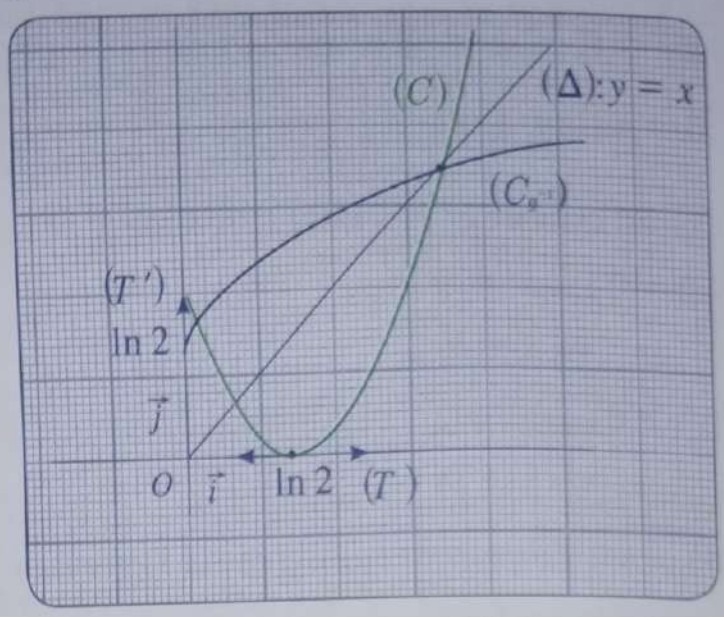
Et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ par suite : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}\left[1 - 2\frac{\sqrt{1-\frac{1}{e^x}}}{\sqrt{e^x}}\right] = +\infty$.

ProfSalmi.blogspot.com

c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$

Interprétation graphique : la courbe de f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

6 **La courbe de f :**



7 **a. Montrons que la fonction g admet une fonction réciproque**

- On a la fonction f est continue sur $]0;+\infty[$ (car elle est dérivable sur $]0;+\infty[$ donc, la fonction g est continue sur $[\ln 2\ ;+\infty[$

- On a la fonction f est strictement croissante sur $[\ln 2\ ;+\infty[$ donc la fonction g est strictement croissante sur $[\ln 2\ ;+\infty[$.

D'où la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle J telle que :

$J=g([\ln 2;+\infty[)=[g(\ln 2);\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)[=[0;+\infty[$ donc : $J=[0;+\infty[$

▸ **Calculons :** $g(\ln 5)$

$g(\ln 5)=-2\sqrt{e^{\ln 5}-1}+e^{\ln 5}=-2\sqrt{5-1}+5=-4+5=1$

b. Montrons que la fonction g^{-1} est dérivable en 1.

On a : $g(\ln 5)=1$ donc : $g^{-1}(1)=\ln 5$

La fonction g est dérivable en $\ln 5$ et $g'(\ln 5)=\dfrac{5}{2}$

c'est-à-dire : $g'(\ln 5)\neq 0$ donc g^{-1} est dérivable en 1 et on a :

$(g^{-1})'(1)=\dfrac{1}{g'(g^{-1}(1))}=\dfrac{1}{g'(\ln 5)}=\dfrac{2}{5}$

c. Construction de la courbe de g^{-1} :

ProfSalmi.blogspot.com

La courbe de la fonction g^{-1} est le symétrique de la courbe de la fonction g par rapport à la droite d'équation $y = x$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.(voir la figure précédente)

d. Déterminons $g^{-1}(x)$ pour tout x de $[0;+\infty[$

Soit x de $[0;+\infty[$ et y de $[\ln 2\ ;+\infty[$ tels que : $g^{-1}(x) = y$

on a : $g^{-1}(x) = y \iff g(y) = x$

$$\iff -2\sqrt{e^y - 1} + e^y = x$$
$$\iff e^y - 1 - 2\sqrt{e^y - 1} + 1 = x$$
$$\iff (\sqrt{e^y - 1} - 1)^2 = x$$
$$\iff |\sqrt{e^y - 1} - 1| = \sqrt{x}$$

Puisque : $y \geq \ln 2$ alors : $e^y \geq 2$ donc : $e^y - 1 \geq 1$ d'où: $\sqrt{e^y - 1} - 1 \geq 0$

Par suite : $|\sqrt{e^y - 1} - 1| = \sqrt{e^y - 1} - 1$

Donc : $g^{-1}(x) = y \iff \sqrt{e^y - 1} - 1 = \sqrt{x}$

$$\iff e^y - 1 = (\sqrt{x} + 1)^2$$
$$\iff e^y = 1 + (\sqrt{x} + 1)^2$$
$$\iff y = \ln(1 + (\sqrt{x} + 1)^2)$$

Conclusion : $(\forall x \in [0;+\infty[)\ ;\ g^{-1}(x) = \ln(1 + (\sqrt{x} + 1)^2)$

8 a. Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ 0 < u_n < 2$

Pour $n = 0$

On a : $u_0 = \ln 2$ et $1 < 2 < e$ donc : $0 < \ln 2 < 1 < 2$ d'où : $0 < u_0 < 2$.

Soit n de $\mathbb{N}$

Supposons que : $0 < u_n < 2$ et montrons que : $0 < u_{n+1} < 2$

On a $0 < u_n < 2$ et puisque g^{-1} est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

(car la fonction g est strictement croissante sur $[\ln 2\ ;+\infty[$)

alors : $g^{-1}(0) < g^{-1}(u_n) < g^{-1}(2)$

Puisque :

$g^{-1}(0) = \ln 2$ et $g^{-1}(2) = \ln(1 + (\sqrt{2} + 1)^2) = \ln(4 + 2\sqrt{2}) \simeq 1{,}92$

alors : $g^{-1}(0) > 0$ et $g^{-1}(2) < 2$ et on a : $g^{-1}(u_n) = u_{n+1}$

donc : $0 < u_{n+1} < 2$. D'où : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ 0 < u_n < 2$.

b. Montrons que la suite (u_n) est strictement croissante c'est-à-dire :

ProfSalmi.blogspot.com

$(\forall n \in \mathbb{N})\ ; u_{n+1} < u_n$

On utilise le raisonnement par récurrence :

- Pour $n = 0$

On a : $u_0 = \ln 2$ et $u_1 = g^{-1}(u_0) = \ln(2 + \ln 2 + 2\sqrt{\ln 2})$

Puisque : $2 < 2 + \ln 2 + 2\sqrt{\ln 2}$ alors : $\ln 2 < \ln(2 + \ln 2 + 2\sqrt{\ln 2})$

donc : $u_0 < u_1$

- Soit n de $\mathbb{N}$;

Supposons que : $u_n < u_{n+1}$ et montrons que : $u_{n+1} < u_{n+2}$

on a : $0 < u_n < u_{n+1}$ et puisque la fonction g^{-1} est strictement croissante sur $[0; +\infty[$

alors : $g^{-1}(u_n) < g^{-1}(u_{n+1})$

Donc : $u_{n+1} < u_{n+2}$ par suite : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n < u_{n+1}$

Ainsi, la suite (u_n) est strictement croissante.

Déduction :

On a : (u_n) est une suite strictement croissante et majorée par 2, donc (u_n) est une suite convergente.

Exercice 44

$$f(x) = 1 - \frac{x}{2} - \frac{2}{e^x + 1}$$

1 a. Vérifions que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; \frac{1}{e^{-x} + 1} = 1 - \frac{1}{e^x + 1}$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $1 - \frac{1}{e^x + 1} = \frac{e^x + 1 - 1}{e^x + 1} = \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{e^x}{e^x(1 + e^{-x})} = \frac{1}{e^{-x} + 1}$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; 1 - \frac{1}{1 + e^x} = \frac{1}{e^{-x} + 1}$

b. Déduisons que f est une fonction impaire

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $-x \in \mathbb{R}$ et on a :

$$f(-x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^{-x} + 1} = 1 + \frac{1}{2}x - 2\left(1 - \frac{1}{e^x + 1}\right) = -1 + \frac{1}{2}x + \frac{2}{e^x + 1} = -f(x)$$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; -x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = -f(x)$

D'où f est une fonction impaire.

2 Calculons : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

Puisque : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x + 1 = +\infty$ alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x + 1} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{1}{2}x = -\infty$

ProfSalmi.blogspot.com

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

3 a. Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car c'est la somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$).

Et on a : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{2e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{-(e^x+1)^2+4e^x}{2(e^x+1)^2}$

$$= \frac{-(e^{2x}-2e^x+1)}{2(e^x+1)^2} = -\frac{(e^x-1)^2}{2(e^x+1)^2}$$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$

b. Tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^+$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	
f	0	↘	$-\infty$

c. Déduisons que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) ; 1 - \frac{2}{e^x+1} \leq \frac{1}{2}x$

D'après le tableau de variations de f, on déduit que f admet 0 comme valeur maximale 0 sur $\mathbb{R}^+$.

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}^+); f(x) \leq 0$

Et on a : $f(x) \leq 0 \iff 1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x+1} \leq 0$

$$\iff 1 - \frac{2}{e^x+1} \leq \frac{1}{2}x$$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) ; 1 - \frac{2}{e^x+1} \leq \frac{1}{2}x$

4 Montrons que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x) - \left(1 - \frac{1}{2}x\right)\right] = 0$

On a : $f(x) - \left(1 - \frac{1}{2}x\right) = \frac{-2}{e^x+1}$ pour tout x de $\mathbb{R}$

Puisque: $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x + 1 = +\infty$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x+1} = 0$

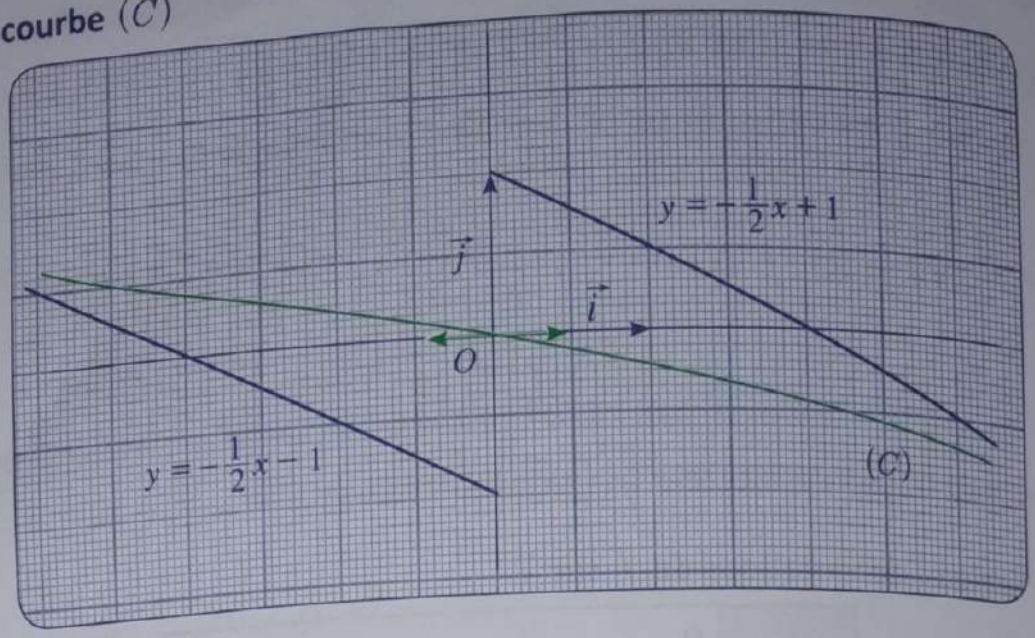
donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x) - \left(1 - \frac{1}{2}x\right)\right] = 0$

Interprétation géométrique :

La courbe (C) admet une asymptote oblique d'équation: $y = -\frac{1}{2}x + 1$ au voisinage $+\infty$

ProfSalmi.blogspot.com

5 La courbe (C)



II)

1 **Montrons par récurrence que :** $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; u_n > 0$

On a : $u_0 = 1$ donc : $u_0 > 0$ d'où la propriété est vraie pour $n = 0$

Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que : $u_n > 0$ et montrons que : $u_{n+1} > 0$

On a : $u_n > 0 \Leftrightarrow e^{u_n} > 1$

$\Leftrightarrow 1 + e^{u_n} > 2$

$\Leftrightarrow \frac{2}{1+e^{u_n}} < 1$

$\Leftrightarrow \frac{-2}{1+e^{u_n}} > -1$

$\Leftrightarrow 1 - \frac{2}{1+e^{u_n}} > 0$

Donc : $u_{n+1} > 0$, d'où la propriété est vraie pour $n + 1$

Par suite : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; u_n > 0$

2 **a. Montrons que :** $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$

On a d'après I) 3) c): $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ ; 1 - \frac{2}{e^x + 1} \leq \frac{1}{2}x$

Puisque : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; u_n > 0$ alors : $1 - \frac{2}{e^{u_n} + 1} \leq \frac{1}{2}u_n$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{N})\ ; u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$

b. Déduisons que la suite $(u_n)_n$ **est décroissante**

On a : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2} < 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; u_n > 0$

ProfSalmi.blogspot.com

donc : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; u_{n+1} < u_n$ c'est-à-dire $(u_n)_n$ est une suite décroissante.

3) ▸ **Montrons que :** $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

On a : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; 0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$

Donc :
$$\begin{cases} 0 < u_1 \leq \frac{1}{2} u_0 \\ 0 < u_2 \leq \frac{1}{2} u_1 \\ 0 < u_3 \leq \frac{1}{2} u_2 \\ \vdots \\ 0 < u_n \leq \frac{1}{2} u_{n-1} \end{cases}$$

et en multipliant membre à membre ces doubles inégalités et après simplification, on obtient : $0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n u_0$

et $u_0 = 1$ donc : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; 0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

▸ **Déterminons :** $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{1}{2} < 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; 0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ donc d'après les critères de convergence, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

Exercice 45

$$f(x)\ \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$$

Partie 1 :

1 a. ▸ **Montrons que :** $(\forall\, x \in \mathbb{R})\ ; f(x) + f(-x) = 2$

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $f(-x) = \frac{3e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} = \frac{e^x(3e^{-x} - 1)}{e^x(e^{-x} + 1)} = \frac{3 - e^x}{1 + e^x}$

donc : $f(-x) + f(x) = \frac{3 - e^x}{1 + e^x} + \frac{3e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{2(e^x + 1)}{e^x + 1} = 2$

D'où : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; f(x) + f(-x) = 2$

▸ **Déduction :**

On a : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; f(x) + f(-x) = 2$

Donc, le point $I(0;1)$ est un centre de symétrie de (C)

info:

$I(a;b)$ est un centre de symétrie de la courbe de f si et seulement si:

$\forall x \in D_f\ ,\ 2a - x \in D_f$

et: $f(2a - x) + f(x) = 2b$

b. ▸ **Calculons :** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ **et** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

ProfSalmi.blogspot.com

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ donc : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}(3e^x-1)=-1\\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^x+1=1\end{cases}$

D'où : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$

On a : $f(x)=\dfrac{3-\frac{1}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ alors : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3-\frac{1}{e^x}\right)=3\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{e^x}\right)=1\end{cases}$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$

Remarque : Autre méthode, on peut poser : $X=e^x$.

▸ **Interprétation géométrique :**

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$ donc la droite d'équation: $y=-1$ est une asymptote horizontale à (C) au voisinage $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$ donc la droite d'équation $y=3$ est une asymptote horizontale à (C) au voisinage $+\infty$

c. Tableau de variations de f :

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, et on a : $(\forall x\in\mathbb{R})\,;f'(x)=\dfrac{3e^x(e^x+1)-e^x(3e^x-1)}{(e^x+1)^2}=\dfrac{4e^x}{(e^x+1)^2}$

Donc : $(\forall x\in\mathbb{R})\,;f'(x)>0$

Tableau de variations de f :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	-1	↗	3

2 a. Équation de la tangente (T)

On a : $(T):y=f'(0)(x-0)+f(0)$ et $f(0)=1$ et $f'(0)=1$

donc : $(T):y=x+1$

b. ▸ Vérifions que : $(\forall x\in\mathbb{R})\,;g'(x)=-\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$

On a : $g(x)=f(x)-(x+1)$

Donc :

$$(\forall x\in\mathbb{R})\,;g'(x)=f'(x)-1=\frac{4e^x}{(e^x+1)^2}-1=\frac{4e^x-(e^x+1)^2}{(e^x+1)^2}=\frac{-(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2}$$

ProfSalmi.blogspot.com

D'où : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ g'(x) = -\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2$

▸ On a : $g(0) = f(0) - 1 = 0$ et g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ ;\ g(x) \leq g(0)$ et $(\forall x \in \mathbb{R}^-)\ ;\ g(x) \geq g(0)$

D'où : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ ;\ g(x) \leq 0$ et $(\forall x \in \mathbb{R}^-)\ ;\ g(x) \geq 0$

c. position relative de (C) et (T)

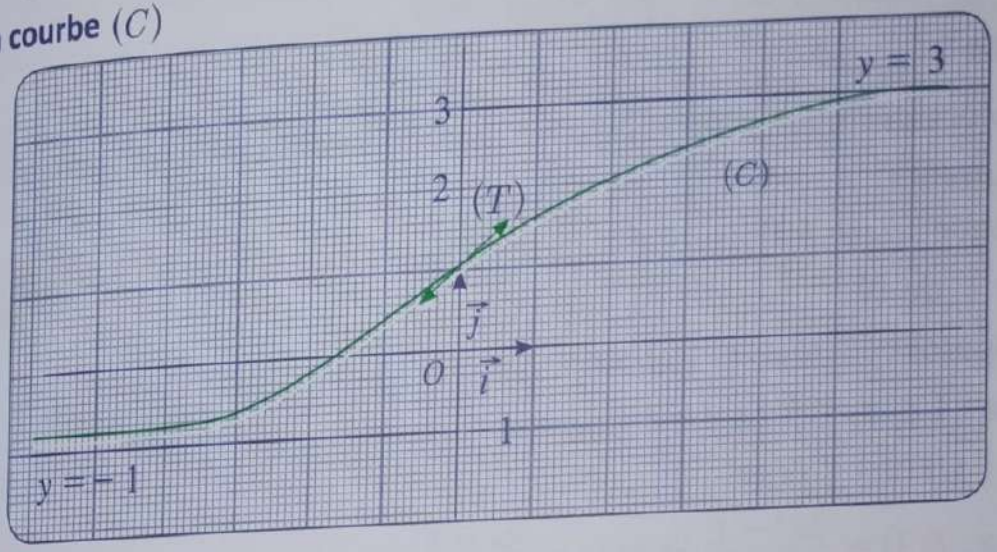
D'après la question 2) b), on a : $g(x) = f(x) - (x+1)$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}^-)\ ;\ f(x) - (x+1) \geq 0$ et $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ ;\ f(x) - (x+1) \leq 0$

C'est-à-dire la courbe (C) est au-dessous de (T) sur $\mathbb{R}^+$ et la courbe (C) est au-dessus de (T) sur $\mathbb{R}^-$.

Cela signifie que le point $A(0;1)$ est un point d'inflexion de la courbe (C).

3 La courbe (C)



Partie 2 :

1 a. Soit x de $\mathbb{R}$, $f(x) = x \iff f(x) - x = 0$

$\iff f(x) - x - 1 = -1$

$\iff g(x) = -1$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ (f(x) = x \iff g(x) = -1)$

b. On a : $g(2) + 1 = \frac{e^2 - 3}{e^2 + 1}$ donc : $g(2) > -1$ (car $e^2 > 3$).

et $g(3) + 1 = \frac{3e^3 - 1}{e^3 + 1} + 1 - 4 = \frac{3e^3 - 1}{e^3 + 1} - 3 = \frac{-4}{e^3 + 1}$ donc : $g(3) < -1$

On a la fonction g est continue sur $[2;3]$ et $g(3) < -1 < g(2)$ et g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Donc, l'équation : $g(x) = -1$ admet une solution unique α telle que : $2 < \alpha < 3$

Puisque : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ (g(x) = -1 \iff f(x) = x)$

ProfSalmi.blogspot.com

alors, l'équation : $f(x) = x$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α et cela signifie que la courbe (C_f) coupe la droite (D) en un seul point d'abscisse α.

2 a. Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) = -1 + \frac{4e^x}{e^x + 1}$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $-1 + \frac{4e^x}{e^x + 1} = \frac{-e^x - 1 + 4e^x}{e^x + 1} = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1} = f(x)$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) = -1 + \frac{4e^x}{e^x + 1}$

b. Déduisons une fonction primitive de f sur $\mathbb{R}$

On a: $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) = -1 + \frac{4e^x}{e^x + 1}$ donc : $f(x) = -1 + 4\frac{u'(x)}{u(x)}$

où : $u(x) = e^x + 1$

Donc, une fonction primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$(\forall x \in \mathbb{R}) ; F(x) = -x + 4\ln(u(x))$

ou : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; F(x) = -x + 4\ln(e^x + 1)$

Partie 3 :

1 Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 \leq u_n \leq 3$ **en utilisant le raisonnement par récurrence.**

Puisque : $u_0 = 3$ alors : $1 \leq u_0 \leq 3$ donc, la propriété est vraie pour $n = 0$.

Soit n de $\mathbb{N}$

Supposons : $1 \leq u_n \leq 3$ et montrons que : $1 \leq u_{n+1} \leq 3$

On a : $1 \leq u_n \leq 3$ et f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc :

$f(1) \leq f(u_n) \leq f(3)$

On a : $f(3) = \frac{3e^3 - 1}{e^3 + 1}$ et $f(1) = \frac{3e - 1}{e + 1}$

Puisque : $f(1) - 1 = \frac{2(e - 1)}{e + 1}$ et $e > 1$ alors : $f(1) > 1$

et puisque : $f(3) - 3 = \frac{-4}{e^3 + 1}$ alors : $f(3) < 3$

donc : $1 \leq f(1) \leq f(u_n) \leq f(3) < 3$

D'où : $1 \leq u_{n+1} \leq 3$

Par suite : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 \leq u_n \leq 3$

2 Montrons que la suite $(u_n)_n$ est décroissante en utilisant le raisonnement par récurrence.

On a : $u_1 = f(u_0) = f(3)$ et $f(3) < 3$ (d'après la question précédante) donc : $u_1 < u_0$

D'où la propriété est vraie pour $n = 0$

ProfSalmi.blogspot.com

Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que : $u_{n+1} \leq u_n$ et montrons que : $u_{n+2} \leq u_{n+1}$

On a : $u_{n+1} \leq u_n$ et f strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc $f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$ c'est-à-dire : $u_{n+2} \leq u_{n+1}$

Par suite : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} \leq u_n$ ainsi, la suite $(u_n)_n$ est décroissante.

▸ **Déduction :** la suite $(u_n)_n$ est décroissante et minorée par 1; donc : $(u_n)_n$ est convergente.

3 Montrons que : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$

On a : ▸ $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

▸ f est continue sur $[1;3]$

▸ $f([1;3]) \subset [1;3]$

▸ $(u_n)_n$ est convergente.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ est une solution de l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $[1;3]$.

Puisque α est la seule solution de l'équation $f(x) = x$ dans $[1;3]$

alors : $\ell = \alpha$ c'est-à-dire : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$

Exercice 46

$$g(x) = e^{-x} + x - 1$$

I) 1 ▸ Calculons $g'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout x de $\mathbb{R}$: $g'(x) = -e^{-x} + 1 = 1 - e^{-x}$

▸ **Déduction :**

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $g'(x) \geq 0 \iff 1 - e^{-x} \geq 0$

$\iff e^{-x} \leq 1$

$\iff -x \leq 0$

$\iff x \geq 0$

Donc : $(\forall x \in [0; +\infty[)$; $g'(x) \geq 0$

Et on a : $g'(x) \leq 0 \iff 1 - e^{-x} \leq 0$

$\iff e^{-x} \geq 1$

$\iff -x \geq 0$

$\iff x \leq 0$

Donc : $(\forall x \in]-\infty; 0])$; $g'(x) \leq 0$

ProfSalmi.blogspot.com

D'où la fonction g est croissante sur $[0;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty;0]$

2 ▸ **Montrons que :** $(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ g(x) \geq 0$

La fonction g est croissante sur $[0;+\infty[$

donc : $(\forall x \in [0;+\infty[)\ ;\ g(x) \geq g(0)$

D'où : $(\forall x \in [0;+\infty[)\ ;\ g(x) \geq 0$, car : $g(0) = 0$

La fonction g est décroissante sur $]-\infty;0]$ donc: $(\forall x \in]-\infty;0])\ ;\ g(x) \geq g(0)$

D'où : $(\forall x \in]-\infty;0])\ ;\ g(x) \geq 0$. Par suite : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ g(x) \geq 0$

▸ **Déduisons que :** $(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ e^{-x} + x \geq 1$

On a : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ g(x) \geq 0$ donc : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ e^{-x} + x - 1 \geq 0$

D'où : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ e^{-x} + x \geq 1$

II) 1 Montrons que l'ensemble de définition de la fonction f est $\mathbb{R}$

On a : $f(x) = \dfrac{x}{x + e^{-x}}$

Soit D l'ensemble de définition de la fonction f et soit x de $\mathbb{R}$, on a :

$x \in D \Leftrightarrow x + e^{-x} \neq 0$

Puisque : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ x + e^{-x} \geq 1$ (d'après la question I) 2)

alors : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ x + e^{-x} \neq 0$. Donc : $D = \mathbb{R}$

2 a. Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)\ ;\ f(x) = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{xe^x}}$

Soit x de $\mathbb{R}^*$, on a : $f(x) = \dfrac{x}{x + \dfrac{1}{e^x}} = \dfrac{x}{x\left(1 + \dfrac{1}{xe^x}\right)} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{xe^x}}$

donc : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)\ ;\ f(x) = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{xe^x}}$

b. ▸ **Montrons que :** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ **et** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

-On a: $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0^-$ donc: $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{xe^x} = -\infty$ d'où: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{xe^x}} = 0$

-On a: $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^x = +\infty$ donc: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{xe^x} = 0$ d'où: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{xe^x}} = 1$

▸ **Interprétation géométrique :**

On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ donc (C) admet une asymptote horizontale d'équation : $y = 0$ au voisinage $-\infty$.

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ donc (C) admet une asymptote horizontale d'équation:

ProfSalmi.blogspot.com

$y = 1$ au voisinage $+\infty$.

3 a) Montrons que : $f'(x) = \dfrac{(x+1)e^{-x}}{(x+e^{-x})^2}$ **pour tout** x **de** $\mathbb{R}$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{(x+e^{-x})-x(1-e^{-x})}{(x+e^{-x})^2} = \frac{x+e^{-x}-x+xe^{-x}}{(x+e^{-x})^2} = \frac{(x+1)e^{-x}}{(x+e^{-x})^2}$$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; f'(x) = \dfrac{(x+1)e^{-x}}{(x+e^{-x})^2}$

b) Étudions le signe de $f'(x)$

On a : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; \dfrac{e^{-x}}{(x+e^{-x})} > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $(x+1)$ sur $\mathbb{R}$ et $f'(-1) = 0$.

Donc : $(\forall x \in [-1; +\infty[)\ ; f'(x) \geq 0$ et $(\forall x \in]-\infty; -1])\ ; f'(x) \leq 0$

Tableau de variations de f **:**

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
f	0	↘	$\dfrac{1}{1-e}$	↗	1

4 a. Déterminons l'équation de la tangente à (C) **au point** O

On a : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$ et $f'(0) = 1$ et $f(0) = 0$

Donc : $y = x$ est une équation de la tangente à (C) au point O.

b. Vérifions que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; x - f(x) = \dfrac{xg(x)}{g(x)+1}$

Soit x de $\mathbb{R}$, on a :

$$x - f(x) = x - \frac{x}{x+e^{-x}} = x\left(1 - \frac{1}{x+e^{-x}}\right) = x\left(\frac{x+e^{-x}-1}{x+e^{-x}}\right)$$

$$= x\left(\frac{e^{-x}+x-1}{(e^{-x}+x-1)+1}\right) = \frac{xg(x)}{g(x)+1}$$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; x - f(x) = \dfrac{xg(x)}{g(x)+1}$

Étudions le signe de $x - f(x)$ **pour tout** x **de** $\mathbb{R}$ **:**

On a : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; g(x) \geq 0$ (D'après la question I) 2))

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; \dfrac{g(x)}{g(x)+1} \geq 0$ d'où le signe de $x - f(x)$ est celui de x sur $\mathbb{R}$.

ProfSalmi.blogspot.com

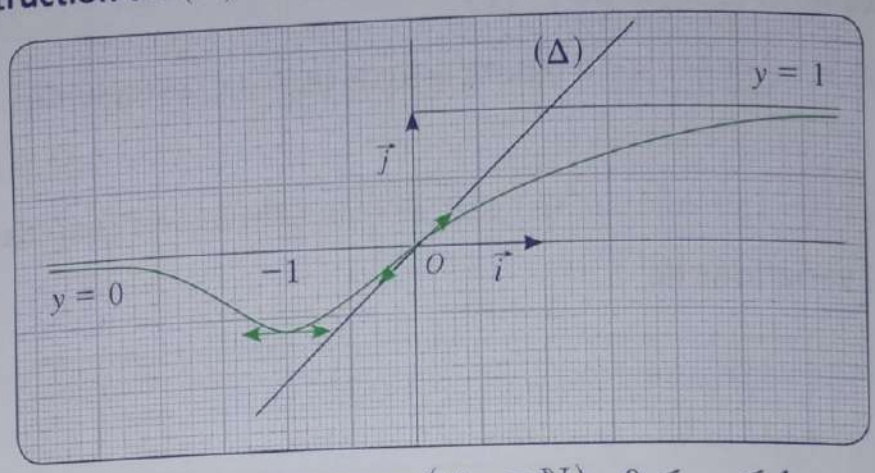
Par suite : $(\forall x \in [0;+\infty[)\ ; x - f(x) \geq 0$ et $(\forall x \in]-\infty;0])\ ; x - f(x) \leq 0$

c. Déduction :

On a : $(\forall x \in [0;+\infty[)\ ; x - f(x) \geq 0$ c'est-à-dire : $(\forall x \in [0;+\infty[)\ ; f(x) \leq x$

Donc, sur l'intervalle $[0;+\infty[$, la courbe (C) est au-dessous la droite (Δ) et de la même façon on montre que la courbe (C) est au-dessous de la droite (Δ) sur l'intervalle $]-\infty;0]$.

5 Construction de (C) et de la droite (Δ)



III) 1 Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; 0 \leq u_n \leq 1$

Pour $n = 0$, on a : $u_0 = 1$ et $0 \leq 1 \leq 1$ donc : $0 \leq u_0 \leq 1$.

Soit n de $\mathbb{N}$ supposons que : $0 \leq u_n \leq 1$ et montrons que : $0 \leq u_{n+1} \leq 1$

On a f est croissante sur $[0;1]$, donc : $0 \leqslant u_n \leqslant 1 \Longrightarrow f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(1)$

(car : $\frac{1}{1+e^{-1}} \simeq 0,73$) $\Longrightarrow 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{1+e^{-1}} \leqslant 1$

D'où : $0 \leq u_{n+1} \leq 1$ et par suite : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; 0 \leq u_n \leq 1$

2 Montrons que la suite (u_n) est décroissante :

On a d'après la question II) 4) b), $(\forall x \in [0;+\infty[)\ ; f(x) \leq x$

et puisque : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; u_n \in [0;1]$ alors : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; f(u_n) \leq u_n$

c'est-à-dire : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; u_{n+1} \leq u_n$ donc, la suite (u_n) est décroissante.

3 ▸ Déduisons que la suite (u_n) est convergente

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0; donc (u_n) est convergente.

▸ Déterminons $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

On a : f est continue et strictement croissante sur $[0;1]$ donc :

$f([0;1]) = \left[0; \frac{1}{1+e^{-1}}\right]$ et $\left[0; \frac{1}{1+e^{-1}}\right] \subset [0;1]$

ProfSalmi.blogspot.com

Donc : $f([0;1]) \subset [0;1]$

et la suite (u_n) est définie par : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = 1$ et (u_n) est convergente.

Donc, sa limite ℓ est une solution de l'équation : $f(x) = x$ dans l'intervalle $[0;1]$.

Résolvons l'équation $f(x) = x$ telle que : $x \in [0;1]$

On a : $f(x) = x \iff \dfrac{x}{x+e^{-x}} = x$

$\iff x\left(\dfrac{1}{x+e^{-x}} - 1\right) = 0$

$\iff x = 0$ ou $x + e^{-x} = 1$

$\iff x = 0$ ou $g(x) = 0$

$\iff x = 0$

donc : $\ell = 0$, et par suite : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

Exercice 47

$$\begin{cases} f(x) = xe^{-\frac{1}{x}} - x + \dfrac{1}{2} \; ; x > 0 \\ f(0) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Partie 1:

1 a. Vérifions que la fonction f est continue à droite en 0

On a : $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\dfrac{1}{x}\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$ donc : $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$ d'où : $\lim\limits_{x\to 0^+} xe^{-\frac{1}{x}} = 0$

et on a : $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-x + \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$ donc : $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(xe^{-\frac{1}{x}} - x + \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$

D'où : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$ par suite f est continue à droite en 0.

b. Étudions la dérivabilité de la fonction f à droite en 0

Soit x de l'intervalle $]0;+\infty[$.

On a : $f(0) = \dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{xe^{-\frac{1}{x}} - x}{x} = e^{-\frac{1}{x}} - 1$

Puisque : $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$ alors : $\lim\limits_{x\to 0^+}(e^{-\frac{1}{x}} - 1) = -1$ donc : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = -1$

D'où la fonction f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = -1$

Interprétation géométrique :

La courbe de la fonction f admet une demi-tangente oblique de coefficient

ProfSalmi.blogspot.com

directeur -1 au point d'abscisse 0. (d'équation : $\begin{cases} y = -x + \frac{1}{2} \\ x \geq 0 \end{cases}$)

2 a. Calculons : $\lim\limits_{x \to +\infty} (xe^{-\frac{1}{x}} - x)$

Soit x de $]0; +\infty[$, on a : $xe^{-\frac{1}{x}} - x = x(e^{-\frac{1}{x}} - 1) = -\left(\frac{e^{-\frac{1}{x}} - 1}{-\frac{1}{x}}\right)$

On pose : $t = -\frac{1}{x}$, on a : $x \to +\infty \iff t \to 0^-$.

donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} (xe^{-\frac{1}{x}} - x) = \lim\limits_{t \to 0^-} -\left(\frac{e^t - 1}{t}\right) = -1$

b. Montrons que : $(\forall x \in]0; +\infty[) ; e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}} - 1 < 0$

On considère la fonction numérique u définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$u(x) = e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}} - 1$

▸ **Déterminons la Monotonie de u sur $]0; +\infty[$**

La fonction u est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a :

$(\forall x \in]0; +\infty[) ; u'(x) = \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{x}}$

Donc $u'(x) > 0$ pour tout x de $]0; +\infty[$ d'où la fonction u est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

Puisque la fonction u est continue sur $]0; +\infty[$

alors : $u(]0; +\infty[) =]\lim\limits_{x \to 0^+} u(x); \lim\limits_{x \to +\infty} u(x)[$

▸ **Calculons :** $\lim\limits_{x \to 0^+} u(x)$

On pose : $t = -\frac{1}{x}$, on a : $x \to 0^+ \iff t \to -\infty$ donc : $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}} = -\lim\limits_{t \to -\infty} te^t = 0$

et on a : $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$ donc : $\lim\limits_{x \to 0^+} u(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}} - 1\right) = -1$

▸ **Calculons :** $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x)$

On a : $u(x) = \frac{xe^{-\frac{1}{x}} - x + e^{-\frac{1}{x}}}{x}$ pour tout x de $]0; +\infty[$

Puisque : $\lim\limits_{x \to +\infty} (xe^{-\frac{1}{x}} - x) = -1$ alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} (xe^{-\frac{1}{x}} - x + e^{-\frac{1}{x}}) = 0$

et on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{xe^{-\frac{1}{x}} - x + e^{-\frac{1}{x}}}{x}\right) = 0$

D'où : $u(]0; +\infty[) =]-1; 0[$

c'est-à-dire : $(\forall x \in]0; +\infty[) ; -1 < u(x) < 0$

Par suite : $(\forall x \in]0; +\infty[) ; e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}} - 1 < 0$

ProfSalmi.blogspot.com

c. Tableau de variation de f

La fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et on a :

$(\forall x \in]0;+\infty[) ; f'(x) = e^{-\frac{1}{x}} + x \times \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} - 1 = e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} - 1$

donc d'après la question précédante, on a : $(\forall x \in]0;+\infty[) ; f'(x) < 0$

Donc, la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$

▸ On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} (xe^{-\frac{1}{x}} - x) = -1$ donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

D'où le tableau de variations de f est le suivant :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	-1	-	
f	$\frac{1}{2}$	↘	$-\frac{1}{2}$

3 a. Montrons que la fonction f admet une fonction réciproque :

La fonction f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$ donc f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle $J = f([0;+\infty[)$ telle que : $J = f([0;+\infty[) = \left]\lim\limits_{x \to +\infty} f(x); f(0)\right] = \left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$

b. Tableau de variations de f^{-1} :

La fonction f^{-1} est strictement monotone sur $\left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ et elle a la même monotonie que f sur l'intervalle $[0;+\infty[$ c'est-à-dire f^{-1} est strictement décroissante sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$.

D'où :

x	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$
f^{-1}	‖ $+\infty$	↘	0

c. ▸ Montrons que l'équation : $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}^+$

La fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ à valeurs dans l'intervalle $[0;+\infty[$.

Puisque : $0 \in \left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}^+$.

▸ **Montrons que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$:**

ProfSalmi.blogspot.com

On a : $f(1)=e^{-1}-\frac{1}{2}=\frac{2-e}{e}$ et $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}e^{-2}$

Donc : $f(1)<0$ et $f\left(\frac{1}{2}\right)>0$ c'est-à-dire : $f(1)<0<f\left(\frac{1}{2}\right)$ d'où : $f(1)<f(\alpha)<f\left(\frac{1}{2}\right)$

Puisque la fonction f^{-1} est strictement décroissante sur $\left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$

alors : $\frac{1}{2}<\alpha<1$

4 a. Vérifions que $(\forall x\in]0;+\infty[)\ ;\ f'(x)-1<0$

Soit x de $]0;+\infty[$, on a : $f'(x)<0$ c'est-à-dire : $f'(x)-1<-1$ c'est-à-dire: $f'(x)-1<0$, donc : $(\forall x\in]0;+\infty[)\ ;\ f'(x)-1<0$

b. Montrons que l'équation $f(x)=x$ **admet une soiution unique** β **dans** $]0;+\infty[$.

On considère la fonction numérique g définie sur $]0;+\infty[$ par :

$g(x)=f(x)-x$

On a : $(\forall x\in]0;+\infty[)\ ;\ g'(x)=f'(x)-1$

donc, d'après la question précedante : $(\forall x\in]0;+\infty[)\ ;\ g'(x)<0$

D'où la fonction g est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

Puisque la fonction g est continue sur $]0;+\infty[$

alors : $J=g(]0;+\infty[)=\left]\lim\limits_{x\to+\infty}g(x);\lim\limits_{x\to0^+}g(x)\right[=\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$

Puisque : $0\in\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$ alors, l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique β dans $]0;+\infty[$.

cela signifie que l'équation $f(x)=x$ admet une solution unique β dans l'intervalle $]0;+\infty[$

Montrons que $0<\beta<\frac{1}{2}$

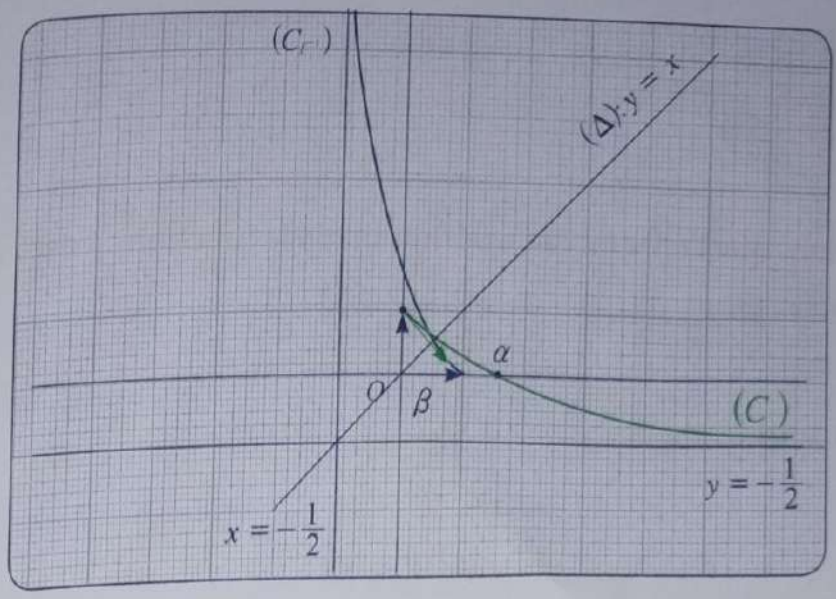
On a : $g\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2e^2}-\frac{1}{2}=\frac{1-e^2}{2e^2}$ alors: $g\left(\frac{1}{2}\right)<0$

donc : $g\left(\frac{1}{2}\right)<g(\beta)$

Puisque la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$ alors : $\beta<\frac{1}{2}$, et on a : $\beta>0$ donc : $0<\beta<\frac{1}{2}$

5 Construction de (C) **et** $(C_{f^{-1}})$ **:**

ProfSalmi.blogspot.com



Partie 3:

1 Soit n de $\mathbb{N}^*$

Montrons que l'équation $f(x) = \frac{1}{2n}$ admet une solution unique x_n dans $\mathbb{R}^+$

On considère la fonction numérique v définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $v(x) = f(x) - \frac{1}{2n}$

On a : $(\forall x \in]0; +\infty[)\ ; v'(x) = f'(x)$

Donc : $v'(x) < 0$ pour tout x de $]0; +\infty[$, donc la fonction v est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$, et puisque la fonction v est continue sur $[0; +\infty[$

alors : $v([0; +\infty[) =]\lim\limits_{x \to +\infty} v(x); v(0)] =]-\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}; \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}]$

et puisque $n \geq 1$ alors : $\frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \geq 0$ et on aura : $\frac{1}{2} - \frac{1}{2n} > 0$ si : $n \geq 2$

Donc : $0 \in]-\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}; \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}]$ d'où l'équation $v(x) = 0$ admet une solution unique x_n dans l'intervalle $[0; +\infty[$

2 Déterminons la valeur de x_1

Le nombre x_1 est l'unique solution de l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ dans l'intervalle $[0; +\infty[$.

Et on a : $f(0) = \frac{1}{2}$ donc : $x_1 = 0$

3 Étudions la monotonie de la suite $(x_n)_{n \geq 1}$.

Soit n de $\mathbb{N}^*$, on a : $f(x_n) = \frac{1}{2n}$ et $f(x_{n+1}) = \frac{1}{2(n+1)}$

Puisque : $n + 1 > n$ alors : $\frac{1}{2(n+1)} < \frac{1}{2n}$ c'est-à-dire : $f(x_{n+1}) < f(x_n)$

et puisque la fonction f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$ alors : $x_n < x_{n+1}$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; x_n < x_{n+1}$, d'où la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est strictement croissante.

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 48

$f(x) = \sqrt{xe^{-x} + x}$

Partie 1 :

1 a. Vérifions que l'ensemble de définition de la fonction f est : $D = [0; +\infty[$

Soit x de $\mathbb{R}$, on a : $x \in D \iff xe^{-x} + x \geq 0$

$$\iff xe^{-x}(e^x + 1) \geq 0$$

On a pour tout x de $\mathbb{R}$; $e^{-x} > 0$ et $e^x + 1 > 0$

Donc : $x \in D \iff x \geq 0$

$$\iff x \in [0; +\infty[$$

D'où : $D = [0; +\infty[$

b. Montrons que la fonction f est continue sur $[0; +\infty[$

La fonction $x \mapsto e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $[0; +\infty[$ et la fonction $x \mapsto xe^{-x} + x$ est continue sur $[0; +\infty[$ comme produit et somme des fonctions continues sur $[0; +\infty[$.

Et on a : $xe^{-x} + x \geq 0$ pour tout x de $[0; +\infty[$ donc la fonction $f : x \mapsto \sqrt{xe^{-x} + x}$ est continue sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

c. ▸ Étudions la dérivabilité de f à droite en $x_0 = 0$

Soit x de $]0; +\infty[$, on a : $f(0) = 0$ et :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{x(e^{-x} + 1)}}{x} = \frac{\sqrt{x}}{x}.\sqrt{e^{-x} + 1} = \frac{1}{\sqrt{x}}.\sqrt{e^{-x} + 1}$$

Puisque : $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{e^{-x} + 1} = \sqrt{2}$ (car : $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{-x} + 1 = 1 + 1 = 2$)

alors : $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}}.\sqrt{e^{-x} + 1} = +\infty$

Donc : $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$

d'où la fonction f n'est pas dérivable à droite en $x_0 = 0$.

▸ **Interprétation géométrique :** La courbe (C) admet une demi-tangente verticale au point O dirigée vers le haut.

2 Montrons que: $(\forall x \in]0; +\infty[)\ ; e^{-x} - xe^{-x} + 1 > 0$

Soit x de $]0; +\infty[$, on a : $e^{-x} - xe^{-x} + 1 = e^{-x}(e^x - x + 1)$

et $e^{-x} > 0$, donc il suffit de montrer que : $e^x - x + 1 > 0$ pour tout x de $]0; +\infty[$

On considère la fonction numérique u définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

ProfSalmi.blogspot.com

$u(x) = e^x - x + 1$

La fonction u est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on a : $u'(x) = e^x - 1$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

Puisque : $x > 0 \Leftrightarrow e^x > 1$

$\Leftrightarrow e^x - 1 > 0$

alors : $u'(x) > 0$ pour tout x de $]0;+\infty[$ donc fonction u est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Donc : $(\forall x \in]0;+\infty[) ; u(x) > u(0)$ et on : $u(0) = 0$,

Donc : $(\forall x \in]0;+\infty[) ; u(x) > 0$

c'est-à-dire $(\forall x \in]0;+\infty[) ; e^x - x + 1 > 0$

Par suite : $(\forall x \in]0;+\infty[) ; e^{-x} - xe^{-x} + 1 > 0$

3 Tableau de variations de f

Calculons: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} + x = +\infty$ et par suite : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{xe^{-x} + x} = +\infty$

Déterminons f'

La fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on a :

$$(\forall x \in]0;+\infty[) ; f'(x) = \frac{(xe^{-x} + x)'}{2\sqrt{xe^{-x} + x}} = \frac{e^{-x} - xe^{-x} + 1}{2\sqrt{xe^{-x} + x}}$$

Donc : $f'(x) > 0$ pour tout x de $]0;+\infty[$ (car : $e^{-x} - xe^{-x} + 1 > 0$ pour tout x de $]0;+\infty[$ d'après la question précédante).

Tableau de variations de f est le suivant :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$ $+\infty$	$+$	
f		$\nearrow$	$+\infty$
	0		

4 Étudions la branche infinie de (C)

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; déterminons $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

Soit x de $]0;+\infty[$, on a : $\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} . \sqrt{e^{-x} + 1}$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} + 1 = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} + 1 = 1$ (car : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$)

ProfSalmi.blogspot.com

alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{e^{-x}+1}=1$

et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}.\sqrt{e^{-x}+1}=0$; c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$

D'où la courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.

Partie 2 :

1 a. ▸ **Montrons que** $(\exists!\alpha\in\mathbb{R}^+)\,;\,e^{-\alpha}+1=\alpha$

On considère la fonction numérique v définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$v(x)=e^{-x}+1-x$

▸ La fonction v est continue sur $[0;+\infty[$.

▸ La fonction v est dérivable sur $[0;+\infty[$.

et on a : $(\forall x\in[0;+\infty[)\,;v'(x)=-e^{-x}-1=-(e^{-x}+1)$

Donc : $v'(x)<0$ tout pour x de $[0;+\infty[$ d'où la fonction v est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.

Par suite, la fonction v admet une fonction réciproque définie de $[0;+\infty[$ vers l'intervalle : $v([0;+\infty[)=\left]\lim\limits_{x\to+\infty}v(x);v(0)\right]$

Et on a : $v(0)=2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}v(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}+1-x=-\infty$

car : $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}1-x=-\infty$

donc : $v([0;+\infty[)=]-\infty;2]$

Puisque : $0\in]-\infty;2]$ alors l'équation $v(x)=0$ admet une solution unique α dans $[0;+\infty[$.

▸ **Vérifions que** $1<\alpha<2$:

On a : $v(1)=e^{-1}$ et $v(2)=e^{-2}-1=\frac{1-e^2}{e^2}$ donc : $v(2)<0<v(1)$

c'est-à-dire : $v(2)<v(\alpha)<v(1)$

Puisque la fonction v est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$ alors : $1<\alpha<2$

b. Vérifions que: $(\forall x\in[0;\alpha[)\,;e^{-x}+1>x$

La fonction v est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$

donc : $(\forall x\in[0;\alpha[)\,;v(x)>v(\alpha)$

et puisque : $v(\alpha)=0$ alors : $(\forall x\in[0;\alpha[)\,;e^{-x}+1-x>0$

c'est-à-dire : $(\forall x\in[0;\alpha[)\,;e^{-x}+1>x$

2 a. Résolvons dans l'intervalle $[0;+\infty[$ **l'équation** $f(x)=x$

Soit x de $[0;+\infty[$, on a :

ProfSalmi.blogspot.com

$$f(x) = x \iff \sqrt{xe^{-x} + x} = x$$
$$\iff xe^{-x} + x = x^2$$
$$\iff x(e^{-x} + 1 - x) = 0$$
$$\iff x = 0 \text{ ou } e^{-x} + 1 - x = 0$$

Puisque l'équation $e^{-x} + 1 - x = 0$ admet une solution unique α dans $[0; +\infty[$ alors : $f(x) = x \iff x = 0$ ou $x = \alpha$

Donc, l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = x$ dans $[0; +\infty[$ est : $S = \{0; \alpha\}$

b. Déduction :

Soit x de $]0; \alpha[$, on a : $f(x) > x \iff x(e^{-x} + 1 - x) > 0$
$$\iff e^{-x} + 1 - x > 0$$
$$\iff e^{-x} + 1 > x$$
$$\iff x \in]0; \alpha[$$

Donc : $(\forall x \in]0; \alpha[) ; f(x) > x$

3 Montrons que: $f'(\alpha) = 1 - \frac{1}{2}\alpha$

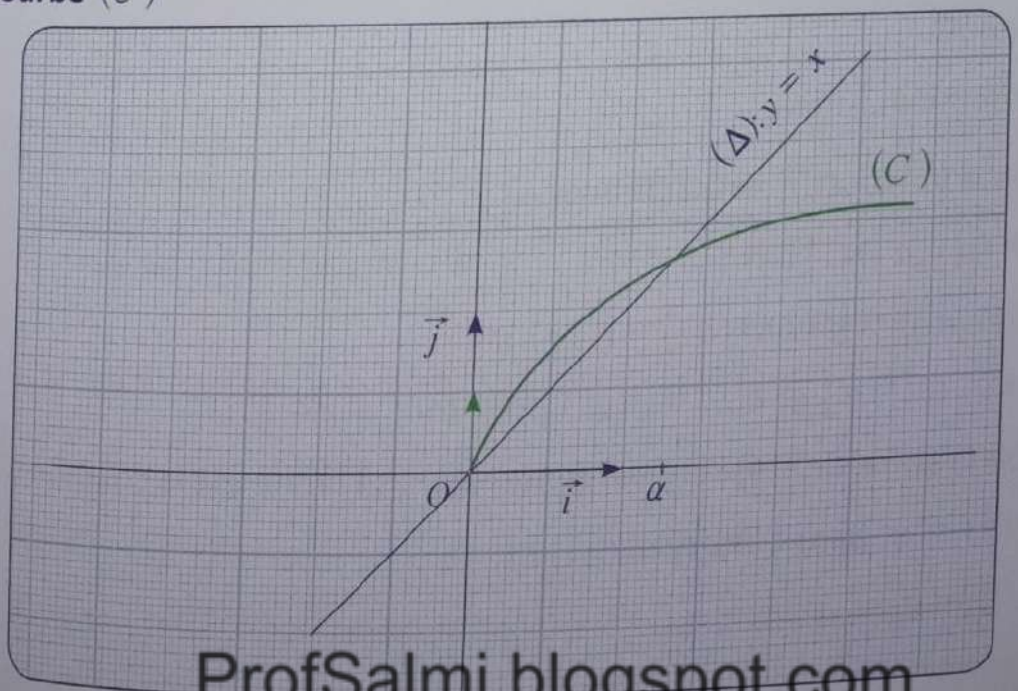
On a : $f'(x) = \frac{e^{-x} - xe^{-x} + 1}{2\sqrt{xe^{-x} + x}} = \frac{(1 - x)e^{-x} + 1}{2f(x)}$ pour tout x de $[0; +\infty[$

Donc : $f'(\alpha) = \frac{(1 - \alpha)e^{-\alpha} + 1}{2f(\alpha)}$

Puisque : $f(\alpha) = \alpha$ et $e^{-\alpha} = \alpha - 1$

alors : $f'(\alpha) = \frac{-(1 - \alpha)^2 + 1}{2\alpha} = \frac{2\alpha - \alpha^2}{2\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{2}$

4 La courbe (C)



ProfSalmi.blogspot.com

Partie 3 :

1 Vérifions que : $\sqrt{\alpha} \in]1;\alpha[$

On a: $1 < \alpha < 2$ donc : $1 < \sqrt{\alpha}$ c'est-à-dire : $\sqrt{\alpha} - 1 > 0$

Et on a : $\alpha - \sqrt{\alpha} = \sqrt{\alpha}(\sqrt{\alpha} - 1)$ donc : $\alpha - \sqrt{\alpha} > 0$ c'est-à-dire : $\sqrt{\alpha} < \alpha$

Par suite : $1 < \sqrt{\alpha} < \alpha$

2 Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; 1 < u_n < \alpha$ **en utilisant le raisonnement par récurrence**

Pour $n = 0$ on a : $u_0 = \sqrt{\alpha}$ et $1 < \sqrt{\alpha} < \alpha$ donc : $1 < u_0 < \alpha$

▸ Soit n de $\mathbb{N}$ supposons que : $1 < u_n < \alpha$ et montrons que : $1 < u_{n+1} < \alpha$

La fonction f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

donc: $1 < u_n < \alpha \Longrightarrow f(1) < f(u_n) < f(\alpha)$

$\Longrightarrow f(1) < u_{n+1} < f(\alpha)$

Puisque : $f(\alpha) = \alpha$ et $f(1) > 1$ alors : $1 < u_{n+1} < \alpha$ d'où la propriété est vraie pour $n+1$

Par suite : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; 1 < u_n < \alpha$

3 Étudions la monotonie de la suite (u_n).

On a : $(\forall x \in]0;\alpha[)\ ; f(x) > x$ et $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; u_n \in]1;\alpha[$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; f(u_n) > u_n$ c'est-à-dire : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; u_{n+1} > u_n$ et par suite, (u_n) est une suite croissante.

4 Déduction:

La suite (u_n) est strictement croissante et majorée par α : donc elle est convergente.

▸ Déterminons $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n$:

On a : ▸ La fonction f est continue sur $[1;\alpha]$

▸ $f([1;\alpha]) \subset [1;\alpha]$

car : $f([1;\alpha]) = [f(1);f(\alpha)] = [f(1);\alpha]$

▸ $u_0 \in [1;\alpha]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

Puisque la suite (u_n) est convergente, alors sa limite est la solution de l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $[1;\alpha]$.

Donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$

ProfSalmi.blogspot.com

3 Calcul intégral

1 Définition et propriétés de l'intégrale

1. Définition de l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle:

Définition :

Soit f une fonction continue sur I. a et b deux éléments de I. F une primitive de f sur I

le réel $F(b)-F(a)$ est appelé intégrale de a à b, qu'on note $\int_a^b f(x)dx$

$\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$, se lit integrale de a a b de $f(x)dx$

Remarque : $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(u)du=\int_a^b f(v)dv=\ldots$

Conséquences :

Si f est une fonction continue sur I, alors pour tout a et b de I on a :

1 $\int_a^a f(x)dx=0$

2 $\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$

3 $\int_a^b f'(x)dx=[f(x)]_a^b=f(b)-f(a)$

4 $(\forall k\in\mathbb{R});\int_a^b k\,dx=k(b-a)$

propriétés :

Soit f et g deux fonctions continues sur I, a, b et c sont des éléments de I. on a :

- **relation de chasles :** $\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$
- **linéarité :** $\begin{cases}\int_a^b (f+g)(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx\\ (\forall\lambda\in\mathbb{R});\int_a^b(\lambda f)(x)dx=\lambda\int_a^b f(x)dx\end{cases}$

Remarque :

- **On peut utiliser la relation de chasles plusieurs fois :**

$$\int_a^{c_1} f(x)dx+\int_{c_1}^{c_2} f(x)dx+\int_{c_2}^{c_3} f(x)dx+\ldots+\int_{c_{n-1}}^{c_n} f(x)dx+\int_{c_n}^{b} f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$$

- **La linéarité s'écrit aussi :**

$(\forall(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2);\int_a^b(\alpha f(x)+\beta g(x))dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx$

ProfSalmi.blogspot.com

2. Tableau de primitives des fonctions usuelles

La fonction f	Fonctions primitives de f sur I	L'intervalle I
a	$ax+b\,;b\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2+c\,;c\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$x^n\,;n\in\mathbb{N}$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+c\,;c\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}+c\,;c\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^-_*$ et $\mathbb{R}^+_*$
$n\in\mathbb{N}-\{1\}\,;\frac{1}{x^n}$	$\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}+c\,;c\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^-_*$ et $\mathbb{R}^+_*$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+c\,;c\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+_*$
$x^r\,;r\in(\mathbb{Q}-\{-1\})$	$\frac{1}{r+1}x^{r+1}+c\,;c\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+_*$
$\cos x$	$\sin x+c\,;c\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x+c\,;c\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$	$\tan x+c\,;c\in\mathbb{R}$	$]-\frac{\pi}{2}+k\pi\,;\frac{\pi}{2}+k\pi[\,;k\in\mathbb{Z}$
$\frac{1}{\sin^2 x}=1+\cot an^2 x$	$-cotanx+c\;;c\in\mathbb{R}$	$]k\pi\,;\pi+k\pi[\,;k\in\mathbb{Z}$
$u'\times u^n\,;n\in(\mathbb{Q}-\{-1\})$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c\,;c\in\mathbb{R}$	u est dérivable sur I et strictement positive sur I
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}+c\,;c\in\mathbb{R}$	u est dérivable sur I et strictement positive sur I
$\frac{v'}{v^2}$	$-\frac{1}{v}+c\,;c\in\mathbb{R}$	v dérivable et ne s'annule pas sur I
$u'+v'$	$u+v+c\,;c\in\mathbb{R}$	u et v dérivables sur I
$u'v+uv'$	$u.v+c\,;c\in\mathbb{R}$	u et v dérivables sur I
$\frac{u'v-uv'}{v^2}$	$\frac{u}{v}+c\,;c\in\mathbb{R}$	u et v dérivables sur I et v ne s'annule pas sur I

ProfSalmi.blogspot.com

$u'(v(x)) \times v'(x)$	$(uov)(x)+c\,;c\in\mathbb{R}$	v dérivable sur I et u dérivable sur $v(I)$
$\cos(ax+b)\,;a\neq 0$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)+c\,;c\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\sin(ax+b)\,;a\neq 0$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+c\,;c\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x+c\,;c\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*_+$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln\lvert u(x)\rvert+c\,;c\in\mathbb{R}$	u dérivable sur I et ne s'annule pas sur I
e^x	$e^x+c\,;c\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$u'(x)e^{u(x)}$	$e^{u(x)}+c\,;c\in\mathbb{R}$	u dérivable sur I

Exercices

Application 1:

$\int_a^b k\,dx=[kx]_a^b=k(b-a)$ (k un nombre réel).

Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes :

$I_1=\int_2^5\sqrt{3}\,dx$; $I_2=\int_3^{-1}\pi\,dt$; $I_3=\int_0^3\left(1-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)dy$

$I_4=\int_{-1}^3\ln 2\,dx$; $I_5=\int_{-4}^0\ln x\,dt$ $x\in\mathbb{R}^*_+$; $I_6=\int_2^3 e^{x^2}dy$

Exercice 2 **linéarité de l'intégrale et relation de Chales)**

Soit f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[-2;3]$ telles que :

$\int_{-2}^1 f(x)dx=5$ et $\int_3^1 f(x)dx=-4$ et $\int_2^1 g(x)dx=1$

et $\int_{-2}^1 g(x)dx=2$ et $\int_2^3 g(x)dx=-3$

1. Calculer $\int_1^3 f(x)dx$ et $\int_{-2}^3 f(x)dx$
2. Calculer $\int_{-2}^3 g(x)dx$
3. Calculer $\int_1^{-2}(f(x)+g(x))dx$ et $\int_{-2}^3\left(3g(x)-\frac{f(x)}{2}\right)dx$
4. Calculer : $I=\int_e^1(\sqrt{3}-\ln x)dx+\int_1^e\left(1+\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)dx$

ProfSalmi.blogspot.com

Application 2:

$$\int_a^b x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_a^b ; (n \in \mathbb{N}^*)$$

$$\int_a^b \frac{1}{x^n} dx = \left[\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}\right]_a^b ; (n \in \mathbb{N} \text{ et } n \geq 2)$$

Exercice 3

Calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = \int_{-2}^{3} -x dx$; $I_2 = \int_3^{-1} (1 - \sqrt{3}\,t) dt$

$I_3 = \int_0^1 -2x^5 dx$; $I_4 = \int_0^1 \left(\frac{2u}{3} - u^2\right) du$

$I_5 = \int_{-1}^{1} (2x^3 - 5x^4 + 2) dx$; $I_6 = \int_1^0 \left(-x^7 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{x^3}{4} - x^2 + 5x - 1\right) dx$

$I_7 = \int_{-1}^{2} (2x - 1)(x + 3) dx$; $I_8 = \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right) dx$

$I_9 = \int_{\sqrt{3}}^{1} \left(\frac{-4}{x^3} + \frac{2}{x^5}\right) dx$; $I_{10} = \int_1^2 \frac{2x+1}{x^5} dx$

$I_{11} = \int_2^1 \frac{2x^6 - 5x^5 - 2x + 11}{x^3} dx$

Application 3:

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{x}} dx = [2\sqrt{x}]_a^b \; ; \; \int_a^b x^r dx = \left[\frac{x^{r+1}}{r+1}\right]_a^b \; (r \in \mathbb{Q}^* \text{ et } r \neq -1)$$

Rappel : $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ et $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ et $\sqrt[n]{x^p} = x^{\frac{p}{n}}$. (où $x > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{Z}$)

Exercice 4

Calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = \int_1^4 \left(\frac{3}{\sqrt{x}} - x^2\right) dx$; $I_2 = \int_0^1 \left(x^{\frac{2}{3}} - \frac{x^3}{2}\right) dx$

$I_3 = \int_0^1 (\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}) dx$; $I_4 = \int_0^1 (x\sqrt{x} - \sqrt[4]{x}) dx$

$I_5 = \int_0^1 \left(\frac{5\sqrt{x}}{2} - 3\sqrt[5]{x^2}\right) dx$; $I_6 = \int_1^4 \left(x\sqrt[4]{x} + \frac{3\sqrt{x}}{x} - x\right) dx$

Application 4:

$$\int_a^b \frac{1}{x} dx = [\ln|x|]_a^b \text{ avec } (ab > 0) \text{ et } \int_a^b \frac{1}{\alpha x + \beta} dx = \left[\frac{1}{\alpha} \ln|\alpha x + \beta|\right]_a^b, \text{ avec}$$

$(\forall x \in [a;b]) ; \alpha x + \beta \neq 0$

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 5

Calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = \int_1^e -\frac{3}{x}dx$; $I_2 = \int_1^2 \frac{2x-1}{x^2}dx$

$I_3 = \int_0^1 \left(2 - \frac{1}{x+1}\right)dx$; $I_4 = \int_0^{-1} \frac{2}{3x+4}dx$

$I_5 = \int_{-1}^1 \frac{2x}{x+2}dx$; $\left(\frac{x}{x+2} = 1 - \frac{2}{x+2}\right)$; $I_6 = \int_0^1 \frac{2x+3}{x+1}dx$

$I_7 = \int_1^2 \frac{1}{(x+1)(x+2)}dx$; $\left(\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right)$

Application 5:

$\int_a^b \cos x dx = [\sin x]_a^b$; $\int_a^b \sin x dx = [-\cos x]_a^b$

$\int_a^\beta \cos(ax+b)dx = \left[\frac{1}{a}\sin(ax+b)\right]_a^\beta$

$\int_a^\beta \sin(ax+b)dx = \left[\frac{-1}{a}\cos(ax+b)\right]_a^\beta$

Rappel : $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$ et $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$

Exercice 6

Calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = \int_{-\pi}^{\pi} (\cos x - \sin x)dx$ $I_2 = \int_0^{\pi} (2\sin x - 3\cos(2x))dx$

$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} -7\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)dx$ $I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\sin(3x) - \frac{3}{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right)dx$

$I_5 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx$ $I_6 = \int_0^{\pi} \sin^2 x dx$

$I_7 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2\theta d\theta$ $I_8 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{-3}{\cos^2 x}dx$

$I_9 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 x dx$ **Rappel :** $\tan'(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

Application 6:

$\int_a^\beta e^{ax+b}dx = \left[\frac{1}{a}e^{ax+b}\right]_a^\beta$ et $\int_a^\beta e^{-x}dx = [-e^{-x}]_a^\beta$

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 7

Calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = \int_{-1}^{0} (e^x - 4e^{2x})dx$ $\quad$ $I_2 = \int_{-2}^{2} (e^{-x} - e^{\frac{x}{2}})dx$

$I_3 = \int_{0}^{1} (1 - e^{2x-1})dx$ $\quad$ $I_4 = \int_{0}^{1} (e^x - 1)(2e^x + 1)dx$

$I_5 = \int_{0}^{\ln 2} \frac{e^x + 1 - e^{-x}}{e^{2x}}dx$ $\quad$ $I_6 = \int_{-\ln 2}^{0} (e^x - e^{-x})^2 dx$

$I_7 = \int_{0}^{1} (e^{4x} - 3e^{2x} - 1)dx$ $\quad$ $I_8 = \int_{0}^{\ln 2} \frac{e^{2x} + e^x + 1}{e^x}dx$

$I_9 = \int_{0}^{\ln 2} \frac{(e^x - 1)^2}{e^x}dx$

Exercice 8 Application de la relation de Chasles

Calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = \int_{-1}^{3} |x - 2|dx$; $\quad$ $I_2 = \int_{0}^{\pi} |\cos x|dx$

$I_3 = \int_{-1}^{2} |x^2 - x|dx$; $\quad$ $I_4 = \int_{-2}^{3} |-2x^2 + 2x + 4|dx$

$I_5 = \int_{-2}^{1} (|2x - 1| + |x + 1|)dx$; $\quad$ $I_6 = \int_{-1}^{1} |e^{2x} - 1|dx$

Exercice 9

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = 3xe^{-x}$:

1. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; f(x) = 3e^{-x} - f'(x)$
2. En déduire que : $I = \int_{0}^{1} xe^{-x}dx$

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (1 - x)e^x$:

1. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; 2f'(x) - f''(x) = f(x)$
2. En déduire la valeur de l'intégrale $\int_{0}^{1} f(x)dx$

ProfSalmi.blogspot.com

Solutions

Exercice 1

Calculons les intégrales suivantes :

1 $I_1 = \int_2^5 \sqrt{3}\,dx = [\sqrt{3}x]_2^5 = 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$

$= 3\sqrt{3}$

2 $I_2 = \int_3^{-1} \pi\,dt = [\pi t]_3^{-1} = -\pi - 3\pi = -4\pi$

3 $I_3 = \int_0^3 \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)dy = \left[\left(1 - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)y\right]_0^3 = \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \times 3$

$= 3 - \frac{3\sqrt{5}}{2}$

4 $I_4 = \int_{-1}^3 \ln 2\,dx = [(\ln 2)x]_{-1}^3 = 3\ln 2 + \ln 2 = 4\ln 2$

5 $I_5 = \int_{-4}^0 \ln(x)\,dt = [(\ln x)t]_{-4}^0 = 4(\ln x)$

6 $I_6 = \int_2^3 e^{x^2}\,dy = [e^{x^2}.y]_2^3 = 3e^{x^2} - 2e^{x^2} = e^{x^2}$

Exercice 2

1 **Calculons** $\int_1^3 f(x)dx$ **et** $\int_{-2}^3 f(x)dx$ **:**

On a : $\int_3^1 f(x)dx = -4$, et comme : $\int_1^3 f(x)dx = -\int_3^1 f(x)dx$

alors : $\int_1^3 f(x)dx = 4$

On a : $\int_{-2}^1 f(x)dx = 5$ et $\int_1^3 f(x)dx = 4$

Donc : (d'après relation de Chasles) $\int_{-2}^3 f(x)dx = \int_{-2}^1 f(x)dx + \int_1^3 f(x)dx$

$= 5 + 4 = 9$

2 **Calculons** $\int_{-2}^3 g(x)dx$ **:**

On a : $\int_{-2}^1 g(x)dx = 2$ et $\int_1^2 g(x)dx = -\int_2^1 g(x)dx = -1$ et $\int_2^3 g(x)dx = -3$

et à l'aide de la relation de chasles, on obtient :

$$\int_{-2}^3 g(x)dx = \int_{-2}^1 g(x)dx + \int_1^2 g(x)dx + \int_2^3 g(x)dx$$

$$= 2 - 1 - 3 = -2$$

3 **Calculons** $\int_1^{-2} (f(x) + g(x))dx$ **:**

ProfSalmi.blogspot.com

On a : $\int_{1}^{-2}(f(x)+g(x))dx = -\int_{-2}^{1}(f(x)+g(x))dx$

(linéarité de l'intégrale) $= -\left(\int_{-2}^{1} f(x)dx + \int_{-2}^{1} g(x)dx\right)$

$= -(5+2) = -7$

- **Calculons** $\int_{-2}^{3}\left(3g(x)-\frac{1}{2}f(x)\right)dx$:

On a : $\int_{-2}^{3}\left(3g(x)-\frac{1}{2}f(x)\right) = 3\int_{-2}^{3} g(x)dx - \frac{1}{2}\int_{-2}^{3} f(x)dx$

(linéarité de l'intégrale) $= 3(-2)-\frac{1}{2}(9) = -6-\frac{9}{2} = -\frac{21}{2}$

Calculons l'intégrale : $I = \int_{e}^{1}(\sqrt{3}-\ln x)dx + \int_{1}^{e}\left(1+\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)dx$

On a : $(\forall x \in [1;e])$; $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$

Donc : $I = \int_{e}^{1}(\sqrt{3}-\ln x)dx + \int_{1}^{e}\left(1+\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)dx$

$= \int_{e}^{1}(\sqrt{3}-\ln x)dx + \int_{1}^{e}(1-\ln x)dx$

$= \int_{e}^{1}\sqrt{3}\,dx - \int_{e}^{1}\ln x dx + \int_{1}^{e}1dx + \int_{e}^{1}\ln x dx$

$= [\sqrt{3}x]_{e}^{1} + [x]_{1}^{e}$

$= \sqrt{3} - \sqrt{3}e + e - 1$

$= (\sqrt{3}-1) + e(1-\sqrt{3}) = (1-\sqrt{3})(e-1)$

Exercice 3

1 **Calculons** I_1 :

On a : $I_1 = \int_{-2}^{3} -x dx = \left[-\frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^{3} = \left(-\frac{9}{2}+\frac{4}{2}\right) = -\frac{5}{2}$

2 **Calculons** I_2 : $I_2 = \int_{3}^{-1}(1-\sqrt{3}t)dt = \left[t-\sqrt{3}.\frac{1}{2}t^2\right]_{3}^{-1}$

$= \left[t-\frac{\sqrt{3}}{2}t^2\right]_{3}^{-1} = \left(-1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(3-\frac{\sqrt{3}}{2}\times 9\right)$

$= -4+4\sqrt{3}$

3 **Calculons** I_3 :

On a : $I_3 = \int_{0}^{1} -2x^5 dx = \left[-2.\frac{1}{6}x^6\right]_{0}^{1} = \left[-\frac{1}{3}x^6\right]_{0}^{1} = -\frac{1}{3}$

4 **Calculons** I_4 :

On a : $I_4 = \int_{0}^{1}\left(\frac{2}{3}u-u^2\right)du = \left[\frac{2}{3}.\frac{1}{2}u^2-\frac{1}{3}u^3\right]_{0}^{1}$

$= \left[\frac{1}{3}u^2-\frac{1}{3}u^3\right]_{0}^{1} = 0$

ProfSalmi.blogspot.com

5 Calculons I_5 :

On a : $I_5 = \int_{-1}^{1}(2x^3 - 5x^4 + 2)dx = \left[2 \times \frac{1}{4}x^4 - 5 \times \frac{1}{5}x^5 + 2x\right]_{-1}^{1}$

$= \left[\frac{1}{2}x^4 - x^5 + 2x\right]_{-1}^{1} = \left(\frac{1}{2} - 1 + 2\right) - \left(\frac{1}{2} + 1 - 2\right)$

$= 2$

6 Calculons I_6 :

On a : $I_6 = \int_{-1}^{0}\left(-x^7 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{1}{4}x^3 - x^2 + 5x - 1\right)dx$

$= \left[-\frac{1}{8}x^8 - \frac{3}{2} \times \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 5 \times \frac{1}{2}x^2 - x\right]_{-1}^{0}$

$= \left[-\frac{1}{8}x^8 - \frac{3}{10}x^5 + \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - x\right]_{-1}^{0}$

$= 0 - \left(-\frac{1}{8} - \frac{3}{10} + \frac{1}{16} - \frac{1}{3} + \frac{5}{2} - 1\right)$

$= \frac{-193}{240}$

7 Calculons I_7 :

On a : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; (2x-1)(x+3) = 2x^2 + 5x - 3$

Donc : $I_7 = \int_{-1}^{2}(2x-1)(x+3)dx = \int_{-1}^{2}(2x^2 + 5x - 3)dx$

$= \left[2 \times \frac{1}{3}x^3 + 5 \times \frac{1}{2}x^2 - 3x\right]_{-1}^{2}$

$= \left[\frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 3x\right]_{-1}^{2}$

$= \left(\frac{16}{3} + 10 - 6\right) - \left(-\frac{2}{3} + \frac{5}{2} + 3\right)$

$= \frac{9}{2}$

8 Calculons I_8 :

On a : $I_8 = \int_{1}^{2}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right)dx = \left[-\frac{1}{x} - 2\left(\frac{-1}{2x^2}\right)\right]_{1}^{2}$

$= \left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right]_{1}^{2} = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) - (0) = -\frac{1}{4}$

9 Calculons I_9 :

On a : $I_9 = \int_{\sqrt{3}}^{1}\left(\frac{-4}{x^3} + \frac{2}{x^5}\right)dx = \left[-4 \times \frac{-1}{2x^2} + 2 \times \frac{-1}{4x^4}\right]_{\sqrt{3}}^{1}$

$= \left[\frac{2}{x^2} - \frac{1}{2x^4}\right]_{\sqrt{3}}^{1} = \left(2 - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{18}\right) = \frac{8}{9}$

10 Calculons I_{10} :

On a : $(\forall x \in [1;2]) ; \frac{2x+1}{x^5} = \frac{2x}{x^5} + \frac{1}{x^5} = \frac{2}{x^4} + \frac{1}{x^5}$

ProfSalmi.blogspot.com

Donc : $I_{10}=\int_1^2 \frac{2x+1}{x^5}dx=\int_1^2\left(\frac{2}{x^4}+\frac{1}{x^5}\right)dx=\left[2.\frac{-1}{3x^3}+\frac{-1}{4x^4}\right]_1^2$

$=\left[-\frac{2}{3}.\frac{1}{x^3}-\frac{1}{4x^4}\right]_1^2=\left(-\frac{1}{12}-\frac{1}{64}\right)-\left(-\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\right)$

$=\frac{157}{192}$

11 Calculons I_{11} :

On a : pour tout $x\in[1;2]$:

$$\frac{2x^6-5x^5-2x+11}{x^3}=\frac{2x^6}{x^3}-\frac{5x^5}{x^3}-\frac{2x}{x^3}+\frac{11}{x^3}=2x^3-5x^2-\frac{2}{x^2}+\frac{11}{x^3}$$

Donc : $I_{11}=\int_2^1 \frac{2x^6-5x^5-2x+11}{x^3}dx=\int_2^1\left(2x^3-5x^2-\frac{2}{x^2}+\frac{11}{x^3}\right)dx$

$=\left[2\times\frac{1}{4}x^4-\frac{5}{3}x^3-2.\frac{-1}{x}+11.\frac{-1}{2x^2}\right]_2^1$

$=\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{3}+2-\frac{11}{2}\right)-\left(8-\frac{40}{3}+1-\frac{11}{8}\right)$

$=-\frac{14}{3}+\frac{137}{24}=\frac{25}{24}$

Exercice 4

1 Calculons I_1 :

On a : $I_1=\int_1^4\left(\frac{3}{\sqrt{x}}-x^2\right)dx=\int_1^4\left(6.\frac{1}{2\sqrt{x}}-x^2\right)dx$

$=\left[6\sqrt{x}-\frac{1}{3}x^3\right]_1^4=\left(12-\frac{64}{3}\right)-\left(6-\frac{1}{3}\right)=-15$

2 Calculons I_2 :

On a : $I_2=\int_0^1\left(x^{\frac{2}{3}}-\frac{1}{2}x^3\right)dx=\left[\frac{1}{\frac{2}{3}+1}x^{\frac{2}{3}+1}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}x^4\right]_0^1$

$=\left[\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}-\frac{1}{8}x^4\right]_0^1=\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{8}\right)-(0)=\frac{19}{40}$

3 Calculons I_3 :

On a : $\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$ et $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ pour tout $x\in[0;1]$

Donc : $I_3=\int_0^1(\sqrt[3]{x}+\sqrt{x})dx=\int_0^1(x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{2}})dx$

$=\left[\frac{1}{\frac{1}{3}+1}x^{\frac{1}{3}+1}+\frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1}\right]_0^1=\left[\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$

$=\frac{3}{4}+\frac{2}{3}=\frac{17}{12}$

ProfSalmi.blogspot.com

4 Calculons I_4 :

On a : $(\forall x \in [0;+\infty[) ; \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$ et $x\sqrt{x} = x^1 \times x^{\frac{1}{2}} = x^{1+\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}}$

Donc : $I_4 = \int_0^1 (x\sqrt{x} - \sqrt[4]{x})dx = \int_0^1 (x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{4}})dx$

$$= \left[\frac{1}{\frac{3}{2}+1}x^{\frac{3}{2}+1} - \frac{1}{\frac{1}{4}+1}x^{\frac{1}{4}+1}\right] = \left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{5} - \frac{4}{5} = -\frac{2}{5}$$

5 Calculons I_5 :

On a : $\sqrt[5]{x^2} = x^{\frac{2}{5}}$ et $(\forall x \in [0;+\infty[) ; \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

Donc : $I_5 = \int_0^1 \left(\frac{5}{2}\sqrt{x} - 3\sqrt[5]{x^2}\right)dx = \int_0^1 \left(\frac{5}{2}x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{2}{5}}\right)dx$

$$= \left[\frac{5}{2}.\frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1} - 3.\frac{1}{\frac{2}{5}+1}x^{\frac{2}{5}+1}\right]_0^1$$

$$= \left[\frac{5}{2} \times \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 3.\frac{5}{7}x^{\frac{7}{5}}\right]_0^1 = \left[\frac{5}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{15}{7}x^{\frac{7}{5}}\right]_0^1$$

$$= \frac{5}{3} - \frac{15}{7} = -\frac{10}{21}$$

6 Calculons I_6 :

On a : $(\forall x \in [1;4]) ; x\sqrt[4]{x} = x^1 \times x^{\frac{1}{4}} = x^{1+\frac{1}{4}} = x^{\frac{5}{4}}$ et $\frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2} = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$

Donc : $I_6 = \int_1^4 \left(x\sqrt[4]{x} + \frac{3\sqrt{x}}{x} - x\right)dx = \int_1^4 (x^{\frac{5}{4}} + 3x^{-\frac{1}{2}} - x)dx$

$$= \left[\frac{1}{\frac{5}{4}+1}x^{\frac{5}{4}+1} + 3\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1} - \frac{1}{2}x^2\right]_1^4$$

$$= \left[\frac{4}{9}x^{\frac{9}{4}} + 6\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2\right]_1^4$$

$$= \left[\frac{4}{9}x^2\sqrt[4]{x} + 6\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2\right]_1^4$$

$$= \left(\frac{4}{9} \times 16\sqrt[4]{4} + 12 - 8\right) - \left(\frac{4}{9} + 6 - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{64}{9}\sqrt[4]{4} + 4\right) - \left(\frac{107}{18}\right) = \frac{64}{9}\sqrt[4]{4} - \frac{35}{18}$$

Exercice 5

Calculons les intégrales suivantes :

1 Calculons I_1.

ProfSalmi.blogspot.com

On a : $I_1 = \int_1^e -\frac{3}{x}dx = -3\int_1^e \frac{1}{x}dx$

Donc : $I_1 = -3[\ln|x|]_1^e = -3$ (car $\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$)

2 **Calculons I_2 :**

On a d'après la linéarité de l'intégrale :

$$I_2 = \int_1^2 \frac{2x-1}{x^2}dx = \int_1^2 \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)dx$$
$$= \int_1^2 \frac{2}{x}dx + \int_1^2 -\frac{1}{x^2}dx$$
$$= 2\int_1^2 \frac{1}{x}dx + \int_1^2 -\frac{1}{x^2}dx$$
$$= 2[\ln|x|]_1^2 + \left[\frac{1}{x}\right]_1^2$$
$$= 2(\ln 2) + \left(\frac{1}{2} - 1\right) = 2\ln 2 - \frac{1}{2}$$

3 **Calculons I_3 :**

On a : $I_3 = \int_0^1 \left(2 - \frac{1}{x+1}\right)dx = \int_0^1 \left(2 - \frac{(x+1)'}{x+1}\right)dx$
$= [2x - \ln|x+1|]_0^1 = (2 - \ln 2) - (0)$
$= 2 - \ln 2$

4 **Calculons I_4 :**

On a : $\frac{2}{3x+4} = 2 \times \frac{1}{3x+4} = \frac{2}{3} \times \frac{(3x+4)'}{3x+4}$

Donc : $I_4 = \int_0^{-1} \frac{2}{3x+4}dx = \int_0^{-1} \frac{2}{3} \times \frac{(3x+4)'}{3x+4}dx$
$= \frac{2}{3}[\ln|3x+4|]_0^{-1} = \frac{2}{3}(\ln(1) - 2\ln(4))$
$= -\frac{4}{3}\ln(4)$

5 **Calculons I_5 :**

On a : $\frac{x}{x+2} = 1 - \frac{2}{x+2} = 1 - 2 \times \frac{(x+2)'}{x+2}$

Donc : $I_5 = \int_{-1}^1 \frac{2x}{x+2}dx = 2\int_{-1}^1 \left(1 - 2 \times \frac{(x+2)'}{x+2}\right)dx$
$= 2[x - 2\ln|x+2|]_{-1}^1 = 2[(1 - 2\ln(3)) - (-1)]$
$= (2 - 2\ln(3)) \times 2$
$= 4 - 4\ln(3)$

ProfSalmi.blogspot.com

6 Calculons I_6 :

Méthode 1: On a : $\frac{2x+3}{x+1}=\frac{2(x+1)+1}{x+1}=\frac{2(x+1)}{x+1}+\frac{1}{x+1}$

D'où : $\frac{2x+3}{x+1}=2+\frac{1}{x+1}$

Méthode 2 : Division euclidienne de $2x+3$ par $x+1$

On a :
$$\begin{array}{r|l} 2x+3 & x+1 \\ \hline -2x-2 & 2 \\ \hline 1 & \end{array}$$

On a : $2x+3=2(x+1)+1$

Donc : $\frac{2x+3}{x+1}=\frac{2(x+1)+1}{x+1}=\frac{2(x+1)}{x+1}+\frac{1}{x+1}=2+\frac{1}{x+1}$

Méthode 3 : $(\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\}):\frac{2x+3}{x+1}=a+\frac{b}{x+1}$

$$=\frac{ax+a+b}{x+1}$$

Donc : $(\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\})ax+a+b=2x+3$

et par suite : $a=2$ et $a+b=3$ soit $b=1$

Ainsi : $(\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\});\frac{2x+3}{x+1}=2+\frac{1}{x+1}$

▸ **Calculons I_6 :**

On a : $I_6=\int_0^1\frac{2x+3}{x+1}dx=\int_0^1\left(2+\frac{1}{x+1}\right)dx=\int_0^1\left(2+\frac{(x+1)'}{x+1}\right)dx$

$=[2x+\ln|x+1|]_0^1=2+\ln(2)$

7 Calculons I_7 :

Remarque : $\frac{1}{(ax+b)(cx+d)}=\frac{1}{ad-bc}\left(\frac{a}{ax+b}-\frac{c}{cx+d}\right)$

On a : $\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$

Donc : $\int_1^2\frac{1}{(x+1)(x+2)}dx=\int_1^2\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx$

$$=\int_1^2\left(\frac{(x+1)'}{x+1}-\frac{(x+2)'}{x+2}\right)dx$$

$$=[\ln|x+1|-\ln|x+2|]_1^2$$

$$=\left[\ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right|\right]_1^2=\ln\left(\frac{3}{4}\right)-\ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$=\ln\left(\frac{9}{8}\right)$$

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 6

Calculons les intégrales suivantes :

1 Calculons I_1 :

On a : $I_1 = \int_{-\pi}^{\pi} (\cos x - \sin x)dx = [\sin x + \cos x]_{-\pi}^{\pi}$

$= (\sin(\pi) + \cos(\pi)) - (\sin(-\pi) + \cos(-\pi))$

$= (-1) - (-1) = 0$

2 Calculons I_2 :

On a : $I_2 = \int_0^{\pi} (2\sin x - 3\cos(2x))dx = \left[2(-\cos x) - 3\left(\frac{1}{2}\sin(2x)\right)\right]_0^{\pi}$

$= \left[-2\cos x - \frac{3}{2}\sin(2x)\right]_0^{\pi}$

$= \left(-2\cos\pi - \frac{3}{2}\sin(2\pi)\right) - \left(-2\cos(0) - \frac{3}{2}\sin(0)\right)$

$= 2 + 2 = 4$

3 Calculons I_3 :

On a : $I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} -7\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)dx = 7\int_0^{\frac{\pi}{3}} -\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)dx$

$I_3 = 7\left[\frac{1}{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = 7\left(\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 0$

4 Calculons I_4 :

On a : $I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\sin(3x) - \frac{3}{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right)dx = \left[-\frac{1}{3}\cos(3x) - \frac{3}{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$

$= \left(-\frac{1}{3}\cos\frac{\pi}{2} - \frac{3}{2}\sin(0)\right) - \left(-\frac{1}{3}\cos(0) - \frac{3}{2}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

$= \frac{1}{3} - \frac{3}{4} = -\frac{5}{12}$

5 On a : $(\forall x \in \mathbb{R}); \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$

Donc : $I_5 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)\right)dx$

$= \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\sin(2x)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}$

$= \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}$

$= \left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\sin(\pi)\right)$

$= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{4} - \frac{\pi}{8} = \frac{2-\pi}{8}$

ProfSalmi.blogspot.com

6 Calculons I_6 :

On a : $(\forall x \in \mathbb{R})\,; \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$

Donc : $I_6 = \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)\right) dx$

$= \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^{\pi} = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x)\right]_0^{\pi}$

$= \left(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{4}\sin(2\pi)\right) - \left(\frac{1}{2} \times 0 - \frac{1}{4}\sin(0)\right)$

$= \frac{\pi}{2}$

7 Calculons I_7 :

On a : $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$; $\tan^2(\theta) = 1 + \tan^2\theta - 1 = (\tan)'(\theta) - 1$

Donc : $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} ((\tan)'(\theta) - 1) d\theta$

$= [\tan(\theta) - \theta]_0^{\frac{\pi}{4}} = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}$

8 Calculons I_8 :

On a : $I_8 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{-3}{\cos^2 x} dx = -3\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2 x} dx = -3\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\tan)'(x) dx$

$= -3[\tan(x)]_0^{\frac{\pi}{3}} = -3\sqrt{3}$

9 Calculons I_9 :

On a $(\forall x \in \mathbb{R})$; $\cos^4 x = (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)\right)^2$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\cos^2(2x)$ (1)

de même pour la linéarisation de $\cos(2x)$ on a :

$\cos^2(2x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(4x)$ (2)

et par suite : $\cos^4 x = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(4x)\right)$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{8}\cos(4x)$

Ainsi : $(\forall x \in \mathbb{R})\,; \cos^4 x = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{8}\cos(4x)$

Donc : $I_9 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{8}\cos(4x)\right) dx$

$= \left[\frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{32}\sin(4x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= \left(\frac{3}{8} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{32}\sin\pi\right) - 0$

$= \frac{3\pi}{32} + \frac{1}{4} = \frac{8 + 3\pi}{32}$

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 7

Calculons les intégrales suivantes :

1 Pour I_1 :

On a : $I_1 = \int_{-1}^{0} (e^x - 4e^{2x})dx = \left[e^x - 4 \times \frac{1}{2}e^{2x}\right]_{-1}^{0}$

$= [e^x - 2e^{2x}]_{-1}^{0} = (1-2) - (e^{-1} - 2e^{-2})$

$= 2e^{-2} - e^{-1} - 1$

2 Pour I_2 :

On a : $I_2 = \int_{-2}^{2} (e^{-x} - e^{\frac{x}{2}})dx = \left[-e^{-x} - \frac{1}{\frac{1}{2}}e^{\frac{x}{2}}\right]_{-2}^{2}$

$= [-e^{-x} - 2e^{\frac{x}{2}}]_{-2}^{2}$

$= (-e^{-2} - 2e) - (-e^2 - 2e^{-1})$

$= 2e^{-1} - 2e + e^2 - e^{-2}$

3 Pour I_3 :

On a : $I_3 = \int_{0}^{1} (1 - e^{2x-1})dx = \left[x - \frac{1}{2}e^{2x-1}\right]_{0}^{1}$

$= \left(1 - \frac{1}{2}e\right) - \left(0 - \frac{1}{2}e^{-1}\right) = 1 + \frac{1}{2}e^{-1} - \frac{1}{2}e$

4 Pour I_4 :

Ona: $(\forall x \in [0;1])$; $(e^x - 1)(2e^x + 1) = 2(e^x)^2 + e^x - 2e^x - 1 = 2e^{2x} - e^x - 1$

Donc : $I_4 = \int_{0}^{1} (e^x - 1)(2e^x + 1)dx = \int_{0}^{1} (2e^{2x} - e^x - 1)dx$

$= \left[2 \times \frac{1}{2}e^{2x} - e^x - x\right]_{0}^{1} = [e^{2x} - e^x - x]_{0}^{1}$

$= (e^2 - e - 1) - (1 - 1 - 0) = e^2 - e - 1$

5 Pour I_5 :

On a : $(\forall x \in [0;\ln 2])$; $\frac{e^x + 1 - e^{-x}}{e^{2x}} = e^{-2x}(e^x + 1 - e^{-x})$

$= e^{-2x+x} + e^{-2x} - e^{-2x-x}$

$= e^{-x} + e^{-2x} - e^{-3x}$

Donc : $I_5 = \int_{0}^{\ln 2} \frac{e^x + 1 - e^{-x}}{e^{2x}}dx = \int_{0}^{\ln 2} (e^{-x} + e^{-2x} - e^{-3x})dx$

$= \left[-e^{-x} + \frac{1}{-2}e^{-2x} - \frac{1}{-3}e^{-3x}\right]_{0}^{\ln 2}$

$= \left[-\frac{1}{e^x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{e^{2x}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{e^{3x}}\right]_{0}^{\ln 2}$

$= \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\frac{1}{8}\right) - \left(-1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{7}{12}$

ProfSalmi.blogspot.com

6 **Pour I_6 :**

On a : $(\forall x \in [-\ln 2\,;0])$; $(e^x - e^{-x})^2 = (e^x)^2 - 2e^x \times e^{-x} + (e^{-x})^2$

$= e^{2x} - 2 + e^{-2x}$

Donc : $I_6 = \int_{-\ln 2}^{0} (e^{2x} + e^{-2x} - 2)dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{-2}e^{-2x} - 2x\right]_{-\ln 2}^{0}$

$= \left[\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{-2x} - 2x\right]_{-\ln 2}^{0}$

$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 0\right) - \left(\frac{1}{4} - 2 + 2\ln 2\right)$

$= \frac{7}{4} - 2\ln 2$

7 **Pour I_7 :**

On a : $I_7 = \int_0^1 (e^{4x} - 3e^{2x} - 1)dx = \left[\frac{1}{4}e^{4x} - 3 \times \frac{1}{2}e^{2x} - x\right]_0^1$

$= \left[\frac{1}{4}e^{4x} - \frac{3}{2}e^{2x} - x\right]_0^1 = \left(\frac{1}{4}e^4 - \frac{3}{2}e^2 - 1\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4}e^4 - \frac{3}{2}e^2 + \frac{1}{4}$

8 **Pour I_8 :**

On a : $(\forall x \in [0;\ln 2])$; $\frac{e^{2x} + e^x + 1}{e^x} = e^{-x}(e^{2x} + e^x + 1)$

$= e^{2x-x} + e^{x-x} + e^{-x}$

$= e^x + e^0 + e^{-x} = e^x + e^{-x} + 1$

Donc : $I_8 = \int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x} + e^x + 1}{e^x} dx = \int_0^{\ln 2} (e^x + e^{-x} + 1)dx$

$= [e^x - e^{-x} + x]_0^{\ln 2} = \left(2 - \frac{1}{2} + \ln 2\right) - (1 - 1 + 0)$

$= \frac{3}{2} + \ln 2$

9 **Pour I_9 :**

On a : $(\forall x \in [0;\ln 2])$; $\frac{(e^x - 1)^2}{e^x} = e^{-x}((e^x)^2 - 2e^x + 1)$

$= e^{-x}(e^{2x} - 2e^x + 1)$

$= e^{2x-x} - 2e^x \times e^{-x} + e^{-x}$

$= e^x + e^{-x} - 2$

Donc : $I_9 = \int_0^{\ln 2} \frac{(e^x - 1)^2}{e^x} dx = \int_0^{\ln 2} (e^x + e^{-x} - 2)dx$

$= [e^x - e^{-x} - 2x]_0^{\ln 2}$

$= \left(2 - \frac{1}{2} - 2\ln 2\right) - (1 - 1 - 0)$

$= \frac{3}{2} - 2\ln 2$

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 8

Calculons les intégrales suivantes en utilisant la relation de Chasles :

1 $I_1 = \int_{-1}^{3} |x-2|dx$

▸ Écrivons l'expression $|x-2|$ sans valeur absolue suivant le signe de $x-2$ sur l'intervalle $[-1;3]$

▸ Tableau de signe de $x-2$:

x	-1		2		3
$x-2$		$-$	0	$+$	
$\|x-2\|$	$-x+2$		$x-2$		

Donc : $I_1 = \int_{-1}^{3} |x-2|dx = \int_{-1}^{2} |x-2|dx + \int_{2}^{3} |x-2|dx$

$= \int_{-1}^{2} (-x+2)dx + \int_{2}^{3} (x-2)dx$

$= \left[-\frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-1}^{2} + \left[\frac{1}{2}x^2 - 2x\right]_{2}^{3}$

$= 5$

2 $I_2 = \int_{0}^{\pi} |\cos x|dx$

Tableau de signe de $\cos x$ sur l'intervalle $[0;\pi]$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos x$		$+$	0	$-$	
$\|\cos x\|$	$\cos x$		$-\cos x$		

Donc : $I_2 = \int_{0}^{\pi} |\cos x|dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} |\cos x|dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |\cos x|dx$

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\cos x dx$

$= [\sin x]_{0}^{\frac{\pi}{2}} + [-\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 1 + 1 = 2$

3 $I_3 = \int_{-1}^{2} |x^2 - x|dx$

Écrivons l'expression $|x^2-x|$ sans le symbole de la valeur absolue.

On a : $x^2 - x = x(x-1)$

Tableau de signe de x^2-x :

ProfSalmi.blogspot.com

x	-1		0		1		2
x^2-x		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\lvert x^2-x\rvert$	x^2-x		$x-x^2$		x^2-x		

Donc : $I_3=\int_{-1}^{2}|x^2-x|dx=\int_{-1}^{0}|x^2-x|dx+\int_{0}^{1}|x^2-x|dx+\int_{1}^{2}|x^2-x|dx$

$=\int_{-1}^{0}(x^2-x)dx+\int_{0}^{1}(x-x^2)dx+\int_{1}^{2}(x^2-x)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_{0}^{1}+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_{1}^{2}$

$=-\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{8}{3}-2\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)=\frac{11}{6}$

4 $I_4=\int_{-2}^{3}|-2x^2+2x+4|dx$:

Expression de $|-2x^2+2x+4|$ sans le symbole de la valeur absolue

Étudions le singe de $(-2x^2+2x+4)$ sur $[-2;3]$

On a : $-2x^2+2x+4=0$; $\Delta=36$ donc $x_1=-1$ et $x_2=2$.

Tableau de signe de $-2x^2+2x+4$

x	-2		-1		2		3
$-2x^2-2x+4$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$\lvert-2x^2+2x+4x\rvert$	$2x^2-2x-4$		$-2x^2+2x+4$		$2x^2-2x-4$		

On a : $I_4=\int_{-2}^{3}|-2x^2+2x+4|dx$

$I_4=\int_{-2}^{-1}|-2x^2+2x+4|dx+\int_{-1}^{2}|-2x^2+2x+4|dx+\int_{2}^{3}|-2x^2+2x+4|dx$

$=\int_{-2}^{-1}(2x^2-2x-4)dx+\int_{-1}^{2}(-2x^2+2x+4)dx+\int_{-2}^{3}(2x^2-2x-4)dx$

$=\left[\frac{2}{3}x^3-x^2-4x\right]_{-2}^{-1}+\left[-\frac{2}{3}x^3+x^2+4x\right]_{-1}^{2}+\left[\frac{2}{3}x^3-x^2-4x\right]_{2}^{3}$

$=\left(-\frac{2}{3}-1+4+\frac{16}{3}+4-8\right)+\left(-\frac{16}{3}+12-\frac{2}{3}-1+4\right)+\left(\frac{54}{3}-21-\frac{16}{3}+12\right)$

$=\frac{11}{3}+9+\frac{38}{3}-9=\frac{49}{3}$

5 $I_5=\int_{-2}^{1}(|2x-1|+|x+1|)dx$

Étudions le signe de $2x-1$ et déterminons $x+1$ sur $[-2;1]$ et l'expression de $|2x-1|+|x+1|$ sans le symbole valeur absolue.

ProfSalmi.blogspot.com

x	-2		-1		$\frac{1}{2}$	1
$2x-1$	$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$	
$\lvert 2x-1\rvert+\lvert x+1\rvert$	$(-2x+1)+(-x-1)=-3x$		$(-2x+1)+(x+1)=-x+2$		$(2x-1)+(x+1)=3x$	

Donc :

$$I_5=\int_{-2}^{1}(|2x-1|+|x+1|)dx$$

$$=\int_{-2}^{-1}(|2x-1|+|x+1|)dx+\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(|2x-1|+|x+1|)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(|2x-1|+|x+1|)dx$$

$$=\int_{-2}^{-1}-3x\,dx+\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(-x+2)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}3x\,dx$$

$$=\left[-\frac{3}{2}x^2\right]_{-2}^{-1}+\left[-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{\frac{1}{2}}+\left[\frac{3}{2}x^2\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$=\left(-\frac{3}{2}+6\right)+\left(-\frac{1}{8}+1+\frac{1}{2}+2\right)+\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{8}\right)=9$$

6 $I_6=\int_{-1}^{1}|e^{2x}-1|dx$

$\forall x\in[-1;1]$ on a : $e^{2x}-1=(e^x)^2-1=(e^x+1)(e^x-1)$

Or $(\forall x\in\mathbb{R})$; $e^x+1>0$, d'où le signe de $e^{2x}-1$ est celui de e^x-1

C'est-à-dire le signe de x (car $e^x-1\geq 0\iff x\geq 0$)

Tableau de signe de $e^{2x}-1$:

x	-1		0		1
$e^{2x}-1$	$-$		0	$+$	
$\lvert e^{2x}-1\rvert$	$1-e^{2x}$			$e^{2x}-1$	

Donc : $I_6=\int_{-1}^{1}|e^{2x}-1|dx$

$$=\int_{-1}^{0}|e^{2x}-1|dx+\int_{0}^{1}|e^{2x}-1|dx$$

$$=\int_{-1}^{0}(1-e^{2x})dx+\int_{0}^{1}(e^{2x}-1)dx$$

$$=\left[x-\frac{1}{2}e^{2x}\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{2}e^{2x}-x\right]_{0}^{1}$$

$$=-\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}e^{-2}+\frac{1}{2}e^{2}-1-\frac{1}{2}$$

$$=\frac{e^2+e^{-2}-2}{2}$$

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 9

1 **Montrons que :** $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) = 3e^{-x} - f'(x)$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, à savoir : $x \longmapsto 3x$ et $x \longmapsto e^{-x}$

et on a : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \ f'(x) = 3(xe^{-x})'$

$$= 3(e^{-x} - xe^{-x})$$

$$= 3e^{-x}(1-x)$$

D'où : $f(x) + f'(x) = 3xe^{-x} + 3e^{-x}(1-x) = 3e^{-x}(x+1-x) = 3e^{-x}$

Ainsi : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) = 3e^{-x} - f'(x)$

2 **Déduisons la valeur de :** $I = \int_0^1 xe^{-x}dx$

On a : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) = 3e^{-x} - f'(x)$

Soit : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; 3xe^{-x} = 3e^{-x} - f'(x)$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; xe^{-x} = e^{-x} - \frac{1}{3}f'(x)$

Et : $I = \int_0^1 xe^{-x}dx = \int_0^1 \left(e^{-x} - \frac{1}{3}f'(x)\right)dx$

$$= \left[-e^{-x} - \frac{1}{3}f(x)\right]_0^1 = \left[-e^{-x} - xe^{-x}\right]_0^1$$

$$= -\left[(x+1)e^{-x}\right]_0^1 = -(2e^{-1} - 1) = 1 - \frac{2}{e}$$

Exercice 10

1 **Montrons que** $(\forall x \in \mathbb{R}) ; 2f'(x) - f''(x) = f(x)$ **:**

La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ à savoir : $x \longmapsto 1-x$ et $x \longmapsto e^{x}$

et on a : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \ f'(x) = ((1-x)e^{x})'$

$$= -e^{x} + (1-x)e^{x}$$

$$= e^{x}(-1+1-x) = -xe^{x}$$

et par suite : $f''(x) = -(xe^{x})'$

$$= -(e^{x} + xe^{x})$$

$$= -(x+1)e^{x}$$

D'où : $2f'(x) - f''(x) = -2xe^{x} + (x+1)e^{x}$

$$= (-2x + x + 1)e^{x}$$

$$= (1-x)e^{x}$$

ProfSalmi.blogspot.com

Ainsi : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; f(x) = 2f'(x) - f''(x)$

2 Déduisons la valeur de : $\int_0^1 f(x)dx$

On a : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; f(x) = 2f'(x) - f''(x)$

Donc : $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (2f'(x) - f''(x))dx$

$$= 2\int_0^1 f'(x)dx - \int_0^1 f''(x)dx$$
$$= 2[f(x)]_0^1 - [f'(x)]_0^1$$
$$= 2[(1-x)e^x]_0^1 + [xe^x]_0^1$$
$$= -2 + e$$

2 Des techniques d'intégrations (utilisation des primitives et l'intégration par partie)

Intégration par parties :

propriété :

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur $I = [a;b]$ et u' et v' sont continues sur I

alors on a : $\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$

ou : $\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$

Exercices

I) Utilisation des primitives:

Exercice 11

(La forme $u' \times u^n$ où : $n \in \mathbb{N}^*$)

Calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = \int_0^1 2x(x^2-3)^7 dx$; $I_2 = \int_1^e \frac{1}{x}\ln^3(x)dx$

$I_3 = \int_0^2 (x-1)(x^2-2x+5)^{2016} dx$; $I_4 = \int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$

$I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x \sin^5 x dx$; $I_6 = \int_0^{\ln\sqrt{2}} e^{-2x}(3+e^{-2x})^5 dx$

$I_7 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \sin x dx$; $I_8 = \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{\ln^3(2x)}{3x}dx$

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 12 (La forme $\frac{u'}{u^n}$ où : $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$)

Calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = \int_0^1 \frac{2x}{(x^2+1)^3} dx$; $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{(2+3\cos x)^2} dx$

$I_3 = \int_0^{\ln 2} \frac{e^{-2x}}{(3+e^{-2x})^2} dx$; $I_4 = \int_e^{e^2} \frac{-3}{x\ln^2(x)} dx$

$I_5 = \int_1^{e-1} \frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)}$; $I_6 = \int_1^2 \frac{4-8x}{(x^2-x)^3} dx$

$I_7 = \int_1^2 \frac{\ln x}{(x\ln x - x)^4} dx$; $I_8 = \int_1^2 \frac{x-1}{(x^2-2x+2)^4} dx$

$I_9 = \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^2} dx$; $I_{10} = \int_1^0 \frac{x^2-1}{(x^3-3x+5)^3} dx$

$I_{11} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^4 x} dx$; $I_{12} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx$

Exercice 13 (La forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ et $u' \times u^r$ où : $r \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ et $r \neq -1$)

Calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = \int_0^5 \sqrt{x+4}\, dx$; $I_2 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{5x+4}} dx$

$I_3 = \int_0^{\ln 2} \frac{e^{-3x}}{\sqrt{1+e^{-3x}}} dx$; $I_4 = \int_1^{e^3} \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}} dx$

$I_5 = \int_0^1 (5x+1)^{\frac{2}{3}} dx$; $I_6 = \int_{-1}^1 x^3\sqrt{2+3x^2}\, dx$

$I_7 = \int_1^2 \frac{-3-6x}{\sqrt[5]{x^2+x}} dx$; $I_8 = \int_2^5 \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx$

Exercice 14 (La forme $\frac{u'}{u}$)

Calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = \int_0^1 \frac{2}{x+3} dx$; $I_2 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{x^2-1} dx$; $I_3 = \int_0^1 \frac{1-e^{2x}}{e^{2x}-2x} dx$

$I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x)}{1+3\cos(2x)} dx$; $I_5 = \int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$; $I_6 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$

Exercice 15 (La forme : $u'e^u$)

Calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = \int_0^{\pi} e^{-4x+\pi} dx$; $I_2 = \int_0^{\sqrt{2}} xe^{-3x^2+7} dx$; $I_3 = \int_1^{-\sqrt{2}} x^3 e^{2-x^4} dx$

$I_4 = \int_0^1 (1-x)e^{x^2-2x+3} dx$; $I_5 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x e^{\cos x} dx$; $I_6 = \int_0^1 \frac{3x^2-1}{e^{x^3-x+1}} dx$

ProfSalmi.blogspot.com

II) Intégration par parties :

Exercice 16

À l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = \int_0^1 xe^x dx$; $I_2 = \int_0^{\pi} x\cos x dx$; $I_3 = \int_1^e \ln x dx$

$I_4 = \int_e^{e^2} x\ln x dx$; $I_5 = \int_{-1}^0 \ln(x+3) dx$; $I_6 = \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$

Exercice 17

À l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = \int_0^1 t^2 e^t dt$; $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin 2x dx$; $I_3 = \int_1^e \ln^2(x) dx$

$I_4 = \int_0^1 x^2\sqrt{1+x} dx$; $I_5 = \int_0^{\pi} e^x \cos x dx$; $I_6 = \int_1^{e^{\frac{\pi}{3}}} \cos(\ln x) dx$

Exercice 18

À l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

$I = \int_0^1 \ln(1+t) dt$; $J = \int_1^e t^2 \ln(t) dt$

$K = \int_1^e \frac{\ln t}{t^2} dt$; $L = \int_1^{e^2} \frac{\ln t}{\sqrt{t}} dt$

Exercice 19

À l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

$I = \int_0^1 (2t-1)e^t dt$; $J = \int_{-1}^0 (1-x)e^{-x} dx$

$K = \int_0^{\ln 4} (t-1)e^{\frac{t}{2}} dt$; $L = \int_0^{\ln 2} \frac{t+1}{e^{2t}} dt$

Exercice 20

À l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin(2x) dx$; $I_2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 t\cos(t) dt$

$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2t-1)\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right) dt$; $I_4 = \int_{-1}^0 x\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx$

Solutions

Utilisons une primitive de la fonction $f = u' \times u^n$.

$\int_a^b u'(x)u^n(x)dx = \left[\frac{1}{n+1}(u(x))^{n+1}\right]_a^b$; (où : $n \neq -1$ et $(n \in \mathbb{Z})$)

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 11

▸ $I_1 = \int_0^1 2x(x^2-3)^7\,dx$

Posons : $u(x) = x^2 - 3$ on a : $u'(x) = 2x$

Donc : $I_1 = \int_0^1 u'(x)u^7(x)\,dx$

et par suite : $I_1 = \left[\frac{1}{8}(u(x))^8\right]_0^1$

$$I_1 = \left[\frac{1}{8}(x^2-3)^8\right]_0^1$$

$$I_1 = \frac{1}{8}((+2)^8 - (3)^8)$$

$$= -\frac{6305}{8}$$

▸ On a : $I_2 = \int_1^e \frac{1}{x}\ln^3(x)\,dx$

$$I_2 = \int_1^e ln'(x)\ln^3(x)\,dx$$

Donc : $I_2 = \left[\frac{1}{4}\ln^4(x)\right]_1^e = \frac{1}{4}$

▸ $I_3 = \int_0^2 (x-1)(x^2-2x+5)^{2016}\,dx$

Posons : $u(x) = x^2 - 2x + 5$

On a : $u'(x) = 2x - 2 = 2(x-1)$

Donc : $I_3 = \int_0^2 \frac{1}{2}u'(x)u(x)^{2016}\,dx$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2017}u(x)^{2017}\right]_0^2$$

$$= \frac{1}{4034}[(x^2-2x+5)^{2017}]_0^2$$

$$= \frac{1}{4034}(5^{2017} - 5^{2017})$$

$$= 0$$

▸ On a : $I_4 = \int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \int_1^e ln'(x)\ln(x)\,dx$

Donc : $I_4 = \left[\frac{1}{2}\ln^2(x)\right]_1^e = \frac{1}{2}$

▸ On a : $I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x \sin^5 x dx$

Donc : $I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} sin'(x)\sin^5(x)\,dx$

ProfSalmi.blogspot.com

$$I_5 = \left[\frac{1}{6}\sin^6(x)\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$
$$= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^6$$

▸ On a : $I_6 = \int_0^{\ln\sqrt{2}} e^{-2x}(3+e^{-2x})^5 dx$

$$= \int_0^{\ln\sqrt{2}} -\frac{1}{2}(3+e^{-2x})'(3+e^{-2x})^5 dx$$

Donc : $I_6 = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{6}(3+e^{-2x})^6\right]_0^{\ln\sqrt{2}}$

$$= \left[-\frac{1}{12}(3+e^{-2x})^6\right]_0^{\ln(\sqrt{2})}$$
$$= -\frac{1}{12}\left(\left(3+\frac{1}{2}\right)^6 - 4^6\right)$$

$$I_6 = -\frac{1}{12}\left(\left(\frac{7}{2}\right)^6 - 4^6\right)$$

▸ On a : $I_7 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^4 x \ dx$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -cos'(x)\cos^4(x)dx$$
$$= \left[-\frac{1}{5}\cos^5 x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= 0$$

(car : $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$)

▸ $I_8 = \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{\ln^3(2x)}{3x} dx$

Posons : $u(x) = \ln(2x)$

On a : $u'(x) = \frac{1}{x}$

Donc : $I_8 = \frac{1}{3}\int_1^{\frac{1}{2}} u'(x)u^3(x)dx$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{4}u^4(x)\right]_1^{\frac{1}{2}}$$
$$= \left[\frac{1}{12}\ln^4(2x)\right]_1^{\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{1}{12}(0 - \ln^4(2))$$

Et par suite : $I_8 = -\frac{1}{12}\ln^4(2)$

ProfSalmi.blogspot.com

Application de : $\int_a^b \frac{u'(x)}{(u(x))^n}dx = \left[\frac{-1}{(n-1)u^{n-1}(x)}\right]_a^b$

Exercice 12

▸ On a : $I_1 = \int_0^1 \frac{2x}{(x^2+1)^3}dx$ donc : $I_1 = \int_0^1 \frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)^3}dx$

Soit : $I_1 = \left[\frac{-1}{2(x^2+1)^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{8}+\frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

▸ On a : $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{(2+3\cos x)^2}dx$. donc : $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{3}\frac{(2+3\cos x)'}{(2+3\cos x)^2}dx$

Soit : $I_2 = \left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{(2+3\cos x)}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{6}-\frac{1}{15} = \frac{1}{10}$

▸ On a : $I_3 = \int_0^{\ln 2} \frac{e^{-2x}}{(3+e^{-2x})^2}dx$ donc : $I_3 = \int_0^{\ln 2} -\frac{1}{2}\times\frac{(3+e^{-2x})'}{(3+e^{-2x})^2}dx$

Soit : $I_3 = \left[\frac{1}{2(3+e^{-2x})}\right]_0^{\ln 2} = \frac{1}{\frac{13}{2}}-\frac{1}{8} = \frac{2}{13}-\frac{1}{8} = \frac{3}{104}$

▸ On a : $I_4 = \int_e^{e^2} \frac{-3}{x\ln^2(x)}dx$ donc : $I_4 = \int_e^{e^2} -3\left(\frac{ln'(x)}{\ln^2(x)}\right)dx$

Soit : $I_4 = \left[\frac{3}{\ln x}\right]_e^{e^2} = \frac{3}{2}-3 = -\frac{3}{2}$

▸ On a : $I_5 = \int_1^{e-1} \frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)}$ donc : $I_5 = \int_1^{e-1} \frac{ln'(x+1)}{\ln^2(x+1)}dx$

Soit : $I_5 = \left[\frac{-1}{\ln(x+1)}\right]_1^{e-1} = -1+\frac{1}{\ln 2} = \frac{1-\ln 2}{\ln 2}$

▸ On a : $I_6 = \int_2^3 \frac{4-8x}{(x^2-x)^3}dx$ donc : $I_6 = \int_2^3 \frac{-4(2x-1)}{(x^2-x)^3}dx$

Soit : $I_6 = \int_2^3 \frac{-4(x^2-x)'}{(x^2-x)^3}dx$

Donc : $I_6 = \left[\frac{4}{2(x^2-x)^2}\right]_2^3$

$I_6 = \left[\frac{2}{(x^2-x)^2}\right]_2^3$

$I_6 = \frac{1}{18}-\frac{1}{2} = -\frac{4}{9}$

$I_7 = \int_1^2 \frac{\ln x}{(x\ln x - x)^4}dx$

On pose : $\forall x \in [1;2]; u(x) = x\ln x - x$

u est dérivable sur $[1;2]$ (comme produit et somme de fonction dérivables sur $[1;2]$).

ProfSalmi.blogspot.com

$u'(x) = 1\ln x + x\left(\frac{1}{x}\right) - 1 = \ln x$

Donc : $I_7 = \int_1^2 \frac{u'(x)}{(u(x))^4} dx$

$= \left[\frac{-1}{3(u(x))^3}\right]_1^2$

$I_7 = \left[\frac{-1}{3(x\ln x - x)^3}\right]_1^2$

$I_7 = \frac{-1}{3(2\ln 2 - 2)^3} + \frac{-1}{3}$

▸ On a : $I_8 = \int_1^2 \frac{x-1}{(x^2-2x+2)^4} dx$

Donc : $I_8 = \int_1^2 \frac{(x^2-2x+2)'}{2(x^2-2x+2)^4} dx$

$I_8 = \left[\frac{-1}{6(x^2-2x+2)^3}\right]_1^2$

$I_8 = \frac{-1}{48} + \frac{1}{6} = \frac{7}{48}$

▸ On a : $I_9 = \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^2} dx$ donc : $I_9 = \int_0^1 \frac{(x^2+1)'}{2(x^2+1)^2} dx$

Soit : $I_9 = \left[\frac{-1}{2(x^2+1)}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

▸ On a : $I_{10} = \int_1^0 \frac{x^2-1}{(x^3-3x+5)^3} dx = \int_1^0 \frac{(x^3-3x+5)'}{3(x^3-3x+5)^3} dx$

Donc : $I_{10} = \left[\frac{-1}{6(x^3-3x+5)^2}\right]_1^0 = \frac{-1}{150} + \frac{1}{54} = \frac{16}{1350} = \frac{8}{675}$

▸ On a : $I_{11} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^4 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{-(\cos' x)}{\cos^4 x} dx$

Donc : $I_{11} = \left[\frac{1}{3\cos^3 x}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

▸ On a : $I_{12} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^3(x)} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin'(x)}{\sin^3(x)} dx$

Don : $I_{12} = \left[\frac{-1}{2\sin^2(x)}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$

Application de : $\int_a^b \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} dx = [2\sqrt{u(x)}]_a^b$

et $\int_a^b u'(x)(u(x))^r dx = \left[\frac{1}{r+1}(u(x))^{r+1}\right]$; $r \in \mathbb{Q}^* - \{-1\}$

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 13

▸ On a : $I_1 = \int_0^5 \sqrt{x+4}\,dx = \int_0^5 (x+4)'(x+4)^{\frac{1}{2}}\,dx$

Donc : $I_1 = \left[\frac{1}{\frac{3}{2}}(x+4)^{\frac{3}{2}}\right]_0^5$

$I_1 = \left[\frac{2}{3}(x+4)\sqrt{x+4}\right]_0^5$

$I_1 = \frac{2}{3}(27-8) = \frac{38}{3}$

▸ On a : $I_2 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{5x+4}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{5}\left(\frac{(5x+4)'}{\sqrt{5x+4}}\right)dx$

Donc : $I_2 = \left[\frac{2}{5}\sqrt{5x+4}\right]_0^1$

$I_2 = \frac{2}{5}(3-2) = \frac{2}{5}$

▸ On a : $I_3 = \int_0^{\ln 2} \frac{e^{-3x}}{\sqrt{1+e^{-3x}}}\,dx = \int_0^{\ln 2} -\frac{1}{3} \times \frac{(1+e^{-3x})'}{\sqrt{1+e^{-3x}}}\,dx$

Donc : $I_3 = \left[-\frac{2}{3}\sqrt{1+e^{-3x}}\right]_0^{\ln 2} = -\frac{2}{3}\left(\sqrt{\frac{9}{8}} - \sqrt{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{6}$

▸ On a : $I_4 = \int_1^{e^3} \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}\,dx = \int_1^{e^3} \frac{(1+\ln x)'}{\sqrt{1+\ln x}}\,dx$

Donc : $I_4 = [2\sqrt{1+\ln x}]_1^{e^3} = 4-2 = 2$

▸ On a : $I_5 = \int_0^1 (5x+1)^{\frac{2}{3}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{5}(5x+1)'(5x+1)^{\frac{2}{3}}\,dx$

Donc : $I_5 = \frac{1}{5}\left[\frac{1}{\frac{5}{3}}(5x+1)^{\frac{5}{3}}\right]_0^1 = \frac{3}{25}\left[(5x+1)^{\frac{5}{3}}\right]_0^1$

Donc : $I_5 = \frac{3}{25}(6^{\frac{5}{3}} - 1)$

▸ On a : $I_6 = \int_{-1}^1 x^3\sqrt{2+3x^2}\,dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{6}(2+3x^2)'\sqrt[3]{2+3x^2}\,dx$

Donc : $I_6 = \frac{1}{6}\int_{-1}^1 (2+3x^2)'(2+3x^2)^{\frac{1}{3}}\,dx$

Soit : $I_6 = \frac{1}{6}\left[\frac{1}{\frac{4}{3}}(2+3x^2)^{\frac{4}{3}}\right]_{-1}^1 = 0$

▸ On a : $I_7 = \int_1^2 \frac{-3-6x}{\sqrt[5]{x^2+x}}\,dx = -3\int_1^2 (1+2x)(x^2+x)^{-\frac{1}{5}}\,dx$

$= -3\int_1^2 (x^2+x)'(x^2+x)^{-\frac{1}{5}}\,dx$

ProfSalmi.blogspot.com

Donc : $I_7 = -3\left[\frac{1}{\frac{4}{5}}(x^2+x)^{\frac{4}{5}}\right]_1^2$

Soit : $I_7 = -\frac{15}{4}\left[\sqrt[5]{(x^2+x)^4}\right]_1^2 = -\frac{15}{4}(\sqrt[5]{6^4} - \sqrt[5]{2^4})$

▸ On a : $I_8 = \int_2^5 \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx$

et $\frac{x}{\sqrt{x-1}} = \frac{x-1+1}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} = (x-1)'(x-1)^{\frac{1}{2}} + \frac{(x-1)'}{\sqrt{x-1}}$

Donc : $I_8 = \int_2^5 \left((x-1)'(x-1)^{\frac{1}{2}} + \frac{(x-1)'}{\sqrt{x-1}}\right)dx$

$I_8 = \left[\frac{1}{\frac{3}{2}}(x-1)^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{x-1}\right]_2^5$

$I_8 = \left[\frac{2}{3}(x-1)\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x-1}\right]_2^5$

Ainsi : $I_8 = \left(\frac{2}{3}(4\sqrt{4}) + 2\sqrt{4}\right) - \left(\frac{2}{3}+2\right) = \frac{14}{3} + 2 = \frac{20}{3}$

Application de : $\int_a^b \frac{u'(x)}{u(x)}dx = [\ln|u(x)|]_a^b$

Exercice 14

▸ On a : $I_1 = \int_0^1 \frac{2}{x+3}dx = 2\int_0^1 \frac{(x+3)'}{x+3}dx$

Donc : $I_1 = [2\ln(x+3)]_0^1 = 2\ln 4 - 2\ln 3 = 2\ln\left(\frac{4}{3}\right)$

▸ On a : $I_2 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{x^2-1}dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \times \frac{(x^2-1)'}{x^2-1}dx$

Donc : $I_2 = \left[\frac{1}{2}\ln|x^2-1|\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{4}\right)$

▸ On a : $I_3 = \int_0^1 \frac{1-e^{2x}}{e^{2x}-2x}dx = \int_0^1 -\frac{1}{2}\frac{(e^{2x}-2x)'}{e^{2x}-2x}dx$

D'où : $I_3 = \left[-\frac{1}{2}\ln|e^{2x}-2x|\right]_0^1 = -\frac{1}{2}\ln(e^2-2)$

▸ On a : $I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x)}{1+3\cos(2x)}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{6}\frac{(1+3\cos 2x)'}{1+3\cos 2x}dx$

Donc : $I_4 = \left[-\frac{1}{6}\ln|1+3\cos 2x|\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{6}\ln 2 + \frac{1}{6}\ln 4$

Soit : $I_4 = \frac{1}{6}\ln 2$

▸ On a : $I_5 = \int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x} = \int_e^{e^2} \frac{\ln'(x)}{\ln x}dx$

ProfSalmi.blogspot.com

Donc : $I_5 = [\ln|\ln x|]_e^{e^2} = \ln(2)$

▸ On a : $I_6 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} -\frac{cos'(x)}{\cos x} dx$

Donc : $I_6 = [-\ln|\cos x|]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\ln 2$

Application de : $\int_a^b u'(x)e^{u(x)}dx = [e^{u(x)}]_a^b$

En particulier : $\int_a^b e^{\alpha x+\beta}dx = \left[\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x+\beta}\right]_a^b$

Exercice 15

▸ On a : $I_1 = \int_0^{\pi} e^{-4x+\pi}dx = \left[-\frac{1}{4}(e^{-4x+\pi})\right]_0^{\pi}$

Donc : $I_1 = -\frac{1}{4}e^{-3\pi} + \frac{1}{4}e^{\pi} = \frac{1}{4}(e^{\pi} - e^{-3\pi})$

▸ On a : $I_2 = \int_0^{\sqrt{2}} xe^{-3x^2+7}dx = \int_0^{\sqrt{2}} -\frac{1}{6}(-3x^2+7)'e^{-3x^2+7}dx$

Donc : $I_2 = \left[-\frac{1}{6}e^{-3x^2+7}\right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{1}{6}(e^7 - e)$

▸ On a : $I_3 = \int_1^{-\sqrt{2}} x^3e^{2-x^4}dx = \int_1^{-\sqrt{2}} -\frac{1}{4}(2-x^4)'e^{2-x^4}dx$

Donc : $I_3 = \left[-\frac{1}{4}e^{2-x^4}\right]_1^{-\sqrt{2}} = -\frac{1}{4}(e^{-2} - e) = \frac{1}{4}(e - e^{-2})$

▸ On a : $I_4 = \int_0^1 (1-x)e^{x^2-2x+3}dx$

Donc : $I_4 = \int_0^1 -\frac{1}{2}(x^2-2x+3)'e^{x^2-2x+3}dx$

Donc : $I_4 = \left[-\frac{1}{2}e^{x^2-2x+3}\right]_0^1$

$= -\frac{1}{2}(e^2 - e^3)$

$= \frac{1}{2}(e^3 - e^2)$

▸ On a : $I_5 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x e^{\cos x}dx$

$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -(\cos' x)e^{\cos x}dx$

Donc : $I_5 = [-e^{\cos x}]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$

$I_5 = 1 - e^{-1}$

▸ On a :

ProfSalmi.blogspot.com

$$I_6 = \int_0^1 \frac{3x^2-1}{e^{x^3-x+1}}dx = \int_0^1 -(1-3x^2)e^{-(x^3-x+1)}dx = \int_0^1 -(x^3-x+1)e^{(x^3-x+1)}dx$$

$$= \int_0^1 -[-(x^3-x+1)']e^{-(x^3-x+1)}dx$$

Donc : $I_6 = [-e^{-(x^3-x+1)}]_0^1 = -(e^{-1}-e^{-1}) = 0$

II) Intégration par parties

Exercice 16

$$\int_a^b u'vdx = [uv]_a^b - \int_a^b uv'dx$$

▸ **Calculons :** $I_1 = \int_0^1 xe^x dx$

On pose : $u'(x) = e^x$ et $v(x) = x$

Donc : $u(x) = e^x$ et $v'(x) = 1$

Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0;1]$; les fonctions u' et v' sont continues sur $[0;1]$; donc, d'après le propriété de l'intégration par parties :

$$I_1 = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx$$

$$I_1 = [xe^x]_0^1 - [e^x]_0^1$$

Donc : $I_1 = [(x-1)e^x]_0^1 = 1$

▸ **Calculons :** $I_2 = \int_0^\pi x\cos x dx$

On pose : $v(x) = x$ et $u'(x) = \cos x$

Donc : $v'(x) = 1$ et $u(x) = \sin x$

Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0;\pi]$; les fonctions u' et v' sont continues sur $[0;\pi]$.

Donc, d'après la propriété de l'intégration par parties :

$$I_2 = [x\sin x]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x dx$$

$$= [x\sin x]_0^\pi - [-\cos x]_0^\pi$$

$$= 0 + (\cos\pi - \cos 0)$$

$$= -2$$

Remarque : Dans tout ce qui suit, lors d'une intégration par parties, les fonctions u et v sont dérivables sur l'intervalle $[a;b]$, les fonction u' et v' sont continues sur l'intervalle $[a;b]$.

▸ **Calculons :** $I_3 = \int_1^e \ln x dx$

ProfSalmi.blogspot.com

On pose : $v(x) = \ln x$ et $u'(x) = 1$

Donc : $v'(x) = \frac{1}{x}$ et $u(x) = x$

Donc, d'après la propriété de l'intégration par parties :

$$I_3 = [x \ln x]_1^e - \int_1^e 1 dx$$
$$= [x \ln x]_1^e - [x]_1^e$$
$$= [x \ln x - x]_1^e$$
$$= 1$$

▸ **Calculons :** $I_4 = \int_e^{e^2} x \ln x dx$

On pose : $v(x) = \ln x$ et $u'(x) = x$

Donc : $v'(x) = \frac{1}{x}$ et $u(x) = \frac{x^2}{2}$

Donc, d'après la propriété de l'intégration par parties :

$$I_4 = \left[\frac{x^2}{2} \ln x\right]_e^{e^2} - \int_e^{e^2} \frac{x}{2} dx$$
$$= \left[\frac{x^2}{2} \ln x\right]_e^{e^2} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_e^{e^2}$$
$$= \left(e^4 - \frac{e^2}{2}\right) - \left(\frac{e^4}{4} - \frac{e^2}{4}\right)$$
$$= \frac{3}{4}e^4 - \frac{e^2}{4}$$

▸ **Calculons :** $I_5 = \int_{-1}^{0} \ln(x+3) dx$

On pose : $v(x) = \ln(x+3)$ et $u'(x) = 1$

Donc : $v'(x) = \frac{1}{x+3}$ et $u(x) = x + 3$

Donc, d'après la propriété de l'intégration par parties :

$$I_5 = [(x+3)\ln(x+3)]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 1 dx$$
$$I_5 = [(x+3)\ln(x+3)]_{-1}^0 - [x]_{-1}^0$$
$$= 3\ln 3 - 2\ln 2 - 1$$

▸ **Calculons :** $I_6 = \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$

On pose : $v(x) = \ln x$ et $u'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Donc : $v'(x) = \frac{1}{x}$ et $u(x) = 2\sqrt{x}$

Donc, d'après la propriété de l'intégration par parties :

ProfSalmi.blogspot.com

$$I_6 = [2\sqrt{x}\ln x]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} \frac{2}{\sqrt{x}}dx$$
$$= [2\sqrt{x}\ln x]_1^{e^2} - [4\sqrt{x}]_1^{e^2}$$
$$= 4e - (4e - 4)$$
$$= 4$$

Exercice 17

Intégration plusieurs fois par parties :

▸ **Calculons :** $I_1 = \int_0^1 t^2 e^t dt$:

On pose : $v(t) = t^2$ et $u'(t) = e^t$

Donc : $v'(t) = 2t$ et $u(t) = e^t$

Donc, d'après la propriété de l'intégration par parties :

$$I_1 = [t^2 e^t]_0^1 - \int_0^1 2te^t dt$$
$$= e - \int_0^1 2te^t dt$$

Il faut alors une deuxième intégration par parties :

On pose : $v_1(t) = 2t$ et $u'_1(t) = e^t$

Donc : $v'_1(t) = 2$ et $u_1(t) = e^t$

Donc, d'après la propriété de l'intégration par parties :

$$I_1 = e - \left([2te^t]_0^1 - \int_0^1 2e^t dt\right)$$
$$I_1 = e - [2te^t]_0^1 + [2e^t]_0^1$$
$$I_1 = e - 2e + 2e - 2$$

D'où : $I_1 = e - 2$

▸ **Calculons :** $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin(2x)dx$

On pose : $v(x) = x^2$ et $u'(x) = \sin(2x)$

Donc : $v'(x) = 2x$ et $u(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x)$

Donc, d'après la propriété de l'intégration par parties :

$$I_2 = \left[-\frac{x^2}{2}\cos(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2xdx$$

Une deuxième intégration par parties s'impose : $I_2 = \frac{\pi^2}{8} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2xdx$

On pose : $v_1(x) = x$ et $u'_1(x) = \cos(2x)$

Donc : $v'_1(x) = 1$ et $u_1(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$

ProfSalmi.blogspot.com

D'après la propriété de l'intégration par parties :

$$I_2 = \frac{\pi^2}{8} + \left(\left[\frac{x}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin 2x dx \right)$$

$$= \frac{\pi^2}{8} + \left(0 - \left[-\frac{1}{4} \cos 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \right)$$

$$= \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}(\cos \pi - \cos 0)$$

donc : $I_2 = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}$

infos:

$\cos \pi = -1$ et $\cos 0 = 1$

Calculons $I_3 = \int_1^e \ln^2(x) dx$:

On pose : $v(x) = \ln^2(x)$ et $u'(x) = 1$

Donc : $v'(x) = \frac{2}{x} \ln x$ et $u(x) = x$

D'après la propriété de l'intégration par parties :

$$I_3 = [x \ln^2(x)]_1^e - \int_1^e 2 \ln x dx$$

$$I_3 = e - 2 \int_1^e \ln x dx$$

Il est nécessaire de faire une deuxième intégration par parties :

On pose : $v_1(x) = \ln x$ et $u'_1(x) = 1$

Donc : $v'_1(x) = \frac{1}{x}$ et $u_1(x) = x$

D'après la propriété de l'intégration par parties :

$$I_3 = e - 2\left([x \ln x]_1^e - \int_1^e 1 dx \right)$$

$$= e - 2([x \ln x]_1^e - [x]_1^e)$$

Donc : $I_3 = e - 2$

Calculons $I_4 = \int_0^1 x^2 \sqrt{1+x} dx$:

On pose : $\begin{cases} u'(x) = \sqrt{x+1} = (x+1)^{\frac{1}{2}} \\ v(x) = x^2 \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} u(x) = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} \\ v'(x) = 2x \end{cases}$

D'après la propriété de l'intégration par parties :

$$I_4 = \left[\frac{2}{3} x^2 (x+1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{4}{3} x (x+1)^{\frac{3}{2}} dx$$

$$I_4 = \frac{4}{3}\sqrt{2} - \frac{4}{3} \int_0^1 x (x+1)^{\frac{3}{2}} dx$$

Une deuxième intégration par parties s'impose :

ProfSalmi.blogspot.com

On pose : $\begin{cases} u'_1(x) = (x+1)^{\frac{3}{2}} \\ v_1(x) = x \end{cases}$, donc : $\begin{cases} u_1(x) = \frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} \\ v'_1(x) = 1 \end{cases}$

$$I_4 = \frac{4}{3}\sqrt{2} - \frac{4}{3}\left(\left[\frac{2}{5}x(x+1)^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 - \frac{2}{5}\int_0^1 (x+1)^{\frac{5}{2}}dx\right)$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt{2} - \frac{4}{3}\left(\frac{8}{5}\sqrt{2} - \frac{2}{5}\left[\frac{2}{7}(x+1)^{\frac{7}{2}}\right]_0^1\right)$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt{2} - \frac{4}{3}\left(\frac{8}{5}\sqrt{2} - \frac{4}{35}[8\sqrt{2}-1]\right)$$

$$= \left(\frac{4}{3} - \frac{32}{15} + \frac{16\times 8}{105}\right)\sqrt{2} - \frac{16}{105} = \frac{4\sqrt{2}}{15} - \frac{16}{105} = \frac{4}{35}$$

▸ **Calculons** $I_5 = \int_0^{\pi} e^x \cos x\,dx$:

On pose : $v(x) = \cos(x)$ et $u'(x) = e^x$

Donc : $v'(x) = -\sin x$ et $u(x) = e^x$

Donc, d'après la propriété de l'intégration par parties :

$$I_5 = [e^x \cos x]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^x \sin x dx$$

$$= -1 - e^{\pi} + J \text{ (où } J = \int_0^{\pi} e^x \sin x dx\text{)}$$

▸ **Calculons, par parties l'intégrale :** $J = \int_0^{\pi} e^x \sin x\,dx$

On pose : $u'(x) = e^x$ et $v(x) = \sin x$

Donc : $u(x) = e^x$ et $v'(x) = \cos x$

Donc, d'après la propriété de l'intégration par parties :

$$J = [e^x \sin x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos x e^x dx$$

$$= 0 - I_5$$

Donc : $I_5 = -1 - e^{\pi} - I_5$ c'est-à-dire : $2I_5 = -e^{\pi}$

D'où : $I_5 = -\frac{e^{\pi}+1}{2}$

▸ **Calculons** $I_6 = \int_1^{e^{\frac{\pi}{3}}} \cos(\ln x)dx$:

On pose : $v(x) = \cos(\ln x)$ et $u'(x) = 1$

Donc : $v'(x) = -\frac{1}{x}\sin(\ln x)$ et $u(x) = x$

Donc, d'après la propriété de l'intégration par parties :

$$I_6 = [x\cos(\ln x)]_1^{e^{\frac{\pi}{3}}} + \int_1^{e^{\frac{\pi}{3}}} \sin(\ln x)dx$$

$$= \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{3}} - 1 + J \text{ (où } J = \int_1^{e^{\frac{\pi}{3}}} \sin(\ln x)dx\text{)}$$

ProfSalmi.blogspot.com

▸ **Calculons par parties l'intégrale :** $J = \int_1^e \sin(\ln x)\,dx$

On pose : $v(x) = \sin(\ln x)$ et $u'(x) = 1$

Donc : $v(x) = \frac{1}{x}\cos(\ln x)$ et $u(x) = x$

Donc, d'après la propriété de l'intégration par parties :

$$J = [x\sin(\ln x)]_1^{e^{\frac{\pi}{3}}} - \int_1^{e^{\frac{\pi}{3}}} \cos(\ln x)\,dx$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}e^{\frac{\pi}{3}} - I_6$$

D'où : $I_6 = \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{3}} - 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}e^{\frac{\pi}{3}} - I_6$, c'est-à-dire : $2I_6 = \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{3}} - 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}e^{\frac{\pi}{3}}$

Donc : $I_6 = \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)e^{\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{2}$

Exercice 18

▸ **Calculons :** $I = \int_0^1 \ln(1+t)\,dt$

On pose : $v(t) = \ln(1+t)$ et $u'(t) = 1$

Donc : $v'(t) = \frac{1}{t+1}$ et $u(t) = t+1$

Donc, d'après la propriété de l'intégration par parties :

$$I = [(t+1)\ln(1+t)]_0^1 - \int_0^1 1\,dt$$

$$= [(t+1)\ln(1+t)]_0^1 - [t]_0^1$$

$$= 2\ln 2 - 1$$

▸ **Calculons :** $J = \int_1^e t^2\ln(t)\,dt$

On pose : $v(t) = \ln t$ et $u'(t) = t^2$

Donc : $v'(t) = \frac{1}{t}$ et $u(t) = \frac{1}{3}t^3$

Donc, d'après la propriété de l'intégration par parties :

$$J = \left[\frac{1}{3}t^3\ln t\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{3}t^2\,dt$$

$$= \left[\frac{1}{3}t^3\ln t\right]_1^e - \left[\frac{1}{9}t^3\right]_1^e$$

$$= \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{9}e^3 + \frac{1}{9}$$

$$= \frac{2e^3+1}{9}$$

ProfSalmi.blogspot.com

▸ **Calculons :** $K = \int_1^e \frac{\ln t}{t^2} dt$

On pose : $v(t) = \ln t$ et $u'(t) = \frac{1}{t^2}$, Donc : $v'(t) = \frac{1}{t}$ et $u(t) = -\frac{1}{t}$

Donc, d'après la propriété de l'intégration par parties :

$$K = \left[-\frac{1}{t}\ln t\right]_1^e + \int_1^e \frac{1}{t^2} dt$$

$$K = \left[-\frac{1}{t}\ln t\right]_1^e + \left[-\frac{1}{t}\right]_1^e$$

$$= -\frac{1}{e} - 0 - \frac{1}{e} + 1$$

$$= 1 - \frac{2}{e}$$

▸ **Calculons :** $L = \int_1^{e^2} \frac{\ln t}{\sqrt{t}} dt$

On pose : $v(t) = \ln t$ et $u'(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$, Donc : $v'(t) = \frac{1}{t}$ et $u(t) = 2\sqrt{t}$

Donc, d'après la propriété de l'intégration par parties :

$$L = [2\sqrt{t}\ln t]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} \frac{2\sqrt{t}}{t} dt$$

$$L = [2\sqrt{t}\ln t]_1^{e^2} - 2\int_1^{e^2} \frac{1}{\sqrt{t}} dt$$

$$L = [2\sqrt{t}\ln t]_1^{e^2} - [4\sqrt{t}]_1^{e^2}$$

D'où : $L = 4e - (4e - 4) = 4$

Intégration par parties «type $I_n = \int_a^b P(t)e^{\alpha t+\beta} dt$ »

Exercice 19

$I_n = \int_a^b P(t)e^{\alpha t+\beta} dt$

où $P(t)$ est un polynôme de degré n (deg $P = n$)

On pose : $v(t) = P(t)$ et $u'(t) = e^{\alpha t+\beta}$

On utilise n fois une intégration par parties, ou on trouve une relation de récurrence permettant de calculer I_n (voir les exercice de synthèse).

Application :

▸ **Calculons :** $I = \int_0^1 (2t-1)e^t dt$

ProfSalmi.blogspot.com

On pose : $v(t) = 2t - 1$ et $u'(t) = e^t$

Donc : $v'(t) = 2$ et $u(t) = e^t$

Donc, d'après la propriété de l'intégration par parties :

$$I = [(2t-1)e^t]_0^1 - \int_0^1 2e^t\,dt$$
$$= [(2t-1)e^t]_0^1 - [2e^t]_0^1$$
$$= e + 1 - 2e + 2 = 3 - e$$

▸ **Calculons :** $J = \int_{-1}^{0} (1-x)e^{-x}\,dx$

On pose : $v(x) = 1 - x$ et $u'(x) = e^{-x}$

Donc : $v'(x) = -1$ et $u(x) = -e^{-x}$

Donc, d'après la propriété de l'intégration par parties :

$$J = [(1-x)e^{-x}]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 e^{-x}\,dx$$
$$= [(1-x)e^{-x}]_{-1}^0 + [e^{-x}]_{-1}^0$$
$$= 1 - 2e + 1 - e$$
$$= 2 - 3e$$

▸ **Calculons :** $K = \int_0^{\ln(4)} (t-1)e^{\frac{t}{2}}\,dt$

On pose : $v(t) = t - 1$ et $u'(t) = e^{\frac{t}{2}}$

Donc : $v'(t) = 1$ et $u(t) = 2e^{\frac{t}{2}}$

Donc, d'après la propriété de l'intégration par parties :

$$K = \left[2(t-1)e^{\frac{t}{2}}\right]_0^{\ln 4} - \int_0^{\ln 4} 2e^{\frac{t}{2}}\,dt$$

$$K = 2(\ln 4 - 1)e^{\ln 2} - [4e^{\frac{t}{2}}]_0^{\ln 4} \qquad (\ln 4 = 2\ln 2)$$
$$K = 2(\ln 4 - 1)e^{\ln 2} + 2 - 4e^{\ln 2} + 4$$
$$K = 4(\ln 4 - 1) - 2$$
$$K = 4\ln 4 - 6$$

Donc : $K = 8\ln 2 - 6$

▸ **Calculons :** $L = \int_0^{\ln 2} \frac{t+1}{e^{2t}}\,dt = \int_0^{\ln 2} (t+1)e^{-2t}\,dt$

On pose : $v(t) = t + 1$ et $u'(t) = e^{-2t}$

Donc : $v'(t) = 1$ et $u(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t}$

Donc, d'après la propriété de l'intégration par parties :

ProfSalmi.blogspot.com

$$L = \left[-\frac{1}{2}(t+1)e^{-2t}\right]_0^{\ln 2} + \frac{1}{2}\int_0^{\ln 2} e^{-2t}\,dt$$

$$L = \left[-\frac{1}{2}(t+1)e^{-2t}\right]_0^{\ln 2} + \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^{\ln 2}$$

$$L = -\frac{1}{8}(\ln 2 + 1) + \frac{1}{2} - \frac{1}{16} + \frac{1}{4}$$

Donc : $L = -\frac{1}{8}\ln 2 + \frac{9}{16}$

Exercice 20

Type 3 :

$$I_n = \int_a^b P(x)\sin(\alpha x + \beta)\,dx$$

où $P(x)$ est un polynôme de degré n $(\deg P = n)$

On pose : $v(t) = P(t)$ et $u'(t) = \sin(\alpha t + \beta)$

On utilise n fois une intégration par parties, en posant : $u'(x) = \sin(\alpha x + \beta)$ et $v(x) = P(x)$ ou on trouve une relation de récurrence par mettant de calculer I (voir les exercices de synthèse).

Application :

▸ **Calculons :** $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin(2x)\,dx$

On pose : $v(x) = x$ et $u'(x) = \sin(2x)$

Donc : $v'(x) = 1$ et $u(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x)$

Donc, d'après la propriété de l'intégration par parties :

$$I_1 = \left[-\frac{x}{2}\cos(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x)\,dx$$

$$I_1 = \left[-\frac{x}{2}\cos(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \left[\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$I_1 = 0 + \frac{1}{4}$$

D'où : $I_1 = \frac{1}{4}$

▸ **Calculons** $I_2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} t\cos(t)\,dt$

On pose : $v(t) = t$ et $u'(t) = \cos t$

Donc : $v'(t) = 1$ et $u(t) = \sin t$

Donc, d'après la propriété de l'intégration par parties :

ProfSalmi.blogspot.com

$I_2 = [t\sin t]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin t dt$

$I_2 = [t\sin t]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + [\cos t]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}$

D'où : $I_2 = -\frac{\pi}{2} + 1$

Calculons : $I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2t-1)\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)dt$

On pose : $v(t) = 2t - 1$ et $u'(t) = \sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)$

Donc : $v'(t) = 2$ et $u(t) = -\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)$

Donc, d'après la propriété de l'intégration par parties :

$I_3 = \left[-(2t-1)\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)dt$

$= \left[-(2t-1)\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[2\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= -(\pi-1)\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} = -\frac{\pi\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{2}$

Calculons $I_4 = \int_{-1}^{0} x\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx$

On pose : $v(x) = x$ et $u'(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

Donc : $v'(x) = 1$ et $u(x) = \frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

Donc, d'après la propriété de l'intégration par parties, on a :

$I_4 = \left[\frac{2x}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_{-1}^{0} - \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{0} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx$

$= \left[\frac{2x}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_{-1}^{0} + \left(\frac{2}{\pi}\right)^2\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_{-1}^{0}$

D'où : $I_4 = -\frac{2}{\pi} + \left(\frac{2}{\pi}\right)^2$

3 Signe d'une intégrale - Intégrale et ordre - la valeur moyenne d'une fonction continue sur un segment

Propriété :

Si $a < b$ et f est une fonction continue et strictement positive sur l'intervalle $[a;b]$, alors : $\int_a^b f(x)dx > 0$

ProfSalmi.blogspot.com

Conséquences :

- Si $a < b$ et f est une fonction continue et strictement négative sur $[a;b]$ alors : $\int_a^b f(x)dx < 0$
- Si $a > b$ et f est une fonction continue et strictement négative sur $[a;b]$, alors : $\int_a^b f(x)dx > 0$
- Si $a > b$ et f est une fonction continue et strictement positive sur $[a;b]$, alors : $\int_a^b f(x)dx < 0$
- Si $a < b$ et f et g sont deux fonctions continues sur $[a;b]$ telles que : $(\forall x \in [a;b]); g(x) < f(x)$, alors : $\int_a^b g(x)dx < \int_a^b f(x)dx$
- Si $a < b$ et f , g et h sont des fonctions continues sur $[a;b]$ telles que : $(\forall x \in [a;b]); g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ alors : $\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b h(x)dx$
- Si $a < b$ et f est une fonction continue sur $[a;b]$ alors : $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

La valeur moyenne d'une fonction continue sur un segment

Propriété et définition :

Si f est une fonction continue sur l'intervalle $[a;b]$ avec $a < b$, alors :

- Il existe un réel c de l'intervalle $[a;b]$, tel que : $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c)$
- Le nombre réel $V_m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ est appelé la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[a;b]$

Exercices

Exercice 21

Montrer que :

1. $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx \leq \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx$
2. $1 \leq \int_0^1 e^{x^2}dx \leq e-1$ (Rappel : $(\forall x \in [0;1]; 0 \leq x^2 \leq x)$
3. $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \frac{-1}{2n} \leq \int_{-1}^0 \frac{x^{2n-1}}{\sqrt{1+x^2}}dx \leq \frac{-1}{2n\sqrt{2}}$
4. $\frac{1}{2}\ln 3 \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}dx \leq \ln 3$

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 22

Montrer que :

1. $1 \leq \int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2+1} dx \leq 2$
2. $\frac{\sqrt{2}}{2} \ln 2 \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx \leq \ln 2$
3. $2e^{-4} \leq \int_{0}^{2} \frac{1}{e^{x^2}} dx \leq 2$
4. $2\ln 3 \leq \int_{2}^{4} \ln(x^2-1) dx \leq 2\ln 3 + 2\ln 5$

Exercice 23

Déterminer la valeur moyenne V_m de la fonction f sur l'intervalle I dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = e^{-x}$; $I = [-1;2]$
2. $f(x) = \sin(2x)$; $I = [0;\pi]$
3. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$; $I = [1;2]$
4. $f(x) = \frac{-3}{x}$; $I = [-2;-1]$. Déterminer la valeur de c telle que : $f(c) = V_m$ où V_m est la valeur moyenne de f sur I.

Exercice 24

Soit f une fonction continue sur un segment $I = [a;b]$, et V_m sa valeur moyenne sur I.

Calculer l'intégrale $K = \int_{a}^{b} f(x) dx$ dans chacun des cas suivants :

1. $V_m = \frac{2}{3}$ et $K = \int_{2}^{5} f(x) dx$
2. $V_m = -\sqrt{2}$ et $K = \int_{-2}^{2} f(x) dx$
3. $V_m = 2\ln 5$ et $K = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}} f(x) dx$

Solutions

Exercice 21

1 Montrons que: $\int_{0}^{1} \frac{x}{x^2+1} dx \leq \int_{0}^{1} \frac{1}{x^2+1} dx$

On a : $(\forall x \in [0;1])$; $x \leq 1$ et $x^2+1 > 0$

Donc : $(\forall x \in [0;1])$: $\frac{x}{x^2+1} \leq \frac{1}{x^2+1}$

ProfSalmi.blogspot.com

Donc, d'après la propriété de l'intégrale et l'ordre, $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx \le \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx$

2 Montrons que: $1 \le \int_0^1 e^{x^2}dx \le e-1$

On a : $(\forall x \in [0;1])$; $0 \le x^2 \le x \le 1$

La fonction $x \longmapsto e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Donc : $e^0 \le e^{x^2} \le e^x$

D'où : $(\forall x \in [0;1])$; $1 \le e^{x^2} \le e^x$

et par suite : $\int_0^1 1dx \le \int_0^1 e^{x^2}dx \le \int_0^1 e^x dx$

Donc : $[x]_0^1 \le \int_0^1 e^{x^2}dx \le [e^x]_0^1$; on en déduit que : $1 \le \int_0^1 e^{x^2}dx \le e-1$

info:

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a)$$

3 Montrons que: $\frac{-1}{2n\sqrt{2}} \le \int_{-1}^0 \frac{x^{2n-1}}{\sqrt{1+x^2}} \le \frac{-1}{2n}$

Soit $x \in [-1;0]$, on a : $-1 \le x \le 0 \Longrightarrow 0 \le x^2 \le 1$

$$\Longrightarrow 1 \le x^2+1 \le 2$$
$$\Longrightarrow 1 \le \sqrt{x^2+1} \le \sqrt{2}$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \le \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \le 1$$

d'autre part : $(\forall x \in [-1;0])$; $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $x^{2n-1} \le 0$ (car $(2n-1)$ est impair et $x \le 0$)

Donc : $x^{2n-1} \le \frac{x^{2n-1}}{\sqrt{x^2+1}} \le \frac{x^{2n-1}}{\sqrt{2}}$

et comme $-1 < 0$, alors $\int_{-1}^0 x^{2n-1}dx \le \int_{-1}^0 \frac{x^{2n-1}}{\sqrt{x^2+1}}dx \le \int_{-1}^0 \frac{x^{2n-1}}{\sqrt{2}}dx$

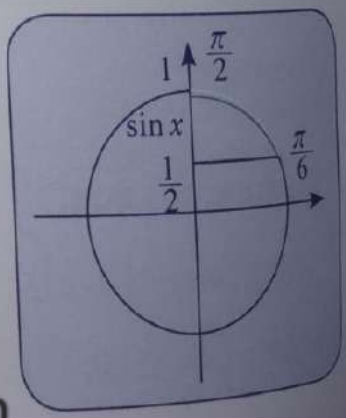
(d'après la propriété de l'intégrale et l'ordre)

Or : $\int_{-1}^0 x^{2n-1}dx = \left[\frac{1}{2n}x^{2n}\right]_{-1}^0$

$$= -\frac{1}{2n}$$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $-\frac{1}{2n} \le \int_{-1}^0 \frac{x^{2n-1}}{\sqrt{x^2+1}}dx \le -\frac{1}{2\sqrt{2}n}$

4 Montrons que $\frac{1}{2}\ln 3 \le \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} \le \ln 3$:



Méthode 1: à l'aide du cercle trigonométrique,

on obtient : $\left(\forall x \in \left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]\right)$; $\frac{1}{2} \le \sin x \le 1$

Méthode 2 :

ProfSalmi.blogspot.com

On a : $\forall x \in \left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$; $\sin'(x) = \cos x$ et $\cos x \geq 0$

donc, la fonction sin est strictement croissante sur $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$; d'où :

$$\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \iff \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \leq \sin x \leq \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\iff \frac{1}{2} \leq \sin x \leq 1$$

Or : $\left(\forall x \in \left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]\right); x > 0$

Donc : $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$ et comme $\frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}$, alors d'après la propriété de l'intégrale et l'ordre,

$$\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x}dx \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}dx \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x}dx$$

On a : $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x}dx = [\ln x]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$

$$= \ln\left(\frac{\pi}{2}\right) - \ln\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{6}}\right)$$

$$= \ln(3)$$

Donc : $\frac{\ln 3}{2} \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}dx \leq \ln 3$

Exercice 22

1 Montrons que : $1 \leq \int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2+1}dx \leq 2$

Soit $x \in [-1;1]$; on a : $-1 \leq x \leq 1 \iff 0 \leq x^2 \leq 1$

$$\iff 1 \leq 1 + x^2 \leq 2$$

$$\iff \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1$$

et comme $-1 < 1$; alors : $\int_{-1}^{1} \frac{1}{2}dx \leq \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}dx \leq \int_{-1}^{1} dx$

Donc : $\frac{1}{2}(1+1) \leq \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}dx \leq 1(1+1)$

D'où : $1 \leq \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}dx \leq 2$

2 Montrons que: $\frac{\sqrt{2}}{2}\ln 2 \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}dx \leq \ln 2$

La fonction sin est strictement croissante sur $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$

ProfSalmi.blogspot.com

(car : $\left(\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\right)$; $\sin'(x) = \cos x$ et $\cos x \geq 0$)

Donc : $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \leq \sin x \leq \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$\Longrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin x \leq 1$

D'où : $\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$

et comme, $\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$; alors : $\frac{\sqrt{2}}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x}dx \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}dx \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x}dx$

On a : $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x}dx = [\ln x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= \ln\left(\frac{\pi}{2}\right) - \ln\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$= \ln\left(\frac{\pi}{2}\right) + \ln\left(\frac{4}{\pi}\right)$

$= \ln\left(\frac{\pi}{2} \times \frac{4}{\pi}\right)$

$= \ln(2)$

Donc : $\frac{\sqrt{2}}{2}\ln 2 \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}dx \leq \ln 2$

3 Montrons que : $2e^{-4} \leq \int_0^2 \frac{1}{e^{x^2}}dx \leq \ln 2$

On a : $0 \leq x \leq 2 \Longrightarrow 0 \leq x^2 \leq 4$

$\Longrightarrow 1 \leq e^{x^2} \leq e^4$

$\Longrightarrow \frac{1}{e^4} \leq \frac{1}{e^{x^2}} \leq 1$

Donc, d'après la propriété de l'intégrale et l'ordre:

$\int_0^2 \frac{1}{e^4}dx \leq \int_0^2 \frac{1}{e^{x^2}}dx \leq \int_0^2 1dx$

c'est-à-dire : $\frac{2}{e^4} \leq \int_0^2 \frac{1}{e^{x^2}}dx \leq 2$

Conclusions : $2e^{-4} \leq \int_0^2 \frac{1}{e^{x^2}}dx \leq 2$

info:

$\int_a^b c\,dx = c(b-a)$

où c est une constante (ne dépendant pas de x)

4 Montrons que : $2\ln 3 \leq \int_2^4 \ln(x^2-1)dx \leq 2\ln 3 + 2\ln 5$

On a : $2 \leq x \leq 4 \Longrightarrow 4 \leq x^2 \leq 16$

$\Longrightarrow 3 \leq x^2 - 1 \leq 15$

$\Longrightarrow \ln(3) \leq \ln(x^2-1) \leq \ln(15)$

$\Longrightarrow \ln(3) \leq \ln(x^2-1) \leq \ln 3 + \ln 5$

ProfSalmi.blogspot.com

(car la fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$)

et comme, $2 < 4$ alors d'après la propriété de l'intégrale et l'ordre :

$$\int_2^4 \ln 3\,dx \leq \int_2^4 \ln(x^2-1)\,dx \leq \int_2^4 (\ln 3 + \ln 5)\,dx$$

Donc : $2\ln 3 \leq \int_2^4 \ln(x^2-1)\,dx \leq 2\ln 3 + 2\ln 5$

Exercice 23

Rappel : La valeur moyenne d'une fonction :

Si f est une fonction continue sur le segment $[a;b]$ où $(a < b)$, alors la valeur moyenne de la fonction f sur $[a;b]$ est : $V_m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$

1 On a : $f(x) = e^{-x}$ et $I = [-1;2]$:

La fonction f est continue sur l'intervalle I (car : $f(x) = \frac{1}{e^x}$ et la fonction $x \longmapsto e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$).

Donc la valeur moyenne de f sur I

est : $V_m = \frac{1}{2+1}\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = \frac{1}{3}[-e^{-x}]_{-1}^{2}$

$$= \frac{1}{3}(-e^{-2} + e)$$

$$= \frac{1}{3}\left(e - \frac{1}{e^2}\right)$$

2 On a : $f(x) = \sin(2x)$ et $I = [0;\pi]$:

La fonction f est continue sur l'intervalle I, donc la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle I.

est : $V_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\pi} = 0$ (car : $\cos 2\pi = \cos 0 = 1$)

3 On a : $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ et $I = [1;2]$:

La fonction f est continue sur l'intervalle I (comme quotient de deux fonctions continues sur I : $x \longmapsto \ln x$ et $x \longmapsto x$ et cette dernière ne s'annulant pas sur I).

Donc la valeur moyenne de la fonction f sur I est :

ProfSalmi.blogspot.com

$$V_m = \frac{1}{2-1}\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx$$
$$= \int_1^2 ln'(x)\ln x\, dx$$
$$= \left[\frac{1}{2}\ln^2(x)\right]_1^2$$
$$= \frac{1}{2}\ln^2(2)$$

4 On a : $f(x) = -\frac{3}{x}$ et $I = [-2;-1]$:

Donc : $V_m = \frac{1}{-1+2}\int_{-2}^{-1} -\frac{3}{x}\ dx$

$$= -\int_{-2}^{-1} \frac{3}{x}dx$$
$$= -[3\ln(|x|)]_{-2}^{-1}$$
$$= 3\ln 2$$

$$f(c) = V_m \Leftrightarrow -\frac{3}{c} = 3\ln 2 \Leftrightarrow \frac{1}{c} = -\ln 2$$
$$\Leftrightarrow c = \frac{-1}{\ln 2}$$

Donc : $c = -\frac{1}{\ln 2}$

Exercice 24

1 On a : $V_m = \frac{2}{3}$ et $K = \int_2^5 f(x)dx$:

et $V_m = \frac{1}{5-2}\int_2^5 f(x)\,dx = \frac{1}{3}\int_2^5 f(x)dx$

Donc : $V_m = \frac{1}{3}K$

c'est-à-dire : $K = 3V_m$

Donc : $K = 2$

2 On a : $V_m = -\sqrt{2}$ et $K = \int_{-2}^2 f(x)dx$

Or : $V_m = \frac{1}{2-(-2)}\int_{-2}^2 f(x)dx$

Donc : $\int_{-2}^2 f(x)dx = (2-(-2))V_m = -4\sqrt{2}$

3 On a : $V_m = 2\ln 5$ et $K = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}} f(x)dx$ et $V_m = \frac{1}{\frac{5}{2}-\frac{1}{2}}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}} f(x)dx$

info:

On a : $V_m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$

Donc: $\int_a^b f(t)dt = (b-a)V_m$

ProfSalmi.blogspot.com

Donc : $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}} f(x)\,dx = \left(\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\right)V_m$

$= 2V_m$

$= 4\ln 5$

4 L'intégrale et calcul d'aire et de volume

Calcule d'aire :

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$.

- Si f est une fonction continue sur l'intervalle $[a;b]$, alors l'aire du domaine Δ limité par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x=a$ et $x=b$ est : $\left(\int_a^b |f(x)|dx\right)ua$, où $u.a = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$.
- L'aire de la partie plane délimitée par les courbes des fonctions f et g et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est : $\int_a^b |f(x)-g(x)|dx\,u.a$

Calcul de volume :

- L'espace est rapporté à un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

Soit S un solide compris entre les plans d'équation $z=a$ et $z=b$ où $a<b$

Soit $S(t)$ l'aire de la section du solide S par le plan d'équation $z=t$ où $a \le t \le b$

Si la fonction $t \longmapsto S(t)$ définie sur l'intervalle $[a;b]$ est continue sur $[a;b]$ alors le volume du solide S est : $V=\left(\int_a^b S(t)dt\right)uv$, où uv est l'unité de volume : $uv = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \times \|\vec{k}\|$.

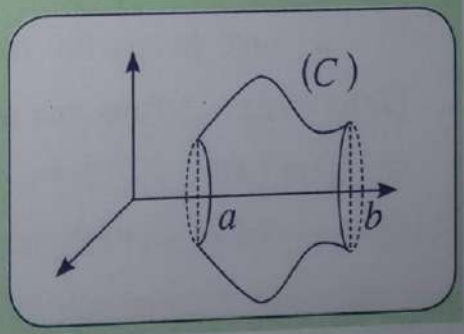
Propriété :

L'espace est rapporté à un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a;b]$; (avec $a<b$)

Le volume du corps de révolution engendré par la rotation de la courbe de f. autour de l'axe des abscisses est :

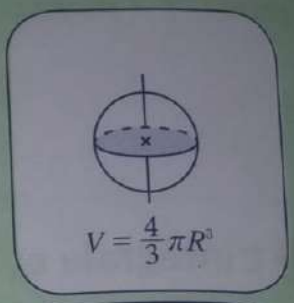
$V=\left(\pi\int_a^b (f(x))^2dx\right)uv$



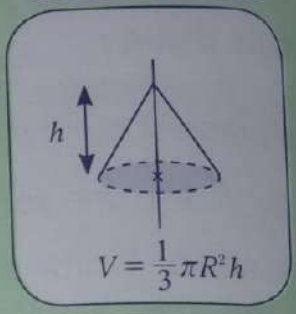
ProfSalmi.blogspot.com

Car particuliers :

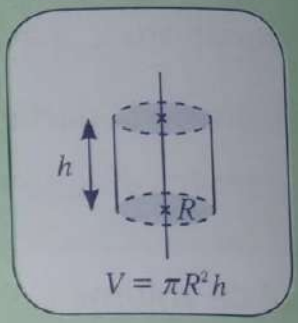
- Le volume de la boule de rayon R est : $V = \frac{4}{3}\pi R^3$



- Le volume du cône de révolution de rayon R et de hauteur h est : $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$



- Le volume d'un cylindre de rayon R et de hauteur h est : $V = \pi R^2 h$



Exercices

Exercice 25

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = 2cm$ et $\|\vec{j}\| = 3cm$

Calculer en cm^2, l'aire du domaine (Δ) dans chacun des cas suivants :

1. (Δ) est la partie limitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$ où : $f(x) = x + \frac{1}{x}$
2. (Δ) est la partie plane limitée par la courbe de g l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées, et la droite d'équation $x = -\pi$ où $g(x) = \sin x$
3. (Δ) est la partie plane limitée par la courbe de h l'axe des abscisses et les droites $D_1: x = 2$ et $D_2: x = 4$ où : $h(x) = x^2 - 2x - 3$
4. (Δ) est la partie plane limitée par la courbe de φ la droite $(D): y = 2x - 1$ l'axe des ordonnées et la droite $(D_1): x = 2$ où $\varphi(x) = x^2$
5. $(\Delta) = \{M(x;y) \in P \,/\, 1 \leq x \leq 4 \text{ et } 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$
6. $(\Delta) = \{M(x;y) \in P \,/\, 0 \leq x \leq 1 \text{ et } x^2 \leq y \leq e^x$

Montrer d'abord que $(\forall x \in [0;+\infty[)$ ...

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 26

Calculer le volume du cône de révolution engendré par la courbe de f (sur $I=[a;b]$) autour de l'axe des abscisses dans chacun des cas suivants :

1. $f(x)=\frac{1}{2}x$ et $I=[0;4]$
2. $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ et $I=[-1;1]$
3. $f(x)=\sqrt{1+e^{x-1}}$ et $I=[-2;0]$
4. $f(x)=\sqrt{\cos x}\sin^2 x$ et $I=\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$
5. $f(x)=\frac{x}{x^3+1}$ et $I=[1;2]$
6. $f(x)=\sqrt{\ln x}$ et $I=[1;e]$

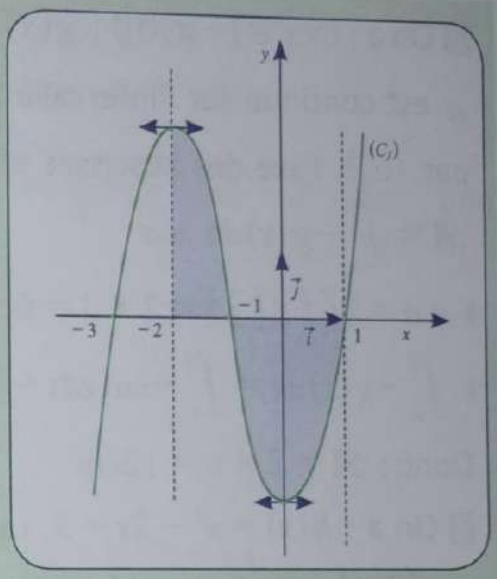
Exercice 27

Le plan rapporté au repère orthonrmé $(O;\vec{i};\vec{j})$ tel que : $\|\vec{i}\|=1cm$

La figure ci-contre représente la courbe de la fonction :

$f:x\mapsto x^3+3x^2-x-3$

Calculer en cm^2 l'aire du domaine (Δ) hachuré sur la figure.

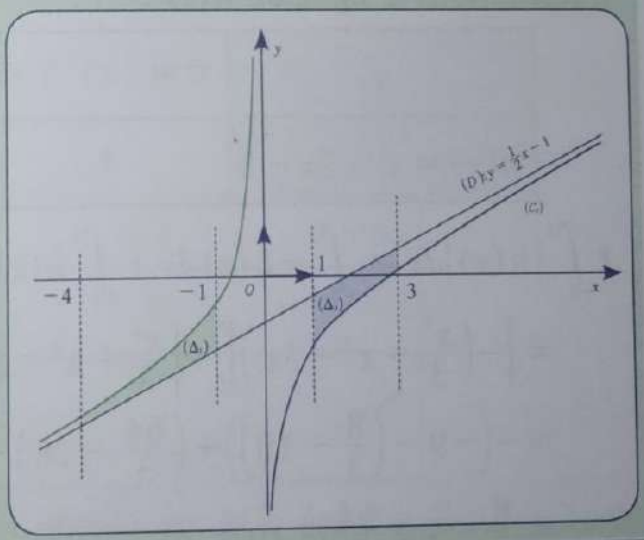


Exercice 28

La figure ci-contre représente la courbe de la fonction :

$f:x\mapsto \frac{x}{2}-1-\frac{1}{x}$

1. Calculer l'aire du domaine (Δ_1) (en unité d'aire)
2. Calculer l'aire du domaine (Δ_2) (en unité d'aire)



Solutions

Exercice 25

1. On a : $(\forall x\in[1;e])$; $f(x)=x+\frac{1}{x}$ et $f(x)>0$, de plus la fonction f est continue sur $[1;e]$ donc $\mathcal{A}$, l'aire du domaine (Δ) limité par (C_f), l'axe des

ProfSalmi.blogspot.com

abscisses et les droites : $D_1 : x = 1$ et $D_2 : x = e$

est : $\mathcal{A} = \int_1^e f(x)dx \; u.a$

▸ On a : $\int_1^e f(x)dx = \int_1^e \left(x + \frac{1}{x}\right)dx$

$= \left[\frac{x^2}{2} + \ln x\right]_1^e = \left(\frac{e^2}{2} + 1\right) - \left(\frac{1}{2} + 0\right) = \frac{e^2}{2} + \frac{1}{2}$

▸ $u.a = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| = 2 \times 3 = 6cm^2$

Donc : $\mathcal{A} = \left(\frac{e^2}{2} + \frac{1}{2}\right)6cm^2$

$\mathcal{A} = 3(e^2 + 1)cm^2$

2 On a : $(\forall x \in [-\pi; 0])$; $g(x) = \sin x$ et $g(x) \leq 0$, donc $-g(x) \geq 0$; de plus g est continue sur l'intervalle $[-\pi; 0]$, donc $\mathcal{A}$, l'aire du domaine (Δ) limité par (C_g), l'axe des abscisses et les droites : $(D) : x = -\pi$ et $(D') : x = 0$ est :

$\mathcal{A} = \int_{-\pi}^0 -g(x)du \; u.a$

▸ $u\,a = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| = 2 \times 3 = 6cm^2$)

▸ $\int_{-\pi}^0 -g(x)dx = \int_{-\pi}^0 -\sin x dx = [\cos x]_{-\pi}^0 = \cos(0) - \cos(-\pi) = 2$

Donc : $\mathcal{A} = 2 \times 6 = 12cm^2$

3 On a : $h(x) = x^2 - 2x - 3$. La fonction h est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $[2; 4]$ (car c'est ane fonction polynôme), donc : $\mathcal{A} = \int_2^4 |h(x)|\,dx \; u\,a$:

Déterminons le signe de $h(x)$:

x	$-\infty$		-1		2		3		4	$+\infty$
$h(x) = x^2 - 2x - 3$		+	0	-		-	0	+		

▸ $\int_2^4 |h(x)|dx = \int_2^3 -h(x)dx + \int_3^4 h(x)dx$

$= \left[-\left(\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x\right)\right]_2^3 + \left[\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x\right]_3^4$

$= -\left(-9 - \left(\frac{8}{3} - 10\right)\right) + \left(\frac{64}{3} - 28\right) - (-9)$

$= \frac{8}{3} - 1 + \frac{64}{3} - 19 = 4$

infos:

$\Delta = 16$

$x_1 = -1$ et $x_2 = 3$

on peut aussi remarquer que -1 est une racine .

▸ $ua = 6cm^2$

Donc : $\mathcal{A} = 4\,ua = 24cm^2$

4 On a : $\varphi(x) = x^2$ les fonction φ et $x \longmapsto 2x - 1$ sont continues sur $\mathbb{R}$, et en particulier sur $[0; 2]$ (fonctions polynômes).

ProfSalmi.blogspot.com

Donc : $\mathcal{A}(\Delta) = \mathcal{A} = \left(\int_0^2 |\varphi(x) - 2x + 1|dx\right) u\ a$

$$\int_0^2 |\varphi(x) - 2x + 1|dx = \int_0^2 |x^2 - 2x + 1|dx = \int_0^2 (x-1)^2 dx$$
$$= \left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_0^2 = \frac{2}{3}$$

Or : $ua = 6cm^2$

Donc : $\mathcal{A} = \frac{2}{3} u\ a = 4cm^2$

5 $(\Delta) = \{M(x,y) \in P / 1 \leq x \leq 4 \text{ et } 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$

$\mathcal{A}(\Delta) = \mathcal{A} = \int_1^4 \sqrt{x}\, dx\ u\ a$ (La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est continue et positive sur $[1;4]$).

$$\mathcal{A} = \left[\frac{2}{3} x\sqrt{x}\right]_1^4 u\ a$$

$\left(f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Longrightarrow F(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\right)$ (où F est une primitive de la fonction f sur $]0; +\infty[$)

Donc : $\mathcal{A} = \left(\frac{16}{3} - \frac{2}{3}\right) u\ a = 28cm^2$

6 $(\Delta) = \{M(x;y) \in P / 0 \leq x \leq 1 \text{ et } x^2 \leq y \leq e^x\}$

Montrons que : $(\forall x \in [0, +\infty[)\ ;\ e^x > x^2$

On considère la fonction : $x \mapsto \varphi(x) = e^x - x^2$ où $x \in [0; +\infty[$

$(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ ;\ \varphi'(x) = e^x - 2x$

$(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ ;\ \varphi''(x) = e^x - 2$

$\varphi'(x) = 0 \Longleftrightarrow e^x = 2$
$\Longleftrightarrow x = \ln 2$

$\varphi''(x) > 0 \Longleftrightarrow e^x > 2$
$\Longleftrightarrow x > \ln 2$

x	0		$\ln 2$		$+\infty$
$\varphi''(x)$		$-$	0	$+$	
φ'	1	↘	$2 - 2\ln 2$	↗	

La fonction φ' admet un minimum absolu en $\ln 2$ égale à $2 - 2\ln 2$; or $2 - 2\ln 2 > 0$ $(2 - 2\ln 2 \simeq 0,6)$

Donc : $(\forall x \in [0, +\infty[)\ ;\ \varphi'(x) > 0$

Donc la fonction φ est strictement croissante sur $[0; +\infty[$

Donc : $x \geq 0 \Longleftrightarrow \varphi(x) \geqslant \varphi(0)$

$\Longleftrightarrow \varphi(x) \geq 1$

ProfSalmi.blogspot.com

D'où : $(\forall x \in [0;+\infty[) \ ; \ \varphi(x) > 0$

Conclusion : $(\forall x \in [0,+\infty[) \ ; \ e^x > x^2$

(Δ) est le domaine limité par les courbes des fonctions : $x \longmapsto e^x$ et $x \longmapsto x^2$ d'une part et les droites $D_1 : x = 0$ et $D_2 : x = 1$ d'autre part.

Les fonction : $x \longmapsto e^x$ et $x \longmapsto x^2$ sont continues sur $[0;1]$

et $\forall x \in [0;1]$, $x^2 < e^x$ donc : $\mathcal{A}(\Delta) = \mathcal{A} = \int_0^1 (e^x - x^2)dx \ u\,a$

$$\mathcal{A} = \left[e^x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 u\,a$$

$$\mathcal{A} = \left(e - \frac{4}{3}\right) u\,a$$

On a : $ua = 6cm^2$

Donc: $\mathcal{A} = (6e - 8)cm^2$

Exercice 26

Rappel : Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ alors le volume du corps de révolution engendré par la rotation de la courbe (C_f) sur l'intervalle $[a;b]$, autour de l'axe des abscisses est : $V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx (uv)$ où uv est l'unité de volume.

Applications :

1 On a : $f(x) = \frac{1}{2}x$ et $I = [0;4]$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $[0;4]$ (car c'est une fonction polynôme)

Donc : $V = \pi \int_0^4 f^2(x)dx \ \ uv = \left(\pi \int_0^4 \frac{1}{4}x^2 dx\right) uv$

$$V = \pi \left[\frac{1}{12}x^3\right]_0^4 \ uv$$

$$V = \frac{16\pi}{3} \ u\,v$$

2 On a : $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ et $I = [-1;1]$:

La fonction f est continue sur $[-1;1]$ (car la fonction $x \longmapsto 1 - x^2$ est continue et positive sur $[-1;1]$).

Donc : $V = \pi \int_{-1}^1 (1 - x^2)dx \ uv$

$$V = \pi \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^1 \ ua$$

$$V = \pi \left(\frac{4}{3}\right) u\,v$$

ProfSalmi.blogspot.com

3 On a : $f(x)=\sqrt{1+e^{x-1}}$ et $I=[-2;0]$

La fonction f est continue sur $[-2;0]$ (car la fonction $x \longmapsto 1+e^{x-1}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$)

Donc : $V=\pi\int_{-2}^{0}(1+e^{x-1})dx$ uv

$V=\pi[x+e^{x-1}]_{-2}^{0}$ uv

$V=\pi\left(\frac{1}{e}+2-e^{-3}\right)u\,v$

$V=\pi\left(2+\frac{1}{e}-\frac{1}{e^3}\right)u\,v$

4 On a : $f(x)=\sqrt{\cos x}\sin^2 x$ et $I=\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

La fonction f est continue sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ (car les fonction $\sin$ et $\cos$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et la fonction $\cos$ est positive sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$)

Donc : $V=\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f^2(x)dx$ $u\,v$

$V=\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^4(x)\cos x dx$ $u\,v$

$V=\pi\left[\frac{1}{5}\sin^5(x)\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}u\,v$

$V=\frac{\pi}{5}u\,v$

5 On a : $f(x)=\frac{x}{x^3+1}$ et $I=[1;2]$

La fonction f est continue sur $[1;2]$, car c'est une onction rationnelle et $[1;2]\subset D_f$

Donc : $V=\pi\int_{1}^{2}\frac{x^2}{(x^3+1)^2}dx$

$V=\frac{\pi}{3}\left[\frac{-1}{x^3+1}\right]_{1}^{2}u\,v$

$V=\frac{7\pi}{54}u\,v$

6 On a : $f(x)=\sqrt{\ln x}$ et $I=[1;e]$

La fonction f est continue sur $[1;e]$, car la fonction $\ln$ est continue et positive sur $[1;e]$

Donc : $V=\pi\int_{1}^{\pi}(f(x))^2\,dx\,u\,v$

$V=\pi\int_{1}^{e}\ln x\,dx\,u\,v$

Calculons par parties l'intégrale $\int_{1}^{e}\ln x dx$

On pose : $v(x)=\ln x$ et $u'(x)=1$ donc : $v'(x)=\frac{1}{x}$ et $u(x)=x$

ProfSalmi.blogspot.com

D'où : $\int_1^e \ln x dx = [x\ln x]_1^e - \int_1^e 1dx = [x\ln x]_1^e - [x]_1^e = (e-0)-(e-1) = 1$

Conclusion : $V = \pi\, u\, v$

Exercice 27

La fonction f est une fonction polynôme, donc continue sur $\mathbb{R}$.

La fonction f est continue et positive sur $[-2,-1]$ et négative sur $[-1;1]$ (d'après le graphique)

Donc : $\mathcal{A}(\Delta) = \int_{-2}^{1} |f(x)|dx\ ua$

$$\mathcal{A}(\Delta) = \left(\int_{-2}^{-1} f(x)dx - \int_{-1}^{1} f(x)dx\right)ua$$

$$\int_{-2}^{-1} f(x)dx - \int_{-1}^{1} f(x)dx = \left[\frac{x^4}{4}+x^3-\frac{x^2}{2}-3x\right]_{-2}^{-1} - \left[\frac{x^4}{4}+x^3-\frac{x^2}{2}-3x\right]_{-1}^{1}$$

$$= \left(\frac{1}{4}-1-\frac{1}{2}+3-4+8+2-6\right)-\left(\frac{1}{4}+1-\frac{1}{2}-3-\frac{1}{4}+1+\frac{1}{2}-3\right)$$

$$= \left(2-\frac{1}{4}\right)+(4) = \frac{23}{4}$$

$\mathcal{A}(\Delta) = \frac{23}{4}u\,a$ et $u.a = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| = 1cm^2$

Donc : $\mathcal{A}(\Delta) = \frac{23}{4}cm^2$

Exercice 28

Calculons $\mathcal{A}(D_1)$

1 Les fonctions f et $g : x \longmapsto \frac{1}{2}x-1$ sont continues sur l'intervalle $[-4;-1]$ et $f(x) > g(x)$ sur I (d'après le graphique)

Donc : $\mathcal{A}(\Delta_1) = \int_{-4}^{-1}\left(f(x)-\left(\frac{1}{2}x-1\right)\right)dx\ u\ a = \int_{-4}^{-1} -\frac{1}{x}\,dx\ u\ a$

$$= [-\ln(|x|)]_{-4}^{-1}\ u\ a$$

Donc : $\mathcal{A}(\Delta_1) = (\ln 4)\,u\,a$

Calculons $\mathcal{A}(D_2)$

2 Les fonctions f et $g : x \longmapsto \frac{1}{2}x-1$ sont continues sur l'intervalle $J = [1;3]$ et $f(x) < g(x)$ sur J.

Donc : $\mathcal{A}(\Delta_2) = \int_1^3 \left(\frac{1}{2}x-1-f(x)\right)dx\ u\,a$

$$\mathcal{A}(\Delta_2) = \int_1^3 \frac{1}{x}\,dx$$

$$\mathcal{A}(\Delta_2) = [\ln x]_1^3 = \ln 3\,(u\,a)$$

D'où : $\mathcal{A}(\Delta_2) = \ln 3\,(u\,a)$

ProfSalmi.blogspot.com

Exercices

Exercice 29 L'intégrale d'une fonction rationnelle

Calculer les intégrales suivantes :

- $I_1 = \int_{-2}^{-1} \frac{x+2}{x+3} dx$ (Remarquer que : $\frac{x+2}{x+3} = 1 - \frac{1}{x+3}$)
- $I_2 = \int_{0}^{1} \frac{2x-3}{2x+1} dx$
- $I_3 = \int_{2}^{3} \frac{2}{x^2-1} dx$ (Remarquer que : $\frac{2}{x^2-1} = \frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$)
- $I_4 = \int_{0}^{1} \frac{x^2-3x+1}{x-2} dx$

Déterminer les nombres a, b et c tels que :

$(\forall x \in \mathbb{R} - \{2\})$; $\frac{x^2-3x+1}{x-2} = ax + b - \frac{1}{x-2}$

On pourra effectuer la division euclidienne de x^2-3x+1 par $x-2$.

- $I_5 = \int_{-4}^{-3} \frac{x}{(x+2)^2} dx$; $I_6 = \int_{0}^{1} \frac{2x^3+x^2-3x+4}{x^2-x+1} dx$

Déterminer les nombres réels a et b tels que :

$(\forall x \in \mathbb{R} - \{-2\})$; $\frac{x}{(x+2)^2} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{(x+2)^2}$

Déterminer les nombres réels a, b, c et d tels que :

$(\forall x \in \mathbb{R})$; $\frac{2x^3+x^2-3x+4}{x^2-x+1} = ax + b + \frac{cx+d}{x^2-x+1}$

- $I_7 = \int_{2}^{e+1} \frac{x^3-2x^2+2x-2}{x-1} dx$

Déterminer les nombres réels a, b, c et d tels que :

$(\forall x \in \mathbb{R} - \{1\})$; $\frac{x^3-2x^2+2x-2}{x-1} = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x-1}$

- $I_8 = \int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2-4}$ (Vérifier d'abord que : $(\forall x \in \mathbb{R} - \{-2;2\})$; $\frac{4}{x^2-4} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}$)
- $I_9 = \int_{2}^{3} \frac{3x}{(x-1)(x+2)} dx$ (Vérifier d'abord que :

$(\forall x \in \mathbb{R} - \{1;-2\})$; $\frac{3x}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+2}$)

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 30 Intégrales de fonctions trigonométriques

Calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = \int_0^{\pi} \cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)dx$; $I_2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)dx$; $I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2 x}dx$

Exercice 31

Calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \sin(2x)dx$; $I_2 = \int_0^{\pi} \cos x \cos(2x)dx$; $I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{\cos x + \sin x}dx$

$I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(2x)}{(1+\cos(2x))^2}dx$; $I_5 = \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{(3+\cos x)^4}dx$; $I_6 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)e^{2-\sin^2 x}dx$

Exercice 32

1 Montrer que : $\left(\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]\right); \tan^3 x + \tan x = \tan'(x)\tan x$

2 Calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan^2 x dx$; $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^3 x + \tan x)dx$; $I_3 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\tan^2 x}{\tan^3 x}dx$

Exercice 33

1 Montrer que : $\frac{1}{\cos^4 x} = (1+\tan^2 x)^2$ pour tout x de $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \ ; k \in \mathbb{Z}\right\}$

2 En déduire la valeur de l'intégrale : $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^4 x}$

Exercice 34

1 Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}); \cos^4 x = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos(4x)$ (En utilisant les formules trigonométrique et la linéalisation ou la formule d'Euler et l'identité remarquable : $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$).

2 En déduire la valeur de l'intégrale : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx$

3 Calculer l'intégrale : $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx$ (on vérifie que : $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos(2x)$)

Exercice 35

1 Vérifier que : $\sin^3 x = \sin x(1-\cos^2 x)$ et : $\cos^3 x = \cos x(1-\sin^2 x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

2 En déduire la valeur de chacune des intégrales : $I = \int_0^{\pi} \sin^3 x dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 x dx$.

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 36

On considère les intégrales : $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x dx$ et $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2 x dx$:

1 Calculer : $I+J$.

2 Calculer : $I-J$.

3 En déduire : I et J.

Exercice 37

On considère les intégrales : $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\cos^4 x dx$ et $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\sin^4 x dx$

1 Calculer : $I+J$.

2 Calculer : $I-J$.

3 En déduire : I et J.

Exercice 38

On pose : $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\sin x} dx$ et $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1-\sin x} dx$

1 Calculer : $I+J$ et $I-J$.

2 En déduire la valeur de chacune des intégrales I et J.

Exercice 39

Soit (u_n) la suite définie par : $u_n=\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{x^2+1} dx$ où : $n\in\mathbb{N}$

1 Calculer u_0.

2 Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}) ; u_n\geq 0$

3 Montrer que la suite (u_n) est décroissante et en déduire sa convergence.

4 a. Montrer que : $(\forall x\in[0;1]) ; 0\leq \frac{x^{2n+1}}{x^2+1}\leq x^{2n+1}$

b. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 40

Soit (u_n) la suite définie par : $(\forall n\in\mathbb{N}) ; u_n=\int_1^2 x(1+x)^n dx$:

1 Montrer que la suite (u_n) est croissante (sans calculer l'intégrale).

2 a. Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}) ; 2^n\leq u_n\leq 2\times 3^n$

b. En déduire la limite de la suite (u_n).

3 Déterminer u_n en fonction de n.

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 41

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par : $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \sin x dx$ et $v_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \cos x dx$:

1 Calculer u_0 et v_0.

2 En utilisant une intégration par parties à u_n et v_n, montrer que:

$(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n + nv_n = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$; $-nu_n + v_n = e^{-\frac{n\pi}{2}}$

3 En déduire v_n et v_n en fonction de n.

4 Calculer $\lim u_n$ et $\lim v_n$.

Exercice 42

On considère les intégrales :

$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$; $J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} dx$ et $K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}\, dx$.

1 Calcul de l'intégrale I :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+2})$.

a. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b. En déduire la valeur de l'intégrale I.

2 Calcule J et K :

a. Vérifier que : $J + 2I = K$.

b. Montrer, en utilisant une intégration par parties, que : $K = \sqrt{3} - J$.

c. En déduire la valeur de chacune des intégrales J et K.

Les intégrales au Bac (Extraits sujets bac)

Exercice 43 **Juillet 2010 (sciences économiques)**

1 a. Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $\frac{(x+1)^2}{x^2+1} = 1 + \frac{2x}{x^2+1}$

b. En déduire la valeur de l'intégrale : $\int_0^1 \frac{(x+1)^2}{x^2+1} dx$.

2 a. En utilisant une intégration par parties, calculer l'intégrale : $\int_0^1 xe^x dx$.

b. En déduire la valeur de l'intégrale : $\int_0^1 (x - e^{-2x})e^x dx$

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 44 Session Juin 2009

On pose : $I=\int_{-2}^{-1}\frac{x}{x+3}dx$ et $J=\int_{-2}^{-1}\ln(2x+6)dx$

1 a. Vérifier que : $\frac{x}{x+3}=1-\frac{3}{x+3}$ pour tout réel x tels que $x\neq -3$.

b. Montrer que : $I=1-3\ln 2$.

c. En utilisant une intégration par parties, montrer que : $J=-I$.

Exercice 45 Session Juin 2010

1 Montrer, en utilisant une intégration par parties que :

$$\int_0^{\frac{1}{2}}(2x-1)e^{2x}dx=1-\frac{e}{2}$$

2 Montrer que l'aire de la partie plane limitée par la courbe f, la droite (T) et les droites d'équations : $x=0$ et $x=\frac{1}{2}$ est : $(6-2e)cm^2$, où : $f(x)=(2x-1)e^{2x}+x+1$ et $(T):y=x$

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ tel que : $\|\vec{i}\|=2cm$

Exercice 46 Session Juillet 2010

$(O;\vec{i};\vec{j})$ est un repère orthonormé tel que : $\|\vec{i}\|=1cm$.

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=x-1+\frac{x-1+\ln x}{x^2}$

1 Montrer, en utilisant une intégration par parties, que : $\int_1^e\frac{\ln x}{x^2}dx=1-\frac{2}{e}$

2 Montrer que l'aire du domaine plan limité par (C_f), la droite $(\Delta):y=x-1$ et les droites d'équations : $x=1$ et $x=e$ est $\left(1-\frac{1}{e}\right)cm^2$.

Exercice 47 Session Juin 2008

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=x-(\ln x)^2$

Soit (C_f) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1 Montrer que la fonction $H:x\mapsto x\ln x-x$ est une primitive de la fonction $\ln:x\mapsto\ln x$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$, puis montrer que : $\int_1^e\ln x dx=1$

2 En utilisant une intégration par parties, montrer que : $\int_1^e(\ln x)^2dx=e-2$

3 Calculer l'aire du domine plan limité par (C_f), la droite $(\Delta):y=x$, et les droites d'équations : $x=1$ et $x=e$.

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 48 **Session Juin 2012**

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=(x^2-1)\ln x$

Soit (C_f) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$; (unité $3cm$)

1 Montrer que la fonction $u:x\mapsto\frac{x^3}{3}-x$ est une primitive de la fonction $x\mapsto x^2-1$ sur $\mathbb{R}$.

2 En utilisant une intégration par parties montrer que :

$\int_1^e (x^2-1)\ln x\,dx=\frac{2}{9}(1+3\ln 2)$

3 Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par (C_f), l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$.

Exercice 49 **Session Juillet 2012**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x+\frac{e^x-1}{e^x+1}$

Soit (C_f) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1 Montrer que la fonction $H:x\mapsto x-\ln(e^x+1)$ est une primitive de la fonction $x\mapsto\frac{1}{e^x+1}$ sur $\mathbb{R}$.

2 Calculer l'aire du domaine plan limité par (C_f), la droite (D) d'équation $y=x+1$, et les droites d'équations $x=0$ et $x=\ln 2$.

Exercice 50 **Session Juin 2013**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(x-2)^2e^x$.

Soit (C_f) la courbe de f dans un repère orthonormé (unité $1cm$).

1 Montrer que : $H:x\mapsto(x-1)e^x$ est une primitive de la fonction $h:x\mapsto xe^x$ sur $\mathbb{R}$, puis calculer $\int_0^1 xe^x\,dx$.

2 En utilisant une intégration par parties, montrer que : $\int_0^1 x^2e^x\,dx=e-2$.

3 Montrer que l'aire du domaine plan, limité par (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$ est $5(e-2)cm^2$.

Exercice 51 **Session Juin 2014**

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=(1+\ln x)^2+\frac{1}{x^2}$

Soit (C_f) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$; (unité $1cm$).

ProfSalmi.blogspot.com

On considère les intégrales I et J définies par : $I=\int_1^e (1+\ln x)dx$ et $J=\int_1^e (1+\ln x)^2 dx$

1 Montrer que la fonction $H:x\mapsto x\ln x$ est une primitive de la fonction $h:x\mapsto 1+\ln x$ sur $]0;+\infty[$, puis en déduire que : $I=e$.

2 En utilisant intégration par parties, montrer que : $J=2e-1$.

3 Calculer cm^2, l'aire du domaine plan, limité par (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.

Exercice 52 **Session Juin 2015**

Soit f la fonction définie sur $]0;e[\cup]e;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{1}{x(1-\ln x)}$

Soit (C_f) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité $2cm$).

1 Montrer que : $\int_1^{\sqrt{e}} \dfrac{1}{x(1-\ln x)}dx=\ln 2$ (Remarquer que :

$(\forall x\in D_f);\dfrac{1}{x(1-\ln x)}=\dfrac{\frac{1}{x}}{1-\ln x}$)

2 Calculer en cm^2, l'aire du domine plan limité par (C_f), la droite $(\Delta):y=x$ et les droites d'équations : $x=1$ et $x=\sqrt{e}$.

Solutions

Exercice 29

▸ **Calculons :** $I_1=\int_{-2}^{-1}\dfrac{x+2}{x+3}dx$

Soit $x\in[-2;-1]$, on a : $\dfrac{x+2}{x+3}=\dfrac{x+3-1}{x+3}=1-\dfrac{1}{x+3}$

La fonction : $x\mapsto x-\ln(x+3)$ est une primitive de la fonction $x\mapsto 1-\dfrac{1}{x+3}$ sur l'intervalle $[-2;-1]$

Donc : $I_1=[x-\ln(x+3)]_{-2}^{-1}=(-1-\ln 2)-(-2-\ln 1)=1-\ln 2$

▸ **Calculons :** $I_2=\int_0^1\dfrac{2x-3}{2x+1}dx$

Soit $x\in[0;1]$, on a : $\dfrac{2x-3}{2x+1}=\dfrac{2x+1-4}{2x+1}=1-\dfrac{4}{2x+1}=1-2\times\dfrac{2}{2x+1}$

La fonction : $x\mapsto x-2\ln|2x+1|$ est une primitive de la fonction $x\mapsto 1-2\times\dfrac{2}{2x+1}$ sur l'intervalle $[0;1]$

ProfSalmi.blogspot.com

Donc : $I_2 = [x - 2\ln|2x+1|]_0^1 = (1 - 2\ln(3)) - (0 - 2\ln 1) = 1 - 2\ln 3$

▸ **Calculons :** $I_3 = \int_2^3 \frac{2}{x^2-1}dx$

Soit $x \in [2;3]$, on a : $\frac{2}{x^2-1} = \frac{2}{(x-1)(x+1)}$

$= \frac{x+1-(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$

La fonction : $x \mapsto \ln|x-1| - \ln|x+1|$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$ sur $[2;3]$

Donc : $I_3 = [\ln(x-1) - \ln(x+1)]_2^3 = \ln(2) - \ln(4) - (\ln(1) - \ln(3))$

$= \ln 2 - 2\ln 2 + \ln 3 = \ln 3 - \ln 2$

D'où : $I_3 = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$

▸ **Calculons :** $I_4 = \int_0^1 \frac{x^2-3x+1}{x-2}dx$

Effectuons la division euclidienne de $x^2 - 3x + 1$ par $x - 2$:

x^2-3x+1	$x-2$
$-x^2+2x$	$x-1$
$-x+1$	
$+x-2$	
$0-1$	

Donc : $x^2 - 3x + 1 = (x-1)(x-2) - 1$

D'où : $(\forall x \in \mathbb{R} - \{2\}); \frac{x^2-3x+1}{x-2} = x - 1 - \frac{1}{x-2}$

La fonction : $x \mapsto \frac{x^2}{2} - x - \ln|x-2|$ est une primitive de la fonction $x \mapsto x - 1 - \frac{1}{x-2}$ sur l'intervalle $[0;1]$

Donc : $I_4 = \left[\frac{x^2}{2} - x - \ln|x-2|\right]_0^1$

$= \frac{1}{2} - 1 - \ln(1) - (0 - \ln 2) = -\frac{1}{2} + \ln 2$

▸ **Calculons :** $I_5 = \int_{-4}^{-3} \frac{x}{(x+2)^2}dx$

Déterminons les nombres réels a et b, tels que :

$(\forall x \in \mathbb{R} - \{-2\}); \frac{x}{(x+2)^2} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{(x+2)^2}$

Soit $x \in \mathbb{R} - \{-2\}$, $\frac{x}{(x+2)^2} = \frac{x+2-2}{(x+2)^2}$

$= \frac{x+2}{(x+2)^2} - \frac{2}{(x+2)^2} = \frac{1}{x+2} - \frac{2}{(x+2)^2}$

ProfSalmi.blogspot.com

Donc : $a = 1$ et $b = -2$.

Retour au calcul de I_5 :

$$I_5 = \int_{-4}^{-3} \frac{x}{(x+2)^2} dx$$

$$= \int_{-4}^{-3} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{2}{(x+2)^2} \right) dx = \int_{-4}^{-3} \frac{1}{x+2} dx - 2\int_{-4}^{-3} \frac{1}{(x+2)^2} dx$$

▸ La fonction : $x \mapsto \ln|x+2|$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x+2}$ sur l'intervalle $[-4;-3]$.

Donc : $\int_{-4}^{-3} \frac{1}{x+2} dx = [\ln|x+2|]_{-4}^{-3} = \ln(1) - \ln(2) = -\ln 2$

▸ La fonction : $x \mapsto \frac{-1}{x+2}$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{(x+2)^2}$ sur l'intervalle $[-4;-3]$.

Donc : $\int_{-4}^{-1} \frac{1}{(x+2)^2} dx = \left[\frac{-1}{x+2} \right]_{-4}^{-3} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

D'où : $I_5 = -\ln(2) - 1$

▸ **Calculons :** $I_6 = \int_0^1 \frac{2x^3 + x^2 - 3x + 4}{x^2 - x + 1} dx$

▸ **Déterminons les réels a, b, c et d tels que :**

$$(\forall x \in \mathbb{R}) ; \frac{2x^3 + x^2 - 3x + 4}{x^2 - x + 1} = ax + b + \frac{cx + d}{x^2 - x + 1}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$;

$$ax + b + \frac{cx + d}{x^2 - x + 1} = \frac{(ax+b)(x^2 - x + 1) + cx + d}{x^2 - x + 1}$$

$$= \frac{ax^3 + (b-a)x^2 + (a - b + c)x + b + d}{x^2 - x + 1}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) ; \frac{2x^3 + x^2 - 3x + 4}{x^2 - x + 1} = \frac{ax^3 + (b-a)x^2 + (a-b+c)x + b + d}{x^2 - x + 1} \quad (*)$$

$$(*) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}) ; 2x^3 + x^2 - 3x + 4 = ax^3 + (b-a)x^2 + (a - b + c)x + b + d$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b - a = 1 \\ a - b + c = -3 \\ b + d = 4 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow a = 2$, $b = 3$, $c = -2$ et $d = 1$.

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \frac{2x^3 + x^2 - 3x + 4}{x^2 - x + 1} = 2x + 3 + \frac{-2x + 1}{x^2 - x + 1}$

ProfSalmi.blogspot.com

▸ **Retour au calcul de I_6 :**

$$I_6 = \int_0^1 \left(2x+3+\frac{-2x+1}{x^2-x+1}\right)dx$$
$$= \int_0^1 (2x+3)dx + \int_0^1 \frac{-2x+1}{x^2-x+1}dx$$
$$= \int_0^1 (2x+3)dx - \int_0^1 \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx$$
$$= \int_0^1 (2x+3)dx - \int_0^1 \frac{(x^2-x+1)'}{(x^2-x+1)}dx$$
$$= [x^2+3x]_0^1 - [\ln|x^2-x+1|]_0^1 = 4$$

Donc : $I_6 = 4$

▸ **Calculons** $I_7 = \int_2^{e+1} \frac{x^3-2x^2+2x-2}{x-1}dx$:

Déterminons les réels a, b, c et d tels que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}-\{1\}); \frac{x^3-2x^2+2x-2}{x-1} = ax^2+bx+c+\frac{d}{x-1}$$

Effectuons la division euclidienne de: x^3-2x^2+2x-2 par $x-1$:

x^3-2x^2+2x-2	$x-1$
$-x^3+x^2$	x^2-x+1
$-x^2+2x-2$	
x^2-x	
$x-2$	
$-x+1$	
-1	

Donc : $x^3-2x^2+2x-2 = (x-1)(x^2-x+1)-1$

D'où : $(\forall x \in \mathbb{R}-\{1\}); \frac{x^3-2x^2+2x-2}{x-1} = x^2-x+1-\frac{1}{x-1}$

et par suite : $a=1$, $b=-1$, $c=1$ et $d=-1$

▸ **Retour au calcul de I_7 :**

$$I_7 = \int_2^{e+1} \left(x^2-x+1-\frac{1}{x-1}\right)dx$$
$$= \int_2^{e+1} (x^2-x+1)dx - \int_2^{e+1} \frac{1}{x-1}dx$$
$$= \left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x\right]_2^{e+1} - [\ln|x-1|]_2^{e+1}$$
$$= \frac{1}{3}(e+1)^3-\frac{1}{2}(e+1)^2+e+1-\left(\frac{8}{3}-2+2\right)-1$$

ProfSalmi.blogspot.com

Donc : $I_7 = \frac{1}{3}(e+1)^3 - \frac{1}{2}(e+1)^2 + e - \frac{8}{3}$

▸ **Calculons** $I_8 = \int_0^1 \frac{dx}{x^2-4}$:

▸ Soit $x \in \mathbb{R} - \{-2;2\}$; $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} = \frac{x+2-x+2}{(x-2)(x+2)} = \frac{4}{x^2-4}$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R} - \{-2;2\})$; $\frac{4}{x^2-4} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R} - \{-2;2\}$; $\frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right)$

$$I_8 = \int_0^1 \frac{1}{x^2-4}dx = \frac{1}{4}\int_0^1 \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}[\ln|x-2| - \ln|x+2|]_0^1$$

$$= \frac{1}{4}(-\ln 3 - \ln 2 + \ln 2) = -\frac{1}{4}\ln 3$$

D'où : $I_8 = -\frac{1}{4}\ln 3$

▸ **Calculons** $I_9 = \int_2^3 \frac{3x}{(x-1)(x+2)}dx$

$(\forall x \in \mathbb{R} - \{1;-2\})$; $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+2} = \frac{x+2+2x-2}{(x-1)(x+2)} = \frac{3x}{(x-1)(x+2)}$

$$I_9 = \int_2^3 \left(\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+2}\right)dx$$

$$= \int_2^3 \frac{1}{x-1}dx + 2\int_2^3 \frac{1}{x+2}dx$$

$$= [\ln|x-1|]_2^3 + 2[\ln|x+2|]_2^3$$

$$= \ln 2 + 2(\ln 5 - \ln 4)$$

$$= \ln 2 + 2\ln\left(\frac{5}{4}\right) = \ln(2) + \ln\frac{25}{16} = \ln\left(\frac{25}{8}\right)$$

Exercice 30

▸ **Calculons :** $I_1 = \int_0^{\pi} \cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)dx$

▸ La fonction $x \to \frac{1}{3}\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$ est une primitive de la fonction:

$x \mapsto \cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$ sur l'intervalle $[0;\pi]$

Donc : $I_1 = \left[\frac{1}{3}\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)\right]_0^{\pi}$

$$= \left(\frac{1}{3}\sin\left(3\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right) - \left(\frac{1}{3}\sin\left(0 - \frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{3}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{3}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

ProfSalmi.blogspot.com

▸ **Calculons :** $I_2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)dx$

▸ La fonction $x \mapsto -\frac{1}{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ est une primitive de la fonction :

$x \mapsto \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$ sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Donc : $I_2 = \left[-\frac{1}{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{0}$

$= \left(-\frac{1}{2}\cos\left(0 - \frac{\pi}{4}\right)\right) - \left(-\frac{1}{2}\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right)$

$= -\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4} = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

▸ **Calculons :** $I_3 = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2 x}dx$

▸ La fonction $x \mapsto \tan x$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$ sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$

Donc : $I_3 = [\tan x]_0^{\frac{\pi}{3}} = \tan\frac{\pi}{3} - \tan 0 = \sqrt{3}$

Exercice 31

▸ **Calculons :** $I_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \sin(2x)dx$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$, donc : $\cos x \sin(2x) = 2\sin x \cos^2 x$

Or : $2\sin x \cos^2 x = -2(\cos)'(x)\cos^2 x$

Donc, la fonction $x \mapsto -\frac{2}{3}\cos^3 x$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \cos x \sin(2x)$ sur $\mathbb{R}$.

Donc : $I_1 = \left[-\frac{2}{3}\cos^3 x\right]_{-\pi}^{\pi} = -\frac{2}{3}(-1+1) = 0$

▸ **Calculons :** $I_2 = \int_{0}^{\pi} \cos x \cos(2x)dx$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$, donc : $\cos x \cos(2x) = (1 - 2\sin^2 x)\cos x$

c'est-à- dire : $\cos x \cos(2x) = \cos x - 2\cos x \sin^2 x$

Or : $\cos x \sin^2 x = \sin'(x)\sin^2 x$; donc la fonction $x \mapsto \frac{1}{3}\sin^3 x$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \cos x \sin^2 x$ sur $\mathbb{R}$.

Donc : $I_1 = \int_{0}^{\pi} (\cos x - 2\cos x \sin^2 x)dx$

$= \int_{0}^{\pi} \cos x dx - 2\int_{0}^{\pi} \cos x \sin^2 x dx$

$= [\sin x]_0^{\pi} - 2\left[\frac{1}{3}\sin^3 x\right]_0^{\pi} = 0$

ProfSalmi.blogspot.com

Calculons : $I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{\cos x + \sin x} dx$

Soit $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, on a : $\frac{\sin x - \cos x}{\cos x + \sin x} = \frac{-(\cos x - \sin x)}{\cos x + \sin x}$

$$= -\frac{(\cos x + \sin x)'}{\cos x + \sin x}$$

Donc, la fonction $x \mapsto -\ln|\cos x + \sin x|$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{\sin x - \cos x}{\cos x + \sin x}$ sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Donc : $I_3 = [-\ln|\cos x + \sin x|]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\ln(1) + \ln(1) = 0$

Calculons : $I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(2x)}{(1+\cos 2x)^2} dx$

Soit $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, on pose : $u(x) = 1 + \cos(2x)$, donc : $u'(x) = -2\sin(2x)$

D'où : $\frac{\sin(2x)}{(1+\cos 2x)^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{-2\sin(2x)}{(1+\cos 2x)^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(1+\cos 2x)'}{(1+\cos 2x)^2}$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{-(1+\cos 2x)'}{(1+\cos 2x)^2}$$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\cos(2x)}$ est donc une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{\sin 2x}{(1+\cos 2x)^2}$ su l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

Donc : $I_4 = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\cos 2x}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{4}$$

Calculons : $I_5 = \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{(3+\cos x)^4} dx$

Soit $x \in \left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$, on a : $\frac{\sin x}{(3+\cos x)^4} = \frac{-(\cos x)'}{(3+\cos x)^4}$

$$= -\frac{(3+\cos x)'}{(3+\cos x)^4}$$

$$= -(3+\cos x)'(3+\cos x)^{-4}$$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(3+\cos x)^3}$ est donc une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{(3+\cos x)^4}$

Donc : $I_5 = \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(3+\cos x)^3}\right]_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3^3} - \frac{1}{2^3}\right) = -\frac{19}{648}$

ProfSalmi.blogspot.com

▸ **Calculons :** $I_6 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x) e^{2-\sin^2(x)} dx$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on pose : $u(x) = 2 - \sin^2 x$, alors : $u'(x) = -2\sin x \cos x = -\sin 2x$

Donc : $\sin(2x) e^{2-\sin^2 x} = -u'(x) e^{u(x)}$

La fonction $x \mapsto -e^{2-\sin^2 x}$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \sin(2x) e^{2-\sin^2 x}$ sur $\mathbb{R}$.

Donc : $I_6 = [-e^{2-\sin^2 x}]_0^{\frac{\pi}{2}} = -e + e^2$

Exercice 32

1 Montrons que : $\left(\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]\right); \tan^3 x + \tan x = \tan'(x)\tan x$

Soit $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, on a : $\tan^3 x + \tan x = \tan(x)(\tan^2 x + 1)$

Or : $(\tan)'(x) = 1 + \tan^2 x$, donc : $\tan^3 x + \tan x = \tan(x)(\tan x)'$

D'où : $\left(\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]\right); \tan^3 x + \tan x = (\tan)'(x)\tan x$

2 ▸ **Calculons :** $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan^2 x dx$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan^2 x\, dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 + \tan^2 x - 1) dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 + \tan^2 x) dx - \int_0^{\frac{\pi}{6}} dx$$
$$= [\tan x]_0^{\frac{\pi}{6}} - [x]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{6}$$

▸ **Calculons :** $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^3 x + \tan x) dx$

On a : $\left(\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]\right); \tan^3 x + \tan x = (\tan)'(x)\tan x$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{2}\tan^2 x$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \tan^3 x + \tan x$ sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

Donc : $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^3 x + \tan x) dx$

$$= \left[\frac{1}{2}\tan^2 x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}$$

▸ **Calculons :** $I_3 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \tan^2 x}{\tan^3 x} dx$

Soit $x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right]$, on a : $\frac{1 + \tan^2 x}{\tan^3 x} = (\tan)'(x) \times \frac{1}{\tan^3 x} = \tan'(x) \times \tan^{-3}(x)$

Donc, la fonction $x \mapsto -\frac{1}{2} \times \frac{1}{\tan^2 x}$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1 + \tan^2 x}{\tan^3 x}$

ProfSalmi.blogspot.com

sur $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}\right]$.

Donc : $I_3=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\tan^2 x}{\tan^3 x}dx$

$=\left[-\frac{1}{2}\times\frac{1}{\tan^2 x}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}$

$=-\frac{1}{2}(1-3)=1$

Exercice 33

1 Montrons que : $\frac{1}{\cos^4 x}=(1+\tan^2 x)^2$ pour tout $x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$

Soit $x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$, on a : $\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}$

$=\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$

$=1+\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2=1+\tan^2 x$

Donc : $\frac{1}{\cos^4 x}=\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^2=(1+\tan^2 x)^2$

D'où : $\left(\forall x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}\right);\frac{1}{\cos^4 x}=(1+\tan^2 x)^2$

2 Calculons : $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^4 x}$

Soit $x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$, on a : $\frac{1}{\cos^4 x}=(1+\tan^2 x)^2$

$=1+2\tan^2 x+\tan^4 x$

$=1+\tan^2 x+\tan^2 x+\tan^4 x$

$=1+\tan^2 x+\tan^2(x)(1+\tan^2 x)$

$=tan'(x)+\tan^2(x)\times tan'(x)$

Donc : $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}tan'(x)dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}tan'(x)\tan^2(x)dx$

$=[\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}}+\left[\frac{1}{3}\tan^3(x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$=\left(\tan\frac{\pi}{4}-\tan 0\right)+\frac{1}{3}\left(\tan^3\frac{\pi}{4}-\tan^3 0\right)$

$=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$

Exercice 34

1 Montrons que : $(\forall x\in\mathbb{R});\cos^4 x=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x$

Soit $x\in\mathbb{R}$, on a : $\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ (formule d'Euler)

ProfSalmi.blogspot.com

Donc : $\cos^4 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4$

$= \frac{1}{16}((e^{ix})^4 + 4(e^{ix})^3 e^{-ix} + 6(e^{ix})^2 (e^{-ix})^2 + 4e^{ix}(e^{-ix})^3 + (e^{-ix})^4)$

$= \frac{1}{16}(e^{i4x} + 4e^{i2x} + 6 + 4e^{-i2x} + e^{-i4x})$

$= \frac{1}{16}(e^{i4x} + e^{-i4x} + 4(e^{i2x} + e^{-i2x}) + 6)$

$= \frac{1}{16}(2\cos 4x + 8\cos 2x + 6)$

$= \frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; \cos^4 x = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$

2 **Calculons :** $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx$

Donc : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x\right) dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{8} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\cos 2x\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{8}\cos 4x dx$

$= \frac{3}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx + \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4x dx$

$= \frac{3}{8} \times \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{8}\left[\frac{1}{4}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{3\pi}{16} + \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{8} \times 0 = \frac{3\pi}{16}$

Donc : $I = \frac{3\pi}{16}$

3 **Calculons :** $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x)$

$= 1 \times (\cos^2 x - \sin^2 x) = \cos 2x$

(Rappel : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ et $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$)

Donc : $\sin^4 x = \cos^4 x - \cos 2x$

Donc : $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 x - \cos 2x) dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx$

$= I - \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = I - 0 = I$

D'où : $J = \frac{3\pi}{16}$

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 35

1 ▸ **Montrons que :** $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; \sin^3 x = (1-\cos^2 x)\sin x$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, donc : $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

D'où : $\sin^3 x = \sin^2 x \times \sin x = (1-\cos^2 x)\sin x$

▸ **Montrons que :** $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; \cos^3 x = (1-\sin^2 x)\cos x$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, donc : $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

D'où : $\cos^3 x = \cos^2 x.\cos x = (1-\sin^2 x)\cos x$

2 ▸ **Calculons :** $I = \int_0^{\pi} \sin^3 x dx$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $\sin^3 x = (1-\cos^2 x)\sin x = \sin x - \sin x \cos^2 x$

$= \sin(x) + cos'(x)\cos^2(x)$

Donc : $I = \int_0^{\pi} (\sin x + cos'(x)\cos^2(x))dx$

$= \int_0^{\pi} \sin x\, dx + \int_0^{\pi} \cos'(x)\cos^2(x)dx$

$= [-\cos x]_0^{\pi} + \left[\frac{1}{3}\cos^3 x\right]_0^{\pi} = 2 + \frac{1}{3}(-2) = \frac{4}{3}$

D'où : $I = \frac{4}{3}$

▸ **Calculons :** $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 x dx$

$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\sin^2 x)\cos x\, dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \cos x \sin^2 x)dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\, dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \sin^2 dx$

$= [\sin x]_0^{\frac{\pi}{4}} - \left[\frac{1}{3}\sin^3 x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{5\sqrt{2}}{12}$

Exercice 36

1 ▸ **Calculons :** $I+J$

D'après la linéarité de l'intégrale, on a :

$I+J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2 x dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x\cos^2 x + x\sin^2 x)dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\cos^2 x + \sin^2 x)dx$

ProfSalmi.blogspot.com

$$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{8}\ (\text{car}:\cos^2 x+\sin^2 x=1)$$

2 ▸ **Calculons :** $I-J$

D'après la linéarité de l'intégrale, on a :

$$\begin{aligned}I-J&=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2 x\,dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x\cos^2 x-x\sin^2 x)\,dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\cos^2 x-\sin^2 x)\,dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(2x)\,dx\ (\text{car}:\ \cos^2 x-\sin^2 x=\cos(2x))\end{aligned}$$

Calculons $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(2x)\,dx$ par parties :

On pose : $\begin{cases}u(x)=x\\v'(x)=\cos(2x)\end{cases}$ donc : $\begin{cases}u'(x)=1\\v(x)=\frac{1}{2}\sin(2x)\end{cases}$

Les fonctions u et v sont dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, les fonction u' et v' sont continues sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Donc : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(2x)\,dx=\left[\frac{x}{2}\sin(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2x)\,dx$

$$\begin{aligned}&=0-\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

D'où : $I-J=-\frac{1}{2}$

3 ▸ **Déduisons** I **et** J **:**

D'après les résultats précédents, on obtient le système :

$$\begin{cases}I+J=\frac{\pi^2}{8}\\I-J=-\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2I=\frac{\pi^2}{8}-\frac{1}{2}\\2J=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{2}\end{cases}$$

Donc : $I=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{4}$ et $J=\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{4}$

Exercice 37

1 ▸ **Calculons** $I+J$ **:** où $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\cos^4 x\,dx$ et $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\sin^4 x\,dx$

D'après la linéarité de l'intégrale on a :

ProfSalmi.blogspot.com

$$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2x\cos^4x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2x\sin^4x\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin^2x\cos^4x+\cos^2x\sin^4x)\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2x\cos^2x(\cos^2x+\sin^2x)\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2x\cos^2x\,dx \text{ (car } \cos^2x+\sin^2x=1)$$

Remarque :

$$\sin^2x\times\cos^2x=\frac{1}{4}\sin^2(2x)$$

$$=\frac{1}{8}(1-\cos(4x))$$

Or : $(\forall x\in\mathbb{R});\ \cos^2x=\dfrac{1+\cos(2x)}{2}$ et $\sin^2x=\dfrac{1-\cos(2x)}{2}$

Donc : $\cos^2x\sin^2x=\dfrac{1}{4}(1+\cos(2x))(1-\cos(2x))$

$$=\frac{1}{4}(1-\cos^2(2x))$$

Or : $\cos^2(2x)=\dfrac{1+\cos(4x)}{2}$

Donc : $\cos^2x\sin^2x=\dfrac{1}{4}\left(1-\dfrac{1+\cos(4x)}{2}\right)=\dfrac{1}{8}(1-\cos(4x))$

D'où : $I+J=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{8}(1-\cos(4x))\,dx$

$$=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos(4x))\,dx$$

$$=\frac{1}{8}\left[x-\frac{1}{4}\sin(4x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{32}$$

2 ▸ Calculons $I-J$:

D'après la linéarité de l'intégrale, on a :

$$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin^2x\cos^4x-\cos^2x\sin^4x)\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2x\cos^2x(\cos^2x-\sin^2x)\,dx$$

Or, $(\forall x\in\mathbb{R});\ \cos^2x-\sin^2x=\cos(2x)$ et $\sin(2x)=2\sin x\cos x$

Donc : $\sin^2x\cos^2x=\dfrac{1}{4}\sin^2(2x)$

$$\sin^2x\cos^2x(\cos^2x-\sin^2x)=\frac{1}{4}\cos(2x)\sin^2(2x)$$

$$=\frac{1}{8}(2\cos(2x)\sin^2(2x))$$

$$=\frac{1}{8}u'(x)(u(x))^2 \text{ (où : } u:x\mapsto\sin(2x))$$

La fonction $x\mapsto\dfrac{1}{24}\sin^3(2x)$ est une primitive de la fonction:

$x\mapsto\dfrac{1}{4}\cos(2x)\sin^2(2x)$ sur $\mathbb{R}$.

ProfSalmi.blogspot.com

Donc : $I-J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{4}\cos(2x)\sin^2(2x)\,dx$

$=\left[\frac{1}{24}\sin^3(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{24}$

3 ▸ **Déduisons** I **et** J **:** D'après les résultats précédents, on obtient le système :

$$\begin{cases} I+J=\frac{\pi}{32} \\ I-J=\frac{1}{24} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2I=\frac{\pi}{32}+\frac{1}{24} \\ 2J=\frac{\pi}{32}-\frac{1}{24} \end{cases}$$

Donc : $I=\frac{\pi}{64}+\frac{1}{48}$ et $J=\frac{\pi}{64}-\frac{1}{48}$

Exercice 38

1 **Calculons** $I+J$:

Où : $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\sin x}dx$ et $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1-\sin x}dx$

D'après la linéarité de l'intégrale, on a :

$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\sin x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1-\sin x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{1+\sin x}+\frac{1}{1-\sin x}\right)dx$

Or :

$\left(\forall x\left[0;\frac{\pi}{4}\right]\right);\frac{1}{1+\sin x}+\frac{1}{1-\sin x}=\frac{1-\sin x+1+\sin x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}=\frac{2}{1-\sin^2 x}=\frac{2}{\cos^2 x}$

alors : $I+J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2}{\cos^2 x}dx$

$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2 x}dx=2\left[\tan x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=2$

▸ **Calculons** $I-J$:

On a : $I-J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{1+\sin x}-\frac{1}{1-\sin x}\right)dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\sin x-1-\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)}dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{-2\sin x}{1-\sin^2 x}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{-\sin x}{\cos^2 x}dx$

Or : $\frac{-\sin x}{\cos^2 x}=\frac{(\cos)'(x)}{\cos^2 x}$, donc la fonction $x\mapsto\frac{-1}{\cos x}$ est une primitive de la fonction $x\mapsto\frac{-\sin x}{\cos^2 x}$ sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$.

Donc : $I-J=2\left[\frac{-1}{\cos x}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=2\left(-\frac{2}{\sqrt{2}}+1\right)=2-2\sqrt{2}$

ProfSalmi.blogspot.com

2 Déduisons I et J :

On a : $\begin{cases} I+J=2 \\ I-J=2-2\sqrt{2} \end{cases}$ Donc : $\begin{cases} 2I=4-2\sqrt{2} \\ 2J=2\sqrt{2} \end{cases}$. D'où : $I=2-\sqrt{2}$ et $J=\sqrt{2}$

Exercice 39

1 Calculons u_0 :

$u_0=\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx$.

Soit $x\in[0;1]$; $\frac{x}{x^2+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}$. La fonction : $x\longmapsto\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$ est donc une primitive da la fonction $x\longmapsto\frac{x}{x^2+1}$ sur l'intervalle $[0;1]$.

Donc : $u_0=\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_0^1=\frac{1}{2}\ln(2)-\frac{1}{2}\ln(1)=\frac{1}{2}\ln(2)$

2 Montrons que : $(\forall n\in\mathbb{N})\,;u_n\geq 0$

Soit $n\in\mathbb{N}$; la fonction $x\longmapsto\frac{x^{2n+1}}{x^2+1}$ est continue sur $[0;1]$

de plus, $(\forall x\in[0;1])$; $\frac{x^{2n+1}}{x^2+1}\geq 0$ donc : $\int_0^1\frac{x^{2n+1}}{x^2+1}dx\geq 0$.

D'où : $(\forall n\in\mathbb{N})\,;u_n\geq 0$

3 Montrons que la suite (u_n) est décroissante :

Soit $n\in\mathbb{N}$

$$u_{n+1}-u_n=\int_0^1\frac{x^{2n+3}}{x^2+1}dx-\int_0^1\frac{x^{2n+1}}{x^2+1}dx$$

$$=\int_0^1\left(\frac{x^{2n+3}}{x^2+1}-\frac{x^{2n+1}}{x^2+1}\right)dx=\int_0^1\frac{x^{2n+1}.(x^2-1)}{x^2+1}dx$$

La fonction $f:\longmapsto\frac{(x^2-1)x^{2n+1}}{x^2+1}$ est continue sur $[0;1]$

de plus $f(x)\leq 0$ pour tout $x\in[0;1]$, donc $\int_0^1\frac{(x^2-1)x^{2n+1}}{x^2+1}dx\leq 0$

D'où : $u_{n+1}-u_n\leq 0$

c'est-à-dire : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $u_{n+1}\leq u_n$

Conclusion: la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.

Déduction de la convergence de (u_n) :

Puisque $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et minorée, alors (u_n) est convergente.

ProfSalmi.blogspot.com

4 a. **Montrons que** $(\forall x \in [0;1])\ ;\ 0 \leq \dfrac{x^{2n+1}}{x^2+1} \leq x^{2n+1}$:

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0;1]$, on a : $x^2+1 \geq 1$, donc : $0 \leq \dfrac{1}{x^2+1} \leq 1$ or $x^{2n+1} \geq 0$

Donc : $0 \leq \dfrac{x^{2n+1}}{x^2+1} \leq x^{2n+1}$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ (\forall x \in [0;1])\ ;\ 0 \leq \dfrac{x^{2n+1}}{x^2+1} \leq x^{2n+1}$

b. **Calculons** $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$:

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $(\forall x \in [0;1])\ ;\ 0 \leq \dfrac{x^{2n+1}}{x^2+1} \leq x^{2n+1}$

Les fonctions : $x \longmapsto x^{2n+1}$ et $x \longmapsto \dfrac{x^{2n+1}}{x^2+1}$ sont continues sur $[0;1]$,

donc, d'après la propriété de l'intégrale et l'ordre,

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{x^2+1}dx \leq \int_0^1 x^{2n+1}dx$$

et comme : $\displaystyle\int_0^1 x^{2n+1}dx = \left[\frac{x^{2n+2}}{2n+2}\right]_0^1 = \frac{1}{2n+2}$

alors : $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{2n+2}$; donc : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ 0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{2n+2}$

et on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} 0 = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{2n+2} = 0$

Donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

Exercice 40

2 Montrons que la suite (u_n) est croissante

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a: $u_{n+1} - u_n = \displaystyle\int_1^2 x(1+x)^{n+1}dx - \int_1^2 x(1+x)^n dx$ (linéarité de l'integrale)

$$= \int_1^2 (x(1+x)^{n+1} - x(1+x)^n)dx$$

$$= \int_1^2 x(1+x)^n(1+x-1)dx$$

$$= \int_1^2 x^2(1+x)^n dx$$

Soit $x \in [1;2]$, on a :

$x^2 > 0$, $2 \leq 1+x \leq 3$ et $(1+x)^n > 0$ donc : $x^2(1+x)^n > 0$

La fonction $x \longmapsto x^2(1+x)^n$ est continue sur $[1;2]$ et $1 < 2$, donc : $\displaystyle\int_1^2 x^2(1+x)^n dx \geq 0$, c'est-à-dire : $u_{n+1} - u_n \geq 0$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; u_n \leq u_{n+1}$

La suite (u_n) est donc décroissante.

ProfSalmi.blogspot.com

2 a. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; 2^n \leq u_n \leq 2 \times 3^n$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = \int_1^2 x(1+x)^n dx$

Soit $x \in [1;2]$, on a : $1 \leq x \leq 2$ et $2 \leq x+1 \leq 3$

Donc : $2^n \leq (1+x)^n \leq 3^n$ car la fonction $x \longmapsto x^n$ est croissante sur $[0, +\infty[$.

Donc : $(\forall x \in [1;2])\ ; 2^n \leq x(1+x)^n \leq 2 \times 3^n$

La fonction $x \longmapsto x(1+x)^n$ est continue sur $[1;2]$ et $1 < 2$

Donc : $\int_1^2 2^n dx \leq \int_1^2 x(1+x)^n dx \leq \int_1^2 2 \times 3^n dx$

et comme : $\int_1^2 2^n dx = 2^n$ et $\int_1^2 2 \times 3^n dx = 2 \times 3^n$

alors : $2^n \leq u_n \leq 2 \times 3^n$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; 2^n \leq u_n \leq 2 \times 3^n$

infos:

$\int_a^b K dx = K(b-a)$

où K est une constante

b. Déduisons la limite de la suite de (u_n) :

On a : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; u_n \geq 2^n$

Or : $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$ (car $2 > 1$)

Donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

3 Calculons u_n en fonction de n :

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [1;2]$

On a : $x(1+x)^n = (1+x-1)(1+x)^n = (1+x)^{n+1} - (1+x)^n$

Donc : $u_n = \int_1^2 ((1+x)^{n+1} - (1+x)^n) dx = \int_1^2 (1+x)^{n+1} dx - \int_1^2 (1+x)^n dx$

- La fonction : $x \longmapsto \frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1}$ est une primitive de la fonction : $x \longmapsto (1+x)^n$ sur l'intervalle $[1;2]$

Donc : $\int_1^2 (1+x)^n dx = \left[\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right]_1^2 = \frac{1}{n+1}(3^{n+1} - 2^{n+1})$

- La fonction : $x \longmapsto \frac{1}{n+2}(1+x)^{n+2}$ est une primitive de la fonction: $x \longmapsto (1+x)^{n+1}$ sur l'intervalle $[1;2]$

Donc : $\int_1^2 (1+x)^{n+1} dx = \left[\frac{(1+x)^{n+2}}{n+2}\right]_1^2 = \frac{1}{n+2}(3^{n+2} - 2^{n+2})$

D'où : $u_n = \frac{1}{n+2}(3^{n+2} - 2^{n+2}) - \frac{1}{n+1}(3^{n+1} - 2^{n+1})$

$= 3^{n+1}\left(\frac{3}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right) + 2^{n+1}\left(\frac{-2}{n+2} + \frac{1}{n+1}\right)$

$= \frac{(2n+1)3^{n+1} - n2^{n+1}}{(n+2)(n+1)}$

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 41

1 Calculons u_0 et v_0 :

▸ $u_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

▸ $v_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

2 ▸ Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n + nv_n = 1$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on a : $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \sin x\, dx$

On procède par une intégration par parties :

On pose : $\begin{cases} u(x) = e^{-nx} \\ v'(x) = \sin x \end{cases}$ donc : $\begin{cases} u'(x) = -ne^{-nx} \\ v(x) = -\cos x \end{cases}$

Les fonctions u et v sont dérivables sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, les fonctions u' et v' sont continues sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

Donc, d'après la propriété de l'intégration par parties :

$u_n = [-e^{-nx}\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} ne^{-nx}\cos(x)\,dx$

$= 1 - n\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}\cos(x)\,dx = 1 - n\,v_n$

Donc : $u_n + nv_n = 1$

et pour $n = 0$ on a : $u_0 + 0v_0 = 1$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n + nv_n = 1$

▸ **Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; -nu_n + v_n = e^{-\frac{n\pi}{2}}$**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on a : $v_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}\cos(x)\,dx$

On procède de nouveau par une intégration par parties :

On pose : $\begin{cases} u(x) = e^{-nx} \\ v'(x) = \cos(x) \end{cases}$ donc : $\begin{cases} u'(x) = -ne^{-nx} \\ v(x) = \sin(x) \end{cases}$

Les fonctions u et v sont dérivables sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ les fonctions u' et v' sont continues sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

Donc, d'après la propriété de l'intégration par parties, on a :

$v_n = [e^{-nx}\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -ne^{-nx}\sin x\ dx$

$= e^{-\frac{n\pi}{2}} + n\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}\sin x\ dx = e^{-\frac{n\pi}{2}} + n\ u_n$

Donc : $-nu_n + v_n = e^{-\frac{n\pi}{2}}$

ProfSalmi.blogspot.com

et pour $n = 0$, on a : $-0u_0 + v_0 = e^{\frac{-0\pi}{c}}$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; -nu_n + v_n = e^{-n\frac{\pi}{2}}$

3 Déduisons u_n et v_n en fonction de n :

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n + nv_n = 1$, donc : $u_n = 1 - nv_n$

Or : $-nu_n + v_n = e^{-n\frac{\pi}{2}}$, donc : $-n(1 - nv_n) + v_n = e^{-n\frac{\pi}{2}}$

c'est-à-dire : $(1 + n^2)v_n = n + e^{-n\frac{\pi}{2}}$, donc : $v_n = \frac{n}{1+n^2} + \frac{1}{1+n^2}e^{-n\frac{\pi}{2}}$

Donc : $u_n = 1 - nv_n = 1 - \frac{n^2}{1+n^2} - \frac{n}{1+n^2}e^{-n\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{1}{1+n^2} - \frac{n}{1+n^2}e^{-n\frac{\pi}{2}}$

4 Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$:

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = \frac{1}{1+n^2} - \frac{n}{1+n^2}e^{-n\frac{\pi}{2}}$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n = \frac{n}{1+n^2} + \frac{1}{n^2+1}e^{-n\frac{\pi}{2}}$

Or : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{1+n^2} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{1+n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+1} = 0$

D'autre part : $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n\frac{\pi}{2}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}} < 1$

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{1+n^2} - \frac{n}{1+n^2}e^{-n\frac{\pi}{2}} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{1+n^2} + \frac{1}{n^2+1}e^{-n\frac{\pi}{2}} = 0$

D'où : $\lim\limits_{n+\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

Exercice 42

1 a. Calculons $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$; où : $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+2})$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$; car la fonction $x \longmapsto x + \sqrt{x^2+2}$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$; $f'(x) = \frac{(x+\sqrt{x^2+2})'}{x+\sqrt{2+x^2}}$

$= \frac{1}{x+\sqrt{2+x^2}}\left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{2+x^2}}\right)$

$= \frac{1}{x+\sqrt{2+x^2}}\left(\frac{\sqrt{2+x^2}+x}{\sqrt{2+x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2+x^2}}$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2+x^2}}$

b. Déduisons la valeur de $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2+x^2}}$:

ProfSalmi.blogspot.com

On a : $(\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2+x^2}}$, donc f est une primitive de la fonction: $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2+x^2}}$ sur $\mathbb{R}$.

Donc : $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2+x^2}} = [f(x)]_0^1 = f(1) - f(0)$

On a : $f(0) = \ln\sqrt{2}$ et $f(1) = \ln(1+\sqrt{3})$

Donc : $I = \ln(1+\sqrt{3}) - \ln\sqrt{2}$ qui s'écrit aussi : $I = \ln\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right)$

2 a. Vérifions que : $J + 2I = K$

D'après la linéarité de l'intégrale, on a :

$$J + 2I = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{2+x^2}}dx + 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2+x^2}}$$
$$= \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{2+x^2}}dx + \int_0^1 \frac{2}{\sqrt{2+x^2}}dx$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{\sqrt{2+x^2}} + \frac{2}{\sqrt{2+x^2}}\right)dx = \int_0^1 \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+2}}dx = \int_0^2 \sqrt{x^2+2}\,dx = K$$

Donc : $J + 2I = K$

b. Montrons que : $K = \sqrt{3} - J$

On a : $K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,dx$

On pose : $\begin{cases} u(x) = \sqrt{x^2+2} \\ v'(x) = 1 \end{cases}$ donc : $\begin{cases} u'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} \\ v(x) = x \end{cases}$

Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0;1]$, les fonctions u' et v' sont continues sur $[0;1]$

Donc : $K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,dx = [x\sqrt{x^2+2}]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx$

$$= \sqrt{3} - J$$

D'où : $K = \sqrt{3} - J$

c. Déduisons J et K :

On a : $J + 2I = K$ et $K = \sqrt{3} - J$ donc : $\begin{cases} K + J = \sqrt{3} \\ K - J = 2I \end{cases}$ d'où : $\begin{cases} K = I + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ J = \frac{\sqrt{3}}{2} - I \end{cases}$

Conclusion : $\begin{cases} K = \ln\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ J = \frac{\sqrt{3}}{2} - \ln\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right) \end{cases}$

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 43 Session Juillet 2010

1 a. Vérifions que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \dfrac{(x+1)^2}{x^2+1} = 1 + \dfrac{2x}{x^2+1}$

Soit $x \in \mathbb{R}$; on a : $\dfrac{(x+1)^2}{x^2+1} = \dfrac{x^2+2x+1}{x^2+1}$

$$= \frac{x^2+1}{x^2+1} + \frac{2x}{x^2+1} = 1 + \frac{2x}{x^2+1}$$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \dfrac{(x+1)^2}{x^2+1} = 1 + \dfrac{2x}{x^2+1}$

b. Calculons l'intégrale : $\displaystyle\int_0^1 \frac{(x+1)^2}{x^2+1} dx$

En utilisant la question précédente et la linéarité de l'intégrale,

On obtient : $\displaystyle\int_0^1 \frac{(x+1)^2}{x^2+1} dx = \int_0^1 \left(1 + \frac{2x}{x^2+1}\right) dx$

$$= \int_0^1 1 dx + \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx$$

$$= \int_0^1 1 dx + \int_0^1 \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} dx$$

$$= [x]_0^1 + [\ln(x^2+1)]_0^1 = 1 + \ln(2)$$

Donc : $\displaystyle\int_0^1 \frac{(x+1)^2}{x^2+1} dx = 1 + \ln(2)$

2 a. Calculons l'intégrale : $\displaystyle\int_0^1 xe^x dx$

On utilise une intégration par parties :

On pose : $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^x \end{cases}$ donc : $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = e^x \end{cases}$

Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0;1]$, les fonctions u' et v' sont continues sur $[0;1]$

Donc : $\displaystyle\int_0^1 xe^x dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = [xe^x]_0^1 - [e^x]_0^1$

$$= e - e + 1 = 1$$

D'où : $\displaystyle\int_0^1 xe^x dx = 1$

b. Calculons : $\displaystyle\int_0^1 (x - e^{-2x})e^x dx$

$(\forall x \in \mathbb{R})$; $(x - e^{-2x})e^x = xe^x - e^{-2x} \times e^x$

ProfSalmi.blogspot.com

Donc : $\int_0^1 (x-e^{-2x})e^x\,dx = \int_0^1 (xe^x - e^{-x})dx$

$= \int_0^1 xe^x\,dx + \int_0^1 -e^{-x}\,dx$

$= 1 + [e^{-x}]_0^1$

$= 1 + e^{-1} - 1 = e^{-1}$

D'où : $\int_0^1 (x-e^{-2x})e^x\,dx = e^{-1} = \frac{1}{e}$

Exercice 44 **Session Juin 2009**

1 a. Vérifions que : $(\forall x \in \mathbb{R}-\{-3\}) ; \frac{x}{x+3} = 1 - \frac{3}{x+3}$

Soit $x \in \mathbb{R}-\{-3\}$; on a : $1 - \frac{3}{x+3} = \frac{x+3-3}{x+3} = \frac{x}{x+3}$

Donc : $\frac{x}{x+3} = 1 - \frac{3}{x+3}$ pour tout $x \in \mathbb{R}-\{-3\}$

b. Montrons que : $I = 1 - 3\ln(2)$

$I = \int_{-2}^{-1} \frac{x}{x+3}\,dx = \int_{-2}^{-1} \left(1 - \frac{3}{x+3}\right)dx$

$= \int_{-2}^{-1} 1\,dx - \int_{-2}^{-1} \frac{3}{x+3}\,dx$

$= (-1-(-2)) - 3\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x+3}\,dx$

$= 1 - 3[\ln|x+3|]_{-2}^{-1}$

$= 1 - 3(\ln(2) - \ln(1)) = 1 - 3\ln(2)$

Donc : $I = 1 - 3\ln 2$

2 Montrons que : $J = -I$

$J = \int_{-2}^{-1} \ln(2x+6)dx$

Calculons J par parties :

On pose : $\begin{cases} u(x) = \ln(2x+6) \\ v'(x) = 1 \end{cases}$ donc : $\begin{cases} u'(x) = \frac{2}{2x+6} = \frac{1}{x+3} \\ v(x) = x \end{cases}$

Donc : $J = [x\ln(2x+6)]_{-2}^{-1} - \int_{-2}^{-1} \frac{x}{x+3}\,dx$

$= -\ln(4) + 2\ln(2) - I = -\ln(4) + \ln(2^2) - I = -\ln(4) + \ln(4) - I$

D'où : $J = -I$

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 45 Session Juin 2010

1 Montrons que $\int_0^{\frac{1}{2}}(2x-1)e^{2x}dx = 1-\frac{e}{2}$:

On procède par une intégration par parties :

On pose : $\begin{cases}u(x)=2x-1\\ v'(x)=e^{2x}\end{cases}$ donc : $\begin{cases}u'(x)=2\\ v(x)=\frac{1}{2}e^{2x}\end{cases}$

Les fonctions u et v sont dérivables sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$, les fonctions u' et v' sont continues sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$; donc d'après la propriété de l'intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}}(2x-1)e^{2x}dx &= \left[\frac{1}{2}(2x-1)e^{2x}\right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}}e^{2x}dx\\ &= \left[\frac{1}{2}(2x-1)e^{2x}\right]_0^{\frac{1}{2}} - \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\frac{1}{2}}\\ &= \frac{1}{2}-\frac{1}{2}e+\frac{1}{2} = 1-\frac{e}{2}\end{aligned}$$

2 Montrons que l'aire demandée est : $(6-2e)cm^2$

Les fonction f et $g:\mapsto x$ sont continues sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ donc l'aire du domaine plan limité par les courbes de f et g, et les droites d'équations : $x=0$ et $x=\frac{1}{2}$ est : $\left(\int_0^{\frac{1}{2}}|f(x)-g(x)|dx\right)u\,a$.

Déterminons le signe de $f(x)-g(x)$ sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$

Soit $x\in\left[0;\frac{1}{2}\right]$,on a : $f(x)-g(x)=(2x-1)e^{2x}+1$

Étudions le signe de $(2x-1)e^{2x}+1$ **sur l'intervalle** $\left[0;\frac{1}{2}\right]$

pour tout $x\in\mathbb{R}$, on pose $u(x)=(2x-1)e^{2x}$

La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a : $(\forall x\in\mathbb{R});u'(x)=4xe^{2x}$

Donc, la fonction u est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

Donc : $x\geq 0\Rightarrow u(x)\geq u(0)$

Or : $u(0)=-1$, donc : $\left(\forall x\in\left[0;\frac{1}{2}\right]\right);(2x-1)e^{2x}+1\geq 0$

D'où : $\left(\forall x\in\left[0;\frac{1}{2}\right]\right);f(x)-g(x)\geq 0$, et par suite,

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}}|f(x)-g(x)|dx &= \int_0^{\frac{1}{2}}(f(x)-g(x))dx\\ &= \int_0^{\frac{1}{2}}(2x-1)e^{2x}dx+\int_0^{\frac{1}{2}}1dx = 1-\frac{e}{2}+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}-\frac{e}{2}\end{aligned}$$

On a : $ua = 4cm^2$ (car $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$)

ProfSalmi.blogspot.com

Donc : $\mathscr{A}=\left(\int_0^{\frac{1}{2}}|f(x)-g(x)|dx\right)ua=\left(\frac{3}{2}-\frac{e}{2}\right)4cm^2=(6-2e)cm^2$

Exercice 46 **Session Juillet 2010**

1 Montrer que : $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}=1-\frac{2}{e}$ **en utilisant une intégration par parties :**

On pose : $\begin{cases}u(x)=\ln x\\ v'(x)=\frac{1}{x^2}\end{cases}$ donc : $\begin{cases}u'(x)=\frac{1}{x}\\ v(x)=-\frac{1}{x}\end{cases}$

Les fonctions u et v sont dérivables sur $[1;e]$, les fonction u' et v' sont continues sur $[1;e]$

on a : $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx=\left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^e+\int_1^e \frac{1}{x^2}dx$

$=\left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^e-\left[\frac{1}{x}\right]_1^e$

$=\frac{-1}{e}-\frac{1}{e}+1=1-\frac{2}{e}$

Donc : $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx=1-\frac{2}{e}$

2 Montrons que l'aire demandée est : $\left(1-\frac{1}{e}\right)cm^2$

Les fonctions f et $g:x\mapsto x-1$ sont continues sur $[1;e]$, donc l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f), la droite $(\Delta): y=x-1$ et les droites d'équations : $x=1$ et $x=e$ est : $\left(\int_1^e|f(x)-g(x)|dx\right)ua$

$(\forall x\in[1;e])$; $f(x)-g(x)=\frac{x-1+\ln x}{x^2}$

On a : $f(x)-g(x)\geq 0$ (car $(\forall x\in[1;e])$; $\ln x\geq 0$, $x-1\geq 0$ et $x^2>0$)

Donc : $\int_1^e|f(x)-g(x)|dx=\int_1^e\frac{x-1+\ln x}{x^2}dx$

$=\int_1^e\frac{x-1}{x^2}dx+\int_1^e\frac{\ln x}{x^2}dx$

$=\int_1^e\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx+\int_1^e\frac{\ln x}{x^2}dx$

- On a : $\int_1^e\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx=\left[\ln|x|+\frac{1}{x}\right]_1^e$

$=1+\frac{1}{e}-1=\frac{1}{e}$

- On a : $\int_1^e\frac{\ln x}{x^2}dx=1-\frac{2}{e}$. Donc : $\int_1^e\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx+\int_1^e\frac{\ln x}{x^2}dx=1-\frac{1}{e}$

ProfSalmi.blogspot.com

Or : $ua = 1cm^2$ (car $\|\vec{i}\| = 1cm$)

Donc : $\left(1-\frac{1}{e}\right)cm^2$

Exercice 47 Session Juin 2008

1) Montrons que la fonction : $H: x \mapsto x\ln x - x$ est une primitive de la fonction ln sur l'intervalle $]0;+\infty[$

Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \ln x$ sont dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$, donc la fonction H est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$

On a : $(\forall x \in]0;+\infty[)\ ; H'(x) = (x\ln x - x)'$

$$= 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1$$

$$= \ln(x) + 1 - 1 = \ln x$$

Donc : $(\forall x > 0)\ ; H'(x) = \ln x$

La fonction H est donc une primitive de la fonction ln sur l'intervalle $]0;+\infty[$

Montrons que : $\int_1^e \ln x\, dx = 1$

Puisque la fonction H est une primitive de la fonction ln sur l'intervalle $]0;+\infty[$

alors : $\int_1^e \ln x dx = [H(x)]_1^e = H(e) - H(1)$

On a : $H(e) = e\ln(e) - e = e - e = 0$ et $H(1) = 1\ln(1) - 1 = -1$

Donc : $\int_1^e \ln x dx = 1$

2) Montrons que : $\int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2$

En utilisant une intégration par parties :

On pose : $\begin{cases} u(x) = (\ln x)^2 \\ v'(x) = 1 \end{cases}$ donc : $\begin{cases} u'(x) = \frac{2\ln x}{x} \\ v(x) = x \end{cases}$

Les fonctions u et v sont dérivables sur $[1;e]$, les fonctions u' et v' sont continues sur $[1;e]$

Donc : $\int_1^e (\ln x)^2 dx = [x(\ln x)^2]_1^e - \int_1^e \frac{2\ln x}{x} \times x dx$

$$= e(\ln e)^2 - (\ln 1)^2 - 2\int_1^e \ln x dx$$

$$= e - 2 \times 1 = e - 2$$

D'où : $\int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2$

ProfSalmi.blogspot.com

3 **Calculons A, l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f), la droite $(\Delta): y = x$, et les droites d'équations : $x = 1$ et $x = e$**

Les fonctions f et $x \mapsto x$ sont continues sur $[1;e]$, donc:

$A = \left(\int_1^e |f(x) - x| dx\right) u\,a$

On a : $\int_1^e |f(x) - x| dx = \int_1^e |x - (\ln x)^2 - x| dx$

$= \int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2$

Donc : $A = (e-2)\,u\,a$

Exercice 48 Session Juin 2012

1 **Montrons que** la fonction : $u: x \mapsto \frac{x^3}{3} - x$ est une primitive de la fonction $v: x \mapsto x^2 - 1$ sur $\mathbb{R}$:

La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car la fonction est polynôme)

On a : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; u'(x) = \left(\frac{x^3}{3} - x\right)' = \frac{1}{3} \times 3x^2 - 1 = x^2 - 1 = v(x)$

La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; u'(x) = v(x)$

Donc la fonction u est une primitive de la fonction v sur $\mathbb{R}$.

2 **Montrons que :** $\int_1^2 (x^2 - 1)\ln x dx = \frac{2}{9}(1 + 3\ln 2)$.

On procédé par une intégration par parties :

On pose : $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = x^2 - 1 \end{cases}$ donc : $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{x^3}{3} - x \end{cases}$

Les fonctions u et v sont dérivables sur $[1;2]$, les fonction u' et v' sont continues sur $[1;2]$

Donc : $\int_1^2 (x^2 - 1)\ln x\, dx = \left[\left(\frac{x^3}{3} - x\right)\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{x^3}{3} - x\right) \times \frac{1}{x} dx$

$= \left(\frac{8}{3} - 2\right)\ln 2 - \int_1^2 \left(\frac{x^2}{3} - 1\right) dx$

Calculons : $\int_1^2 \left(\frac{x^2}{3} - 1\right) dx$

On a : $\int_1^2 \left(\frac{x^2}{3} - 1\right) dx = \left[\frac{x^3}{9} - x\right]_1^2$

$= \left(\frac{8}{9} - 2\right) - \left(\frac{1}{9} - 1\right) = \frac{7}{9} - 1 = -\frac{2}{9}$

Donc : $\int_1^2 (x^2 - 1)\ln x dx = \frac{2}{3}\ln 2 + \frac{2}{9} = \frac{2}{9}(1 + 3\ln 2)$

ProfSalmi.blogspot.com

3 Calculons A, l'aire du domaine plan limité par (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$

La fonction f est continue sur $[1;2]$, donc : $A=\left(\int_1^2 |f(x)|dx\right) u.a$

Or : $f(x)\geq 0$ pour tout $x\in[1;2]$

Donc : $\int_1^2 |f(x)|dx=\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2 (x^2-1)\ln x dx=\frac{2}{9}(1+3\ln 2)$

et on a : $u.a=\|\vec{i}\|^2=9cm^2$ (car $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=3cm$)

Donc : $A=2(1+3\ln 2)cm^2$

Exercice 49 Session Juillet 2012

1 Montrons que H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$

$H:x\longmapsto x-\ln(e^x+1)$ et $h:x\longmapsto\frac{1}{e^x+1}$

- La fonction $x\longmapsto e^x+1$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc la fonction $x\longmapsto\ln(e^x+1)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

La fonction $x\longmapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc la fonction :

$x\longmapsto x-\ln(e^x+1)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

- $(\forall x\in\mathbb{R})$; $H'(x)=1-\frac{(e^x+1)'}{e^x+1}=1-\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{e^x+1-e^x}{e^x+1}=\frac{1}{e^x+1}=h(x)$

Donc H est une primitive de la fonction h.

2 Calculons l'aire $\mathscr{A}$

Calculons $\mathscr{A}$ l'aire du domaine plan limité par (C_f) et les droites d'équations: $y=x+1$, $x=0$ et $x=\ln 2$

$\mathscr{A}=\int_0^{\ln 2}|f(x)-(x+1)|dx \quad u.a$

- $f(x)-(x+1)=x+\frac{e^x-1}{e^x+1}-x-1=\frac{e^x-1}{e^x+1}-1$

$=\frac{e^x-1-e^x-1}{e^x+1}=\frac{-2}{e^x+1}=-2\times h(x)$

Comme $e^x+1>0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, alors $f(x)-(x+1)<0$

Donc : $\mathscr{A}=\int_0^{\ln 2}-(f(x)-(x+1))dx \quad u.a$

$=2\int_0^{\ln 2}h(x)dx \quad u.a$

$=2[H(\ln 2)-H(0)] \quad u.a$

$=2(H(\ln 2)-H(0)) \quad u.a$

Or : $H(\ln 2)=\ln 2-\ln(e^{\ln 2}+1)=\ln 2-\ln(2+1)=\ln 2-\ln 3$

$H(0)=0-\ln(e^0+1)=-\ln 2$

ProfSalmi.blogspot.com

Donc : $\mathscr{A} = 2(\ln 2 - \ln 3 + \ln 2)u.a = (4\ln 2 - 2\ln 3)u.a$

Exercice 50 **Session Juin 2013**

1 Montrons H est une primitive de la fonction h sur $\mathbb{R}$

Les fonctions $x \mapsto x-1$ et $x \mapsto e^x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, donc la fonction $H: x \mapsto (x-1)e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. On a :

$$(\forall x \in \mathbb{R}); H'(x) = ((x-1)e^x)'$$
$$= e^x + (x-1)e^x$$
$$= xe^x = h(x)$$

Donc, la fonction H est une primitive de la fonction h sur $\mathbb{R}$

▸ **Calculons :** $\int_0^1 xe^x dx$

On a : $\int_0^1 xe^x dx = [H(x)]_0^1 = H(1) - H(0) = 0 - (-1) = 1$

Donc : $\int_0^1 xe^x = 1$

2 Montrons que : $\int_0^1 x^2 e^x dx = e - 2$

On procédé par une intégration par parties :

On pose : $\begin{cases} u(x) = x^2 \\ v'(x) = e^x \end{cases}$ donc $\begin{cases} u'(x) = 2x \\ v(x) = e^x \end{cases}$

Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0;1]$, les fonctions u' et v' sont continues sur $[0;1]$

Donc: $\int_0^1 x^2 e^x dx = [x^2 e^x]_0^1 - \int_0^1 2xe^x dx = e - 2\int_0^1 xe^x dx = e - 2 \times 1 = e - 2$

3 Montrons que l'aire demandée est : $5(e-2)cm^2$

La fonction f est continue sur $[0;1]$ et $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0;1]$, donc l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$ est : $\mathscr{A} = \left(\int_0^1 f(x)dx\right)u\,a$

▸ on a : $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (x-2)^2 e^x dx$

$$= \int_0^1 (x^2 - 4xe^x + 4)e^x dx$$
$$= \int_0^1 x^2 e^x dx - 4\int_0^1 xe^x dx + 4\int_0^1 e^x dx$$
$$= e - 2 - 4 + 4[e^x]_0^1 = e - 6 + 4e - 4 = 5(e-2)$$

▸ On a : $ua = 1cm^2$

Donc : $5(e-2)cm^2$

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 51 Session Juin 2014

1 Montrons que la fonction H est une la primitive de la fonction h sur l'intervalle $]0;+\infty[$

On a : $H:x\mapsto x\ln x$

La fonction H est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$: $x\mapsto \ln x$ et $x\mapsto x$

On a : $(\forall x\in]0;+\infty[)\,;H'(x)=\ln x+x\times\frac{1}{x}=1+\ln x=h(x)$

Donc : $(\forall x\in\mathbb{R})\,;H'(x)=h(x)$

La fonction H est donc une primitive de la fonction h sur l'intervalle $]0;+\infty[$

Déduisons que : $I=e$.

$$I=\int_1^e(1+\ln x)dx=\int_1^e h(x)dx$$
$$=[H(x)]_1^e=[x\ln x]_1^e$$
$$=e\ln e-1\ln(1)=e$$

infos:
$\ln e=1$
$\ln 1=0$

2 Montrons que : $J=2e-1$

On a : $J=\int_1^e(1+\ln x)^2dx$

On procède par une intégration par parties :

On pose : $\begin{cases}u(x)=(1+\ln x)^2\\ v'(x)=1\end{cases}$ donc : $\begin{cases}u'(x)=2(1+\ln x)\times\frac{1}{x}\\ v(x)=x\end{cases}$

Les fonctions u et v sont dérivables sur $]0;+\infty[$

Les fonctions u' et v' sont continues sur $]0;+\infty[$

Donc, d'après la propriété de l'intégration par parties :

$$J=[x(1+\ln x)^2]_1^e-\int_1^e 2(1+\ln(x))dx$$
$$=e(1+\ln e)^2-(1+\ln 1)^2-2I$$
$$=4e-1-2\times e=2e-1$$

3 Calcul de l'aire :

La fonction f est continue sur $]0;+\infty[$ et en particulier sur $[1;e]$

Donc, l'aire du domaine plan limité par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $D_1:x=1$ et $D_2:x=e$

est : $\mathcal{A}=\int_1^e f(x)dx\ u.a$ (car : $(\forall x\in[1;e]\ ;\ f(x)\geq 0)$)

On a : $u.a=\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|=1cm^2$

ProfSalmi.blogspot.com

On a : $\int_1^e f(x)dx = \int_1^e \left((1+\ln x)^2 + \frac{1}{x^2}\right)dx = \int_1^e (1+\ln x)^2 dx + \int_1^e \frac{1}{x^2}dx$

$= J + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^e = 2e - 1 - \left(\frac{1}{e} - 1\right) = 2e - \frac{1}{e}$

Donc : $\mathcal{A} = \left(2e - \frac{1}{e}\right) cm^2$

Exercice 52 **Session Juin 2015 (Sujet remplacé)**

1 **Montrons que :** $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-\ln x)}dx = \ln 2$

On a : $I = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-\ln x)}dx = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\frac{1}{x}}{1-\ln x}dx$

$= \int_1^{\sqrt{e}} -\frac{u'(x)}{u(x)}dx$

$= -[\ln|1-\ln x|]_1^{\sqrt{e}}$

$= -(\ln|1-\ln\sqrt{e}| - \ln|1-\ln 1|)$

$I = -\left(\ln\left|1-\frac{1}{2}\right| - \ln|1|\right)$

$= -\left(\ln\frac{1}{2}\right) = \ln 2$

Donc : $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-\ln x)}dx = \ln 2$

2 Calculons en cm^2, l'aire $\mathscr{A}$ du domaine plan limité par (C_f) et les droites $(\Delta): y = x$; $D_1 : x = 1$ et $D_2 : x = \sqrt{e}$

La fonction f est continue et positive sur $[1;\sqrt{e}]$

▸Justifions le signe de f :

$(x \in [1;\sqrt{e}]) \Rightarrow 1 \leqslant x \leqslant \sqrt{e}$

sur $[1;\sqrt{e}] \Rightarrow \ln 1 \leqslant \ln x \leqslant \ln\sqrt{e}$; (car la fonction ln est croissante sur $[0;+\infty[$)

$\Rightarrow 0 \leqslant \ln x \leqslant \frac{1}{2}$

$\Rightarrow 0 \geqslant -\ln x \geqslant -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow 1 \geqslant 1-\ln x \geqslant \frac{1}{2}$ par suite $1 - \ln x \geq 0$

Donc : $\mathcal{A} = \int_1^{\sqrt{e}} f(x)dx\ u.a$

▸On a : $u.a = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| = 4cm^2$

▸et $\int_1^{\sqrt{e}} f(x)dx = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-\ln x)}dx = \ln 2$

Donc : $\mathcal{A} = 4\ln 2\ cm^2$

ProfSalmi.blogspot.com

4 Équations différentielles

Introduction :

Une équation différentielle est une équation :

- dont l'inconnue est une fonction (généralement notée $x \mapsto y(x)$; $y(x)$ ou tout simplement y).
- dans laquelle apparaissent certaines des dérivées de la fonction (dérivée première y', ou dérivées d'ordres supérieurs y'',...

1 Équations différentielles du type : $y' = ay$ et $y' = ay + b$

- L'équation $y' = ay + b$ est appelé **équation différentielle de premier ordre** dont l'inconnue est une fonction y définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ (x étant la variable).
- Les solutions de l'équation différentielle: $y' = ay$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto ke^{ax}$ avec $k \in \mathbb{R}$. (ou encore $y = ke^{ax}$).
- Les solutions de l'équation différentielle: $y' = ay + b$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto ke^{ax} - \frac{b}{a}$, avec k un réel. (On peut écrire encore $y = ke^{ax} - \frac{b}{a}$).
- L'équation différentielle: $y' = ay + b$ admet une solution unique y qui vérifie $y(x_0) = \lambda$, où x_0 et λ sont deux réels donnés).

En résumé :

Équation	Solutions
$y' = ay$	$y: x \mapsto ke^{ax}; k \in \mathbb{R}$
$y' = ay + b$	$y: x \mapsto ke^{ax} - \frac{b}{a}; k \in \mathbb{R}$
$y' = ay$ $y(x_0) = y_0$	$y: x \mapsto y_0 e^{a(x-x_0)}$

Exercices

Exercice 1

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + 3y = 0$
2. $y' - 2y = 0$
3. $4y' - 5y = 0$
4. $3y' + 2y = 0$ et $y(0) = -4$
5. $y' + y + 1 = 0$
6. $3y' - 2y + 5 = 0$ et $y(0) = 2$

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 1

1 Résolvons l'équation différentielle (E_1): $y' + 3y = 0$:

$$y' + 3y = 0 \iff y' = -3y$$
$$\iff y = ke^{-3x} \quad ; \ k \in \mathbb{R}$$

Donc: les solutions de l'équation différentielle (E_1) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par: $x \mapsto ke^{-3x}$, avec : $k \in \mathbb{R}$.

2 Résolvons l'équation différentielle (E_2): $y' - 2y = 0$:

$$y' - 2y = 0 \iff y' = 2y$$
$$\iff y = ke^{2x} \quad ; \ k \in \mathbb{R}$$

les solutions de l'équation différentielle (E_2) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par: $x \mapsto ke^{2x}$ où $k \in \mathbb{R}$.

3 Résolvons l'équation différentielle (E_3): $4y' - 5y = 0$:

$$4y' - 5y = 0 \iff y' = \frac{5}{4}y$$
$$(E_3) \iff y = ke^{\frac{5}{4}x} \quad ; \quad k \in \mathbb{R}$$

Les solutions de l'équation (E_3) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par: $x \mapsto ke^{\frac{5}{4}x}$ où $k \in \mathbb{R}$.

4 Résolvons l'équation différentielle (E_4): $3y' + 2y = 0$:

$$3y' + 2y = 0 \iff y' = -\frac{2}{3}y$$
$$\iff y = ke^{-\frac{2}{3}x} ; k \in \mathbb{R}$$

de plus, on a la condition initiale $y(0) = -4$.

On a : $y = ke^{-\frac{2}{3}x}$

Donc : $y(0) = -4 \iff ke^0 = -4$
$\iff k = -4 \qquad (e^0 = 1)$

La fonction définie par : $y = -4e^{-\frac{2}{3}x}$ est la solution de (E_4) qui vérifie $y(0) = -4$.

5 Résolvons l'équation différentielle (E_5): $y' + y + 1 = 0$:

On a : $y' + y + 1 = 0 \iff y' = -y - 1$

Donc : $a = -1$ et $b = -1$

Ainsi : $-\frac{b}{a} = -1$

Les solutions de l'équation (E_5) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto ke^{-x} - 1$, avec $k \in \mathbb{R}$.

6 Résolvons l'équation différentielle (E_6): $3y' - 2y + 5 = 0$:

ProfSalmi.blogspot.com

On a : $3y' - 2y + 5 \iff y' = \frac{2}{3}y - \frac{5}{3}$

On a : $a = \frac{2}{3}$ et $b = -\frac{5}{3}$

Donc : $-\frac{b}{a} = \frac{5}{2}$

Les solutions de l'équation différentielle (E_6) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par: $x \mapsto ke^{\frac{2}{3}x} + \frac{5}{2}$, avec $k \in \mathbb{R}$

Cherchons la solution qui vérifie $y(0) = 2$

On a : $y = ke^{\frac{2}{3}x} + \frac{5}{2}$

Ainsi : $y(0) = 2 \iff ke^0 + \frac{5}{2} = 2$

$\iff k = 2 - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}$

D'où : $y = -\frac{1}{2}e^{\frac{2}{3}x} + \frac{5}{2}$ est la solution de (E_6) qui vérifie: $y(0) = 2$.

2 Équations du type : $y'' + ay' + by = 0$

- L'équation du type: $y'' + ay' + by = 0$ (où a et b sont deux réels est appelée équation différentielle du second degré; l'inconnue est une fonction y définie sur $\mathbb{R}$ et deux fois dérivables.
- Une solution de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ est toute fonction f deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, et vérifiant:

$(\forall x \in \mathbb{R})\ ; f''(x) + af'(x) + bf(x) = 0$

Pour résoudre : $y'' + ay' + by = 0$

↓

On écrit dans $\mathbb{C}$ son équation caractéristique : $r^2 + ar + b = 0$

↓

On calcule le discriminant : Δ

Si : $\Delta < 0$	Si : $\Delta = 0$	Si : $\Delta > 0$
↓	↓	↓
l'équation caractéristique admet 2 solutions complexes conjuguée : $r_1 = p + iq$ et $r_2 = \overline{r_1} = p - iq$	l'équation caractéristique admet une seule solution r	l'équation caractéristique admet 2 solutions réelles r_1 et r_2
↓	↓	↓
$y = (\alpha\cos(qx) + \beta\sin(qx))e^{px}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$	$y = (\alpha x + \beta)e^{rx}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$	$y = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

ProfSalmi.blogspot.com

Exercices

Exercice 2

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' + 2y' - 3y = 0$: déterminer la solution f qui vérifie $f(0) = 3$ et $f'(0) = 2$
2. $-4y'' + 4y' - y = 0$
3. $y'' + y' + y = 0$
4. $4y'' + 12y' + 25y = 0$: déterminer la solution g qui vérifie; $g(0) = -2$ et $g'(0) = 1$

Solutions

Exercice 2

1 ▸ **Résolvons l'équation différentielle :** $(E_1) : y'' + 2y' - 3y = 0$

son équation caractéristique est: $r^2 + 2r - 3 = 0$

$\Delta = 4 + 4 \times 3 = 16$

On a : $\Delta > 0$; donc l'équation caractéristique admet deux solutions réelles

$r_1 = \dfrac{-2+4}{2} = 1$ et $r_2 = \dfrac{-2-4}{2} = -3$

Donc: les solutions de l'équation (E_1) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par:

$x \mapsto \alpha e^{x} + \beta e^{-3x}$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

▸ **Déterminons la solution de f qui vérifie:** $f(0) = 3$ **et** $f'(0) = 2$

On a : $f(x) = \alpha e^{x} + \beta e^{-3x}$ pour tout de x de $\mathbb{R}$.

On a : $f(0) = 3 \iff \alpha e^{0} + \beta e^{0} = 3$

$\iff \alpha + \beta = 3$

▸ Calculons $f'(x)$:

$f'(x) = \alpha e^{x} - 3\beta e^{-3x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

$f'(0) = 2 \iff \alpha e^{0} - 3\beta e^{0} = 2$

$\iff \alpha - 3\beta = 2$

On aura le système : $\begin{cases} \alpha + \beta = 3 & (1) \\ \alpha - 3\beta = 2 & (2) \end{cases}$

on a : $\alpha + \beta = 3 \iff \alpha = 3 - \beta$

On remplace dans l'équation (2) on obtient: $(3 - \beta) - 3\beta = 2 \iff -4\beta = -1$

$\iff \beta = \dfrac{1}{4}$

ProfSalmi.blogspot.com

Donc : $\alpha = 3 - \frac{1}{4} = \frac{11}{4}$

Donc : $f(x) = \frac{11}{4}e^{x} + \frac{1}{4}e^{-3x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

info: On pourra résoudre le système par d'autres méthodes.

2 Résolvons l'équation différentielle : $(E_2) : -4y'' + 4y' - y = 0$

$-4y'' + 4y' - y = 0 \iff y'' - y' + \frac{1}{4}y = 0$

son équation caractéristique est : $r^2 - r + \frac{1}{4} = 0$, son discriminant :

$\Delta = 1 - 4(\frac{1}{4}) = 0$

On a une seule solution réelle : $r = \frac{1}{2}$

Donc, les solutions de l'équation (E_2) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par:

$x \mapsto (\alpha x + \beta)e^{\frac{1}{2}x}$, avec $(\alpha ; \beta) \in \mathbb{R}^2$

3 Résolvons l'équation différentielle : $(E_3) : y'' + y' + y = 0$

Son équation caractéristique est: $r^2 + r + 1 = 0$, son discriminant :

$\Delta = 1 - 4 = -3$

On a : $\Delta < 0$ donc l'équation caractéristique admet deux solutions complexes

conjuguées: $r_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ et $r_2 = \overline{r_1} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

donc, les solutions de l'équation (E_3) sont les fonctions numériques définies

sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto \left(\alpha \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \beta \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)e^{-\frac{1}{2}x}$, avec : $(\alpha ; \beta) \in \mathbb{R}^2$

4 Résolvons l'équation différentielle : $(E_4) : 4y'' + 12y' + 25y = 0$

On a : $4y'' + 12y' + 25y = 0 \iff y'' + 3y' + \frac{25}{4}y = 0$

son équation caractéristique : $r^2 + 3r + \frac{25}{4} = 0$ son discriminant:

$\Delta = 9 - 4 \times \frac{25}{4} = -16$

On a : $\Delta < 0$ donc, l'équation caractéristique admet deux solutions complexes

conjuguées : $r_1 = \frac{-3 + 4i}{2} = -\frac{3}{2} + 2i$ et $r_2 = \overline{r_1} = -\frac{3}{2} - 2i$

Donc, les solutions de l'équation (E_4) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$x \mapsto (\alpha \cos(2x) + \beta \sin(2x))e^{\frac{-3}{2}x}$ avec $(\alpha ; \beta) \in \mathbb{R}^2$

▸ **Déterminons la solution** g **telle que** $g(0) = -2$ et $g'(0) = 1$

On a : $g(x) = (\alpha \cos(2x) + \beta \sin(2x))e^{-\frac{3}{2}x}$, avec $(\alpha ; \beta) \in \mathbb{R}^2$

ProfSalmi.blogspot.com

Donc:

$$g'(x) = (-2\alpha\sin(2x) + 2\beta\cos(2x))e^{-\frac{3}{2}x} + (\alpha\cos(2x) + \beta\sin(2x)) \times \left(-\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}x}\right)$$

$$= \left[(-2\alpha - \frac{3}{2}\beta)\sin(2x) + (2\beta - \frac{3}{2}\alpha)\cos(2x)\right]e^{-\frac{3}{2}x}$$

▸ On a : $g(0) = -2 \iff (\alpha\cos(0) + \beta\sin(0))e^0 = -2$

$$\iff \alpha = -2$$

$$\left(\text{car: } \cos(0) = 1 \ ; \sin(0) = 0 \ ; \ e^0 = 1\right)$$

▸ Et de plus :

$$g'(0) = 1 \iff \left(\left(-2\alpha - \frac{3}{2}\beta\right)\sin(0) + (2\beta - \frac{3}{2}\alpha)\cos(0)\right)e^0 = 1$$

$$\iff 2\beta - \frac{3}{2}\alpha = 1$$

$$\iff \beta = \frac{3}{4}\alpha + \frac{1}{2}$$

Donc : $\alpha = -2$

D'où : $\beta = \frac{3}{4}(-2) + \frac{1}{2} = -1$

ainsi : $g(x) = (-2\cos(2x) - \sin(2x))e^{-\frac{3}{2}x}$, pour tout x de $\mathbb{R}$.

Cas particulier :

▸ Les solutions de l'équation différentielle: $y'' + \omega^2 y = 0$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto \alpha\cos(\omega x) + \beta\sin(\omega x)$, avec : $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$

▸ Les solutions de l'équation : $y'' - \omega^2 y = 0$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto \alpha e^{-\omega x} + \beta e^{\omega x}$, avec : $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$

Exercices

Exercice 3

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' + 16y = 0$
2. $y'' - 9y = 0$
3. $y'' + 3y' = 0$
4. $y'' - 2x + 1 = x^2$

Exercice 4

f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3e^{-x} - 2$

Déterminer a et b pour que f soit solution de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$.

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 3

1 Résolvons l'équation différentielle $(E_1): y'' + 16y = 0$

L'équation (E_1) est sous la forme : $y'' + \omega^2 y = 0$

avec $\omega = 4$ (on peut choisir $\omega = -4$)

Donc les solutions de l'équation (E_1) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$x \mapsto \alpha\cos(4x) + \beta\sin(4x)$, avec $(\alpha ; \beta) \in \mathbb{R}^2$

2 Résolvons l'équation différentielle: $(E_2): y'' - 9y = 0$

On a : (E_2) est équivalente à : $y'' - \omega^2 y = 0$

soit $\omega = 3$ (on peut choisir $\omega = -3$)

les solutions de l'équation (E_2) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$x \mapsto \alpha e^{-3x} + \beta e^{3x}$, avec $(\alpha ; \beta) \in \mathbb{R}^2$

3 Résolvons l'équation différentielle $(E_3): y'' + 3y' = 0$

Cette équation est de la forme $y'' + ay' + by = 0$ avec $a = 3$ et $b = 0$

Son équation caractéristique est : $r^2 + 3r = 0$

$$r^2 + 3r = 0 \iff r(r+3) = 0$$

$$\iff r = 0 \text{ ou } r = -3$$

Donc, les solutions de l'équation (E_3) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$:

$x \mapsto \alpha e^{0x} + \beta e^{-3x}$ c'est-à-dire : $x \mapsto \alpha + \beta e^{-3x}$, avec $(\alpha ; \beta) \in \mathbb{R}^2$

4 Résolvons l'équation différentielle $(E_4): y'' - 2x + 1 = x^2$

On a : $y'' - 2x + 1 = x^2 \iff y'' = x^2 + 2x - 1$

$$\iff y' = \frac{x^3}{3} + x^2 - x + b \ ; b \in \mathbb{R}$$

$$\iff y = \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + bx + c \ ; c \in \mathbb{R}$$

Donc, les solutions de l'équation différentielle (E_4) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$x \mapsto \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + bx + c$ avec $(b,c) \in \mathbb{R}^2$

info:

- y' est une primitive de y''.
- y est une primitive de y'.

Exercice 4

On a : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = -3e^{-x}$

$$f''(x) = 3e^{-x}$$

ProfSalmi.blogspot.com

$$f''(x)+af'(x)+bf(x)=0 \iff 3e^{-x}+a(-3e^{-x})+b(3e^{-x}-2)=0$$
$$\iff (-3a+3+3b)e^{-x}-2b=0$$
$$\iff \begin{cases}-2b=0\\-3a+3+3b=0\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases}b=0\\-3a=-3\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases}b=0\\a=1\end{cases}$$

D'où : f est solution de l'équation différentielle: $y''+ay'+b=0$ si et seulement $a=1$ et $b=0$.

Exercices de synthèse

Exercices

Exercice 5

On considère l'équation différentielle $(E_1): y'-2y=\dfrac{-2}{1+e^{-2x}}$:

1 Déterminer la fonction h solution de l'équation $(E_2): y'-2y=0$ qui vérifie $h(0)=-2$.

2 Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, et vérifiant $f(0)=\ln(2)$

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=e^{2x}g(x)$

a. Calculer $g(0)$:

b. Calculer $f'(x)$ en fonction de $g'(x)$ et $g(x)$:

c. Montrer que f est solution de (E_1) si et seulement si $g'(x)=\dfrac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

d. En déduire une expression de g, puis celle de f (avec f est solution de l'équation différentielle (E_1)).

Exercice 6

On considère l'équation différentielle $(E_1): y''-5y'+6y=e^{2x}$:

1 Vérifier que la fonction $g: x\mapsto -xe^{2x}$ est solution de (E_1).

2 Déterminer la solution générale de l'équation différentielle :
$(E_2): y''-5y'+6y=0$.

3 Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$:

a. Montrer que f est solution de (E_1) si et seulement si $f-g$ est

ProfSalmi.blogspot.com

solution de (E_2).

b. En déduire la solution générale de (E_1);

c. Déterminer la solution h de (E_1) qui vérifie $h(0)=2$ et $h'(0)=0$.

Exercice 7

Soit f une fonction solution de l'équation différentielle:

$(E): y''-2\sqrt{3}y'+4y=0$, avec $f(0)=\sqrt{3}$ et $f'(0)=4$

1 Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R});\quad f(x)=(\sqrt{3}\cos x+\sin x)e^{\sqrt{3}x}$.

2 En déduire la valeur de l'intégrale : $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sqrt{3}\cos x+\sin x)e^{\sqrt{3}x}$.

Exercice 8

On considère l'équation différentielle $(E): y'=y(1-y)$.

Soit f une fonction solution de (E) telle que $(\forall x\in\mathbb{R})$; $f(x)\neq 0$ et $f(0)=2$

1 Montrer que la fonction $\frac{1}{f}$ est solution de $(F): y'+y=1$

2 Déterminer les solutions de (F), puis déduire l'expression de f.

Exercice 9

Soit m un paramètre réel.

Déterminer suivant les valeurs de m les solutions de l'équation différentielle :

$(E_m): y''-4my'+2my=0$

Solutions

Exercice 5

1 Résolvons l'équation $(E_2): y'-2y=0$

$$y'-2y=0 \iff y'=2y$$
$$\iff y=ke^{2x};\ k\in\mathbb{R}$$

Déterminons la solution h de (E_2) qui vérifie : $h(0)=-2$

On a : $h(x)=ke^{2x}$; avec $k\in\mathbb{R}$.

On a : $h(0)=-2 \iff ke^0=-2$

$$\iff k=-2$$

ProfSalmi.blogspot.com

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ h(x) = -2e^{2x}$

2 $f(x) = e^{2x} g(x)$:

a) Calculons $g(0)$:

On a : $f(0) = e^0 g(0) \iff g(0) = f(0) = \ell n 2$ (car $e^0 = 1$)

b. Calculons $f'(x)$ **en fonction de** $g'(x)$ **et** $g(x)$:

On a : $f(x) = e^{2x} g(x)$

donc : $f'(x) = 2\,e^{2x} g(x) + e^{2x}\ g'(x)$

d'où : $(\forall x \in \mathbb{R})\ \ ;\ f'(x) = e^{2x}(2g(x) + g'(x))$

infos:

$(uv)' = u'v + uv'$

$(e^{ax+b})' = ae^{ax+b}$

c. Montrons que : (f est solution de (E_1)) $\iff g'(x) = \dfrac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

(f est solution de (E_1)) $\iff f'(x) - 2f(x) = \dfrac{-2}{1+e^{-2x}}$

$\iff 2e^{2x} g(x) + e^{2x} g'(x) - 2f(x) = \dfrac{-2}{1+e^{-2x}}$

$\iff 2f(x) + e^{2x} g'(x) - 2f(x) = \dfrac{-2}{1+e^{-2x}}$

$\iff e^{2x}\ g'(x) = \dfrac{-2}{1+e^{-2x}}$

$\iff g'(x) = \dfrac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

d. Déduisons l'expression de g **:**

On a : $g'(x) = \dfrac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

avec $u(x) = 1 + e^{-2x}$

donc : $g(x) = \ell n|u(x)| + c$

on a : $g(0) = \ell n 2 \iff \ell n|u(0)| + c = \ell n 2$

$\iff \ell n(2) + c = \ell n 2$

$\iff c = 0$

donc : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; g(x) = \ell n(1 + e^{-2x})$

Déterminons l'expression de f **:**

On a : $f(x) = e^{2x} g(x)$ et $g(x) = \ell n(1 + e^{-2x})$

donc : $(\forall x \in \mathbb{R})$: $f(x) = e^{2x} \ell n(1 + e^{-2x})$

D'où la solution de l'équation (E_1) qui vérifie $f(0) = \ell n 2$ est la fonction f définie par : $f : x \mapsto e^{2x} \ell n(1 + e^{-2x})$

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 6

$$(E_1): y'' - 5y' + 6y = e^{2x}$$

1 Vérifions que la fonction g est solution de l'équation (E_1) :

On a : $g(x) = -xe^{2x}$

donc : $g'(x) = -e^{2x} - 2xe^{2x}$

d'où : $g''(x) = -2e^{2x} - (2e^{2x} + 4xe^{2x}) = -4e^{2x} - 4xe^{2x}$

ainsi : $g''(x) - 5g'(x) + 6g(x) = -4xe^{2x} - 4e^{2x} + 5e^{2x} + 10xe^{2x} - 6xe^{2x}$

$= e^{2x}$

Donc g est solution de l'équation différentielle (E_1).

2 Déterminons la solution générale de (E_2):

On a : $(E_2): y'' - 5y' + 6y = 0$

son équation caractéristique est : $r^2 - 5r + 6 = 0$

son discriminant : $\Delta = 25 - 24 = 1$

et les solutions sont : $r_1 = 3$ et $r_2 = 2$

donc les solutions de l'équation différentielle (E_2) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$: $x \mapsto \alpha e^{2x} + \beta e^{3x}$, avec $(\alpha ; \beta) \in \mathbb{R}^2$

3 a. Montrons que ($f - g$ est solution de (E_2)) $\iff$ (f est solution de (E_1)):

($f - g$ solution de (E_2)) $\iff (f-g)'' - 5(f-g)' + 6(f-g) = 0$

$\iff f'' - g'' - 5f' + 5g' + 6f - 6g = 0$

$\iff f'' - 5f' + 6f = g'' - 5g' + 6g$

$\iff (\forall x \in \mathbb{R}) ; f''(x) - 5f'(x) + 6f(x) = e^{2x}$

car la fonction g est solution de (E_1).

Donc : (f est solution de (E_1)) $\iff$ ($f - g$ est solution de (E_1))

b. Déduisons les solutions de l'équation (E_1) :

(f est solution de (E_1)) $\iff$ ($f - g$ est solution de (E_2))

$\iff f - g = \alpha e^{2x} + \beta e^{3x}$; $(\alpha ; \beta) \in \mathbb{R}^2$

$\iff f(x) = g(x) + \alpha e^{2x} + \beta e^{3x}$; $(\alpha ; \beta) \in \mathbb{R}^2$,

pour tout x de $\mathbb{R}$

$\iff f(x) = -xe^{2x} + \alpha e^{2x} + \beta e^{3x}$; $(\alpha ; \beta) \in \mathbb{R}^2$,

pour tout x de $\mathbb{R}$

Les solutions de l'équation (E_1) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f: x \mapsto (-x + \alpha)e^{2x} + \beta e^{3x}$ avec $(\alpha ; \beta) \in \mathbb{R}^2$

ProfSalmi.blogspot.com

c. Déduisons la solution h de l'équation différentielle (E_1) qui vérifie :

$h(0)=2$ et $h'(0)=0$

On a : $h(x)=(-x+\alpha)e^{2x}+\beta e^{3x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$

donc : $h'(x)=-e^{2x}+2(-x+\alpha)e^{2x}+3\beta e^{3x}$

On a : $h(0)=2 \iff \alpha e^0+\beta e^0=2$

$\iff \alpha+\beta=2$

et on a : $h'(0)=0 \iff -e^0+2\alpha e^0+3\beta e^0=0$

$\iff -1+2\alpha+3\beta=0$

On résout le système : $\begin{cases}\alpha+\beta=2 & (L_1)\\ 2\alpha+3\beta=1 & (L_2)\end{cases}$

$(L_1)\Rightarrow \alpha=2-\beta$

On remplace α dans (L_2) on obtient : $2(2-\beta)+3\beta=1$ donc: $\beta=-3$

d'où : $\alpha=2-(-3)=5$

par suite : $h(x)=(-x+5)e^{2x}-3e^{3x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$

Exercice 7

$$(E): y''-2\sqrt{3}y'+4y=0$$

1 ▸ Déterminons la solution f de l'équation différentielle (E), qui vérifie

$f(0)=\sqrt{3}$ et $f'(0)=4$

son équation caractéristique est : $r^2-2\sqrt{3}r+4=0$

son discriminant : $\Delta=(2\sqrt{3})^2-4\times 4=-4$

On a : $\Delta<0$; donc l'équation caractéristique admet deux solutions complexes

conjuguées : $r_1=\dfrac{2\sqrt{3}+2i}{2}=\sqrt{3}+i$ et $r_2=\overline{r_1}=\sqrt{3}-i$

donc les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions définies

sur $\mathbb{R}$ par : $x\mapsto(\alpha\cos x+\beta\sin x)e^{\sqrt{3}x}$, avec : $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$

▸ **Déterminons f sachant que $f(0)=\sqrt{3}$ et $f'(0)=4$**

On a : $f(x)=(\alpha\cos x+\beta\sin x)e^{\sqrt{3}x}$

donc : $f'(x)=(-\alpha\sin x+\beta\cos x)e^{\sqrt{3}x}+\sqrt{3}(\alpha\cos x+\beta\sin x)e^{\sqrt{3}x}$

d'où : $f(0)=\sqrt{3}\iff(\alpha\cos(0)+\beta\sin(0))e^0=\sqrt{3}$

$\iff \alpha=\sqrt{3}$

$f'(0)=4\iff(-\alpha\sin(0)+\beta\cos(0))e^0+\sqrt{3}(\alpha\cos(0)+\beta\sin(0)e^0=4)$

$\iff \beta+\sqrt{3}\alpha=4$

ProfSalmi.blogspot.com

or : $\alpha = \sqrt{3}$, donc : $\beta = -\sqrt{3} \times \sqrt{3} + 4 = 1$

d'où : $f(x) = (\sqrt{3}\cos x + \sin x)e^{\sqrt{3}x}$

infos:
- $\cos(0) = 1$
- $\sin(0) = 0$
- $\cos'(x) = -\sin x$
- $\sin'(x) = \cos x$

2 Déduisons la valeur de l'intégrale I :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt{3}\cos x + \sin x)e^{\sqrt{3}x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$$

puisque f est solution de (E); donc : $f'' - 2\sqrt{3}f' + 4f = 0$

d'où : $f = \frac{-1}{4}f'' + \frac{\sqrt{3}}{2}f'$

donc : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \frac{-1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f''(x)dx + \frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)dx$

$$= \frac{-1}{4}[f'(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2}[f(x)]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{-1}{4}\left(f'\left(\frac{\pi}{2}\right) - f'(0)\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0)\right)$$

or : $f(x) = (\sqrt{3}\cos x + \sin x)e^{\sqrt{3}x}$

donc : $f'(x) = (-\sqrt{3}\sin x + \cos x)e^{\sqrt{3}x} + \sqrt{3}(\sqrt{3}\cos x + \sin x)e^{\sqrt{3}x}$

d'où : $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sqrt{3}e^{\sqrt{3}\frac{\pi}{2}} + \sqrt{3}e^{\sqrt{3}\frac{\pi}{2}} = 0$

$f(0) = \sqrt{3}$ et $f'(0) = 4$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\sqrt{3}\frac{\pi}{2}}$

d'où : $I = \frac{-1}{4}(0 - 4) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(e^{\frac{\pi\sqrt{3}}{2}} - \sqrt{3}\right)$

$$= 1 - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}e^{\frac{\sqrt{3}\pi}{2}}$$

Exercice 8

Soit l'équation différentielle $(E) : y' = y(1 - y)$:

Soit f une solution de (E), telle que $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f(x) \neq 0$ et $f(0) = 2$

1 Montrons que $\frac{1}{f}$ est solution de (F) : $y' + y = 1$:

On a : $\left(\frac{1}{f}\right)' + \frac{1}{f} = \frac{-f'}{f^2} + \frac{1}{f} = \frac{-f' + f}{f^2}$

Or f est solution de (E) donc : $f' = f(1 - f)$

$$f' = f(1 - f) \Leftrightarrow f' = f - f^2$$

$$\Leftrightarrow -f' + f = f^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{-f' + f}{f^2} = 1$$

ProfSalmi.blogspot.com

d'où : $\left(\frac{1}{f}\right)'+\frac{1}{f}=1$

donc : $\frac{1}{f}$ est solution de l'équation différentielle $(F): y'+y=1$.

2 Résolvons l'équation différentielle $(F): y'+y=1$:

On a : $y'+y=1 \iff y'=-y+1$

On a : $y'=ay+b$, avec $a=-1$ et $b=1$

et : $\frac{-b}{a}=1$

la solution générale de l'équation (F) est : $y=ke^{-x}+1$, avec $k\in\mathbb{R}$

Déterminons l'expression de f :

On a : $\frac{1}{f}$ est solution de (F), avec : $\frac{1}{f}=ke^{-x}+1$

d'où : $(\forall x\in\mathbb{R}); f(x)=\frac{1}{ke^{-x}+1}$

Or : $f(0)=2 \iff \frac{1}{ke^{0}+1}=2$

$\iff k+1=\frac{1}{2}$

$\iff k=-\frac{1}{2}$

Par conséquent : $(\forall x\in\mathbb{R}); f(x)=\frac{1}{-\frac{1}{2}e^{-x}+1}$

Exercice 9

Soit m de $\mathbb{R}$.

Déterminons suivant les valeurs de m les solutions de l'équation différentielle $(E_m): y''-4my'+2my=0$.

son équation caractéristique est : $r^2-4mr+2m=0$

son discriminant : $\Delta=(-4m)^2-4(1)(2m)$

$=16m^2-8m$

$=8m(2m-1)$

Etudions le signe de Δ :

On a : $\Delta=0 \iff m=0$ ou $m=\frac{1}{2}$

Le tableau de signe de Δ est le suivant :

m	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
Δ		$+$	0	$-$	0	$+$	

ProfSalmi.blogspot.com

▸ Si $\Delta > 0$ c'est-à-dire : $m \in]-\infty;0[\cup]\frac{1}{2};+\infty[$

alors les solutions de l'équation différentielle (E_m) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$; $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$

où : $r_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $r_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$r_1 = \dfrac{4m-\sqrt{8m(2m-1)}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{4m+\sqrt{8m(2m-1)}}{2}$

$r_1 = 2m-\sqrt{2m(2m-1)}$ et $r_2 = 2m+\sqrt{2m(2m-1)}$

d'où : les solution de (E_m) sont les fonctions :

$x \mapsto \alpha e^{(2m-\sqrt{2m(2m-1)})x} + \beta e^{(2m+\sqrt{2m(2m-1)})x}$; $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$

▸ Si $\Delta = 0$ c'est-à-dire : $m = 0$ ou $m = \frac{1}{2}$ alors : $r_0 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{4m}{2} = 2m$

Les solutions de (E_m) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$x \mapsto (\alpha x + \beta)e^{r_0 x}$

$x \mapsto (\alpha x + \beta)e^{2mx}$; $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$

Cas	$m = 0$	$m = \frac{1}{2}$
Les solutions	$x \mapsto (\alpha x + \beta)e^{0x}$ $x \mapsto (\alpha x + \beta)$ $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$	$x \mapsto (\alpha x + \beta)e^{\frac{1}{2}x}$ $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$

▸ Si $\Delta < 0$ c'est-à-dire : $m \in]0;\frac{1}{2}[$, alors : l'équation caractéristique admet deux solutions complexes conjuguées, sont :

$$r_1 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$
$$= \frac{4m-i\sqrt{8m-16m^2}}{2}$$
$$= 2m-i\sqrt{2m-4m^2}$$
$$= 2m-i\sqrt{2m(1-2m)}\ ;\ r_2 = \overline{r_1} = 2m+i\sqrt{2m(1-2m)}$$

Soit $p = \mathcal{R}(r_2) = 2m$

$q = \mathrm{Im}(r_2) = \sqrt{2m(1-2m)}$

donc les solutions de l'équation différentielle (E_m) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$x \mapsto e^{px}(\alpha\cos qx + \beta\sin qx)$; $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$

$x \mapsto e^{2mx}\left(\alpha\cos\left(\sqrt{2m(1-2m)}x\right)+\beta\sin\left(\sqrt{2m(1-2m)}y\right)\right)$; $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$

ProfSalmi.blogspot.com

5 Géométrique analytique dans l'espace

1 Le produit scalaire dans l'espace

L'espace est rapporté à un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

1. Orthogonalité de deux vecteurs

Définition :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace; on dit que : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si $\vec{u}.\vec{v}=0$, et on écrit : $\vec{u}\perp\vec{v}$

2. Expression analytique du produit scalaire dans l'espace

propriétés :

Si $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ et $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}$ sont deux vecteurs de l'espace

$\vec{u}.\vec{v}=xx+yy'+zz'$.

Deux vecteurs $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ et $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}$ sont orthogonaux si et seulement si $xx'+yy'+zz'=0$.

3. L'expression analytique de la norme d'un vecteur et de la distance entre deux points

Norme d'un vecteur

propriété :

Si $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$,alors la norme du vecteur $\vec{u}$ est $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Distance entre deux points

Soit $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$ deux points de l'espace.

La distance entre A et B est: $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

Rappel :

Les coordonnées du point I mlilieu du segment $[AB]$ est:

$\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$

ProfSalmi.blogspot.com

Exercices

Exercice 1

Calculer $\vec{u}.\vec{v}$ et $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$ dans chacun des cas suivants :

1. $\vec{u}(1;0;2)$ et $\vec{v}(-1;4;3)$
2. $\vec{u}(2;1;\sqrt{2})$ et $\vec{v}=3\vec{i}+\vec{j}$
3. $\vec{u}=\vec{i}-2\vec{k}$ et $\vec{v}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$

Exercice 2

Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et AB et AC dans chacun des cas suivants :

1. $A(1;2;0)$ et $B(-1;4;1)$ et $C(2;-1;-1)$
2. $A(0;0;1)$ et $B(0;1;1)$ et $C(1;1;1)$
3. $A(3;1;2)$ et $B(-1;0;0)$ et $C(1;2;4)$

Exercice 3

On considère les points $A(3;-2;2)$, $B(6;1;5)$, $C(6;-2;-1)$ et $D(0;4;-1)$:

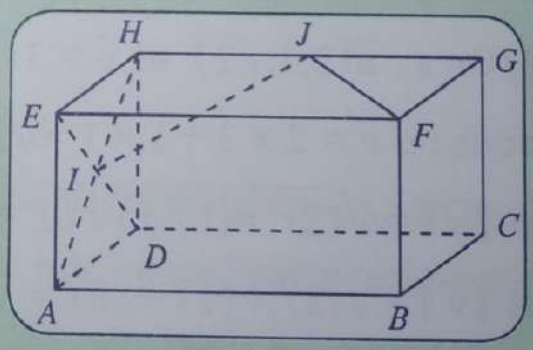
1. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.
2. Montrer que la droite (AD) est orthogonale au plan (ABC).
3. a. Montrer que $\frac{\pi}{4}$ est une mesure de l'angle $\widehat{BDC}$;
   b. Calculer l'aire du triangle BDC.

Exercice 4

Soit $ABCDEFGH$ un parallélipipède rectangle tel que $AD=AE=1$ et $AB=2$

Soit I le centre du carré $ADHE$ et J le milieu du segment $[GH]$.

Calculer $\overrightarrow{JI}.\overrightarrow{JF}$, en déduire $\cos\widehat{IJF}$.



Exercice 5

Déterminer dans chaque cas la valeur ou les valeurs du réel m pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux :

1. $\vec{u}(m;m;-1)$ et $\vec{v}(-3;m;-2)$

ProfSalmi.blogspot.com

2 $\vec{u}(1;m;1)$ et $\vec{v}\left(m;m;\frac{1}{4}\right)$

Exercice 6

Soit $A(1;-1,2)$ et $B(2;-1;3)$ et $C(0;-1;3)$ et $D(1;-1;4)$.

1 Montrer que le triangle ABC est rectangle isocèle en A.

2 En déduire que le quadrilatère $ABDC$ est un carré.

Exercice 7

Soit (D) la droite définie par : $\begin{cases} x = 4+3t \\ y = -2+t \\ z = 1-5t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$

$A(1;9;1)$ et $B(0;2;-1)$ sont deux points de l'espace.

Montrer que les droites (AB) et (D) sont orthogonales.

Solutions

Exercice 1

Calculons $\vec{u}.\vec{v}$ et $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$ dans chaque cas :

1 On a : $\vec{u}(1;0;2)$ et $\vec{v}(-1;4;3)$

donc : $\vec{u}.\vec{v} = 1\times(-1)+0\times(4)+2\times(3) = 5$

et $\|\vec{u}\| = \sqrt{(1)^2+(0)^2+(2)^2} = \sqrt{5}$

et $\|\vec{v}\| = \sqrt{(-1)^2+(4)^2+(3)^2} = \sqrt{26}$

2 On a : $\vec{u}(2;1;\sqrt{2})$ et $\vec{v} = 3\vec{i}+\vec{j}$ c'est-à-dire : $\vec{v}(3;1;0)$

donc : $\vec{u}.\vec{v} = 2\times3+1\times1+\sqrt{2}\times0 = 7$

et $\|\vec{u}\| = \sqrt{(2)^2+(1)^2+(\sqrt{2})^2} = \sqrt{7}$

et $\|\vec{v}\| = \sqrt{(3)^2+(1)^2+(0)^2} = \sqrt{10}$

3 On a : $\vec{u} = \vec{i}-2\vec{k}$, c'est-à-dire : $\vec{u}(1;0;-2)$ et $\vec{v} = \vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$, c'est-à-dire : $\vec{v}(1;2;-1)$

donc : $\vec{u}.\vec{v} = 1\times1+0\times2+(-2)\times(-1) = 3$

et $\|\vec{u}\| = \sqrt{(1)^2+(0)^2+(-2)^2} = \sqrt{5}$

et $\|\vec{v}\| = \sqrt{(1)^2+(2)^2+(-1)^2} = \sqrt{6}$

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 2

Calculons $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et AB et AC dans chaque cas :

1 On a : $A(1;2;0)$, $B(-1;4;1)$ et $C(2;-1;-1)$

donc : $\overrightarrow{AB}(-2;2;1)$ et $\overrightarrow{AC}(1;-3;-1)$

d'où : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=(-2)\times 1+2\times(-3)+1\times(-1)=-9$

et $AB=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(-2)^2+(2)^2+(1)^2}=\sqrt{9}=3$

et $AC=\|\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{(1)^2+(-3)^2+(-1)^2}=\sqrt{11}$

2 On a : $A(0;0;1)$ et $B(0;1;1)$ et $C(1;1;1)$

donc : $\overrightarrow{AB}(0;1;0)$ et $\overrightarrow{AC}(1;1;0)$

d'où : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=1\times 0+1\times 1+0\times 0=1$

et $AB=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{0^2+1^2+0^2}=1$

et $AC=\|\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{1^2+1^2+0^2}=\sqrt{2}$

3 On a : $A(3;1;2)$ et $B(-1;0;0)$ et $C(1;2;4)$

donc : $\overrightarrow{AB}(-4;-1;-2)$ et $\overrightarrow{AC}(-2;1;2)$

d'où : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=(-4)\times(-2)+(-1)\times(1)+(-2)\times(2)=3$

et $AB=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(-4)^2+(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{21}$

et $AC=\|\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{(-2)^2+(1)^2+(2)^2}=3$

Exercice 3

1 Montrons que ABC est un triangle rectangle en A :

On a : $\overrightarrow{AB}(3;3;3)$ et $\overrightarrow{AC}(3;0;-3)$,

donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=3\times 3+0\times 3+(-3)\times 3=9-9=0$

d'où : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux par suite ABC est rectangle en A (on peut aussi calculer les longueurs des côtés du triangle ABC, et utiliser la réciproque du théorème de pythagore).

2 Montrons que $(AD)\perp(ABC)$:

On a : $\overrightarrow{AD}(-3;6;-3)$:

donc : $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}=-9+18-9=0$ et $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}=-9+9=0$

d'où : $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AB}$

ce qui signifie que la droite (AD) est orthogonale aux deux droites sécantes

ProfSalmi.blogspot.com

(AB) et (AC); par suite la droite (AD) est orthogonale au plan (ABC) c'est-à-dire:

$(AD) \perp (ABC)$.

3 a. Déterminons une mesure de l'angle $(\widehat{BDC})$

On a : $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC} = DB \times DC \times \cos\widehat{BDC}$

donc : $\cos\widehat{BDC} = \dfrac{\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}}{DB \times DC}$, et puisque : $\overrightarrow{DB}(6;-3;6)$, et $\overrightarrow{DC}(6;-6;0)$

alors : $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC} = 36 + 18 = 54$

et $DB = \sqrt{36+9+36} = \sqrt{81} = 9$ et $DC = \sqrt{6^2+6^2} = 6\sqrt{2}$

d'où : $\cos\widehat{BDC} = \dfrac{54}{9 \times 6 \times \sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \cos\dfrac{\pi}{4}$

par suite : $\dfrac{\pi}{4}$ est une mesure de l'angle $\widehat{BDC}$.

b. Calculons l'aire S du triangle BDC.

On a : $S = \dfrac{1}{2} \times DB \times DC \times \sin\widehat{BDC}$ et $\sin\widehat{BDC} = \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

D'où : $S = \dfrac{1}{2} \times 9 \times 6\sqrt{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 27$

Exercice 4

Calculons $\overrightarrow{JI}.\overrightarrow{JF}$, puis $\cos\widehat{IJF}$

On a : $\left\|\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right\| = \|\overrightarrow{AE}\| = \|\overrightarrow{AD}\| = 1$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AD} = 0$

On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A;\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AD}\right)$.

On a : $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AD}) = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AE} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ (car I est le milieu du segment $[ED]$

donc : $\left(0;\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$ est le triplet de coordonnées du point I.

On a : $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HJ}$

$= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$= \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD}$

donc : $(1,1,1)$ est le triplet de coordonnées du point J dans le repère $\left(A;\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AD}\right)$.

On a : $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} = 2\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) + \overrightarrow{AE}$

donc : $F(2,1,0)$

d'où : $\overrightarrow{JF}(1;0;-1)$ et $\overrightarrow{JI}\left(-1;-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$

ProfSalmi.blogspot.com

par suite : $JF = \sqrt{2}$ et $JI = \sqrt{\frac{3}{2}}$

et $\overrightarrow{JI}.\overrightarrow{JF} = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$, et $\cos\widehat{IJF} = \frac{\overrightarrow{JI}.\overrightarrow{JF}}{JI \times JF}$ $\frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{2}} \times \sqrt{2}}$

D'où : $\cos\widehat{IJF} = -\frac{\sqrt{3}}{6}$

Exercice 5

Déterminons la valeur ou les valeurs de m sachant que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

1 On a : $\vec{u}(m;m;-1)$ et $\vec{v}(-3;m;-2)$

Donc : $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$

$\Leftrightarrow -3m + m^2 + 2 = 0$

$\Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 = 0$

$\Leftrightarrow (m-1)(m-2) = 0$

$\Leftrightarrow m = 1$ ou $m = 2$

2 On a : $\vec{u}(1;m;1)$ et $\vec{v}\left(m;m;\frac{1}{4}\right)$

donc : $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$

$\Leftrightarrow m + m^2 + \frac{1}{4} = 0$

$\Leftrightarrow m^2 + m + \frac{1}{4} = 0$

$\Leftrightarrow \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 = 0$

$\Leftrightarrow m + \frac{1}{2} = 0$

$\Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$

Exercice 6

1 **Montrons que ABC est un triangle rectangle isocèle en A :**

On a : $\overrightarrow{AB}(1;0;1)$ et $\overrightarrow{AC}(-1;0;1)$

donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = (1)\times(-1)+(0)\times(0)+(1)\times(1) = 0$; d'où ABC est un triangle rectangle en A.

Calculons AB et AC :

On a : $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(1)^2+(0)^2+(1)^2} = \sqrt{2}$

ProfSalmi.blogspot.com

et $AC = \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(-1)^2 + (0)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$

donc : $AB = AC$, d'où : ABC est un triangle isocèle en A.

Conclusion : ABC est un triangle rectangle isocèle en A.

2 Déduisons que $ABDC$ est un carré :

$ABDC$ est un carré si $ABDC$ est un parallélogramme et le triangle ABC est rectangle en A.

d'après ce qui précède, on a : ABC est un triangle rectangle isocèle en A, donc, il suffit de montrer que le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme.

on a : $\overrightarrow{AB}(1;0;1)$ et $\overrightarrow{CD}(x_D - x_C; y_D - y_C; z_D - z_C)$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{CD}(1;0;1)$

donc : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ce qui signifie que le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme.

Exercice 7

Montrons les droites (D) et (AB) sont orthogonales :

On a : $\overrightarrow{AB}(-1;-7;-2)$ est un vecteur directeur de la droite (AB).

et $\vec{u}(3;1;-5)$ est un vecteur directeur de la droite (D) .

et $\overrightarrow{AB}.\vec{u} = (-1)\times(3)+(-7)\times(1)+(-2)\times(-5)$

$= -3-7+10 = 0$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux, par suite les droites (AB) et (D) sont orthogonales.

2 Plan défini par un point et un vecteur normal

1. Vecteur normal à un plan

Propriété :

Le vecteur non nul $\vec{n}$ est normal à un plan (P) si et seulement si, le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (P) .

2. Équation cartésienne d'un plan défini par un point et un vecteur normal

Propriété 1 :

Soit $\vec{n}(a;b;c)$ un vecteur non nul et A un point de l'espace.

Le plan (P) passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M qui vérifient : $A\overrightarrow{M}.\vec{n} = 0$; l'équation cartésienne de ce plan est $ax+by+cz+d=0$ où d est un nombre réel.

ProfSalmi.blogspot.com

Inversement, l'ensemble des points M qui vérifie $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Propriété 2 :

Soit a , b , c et d tels que $(a;b;c)\neq(0;0;0)$. L'ensemble des points $M(x;y;z)$ qui vérifient: $ax+by+cz+d=0$; est un plan ayant le vecteur $\vec{n}(a;b;c)$ comme vecteur normal.

3. Orthogonalité de deux plans :

Propriété :

Soit $\overrightarrow{n_{(P)}}$ un vecteur normal à un plan (P), et $\overrightarrow{n_{(Q)}}$ un vecteur normal à un plan (Q). Les plans (P) et (Q) sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{n_{(P)}}.\overrightarrow{n_{(Q)}}=0$.

4. Distance d'un point à un plan :

Propriété :

Soit (P) un plan d'équation $ax+by+cz+d=0$ et $A(x_A;y_A;z_A)$ un point de l'espace.

La distance du point A au plan (P) est $d(A;(P))=\dfrac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Exercices

Exercice 8

Déterminer un vecteur normal au plan (P) dans chacun des cas suivants :

1. $(P): x-y+z+1=0$
2. $(P): 2x-z+7=0$
3. $(P): y-z+1=0$
4. $(P): 2x+7=0$
5. $(P): \sqrt{2}x-2y+1=0$
6. $(P): z=0$

Exercice 9

Déterminer dans chacun des cas suivants une équation cartésienne du plan (P) passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$:

ProfSalmi.blogspot.com

1. $\vec{n}(1;-1;2)$ et $A(1;1;1)$
2. $\vec{n}(0;3;-1)$ et $A(-1;2;1)$
3. $\vec{n}(1;2;0)$ et $A(0;2;1)$
4. $\vec{n}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ et $A=O$
5. $\vec{n}=\vec{j}-2\vec{k}$ et $A(1;0;0)$

Exercice 10

Déterminer dans chacun des cas suivants une représentation paramétrique da la droite (D) passant par A et orthogonale au plan (P):

1. $(P):x-y-z-1=0$ et $A(1;0;2)$
2. $(P):-3x+2y-z+4=0$ et $A(1;-3;-1)$
3. $(P):x-2z+2=0$ et $A(2;4;3)$

Exercice 11

Déterminer dans chacun des cas suivants la projection orthogonale du point A sur le plan (P):

1. $(P):x-y-z-1=0$ et $A(2;-3;0)$
2. $(P):2x-y-5=0$ et $A(-1;1;4)$
3. $2y+3z+1=0$ et $A(5;0;-2)$

Exercice 12

Montrer que les plans (P) et (Q) sont orthogonaux dans chaque cas:

1. $(P):x-y+z+1=0$ et $(Q):2x+y-z-5=0$
2. $(P):2x-3z+11=0$ et $(Q):6x+5y+4z-7=0$
3. $(P):x-2y-z-1=0$ et $(Q):3x+y+z-4=0$

Exercice 13

Calculer dans chaque cas la distance du point A au plan (P):

1. $(P):x-2y-2z-1=0$ et $A(1;2;3)$
2. $(P):x+y+z+3=0$ et $A(1;1;1)$
3. $(P):x-2z+5=0$ et $A(0;2;5)$
4. $(P):2y+3z-1=0$ et $A(1;0;1)$

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 8

Déterminons un vecteur normal au plan (P) dans chacun des cas :

1 On a : $(P): x-y+z+1=0$

donc : $\vec{n}(1;-1;1)$ est un vecteur normal au plan (P).

2 On a : $(P): 2x-z+7=0$, c'est-à-dire : $(P): 2x+0y-z+7=0$

Donc $\vec{n}(2;0;-1)$ est un vecteur normal au plan (P).

3 On a : $(P): y-z+1=0$, c'est-à-dire : $(P): 0x+y-z+1=0$

donc : $\vec{n}(0;1;-1)$ est un vecteur normal au plan (P).

4 On a : $(P): 2x+7=0$, c'est-à-dire : $(P): 2x+0.y+0.z+7=0$

donc : $\vec{n}(2;0;0)$ est un vecteur normal au plan (P)

5 On a : $(P): \sqrt{2}x-2y+1=0$, c'est-à-dire : $(P): \sqrt{2}x-2y+0z+1=0$

donc : $\vec{n}(\sqrt{2};-2;0)$ est un vecteur normal au plan (P).

6 On a : $(P): z=0$, c'est-à-dire : $(P): 0.x+0y+1.z=0$

donc : $\vec{n}(0;0;1)$ est un vecteur normal au plan (P).

Exercice 9

Déterminons une équation cartésienne du plan (P) passant par le point A et de vecteur normal $\vec{n}$ dans chacun des cas suivants:

1 On a : $\vec{n}(1;-1;2)$ est un vecteur normal au plan (P), donc, une équation cartésienne du plan (P) s'écrit sous la forme : $x-y+2z+d=0$

On a : $A(1;1;1)\in(P) \iff x_A-y_A+2z_A+d=0$

$\iff 1-1+2+d=0$

$\iff d=-2$

donc : $x-y+2z-2=0$ est une équation cartésienne du plan (P).

2 On a : $\vec{n}(0;3;-1)$ est un vecteur normal au plan (P).

donc une équation cartésienne du plan (P) s'écrit sous la forme :

$3y-z+d=0$

et on a : $A(-1;2;1)\in(P) \iff 3y_A-z_A+d=0$

$\iff 6-1+d=0$

$\iff d=-5$

donc, une équation cartésienne du plan (P) est : $3y-z-5=0$

ProfSalmi.blogspot.com

3 On a : $\vec{n}(1;2;0)$ est un vecteur normal au plan (P).
donc, une équation cartésienne du plan (P) s'écrit sous la forme :
$x+2y+d=0$
et on a : $A(0;2;1)\in(P) \Leftrightarrow x_A+2y_A+d=0$
$\Leftrightarrow 4+d=0$
$\Leftrightarrow d=-4$
Donc : $x+2y-4=0$ est une équation cartésienne du plan (P).

4 On a : $\vec{n}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ c'est-à-dire : $\vec{n}(2;-1;1)$ est un vecteur normal au plan (P), donc une équation cartésienne du plan (P) s'écrit sous la forme :
$2x-y+z+d=0$
et on a : $O(0;0;0)\in(P) \Leftrightarrow 2x_O-y_O+z_O+d=0$
$\Leftrightarrow d=0$
Donc : $2x-y+z=0$ est une équation cartésienne du plan (P).

5 On a : $\vec{n}=\vec{j}-2\vec{k}$, c'est-à-dire : $\vec{n}(0;1;-2)$ est un vecteur normal au plan (P), donc une équation cartésienne du plan (P) s'écrit sous la forme :
$y-2z+d=0$
et on a : $A(1;0;0)\in(P) \Leftrightarrow y_A-2z_A+d=0$
$\Leftrightarrow d=0$
Donc : $y-2z=0$ est une équation cartésienne du plan (P).

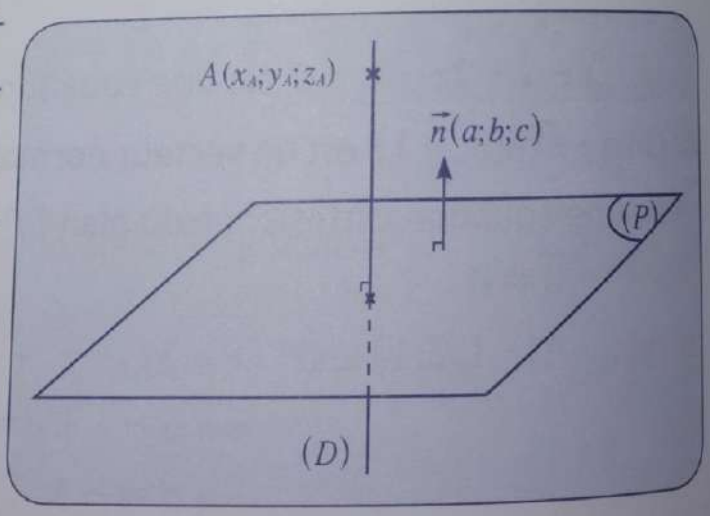
Exercice 10

Déterminons une représentation paramétrique de la droite (D) passant par A et orthogonale au plan (P).

Méthode :

Une équation cartésienne du plan (P) est : $ax+by+cz+d=0$; $A\in(D)$ et $\vec{n}(a;b;c)$ est un vecteur normal au plan (P) est aussi un vecteur directeur de la droite (D), d'où une représentation paramétrique de la droite (D) est :

$$\begin{cases} x=x_A+at \\ y=y_A+bt \\ z=z_A+ct \end{cases} ; (t\in\mathbb{R})$$



1 La droite (D) passe par le point $A(1;0;2)$ et orthogonale au plan

ProfSalmi.blogspot.com

$(P): x-y-z-1=0$ c'est-à-dire que (D) a pour vecteur directeur un vecteur normal à (P), par exemple $\vec{n}(1;-1,-1)$, donc une représentation paramétrique de (D) est :

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = -t \\ z = 2-t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$$

2 La droite (D) passe par le point $A(1;-3;-1)$, et orthogonale au plan $(P): -3x+2y-z+4=0$, c'est-à-dire que (D) a pour vecteur directeur un vecteur normal à (P), par exemple $\vec{n}(-3;2;-1)$, d'où une représentation paramétrique de (D) est : $\begin{cases} x = 1-3t \\ y = -3+2t \\ z = -1-t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$

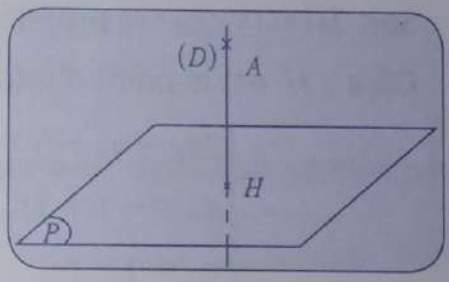
3 La droite (D) passe par le point $A(2;4;3)$ et orthogonale au plan $(P): x-2z+2=0$ c'est-à-dire (D) a pour vecteur directeur un vecteur normal à (P), par exemple $\vec{n}(1;0;-2)$, d'où une représentation paramétrique de (D) est : $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 4 \\ z = 3-2t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$

Exercice 11

Méthode :

▸ On détermine la projection orthogonale du point A sur le plan (P).

Soit H le projeté orthogonal de A sur le plan (P).



a. On détermine une représentation paramétrique de la droite (D) passant par A, et orthogonale au plan (P) (voir exercice précédent).

b. On résout le système formé par l'équation cartésienne du plan (P), et une représentation paramétrique de la droite (D).

1 On a : $(P): x-y-z-1=0$ et $A(2;-3;0)$

une représentation paramétrique de la droite (D) passant par A, et orthogonale au plan (P) est . $(D): \begin{cases} x = 2+t \\ y = -3-t \\ z = -t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$

La droite (D) a pour vecteur directeur un vecteur normal au plan (P), qui est $\vec{n}(1;-1;-1)$.

ProfSalmi.blogspot.com

On a : $H(x_H;y_H;z_H)$ est le projeté orthogonal du point A sur le plan (P).

donc : H est le point d'intersection du plan (P) et la droite (D).

d'où : $\begin{cases} x_H - y_H - z_H - 1 = 0 \\ x_H = 2+t \\ y_H = -3-t \\ z_H = -t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+t+3+t+t-1=0 \\ x_H = 2+t \\ y_A = -3-t \\ z_H = -t \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{4}{3} \\ x_H = 2-\frac{4}{3} = \frac{2}{3} \\ y_H = -3+\frac{4}{3} = -\frac{5}{3} \\ z_H = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Par suite $\left(\frac{2}{3};-\frac{5}{3};\frac{4}{3}\right)$ est le triplet de coordonnées du point H projeté orthogonal du point A sur le plan (P).

2 On a : $(P): 2x-y-5=0$ et $A(-1;1;4)$.

Une représentation paramétrique de la droite (D) passant par A et orthogonale au plan (P) est : $(D)\begin{cases} x = -1+2t \\ y = 1-t \\ z = 4 \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$

Soit $H(x_H;y_H;z_H)$ le projeté orthogonal du point A sur le plan (P).

On a : H est le point d'intersection du plan (P) et la droite (D), donc :

$$\begin{cases} 2x_H - y_H - 5 = 0 \\ x_H = -1+2t \\ y_H = 1-t \\ z_H = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(-1+2t)-(1-t)-5=0 \\ x_H = -1+2t \\ y_H = 1-t \\ z_H = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5t = 8 \\ x_H = -1+2t \\ y_H = 1-t \\ z_H = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{8}{5} \\ x_H = \frac{11}{5} \\ y_H = -\frac{3}{5} \\ z_H = 4 \end{cases}$$

ProfSalmi.blogspot.com

d'où : $\left(\frac{11}{5}\,;-\frac{3}{5};4\right)$ est le triplet de coordonnées du point H projeté orthogonal du point A sur le plan (P).

3 On a : $(P): 2y+3z+1=0$ et $A(5;0;-2)$

Une représentation paramétrique de la droite (D) passant par A et orthogonale au plan (P) est: $(D): \begin{cases} x=5 \\ y=2t \\ z=-2+3t \end{cases} ; (t\in\mathbb{R})$

Soit $H(x_H;y_H;z_H)$ le projeté orthogonal du point A sur le plan (P).

Donc : H est le point d'intersection du plan (P) et la droite (D), donc :

$$\begin{cases} 2y_H+3z_H+1=0 \\ x_H=5 \\ y_H=2t \\ z_H=-2+3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(2t)+3(-2+3t)+1=0 \\ x_H=5 \\ y_H=2t \\ z_H=-2+3t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 13t=5 \\ x_H=5 \\ y_H=2t \\ z_H=-2+3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\frac{5}{13} \\ x_H=5 \\ y_H=\frac{10}{13} \\ z_H=-\frac{11}{13} \end{cases}$$

D'où : $\left(5;\frac{10}{13};-\frac{11}{13}\right)$ est le triplet de coordonnées du point H projeté orthogonal du point A sur la plan (P).

Exercice 12

Montrons que les plans (P) et (Q) sont orthogonaux, dans chacun des cas suivants :

1 On a : $(P): x-y+z+1=0$ et $(Q): 2x+y-z-5=0$

Soit $\vec{n}_{(P)}(1;-1;1)$ est un vecteur normal au plan (P), et $\vec{n}_{(Q)}(2;1:-1)$ est un vecteur normal au plan (Q).

donc : $\vec{n}_{(P)}.\vec{n}_{(Q)}=1\times 2+(-1)\times(1)+(1)(-1)=2-1-1=0$

D'où : $\vec{n}_{(P)}\perp\vec{n}_{(Q)}$, par suite, les plans (P) et (Q) sont orthogonaux.

2 On a : $(P): 2x-3z+11=0$ et $(Q): 6x+5y+4z-7=0$

Soit $\vec{n}_{(P)}(2:0;-3)$ un vecteur normal au plan (P) et $\vec{n}_{(Q)}(6;5;4)$ un vecteur normal au plan (Q).

donc : $\vec{n}_{(P)}.\vec{n}_{(Q)}=2\times 6+0\times 5+(-3)(4)=12-12=0$

D'où : $\vec{n}_{(P)}\perp\vec{n}_{(Q)}$, par suite, les plans (P) et (Q) sont orthogonaux.

3 On a : $(P): x-2y-z-1=0$ et $(Q): 3x+y+z-4=0$

ProfSalmi.blogspot.com

Soit $\vec{n}_{(P)}(1;-2;-1)$ un vecteur normal au plan (P) et $\vec{n}_{(Q)}(3;1;1)$ un vecteur normal au plan (Q).

On a : $\vec{n}_{(P)}.\vec{n}_{(Q)} = 1\times 3+(-2)(1)+(-1)(1) = 3-2-1 = 0$

Donc : $\vec{n}_{(P)} \perp \vec{n}_{(Q)}$, par suite, les plans (P) et (Q) sont orthogonaux.

Exercice 13

Calculons la distance du point A au plan (P) dans chacun des cas suivants :

1 On a : $(P): x-2y-2z-1=0$ et $A(1;2;3)$

Donc : $d(A;(P)) = \dfrac{|x_A-2y_A-2z_A-1|}{\sqrt{(1)^2+(-2)^2+(-2)^2}}$

$= \dfrac{|1-4-6-1|}{\sqrt{9}} = \dfrac{10}{3}$

2 On a : $(P): x+y+z+3=0$ et $A(1;1;1)$

Donc : $d(A;(P)) = \dfrac{|x_A+y_A+z_A+3|}{\sqrt{(1)^2+(1)^2+(1)^2}} = \dfrac{|1+1+1+3|}{\sqrt{3}} = \dfrac{6}{\sqrt{3}} = \dfrac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$

3 On a : $(P): x-2z+5=0$ et $A(0;2;5)$

Donc : $d(A;(P)) = \dfrac{|x_A-2z_A+5|}{\sqrt{(1)^2+(-2)^2}} = \dfrac{|-10+5|}{\sqrt{5}} = \dfrac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$

4 On a : $(P): 2y+3z-1=0$ et $A(1;0;1)$

Donc : $d(A;(P)) = \dfrac{|2y_A+3z_A-1|}{\sqrt{(2)^2+(3)^2}}$

$= \dfrac{|3-1|}{\sqrt{13}} = \dfrac{2}{\sqrt{13}} = \dfrac{2\sqrt{13}}{13}$

3 Étude analytique de la sphère

1. Équation d'une sphère définie par son centre et son rayon

Propriété :

L'équation cartésienne de la sphère (S) de centre $\Omega(a;b;c)$ et de rayon R $(R>0)$ est : $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = R^2$

qui s'écrit : $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$

où : $d = a^2+b^2+c^2-R^2$

2. Équation cartésienne d'une sphère définie par un diamètre

Propriété :

Soit A et B deux points distincts de l'espace.

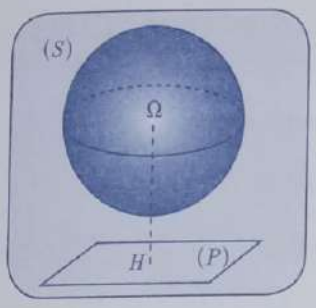
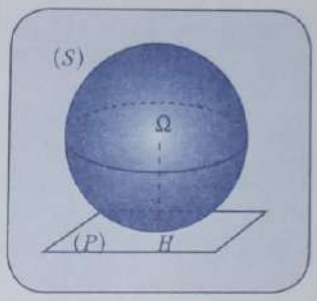
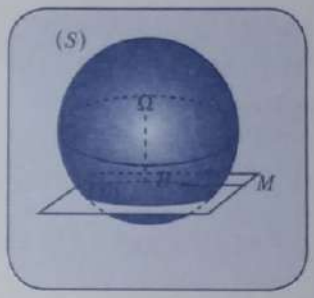
L'ensemble des points M qui vérifient : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ est la sphère de diamètre $[AB]$ et une équation cartésienne de cette sphère est :

ProfSalmi.blogspot.com

$(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)+(z-z_A)(z-z_B)=0$
où : $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$

3. Positions relatives d'un plan et d'une sphère

Soit (S) une sphère de centre Ω et de rayon R, (P) un plan de l'espace, H le projeté orthogonal du point Ω sur le plan (P) et $d=d(\Omega;(P))$.
Pour étudier la position relative de la sphère (S) et le plan (P), on calcule la distance d du point Ω au plan (P) et on la compare avec le rayon R.

$d>R$	$d=R$	$d<R$
Le plan (P) ne coupe pas la sphère S. On dit que le plan (P) est à l'extérieur de la sphère (S).	Le plan (P) coupe la sphère S au point H. On dit que le plan (P) est tangent à la sphère (S) au point H.	Le plan (P) coupe la sphère S suivant un cercle (C) de centre H et de rayon r, tel que : $r=\sqrt{R^2-d^2}$
		
$(S)\cap(P)=\phi$	$(S)\cap(P)=\{H\}$	$(S)\cap(P)=(C)$

4. Positions relatives d'une droite et d'une sphère

Soit $S=S(\Omega;R)$ une sphère de centre Ω et de rayon R et $(D)=D(A;\vec{u})$ est la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

- Une équation cartésienne de la sphère (S) est :

$(x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2+(z-z_\Omega)^2=R^2$ (2)

- Une représentation paramétrique de la droite (D) est:

$$\begin{cases}x=x_A+at\\y=y_A+bt\\z=z_A+ct\end{cases};(t\in\mathbb{R}) \quad (1)$$

Pour étudier l'intersection de (S) et (D), il suffit de résoudre le système $\begin{cases}(1)\\(2)\end{cases}$

ProfSalmi.blogspot.com

On obtient une équation du type (E) ; $\alpha t^2 + \beta t + \gamma = 0$

dont $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$, d'où :

$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
La droite (D) ne coupe pas la sphère (S) $(D) \cap S = \phi$	$t_1 = t_2 = -\frac{\beta}{2\alpha}$ On remplace dans (1), on obtient le point H l'intersection de (D) et (S); on dit dan s ce cas que (D) est tangente à la sphère (S) au H.	L'équation (E) admet deux solutions t_1 et t_2; on remplace dans (1), on obtient les points E et F d'intersection de la droite (D) et la sphère (S).

Propriété 1 :

Le plan (P) est tangent à la sphère $S(\Omega; R)$ si et seulement si: $d(\Omega; (P)) = R$.

Propriété 2 :

Soit (S) une sphère de centre Ω et A un point appartenant à (S). Il existe un plan unique (P) tangent à la sphère (S) au point A, c'est le plan orthogonal à la droite $(A\Omega)$ en A, et on a : $M \in (P) \Longleftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{A\Omega} = 0$ (c'est-à-dire le plan passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{A\Omega}$).

Exercices

Exercice 14

Déterminer une équation cartésienne de la sphère (S) de centre Ω et de rayon R dans chacun des cas suivants :

1 $\Omega(-1;0;1)$ et $R = 2$

2 $\Omega(0;0;-1)$ et $R = \sqrt{5}$

3 $\Omega(2;-\sqrt{3};1)$ et $R = \sqrt{2}$

4 $\Omega = O$ et $R = 1$

Exercice 15

Déterminer une équation cartésienne de la sphère (S) de centre Ω et qui passe par le point A dans chacun des cas suivants :

1 $\Omega(1;-1;1)$ et $A(3;-3;1)$

2 $\Omega(2;-3;1)$ et $A(0;1;3)$

3 $\Omega(4;0;1)$ et $A(0;0;5)$

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 16

Déterminer une équation cartésienne de la sphère (S) de diamètre $[AB]$ dans chacun des cas suivants :

1. $A(0;0;2)$ et $B(2;0;4)$
2. $A(-1;-2;2)$ et $B(1;4;2)$

Exercice 17

Déterminer une équation cartésienne de la sphère (S) de centre Ω et qui est tangente au plan (P) dans chacun des cas suivants :

1. $\Omega(0;1;2)$ et $(P): x+2y-2z+5=0$
2. $\Omega(1;2;0)$ et $(P): x+y-\sqrt{2}z+6=0$
3. $\Omega(2;-1;0)$ et $(P): 2x-y-3z+9=0$

Exercice 18

Montrer dans chacun des cas que l'ensemble (E) des points $M(x;y;z)$ qui vérifient l'équation est une sphère dont on précisera le centre et le rayon :

1. $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-1=0$
2. $x^2+y^2+z^2-x+8y-3z+4=0$
3. $x^2+y^2+z^2-2y=0$
4. $x^2+y^2+z^2-7x+5z+\frac{5}{2}=0$

Exercice 19

Montrer que le plan (P) est tangent à la sphère (S), puis déterminer les coordonnées du point H l'intersection du plan (P) et la sphère (S) :

1. $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z+5=0$ et $(P): x+y-z+\sqrt{3}=0$
2. $(S): x^2+y^2+z^2-4y=0$ et $(P): 2x+y-2z+4=0$
3. $(S): x^2+y^2+z^2+2x+2y-7=0$ et $(P): 4x+3y-8=0$

Exercice 20

Vérifier que le point A appartient à la sphère (S), puis déterminer l'équation du plan tangent à la sphère (S) au point A :

1. (S) est une sphère de centre $\Omega(1;0;1)$ et de rayon $R=2$ et $A(3;0;1)$.
2. $(S): (x-1)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=6$ et $A(3;-1;1)$
3. $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y-4=0$ et $A(3;-4;1)$

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 21

Etudier la position relative de la sphère (S) et du plan (P) dans chacun des cas suivants:

1. $(S): x^2+y^2+z^2-8x-6y=0$ et $(P): x+y-\sqrt{2}z-1=0$
2. $(S): x^2+y^2+z^2-6x-4y+4=0$ et $(P): 2x+2y-z-10=0$
3. $(S): (x-1)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=4$ et $(P): 2x+y-2z+4=0$
4. $(S): (x-1)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=4$ et $(P): 2x+y-2z+1=0$

Exercice 22

Déterminer l'intersection de la sphère (S) et la droite (Δ) dans chacun des cas suivants :

1. $(S): (x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=6$ et $(\Delta): \begin{cases} x=2+3t \\ y=4+t \\ z=-2+5t \end{cases} ; (t\in\mathbb{R})$
2. $(S): x^2+y^2+z^2-2x+2y-1=0$ et $(\Delta): \begin{cases} x=-1+t \\ y=1+2t \\ z=2 \end{cases} ; (t\in\mathbb{R})$
3. $(S): x^2+y^2+z^2+4x+2y+7z-2=0$ et $(\Delta): \begin{cases} x=1+t \\ y=3+t \\ z=-3-2t \end{cases} ; (t\in\mathbb{R})$

Solutions

Exercice 14

Déterminons une équation de la sphère (S) de centre Ω et de rayon R dans chacun des cas suivants :

1. On a : $\Omega(-1;0;1)$ et $R=2$, donc une équation de la sphère (S) est :
$(x+1)^2+(y-0)^2+(z-1)^2=(2)^2$
c'est-à-dire : $x^2+2x+1+y^2+z^2-2z+1-4=0$
Donc : $x^2+y^2+z^2+2x-2z-2=0$ est une équation de la sphère (S).
2. On a : $\Omega(0;0;-1)$ et $R=\sqrt{5}$, donc une équation de la sphère (S) est :
$(x-0)^2+(y-0)^2+(z+1)^2=(\sqrt{5})^2$
c'est-à-dire : $x^2+y^2+z^2+2z+1-5=0$

ProfSalmi.blogspot.com

Donc : $x^2+y^2+z^2+2z-4=0$ est une équation de la sphère (S).

3 On a : $\Omega(2;-\sqrt{3};1)$ et $R=\sqrt{2}$, donc une équation de la sphère (S) est :

$(x-2)^2+(y+\sqrt{3})^2+(z-1)^2=(\sqrt{2})^2$

c'est-à-dire : $x^2-4x+4+y^2+2\sqrt{3}y+3+z^2-2z+1-2=0$

Donc : $x^2+y^2+z^2-4x+2\sqrt{3}y-2z+6=0$ est une équation de la sphère (S).

4 On a : $\Omega=O$ et $R=1$ donc une équation de la sphère (S) est :

$(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2=(1)^2$

Donc : $x^2+y^2+z^2-1=0$ est une équation de la sphère (S).

Exercice 15

Déterminons une équation cartésienne de la sphère (S) de centre Ω et qui passe par le point A.

1 On a : (S) est la sphère de centre $\Omega(1;-1;1)$, et qui passe par le point $A(3;-3;1)$

c'est-à-dire le rayon R de la sphère (S) est ΩA, donc :

$$R=\Omega A=\sqrt{(x_A-x_\Omega)^2+(y_A-y_\Omega)^2+(z_A-z_\Omega)^2}$$
$$=\sqrt{(3-1)^2+(-3+1)^2+(1-1)^2}$$
$$=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

donc une équation de la sphère (S) est : $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=(2\sqrt{2})^2$

c'est-à-dire : $x^2-2x+1+y^2+2y+1+z^2-2z+1-8=0$

d'où : $x^2+y^2+z^2-2x+2y-2z-5=0$ est une équation cartésienne de la sphère (S).

2 On a : (S) est la sphère de centre $\Omega(2;-3;1)$, et qui passe par le point $A(0;1;3)$

c'est-à-dire le rayon R de la sphère (S) est ΩA, donc :

$$R=\Omega A=\sqrt{(x_A-x_\Omega)^2+(y_A-y_\Omega)^2+(z_A-z_\Omega)^2}$$
$$=\sqrt{(0-2)^2+(1+3)^2+(3-1)^2}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$$

donc une équation cartésienne de la sphère (S) est :

$(x-2)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=(2\sqrt{6})^2$

c'est-à-dire : $x^2-4x+4+y^2+6y+9+z^2-2z+1-24=0$

ProfSalmi.blogspot.com

d'où : $x^2+y^2+z^2-4x+6y-2z-10=0$ est une équation cartésienne de la sphère (S).

3 On a : (S) est la sphère de centre $\Omega(4;0;1)$, et qui passe par le point $A(0;0;5)$

c'est-à-dire le rayon R de la sphère (S) est ΩA, donc:

$$R=\Omega A=\sqrt{(x_A-x_\Omega)^2+(y_A-y_\Omega)^2+(z_A-z_\Omega)^2}$$
$$=\sqrt{(0-4)^2+(0-0)^2+(5-1)^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$$

donc, une équation cartésienne de la sphère (S) est :

$(x-4)^2+(y-0)^2+(z-1)^2=(4\sqrt{2})^2$

c'est-à-dire : $x^2-8x+16+y^2+z^2-2z+1-32=0$

D'où : $x^2+y^2+z^2-8x-2z-15=0$ est une équation cartésienne de la sphère (S).

Exercice 16

Déterminons une équation cartésienne de la sphère (S) de diamètre $[AB]$ (on utilise deux méthodes):

Méthode 1:

(S) est la sphère de diamètre $[AB]$, donc son centre est le point:

$\Omega\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$ et de rayon : $R=\frac{AB}{2}$

1 On a: $A(0;0;2)$ et $B(2;0;4)$, donc: $\Omega(1;0;3)$

et on a : $R=\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}}{2}$

$$=\frac{\sqrt{(2-0)^2+(0-0)^2+(4-2)^2}}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{8}}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

donc : $R=\sqrt{2}$

Donc une équation de la sphère (S) est :

$(x-1)^2+(y-0)^2+(z-3)^2=(\sqrt{2})^2$

C'est-à-dire : $x^2-2x+1+y^2+z^2-6z+9-2=0$

Donc : $x^2+y^2+z^2-2x-6z+8=0$ est une équation cartésienne de la sphère (S).

ProfSalmi.blogspot.com

Méthode 2:

Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace. On a : $M(x;y;z)\in(S)\iff \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$

On a: $M(x;y;z)\in(S)\iff \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x-2 \\ y \\ z-4 \end{pmatrix}=0$$

$$\iff x(x-2)+y^2+(z-2)(z-4)=0$$

$$\iff x^2+y^2+z^2-2x-6z+8=0$$

Donc : $x^2+y^2+z^2-2x-6z+8=0$ est une équation cartésienne de la sphère (S).

2 On a : $A(-1;-2;2)$ et $B(1;4;2)$

Méthode 1: On a le centre de la sphère (S) est : $\Omega\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$ c'est-à-dire : $\Omega(0;1;2)$, le rayon de la sphère (S) est :

$$R=\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{(1+1)^2+(4+2)^2+(2-2)^2}}{2}=\frac{\sqrt{40}}{2}=\frac{2\sqrt{10}}{2}=\sqrt{10}$$

donc une équation cartésienne de la sphère (S) est :

$(x-0)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=(\sqrt{10})^2$

c'est-à-dire : $x^2+y^2-2y+1+z^2-4z+4-10=0$

donc : $x^2+y^2+z^2-2y-4z-5=0$ est une équation cartésienne de la sphère (S).

Méthode 2: Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace :

On a : $M(x;y;z)\in(S)\iff \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$

$$\iff \begin{pmatrix} x+1 \\ y+2 \\ z-2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x-1 \\ y-4 \\ z-2 \end{pmatrix}=0$$

$$\iff (x+1)(x-1)+(y+2)(y-4)+(z-2)^2=0$$

$$\iff x^2-1+y^2-2y-8+z^2-4z+4=0$$

$$\iff x^2+y^2+z^2-2y-4z-5=0$$

Donc : $x^2+y^2+z^2-2y-4z-5=0$ une équation cartésienne de la sphère (S).

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 17

Déterminons une équation cartésienne de la sphère (S) de centre Ω et qui est tangente au plan (P) dans chacun des cas suivants :

Méthode : Le plan (P) est tangent à la sphère (S), signifie que le rayon R de la sphère (S) est égal à la distance de Ω centre de (S) au plan (P), c'est-à-dire : $R = d(\Omega;(P))$

1 On a : $\Omega(0;1;2)$ et $(P): x+2y-2z+5=0$ le plan tangent à la sphère (S), donc le rayon de la sphère (S) est :

$$R = d(\Omega;(P)) = \frac{|x_\Omega + 2y_\Omega - 2z_\Omega + 5|}{\sqrt{(1)^2+(2)^2+(-2)^2}} = \frac{|2-4+5|}{\sqrt{9}} = \frac{3}{3} = 1$$

donc une équation de la sphère (S) est : $(x-0)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=(1)^2$

c'est-à-dire : $x^2+y^2-2y+1+z^2-4z+4-1=0$

d'où : $x^2+y^2+z^2-2y-4z+4=0$ est une équation cartésienne de la sphère (S).

2 On a : $\Omega(1;2;0)$ et $(P): x+y-\sqrt{2}z+6=0$ le plan tangent à la sphère (S), donc le rayon de la sphère (S) est :

$$R = d(\Omega;(P)) = \frac{|x_\Omega + y_\Omega - \sqrt{2}z_\Omega + 6|}{\sqrt{(1)^2+(1)^2+(-\sqrt{2})^2}} = \frac{|1+2+6|}{\sqrt{4}} = \frac{9}{2}$$

donc une équation cartésienne de la sphère (S) est :

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-0)^2=\left(\frac{9}{2}\right)^2$$

c'est-à-dire : $x^2-2x+1+y^2-4y+4+z^2-\frac{81}{4}=0$

d'où : $x^2+y^2+z^2-2x-4y-\frac{61}{4}=0$ est une équation cartésienne de la sphère (S).

3 On a : $\Omega(2;-1;0)$ et $(P): 2x-y-3z+9=0$ le plan tangent à la sphère (S), donc le rayon de la sphère (S) est :

$$R = d(\Omega;(P)) = \frac{|2x_\Omega - y_\Omega - 3z_\Omega + 9|}{\sqrt{(2)^2+(-1)^2+(-3)^2}} = \frac{|4+1+9|}{\sqrt{14}} = \frac{14}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}$$

ProfSalmi.blogspot.com

donc une équation cartésienne de la sphère (S) est :

$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-0)^2=(\sqrt{14})^2$

c'est-à-dire : $x^2-4x+4+y^2+2y+1+z^2-14=0$

D'où : $x^2+y^2+z^2-4x+2y-9=0$ est une équation cartésienne de la sphère (S).

Exercice 18

Montrons que l'ensemble (E) des points $M(x;y;z)$ de l'espace qui vérifient chacune des équations suivantes est une sphère dont on déterminera le centre Ω et le rayon R .

1 Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace :

On a : $M(x;y;z)\in(E)\iff x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-1=0$

$\iff (x^2-2x)+(y^2+4y)+(z^2-6z)-1=0$

$\iff (x-1)^2-1+(y+2)^2-4+(z-3)^2-9-1=0$

$\iff (x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=15=(\sqrt{15})^2$

donc l'ensemble (E) est la sphère de centre $\Omega(1;-2;3)$, et de rayon $R=\sqrt{15}$.

2 Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace :

On a :

$M(x;y;z)\in(E)\iff x^2+y^2+z^2-x+8y-3z+4=0$

$\iff (x^2-x)+(y^2+8y)+(z^2-3z)+4=0$

$\iff \left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+(y+4)^2-16+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+4=0$

$\iff \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y+4)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{29}{2}=\left(\sqrt{\frac{29}{2}}\right)^2$

donc l'ensemble (E) est la sphère de centre $\Omega\left(\frac{1}{2};-4;\frac{3}{2}\right)$, et de rayon $R=\sqrt{\frac{29}{2}}$.

3 Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace :

On a : $M(x;y;z)\in(E)\iff x^2+y^2+z^2-2y=0$

$\iff x^2+(y-1)^2-1+z^2=0$

$\iff (x-0)^2+(y-1)^2+(z-0)^2=1=(1)^2$

donc l'ensemble (E) est la sphère de centre $\Omega(0;1;0)$, et de rayon $R=1$.

4 Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace :

ProfSalmi.blogspot.com

On a:

$$M(x;y;z)\in(E)\iff x^2+y^2+z^2-7x+5z+\frac{5}{2}=0$$

$$\iff (x^2-7x)+y^2+(z^2+5z)+\frac{5}{2}=0$$

$$\iff \left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{49}{4}+(y-0)^2+\left(z+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}+\frac{5}{2}=0$$

$$\iff \left(x-\frac{7}{2}\right)^2+(y-0)^2+\left(z+\frac{5}{2}\right)^2=16=(4)^2$$

donc, l'ensemble (E) est la sphère de centre $\Omega\left(\frac{7}{2};0;-\frac{5}{2}\right)$, et de rayon $R=4$.

Exercice 19

Montrons que le plan (P) est tangent à la sphère (S), puis déterminons les coordonnées du point H, l'intersection du plan (P) et la sphère (S).

Méthode :

- Pour montrer que le plan (P) est tangent à la sphère (S) de centre Ω et de rayon R, on calcule la distance $d(\Omega;(P))$. on doit trouver : $d(\Omega;(P))=R$.
- Pour déterminer les coordonnées du point H l'intersection de (P) et (S), on suit les étapes suivantes :

▸Déterminons une représentation paramétrique de la droite (Δ) qui passe par le point Ω, et orthogonale au plan (P). (exercice 10)

▸L'intersection de (P) et (Δ) est le point H, dans ce cas. on détermine les coordonnées du point H, où H est le projeté orthogonal du point Ω sur le plan (P). (exercice 11)

1 on a : $(S):x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z+5=0$ et $(P):x+y-z+\sqrt{3}=0$

▸**Déterminons tout d'abord le centre Ω et le rayon R de la sphère (S).**

On a : $x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z+5=0$

donc : $(x^2-2x)+(y^2+4y)+(z^2+2z)+5=0$

d'où : $(x-1)^2-1+(y+2)^2-4+(z+1)^2-1+5=0$

par suite : $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=1=(1)^2$

finalement (S) est la sphère de centre $\Omega(1;-2;-1)$, et de rayon $R=1$.

▸**Montrons que le plan (P) est tangent à la sphère (S):**

ProfSalmi.blogspot.com

On a : $d(\Omega;(P)) = \dfrac{|x_\Omega + y_\Omega - z_\Omega + \sqrt{3}|}{\sqrt{(1)^2+(1)^2+(-1)^2}}$

$= \dfrac{|1-2+1+\sqrt{3}|}{\sqrt{3}} = 1 = R$

donc : $d(\Omega;(P)) = R$; d'où le plan (P) est tangent à la sphère (S).

Déterminons les coordonnées du point H le point l'intersection de (P) et (S).

- On considère la droite (Δ) passant par le point Ω et orthogonale au plan (P), donc un vecteur directeur (Δ) est un vecteur normal au plan (P) par exemple $\vec{n}(1;1;-1)$, d'où une représentation paramétrique de la droite (Δ)

est : $\begin{cases} x = 1+t \\ y = -2+t \\ z = -1-t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$

- Le point H étant le projeté orthogonal du point Ω sur le plan (P).

c'est-à-dire H est le point d'intersection de (P) et (Δ).

Soit $(x_H;y_H;z_H)$ le triplet de coordonnées du point H.

On a :

$$\begin{cases} x_H + y_H - z_H + \sqrt{3} = 0 \\ x_H = 1+t \\ y_H = -2+t \\ z_H = -1-t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+t-2+t+1+t+\sqrt{3} = 0 \\ x_H = 1+t \\ y_H = -2+t \\ z_H = -1-t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ x_H = 1-\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{3-\sqrt{3}}{3} \\ y_H = -2-\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{-6-\sqrt{3}}{3} \\ z_H = -1+\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{-3+\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

donc : $\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{3};\dfrac{-6-\sqrt{3}}{3};\dfrac{-3+\sqrt{3}}{3}\right)$ est le tripelt de coordonnées du point H.

2 On a : $(S): x^2+y^2+z^2-4y = 0$ et $(P): 2x+y-2z+4 = 0$

Déterminons le centre Ω et le rayon R de la sphère (S):

on a : $x^2+y^2+z^2-4y = 0$

donc : $(x-0)^2+(y-2)^2+(z-0)^2-4 = (2)^2$

ProfSalmi.blogspot.com

d'où : (S) est la sphère de centre $\Omega(0;2;0)$, et de rayon $R=2$.

▸ **Montrons que le plan (P) est tangent à la sphère (S):**

On a : $d(\Omega;(P)) = \dfrac{|2x_\Omega + y_\Omega - 2z_\Omega + 4|}{\sqrt{(2)^2+(1)^2+(-2)^2}}$

$= \dfrac{|2+4|}{\sqrt{9}} = \dfrac{6}{3} = 2 = R$

on a : $d(\Omega;(P)) = R$, donc le plan (P) est tangent à la sphère (S).

▸ **Déterminons les coordonnées du point H l'intersection de (P) et (S):**

- Soit (Δ) la droite passant par le point Ω et orthogonale au plan (P).

donc, un vecteur directeur de la droite (Δ) est un vecteur normal au plan (P) par exemple $\vec{n}(2;1;-2)$, d'où une représentation paramétrique de la droite

(Δ) est : $\begin{cases} x = 2t \\ y = 2+t \\ z = -2t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$

- On a le point H est le projeté orthogonal du point Ω sur le plan (P).

donc, le point H est l'intersection de (P) et (Δ).

Soit $(x_H;y_H;z_H)$ le triplet de coordonnées du point H.

On a : $\begin{cases} 2x_H + y_H - 2z_H + 4 = 0 \\ x_H = 2t \\ y_H = 2+t \\ z_H = -2t \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 4t+2+t+4t+4 = 0 \\ x_H = 2t \\ y_H = 2+t \\ z_H = -2t \end{cases}$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} t = -\dfrac{2}{3} \\ x_H = -\dfrac{4}{3} \\ y_H = \dfrac{4}{3} \\ z_H = \dfrac{4}{3} \end{cases}$

donc : $\left(-\dfrac{4}{3};\dfrac{4}{3};\dfrac{4}{3}\right)$ est le triplet de coordonnées du point H.

3 On a : $(S): x^2+y^2+z^2+2x+2y-7=0$ et $(P): 4x+3y-8=0$

▸ **Déterminons le centre Ω et le rayon R de la sphère (S):**

on a : $x^2+y^2+z^2+2x+2y-7=0$

c'est-à-dire : $(x+1)^2-1+(y+1)^2-1+(z-0)^2-7=0$

donc : $(x+1)^2+(y+1)^2+(z-0)^2=9=(3)^2$

d'où : (S) est la sphère de centre $\Omega(-1;-1;0)$, et de rayon $R=3$.

ProfSalmi.blogspot.com

▸ **Montrons que le plan (P) est tangent à la sphère (S).**

On a : $d(\Omega;(P)) = \dfrac{|4x_\Omega + 3y_\Omega - 8|}{\sqrt{(4)^2+(3)^2}} = \dfrac{|-4-3-8|}{5} = \dfrac{15}{5} = 3 = R$

on a : $d(\Omega;(P)) = R$ donc le plan (P) est tangent à la sphère (S).

▸ **Déterminons les coordonnées du point H l'intersection de (P) et (S):**

- Soit (Δ) la droite passant par le point Ω et orthogonale au plan (P), donc, un vecteur directeur de la droite (Δ) est un vecteur normal au plan (P), par exemple $\vec{n}(4;3;0)$, d'où une représentation paramétrique de la droite (Δ) est : $\begin{cases} x = -1+4t \\ y = -1+3t \\ z = 0 \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$

- On a le point H est le projeté orthogonal du point Ω sur le plan (P).

donc, le point H est l'intersection de (P) et (Δ).

Soit $(x_H;y_H;z_H)$ le triplet de coordonnées du point H.

On a : $\begin{cases} 4x_H + 3y_H - 8 = 0 \\ x_H = -1+4t \\ y_H = -1+3t \\ z_H = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4+16t-3+9t-8=0 \\ x_H = -1+4t \\ y_H = -1+3t \\ z_H = 0 \end{cases}$

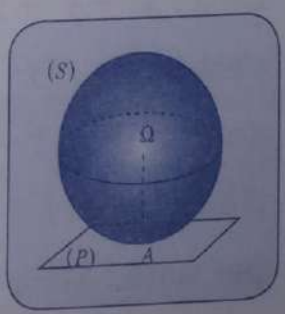
$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{3}{5} \\ x_H = -1+\dfrac{12}{5} = \dfrac{7}{5} \\ y_H = -1+\dfrac{9}{5} = \dfrac{4}{5} \\ z_H = 0 \end{cases}$

donc : $\left(\dfrac{7}{5};\dfrac{4}{5};0\right)$ est le triplet de coordonnées du point H.

Exercice 20

Vérifions que le point A appartient à la sphère (S), puis déterminons une équation cartésienne du plan (P) tangent à la sphère (S) au point A.

1 On a : (S) est la sphère de centre $\Omega(1;0;1)$, et de rayon $R = 2$, et $A(3;0;1)$.



donc : $\Omega A = \sqrt{(x_A - x_\Omega)^2 + (y_A - y_\Omega)^2 + (z_A - z_\Omega)^2}$

$= \sqrt{(3-1)^2+(0)^2+(1-1)^2} = \sqrt{4} = 2 = R$

donc : $A \in (S)$

ProfSalmi.blogspot.com

Déterminons une équation cartésienne du plan (P):

on a : (S) est la sphère de centre $\Omega(1;0;1)$, et qui passe par le point $A(3;0;1)$.

Puisque : (P) est tangent à la sphère (S) au point A, alors $\overrightarrow{\Omega A}(2;0;0)$ est un vecteur normal au plan (P) .

d'où une équation cartésienne du plan (P) s'écrit sous la forme: $2x+d=0$ où $d\in\mathbb{R}$

On a : $A(3;0;1)\in(P)\iff 6+d=0$

$\iff d=-6$

donc : $(P):2x-6=0$

par suite : $(P):x-3=0$ est une équation cartésienne du plan (P).

2 On a : $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=6$ et $A(3;-1;1)$

on a : (S) est la sphère de centre $\Omega(1;-2;2)$ et de rayon $R=\sqrt{6}$.

et on a : $\Omega A=\sqrt{(x_A-x_\Omega)^2+(y_A-y_\Omega)^2+(z_A-z_\Omega)^2}$

$=\sqrt{(3-1)^2+(-1+2)^2+(1-2)^2}=\sqrt{6}=R$

donc : $A\in(S)$

Déterminosn une équation cartésienne du plan (P):

on a : (S) est la sphère de centre $\Omega(1;-2;2)$, et qui passe par le point $A(3;-1;1)$ et puisque (P) est le plan tangent à la sphère en A.

alors : $\overrightarrow{\Omega A}(2;1;-1)$ est un vecteur normal au plan (P).

d'où une équation cartésienne du plan (P) s'écrit sous la forme: $2x+y-z+d=0$ où $d\in\mathbb{R}$

On a : $A(3;-1;1)\in(P)\iff 6-1-1+d=0$

$\iff d=-4$

donc : $2x+y-z-4=0$ est une équation cartésienne du plan (P) .

3 On a : $(S):x^2+y^2+z^2-2x+4y-4=0$ et $A(3;-4;1)$

Déterminons le centre de la sphère (S).

On a : $x^2+y^2+z^2-2x+4y-4=0$

c'est-à-dire : $(x^2-2x)+(y^2+4y)+z^2-4=0$

donc : $(x-1)^2-1+(y+2)^2-4+(z-0)^2-4=0$

d'où : $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-0)^2=9=(3)^2$

par suite : $\Omega(1;-2;0)$ est le centre de la sphère (S) et $R=3$ son rayon.

ProfSalmi.blogspot.com

▸ On a : $\Omega A = \sqrt{(x_A - x_\Omega)^2 + (y_A - y_\Omega)^2 + (z_A - z_\Omega)^2}$

$= \sqrt{(3-1)^2 + (-4+2)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{9} = 3 = R$

donc : $A \in (S)$

▸ **Déterminons une équation cartésienne du plan (P):**

On a : (S) est la sphère de centre $\Omega(1;-2;0)$, et qui passe par le point $A(3;-4;1)$ et (P) est le plan tangent à la sphère en A.

donc : $\overrightarrow{\Omega A}(2;-2;1)$ est un vecteur normal au plan (P), d'où une équation cartésienne du plan (P) s'écrit sous la forme: $2x - 2y + z + d = 0$ où $d \in \mathbb{R}$

On a : $A(3;-4;1) \in (P) \iff 6 + 8 + 1 + d = 0$

$\iff d = -15$

donc : $(P): 2x - 2y + z - 15 = 0$ est une équation cartésienne du plan (P).

Exercice 21

Étudions la position relative de la sphère (S) et le plan (P).

pour cela, calculons tout d'abord $d(\Omega;(P))$, où Ω est le centre de la sphère puis comparons cette distance avec le rayon R de la sphère (S):

1 On a : $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y = 0$ et $(P): x + y - \sqrt{2}z - 1 = 0$

▸ **Déterminons le centre et le rayon de la sphère (S).**

On a : $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y = 0$

donc : $(x^2 - 8x) + (y^2 - 6y) + z^2 = 0$

d'où : $(x-4)^2 - 16 + (y-3)^2 - 9 + (z-0)^2 = 0$

par suite : $(x-4)^2 + (y-3)^2 + (z-0)^2 = 25 = (5)^2$

finalement le centre de la sphère (S) est $\Omega(4;3;0)$, le rayon est $R = 5$.

Calculons $d = d(\Omega;(P))$:

on a : $d(\Omega;(P)) = \dfrac{|x_\Omega + y_\Omega - \sqrt{2}z_\Omega - 1|}{\sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (-\sqrt{2})^2}} = \dfrac{|4+3-1|}{\sqrt{4}} = \dfrac{6}{2} = 3$

donc : $d = 3$

d'où : $d(\Omega;(P)) < R$, c'est-à-dire que le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle de centre H le projeté orthogonal de Ω sur le plan (P) et de rayon:

$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$

2 On a : $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y + 4 = 0$ et $(P): 2x + 2y - z - 10 = 0$

ProfSalmi.blogspot.com

▸ **Déterminons le centre et le rayon de la sphère (S):**

on a : $x^2+y^2+z^2-6x-4y+4=0$

c'est-à-dire : $(x^2-6x)+(y^2-4y)+z^2+4=0$

donc : $(x-3)^2-9+(y-2)^2-4+(z-0)^2+4=0$

d'où : $(x-3)^2+(y-2)^2+(z-0)^2=9=(3)^2$

par suite : $(3;2;0)$ est le triplet de coordonnées du point Ω centre de la sphère (S) et $R=3$ est le rayon de la sphère.

▸ **Calculons $d(\Omega;(P))$:**

on a : $d(\Omega;(P))=\dfrac{|2x_\Omega+2y_\Omega-z_\Omega-10|}{\sqrt{(2)^2+(2)^2+(-1)^2}}=\dfrac{|6+4-10|}{\sqrt{9}}=0$

on a : $d(\Omega;(P))<R$ et $d(\Omega;(P))=0$ c'est-à-dire : $\Omega\in(P)$

Le plan (P) coupe la sphère suivant le cercle de centre Ω, et de rayon R le rayon de la sphère (S). Ce cercle est appelé le grand cercle.

3 On a : $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=4$ et $(P):2x+y-2z+4=0$

d'après l'équation cartésienne de la sphère (S) on déduit que $(1;1;-1)$ est triplet de coordonnées du centre Ω la sphère (S) est $R=2$ son rayon.

▸ **Calculons $d(\Omega;(P))$:**

On a : $d(\Omega;(P))=\dfrac{|2x_\Omega+y_\Omega-2z_\Omega+4|}{\sqrt{(2)^2+(1)^2+(-2)^2}}=\dfrac{|2+1+2+4|}{\sqrt{9}}=3$

donc : $d(\Omega;(P))>R$, signifie que le plan ne coupe pas la sphère (S) c'est-à-dire: $(S)\cap(P)=\phi$

4 On a : $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=4$ et $(P):2x+y-2z+1=0$

d'après l'équation cartésienne de la sphère (S), on déduit que $(1;1;-1)$ est le triplet de coordonnées du point Ω centre de la sphère (S) et $R=2$ son rayon.

▸ **Calculons $d(\Omega;(P))$:**

On a : $d(\Omega;(P))=\dfrac{|2x_\Omega+y_\Omega-2z_\Omega+1|}{\sqrt{(2)^2+(1)^2+(-2)^2}}=\dfrac{|2+1+2+1|}{\sqrt{9}}=\dfrac{6}{3}=2$

donc : $d(\Omega;(P))=R$, ce qui signifie que le plan (P) est tangent à la sphère (S) en H où H est le projeté orthogonal du point Ω sur le plan (P).

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 22

Déterminons l'intersection de la sphère (S) et la droite (Δ) dans chacun des cas suivants:

1 On a : $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=6$ et $(\Delta):\begin{cases}x=2+3t\\y=4+t\\z=-2+5t\end{cases}$; $(t\in\mathbb{R})$

Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace.

On a : $M(x;y;z)\in(S)\cap(\Delta)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=6\\x=2+3t\\y=4+t\\z=-2+5t\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(1+3t)^2+(2+t)^2+(-1+5t)^2-6=0\\x=2+3t\\y=4+t\\z=-2+5t\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}35t^2=0\\x=2+3t\\y=4+t\\z=-2+5t\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}t=0\\x=2\\y=4\\z=-2\end{cases}$$

donc, la droite (Δ) coupe la sphère (S) au point $A(2;4;-2)$.

2 On a : $(S):x^2+y^2+z^2-2x+2y-1=0$ et $(\Delta):\begin{cases}x=-1+t\\y=1+2t\\z=2\end{cases}$; $(t\in\mathbb{R})$

Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace.

$M(x;y;z)\in(S)\cap(\Delta)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2+y^2+z^2-2x+2y-1=0\\x=-1+t\\y=1+2t\\z=2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(-1+t)^2+(1+2t)^2+4-2(-1+t)+2(1+2t)-1=0\\x=-1+t\\y=1+2t\\z=2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}5t^2+4t+9=0\\x=-1+t\\y=1+2t\\z=2\end{cases}$$

ProfSalmi.blogspot.com

le discriminant de l'équation $(1): 5t^2+4t+9=0$ est : $\Delta = -164$

donc, l'équation (1) n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$, d'où la droite (Δ) ne coupe pas la sphère (S), donc : $(S)\cap(\Delta)=\phi$

3 On a:

$(S): x^2+y^2+z^2+4x+2y+7z-2=0$ et $(\Delta): \begin{cases} x=1+t \\ y=3+t \\ z=-3-2t \end{cases} ; (t\in\mathbb{R})$

Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace.

$$M(x;y;z)\in(S)\cap(\Delta) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2+4x+2y+7z-2=0 \\ x=1+t \\ y=3+t \\ z=-3-2t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1+t)^2+(3+t)^2+(3+2t)^2+4(1+t)+2(3+t)+7(-3-2t)-2=0 \\ x=1+t \\ y=3+t \\ z=-3-2t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t^2+2t+1=0 \\ x=1+t \\ y=3+t \\ z=-3-2t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=-1 \\ x=0 \\ y=2 \\ z=-1 \end{cases}$$

donc, la droite (Δ) coupe la sphère (S) au point unique $A(0;2;-1)$, on dit dans ce cas que la droite (Δ) est tangente à la sphère (S) au point A.

4 Produit vectoriel

Propriété 1 :

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et k un nombre réel, on a :

- $\vec{v}\wedge\vec{u}=-(\vec{u}\wedge\vec{v})$; $\vec{u}\wedge(k\vec{v})=k(\vec{u}\wedge\vec{v})$; $(k\vec{u})\wedge\vec{v}=k(\vec{u}\wedge\vec{v})$
- $\vec{u}\wedge(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\wedge\vec{v}+\vec{u}\wedge\vec{w}$; $(\vec{u}+\vec{v})\wedge\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{w}+\vec{v}\wedge\vec{w}$

Propriété 2 :

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si : $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$.

ProfSalmi.blogspot.com

1. Les coordonnées du produit vectoriel de deux vecteurs dans un repère orthonormé direct

Propriété 1 :

L'espace est muni d'une base orthonormée directe $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

Soit $(x;y;z)$ et $(x';y';z')$ deux vecteurs de l'espace $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a : $(X;Y;Z)$ est triplet de coordonnées du vecteur $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est tel que :

$$X=\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \text{ et } Y=-\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \text{ et } Z=\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$$

Propriété 2 :

Si A, B et C sont trois points non alignés, alors le vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Propriété 3 :

L'aire d'un triangle - l'aire d'un parallélogramme.

- Soit ABC un triangle, l'aire du triangle ABC est : $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|$
- Soit $ABCD$ un parallélogramme, l'aire de $ABCD$ est: $\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|$

2. Distance d'un point à une droite

Propriété :

La distance d'un point M à la droite (D) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est : $d(M;D(A;\vec{u}))=\dfrac{\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$

Application:

Méthode géométrique :

Soit $S=S(\Omega;R)$ une sphère de centre Ω et de rayon R et (Δ) la droite qui passe par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

On a : $d=d(\Omega;(\Delta))=\dfrac{\|\overrightarrow{A\Omega}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$

$d>R$	$(\Delta)\cap(S)=\phi$
$d=R$	(Δ) est tangente à (S)
$d<R$	(Δ) coupe (S) en deux points distincts

ProfSalmi.blogspot.com

3. Position relative de deux plans

Soit (P): $ax+by+cz+d=0$ et (P'): $a'x+b'y+c'z+d'=0$

On a : $\vec{n}(a;b;c)$ est un vecteur normal à (P)

et $\vec{n'}(a';b';c')$ est un vecteur normal à (P')

- $(P)\perp(P') \Leftrightarrow \vec{n}.\vec{n'}=0 \Leftrightarrow aa'+bb'+cc'=0$
- $(\vec{n}\wedge\vec{n'}=\vec{0}) \Leftrightarrow (P)\,//\,(P')$ ((P) $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont colinéaires
- $(\vec{n}\wedge\vec{n'}\neq\vec{0}) \Leftrightarrow (P)$ et (P') se coupent en une droite (Δ) $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ ne sont pas colinéaires .

4. Position relative d'une droite et d'un plan

Soit (Δ): $\begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \\ z = z_A + t\gamma \end{cases}$; $(t\in\mathbb{R})$ une droite de l'espace.

et (P) le plan défini par : $ax+by+cz+d=0$

On a : $\vec{u}(\alpha;\beta;\gamma)$ est un vecteur directeur de (Δ) et $\vec{n}(a;b;c)$ est un vecteur normal à (P).

$(\Delta)\,//\,(P) \Leftrightarrow \vec{x}.\vec{u}=0$

$(\Delta)\perp(P) \Leftrightarrow$ $\vec{x}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires

$(\Delta)\cap(P)=\{I\} \Leftrightarrow \vec{x}.\vec{u}\neq 0$

Pour déterminer I le point d'intersection de (D) et (P), on résout le système (S): $\begin{cases}(1)\\(2)\end{cases}$ tels que

$$(D)\begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta\ (t\in\mathbb{R}) \\ z = z_A + t\gamma \end{cases} \quad (1)$$

$$(P): ax+by+cz+d=0 \quad (2)$$

on obtient :

$a(x_A+t\alpha)+b(y_A+t\beta)+c(z_A+t\gamma)+d=0$ dont t_0 est la solution de cette derniére équation.

Puis, on rempalce t par t_0 dans (1); on obtient les coordonnées du point I :

$$\begin{cases} x_I = x_A + t_0\alpha \\ y_I = y_A + t_0\beta \\ z_I = z_A + t_0\gamma \end{cases}$$

ProfSalmi.blogspot.com

Exercices

Exercice 23

Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ dans chaque cas :

1. $\vec{u}(1;2;-3)$ et $\vec{v}(0;3;4)$
2. $\vec{u}(4;-2;1)$ et $\vec{v}(2;3;-3)$
3. $\vec{u}(1;1;-1)$ et $\vec{v}(3;1;0)$

Exercice 24

Déterminer dans chaque cas $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ puis déduire l'aire du triangle ABC et une équation cartésienne du plan (ABC).

1. $A(1;0;2)$; $B(-1;1;3)$ et $C(0;2;-1)$
2. $A(2;0;-1)$; $B(2;4;2)$ et $C(3;3;3)$
3. $A(1;2;0)$; $B(2;1;0)$ et $C\left(0;0;\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

Exercice 25

Calculer la distance entre le point $\Omega(1;2;-1)$ et la droite (D) dans chaque cas :

1. (D) passe par le point $A(1;0;2)$, et de vecteur directeur $\vec{u}(0;-3;4)$.
2. (D) passe par les deux points $A(3;-1;1)$ et $B(2;1;3)$.
3. (D) est déterminé par une représentation paramétrique :

$$(D):\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2t \\ z = -3-2t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$$

4. (D) est définie par deux équations cartésiennes : $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = z$

Solutions

Exercice 23

Déterminons le triplet de coordonnées du vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ dans chaque cas :

1. On a : $\vec{u}(1;2;-3)$ et $\vec{v}(0;3;4)$

donc : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \wedge \vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\vec{k}$

$= 17\vec{i} - 4\vec{j} + 3\vec{k}$

ProfSalmi.blogspot.com

D'où : $\vec{u} \wedge \vec{v}(17;-4;3)$

2 On a : $\vec{u}(4;-2;1)$ et $\vec{v}(2;3;-3)$

donc : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}\vec{k}$

$= 3\vec{i} + 14\vec{j} + 16\vec{k}$

D'où : $\vec{u} \wedge \vec{v}(3;14;16)$

3 On a : $\vec{u}(1;1;-1)$ et $\vec{v}(3;1;0)$

donc : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{k}$

$= \vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}$

D'où : $\vec{u} \wedge \vec{v}(1;-3;-2)$

Exercice 24

Déterminons $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et l'aire du triangle ABC, puis une équation cartésienne du plan (ABC) :

1 On a : $A(1;0;2)$; $B(-1;1;3)$ et $C(0;2;-1)$

▸ **Déterminons $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$; on a :** $\overrightarrow{AB}(-2;1;1)$ et $\overrightarrow{AC}(-1;2;-3)$

donc : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\vec{k}$

d'où : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = -5\vec{i} - 7\vec{j} - 3\vec{k}$

▸ **Calculons l'aire du triangle ABC.**

On a : $S_{ABC} = \dfrac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}{2} = \dfrac{\sqrt{(-5)^2 + (-7)^2 + (-3)^2}}{2}$

donc : $S_{ABC} = \dfrac{\sqrt{83}}{2}$

▸ **Déterminons une équation cartésienne du plan (ABC) :**

on a : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(-5;-7;-3)$ est un vecteur non nul, normal au plan (ABC), donc une équation de (ABC) est sous la forme: $-5x - 7y - 3z + d = 0$, avec $d \in \mathbb{R}$

on a : $A(1;0;2) \in (ABC) \iff -5x_A - 7y_A - 3z_A + d = 0$

$\iff -5 - 6 + d = 0$

$\iff d = 11$

donc : $5x + 7y + 3z - 11 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

ProfSalmi.blogspot.com

2 On a : $A(2;0;-1)$; $B(2;4;2)$ et $C(3;3;3)$

on a : $\overrightarrow{AB}(0;4;3)$ et $\overrightarrow{AC}(1;3;4)$

Déterminons $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$:

on a : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}4&3\\3&4\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}0&1\\3&4\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}0&1\\4&3\end{vmatrix}\vec{k}$

donc : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=7\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k}$

Déterminons l'aire du triangle ABC :

on a : $S_{ABC}=\dfrac{\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|}{2}=\dfrac{\sqrt{(7)^2+(3)^2+(-4)^2}}{2}$

d'où : $S_{ABC}=\dfrac{\sqrt{74}}{2}$

Déterminons une équation cartésienne du plan (ABC) :

On a : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(7;3;-4)$ est un vecteur non nul, normal au plan (ABC), donc, une équation de (ABC) est sous la forme: $7x+3y-4z+d=0$, avec $d\in\mathbb{R}$

on a : $A(2;0;-1)\in(ABC)\iff 7x_A+3y_A-4z_A+d=0$

$\iff 14+4+d=0$

$\iff d=-18$

donc : $7x+3y-4z-18=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

3 On a : $A(1;2;0)$, $B(2;1;0)$ et $C\left(0;0;\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

on a : $\overrightarrow{AB}(1;-1;0)$ et $\overrightarrow{AC}\left(-1;-2;\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

Déterminons $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$:

on a : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}-1&-2\\0&\frac{3\sqrt{2}}{2}\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1&-1\\0&\frac{3\sqrt{2}}{2}\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1&-1\\-1&-2\end{vmatrix}\vec{k}$

donc : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\vec{i}-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\vec{j}-3\vec{k}$

Calculons l'aire du triangle ABC :

on a : $S_{ABC}=\dfrac{\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|}{2}=\dfrac{\sqrt{\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2+(-3)^2}}{2}$

on a : $S_{ABC}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

Déterminons une équation cartésienne du plan (ABC) :

ProfSalmi.blogspot.com

on a : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}; -\frac{3\sqrt{2}}{2}; -3\right)$ est un vecteur non nul, normal au plan (ABC)

donc, une équation de (ABC) est sous la forme :

$-\frac{3\sqrt{2}}{2}x - \frac{3\sqrt{2}}{2}y - 3z + d = 0$, avec $d \in \mathbb{R}$

on a : $C\left(0;0;\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) \in (ABC) \iff -\frac{3\sqrt{2}}{2}x_C - \frac{3\sqrt{2}}{2}y_C - 3z_C + d = 0$

$\iff -\frac{9\sqrt{2}}{2} + d = 0$

$\iff d = \frac{9\sqrt{2}}{2}$

donc : $(ABC): -\frac{3\sqrt{2}}{2}x - \frac{3\sqrt{2}}{2}y - 3z + \frac{9\sqrt{2}}{2} = 0$

d'où : $x + y + \sqrt{2}z - 3 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

Exercice 25

Calculons $d(\Omega;(D))$ dans chaque cas :

1 On a : (D) passe par le point $A(1;0;2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(0;-3;4)$

et on a $\Omega(1;2;-1)$ donc : $d(\Omega;(D)) = \frac{\|\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$

▸ **Déterminons le vecteur $\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u}$:**

On a : $\overrightarrow{\Omega A}(0;-2;3)$ et $\vec{u}(0,-3;4)$

donc : $\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}\vec{k} = \vec{i}$

d'où : $d(\Omega;(D)) = \frac{\sqrt{(1)^2}}{\sqrt{(-3)^2 + (4)^2}} = \frac{1}{5}$

2 On a : (D) passe par les deux points $A(3;-1;1)$ et $B(2;1;3)$

c'est-à-dire : (D) passe par $A(3;-1;1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}(-1;2;2)$

on a : $d(\Omega;(D)) = \frac{\|\overrightarrow{\Omega A} \wedge \overrightarrow{AB}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}$

▸ **Déterminons le vecteur $\overrightarrow{\Omega A} \wedge \overrightarrow{AB}$, avec : $\Omega(1;2;-1)$:**

on a : $\overrightarrow{\Omega A}(2;-3;2)$

donc : $\overrightarrow{\Omega A} \wedge \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}\vec{k} = -10\vec{i} - 6\vec{j} + \vec{k}$

ProfSalmi.blogspot.com

d'où : $d(\Omega;(D)) = \dfrac{\sqrt{(-10)^2+(-6)^2+(1)^2}}{\sqrt{(-1)^2+(2)^2+(2)^2}} = \dfrac{\sqrt{137}}{3}$

3 On a : (D) est définie par la représentation paramétrique suivante :

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2t \\ z = -3-2t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$$

c'est-à-dire (D) passe par $A(1;0;-3)$, et de vecteur directeur $\vec{u}(1;2;-2)$

on a : $\Omega(1;2;-1)$, donc : $d(\Omega;(D)) = \dfrac{\|\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$

Déterminons le vecteur : $\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u}$

On a : $\overrightarrow{\Omega A}(0;-2;-2)$ et $\vec{u}(1;2;-2)$

donc : $\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}\vec{k} = 8\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$

d'où : $d(\Omega;(D)) = \dfrac{\sqrt{(8)^2+(-2)^2+(2)^2}}{\sqrt{(1)^2+(2)^2+(-2)^2}} = 2\sqrt{2}$

4 On a: la droite (D) est définie par deux équations cartésiennes:

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = z$$

on a : $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z-0}{1}$; donc : (D) passe par $A(-1;1;0)$, et de vecteur directeur $\vec{u}(2;3;1)$.

or : $\Omega(1;2:-1)$, donc : $d(\Omega;(D)) = \dfrac{\|\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$

Déterminons le vecteur $\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u}$:

on a : $\overrightarrow{\Omega A}(-2;-1;1)$ et $\vec{u}(2;3;1)$

donc : $\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}\vec{k} = -4\vec{i} + 4\vec{j} - 4\vec{k}$

d'où : $d(\Omega;(D)) = \dfrac{\|\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \dfrac{\sqrt{(-4)^2+(4)^2+(-4)^2}}{\sqrt{(2)^2+(3)^2+(1)^2}} = \dfrac{2\sqrt{42}}{7}$

ProfSalmi.blogspot.com

Exercices

Exercice 26

On considère dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$; les points $A(1;-2;-1)$; $B(2;2;0)$ et $C(0;-1;1)$:

1. Déterminer les coordonées du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).
3. Déterminer la distance entre le point C et la droite (AB).
4. Déterminer une équation cartésienne de la sphère (S) de centre $\Omega(1;1;1)$, et tangente au plan (ABC).

Exercice 27

On considère dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ la sphère (S) définie par son équation cartésienne :

$(S): x^2+y^2+z^2-4x+2z+1=0$

Soit (P) le plan défini par son équation cartésienne : $(P): 4x+3y-3=0$

1. a. Déterminer le triplet de coordonnées du point Ω le centre de la sphère (S), et déterminer son rayon R ;

   b. Déterminer la distance entre le point Ω et le plan (P), puis déduire la position relative de la sphère (S) et le plan (P) ;

   c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) qui passe par le point Ω, et orthogonale au plan (P) ;

   d. En déduire le triplet de coordonnées du point H la projection orthogonale du point Ω sur le plan (P)

   e. Que représente le point H ?

2. a. Vérifier que le point $A(2;2;-1)$ est un point de la sphère (S)

   b. Déterminer une équation cartésienne du plan (Q) tangent à la sphère (S) au point A.

Exercice 28

On considère dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

ProfSalmi.blogspot.com

les points $A(1;2;3)$, $B(2;1;3)$ et $C(2;-2;0)$:

1 a. Déterminer le triplet de coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

2 On considère les deux points $D(2;0;2)$ et $E(-4;6;2)$.

a. Donner une représentation paramétrique de la droite (DE).

b. Montrer que la droite (DE) est incluse dans le plan (ABC).

3 On considère la sphère (S) de centre $\Omega(1;1;4)$ et de rayon $R=2$.

a. Donner une équation cartésienne de la sphère (S).

b. Montrer que la droite (DE) est tangente à la sphère (S), et déterminer le triplet de coordonnées du point H l'intersection de (S) et (DE).

c. Est-ce que le plan (ABC) est tangent à (S)?

Exercice 29

On considère dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, les points : $A(0;-2;0)$, $B(1;1;-4)$ et $C(0;1;-4)$ et la sphère (S) d'équation: $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11=0$:

1 Montrer que $\Omega(1;2;3)$ est le centre de la sphère (S). et que 5 est son rayon.

2 a. Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 4\vec{j}+3\vec{k}$, puis en déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

b. Montrer que (ABC) est tangent à la sphère (S).

3 a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω, et orthogonale au plan (ABC)

b. Déterminer le triplet de coordonnées du point H le point d'intersection de la sphère (S) et le plan (ABC).

Exercice 30

On considère dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ le point $A(2;2;-1)$, le plan (P) d'équation: $2x+y+2z-13=0$, et la sphère (S) de centre $\Omega(1;0;1)$ et de rayon 3.

1 Déterminer une équation cartésienne de la sphère (S), puis vérifier que A appartient à (S).

2 Montrer que le plan (P) est tangent à la sphère (S).

ProfSalmi.blogspot.com

3 Soit (D) la droite qui passe par A, et orthogonale au plan (P).

a. Montrer que $\vec{u}(2;1;2)$ est un vecteur directeur de (D), puis déterminer $\vec{u} \wedge \overrightarrow{\Omega A}$.

b. Montrer que (D) est tangente à (S) au point A.

Exercice 31

On considère dans l'espace la sphère (S) et le plan (P), tels que :
$(P): x - y - z - 1 = 0$ et $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y = 0$.

1 Déterminer les coordonnées du point Ω le centre de la sphère (S), et son rayon R.

2 Montrer que le plan (P) coupe de la sphère (S) suivant un cercle (C) dont on déterminera le rayon r et le centre ω.

3 Soit (Q) le plan tangent à la sphère (S) au point O (origine du repère).

a. Déterminer une équation cartésienne du plan (Q).

b. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) l'intersection des deux plans (P) et (Q).

4 a. Déterminer les coordonnées du point H le projeté orthogonal du point O sur la droite (Δ);

b. Montrer que H est aussi le projeté orthogonal du point ω sur la droite (Δ);

c. Montrer que les points ω, Ω, O et H sont coplanaires.

Exercice 32

On considère les points $A(1;1;1), B(0;1;2)$ et $C(-3;2;5)$ et le plan (P) d'équation cartésienne : $x + y - z + 2 = 0$

1 a. Montrer que les points A, B, C et O ne sont pas coplanaires.

b. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC);

c. Montrer que les deux plans (P) et (ABC) sont orthogonaux.

2 Soit (Δ) la droite passant par O et orthogonale au plan (P)

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ);

b. Déterminer l'intersection de la droite (Δ) et le plan (P).

3 Soit (S) la sphère d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 2 = 0$

ProfSalmi.blogspot.com

a. Déterminer le centre et le rayon de (S);

b. Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S);

c. Montrer que l'intersection du plan (P) et la sphère (S) est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

Exercice 33

On considère (S) l'ensemble des points $M(x;y;z)$ de l'espace tels que: $x^2+y^2+z^2-8x-6y=0$ et les points $A(2;-1;0)$, $B(-1;2;0)$ et $C(\sqrt{2};1;1)$.

1 Montrer que (S) est une sphère, dont on déterminera le centre et le rayon R.

2 Déterminer une équation cartésienne au plan (ABC).

3 Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω, et orthogonale au plan (ABC).

4 Montrer que le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ) dont on déterminera le centre et le rayon.

Exercice 34

On considère les points $A(0;1;1)$, $B(0;0;2)$ et $C(3;0;0)$.

1 Montrer que la droite (D) passant par le point C et de vecteur directeur $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ est orthogonale de la droite (AB).

2 a. Déterminer une équation cartésienne au plan (ABC);

b. Déterminer la distance entre le point B et la droite (AC).

3 Soit (S) la sphère définie par l'équation : $x^2+y^2+z^2-4z+2=0$

Déterminer le rayon et les coordonnées du centre de (S).

Exercice 35

On considère la sphère (S) définie par l'équation cartésienne:

$x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z-3=0$

et le plan (P) d'équation : $x+2y+2z+2=0$:

1 Déterminer Ω le centre et R le rayon de (S).

2 Montrer que le plan (P) est tangent à la sphère (S).

3 Déterminer une équation cartésienne du plan (Q) tangent à la sphère

ProfSalmi.blogspot.com

(S) au point $B(3;2;0)$.

4 Montrer que les deux plans (P) et (Q) sont orthogonaux.

5 Soit (D) la droite qui passe par le point $C(1;1;1)$ parallèle aux deux plans (P) et (Q):

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D);

b. Déterminer la distance entre Ω et la droite (D);

c. En déduire que la droite (D) coupe la sphère (S) en deux point distincts.

Exercice 36

On considère les points $A(-2;1;2)$, $B(2;3;0)$ et $C(-2;0;1)$.

Soit (P) l'ensemble des points M de l'espace tel que : $AM = BM$

1 Montrer que (P) est un plan d'équation : $2x + y - z - 1 = 0$.

2 Déterminer une équation cartésienne du plan (Q) passant par C et parallèle au plan (P).

3 a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par C et orthogonale au plan (P);

b. Calculer la distance entre le point A et la droite (D), et la distance entre le point A et le plan (P).

4 a. Déterminer une équation cartésienne de la sphère (S) de diamètre $[AB]$;

b. Déterminer l'intersection (P) et de la sphère (S).

Solutions

Exercice 26

1 Déterminons le triplet de coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$:

On a : $\overrightarrow{AB}(1;4;1)$ et $\overrightarrow{AC}(-1;1;2)$

donc : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}\vec{k}$

d'où : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 7\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$

2 Déterminons une équation cartésienne du plan (ABC):

On a : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(7;-3;5)$ est un vecteur non nul donc normal au plan (ABC) d'où une équation cartésienne du plan (ABC) est sous la forme : $7x - 3y + 5z + d = 0$

ProfSalmi.blogspot.com

on a : $B(2;2;0) \in (ABC) \iff 7\times 2 - 3\times 2 + 5\times 0 + d = 0$

$\iff d = -8$

donc : $7x - 3y + 5z - 8 = 0$ est une équation du plan (ABC).

3 Calculons $d(C;(AB))$:

On a : $d(C;(AB)) = \dfrac{\| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \|}{\| \overrightarrow{AB} \|}$, car la droite (AB) passe par le point A et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$, c'est-à-dire : $(AB) = D(A;\overrightarrow{AB})$

on a : $\| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \| = \sqrt{(7)^2 + (-3)^2 + (5)^2} = \sqrt{83}$

et $\| \overrightarrow{AB} \| = \sqrt{(1)^2 + (4)^2 + (1)^2} = \sqrt{18}$

donc : $d(C;(AB)) = \dfrac{\sqrt{83}}{\sqrt{18}} = \dfrac{\sqrt{166}}{6}$

4 Déterminons l'équation de la sphère (S) de centre $\Omega(1;1;1)$ et tangente au plan (ABC) :

on a la sphère (S) est tangente au plan (ABC), c'est-à-dire que son rayon R est défini par : $R = d(\Omega;(ABC))$

donc : $R = d(\Omega;(ABC)) = \dfrac{|7x_\Omega - 3y_\Omega + 5z_\Omega - 8|}{\sqrt{(7)^2 + (-3)^2 + (5)^2}}$

$= \dfrac{|7 - 3 + 5 - 8|}{\sqrt{83}} = \dfrac{1}{\sqrt{83}} = \dfrac{\sqrt{83}}{83}$

ainsi : $(S) : (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{83}}\right)^2$

c'est-à-dire : $x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 2z + 1 - \dfrac{1}{83} = 0$

Conclusion : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z + \dfrac{248}{83} = 0$ est une équation de la sphère (S).

Exercice 27

1 a. Déterminons le centre Ω et le rayon R de la sphère (S) :

on a :

$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z + 1 = 0 \iff (x^2 - 4x) + y^2 + (z^2 + 2z) + 1 = 0$

$\iff (x-2)^2 - 4 + (y-0)^2 + (z+1)^2 - 1 + 1 = 0$

$\iff (x-2)^2 + (y-0)^2 + (z+1)^2 = 4 = (2)^2$

donc : $(2;0;-1)$ est le triplet de coordonnées de Ω, et le rayon $R = 2$.

b. Calculons $d(\Omega;(P))$:

ProfSalmi.blogspot.com

On a : $d(\Omega;(P))=\dfrac{|4x_\Omega+3y_\Omega-3|}{\sqrt{(4)^2+(3)^2}}=\dfrac{|4\times2+3\times0-3|}{\sqrt{25}}=1$

▸ **Déduisons la position relative de (S) et (P):**

on a : $d(\Omega;(P))=1$ et $R=2$; donc : $d(\Omega;(P))<R$

d'où le plan (P) coupe (S) suivant un cercle de centre le projeté orthogonal de Ω sur le plan (P), et de rayon r; où : $r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$

c. Déterminons une représentation paramétrique de la droite (Δ) qui passe par Ω et perpendiculaire au plan (P) :

On a : (Δ) est orthogonale à (P); donc (Δ) est dirigée par un vecteur normal à (P), donc (Δ) est dirigée par $\vec{n}(4;3;0)$ et passe par le point $\Omega(-2;0;-1)$.

d'où une représentation paramétrique de (Δ) est : $\begin{cases}x=2+4t\\y=3t\\z=-1\end{cases}\quad /t\in\mathbb{R}$

d. Déduisons les coordonnées de H le projeté orthogonal de Ω sur le plan (P)

On a : H est l'intersection de (Δ) et (P):

$$H\in(P)\cap(\Delta)\Leftrightarrow\begin{cases}4x_H+3y_H-3=0\\x_H=2+4t\\y_H=3t\\z_H=-1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}8+16t+9t-3=0\\x_H=2+4t\\y_H=3t\\z_H=-1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}25t+5=0\\x_H=2+4t\\y_H=3t\\z_H=-1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}t=-\dfrac{1}{5}\\x_H=\dfrac{6}{5}\\y_H=-\dfrac{3}{5}\\z_H=-1\end{cases}$$

ProfSalmi.blogspot.com

donc : $H\left(\frac{6}{5};-\frac{3}{5};-1\right)$

e. Le point H le projeté orthognal de Ω sur le plan (P) est le centre du cercle (C) l'intersection de la sphère (S) et le plan (P) .

2 a. Vérifions que $A \in (S)$:

On a : $\Omega A = \sqrt{(x_A - x_\Omega)^2 + (y_A - y_\Omega)^2 + (z_A - z_\Omega)^2}$ et $A(2,2-1)$

donc : $\Omega A = \sqrt{(2-2)^2 + (2-0)^2 + (-1+1)^2} = 2 = R$

donc, le point A est sur la sphère (S) .

b. Déterminons une équation cartésienne du plan (Q) tangente à la sphère (S) au point A :

On a : $\overrightarrow{\Omega A}(0;2;0)$ est un vecteur normal à (Q) .

donc, une équation cartésienne de (Q) s'écrit sous la forme : $2y + d = 0$

or : $A(2;2;-1) \in (Q) \iff 2y_A + d = 0$

$\iff 4 + d = 0$

$\iff d = -4$

d'où : $(Q) : 2y - 4 = 0$

c'est-à-dire : $y - 2 = 0$ est une équation cartésienne du plan (Q)

Exercice 28

1 a. Déterminons les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$:

On a : $A(1;2;3)$, $B(2;1;3)$ et $C(2;-2;0)$

donc : $\overrightarrow{AB}(1;-1;0)$ et $\overrightarrow{AC}(1;-4;-3)$

d'où : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} \vec{k}$

ainsi : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 3\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k}$

b. Déduisons une équation cartésienne du plan (ABC) :

on a : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(3;3;-3)$ est un vecteur non nul, donc il est normal au plan (ABC), d'où une équation cartésienne de (ABC) s'écrit sous la forme :

$3x + 3y - 3z + d = 0 ; d \in \mathbb{R}$

On a : $A(1;2;3) \in (ABC) \iff 3 + 6 - 9 + d = 0$

$\iff d = 0$

Donc (ABC) : $3x + 3y - 3z = 0$; qu'on peut écrire $3(x + y - z) = 0$

Ainsi : $x + y - z = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

ProfSalmi.blogspot.com

D'où : $(ABC): x+y-z=0$

2 a. Déterminons une représentation paramétrique de la droite (DE):

On a : $\overrightarrow{DE}(-6;6;0)$ est un vecteur directeur de la droite (DE) et (DE) passe par $D(2;0;2)$.

donc une représentation paramétrique de la droite (DE) est:

$$\begin{cases} x = 2-6t \\ y = 6t \\ z = 2 \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$$

b. Montrons que la droite (DE) est incluse dans le plan (ABC):

pour montrer que (DE) est incluse dans (ABC), il suffit de montrer que $D \in (ABC)$ et $E \in (ABC)$

on a : (ABC): $x+y-z=0$

et : $x_D + y_D - z_D = 2+0-2=0$, donc : $D \in (ABC)$

de plus $x_E + y_E - z_E = -4+6-2=0$, donc : $E \in (ABC)$

d'où la droite (DE) est incluse dans le plan (ABC).

3 a. Déterminons une équation de la sphère (S):

On a : (S) est de centre $\Omega(1;1;4)$, et de rayon $R=2$

donc, une équation de (S) est : $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-4)^2=(2)^2$

C'est-à-dire : $(S): x^2+y^2+z^2-2x-2y-8z+14=0$

b. Montrons que la droite (DE) est tangente de la sphère (S), et déterminons les coordonnées de H leur point d'intersection :

Déterminons l'intersection de (S) et (DE); pour cela, il suffit de résoudre le système :

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y-1)^2+(z-4)^2=4 \\ x=2-6t \\ y=6t \\ z=2 \end{cases}$$

on a : $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-4)^2=4 \Rightarrow (1-6t)^2+(6t-1)^2+(-2)^2=4$

$$\Rightarrow 72t^2-24t+2=0$$

$$\Rightarrow 36t^2-12t+1=0$$

$$\Rightarrow (6t-1)^2=0$$

$$\Rightarrow 6t-1=0$$

$$\Rightarrow t=\frac{1}{6}$$

ProfSalmi.blogspot.com

donc, l'intersection de (S) et (DE) est un unique point, d'où la droite (DE) est tangente à (S) en H.

pour déterminer les coordonnées de H on remplace $t=\frac{1}{6}$ dans la représentation paramétrique de (DE), on obtient : $H(1;1;2)$.

c. Déterminons la position relative de (S) avec le plan (ABC):

On a : $\Omega(1;1;4)$, $R=2$ et $(ABC): x+y-z=0$

Donc : $d(\Omega;(ABC)) = \dfrac{|x_\Omega + y_\Omega - z_\Omega|}{\sqrt{(1)^2+(1)^2+(-1)^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

D'où : $\dfrac{2}{\sqrt{3}} < 2$, ainsi : $d(\Omega;(ABC) < R$,

Conclusion: (ABC) n'est pas tangent à la sphère (S).

Exercice 29

1 Déterminons le centre et le rayon de la sphère (S) :

On a :

$$x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11=0 \iff (x^2-2x)+(y^2-4y)+(z^2-6z)-11=0$$
$$\iff (x-1)^2-1+(y-2)^2-4+(z-3)^2-9-11=0$$
$$\iff (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25=(5)^2$$

Donc : $\Omega(1;2;3)$ est le centre de (S) et $R=5$ est son rayon.

2 a. ▸ Montrons que : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=4\vec{j}+3\vec{k}$:

On a : $A(0;-2;0)$, $B(1;1;-4)$ et $C(0;1;-4)$

donc : $\overrightarrow{AB}(1;3;-4)$ et $\overrightarrow{AC}(0;3;-4)$

d'où : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -4 & -4 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -4 & -4 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}\vec{k} = 4\vec{j}+3\vec{k}$

▸ Déduisons une équation du plan (ABC) :

On a : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=4\vec{j}+3\vec{k}$ est un vecteur non nul, donc il est normal au plan (ABC)

donc, une équation du plan (ABC) est sous la forme : $4y+3z+d=0$

on a : $A(0;-2;0)\in(ABC) \iff -8+d=0$
$\iff d=8$

d'où : $4y+3z+8=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

b. Montrons que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) :

On a : $\Omega(1;2;3)$, $R=5$ et $(ABC): 4y+3z+8=0$

ProfSalmi.blogspot.com

donc : $d(\Omega;(ABC)) = \dfrac{|4y_\Omega + 3z_\Omega + 8|}{\sqrt{(4)^2+(3)^2}} = \dfrac{|8+9+8|}{5} = 5$

on a : $d(\Omega;(ABC)) = R$, d'où : (ABC) est tangent à la sphère (S)

3 a. Déterminons une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et orthogonale au plan (ABC) :

On a : (Δ) passe par $\Omega(1;2;3)$, et dirigée par un vecteur normal à (ABC), ainsi (Δ) est dirigée par $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(0;4;3)$.

Une représentation paramétrique de (Δ) est :

$$(\Delta): \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + 4t \\ z = 3 + 3t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$$

b. Déterminons les coordonnées de H le point d'intersection de (ABC) et (S) :

On résout le système : $\begin{cases} 4y + 3z + 8 = 0 \\ x = 1 \\ y = 2 + 4t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$

on a : $\begin{cases} 4y + 3z + 8 = 0 \\ x = 1 \\ y = 2 + 4t \\ z = 3 + 3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8 + 16t + 9 + 9t + 8 = 0 \\ x = 1 \\ y = 2 + 4t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ x = 1 \\ y = -2 \\ z = 0 \end{cases}$$

Donc : $(1;-2;0)$ est le triplet de coordonnées du point H.

Exercice 30

1 ▸ Déterminons une équation cartésienne de la sphère (S) de centre $\Omega(1;0;1)$ et de rayon 3 :

On a : $(x-1)^2 + (y-0)^2 + (z-1)^2 = (3)^2$

donc : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 7 = 0$ est l'équation de (S) .

▸ **Vérifions que $A \in (S)$:**

ProfSalmi.blogspot.com

on a : $\Omega(1;0;1)$ et $A(2;2;-1)$

donc:

$\Omega A = \sqrt{(x_A - x_\Omega)^2 + (y_A - y_\Omega)^2 + (z_A - z_\Omega)^2} = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3 = R$

D'où : A est un point de (S).

2 Montrons que le plan (P) est tangent à (S):

On a : $\Omega(1;0;1)$; $R = 3$ et $(P) : 2x + y + 2z - 13 = 0$

donc : $d(\Omega;(P)) = \dfrac{|2x_\Omega + y_\Omega + 2z_\Omega - 13|}{\sqrt{(2)^2 + (1)^2 + (2)^2}} = \dfrac{|2+2-13|}{3} = 3$

d'où : $d(\Omega;(P)) = R$, ainsi : (P) est tangent à (S) .

3 a. Montrons que $\vec{u}(2;1;2)$ est un vecteur directeur de (D):

On a : la droite (D) est orthogonale au plan (P); donc la droite (D) est dirigée par un vecteur normal au plan (P); donc $\vec{u}(2;1;2)$ est un vecteur directeur de (D).

Déterminons les coordonnées de $\vec{u} \wedge \overrightarrow{\Omega A}$:

On a : $\overrightarrow{\Omega A}(1;2;-2)$ et $\vec{u}(2;1;2)$

donc : $\vec{u} \wedge \overrightarrow{\Omega A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\vec{k}$

d'où: $\vec{u} \wedge \overrightarrow{\Omega A} = -6\vec{i} + 6\vec{j} + 3\vec{k}$

ainsi : $(-6;6;3)$ est le triplet de coordonnées de $\vec{u} \wedge \overrightarrow{\Omega A}$.

b. Montrons que la droite (D) est tangente à la sphère (S) en A:

On a : $(D) = D(A;\vec{u})$

donc : $d(\Omega\ ;(D)) = \dfrac{\|\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$

$= \dfrac{\sqrt{(-6)^2 + (6)^2 + (3)^2}}{\sqrt{(2)^2 + (1)^2 + (2)^2}} = \dfrac{9}{3} = 3$

on a : $d(\Omega;(D)) = R$, donc : (D) est tangent à (S).

or : $A \in (S)$ et $A \in (D)$, donc A est le point d'intersection de la sphère (S) et la droite (D).

Exercice 31

1 Déterminons les coordonnées de Ω le centre de la sphère (S) et son rayon R:

ProfSalmi.blogspot.com

Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace.:

$$M(x;y;z)\in(S)\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x-2y=0$$
$$\Leftrightarrow (x^2-2x)+(y^2-2y)+z^2=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2-1+(y-1)^2-1+(z-0)^2=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+(z-0)^2=2$$

donc : (S) est la sphère de centre $\Omega(1;1;0)$, et de rayon $R=\sqrt{2}$.

2 Montrons que le plan (P) coupe (S) suivant un cercle (C):

▸ **Calculons $d=d(\Omega;(P))$:**

on a: $(P):x-y-z-1=0$ et $\Omega(1;1;0)$

donc : $d=\dfrac{|1-1-0-1|}{\sqrt{(1)^2+(-1)^2+(-1)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

ona : $\dfrac{\sqrt{3}}{3}<\sqrt{2}$ d'où : $d<R$

ainsi, (P) coupe (S) suivant un cercle (C).

▸ **Déterminons r le rayon du cercle (C):**

on a : $r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{2-\dfrac{1}{3}}=\sqrt{\dfrac{5}{3}}=\dfrac{\sqrt{15}}{3}$

donc : le rayon du cercle (C) est $\dfrac{\sqrt{15}}{3}$.

▸ **Déterminons $(a;b;c)$ les coordonnées de ω le centre du cercle (C):**

on a : ω est le point d'intersection du plan (P) et la droite (Δ_1) passant par Ω et orthogonale au plan (P).

▸ **Déterminons une représentation paramétrique de (Δ_1):**

On a : (Δ_1) passe par Ω est orthogonale au plan (P); donc : (Δ_1) est dirigée par un vecteur normal à (P).

soit $\vec{n}(1;-1;-1)$ un vecteur normal à (P).

Donc une représentation paramétrique de (Δ_1) est:

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=1-t \\ z=-t \end{cases} /(t\in\mathbb{R})$$

ProfSalmi.blogspot.com

on a : $\omega(a;b;c)\in(P)\cap(\Delta_1)\Leftrightarrow(\exists t\in\mathbb{R})/\begin{cases}a=1+t\\b=1-t\\c=-t\\a-b-c-1=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow(\exists t\in\mathbb{R})/\begin{cases}a=1+t\\b=1-t\\c=-t\\1+t-1+t+t-1=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{4}{3}\\b=\frac{2}{3}\\c=-\frac{1}{3}\\t=\frac{1}{3}\end{cases}$

donc : $\left(\frac{4}{3};\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)$ sont les coordonnées de ω le centre du cercle (C).

3 a. Déterminons une équation du plan (Q) :

on a : (Q) est le plan tangent à (S) au point O.

soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace: $M(x;y;z)\in(Q)\Leftrightarrow\overrightarrow{O\Omega}.\overrightarrow{OM}=0$

$\Leftrightarrow x+y=0$

car : $\overrightarrow{O\Omega}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

donc : $x+y=0$ est une équation du plan (Q).

b. Déterminons une représentation paramétrique de (Δ) l'intersection de (P) et (Q) :

Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace :

$M(x;y;z)\in(P)\cap(Q)\Leftrightarrow\begin{cases}x-y-z-1=0\\x+y=0\end{cases}$

on pose : $x=t$, donc : $M(x;y;z)\in(P)\cap(Q)\Leftrightarrow\begin{cases}x=t\\y=-t\\z=x-y-1=2t-1\end{cases}$

le système : $\begin{cases}x=t\\y=-t\\z=-1+2t\end{cases}/(t\in\mathbb{R})$ est une représentation de (Δ).

4 a. Déterminons les coordonnées de H :

Soit $(a;b;c)$ le triplet de coordonnées de H.

ProfSalmi.blogspot.com

on a : H est la projection orthogonale de O sur la droite (Δ).

c'est-à-dire : $H \in (\Delta)$ et $\overrightarrow{OH} \perp \vec{u}$ où : $\vec{u}(1;-1;2)$ est un vecteur directeur de (Δ).

donc : $(\exists t \in \mathbb{R}) / \begin{cases} a = t \\ b = -t \\ c = -1+2t \end{cases}$ et $\overrightarrow{OH}.\vec{u} = 0$

c'est-à-dire: $(\exists t \in \mathbb{R}) / \begin{cases} a = t \\ b = -t \\ c = -1+2t \end{cases}$ et $a - b + 2c = 0$ (car: $\overrightarrow{OH}(a;b;c)$)

or : $a - b + 2c = 0 \iff t + t - 2 + 4t = 0$

$\iff t = \frac{1}{3}$

donc : $\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$ est le triplet de coordonnées de H.

b. Montrons que le point H est le projeté orthogonal de ω sur la droite (Δ):

On a : $\overrightarrow{\omega H}(-1;-1;0)$, donc : $\overrightarrow{\omega H}.\vec{u} = -1+1+0 = 0$

or: $H \in (\Delta)$ et $\overrightarrow{\omega H} \perp \vec{u}$, d'où: H est le projeté orthogonal de ω sur la droite (Δ).

c. Montrons que les points ω, Ω, O et H sont coplanaires:

on a :

$$\det(\overrightarrow{O\Omega};\overrightarrow{OH};\overrightarrow{O\omega}) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

donc, les vecteurs $\overrightarrow{O\Omega}$, $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{O\omega}$ sont coplanaires; d'où les points ω, Ω, O et H sont coplanaires.

Exercice 32

1 a. Montrons que les points A, B, C et O ne sont pas coplanaires :

On a : $\det(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2$

On a : $\det(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}) \neq 0$, donc les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ ne sont pas coplanaires, donc les points A, B, C et O sont non coplanaires.

b. Déterminons une équation cartésienne du plan (ABC):

ProfSalmi.blogspot.com

On a : $\overrightarrow{AB}(-1;0;1)$ et $\overrightarrow{AC}(-4;1;4)$ deux vecteurs directeurs du plan (ABC).

Méthode 1: Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace, on a :

$M(x;y;z)\in(ABC) \iff$ les vecteurs : $\overrightarrow{AM}$; $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.

$$\iff \det(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = 0$$

$$\iff \begin{vmatrix} x-1 & -1 & -4 \\ y-1 & 0 & 1 \\ z-1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff (x-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - (y-1)\begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff -x+1-z+1 = 0$$

$$\iff x+z-2 = 0$$

donc : $x+z-2=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

Méthode 2: On a : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$ donc les points A, B et C ne sont pas alignés, ils déterminent le plan (ABC) et $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal à (ABC).

Déterminons le vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$, où: $\overrightarrow{AB}(-1;0;1)$ et $\overrightarrow{AC}(-4;1;4)$

On a : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\vec{k} = -\vec{i}-\vec{k}$

donc, une équation de (ABC) s'écrit sous la forme : $-x-z+d=0$

or : $A(1;1;1)\in(ABC)\Rightarrow -1-1+d=0$, d'où : $d=2$

ainsi : $x+z-2=0$ est une équation du plan (ABC).

c. Montrons que les deux plans (P) et (ABC) sont orthogonaux:

On a : $\vec{n}(1;1;-1)$ est un vecteur normal à (P) et $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal à (ABC).

et: $(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}).\vec{n} = (-1)\times(1)+0\times(1)+(-1)\times(-1)=0$

Puisque les vecteurs normaux des deux plans (P) et (ABC) sont orthogonaux, alors les plans (P) et (ABC) sont orthogonaux.

2 a. Déterminons une représentation paramétrique (Δ):

On a : (Δ) est orthogonale à (P); donc (Δ) est dirigée par $\vec{n}(1;1;-1)$ un vecteur normal au plan (P).

Puisque (Δ) passe par O, alors une représentation paramétrique de (Δ) est:

ProfSalmi.blogspot.com

$$(\Delta):\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$$

b. Déterminons l'intersection de (Δ) et le plan (P):

Soit $H(a;b;c)$ un point de l'espace.

$$H(a;b;c) \in (\Delta) \cap (P) \Leftrightarrow (\exists t \in \mathbb{R}) / \begin{cases} a = t \\ b = t \\ c = -t \\ a + b - c + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{2}{3} \\ b = -\frac{2}{3} \\ c = \frac{2}{3} \\ t = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Donc, la droite (Δ) coupe le plan (P) au point $H\left(-\frac{2}{3};-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$.

3 a. Déterminons le centre et le rayon de (S):

Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace:

$$M(x;y;z) \in (S) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = 2 = (\sqrt{2})^2$$

donc : (S) est la sphère de centre O, et de rayon $R = \sqrt{2}$.

b. Montrons que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S).

On a : $d(O;(ABC)) = \frac{|2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = R$; donc : (ABC) est tangent à la sphère (S).

c. Déterminons l'intersection de (P) et (S) :

On a : $d = d(O;(P)) = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

or : $\frac{2\sqrt{3}}{3} < \sqrt{2}$; donc : $d < R$

ainsi (P) et (S) se coupent suivant un cercle (C) de rayon r, et de centre le point d'intersection de (P) et la droite qui passe par O centre de (S), et orthogonale à (P).

ainsi : $H\left(-\frac{2}{3};-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$ est le centre de (C).

de plus : $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{2 - \frac{4}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

ProfSalmi.blogspot.com

donc, le cercle: (C) est de centre $H\left(-\frac{2}{3};-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$, et de rayon $r=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Exercice 33

1 Montrons que (S) est une sphère :

Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace, on a :

$$M(x;y;z)\in(S)\iff x^2+y^2+z^2-8x-6y=0$$
$$\iff (x^2-8x)+(y^2-6y)+z^2=0$$
$$\iff (x-4)^2-16+(y-3)^2-9+(z-0)^2=0$$
$$\iff (x-4)^2+(y-3)^2+(z-0)^2=25$$

Donc : (S) est la sphère de centre $\Omega(4;3;0)$, et de rayon $R=5$.

2 Déterminons une équation cartésienne du plan (ABC):

On a : $\overrightarrow{AB}(-3;3;0)$ et $\overrightarrow{AC}(\sqrt{2}-2;2;1)$ deux vecteurs directeurs du plan (ABC).

Méthode 1: Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace:

$M(x;y;z)\in(ABC)\iff$ Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.

$$\iff \det(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=0$$
$$\iff \begin{vmatrix} x-2 & -3 & \sqrt{2}-2 \\ y+1 & 3 & 2 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$$
$$\iff (x-2)\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}-(y+1)\begin{vmatrix} -3 & \sqrt{2}-2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}+z\begin{vmatrix} -3 & \sqrt{2}-2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=0$$
$$\iff x+y-\sqrt{2}z-1=0$$

donc : $x+y-\sqrt{2}z-1=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

Méthode 2: On a : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$; donc $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Déterminons $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$:

On a : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} -3 & \sqrt{2}-2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} -3 & \sqrt{2}-2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\vec{k}$

$$=3\vec{i}+3\vec{j}-3\sqrt{2}\vec{k}=3(\vec{i}+\vec{j}-\sqrt{2}\vec{k})$$

donc : un vecteur normal au plan (ABC) est : $\vec{n}(1;1;-\sqrt{2})$.

une équation du plan (ABC) s'écrit sous la forme : $x+y-\sqrt{2}z+d=0$

ProfSalmi.blogspot.com

or : $A(2;-1;0)\in(ABC)$; donc : $2-1+d=0$; d'où : $d=-1$

ainsi : $x+y-\sqrt{2}z-1=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

3 Déterminons une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω, et orthogonale au plan (ABC):

On a : (Δ) est orthogonale à (ABC), c'est-à-dire : (Δ) est dirigée par un vecteur normal au plan (ABC), donc dirigée par $\vec{n}(1;1;-\sqrt{2})$.

et puisque : (Δ) passe par Ω alors (Δ) est: $\begin{cases} x=4+t \\ y=3+t \\ z=-\sqrt{2}t \end{cases}$; $(t\in\mathbb{R})$

4 Déterminons l'intersection de (S) et du plan (ABC):

Calculons $d(\Omega;(ABC))$:

on a : $d=d(\Omega;(ABC))=\dfrac{|4+3-1|}{\sqrt{(1)^2+(1)^2+(-\sqrt{2})^2}}=3$

et: $R=5$; donc : $d(\Omega;(ABC))<R$

d'où : (ABC) coupe (S) suivant un cercle (Γ).

Déterminons le rayon le centre de (Γ):

- Le rayon r de (Γ) est donné par: $r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{25-9}=4$
- soit le point $H(a;b;c)$ le centre de (Γ):

On a : H est le point d'intersection de la droite qui passe par Ω, et orthogonale au plan (ABC) avec le plan (ABC).

On a : $H(a;b;c)\in(ABC)\cap(\Delta)\Leftrightarrow(\exists t\in\mathbb{R})/\begin{cases} a=4+t \\ b=3+t \\ c=-\sqrt{2}t \\ a+b-\sqrt{2}c-1=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=4+t \\ b=3+t \\ c=-\sqrt{2}t \\ 4+t+3+t+2t-1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{5}{2} \\ b=\dfrac{3}{2} \\ c=\dfrac{3\sqrt{2}}{2} \\ t=-\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

ProfSalmi.blogspot.com

donc : (Γ) est le cercle de centre $H\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2};\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$, et de rayon $r=4$.

Exercice 34

1 Montrons que la droite (D) est orthogonale à la droite (AB):

On a : $\overrightarrow{AB}(0;-1;1)$ est un vecteur directeur de la droite (AB), on a : $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ est un vecteur directeur de la droite (D).

on a : $\vec{u}.\overrightarrow{AB}=0\times 1+(-1)\times 1+1\times 1=0$

les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux, donc la droite (D) est orthogonale à la droite (AB).

2 a. Déterminons une équation cartésienne du plan (ABC):

On a : $\overrightarrow{AB}(0;-1;1)$ et $\overrightarrow{AC}(3;-1;-1)$ deux vecteurs directeurs du plan (ABC).

Méthode 1: Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace:

On a : $\overrightarrow{AM}(x;y-1;z-1)$ donc : $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.

$M(x;y;z)\in(ABC)\iff$

$$\iff \det(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=0$$

$$\iff x\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix}-(y-1)\begin{vmatrix}0 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix}+(z-1)\begin{vmatrix}0 & 3\\ -1 & -1\end{vmatrix}=0$$

$$\iff 2x+3y+3z-6=0$$

Donc : $2x+3y+3z-6=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

Méthode 2: On a : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$; donc : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Déterminons $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$:

On a : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}0 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}0 & 3\\ -1 & -1\end{vmatrix}\vec{k}=2\vec{i}+3\vec{j}+3\vec{k}$

Donc une équation du plan (ABC) est : $2x+3y+3z+d=0$

or : $B\in(ABC)$ donc : $6+d=0$, d'où : $d=-6$

ainsi : $2x+3y+3z-6=0$ est une équation du plan (ABC).

b. Déterminons la distance entre B et la droite (AC):

On a : $d(B;(AC))=\dfrac{\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{AC}\|}$

ProfSalmi.blogspot.com

or : $\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{4+9+9}=\sqrt{22}$ et $\|\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{9+1+1}=\sqrt{11}$

donc: $d(B;(AC))=\dfrac{\sqrt{22}}{\sqrt{11}}=\sqrt{2}$

3 Déterminons le centre de (S) et son rayon:

Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace:

$M(x;y;z)\in(S)\iff x^2+y^2+z^2-4z+2=0$

$\iff (x-0)^2+(y-0)^2+(z-2)^2=2$

Donc : (S) est la sphère de centre $B(0;0;2)$, et de rayon $\sqrt{2}$.

Exercice 35

1 Déterminons Ω le centre et R le rayon de (S):

Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace :

$M(x;y;z)\in(S)\iff x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z-3=0$

$\iff (x^2-2x+1)+(y^2-2y+1)+(z^2-4z+4)-1-1-4-3=0$

$\iff (x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=9$

Donc : (S) est la sphère de centre $\Omega(1;1;2)$ et de rayon $R=3$.

2 Montrons que le plan (P) est tangent à (S):

on a : $d(\Omega;(P))=\dfrac{|1+2+4+2|}{\sqrt{1+4+4}}=\dfrac{9}{3}=3=R$

donc: $d(\Omega;(P))=R$, donc (P) est tangent à (S).

3 Déterminons une équation de (Q):

On a : $B\in(S)$ (vérifier ce résultat)

On a le plan (Q) est tangent par (S) en B; donc la droite (ΩB) est orthogonal au plan (Q)

donc la droite $\overrightarrow{\Omega B}(2;1;-2)$ est un vecteur normal (Q).

Donc une représentation cartésienne de (Q) est sous la forme:

$2x+y-2z+d=0$.

or : $B(3;2;0)\in(Q)$ donc : $6+2+d=0$, d'où : $d=-8$

ainsi : $2x+y-2z-8=0$ est une équation cartésienne (Q).

4 Montrons que les deux plans (P) et (Q) sont orthogonaux:

on a : $\vec{n_1}(1;2;2)$ et $\vec{n_2}(2;1;-2)$ sont respectivement deux vecteurs normaux à (P) et (Q).

ProfSalmi.blogspot.com

et de plus: $\vec{n_1}.\vec{n_2} = 1\times 2+2\times 1+2\times(-2) = 4-4 = 0$

on a : $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ deux vecteurs orthogonaux, donc les deux plans (P) et (Q) sont orthogonaux.

5 a. Déterminons une représentation paramétrique de la droite (D):

On a : (P) et (Q) sont orthogonaux, donc la droite (D) est parallèle (Δ) qui est dirigée par $\vec{n_1}\wedge\vec{n_2}$, or $(D)\,//\,(\Delta)$ (car $(D)\,//\,(P)$ et $(D)\,//\,(Q)$, donc (D) est dirigée aussi par $\vec{n_1}\wedge\vec{n_2}$.

Déterminons les coordonnées de $\vec{n_1}\wedge\vec{n_2}$:

On a : $\vec{n_1}\wedge\vec{n_2} = \begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & -2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}\vec{k} = -6\vec{i}+6\vec{j}-3\vec{k}$

Une représentation de la droite (D) est: $\begin{cases}x = 1-6t\\ y = 1+6t\\ z = 1-3t\end{cases}/(t\in\mathbb{R})$ (car (D) passe par le point $C(1;1;;)$)

b. Calculons $d(\Omega;(D))$:

On a la droite (D) passe par $C(1;1;1)$, et de vecteur directeur $\vec{u} = \vec{n_1}\wedge\vec{n_2}$

donc : $d(\Omega;(D)) = \dfrac{\|\overrightarrow{\Omega C}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$

or : $\overrightarrow{\Omega C}(0;0;-1)$

donc : $\overrightarrow{\Omega C}\wedge\vec{u} = \begin{vmatrix}0 & 6\\ -1 & -3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}0 & -6\\ -1 & -3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}0 & -6\\ 0 & 6\end{vmatrix}\vec{k} = 6\vec{i}+6\vec{j}$

d'où : $d(\Omega;(D)) = \dfrac{\|\overrightarrow{\Omega C}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \dfrac{\sqrt{36+36}}{\sqrt{36+36+9}} = \dfrac{6\sqrt{2}}{9} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

ainsi : $d(\Omega;(D)) = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

c. Montrons que la droite (D) coupe la sphère (S) :

Comparons R et $d(\Omega;(D))$

on a : $R^2-(d(\Omega;(D)))^2 = 9-\dfrac{8}{9} = \dfrac{73}{9}$

Donc: $(d(\Omega;(D)))^2 < R^2$; d'où : $d(\Omega;(D)) < R$, ainsi la droite (D) coupe la sphère (S) en deux points distincts.

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 36

1 Montrons que le plan (P) a pour équation : $2x+y-z-1=0$

Soit $M(x;y;z)$ au point de l'espace; on a: $\overrightarrow{AM}(x+2;y-1;z-2)$ et

$M(x;y;z)\in(P) \iff AM = BM$

$\iff AM^2 = BM^2$

$\iff (x+2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2 = (x-2)^2+(y-3)2+z^2$

$\iff 4x+4-2y+1-4z+4 = -4x+4-6y+9$

$\overrightarrow{BM}(x-2;y-3;z)$

$\iff 8x+4y-4z-4=0$

$\iff 2x+y-z-1=0$

Donc : (P) a pour équation cartésienne : $2x+y-z-1=0$

2 Déterminons une équation cartésienne du plan (Q) :

On a le plan: (Q) passe par le point C, et parallèle à (P).

donc une équation de (Q) s'écrit sous la forme : $2x+y-z+d=0$

or : $C(-2;0;1)\in(Q)$, donc : $-4-1+d=0$, d'où : $d=5$

ainsi : $2x+y-z+5=0$ est une équation cartésienne du plan (Q).

3 a. Déterminons une représentation paramétrique de la droite (D) :

on a : (D) passe par C, et de vecteur directeur en vecteur normal à (P).

car (D) est orthogonale à (P).

Soit : $\vec{n}(2;1;-1)$ un vecteur normal à (P).

Une représentation paramétrique de (D) est: $\begin{cases} x=-2+2t \\ y=t \\ z=1-t \end{cases} /(t\in\mathbb{R})$

b. Calculons la distance entre A et la droite (D) :

On a : $d(A;(D)) = \dfrac{\|\overrightarrow{AC}\wedge\vec{n}\|}{\|\vec{n}\|}$ et $\overrightarrow{AC}(0;-1;-1)$ et $\vec{n}(2;1;-1)$

on a : $\overrightarrow{AC}\wedge\vec{n} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\vec{k} = 2\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$

donc : $\|\overrightarrow{AC}\wedge\vec{n}\| = \sqrt{4+4+4} = 2\sqrt{3}$ et $\|\vec{n}\| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$

d'où : $d(A;(D)) = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \sqrt{2}$

ProfSalmi.blogspot.com

▸ **Calculons la distance entre A et le plan (P):**

On a : $d(A;(P)) = \dfrac{|2(-2)+1-2-1|}{\sqrt{(2)^2+(1)^2+(-1)^2}} = \dfrac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$

4a. Déterminons une équation cartésienne de la sphère (S) de diamètre $[AB]$:

Méthode 1: (S) est la sphère de diamètre $[AB]$, donc (S) est l'ensemble des points M de l'espace tel que : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$

Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace; on a : $\overrightarrow{MA}(-x-2;-y+1;-z+2)$ et $\overrightarrow{MB}(-x+2;-y+3;-z)$, donc :

$$\begin{aligned} M(x;y;z) \in (S) &\iff \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0 \\ &\iff (-2-x)(2-x)+(1-y)(3-y)+(2-z)(-z) = 0 \\ &\iff x^2-4+y^2-4y+3+z^2-2z = 0 \\ &\iff x^2+y^2+z^2-4y-2z-1 = 0 \end{aligned}$$

Donc : $x^2+y^2+z^2-4y-2z-1=0$ est une équation cartésienne de la sphère (S).

Méthode 2: (S) a pour diamètre $[AB]$; donc son centre Ω est le milieu de $[AB]$ est son rayon R est : $\dfrac{AB}{2}$

or : $\Omega\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2};\dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$, d'où : $\Omega(0;2;1)$

et $AB = \sqrt{(4)^2+(2)^2+(-2)^2} = 2\sqrt{6}$; donc : $R = \dfrac{AB}{2} = \sqrt{6}$

ainsi : $(S):(x-0)^2+(y-2)^2+(z-1)^2 = (\sqrt{6})^2$

donc une équation cartésienne est de (S) : $x^2+y^2+z^2-4y-2z-1=0$

b. Déterminons l'intersection de (P) est (S):

on pose : $d = d(\Omega;(P))$

on a : $d = \dfrac{|2\times 0+2-1-1|}{\sqrt{(2)^2+(1)^2+(-1)^2}} = 0$

donc : $\Omega \in (P)$, d'où (P) coupe la sphère (S) suivant grand cercle de centre Ω et de rayon $R = \sqrt{6}$.

ProfSalmi.blogspot.com

6 Calcul de probabilités

1 Dénonbrement (Analyse combinatoire)

1. Principe fondamental de l'analyse combinatoire.

Soit E une expérience nécessitant k choix.
Si le premier choix se fait de n_1 façons différentes et le deuxième choix se fait de n_2 façons différentes, ... et le $k^{ième}$ choix se fait de n_k façons différentes, alors le nombre de résultats possibles est le produit : $n_1 \times n_2 \times ... \times n_k$.

2. Les nombres A_n^p, $n!$ et C_n^p

Soit n et p deux entiers naturels non nuls.

- Le nombre d'arrangements avec répétition de p éléments choisis parmi n est : n^p.
- Le nombre d'arrangements sans répétition de p éléments choisis parmi n où $1 \leqslant p \leqslant n$, est ; $n \times (n-1) \times (n-2) \times ...(n-p+1)$

Ce nombre est noté A_n^p, et on a : $A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times (n-p+1)$.

Le nombre de permutations de n éléments est le nombre d'arrangements sans répétition de n éléments choisis parmi n : $A_n^n = n \times (n-1) \times ... \times 2 \times 1$.

Le produit : $n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 2 \times 1$ est noté $n!$ et se lit «factorielle n». On a donc : $A_n^n = n!$. Par convention, on pose : $0! = 1$ et $1! = 1$

- Le nombre de combinaisons de p éléments choisis parmi n est : $\frac{A_n^p}{p!}$

Ce nombre est noté C_n^p, et on a : $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$

Conséquences :

Pour tout entier naturel non nul n, et pour tout entier naturel p tel que $0 \leqslant p \leqslant n$, on a :

- $C_n^p = \frac{n!}{p! \times (n-p)!}$
- $(p \neq 0)$; $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$
- $C_{n+1}^{p+1} = C_n^p + C_n^{p+1}$
- $C_n^p = C_n^{n-p}$
- $C_n^1 = n$
- $C_n^{n-1} = n$
- $C_n^n = 1$
- $C_n^0 = 1$

ProfSalmi.blogspot.com

Exercices

Exercice 1

(Les nombres $n!$, A_n^p et C_n^p)

1 a. Calculer : $3!$; $\frac{7!}{4!}$; $2! \times 5!$ et $\frac{(n+2)!}{n!}$ où $n \in \mathbb{N}$

b. A t-on $2! \times 3! = 6!$?

c. A t-on $\frac{8!}{4!} = 2!$?

2 a. Calculer A_4^2 ; A_7^5 ; A_3^3 ; $\frac{A_7^4}{A_8^5}$ et $A_5^3 \times A_4^2$

b. A t-on $A_5^2 \times A_5^1 = A_5^3$?

c. Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation : $\frac{A_{n+2}^4}{A_n^2} = 70$

3 a. Calculer C_7^1 ; C_9^4 ; C_9^5 ; $C_8^3 + C_8^4$ et C_{2017}^{2016}.

b. A t-on $C_4^1 \times C_4^1 = C_4^2$?

c. Développer $(x+1)^5$ où x est un nombre réel.

d. Développer $(e^{ix} + e^{-ix})^4$ et en déduire la linéarisation de $\cos^4(x)$.

e. En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{\pi} \cos^4 x dx$

Exercice 2

On considère l'ensemble $E = \{0;1;2;3;4;5;6\}$

1 Combien de nombres à trois chiffres (chiffre des centaines non nul) peut-on écrire en utilisant les éléments de E ?

2 Combien de nombres à trois chiffres deux à deux distincts peut -on écrire avec les éléments de E ? (le chiffre des centaines non nul).

3 Quel est le nombre de nombres pairs à trois chiffres qu'on peut écrire avec les éléments de E ? (le chiffre des centaines non nul).

4 Quel est le nombre de nombres impairs à trois chiffres deux à deux distincts qu'on peut écrire avec les éléments de E ? (le chiffre des centaines non nul).

Exercice 3

Une classe de 2ième année bac est formée de 37 élèves dont 25 filles. On veut choisir un comité de 4 élèves pour représenter la classe (on suppose que le choix se fait simultanément).

1 De combien de façons peut-on choisir ce comité?

ProfSalmi.blogspot.com

2 Quel est le nombre de comités formés par deux garçons et deux filles?

3 Quel est le nombre de comités contenant le garçon G_1 et la fille F_1 ?

4 Quel est le nombre de comités contenant le garçon G_1 et le garçon G_2 ?

Exercice 4

Un sac contient 3 boules blanches, deux boules noires et une boule rouge.

1 On tire successivement et avec remise 3 boules du sac.

a. Quel est le nombre de résultats possibles?

b. Quel est le nombre de résultats contenant 3 boules de même couleur?

c. Quel est le nombre de résultats contenant une boule de chaque couleur?

2 On tire maintenant successivement et sans remise 3 boules du sac. Répondre aux questions précédentes.

3 on tire maintenant simultanément 3 boules du sac.

Répondre aux questions précédentes.

4 On tire maintenant successivement et sans remise toutes les boules du sac.

a. Quel est le nombre de résultats possibles?

b. Quel est le nombre de résultats où une boule noire apparaît pour la première fois au deuxième tirage.

Solutions

Exercice 1

1 a. **Calculons :** $3!$; $\frac{7!}{4!}$; $2! \times 5!$ et $\frac{(n+2)!}{n!}$ où $n \in \mathbb{N}$

On a : $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

$$\frac{7!}{4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!} = 7 \times 6 \times 5 = 210$$

$$2! \times 5! = (2 \times 1) \times (5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) = 240$$

$$\frac{(n+2)!}{n!} = \frac{(n+2)(n+1) \times n!}{n!} = (n+2)(n+1)$$

b. $2! \times 3! = (2 \times 1) \times (3 \times 2 \times 1) = 12$ et $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$

Donc : $2! \times 3! \neq 6!$

ProfSalmi.blogspot.com

c. On a : $\begin{cases} \frac{8!}{4!} = \frac{8\times7\times6\times5\times4!}{4!} = 8\times7\times6\times5 = 1680 \\ 2! = 2\times1 = 2 \end{cases}$

Donc : $\frac{8!}{4!} \neq 2!$

2 a. Calculons : A_4^2 ; A_7^5 ; A_3^3 ; $\frac{A_7^4}{A_8^5}$ et $A_5^3 \times A_4^2$

On a : $A_4^2 = \underbrace{4\times3}_{2\ facteurs} = 12$

- $A_7^5 = \underbrace{7\times6\times5\times4\times3}_{5\ facteurs} = 2520$
- $A_3^3 = 3! = 3\times2\times1 = 6$
- $\frac{A_7^4}{A_8^5} = \frac{7\times6\times5\times4}{8\times7\times6\times5\times4} = \frac{1}{8}$
- $A_5^3 \times A_4^2 = \underbrace{(5\times4\times3)}_{3facteurs} \times \underbrace{(4\times3)}_{2facteurs} = 720$

infos:

On peut utiliser la calculatrice pour calculer ces nombres :

- Pour calculer 6!

Taper : 6 $x!$ = et on obtient 720

- Pour calculer A_7^5

Taper 7 $n\mathrm{Pr}$ 5 = et on obtient 2520

- Pour calculer C_9^4

Taper : 9 nCr 4 = et on obtient 126.

b. On a :

$A_5^2 \times A_5^1 = (5\times4)\times(5) = 100$ et $A_5^3 = \underbrace{5\times4\times3}_{3\ facteurs} = 60$

Et donc : $A_5^2 \times A_5^1 \neq A_5^3$

c. Résolvons dans $\mathbb{N}$, l'équation : $\frac{A_{n+2}^4}{A_n^2} = 70$ **où** $n \geqslant 2$

$$\frac{A_{n+2}^4}{A_n^2} = 70 \Leftrightarrow \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{n(n+1)} = 70$$
$$\Leftrightarrow (n+2)(n-1) = 70$$
$$\Leftrightarrow n^2 + n - 72 = 0$$

Le discriminant de l'équation $x^2 + x - 72 = 0$

est : $\Delta = 1 + 288 = 289 = 17^2$

Ses solutions sont : $x_1 = \frac{-1-17}{2} = -9 \notin \mathbb{N}$ et $x_2 = \frac{-1+17}{2} = 8 \in \mathbb{N}$

Donc l'équation $n^2 + n - 72 = 0$ admet dans $\mathbb{N}$ une seule solution : 8.

3 a. Calculons C_7^1, C_9^4, C_9^5, $C_8^4 + C_8^5$ **et** C_{2017}^{2016}

On a :

- $C_7^1 = \frac{7!}{1!\times6!} = \frac{7\times6!}{6!} = 7$

ProfSalmi.blogspot.com

Ou directement : $C_7^1 = 7$ (car $\forall n \in \mathbb{N}^*; C_n^1 = n$)

▸ $C_9^4 = \dfrac{9!}{4! \times 5!} = \dfrac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{(4 \times 3 \times 2 \times 1) \times 5!} = 9 \times 2 \times 7 = 126$

Ou : $C_9^4 = \dfrac{A_9^4}{4!} = \dfrac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 9 \times 2 \times 7 = 126$

▸ $C_9^5 = C_9^{9-5} = C_9^4 = 126$ (car : $C_n^p = C_n^{n-p}$)

▸ $C_8^4 + C_8^5 = C_9^5 = 126$ (car : $C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$)

▸ $C_{2017}^{2016} = C_{2017}^{2017-2016} = C_{2017}^1 = 2017$ (car $C_{n+1}^n = C_{n+1}^1 = n+1$)

b. On a : $C_4^2 = \dfrac{A_4^2}{2!} = \dfrac{4 \times 3}{2} = 6$ et $C_4^1 \times C_4^1 = 4 \times 4 = 16$

Donc : $C_4^1 \times C_4^1 \neq C_4^2$

c. Développons : $(x+1)^5$

On a : $(x+1)^5 = \sum_{p=0}^{5} C_5^p 1^p \times x^{5-p}$

$= C_5^0 x^5 + C_5^1 x^4 + C_5^2 x^3 + C_5^3 x^2 + C_5^4 x + C_5^5$

$= x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$

d. Développons : $(e^{ix} + e^{-ix})^4$

On a :

$(e^{ix} + e^{-ix})^4 = \sum_{p=0}^{4} C_4^p (e^{ix})^p (e^{-ix})^{4-p}$

$= C_4^0 (e^{-ix})^4 + C_4^1 e^{ix} \times (e^{-ix})^3 + C_4^2 (e^{ix})^2 \times (e^{-ix})^2 + C_4^3 (e^{ix})^3 \times e^{-ix} + C_4^4 (e^{ix})^4$

$= e^{-i4x} + 4e^{-i2x} + 6 + 4e^{i2x} + e^{i4x}$

$= (e^{i4x} + e^{-i4x}) + 4(e^{i2x} + e^{-i2x}) + 6$

Déduction :

On a : $e^{i2x} + e^{-i2x} = 2\cos(2x)$ et $e^{i4x} + e^{-i4x} = 2\cos(4x)$ et $e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x$

Donc : $(e^{ix} + e^{-ix})^4 = 2\cos(4x) + 4(2\cos(2x)) + 6$

$= 2\cos(4x) + 8\cos(2x) + 6$

D'où : $(2\cos x)^4 = 2\cos(4x) + 8\cos(2x) + 6$

Donc : $\cos^4(x) = \dfrac{1}{16}(2\cos(4x) + 8\cos(2x) + 6)$; $(2^4 = 16)$

Conclusion : $\cos^4(x) = \dfrac{1}{8}\cos(4x) + \dfrac{1}{2}\cos(2x) + \dfrac{3}{8}$ est la linéarisation de $\cos^4 x$.

ProfSalmi.blogspot.com

Déduisons de la valeur de : $\int_0^{\pi} \cos^4 x dx$

$$\int_0^{\pi} \cos^4 x dx = \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{8}\cos(4x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}\right) dx$$
$$= \left[\frac{1}{8} \times \frac{1}{4}\sin(4x) + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{3}{8}x\right]_0^{\pi}$$
$$= \left[\frac{1}{32}\sin(4x) + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{3}{8}x\right]_0^{\pi} = \frac{3\pi}{8}$$

Exercice 2

$E = \{0;1;2;3;4;5;6\}$

1 Calculons le nombre de nombres à trois chiffres (chiffre des centaines non nul) en n'utilisant que les éléments de E

Donc :

	C	d	U
Nombre de choix	6	7	7

- on peut choisir le même chiffre plusieurs fois.
- on ne peut pas choisir zéro pour le chiffre des centaines.

Donc, d'après le principe fondamental de l'analyse combinatoire, le nombre total de ces nombres est : $6 \times 7 \times 7 = 6 \times 7^2 = 294$

2 Le nombre de nombres à trois chiffres distincts deux à deux en n'utilisant que les éléments de E (chiffre de certains non nul) est : $6 \times 6 \times 5 = 180$ (il y a 6 chiffres non nuls dans E, donc il y a 6 choix pour le nombre des centaines, il y a 6 choix pour le nombre des dizaines et 5 choix pour le nombre des unités.

On peut aussi calculer ce nombre en utilisant les arrangements :

$A_6^1 \times A_6^2 = 180$

3 Un nombre pair est un nombre dont le chiffre des unités est pair (soit 0 ou 2 ou 4 ou 6 ou 8)

L'ensemble E contient 4 chiffres pairs : 0,2;4 et 6.

Le nombre de nombres pairs que l'on peut écrire en n'utilisant que les éléments de E est : $6 \times 7 \times 4 = 168$ (il y a 4 choix pour le chiffre des unités, 7 choix pour les chiffres des dizaines et 6 choix pour celui des centaines). (On peut utiliser le même chiffre plusieurs fois).

4 Un nombre impair est un nombre dont le chiffre des unités est impair.

ProfSalmi.blogspot.com

L'ensemble E contient 3 chiffres impairs : 1;3;5.

Méthode 1 : On distingue deux cas suivant que le chiffre des dizaines est nul ou non nul.

1er cas : le chiffre des dizaines est 0

Il y a : 3 choix pour le chiffre des unités.

1 choix pour le chiffre des dizaines (le chiffre 0) il reste alors 5 choix pour le chiffre des centaines (les chiffres sont distincts deux à deux).

Le nombre de ces nombres dans ce cas est : $3 \times 1 \times 5 = 15$

2ème cas : Le chiffre des dizaines est non nul

Il y a : 3 choix pour le nombre des unités

5 choix pour le nombre des dizaines (on exclu 0 et le nombre choisi pour les unités).

Il reste alors 4 choix pour le chiffre des centaines.

Le nombre de ces nombres dans ce cas est : $3 \times 5 \times 4 = 60$.

Donc le nombre total de ces nombres est : $15 + 60 = 75$.

Méthode 2 :

Il y a : 3 choix pour le chiffre des unités (1 ou 3 ou 5).

5 choix pour le chiffre des centaines (on exclut 0 et le chiffre impair choisi pour les unités).

5 choix pour le chiffre des dizaines (on exclut les deux chiffres choisis pour les unités et les centaines)

Le nombre total de ces nombres est : $3 \times 5 \times 5 = 75$

Exercice 3

1 Le nombre de comités possible est le nombre de combinaisons de 4 éléments choisi parmi 37, donc le nombre de comités possible est : $C_{37}^{4} = 66045$.

2 Le nombre de garçons est 12, le nombre de filles est 25, donc le nombre de comités contenant deux garçons et deux filles est : $C_{12}^{2} \times C_{25}^{2} = 19800$.

3 Il y a un seul garçon G_1 et une seule fille F_1, donc le nombre de comités contenant G_1 et F_1 est : $C_1^1 \times C_1^1 \times C_{35}^{2} = 595$.

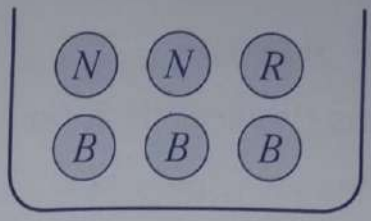
4 Il y a un seul garçon G_1 et un seul garçon G_2, il reste à choisir 3 élèves parmi 37-2 (on exclut G_1 et G_2).

ProfSalmi.blogspot.com

Donc le nombre de comités contenant G_1 et G_2 est : $C_1^1 \times C_1^1 \times C_{35}^2 = 595$

Exercice 4

Le sac contient 3 boules blanches, deux boules noires et une boule rouge. Le nombre total de boules dans le sac est 6.



1 a. On tire successivement et avec remise 3 boules du sac, donc chaque tirage est un arrangement avec répétition de 3 éléments choisis parmi 6. Le nombre de résultats (tirages) possibles est donc le nombre d'arrangements avec répétition de 3 éléments choisis parmi 6 soit : $6^3 = 216$.

b. Pour obtenir 3 boules de même couleur, il faut :

- Tirer 3 boules blanches parmi 3 ; le nombre de choix est $3^3 = 27$

ou

- Tirer 3 boules noires (bien que dans le sac il n'y ait que 2 boules noires) ; le nombre de choix est $2^3 = 8$

Ou

- Tirer 3 boules rouges (bien que dans le sac il n'y a qu'une seule boule rouge); le nombre de choix est $1^3 = 1$

Donc le nombre de résultats (tirages) permettant d'obtenir 3 boules de même couleur est : $27 + 8 + 1 = 36$

c. Le nombre de résultat (tirages) contenant 3 boules de couleurs différentes deux à deux (une boule de chaque couleur) est : $(3^1 \times 2^1 \times 1^1) \times 3! = 36$

(Le nombre $3! = 6$ est le coefficient de l'ordre des couleurs : NRB ou NBR ou RNB ou RBN ou BRN ou BNR).

2 a. On tire successivement et sans remise 3 boules du sac, donc chaque tirage (résultat) est un arrangement sans répétition de 3 éléments choisis parmi 6 ; donc le nombre de résultats (tirages) possibles est le nombre d'arrangements

ProfSalmi.blogspot.com

sans répétition de 3 éléments choisis parmi 6 ; soit : $A_6^3 = 120$.

b. Obtenir 3 boules de même couleur dans ce cas c'est obtenir 3 boules blanches (car le tirage est sans remise et le nombre de boules noires est strictement inférieur à 3 de même pour les rouges); donc le nombre de résultats (tirages) dont les 3 boules sont de même couleur, est le nombre de tirages contenant 3 boules blanches, soit : $A_3^3 = 3! = 6$.

c. Le nombre de résultats (tirages) de 3 boules de couleurs deux à deux différentes (une boule de chaque couleur) est : $(A_1^1 \times A_2^1 \times A_3^1) \times 3! = 36$
(Le nombre $3! = 6$ est le coefficient de l'ordre des couleurs : NRB ou NBR ou RNB ou RBN ou BNR).

3 a. On tire simultanément 3 boules du sac, donc chaque tirage (résultat) est une combinaison de 3 éléments choisis parmi 6. Donc le nombre de tirages possible est le nombre de combinaisons de 3 éléments choisis parmi 6 ; soit : $C_6^3 = 20$

b. Dans ce cas aussi le nombre de tirages de 3 boules de même couleur est le nombre de tirages de 3 boules blanches (parmi 3) c'est donc le nombre de combinaisons de 3 éléments choisis parmi 3 soit : $C_3^3 = 1$

c. Le nombre de résultats (tirages) de 3 boules de couleurs différentes deux à deux (une boule de chaque couleur) est : $C_3^1 \times C_2^1 \times C_1^1 = 6$
(Remarquer que dans ce cas pas de coefficient de l'ordre des couleurs car le tirage des 3 boules se fait en même temps).

4 a. On tire successivement et sans remise toutes les boules du sac, donc chaque tirage (résultat) est une permutation de 6 éléments, donc le nombre de tirages (résultats) possible est le nombre de permutation de 6 éléments soit $6! = 720$.

b. Pour obtenir une boule noire pour la première fois au 2ième tirage, il faut : Tirer une boule non noire (parmi 4) au premier tirage, puis tirer une boule noire (parmi 2) au 2ième tirage, puis tirer les 4 boules restantes.
Le nombre de tirages dans ce cas est : $A_4^1 \times A_2^1 \times 4! = 192$

ProfSalmi.blogspot.com

2

1. Stabilité de la fréquence d'un événement - Probabilité d'un événement.

Définition:

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire.

- Lorsque la fréquence d'un événement élémentaire $\{\omega_i\}$ se statbilise en une valeur p_i, on dit que la probabilité de l'événement $\{\omega_i\}$ est p_i et on note : $p(\{\omega_i\}) = p_i$
- Pour tout événement $A = \{\omega_1; \omega_2; ...; \omega_k\}$ inclu dans Ω, la probabilité de A est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le compose : $p(A) = p_1 + p_2 + ... + p_k$

Propriété:

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire.

- $p(\Omega) = 1$
- $p(\phi) = 0$
- Pour tout événement A, $o \leqslant p(A) \leqslant 1$
- Si A et B sont deux événements imcompatibles $(A \cap B = \phi)$, alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.
- Pour tout événement A, on a : $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$ (où $\overline{A}$ est l'événement contraire de l'événement A).
- Pour tout événement A et B, on a : $P(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
- L'événement $A \cap B$ est réalisé si les deux événements A et B sont vérifiés.
- L'événement $A \cup B$ est réalisé si au moins l'un des événements A et B est réalisé.

2. Equiprobabilité

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire.

Lorsque toutes les éventualités élémentaires ont la même probabilité, on dit que la probabilité est uniforme; on dit aussi qu'on est dans le cas de l'équiprobabilité.

Dans ce cas, la probabilité d'un événement A est $p(A) = \frac{cardA}{card\Omega}$

ProfSalmi.blogspot.com

Exercices

Exercice 5 (Lancer d'un dé non pipé (équilibré)

On lance un dé cubique non pipé dont les faces sont numérotées 1;2;3;4;5;6.
On lit le numéro porté par la face supérieure du dé après sa stabilité.
Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A « Obtenir le numéro 5»

B «Obtenir un nombre pair».

C «Obtenir un nombre impair».

D «Obtenir un multiple de 3».

E «Ne pas obtenir le numéro 4».

Exercice 6 (Lancer d'un dé pipé)

On lance un dé cubique dont les faces sont numérotés de 1 à 6.

Tel que : $p(\{2\}) = \frac{1}{2}p(\{3\})$

$$p(\{4\}) = 2p(\{1\}) = \frac{1}{3}p(\{3\})$$

$$p(\{6\}) = \frac{1}{4}p(\{5\}) = 2p(\{1\})$$

1 Calculer la probabilité de l'apparition de chaque face : $p(\{i\})$ pour tout $i \in \{1;2;3;4;5;6\}$.

2 Calculer la probabilité de l'événement A : « obtenir un nombre impair».

3 Calculer la probabilité de l'événement B : « obtenir un nombre pair».

4 Calculer la probabilité de l'événement C : «obtenir un nombre supérieur ou égal à 4».

Exercice 7 (Tirage d'une boule)

Une urne contient : 5 boules rouges numérotées : 1;1;2;2;3

3 boules vertes numérotées 1;2;2

et deux boules noires numérotées 2;3.

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On tire au hasard une boule de l'urne.

1 Calculer la probabilité de l'événement A : « obtenir une boule noire».

ProfSalmi.blogspot.com

2 Calculer la probabilité de l'événement B : « obtenir un nombre impair».

3 Calculer la probabilité de l'événement C : «obtenir une boule verte numérotée 2».

4 Sachant que la boule tirée est rouge, quelle est la probabilité qu'elle porte le numéro 1?

Exercice 8 (Lancer d'un dé pipé)

Dans une société, il y a 100 salariés : des ouvriers, des ingénieurs et des techniciens. 65% des salariés sont des hommes.

Le nombre d'hommes ouvriers est 47.

Le nombre de femmes ingénieurs est 6.

Le nombre de femmes techniciennes est 8.

Le nombre total des ingénieurs (hommes et femmes) est 10.

1 Compléter le tableau suivant :

	Ouvriers	Ingénieurs	Techniciens	Total
hommes	47	4	14	65
Femmes	21	6	8	35
Total	68	10	22	100

2 On tire au hasard la carte d'un salarié de cette société. Toutes les cartes sont indiscernables au toucher.

Quelle est la probabilité que cette carte soit :

a) Celle d'un homme?

b) Celle d'un ingénieur?

c) Celle d'un homme technicien?

3 On tire au hasard une carte parmi celles des ingénieurs. Quelle est la probabilité qu'elle soit celle d'une femme?

4 On tire au hasard une carte parmi celle des hommes.

Quelle est la probabilité qu'elle soit celle d'un ouvrier?

ProfSalmi.blogspot.com

Solutions

Exercice 5 **(Lancer d'un dé non pipé)**

- Le dé est équilibré, il y a donc équiprobabilité : toutes les faces ont la même probabilité $\frac{1}{6}$. L'univers associé à cette expérience aléatoire est $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$ donc $Card\Omega = 6$
- La probabilité de l'événement A «obtenir le numéro 5» est : $p(A) = \frac{1}{6}$.
- B est l'événement «obtenir un nombre pair».

On a : $B = \{2;4;6\}$

Donc : $p(B) = \frac{CardB}{Card\Omega} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

- L'événement C «obtenir un nombre impair» est l'événement contraire de l'événement B : $C = \overline{B}$

Donc : $p(C) = p(\overline{B})$

$= 1 - p(B)$

$= 1 - \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2}$

Remarque : On peut calculer $p(C)$ directement sans utiliser $p(B)$:

On a : $C = \{1;3;5\}$

Donc : $p(C) = \frac{CardC}{Card\Omega} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

- D est l'événement «obtenir un multiple de 3» : $D = \{3;6\}$

Donc : $p(D) = \frac{CardD}{Card\Omega} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

- E est l'événement «Ne pas obtenir le numéro 4»

Méthode 1 : $E = \{1;2;3;5;6\}$

Donc : $p(E) = \frac{CardE}{Card\Omega} = \frac{5}{6}$

Méthode 2 :

L'événement contraire de l'événement E est : $p(E) = 1 - p(\overline{E})$

$\overline{E}$ «obtenir le numéro 4»

$= 1 - \frac{1}{6}$

$= \frac{5}{6}$

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 6 (Lancer d'un pipé)

1 Calculons $p(\{i\})$ pour tout $i \in \{1;2;3;4;5;6\}$

On a : $p(\{2\}) = \frac{1}{2}p(\{3\})$; $p(\{4\}) = 2p(\{1\}) = \frac{1}{3}p(\{3\})$

et $p(\{6\}) = \frac{1}{4}p(\{5\}) = 2p(\{1\})$

Or : $p(\{1\}) + p(\{2\}) + p(\{3\}) + p(\{4\}) + p(\{5\}) + p(\{6\}) = 1$

Donc : $p(\{1\}) + \frac{1}{2}p\{3\} + p(\{3\}) + \frac{1}{3}p(\{3\}) + 8p(\{1\}) + 2p(\{1\}) = 1$

D'où : $\frac{2}{3}p(\{3\}) + \frac{11}{6}p(\{3\}) + 10\left(\frac{2}{3}p(\{3\})\right) = 1$

Donc : $p(\{3\}) = \frac{6}{55}$

Et par suite : $p(\{1\}) = \frac{2}{3}p(\{3\}) = \frac{2}{3} \times \frac{6}{55} = \frac{4}{55}$

$p(\{2\}) = \frac{1}{2}p(\{3\}) = \frac{1}{2} \times \frac{6}{55} = \frac{3}{55}$

$p(\{4\}) = \frac{1}{3}p(\{3\}) = \frac{1}{3} \times \frac{6}{55} = \frac{2}{55}$

$p(\{5\}) = 8p(\{1\}) = 8 \times \frac{4}{55} = \frac{32}{55}$

$p(\{6\}) = 2p(\{1\}) = 2 \times \frac{4}{55} = \frac{8}{55}$

2 Calculons $p(A)$

A est l'événement «obtenir un nombre impair»

Donc $A = \{1;3;5\}$

D'où $p(A) = p(\{1\}) + p(\{3\}) + p(\{5\})$

$= \frac{4}{55} + \frac{6}{55} + \frac{32}{55}$

$= \frac{42}{55}$

Attention:

Dans cet exercice, on ne peut pas utiliser $p(A) = \frac{CardA}{Card\Omega}$ car il n'y a pas équiprobabilité.

3 Calculons $p(B)$

B est l'événement «obtenir un nombre pair»

Méthode 1 : Utilisation de l'événement contraire.

A est l'événement contraire de B, donc $p(B) = 1 - p(A) = 1 - \frac{42}{55} = \frac{13}{55}$

Méthode 2 :

On a : $B = \{2;4;6\}$

ProfSalmi.blogspot.com

Donc : $p(B) = p(\{2\}) + p(\{4\}) + p(\{6\})$

$= \frac{3}{55} + \frac{2}{55} + \frac{8}{55}$

$= \frac{13}{55}$

4 **Calculons** $p(C)$

C est l'événement «obtenir un nombre supérieur ou égal à 4»

Donc $C = \{4;5;6\}$

D'où : $p(C) = p(\{4\}) + p(\{5\}) + p(\{6\})$

$= \frac{2}{55} + \frac{32}{55} + \frac{8}{55}$

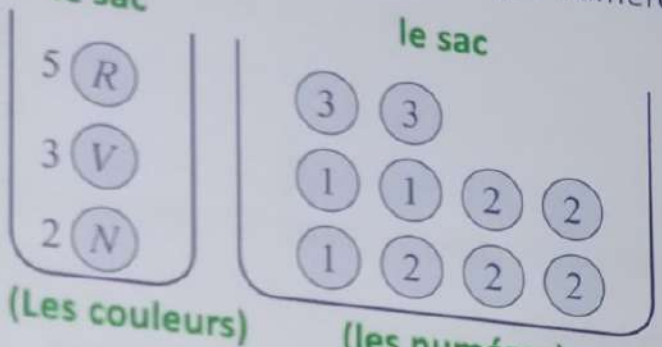
$= \frac{42}{55}$

Exercice 7 **(Tirage d'une boule)**

- Le sac contient 5 boules rouges numérotées : 1;1;2;2;3.

3 boules vertes numérotées : 1;2;2

2 boules noires numérotées : 2;3



- Le tirage est au hasard et les boules sont indiscernables au toucher , il y a donc équiprobabilité.

- L'univers Ω associé à cette expérience aléatoire est l'ensemble des boules du sac (car on tire une seule boule), donc $Card\Omega = 10$

1 **Calculons** $p(A)$

A est l'événement «obtenir une boule noire».

donc $CardA = 2$

Donc $p(A) = \frac{CardA}{Card\Omega} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

2 **Calculons** $p(B)$

B est l'événement : «obtenir un nombre impair».

Donc : $CardB = 5$

ProfSalmi.blogspot.com

D'où $p(B)=\frac{CardB}{Card\Omega}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$

3 Calculons $p(C)$

C est l'événement : «obtenir une boule verte numérotée 2»

Donc $CardC=2$

D'où $p(C)=\frac{CardC}{Card\Omega}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$

4 Sachant que la boule tirée est rouge, calculons la probabilité de l'événement D «cette boule rouge porte le numéro 1».

Dans cette question, on sait que la boule tirée est rouge, donc le nouveau univers Ω' associé à cette expérience est l'ensemble des boules rouges, donc $Card\Omega'=5$

Le sac contient deux boules rouges numérotées 1, donc $p(D)=\frac{2}{5}$.

Exercice 8 (Lancer d'un dépipé)

1 Pour compléter le tableau, on a les informations suivantes :

- 65% des salariés sont des hommes, donc le nombre d'homme est : $\frac{65}{100}\times 100=65$, d'où le nombre de femmes est $100-65=35$
- Le nombre d'hommes ouvriers est 47.
- Le nombre de femmes ingénieurs est 6.
- Le nombre de femmes techniciennes est 8 ; donc le nombre d'ouvrières est : $35-(8+6)=21$

D'où le nombre total des ouvriers (hommes et femmes) est : $47+21=68$

- le nombre total des ingénieurs (hommes et femmes) est 10, donc le nombre d'hommes ingénieurs est $10-6=4$.
- Le nombre d'hommes techniciens est : $65-(4+47)=14$
- Le nombre total de techniciens (hommes et femmes) est : $14+8=22$

On peut ainsi compléter le tableau :

	Ouvriers	Ingénieurs	Techniciens	Total
hommes	47	4	14	65
Femmes	21	6	8	35
Total	68	10	22	100

2 a. Calculons $p(A)$ où A est l'événement «la carte tirée est celle d'un homme»

ProfSalmi.blogspot.com

$$p(A) = \frac{65}{100} = \frac{13}{20} = 0,65$$

b. Calculons $p(B)$ ou B est l'événement «la carte tirée est celle d'un ingénieur».

$$p(B) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10} = 0,1$$

c. Calculons $p(C)$ ou C est l'événement «la carte tirée est celle d'un homme technicien»

$$p(C) = \frac{14}{100} = 0,14$$

3 On tire au hasard une carte parmi celle des ingénieurs ; la probabilité que cette carte soit celle d'une femme est : $\frac{6}{10} = \frac{3}{5} = 0,6$ (le nombre total d'ingénieurs est 10, et parmi eux il ya 6 femmes).

4 on tire au hasard une carte parmi celles des hommes ; la probabilité que cette carte soit celle d'un ouvrier est : $\frac{47}{65}$ (le nombre total d'hommes est 65, parmi eux il y a 47 ouvriers).

3 Probabilité Conditionnelle - Indépendance de deux événements

1. Probabilité conditionnelle

Définition:

Soit A et B deux événements associés à une même expérience aléatoire telle que $p(A) \neq 0$.

La probabilité de l'événement B, sachant que A est réalisé, est le nombre réel noté $p_A(B)$ (ou $p(B/A)$) : ancienne notation) défini par $p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$

Conséquence :

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire.

- Si A et B sont deux événements de Ω ($A \subset \Omega$ et $B \subset \Omega$) tels que $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$;

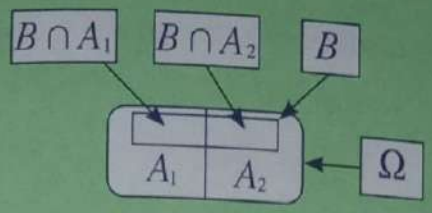
Alors : $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$ et $p(A \cap B) = p(B) \times p_B(A)$

- Si A_1 et A_2 sont deux événements non vides et incompatibles de Ω tels que : $\Omega = A_1 \cup A_2$ (On dit dans ce cas que A_1 et A_2 forment une partition de l'univers Ω).

Alors, pour tout événement B de Ω,

ProfSalmi.blogspot.com

on a : $B=(B\cap A_1)\cup(B\cap A_2)$



D'où $p(B)=(pB\cap A_1)+(pB\cap A_2)$
$=p(A_1)\times p_{A_1}(B)+p(A_2)\times p_{A_2}(B)$

(Cette loi est appelée «loi des probabilités totales)

plus généralement: formule des probabilité totale si $A_1, A_2, ..., A_n$ forment une partition de Ω.

Alors pour tout événements $B(B\ C\ \Omega)$ on a:

$p(B)=p(A_1)p_{A_1}(B)+p(A_2)p_{A_2}(B)+....+p(A_n)p_{A_n}(B)$

2. Indépendance de deux événements

Propriété 1:

Soit A et B deux événements associés à une même expérience aléatoire.

On dit que les événements A et B sont indépendants si:

$p(A\cap B)=p(A)\times p(B)$

Propriété 2:

Soit A et B deux événements associés à une même expérience aléatoire telle que $p(A)\neq 0$

A et B sont indépendants si et seulement si $p_A(B)=p(B)$

Si $p(A)\neq 0$ et $p(B)\neq 0$,

Alors : $p_A(B)=p(B)\iff p_B(A)=p(A)$

Dire que les événements A et B sont indépendants veut dire que la réalisation de l'un d'entre eux n'influe pas celle de l'autre.

Exercices

Exercice 9

Soit A et B deux événements associés à une même expérience aléatoire.

Les questions 1,2 et 3 sont indépendantes.

1 On suppose dans cette question que : $p(A)=0,7$, $p(B)=0,85$ et $p(A\cup B)=0,9$.

a. Calculer $p(A\cap B)$, $p(\overline{A})$, $p(\overline{B})$ et $p(\overline{A\cup B})$.

b. Calculer $p(A\cap\overline{B})$, $p(\overline{A}\cap B)$, $p_B(A)$ et $p_A(B)$.

ProfSalmi.blogspot.com

c. Les événements A et B sont-ils indépendants? justifier.

2 On suppose dans cette question que : $p(\overline{A})=0,36$, $p(\overline{B})=0,74$ et $p(\overline{A\cup B})=0,27$.

a. Calculer $p(A\cap B)$, $p_B(A)$ et $p_A(B)$.

b. Calculer $p(\overline{A}\cap B)$, $p(A\cap\overline{B})$; $p(\overline{A}\cap\overline{B})$ et $p(\overline{A}\cup\overline{B})$

c. Calculer $p_{\overline{A}}(B)$, $p_{\overline{B}}(A)$ et $p_{\overline{B}}(\overline{A})$.

d. Les événements A et B sont-ils indépendants? justifier.

3 On suppose que $p(A\cap B)=0,3$, $p(\overline{B})=0,58$ et $p_A(B)=\frac{6}{13}$.

a. Calculer $p(\overline{A}\cap B)$.

b. Calculer $p(A)$ et $p_B(A)$.

c. Calculer $p(A\cup B)$

Solutions

Exercice 9

1 On a : $p(A\cup B)=0,9$, $p(B)=0,85$ et $p(A)=0,7$

a. Calculons : $p(A\cap B)$

On a : $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$

Donc : $p(A\cap B)=p(A)+p(B)-p(A\cup B)$

$=0,7+0,85-0,9$

$=0,65$

- $p(\overline{A})=1-p(A)=1-0,7=0,3$
- $p(\overline{B})=1-p(B)=1-0,85=0,15$
- $p(\overline{A\cup B})=1-p(A\cup B)$

$=1-0,9$

$=0,1$

b. Calculons : $p(A\cap\overline{B})$

On a : $(A\cap B)\cap(A\cap\overline{B})=\phi$ et $A=(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})$

Donc : $p(A)=p(A\cap B)+p(A\cap\overline{B})$ (Car les événements $A\cap B$ et $A\cap\overline{B}$ sont incompatibles).

ProfSalmi.blogspot.com

D'où : $p(A\cap\overline{B}) = p(A) - p(A\cap B)$
$= 0,7 - 0,65$
$= 0,05$

Calculons : $p(\overline{A}\cap B)$

On a : $B = (A\cap B)\cup(\overline{A}\cap B)$ et $(A\cap B)\cap(\overline{A}\cap B) = \phi$

Donc : $p(B) = p(A\cap B) + p(\overline{A}\cap B)$ (Car les événements $A\cap B$ et $\overline{A}\cap B$ sont incompatibles).

D'où : $p(\overline{A}\cap B) = p(B) - p(A\cap B)$
$= 0,85 - 0,65$
$= 0,2$

- $p_B(A) = \dfrac{p(A\cap B)}{p(B)} = \dfrac{0,65}{0,85} = \dfrac{13}{17}$
- $p_A(B) = \dfrac{p(A\cap B)}{p(A)} = \dfrac{0,65}{0,7} = \dfrac{13}{14}$

c. Indépendance des événements A et B

On a : $p(A)\times p(B) = 0,7\times 0,85 = 0,595$ et $p(A\cap B) = 0,65$

Donc : $p(A\cap B) \neq p(A)\times p(B)$

D'où : A et B ne sont pas indépendants.

2 On a : $p(\overline{A\cup B}) = 0,27$ et $p(\overline{B}) = 0,74$ et $p(\overline{A}) = 0,36$

a. Calculons : $p(A\cap B)$

$p(A\cap B) = p(A) + p(B) - p(A\cup B)$
$= (1 - p(\overline{A})) + (1 - p(\overline{B})) - (1 - p(\overline{A\cup B}))$
$= (1 - 0,36) + (1 - 0,74) - (1 - 0,27)$
$= \dfrac{17}{100} = 0,17$

- $p_B(A) = \dfrac{p(A\cap B)}{p(B)} = \dfrac{0,17}{1 - 0,74} = \dfrac{0,17}{0,26} = \dfrac{17}{26}$
- $p_A(B) = \dfrac{p(A\cap B)}{p(A)} = \dfrac{0,17}{1 - 0,36} = \dfrac{0,17}{0,64} = \dfrac{17}{64}$

b. Calculons : $p(\overline{A}\cap B)$

On a : $B = (B\cap A)\cup(B\cap\overline{A})$

ProfSalmi.blogspot.com

Donc : $p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \overline{A})$

Or, $(A \cap B) \cap (\overline{A} \cap B) = \phi$

Donc : $p(\overline{A} \cap B) = p(B) - p(A \cap B)$

$= (1 - 0,74) - 0,17$

$= 0,09$

▸ **Calculons :** $p(A \cap \overline{B})$

On a : $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$

Donc : $p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \overline{B})$

D'où : $p(A \cap \overline{B}) = p(A) - p(A \cap B)$

$= (1 - 0,36) - 0,17$

$= 0,47$

▸ **Calculons :** $p(\overline{A} \cap \overline{B})$

On a : $\overline{A} = (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$

Donc : $p(\overline{A}) = p(\overline{A} \cap B) + p(\overline{A} \cap \overline{B})$

(car les événements $\overline{A} \cap B$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$ sont incompatibles).

D'où : $p(\overline{A} \cap \overline{B}) = p(\overline{A}) - p(\overline{A} \cap B)$

$= 0,36 - 0,09$

$= 0,27$

Calculons $p(\overline{A} \cup \overline{B})$: $p(\overline{A} \cup \overline{B}) = p(\overline{A}) + p(\overline{B}) - p(\overline{A} \cap \overline{B})$

$= 0,36 + 0,74 - 0,27$

$= 0,83$

c. $p_{\overline{A}}(B) = \dfrac{p(\overline{A} \cap B)}{p(\overline{A})} = \dfrac{0,09}{0,36} = 0,25$

▸ $p_{\overline{B}}(A) = \dfrac{p(A \cap \overline{B})}{p(\overline{B})} = \dfrac{0,47}{0,74} = \dfrac{47}{74}$

▸ **Calculons :** $p_{\overline{B}}(\overline{A})$

Méthode 1 : $p_{\overline{B}}(\overline{A}) = \dfrac{p(\overline{A} \cap \overline{B})}{p(\overline{B})} = \dfrac{0,27}{0,74} = \dfrac{27}{74}$

Méthode 2 : $p_{\overline{B}}(\overline{A}) = 1 - p_{\overline{B}}(A) = 1 - \dfrac{47}{14} = \dfrac{27}{74}$

ProfSalmi.blogspot.com

d. Indépendance des événements A et B

On a : $P(A \cap B) = 0,17$

et $p(A) \times p(B) = (1 - p(\overline{A})) \times (1 - p(\overline{B}))$

$= (1 - 0,36) \times (1 - 0,74)$

$= 0,64 \times 0,26$

$= \frac{104}{625} = 0,1664$

Donc : $p(A \cap B) \neq p(A) \times p(B)$

D'où : les événements A et B ne sont pas indépendants.

3 On a : $p_A(B) = \frac{6}{13}$, $p(\overline{B}) = 0,58$ et $p(A \cap B) = 0,3$

a. Calculons : $p(\overline{A} \cap B)$

On a : $B = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})$

Donc : $p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \overline{A})$

(Car les événements $B \cap A$ et $B \cap \overline{A}$ sont incompatibles)

D'où : $p(B \cap \overline{A}) = p(B) - p(B \cap A)$

$p(B \cap \overline{A}) = (1 - p(\overline{B})) - 0,3$

$= (1 - 0,58) - 0,3$

$= \frac{3}{25} = 0,12$

▸ **Calculons** $p(A)$:

On a : $p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$

Donc : $p(A) = \frac{p(A \cap B)}{p_A(B)} = \frac{0,3}{\frac{6}{13}} = \frac{0,3 \times 13}{6} = \frac{13}{20} = 0,65$

▸ **Calculons** $p_B(A)$: $p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{0,3}{1 - 0,58} = \frac{0,3}{0,42} = \frac{5}{7}$

c. Calculons $p(A \cup B)$:

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

$= 0,65 + (1 - 0,58) - 0,3$

$= 0,77$

ProfSalmi.blogspot.com

4 Tirage avec remise

Tirage successif et avec remise de k éléments dans un ensemble à n éléments $(1 \leqslant k \leqslant n)$ c'est tirer un élément de cet ensemble, noter sa couleur ou son numéro ou ..., le remettre dans l'ensemble, puis procéder à un autre tirage et ainsi de suite jusqu'à tirer au total k éléments.

Dans ce cas, l'ordre est important et il est possible de tirer le même élément plusieurs fois. Il y a donc répétition : on utilise les arrangements avec répétitions. Le nombre de résultats possibles dans ce cas est n^k.

Exercices

Exercice 10 (Tirage de 2 éléments)

Une urne contient 3 boules rouges, 2 boules vertes et une boule jaune. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.
On tire au hasard successivement et avec remise 2 boules de l'urne.
Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
A : «Obtenir deux boules rouges».
B : «Obtenir deux boules jaunes».
C : «Obtenir deux boules de même couleur».
D : «Obtenir deux boules de couleurs différentes».
E : «Obtenir au moins une boule rouge».
F : «Obtenir au plus une boule verte.

Exercice 11 (Tirage de 3 éléments)

Un sac contient 4 boules vertes, 3 boules jaunes et 2 boules rouges. Les boules sont indiscernables au toucher.
On tire successivement et avec remise 3 boules du sac.
Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
A : «Obtenir 3 boules vertes».
B : «Obtenir 3 boules rouges».
C : «Obtenir 3 boules de même couleur».
D : «Obtenir une boule de chaque couleur».
E : «Obtenir une seule boule verte».
F : «Obtenir 2 boules jaunes exactement».
G : «Obtenir au moins une boule rouge».
H : «Obtenir exactement deux couleurs : rouge et vert».

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 12 (Tirage de 4 éléments)

Une urne contient 5 cartes rouges numérotées de 1 à 5.
4 cartes noires numérotées de 1 à 4.
3 cartes blanches numérotées de 1 à 3.
1 carte verte numérotée 1.

Toutes les cartes sont indiscernables au toucher.
On tire successivement et avec tirage 4 cartes de l'urne.
Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
A : «Obtenir 4 cartes blanches».
B : «Obtenir 4 cartes de même couleur».
C : «Obtenir 4 cartes de couleurs différentes 2 à 2».
D : «Obtenir au moins une carte rouge».
E : «Obtenir au plus une carte noire».
F : «N'obtenir que les deux couleurs : blanc et noir».
G : «Obtenir 4 cartes portant le même numéro».
H : «Obtenir deux fois exactement la carte blanche portant le numéro 3».
I : «Obtenir le numéro 2 trois fois exactement.

Solutions

Exercice 10



On tire successivement et avec remise deux boules de l'urne qui contient 6 boules, donc chaque tirage est un arrangement avec répétition de 2 éléments choisi parmi 6. L'univers Ω est donc l'ensemble des arrangements avec répétitions de 2 éléments choisi parmi 6 ; d'où $Card\Omega = 6^2 = 36$

- **Calculons** $p(A)$:

A est l'événement «obtenir deux boules rouges». l'urne contient 3 boules rouges, donc $CardA = 3^2 = 9$

Le tirage étant au hasard et les boules sont indiscernables au toucher il y a donc équiprobabilité, d'où $p(A) = \frac{CardA}{Card\Omega} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

- **Calculons** $p(B)$:

B est l'événement «obtenir deux boules jaunes» et l'urne contient une seule boule jaune, donc $CardB = 1^2 = 1$

D'où : $p(B) = \frac{CardB}{Card\Omega} = \frac{1}{36}$

ProfSalmi.blogspot.com

▸ **Calculons $p(C)$:**

C est l'événement «obtenir deux boules de même couleur»

Réaliser C c'est tirer : deux boules rouges : l'événement A

ou

deux boules jaunes : l'événement B

ou

deux boules vertes : de probabilité : $\frac{2^2}{36}=\frac{1}{9}$

Donc : $p(C)=p(A)+p(B)+\frac{1}{9}$ (Car ces 3 événements sont 2 à 2 incompatibles) $=\frac{1}{4}+\frac{1}{36}+\frac{1}{9}$

$=\frac{7}{18}$

Remarque : On peut aussi calculer $CardC$

$CardC=3^2+2^2+1^2=14$

$p(A)=\frac{CardC}{Card\Omega}=\frac{14}{36}=\frac{7}{18}$

▸ **Calculons $p(D)$:**

Méthode 1 : (Utilisation de l'événement contraire)

L'événement contraire de l'événement D est l'événement C

Donc : $D=\overline{C}$

D'où : $p(D)=p(\overline{C})=1-p(C)=1-\frac{7}{18}=\frac{11}{18}$

Méthode 2 :

Réaliser l'événement D, c'est obtenir :

- Une boule rouge et une boule verte : $(R)(V)$ ou $(V)(R)$
- ou une boule rouge et une boule jaune $(R)(J)$ ou $(J)(R)$
- ou une boule verte et une boule jaune $(V)(J)$ ou $(J)(V)$

Donc : $CardD=2(3^1\times 2^1)+2(3^1\times 1^1)+2(2^1\times 1^1)=22$

D'où $p(D)=\frac{CardD}{Card\,\Omega}=\frac{22}{36}=\frac{11}{18}$

▸ **Calculons $p(E)$**

E est l'événement : «obtenir au moins une boule rouge»

Remarque : Il est préférable d'utiliser l'événement contraire pour calculer la probabilité de l'événement «obtenir au moins une ....»

L'événement contraire de l'événement E est l'événement : $\overline{E}$ Ne pas obtenir

ProfSalmi.blogspot.com

de boules rouges»

L'urne contient 3 boules non rouges, donc $Card\overline{E} = 3^2 = 9$

D'où : $p(\overline{E}) = \frac{Card\overline{E}}{Card\Omega} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

Donc : $p(E) = 1 - p(\overline{E}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

▸ **Calculons** $p(F)$

F est l'événement : «obtenir au plus une boule verte»

Méthode 1 :

Réaliser l'événement F c'est :

- Tirer une boule verte et une boule non verte : $V\overline{V}$ ou $\overline{V}V$

ou

- Ne pas tirer de boules vertes : $\overline{V}\ \overline{V}$ (Attention au coefficient de l'ordre des couleurs)

Donc : $CardF = (2^1 \times 4^1) \times 2 + 4^2 = 32$

D'où : $p(F) = \frac{CardF}{Card\Omega} = \frac{32}{36} = \frac{8}{9}$

Méthode 2 : (Utilisation de l'événement contraire)

L'événement contraire de l'événement F est l'événement $\overline{F}$:

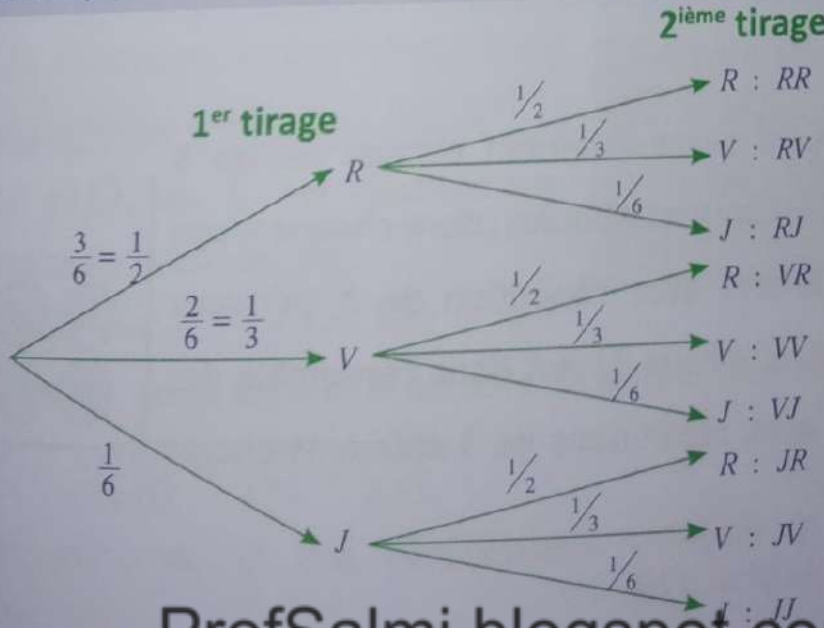
«Obtenir deux boules vertes».

$Card\overline{F} = 2^2 = 4$

Donc : $p(\overline{F}) = \frac{Card\overline{F}}{Card\Omega} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

D'où : $p(F) = 1 - p(\overline{F}) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$ (De cette façon on peut éviter le coefficient d'ordre).

Remarque : On peut calculer la probabilité des événements précédents sans calculer $Card\Omega$, en utilisant l'arbre pondéré ;



ProfSalmi.blogspot.com

où R est l'événement : «la boule tirée est rouge».

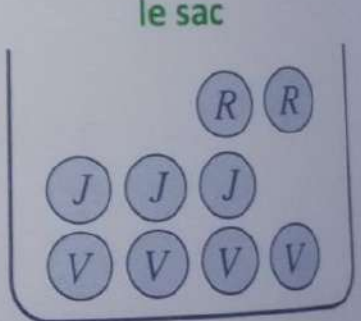
V est l'événement : «la boule tirée est verte».

J est l'événement : «la boule tirée est jaume».

On en déduit que :

- $p(A) = p(RR) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0,25$
- $p(B) = p(JJ) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$
- $p(C) = p(RR) + p(JJ) + p(VV)$
  $= \frac{1}{4} + \frac{1}{36} + \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}\right)$
  $= \frac{7}{18}$
- $p(D) = 1 - p(\overline{D}) = 1 - p(C) = 1 - \frac{7}{18} = \frac{11}{18}$
- $p(E) = 1 - p(\overline{E})$
  $= 1 - [p(VV) + p(VJ) + p(JV) + p(JJ)]$
  $= 1 - \left[\left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{6}\right)\right] = \frac{3}{4}$
- $p(F) = p(VR) + p(RV) + p(VJ) + p(JV) + p(RJ) + p(JR)$
  $+ p(RR) + p(JJ)$
  $= \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{2}\right)$
  $+ \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{6}\right)$
  $= \frac{8}{9}$

Exercice 11



On tire au hasard successivement et avec remise 3 boules du sac qui contient 9 boules ; donc chaque tirage est un arrangement avec répétition de 3 éléments choisis parmi 9. L'univers Ω est donc l'ensemble des arrangements avec répétitions de 3 éléments choisis parmi 9.

donc : $Card\Omega = 9^3 = 729$

ProfSalmi.blogspot.com

▸Calculons $p(A)$, où A est l'événement «obtenir 3 boules vertes»

On a : $CardA = 4^3 = 64$

Or le tirage est au hasard et toutes les boules sont indiscernables au toucher, il y a donc équiprobabilité, d'où : $p(A) = \frac{CardA}{Card\Omega} = \frac{64}{729}$

▸Calculons $p(B)$, où B est l'événement : «obtenir 3 boules rouges»

On a : $CardB = 2^3 = 8$

Donc : $p(B) = \frac{CardB}{Card\Omega} = \frac{8}{729}$

▸Calculons $p(C)$, où C est l'événement : «obtenir 3 boules de même couleur».

Réaliser l'événement C c'est :

- Tirer 3 boules rouges : nombre de choix = 2^3

ou

- Tirer 3 boules jaunes : nombre de choix = 3^3

ou

- Tirer 3 boules vertes : nombre de choix = 4^3

Donc : $CardC = 2^3 + 3^3 + 4^3 = 99$

D'où : $p(C) = \frac{CardC}{Card\Omega} = \frac{99}{729} = \frac{11}{81}$

▸Calculons $p(D)$, où D est l'événement : «obtenir une boule de chaque couleur».

On a : $CardD = (4^1 \times 3^1 \times 2^1) \times 3! = 144$

Donc : $p(D) = \frac{CardD}{Card\Omega} = \frac{144}{729} = \frac{16}{81}$

Remarque :

L'événement C n'est pas l'événement contraire de D puisqu'on peut aussi avoir deux boules de même couleur.

infos:

Le coefficient de l'ordre des 3 couleurs est $3! = 6$:

C'est une permutation de 3 éléments

ces 6 cas sont : VJR ; VRJ ; RVJ ; RJV ; JRV et JVR

▸Calculons $p(E)$, où E est l'événement «obtenir une seule boule verte».

On a : $CardE = (4^1 \times 5^2) \times 3 = 300$ (Le nombre de boules : verte est 4 et le nombre de boules non vertes est 5).

Donc : $p(E) = \frac{CardE}{Card\Omega} = \frac{300}{729} = \frac{100}{243}$

▸Calculons $p(F)$ ou F est l'événement «obtenir 2 boules jaunes exactement»

ProfSalmi.blogspot.com

On a : $CardF = (3^2 \times 6^1) \times 3 = 162$

(Pour réaliser F, on doit avoir : $J\,J\,\overline{J}$ ou $J\,\overline{J}\,J$ ou $\overline{J}\,J\,J$ il y a donc 3 cas à envisager).

Donc : $p(F) = \dfrac{CardF}{Card\Omega} = \dfrac{162}{729} = \dfrac{2}{9}$

infos:

Le coefficient de l'ordre de la couleur verte est $C_3^1 = 3$

On peut aussi considérer le coefficient de l'ordre des 2 boules non vertes : : $C_3^2 = 3$

Ces 3 cas sont :

$V\,\overline{V}\,\overline{V}$; $\overline{V}\,V\,\overline{V}$ et $\overline{V}\,\overline{V}\,V$

▸ Calculons $p(G)$ où G est l'événement : «obtenir au moins une boule rouge».

L'événement contraire de G est $\overline{G}$:» Ne pas obtenir de boules rouges»

On a : $Card\overline{G} = 7^3 = 343$

Donc : $p(\overline{G}) = \dfrac{Card\overline{G}}{Card\Omega} = \dfrac{343}{729}$

D'où : $p(G) = 1 - p(\overline{G}) = 1 - \dfrac{343}{729} = \dfrac{386}{729}$

▸ Calculons $p(H)$, où H est l'événement : «obtenir exactement deux couleurs rouge et vert».

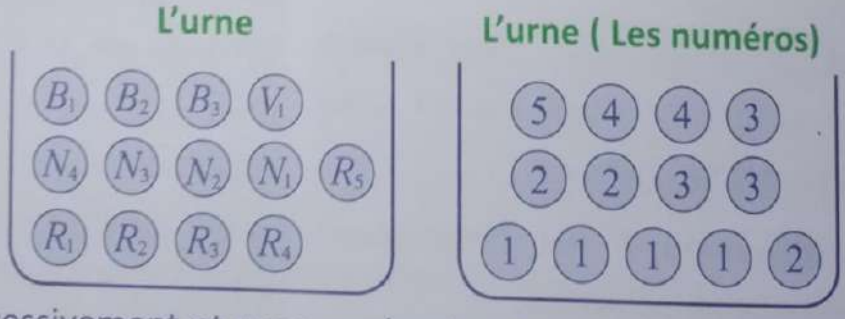
Réaliser l'événement H, c'est obtenir : (RVV ou VRV ou VVR) ou (RRV ou RVR ou VRR).

Donc : $CardH = (2^1 \times 4^2) \times 3 + (2^2 \times 4^1) \times 3 = 144$

D'où : $p(H) = \dfrac{CardH}{Card\Omega} = \dfrac{144}{729} = \dfrac{16}{81}$

Remarque : Dans cet exercice aussi on peut utiliser un arbre pondéré.

Exercice 12



On tire successivement et avec remise 4 cartes de l'urne qui en contient 13. Donc, chaque tirage est un arrangement avec répétition de 4 éléments choisis parmi 13. L'univers Ω est donc l'ensemble des arrangements avec répétitions de 4 éléments choisis parmi 13, d'où $Card\Omega = 13^4 = 28561$.

▸ Calculons $p(A)$, où A est l'événement : «obtenir 4 cartes blanches».

On a : $CardA = 3^4 = 81$, et comme le tirage est au hasard et toutes les

ProfSalmi.blogspot.com

cartes sont indiscernables au toucher, alors il y a équiprobabilité, donc $p(A)=\frac{CardA}{Card\Omega}=\frac{81}{28561}$

▸ Calculons $p(B)$, où B est l'événement : «obtenir 4 cartes de même couleur».

Réaliser l'événement B c'est obtenir : (R)(R)(R)(R) ou (N)(N)(N)(N) ou (B)(B)(B) ou (V)(V)(V)(V)

Donc : $CardB=5^4+4^4+3^4+1^4=963$

D'où : $p(B)=\frac{CardB}{Card\Omega}=\frac{963}{28561}$

▸Calculons $p(C)$ où C est l'événement : «obtenir 4 cartes de couleur 2 à 2 distinctes».

Réaliser l'événement C c'est tirer une boule de chaque couleur » (car il y a 4 couleurs et 4 tirages).

Donc $CardC=(5^1\times4^1\times3^1\times1^1)\times4!=1440$ (le coefficient de l'ordre des 4 couleurs est $4!=24$)

D'où $p(C)=\frac{CardC}{Card\Omega}=\frac{1440}{28561}$

▸Calculons $p(D)$ où D est l'événement : «obtenir au moins une carte rouge»

L'événement contraire de D est $\overline{D}$ « Ne pas obtenir de carte rouge»

On a : $Card\overline{D}=8^4=4096$

Donc : $p(\overline{D})=\frac{Card\overline{D}}{Card\Omega}=\frac{4096}{28561}$

D'où : $p(D)=1-p(\overline{D})=1-\frac{4096}{28561}=\frac{24465}{28561}$

▸Calculons $p(E)$, où E est l'événement : «obtenir au plus une carte noire».

- Dans l'urne, il y a 4 cartes noires et 9 cartes non noires.

Réaliser l'événement E c'est :

- Tirer une carte noire et 3 cartes non noires : $N\ \overline{N}\ \overline{N}\ \overline{N}$ où ou $\overline{N}\ N\ \overline{N}\ \overline{N}$ où $\overline{N}\ \overline{N}\ N\ \overline{N}$ ou $\overline{N}\ \overline{N}\ \overline{N}\ N$
- Tirer 4 cartes toutes non noires : $\overline{N}\ \overline{N}\ \overline{N}\ \overline{N}$

Donc : $CardE=(4^1\times9^3)\times4+9^4=18225$

D'où : $p(E)=\frac{CardE}{Card\Omega}=\frac{18225}{28561}$

▸Calculons $p(F)$, où F est l'événement : «obtenir exactement deux couleurs: noir et blanc»

Réaliser l'événement F c'est :

ProfSalmi.blogspot.com

- Tirer 1 carte blanche et 3 cartes noires : $BNNN$ ou $NBNN$ ou $NNBN$ ou $NNNB$

ou

- Tirer 2 cartes blanches et 2 cartes noires : $BBNN$ où $BNBN$ ou $BNNB$ ou $NBBN$ ou $NNBB$ ou $NBNB$

où

- Tirer 3 cartes blanches et 1 carte noire; $BBBN$ ou $BBNB$ ou $BNBB$ ou $NBBB$

Donc : $CardF = (3^1 \times 4^3) \times C_4^1 + (3^2 \times 4^2) \times C_4^2 + (3^3 \times 4^1) \times C_4^3 = 2064$

D'où : $p(F) = \frac{CardF}{Card\Omega} = \frac{2064}{28561}$

▸Calculons $p(G)$, où G est l'événement «obtenir 4 cartes portant le même numéro : l'urne contient : 4 cartes portant le numéro 1.

3 cartes portant le numéro 2.

3 cartes portant le numéro 3.

2 cartes portant le numéro 4.

1 carte portant le numéro 5.

Donc : $CardG = 4^4 + 3^4 + 3^4 + 2^4 + 1^4 = 435$

D'où $p(G) = \frac{CardG}{Card\Omega} = \frac{435}{28561}$

▸Calculons $p(H)$, où H est l'événement : «obtenir 2 fois exactement la carte blanche portant le numéro 3».

On a : $CardH = (1^2 \times 12^2) \times C_4^2 = 864$

Donc : $p(H) = \frac{CardH}{Card\Omega} = \frac{864}{28561}$

$C_4^2 = 6$ est le coefficient de l'ordre des 2 cartes B_3 : la carte B_3 va apparaître 2 fois sur 4

Calculons $p(I)$, où I est l'événement «obtenir le numéro 2 trois fois exactement».

L'urne contient 3 cartes numérotées 2, et 10 cartes ne portant pas le n° 2

Donc $CardI = (3^3 \times 10^1) \times 4 = 1080$ (le coefficient de l'ordre est : $C_4^1 = 4$ si on considère l'emplacement d'une carte ne portant pas le numéro 2 :

où $C_4^3 = 4$ si on considère que les cartes portant le numéro 2 vont occuper 3 places parmi 4).

ProfSalmi.blogspot.com

Ces 4 cas sont : ② ② ② $\bar{②}$, ② ② $\bar{②}$ ②, ② $\bar{②}$ ② ②, $\bar{②}$ ② ② ②

Donc : $p(I) = \frac{CardI}{Card\Omega} = \frac{1080}{28561}$

5 Tirage sans remise

Tirage successif et sans remise de K éléments dans un ensemble à n éléments $(1 \leq K \leq n)$ c'est tirer un élément de cet ensemble, noter sa couleur ou son numéro ou le mettre à côté, (ne pas le remettre dans l'ensemble, puis procéder à un autre tirage, et ainsi de suite jusqu'à tirer au total K éléments).

Dans ce cas, l'ordre est important mais il n'est pas possible de tirer le même élément plusieurs fois, il n'y a donc pas de répétitions: on utilise les arrangements sans répétition.

Le nombre de résultats possibles dans ce cas est A_n^K.

Exercices

Exercice 13 (Tirage de deux éléments)

Une urne contient 4 boules blanches, 2 boules rouges et une boule noire.

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On tire au hasard successivement et sans remise deux boules de l'urne.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : «Obtenir 2 boules blanches».

B : «Obtenir 2 boules de même couleur».

C : «Obtenir 2 boules de couleurs différentes».

D : «Obtenir une boule rouge».

E : «Obtenir au moins une boule blanche».

F : «Ne pas obtenir de boules rouges».

G : «Obtenir au plus une boule blanche».

Exercice 14 (Tirage de 3 éléments)

Un sac contient : 3 boules vertes numérotées: 1; 2; 3.

4 boules noires numérotées : 1; 2; 3; 4.

2 boules rouges numérotées : 1; 2.

ProfSalmi.blogspot.com

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On tire au hasard successivement et sans remise 3 boules du sac.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : «Obtenir 3 boules noires».

B : «Obtenir 3 boules de même couleur».

C : «Obtenir 3 boules qui portent le même numéro».

D : «Obtenir 3 nombres pairs».

E : «Obtenir au moins une boule noire».

F : «Obtenir une boule de chaque couleur».

G : «Obtenir deux boules vertes exactement».

H : «Obtenir une boule de chaque couleur et portant le même numéro».

I : «La somme des nombres obtenus est égale à 6».

Exercice 15 **(Tirage de 4 éléments)**

Une urne contient 5 jetons rouges, 4 jetons noirs, 3 jetons blancs et 2 jetons verts. Les jetons sont indiscernables au toucher.

On tire au hasard successivement et sans remise 4 jetons de l'urne.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : «Obtenir 4 jetons de même couleur».

B : «Obtenir un jeton de chaque couleur».

C : «Obtenir au moins un jetons rouge».

D : «Obtenir au plus un jeton rouge».

E : «Obtenir 2 jetons blancs exactement».

F : «Obtenir exactement 3 jetons de même couleur».

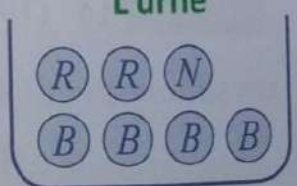
G : «Obtenir exactement 2 jetons de même couleur».

Solutions

Exercice 13

On tire successivement et sans remise 2 boules de l'urne qui contient 7 boules. Donc chaque tirage est un arrangement sans répétition de 2 éléments choisis parmi 7.

L'univers Ω est donc l'ensemble des arrangements sans



ProfSalmi.blogspot.com

répétition de deux éléments choisis parmi 7, d'où : $Card\Omega = A_7^2 = 42$.

Calculons $p(A)$ où A est l'événement : «Obtenir deux boules blanches».

On a : $CardA = A_4^2 = 12$.

et puisque le tirage est au hasard, et les boules sont indiscernables au toucher; alors il y a équiprobabilité.

Donc : $p(A) = \frac{CardA}{Card\Omega} = \frac{12}{42} = \frac{2}{7}$.

Calculons $p(B)$ où B est l'événement : «Obtenir 2 boules de même couleur».

Réaliser l'événement B c'est :

- Tirer deux boules blanches parmi 4.

ou

- Tirer deux boules rouges parmi 2.

(On ne peut pas dans ce cas obtenir 2 boules noires, car l'urne contient une seule boule noire et le tirage est sans remise).

Donc : $CardB = A_4^2 + A_2^2 = 14$.

D'où : $p(B) = \frac{CardB}{Card\Omega} = \frac{14}{42} = \frac{1}{3}$.

Calculons $p(C)$ où C est l'événement : «Obtenir 2 boules de couleurs différentes».

L'événement contraire de C est l'événement B ; $\overline{C} = B$

Donc : $p(C) = 1 - p(\overline{C})$

$= 1 - p(B)$

$= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Calculons $p(D)$ où D est l'événement : «obtenir une seule boule rouge».

On a : $CardD = (A_2^1 \times A_5^1) \times 2 = 20$

Donc : $p(D) = \frac{CardD}{Card\Omega} = \frac{20}{42} = \frac{10}{21}$

Calculons $p(E)$ où E est l'événement : «Obtenir au moins une boule blanche».

L'événement contraire de E est l'événement $\overline{E}$ «Ne pas obtenir de boules blanches».

$Card\overline{E} = A_3^2 = 6$

Attention:

Attention au coefficient de l'ordre des couleurs: il y a 2 cas : $\textcircled{R}\textcircled{\overline{R}}$; $\textcircled{\overline{R}}\textcircled{R}$

ProfSalmi.blogspot.com

$p(\overline{E}) = \frac{Card\overline{E}}{Card\Omega} = \frac{6}{42} = \frac{1}{7}$

Donc : $p(E) = 1 - p(\overline{E})$

$= 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$

D'où : $p(E) = \frac{6}{7}$.

▸Calculons $p(F)$ où F est l'événement : «Ne pas obtenir de boules rouges».

On a : $CardF = A_5^2 = 20$

Donc : $p(F) = \frac{CardF}{Card\Omega} = \frac{20}{42} = \frac{10}{21}$

▸ Calculons $p(G)$ où G est l'événement : «Obtenir au plus une boule blanche».

Réaliser l'événement G c'est :

- Tirer une boule blanche et une boule non blanche : $\textcircled{B}\textcircled{\overline{B}}$ ou $\textcircled{\overline{B}}\textcircled{B}$

ou

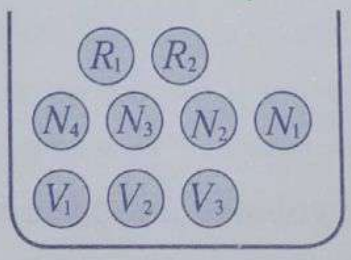
- Tirer deux boules non blanches : $\textcircled{\overline{B}}\textcircled{\overline{B}}$

On a : $CardG = (A_4^1 \times A_3^1) \times 2 + A_3^2 = 30$

Donc : $p(G) = \frac{CardG}{Card\Omega} = \frac{30}{42} = \frac{5}{7}$

Exercice 14

La sac (Couleurs et numéros)



La sac (que les numéros)



On tire successivement et sans remise 3 boules du sac qui contient 9 boules; donc chaque tirage est un arrangement sans répétition de 3 boules choisies parmi 9. L'univers Ω est donc l'ensemble des arrangements sans répétition de 3 boules choisies parmi 9.

Donc : $Card\Omega = A_9^3 = 504$.

▸Calculons $p(A)$ où A est l'événement : «Obtenir 3 boules noires».

On a : $CardA = A_4^3 = 24$

ProfSalmi.blogspot.com

or, le tirage est au hasard et toutes les boules sont indiscernables au toucher il y a donc équiprobabilité.

D'où : $p(A)=\frac{cardA}{Card\Omega}=\frac{24}{504}=\frac{5}{84}$

- Calculons $p(B)$ où B est l'événement : «Obtenir 3 boules de même couleur».

Réaliser l'événement B, c'est :

- Tirer 3 boules vertes (parmi 3)

ou

- Tirer 3 boules noires (parmi 4)

Donc : $CardB=A_3^3+A_4^3=30$

D'où : $p(B)=\frac{CardB}{Card\Omega}=\frac{30}{504}=\frac{5}{84}$.

- Calculons $p(C)$ où C est l'événement : «Obtenir 3 boules qui portent le même numéro».

Réaliser l'événement C c'est :

- Tirer 3 boules qui portent le numéro 1 (parmi 3)

ou

- Tirer 3 boules qui portent le numéro 2 (parmi 3)

Donc : $CardC=A_3^3+A_3^3=12$

D'où : $p(C)=\frac{CardC}{Card\Omega}=\frac{12}{504}=\frac{1}{42}$.

- Calculons $p(D)$ où D est l'événement : «Obtenir 3 nombres pairs».

Le sac contient 4 boules portant des nombres pairs, donc :

$CardD=A_4^3=24$ d'où : $p(D)=\frac{24}{504}=\frac{1}{21}$

- Calculons $p(E)$ où E est l'événement : «Obtenir au moins une boule noire».

L'événement contraire de E est $\overline{E}$ «ne pas obtenir de boules noires».

$Card\overline{E}=A_5^3=60$

Donc : $p(\overline{E})=\frac{Card\overline{E}}{Card\Omega}=\frac{60}{504}=\frac{5}{42}$

D'où : $p(E)=1-p(\overline{E})$

$=1-\frac{5}{42}$

$=\frac{37}{42}$

Attention:

Le coefficient de l'ordre ici est : $A_3^3=3!$ car il s'agit de permuter les 3 couleurs : VNR ou VRN ou NVR ou NRV ou RVN ou RNN.

ProfSalmi.blogspot.com

▸ Calculons $p(F)$ où F est l'événement : «obtenir une boule de chaque couleur».

On a : $CardF = (A_3^1 \times A_4^1 \times A_2^1) \times 3! = 144$

Donc : $p(F) = \frac{CardF}{Card\Omega} = \frac{144}{504} = \frac{2}{7}$.

Attention:

Le coefficient de l'ordre ici est: $C_3^2 = 3$: deux boules vertes vont occuper 2 places parmi 3. C'est aussi $C_3^1 = 1$: la boule non verte va occuper une place parmi 3.

▸ Calculons $p(G)$ où G est l'événement : «Obtenir deux boules vertes exactement»: $VV\overline{V}$ ou $V\overline{V}V$ ou $\overline{V}VV$.

$CardG = (A_3^2 \times A_6^1) \times 3 = 108$

Donc : $p(G) = \frac{CardG}{Card\Omega} = \frac{108}{504} = \frac{3}{14}$

▸ Calculons $p(H)$ où H est l'événement : «Obtenir une boule de chaque couleur et portant le même numéro».

Réaliser l'événement H, c'est :

- tirer $(V_1)(N_1)(R_1)$ (nombre de permutations : $3! = 6$).

ou

- tirer $(V_2)(N_2)(R_2)$ (nombre de permutations : $3! = 6$).

Donc : $CardH = (A_1^1 \times A_1^1 \times A_1^1) \times 6 + (A_1^1 \times A_1^1 \times A_1^1) \times 6 = 12$

D'où : $p(H) = \frac{12}{504} = \frac{1}{42}$.

▸ Calculons $p(I)$ où I est l'événement : «la somme des nombres obtenus est égale à 6».

Pour obtenir une somme égale à 6, il faut tirer : (2;2;2) ou (3;2;1) ou (4;1;1) (avec les différentes permutations possibles).

Le nombre de boules dans le sac portant:

- Le n°2 est 3.
- Le n°1 est 3.
- Le n°3 est 2.
- Le n°4 est 1.

Donc : $CardI = A_3^3 + (A_2^1 \times A_3^1 \times A_3^1) \times 6 + (A_1^1 \times A_3^2) \times 3$

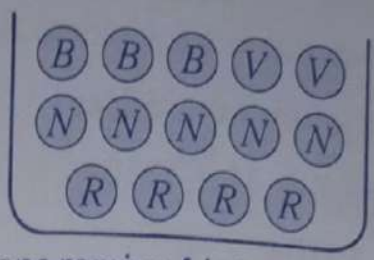
$= 132$

Donc : $p(I) = \frac{CardI}{Card\Omega} = \frac{132}{504} = \frac{11}{42}$

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 15

L'urne



On tire successivement et sans remise 4 jetons de l'urne qui contient 14 jetons, donc chaque tirage est un arrangement sans répétition de 4 éléments choisis parmi 14.

D'où l'univers Ω est l'ensemble des arrangements sans répétitions de 4 éléments choisis parmi 14.

Donc : $Card\Omega = A_{14}^4 = 24024$.

▸ Calculons $p(A)$ où A est l'événement : «obtenir 4 jetons de même couleur».

Réaliser l'événement A, c'est :

- tirer 4 jetons rouges (parmi 5).

ou

- tirer 4 jetons noirs (parmi 4).

Donc : $CardA = A_5^4 + A_4^4 = 144$

- Le tirage est au hasard et les jetons sont indiscernables au toucher, il y a donc équiprobabilité.

D'où : $p(A) = \frac{CardA}{Card\Omega} = \frac{144}{24024} = \frac{6}{1001}$.

▸ Calculons $p(B)$ où B est l'événement : «obtenir un jeton de chaque couleur».

$CardB = (A_5^1 \times A_4^1 \times A_3^1 \times A_2^1)4! = 1440$

Donc : $p(B) = \frac{CardB}{Card\Omega} = \frac{1440}{24024} = \frac{60}{1001}$

▸ Calculons $p(C)$ où C est l'événement : «obtenir au moins un jeton rouge».

L'événement contraire de C est $\overline{C}$ «Ne pas obtenir de jetons rouges»

$Card\overline{C} = A_9^4 = 3024$ (L'urne contient 9 jetons non rouges).

$p(\overline{C}) = \frac{Card\overline{C}}{Card\Omega} = \frac{3024}{24024} = \frac{18}{143}$

Donc : $p(C) = 1 - p(\overline{C}) = 1 - \frac{18}{143} = 125$

▸ Calculons $p(D)$ où D est l'événement : «obtenir au plus un jeton rouge».

ProfSalmi.blogspot.com

Réaliser D, c'est : - tirer un jeton rouge et 3 jetons non rouges.

ou

- tirer 4 jetons non rouges.

Donc: $CardD = (A_5^1 \times A_9^3) \times 4 + A_9^4 = 13104$

D'où : $p(D) = \frac{CardD}{Card\Omega} = \frac{13104}{24024} = \frac{6}{11}$.

Attention:
Le coefficient de l'ordre du jeton rouge est : $C_4^1 = 4$: ($\overline{R}\,\overline{R}\,\overline{R}R$ ou $\overline{R}\,\overline{R}\,R\overline{R}$ ou $\overline{R}\,R\overline{R}\,\overline{R}$ ou $R\overline{R}\,\overline{R}\,\overline{R}$).

- Calculons $p(E)$ où E est l'événement : «obtenir 2 jetons blancs exactement».

On a : $CardE = (A_5^2 \times A_{11}^2) \times C_4^2 = 3960$

Donc : $p(E) = \frac{CardE}{Card\Omega} = \frac{3960}{24024} = \frac{15}{91}$

Attention:
Le coefficient de l'ordre ici est : $C_4^2 = 6$: les 2 jetons blancs vont occuper 2 places parmi 4:
$BB\overline{B}\,\overline{B}$ ou $B\overline{B}B\overline{B}$ ou $B\overline{B}\,\overline{B}B$ ou $\overline{B}BB\overline{B}$ ou $\overline{B}B\overline{B}B$ ou $\overline{B}\,\overline{B}BB$.

• Calculons $p(F)$ où F est l'événement : «obtenir exactement 3 jetons de même couleur».

Réaliser l'événement F c'est : $BBB\overline{B}$ ou $NNN\overline{N}$ ou $RRR\overline{R}$.

- tirer 3 jetons blancs et un jeton non blanc : (4 cas)

ou

- tirer 3 jetons noirs et un jeton non noir: (4 cas)

ou

- tirer 3 jetons rouges et un jeton non rouge: (4 cas)

Donc : $CardF = (A_5^3 \times A_{11}^1) \times 4 + (A_4^3 \times A_{10}^1) \times 4 + (A_5^3 \times A_9^1) \times 4$

$= 3384$

D'où : $p(F) = \frac{CardF}{Card\Omega} = \frac{3384}{24024} = \frac{141}{1001}$

- Calculons $p(G)$ où G est l'événement : «obtenir exactement 2 jetons de même couleur».

Quand on tire 4 jetons, on peut avoir:

- 4 jetons de même couleur : c'est l'événement A.

ou

- 3 jetons de même couleur et 1 jeton de couleur différente: c'est F.

ou

- 2 jetons exactement de même couleur : c'est l'événement G.

ou

ProfSalmi.blogspot.com

- 4 jetons de couleurs 2 à 2 différentes : c'est l'événement B.

Donc : $A \cup F \cup G \cup B = \Omega$

or, les événements A, F, G et B sont 2 à 2 incomparables.

donc : $p(A)+p(F)+p(G)+p(B)=p(\Omega)$

D'où : $p(G)=1-\left(\frac{6}{1001}+\frac{141}{1001}+\frac{60}{1001}\right)=\frac{794}{1001}$.

6 Tirages simultanés

Tirer simultanément K éléments parmi n, c'est tirer en même temps K éléments parmi n, on forme ainsi un ensemble à K éléments; il n'y a donc ni ordre ni répétition. On utilise les combinaisons.

- Le nombre de tirages simultanés de K éléments parmi n est le nombre de combinaisons de K éléments choisis parmi n: C_n^p.

Exercices

Exercice 16

Une urne contient 3 boules blanches, 4 boules rouges et 2 boules vertes. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On tire simultanément et au hasard 3 boules de l'urne.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants:

A: «obtenir 3 boules rouges».

B: «obtenir 3 boules de même couleur».

C: «obtenir une boule de chaque couleur».

D: «obtenir au moins une boule rouge».

E: «obtenir au plus une boule rouge».

F: «obtenir deux boules exactement de même couleur».

Exercice 17

Le bureau d'une association est formé de 6 femmes et 5 hommes, parmi eux, on veut choisir un comité de 4 membres pour représenter cette association dans un festival.

(On assimile ce choix à un tirage simultané).

1 Calculer la probabilité de chacun des événements A et B suivants :

A: «Le comité choisi est formé de 2 hommes et 2 femmes».

B: «Le comité choisi contient au moins un homme».

2 On suppose que M. Ahmed, le président de cette association est membre

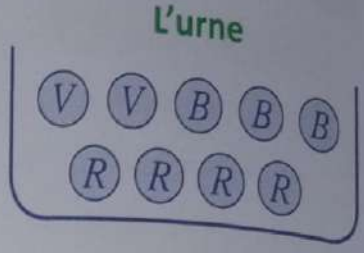
ProfSalmi.blogspot.com

de ce comité.
Calculer la probabilité des événements suivants:
C : «Le comité choisi contient 3 hommes exactement».
D : «Le comité choisi contient la secrétaire».

Solutions

Exercice 16

On tire simultanément et au hasard 3 boules de l'urne qui contient 9 boules, donc chaque tirage est une combinaison de 3 éléments choisis parmi 9. L'univers Ω est donc l'ensemble des combinaisons de 3 éléments choisis parmi 9, d'où $Card\Omega = C_9^3 = 84$.



▸ Calculons $p(A)$ où A est l'événement «obtenir 3 boules rouges».

On a : $CardA = C_4^3 = 4$

Or le tirage est au hasard et les boules sont indiscernables au toucher, il y a donc équiprobabilité.

D'où : $p(A) = \frac{CardA}{Card\Omega} = \frac{4}{84} = \frac{1}{21}$

▸ Calculons $p(B)$ où B est l'événement «obtenir 3 boules de même couleur».

On a : $CardB = C_4^3 + C_3^3 = 5$

Donc : $p(B) = \frac{CardB}{Card\Omega} = \frac{5}{84}$

▸ Calculons $p(C)$ où C est l'événement «obtenir une boule de chaque couleur».

On a : $CardB = C_4^1 \times C_3^1 \times C_2^1 = 24$

Donc : $p(C) = \frac{CardC}{Card\Omega} = \frac{24}{84} = \frac{2}{7}$

▸ Calculons $p(D)$ où D est l'événement «obtenir au moins une boule rouge».

L'événement contraire de D est l'événement :

$\overline{D}$ «Ne pas obtenir de boules rouges».

On a : $Card\overline{D} = C_5^3 = 10$ (Le nombre de boules non rouges est 5).

Donc : $p(\overline{D}) = \frac{Card\overline{D}}{Card\Omega} = \frac{10}{84} = \frac{5}{42}$

D'où : $p(D) = 1 - p(\overline{D})$

$= 1 - \frac{5}{42}$

$= \frac{37}{42}$

ProfSalmi.blogspot.com

▸ Calculons $p(E)$ où E est l'événement «obtenir au plus une boule rouge».

Réaliser l'événement E, c'est :

- tirer une boule rouge (parmi 4) et 2 boules non rouges (parmi 5).

ou

- tirer 3 boules non rouges (parmi 5).

Donc : $CardE = C_4^1 \times C_5^2 + C_5^3 = 50$

D'où : $p(E) = \frac{CardE}{Card\Omega} = \frac{50}{84} = \frac{25}{42}$.

▸ Calculons $p(F)$ où F est l'événement «obtenir deux boules exactement de même couleur».

Méthode 1:

Quand on tire simultanément 3 boules de l'urne, on peut avoir :

- 3 boules de même couleur : l'événement B

ou

- 3 boules de couleurs 2 à 2 distinctes : l'événement C

ou

- 2 boules exactement de même couleur : l'événement F

Donc : $B \cup C \cup F = \Omega$

Or les événements B, C et F sont 2 à 2 incompatibles.

Donc : $p(B)+p(C)+p(F) = p(\Omega) = 1$

D'où : $p(F) = 1-(p(B)+p(C))$

$$= 1-\left(\frac{5}{84}+\frac{24}{84}\right)$$

$$= \frac{55}{84}$$

Méthode 2:

Réaliser l'événement F c'est :

- tirer 2 boules blanches et une boule non blanche : Nombre de choix $C_3^2 \times C_6^1$

ou

- tirer 2 boules rouge et une boule rouge : Nombre de choix $C_4^2 \times C_5^1$

ou

- tirer 2 boules vertes et une boule non verte : Nombre de choix $C_2^2 \times C_7^1$

Donc : $CardF = C_3^2 \times C_6^1 + C_4^2 \times C_5^1 + C_2^2 \times C_7^1 = 55$

D'où : $p(F) = \frac{CardF}{Card\Omega} = \frac{55}{84}$

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 17

1 On choisis un comité de 4 personnes parmi 11, donc chaque comité est une combinaison de 4 éléments choisis parmi 11; donc l'univers Ω est l'ensemble des combinaisons de 4 éléments choisis parmi 11.

D'où : $Card\Omega = C_{11}^4 = 330$

▸ Calculons $p(A)$ où A est l'événement «Le comité choisi est formé de 2 hommes et 2 femmes».

On a : $CardA = C_5^2 \times C_6^2 = 150$

Donc : $p(A) = \frac{CardA}{Card\Omega} = \frac{150}{330} = \frac{1}{2}$ (car il y équiprobabilité).

▸ Calculons $p(B)$ où B est l'événement «Le comité choisi contient au moins un homme».

L'événement contraire de B est l'événement $\overline{B}$ «Le comité choisi est formé de 4 femmes».

On a : $Card\overline{B} = C_6^4 = 15$

Donc : $p(\overline{B}) = \frac{Card\overline{B}}{Card\Omega} = \frac{15}{330} = \frac{1}{22}$

D'où : $p(B) = 1 - p(\overline{B}) = 1 - \frac{1}{22} = \frac{21}{22}$

2 Dans cette question, le président de l'association doit être membre du comité choisi.

▸ Calculons $p(C)$ où C est l'événement «Le comité choisi contient 3 hommes exactement».

Pour réaliser l'événement C, il faut:

- choisir le président M. Ahmed.
- choisir 2 hommes parmi 4 (on exclut le président).
- choisir 1 femme parmi 6.

Donc : $CardC = C_1^1 \times C_4^2 \times C_6^1 = 36$

D'où : $p(C) = \frac{CardC}{Card\Omega} = \frac{36}{330} = \frac{6}{55}$

▸ Calculons $p(D)$ où D est l'événement «Le comité choisi contient la secrétaire».

Pour réaliser l'événement D, il faut :

- choisir le président M. Ahmed.
- choisir la secrétaire.
- choisir 2 membres parmi les 9 restants.

ProfSalmi.blogspot.com

Donc : $Card D = C_1^1 \times C_1^1 \times C_9^2 = 36$

D'où : $p(D) = \frac{Card D}{Card \Omega} = \frac{36}{330} = \frac{6}{55}$.

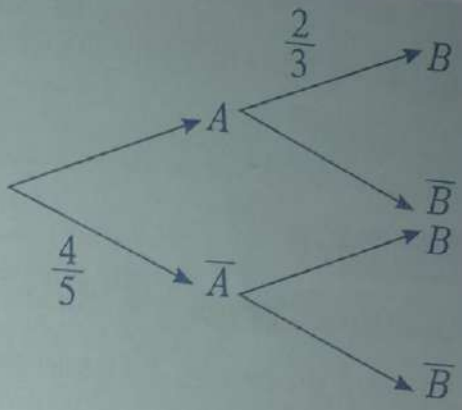
7 Probabilité conditionnelle - Indépendance de deux événements

Exercices

Exercice 18

Soit A et B deux événements associés à une même expérience aléatoire.

On considère l'arbre suivant :



1 Calculer $p(A)$ et $p_A(\overline{B})$.

2 Compléter l'arbre par les probabilités manquantes sachant que : $p(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{1}{20}$.

3 Calculer $p(B)$.

4 Les événements A et B sont-il indépendants?

Exercice 19

Une maladie atteint 1% d'une population donnée.

Un test de dépistage donne les résultats suivants:

- chez les individus malades, 99% des tests sont positifs.
- chez les individus non malades, 98% des tests sont négatifs.

On choisit au hasard un individu de cette population.

On considère les événements suivants:

T : «Le test est positif» et M : «L'individu choisi est malade».

1 Construire un arbre pondéré, et calculer $p(\overline{M})$, $p_M(\overline{T})$ et $p_{\overline{M}}(T)$.

2 Calculer $p(T \cap M)$ et $p(\overline{M} \cap T)$ et en déduire $p(T)$.

3 Sachant que le test est positif, quelle est la probabilité que cet individu soit malade?

Exercice 20

Un sac S_1 contient 5 boules rouges et 3 boules noires.

Un sac S_2 contient 2 boules rouges et une boule noire.

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On choisit au hasard l'un des sacs, puis on en tire au hasard une boule. (il s'agit du sac S_1 ou du sac S_2)



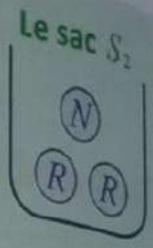
ProfSalmi.blogspot.com

On considère les événements :

S_i : «choisir le sac S_i» où $i \in \{1;2\}$.

R : «obtenir une boule rouge».

N : «obtenir une boule noire».



1 Construire un arbre pondéré.

2 Calculer la probabilité de choisir le sac S_2 et obtenir une boule rouge.

3 Calculer la probabilité d'obtenir une boule rouge.

4 Sachant que la boule tirée est noire, quelle est la probabilité qu'elle soit tirée du sac S_1 ?

Exercice 21

Une usine d'horlogerie fabrique des montres en très grande série. Ces montres peuvent présenter, à l'issue de la fabrication deux défauts indépendants D_1 et D_2.

Une étude statistique a permis d'établir que, pour une montre sortant de l'usine, le défaut D_1 apparaît avec une probabilité de 0,02; alors que la probabilité d'apparition du défaut D_2 est 0,1.

On prélève au hasard une montre à l'issue de la fabrication.

On considère les événements suivants:

D_1 : «La montre présente le défaut D_1»

D_2 : «La montre présente le défaut D_2»

A : «La montre ne présente aucun défaut»

B : «La montre présente un seul défaut»

1 Quelle est la probabilité pour que la montre choisis présente les deux défauts?

2 a. Exprimer l'événement A en fonction des événements D_1 et D_2.

b. Montrer que $p(A) = 0,882$ (on rappelle que $\overline{E} \cap \overline{F} = \overline{E \cup F}$)

3 a. Exprimer l'événement B en fonction des événements D_1 et D_2.

b. Calculer $p(D_1 \cap \overline{D_2})$ et $p(\overline{D_1} \cap D)$.

c. En déduire que : $p(B) = 0,116$.

4 Calculer $p(B)$ d'une autre façon.

ProfSalmi.blogspot.com

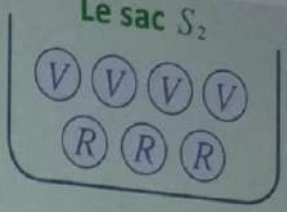
Exercice 22

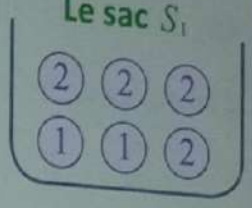
- Un sac S_1 contient : 2 jetons portant le numéro 1.
4 jetons portant le numéro 2.

Tous les jetons sont indiscernables au toucher.

- Un sac S_2 contient : 3 boules rouges et 4 boules vertes.

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.





1 On tire au hasard un jeton de S_1.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : «Le jeton tiré porte le numéro 1».

B : «Le jeton tiré porte le numéro 2».

2 On considère l'expérience aléatoire suivante :

On tire au hasard un jeton de S_1 et on note son numéro:

- si ce numéro est 1, on tire au hasard une boule de S_2.
- si ce numéro est 2, on tire au hasard simultanément deux boules de S_2.

Soit E_n l'événement: «obtenir exactement n boules rouges» où $n \in \{1;2\}$.

a. Montrer que : $p(E_1)=\frac{11}{21}$ et $p(E_2)=\frac{2}{21}$

b. Sachant qu'on a obtenu une seule boule rouge, calculer la probabilité pour que le jeton tiré de S_1 porte le numéro 1.

Solutions

Exercice 18

1 **Calculons $p(A)$:**

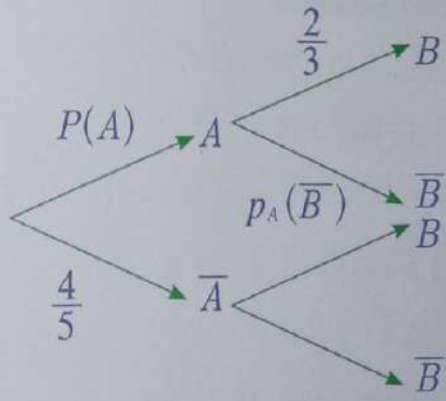
On a : $p(\overline{A})=\frac{4}{5}$ (voir l'arbre)

Donc : $p(A)=1-p(\overline{A})=1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$

Calculons $p_A(\overline{B})$:

On a : $p_A(B)=\frac{2}{3}$ (voir l'arbre)

Or: $p_A(\overline{B})=1-p_A(B)$, donc : $p_A(\overline{B})=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$



2 **Complétons l'arbre pondéré sachant que $p(\overline{A}\cap\overline{B})=\frac{1}{20}$**

Pour compléter l'arbre, il faut calculer les probabilités manquantes : $p_{\overline{A}}(B)$ et $p_{\overline{A}}(\overline{B})$.

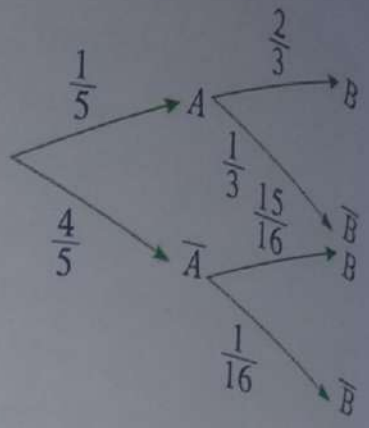
ProfSalmi.blogspot.com

On a : $p_{\overline{A}}(\overline{B}) = \dfrac{p(\overline{A} \cap \overline{B})}{p(\overline{A})} = \dfrac{\frac{1}{20}}{\frac{4}{5}} = \dfrac{1}{16}$

Or: $p_{\overline{A}}(B) = 1 - p_{\overline{A}}(\overline{B})$

Donc : $p_{\overline{A}}(B) = 1 - \dfrac{1}{16} = \dfrac{15}{16}$

On peut aussi compléter l'arbre.



3 Calculons $p(B)$:

On a : $B = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})$

Donc : $p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \overline{A})$

(Car les événements $(B \cap A)$ et $(B \cap \overline{A})$ sont incompatibles)

D'où : $p(B) = p(A) \times p_A(B) + p(\overline{A}) \times p_{\overline{A}}(B)$

$= \left(\frac{1}{5} \times \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{4}{5} \times \frac{15}{16}\right) = \frac{53}{60}$

4 Indépendance des événements A et B:

On a : $p(A) \times p(B) = \frac{1}{5} \times \frac{53}{60} = \frac{53}{300}$

et $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B) = \frac{1}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{15}$

Donc : $p(A \cap B) \neq p(A) \times p(B)$

D'où les événements A et B ne sont pas indépendants.

Exercice 19

1 L'arbre pondéré:

▸ Calculons $p(\overline{M})$:

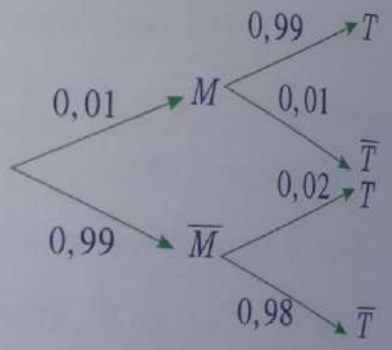
$p(\overline{M}) = 1 - p(M) = 1 - 0,01 = 0,99$

▸ Calculons $P_M(\overline{T})$:

$P_M(\overline{T}) = 1 - p_M(T) = 1 - 0,99 = 0,01$

▸ Calculons $P_{\overline{M}}(T)$:

$P_{\overline{M}}(T) = 1 - p_{\overline{M}}(\overline{T}) = 1 - 0,98 = 0,02$



2 Calculons $p(T \cap M)$:

$p(T \cap M) = p(M) \times p_M(T)$

$= 0,01 \times 0,99$

$= 0,0099$

ProfSalmi.blogspot.com

Calculons $p(\overline{M}\cap T)$: $p(\overline{M}\cap T)=p(\overline{M})\times p_{\overline{M}}(T)$

$=0,99\times 0,02$

$=0,0198$

Calculons $p(T)$:

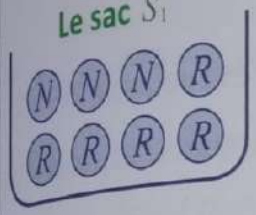
On a : $T=(T\cap M)\cup(T\cap\overline{M})$

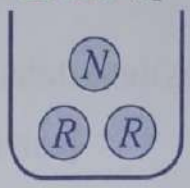
Donc : $p(T)=p(T\cap M)+p(T\cap\overline{M})$

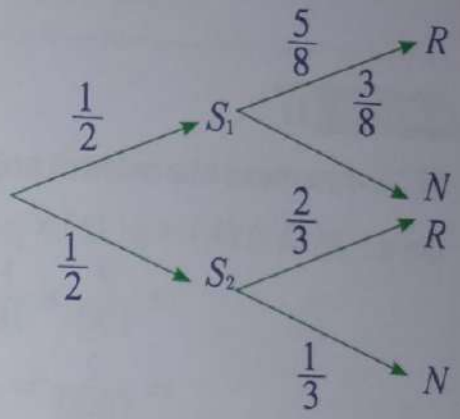
$=0,0099+0,0198=0,0297$

3 Calculons $p_T(M)$: $p_T(M)=\dfrac{P(M\cap T)}{P(T)}=\dfrac{0,0099}{0,0297}=\dfrac{1}{3}$

Exercice 20







1 **L'arbre pondéré:**

Les sacs S_1 et S_2 ont la même probabilité d'être choisis : $p(S_1)=p(S_2)=\dfrac{1}{2}$

2 La probabilité de choisir le sac S_2 et d'obtenir une boule rouge est : $p(S_2\cap R)$

$p(S_2\cap R)=p(S_2)\times p_{S_2}(R)$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}$

$=\dfrac{1}{3}$

3 La probabilité d'obtenir une boule rouge est : $p(R)$

On a : $R=(R\cap S_1)\cup(R\cap S_2)$

Donc : $p(R)=p(R\cap S_1)+p(R\cap S_2)$ (car les événements $(R\cap S_2)$ et $(R\cap S_1)$

$=p(S_1)\times p_{S_1}(R)+\dfrac{1}{3}$ sont incompatibles).

$=\left(\dfrac{1}{2}\times\dfrac{5}{8}\right)+\dfrac{1}{3}$

$=\dfrac{31}{48}$

4 La boule tirée est noire. Calculons la probabilité qu'elle soit tirée du sac S_1 : $p_N(S_1)$.

ProfSalmi.blogspot.com

On a : $p_N(S_1) = \dfrac{p(S_1 \cap N)}{p(N)}$

- $p(N) = 1 - p(R)$ (car : $N = \overline{R}$)
$= 1 - \dfrac{31}{48} = \dfrac{17}{48}$

- $p(S_1 \cap N) = p(S_1) \times p_{S_1}(N)$
$= \dfrac{1}{2} \times \dfrac{3}{8}$
$= \dfrac{3}{16}$

Donc : $p_N(S_1) = \dfrac{p(S_1 \cap N)}{p(N)} = \dfrac{3}{16} \times \dfrac{48}{17} = \dfrac{9}{17}$

Exercice 21

1 L'événement «La montre présente les deux défauts» est l'événement $D_1 \cap D_2$:

On a : $p(D_1 \cap D_2) = p(D_1) \times p(D_2)$ (car D_1 et D_2 sont indépendants)
$= \dfrac{2}{100} \times \dfrac{10}{100}$
$= \dfrac{2}{1000} = \dfrac{1}{500} = 0,002$

Donc : $p(D_1 \cap D_2) = 0,002$

2 a. Exprimons A en fonction de D_1 et D_2 :

L'événement A «La montre ne présente aucun défaut» veut dire que la montre choisie ne présente ni le défaut D_1 ni le défaut D_2.

Donc : $A = \overline{D_1} \cap \overline{D_2}$.

b. Montrons que : $p(A) = 0,882$

$p(A) = p(\overline{D_1} \cap \overline{D_2})$
$= p(\overline{D_1 \cup D_2})$
$= 1 - p(D_1 \cup D_2)$
$= 1 - (p(D_1) + p(D_2) - p(D_1 \cap D_2))$
$= 1 - (0,02 + 0,1 - 0,002)$
$= \dfrac{441}{500}$
$= 0,882$

3 a. Exprimons l'événement B en fonction de D_1 et D_2 :

ProfSalmi.blogspot.com

L'événement B «La montre présente un seul défaut» veut dire que la montre choisie présente le défaut D_1 mais pas D_2 : $D_1 \cap \overline{D_2}$ ou présente le défaut D_2 mais pas D_1 : $\overline{D_1} \cap D_2$.

Donc : $B = (D_1 \cap \overline{D_2}) \cup (\overline{D_1} \cap D_2)$

b. **Calculons** $p(D_1 \cap \overline{D_2})$:

On a : $D_1 = (D_1 \cap D_2) \cup (D_1 \cap \overline{D_2})$

Donc : $p(D_1) = p(D_1 \cap D_2) + p(D_1 \cap \overline{D_2})$ (car les événements $(D_1 \cap \overline{D_2})$ et $(D_1 \cap D_2)$ sont incompatibles).

D'où : $p(D_1 \cap \overline{D_2}) = p(D_1) - p(D_1 \cap D_2)$

$= 0,02 - 0,002$

$= 0,018$

$= \frac{9}{500}$

Calculons $p(\overline{D_1} \cap D_2)$:

On a : $D_2 = (D_2 \cap D_1) \cup (D_2 \cap \overline{D_1})$

Donc : $p(D_2) = p(D_2 \cap D_1) + p(D_2 \cap \overline{D_1})$

D'où : $p(\overline{D_1} \cap D_2) = p(D_2) - p(D_2 \cap D_1)$

$= 0,1 - 0,002$

$= 0,098$

$= \frac{49}{500}$

c. **Déduisons que** $p(B) = 0,116$:

On a : $B = (D_1 \cap \overline{D_2}) \cup (\overline{D_1} \cap D_2)$

Donc : $p(B) = p(D_1 \cap \overline{D_2}) + p(\overline{D_1} \cap D_2)$

$= 0,018 + 0,098$ (d'après la question 3)a))

$= 0,116$

D'où : $p(B) = 0,116$.

4 Calculons $p(B)$ d'une autre façon:

Soit E l'événement «La montre choisie a les deux défauts».

Quand on prélève au hasard une montre, on peut avoir:

- une montre a deux défauts : l'événement E.

ou

ProfSalmi.blogspot.com

- une montre a un seul défaut : l'événement B.

ou

- une montre sans aucun défaut : l'événement A.

Donc : $E \cup B \cup A = \Omega$

et comme les événements E, B et A sont 2 à 2 incompatibles, alors :

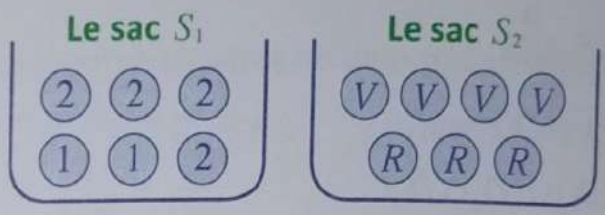
$p(E)+p(B)+p(A)=p(\Omega)=1$

Donc : $p(B)=1-(p(E)+p(A))$

$=1-(0,002+0,882)$; $(p(E)=p(D_1 \cap D_2)=0,002$ d'après la question 1)

$=0,116$

Exercice 22



1 ▸ **Calculons** $p(A)$:

La sac S_1 contient 2 jetons portant le n°1.

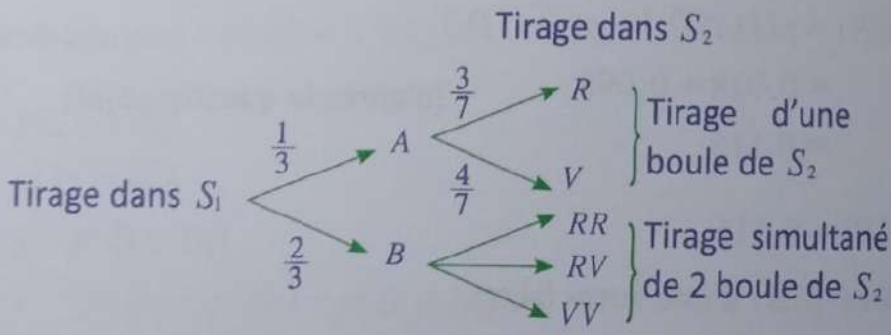
Donc : $p(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

▸ Calculons $p(B)$:

On remarque que $B=\overline{A}$

Donc : $p(B)=1-p(A)=\frac{2}{3}$

2 On peut schématiser cette expérience par un arbre.



a. Montrons que : $p(E_1)=\frac{11}{21}$ où E_1 est l'événement : «obtenir une seule boule rouge».

Réaliser l'événement E_1 c'est :

- tirer un jeton n°1 de S_1 (l'événement A), puis tirer une boule rouge de S_2.

ProfSalmi.blogspot.com

ou

- tirer un jeton n°2 de S_1 (l'événement B), puis tirer simultanément de S_2 une boule rouge et une boule verte.

On considère les événements suivants:

C: «Obtenir une boule rouge». Evénement associé à l'expérience : $\mathscr{E}_1$: «Tirer au hasard une boule de S_2 ».

D: «Obtenir une boule rouge et une verte». Evénement associé à l'expérience : $\mathscr{E}_2$: «Tirer au hasard simultanément deux boules de S_2 ».

On a : $p(C)=\frac{3}{7}$ et $p(D)=\frac{C_3^1\times C_4^1}{C_7^2}=\frac{12}{21}=\frac{4}{7}$

Or: $E_1=(A\cap C)\cup(B\cap D)$ et les événements $A\cap C$ et $B\cap D$ sont incompatibles.

Donc : $p(E_1)=p(A\cap C)+p(B\cap D)$

$=p(A)\times p(C)+p(B)\times p(D)$

$=\frac{1}{3}\times\frac{3}{7}+\frac{2}{3}\times\frac{4}{7}$

$=\frac{11}{21}$

▸ **Montrons que :** $p(E_2)=\frac{2}{21}$

Réaliser l'événement E_2 : «obtenir deux boules rouges» c'est : tirer un jeton n°2 de S_1 puis tirer simultanément 2 boules rouges de S_2.

On considère l'événement F : «obtenir deux boules rouges» : événement associé à l'expérience $\mathscr{E}_2$.

On a : $E_2=B\cap F$

Or, les événements B et F sont indépendants (car ils sont associés à deux épreuves indépendantes $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$), donc : $p(E_2)=p(B)\times p(F)$

On a : $p(B)=\frac{2}{3}$ et $p(F)=\frac{C_3^2}{C_7^2}=\frac{3}{21}$

Donc : $p(E_2)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{21}=\frac{2}{21}$

b. Calculons $p_{E_1}(A)$ **:**

On a : $p_{E_1}(A)=\frac{p(A\cap E_1)}{p(E_1)}=\frac{p(A)\times p_A(E_1)}{p(E_1)}$

Or : $p(A)=\frac{1}{3}$ et $p(E_1)=\frac{11}{21}$ et $p_A(E_1)=p(C)=\frac{3}{7}$

ProfSalmi.blogspot.com

Donc : $p_{E_1}(A) = \dfrac{\frac{1}{3} \times \frac{3}{7}}{\frac{11}{21}} = \dfrac{3}{11}$

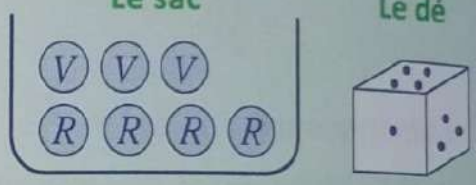
8 Indépendance de deux épreuves

Soit $\mathscr{E}$ une expérience formée de deux épreuves $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$.
Si les résultats de l'une des épreuves sont indépendants des résultats de l'autre épreuve, on dit dans ce cas que cette expérience est formée de deux épreuves indépendantes.
Dans ce cas, si A et B sont des événements associés respectivement aux épreuves $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$, alors $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ c'est-à-dire les événements A et B sont indépendants.

Exercices

Exercice 23

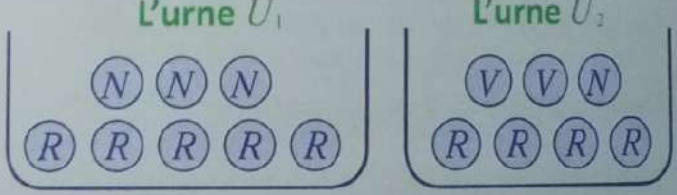
- On considère un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
- Un sac contient 4 boules rouges et 3 boules vertes. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.



On tire au hasard simultanément deux boules du sac puis on lance le dé.
Calculer la probabilité de chacun des événements suivants:
A : «obtenir deux boules rouges et le n°5».
B : «obtenir deux boules vertes et un numéro pair».
C : «obtenir deux boules de couleurs différentes et un multiple de 3».

Exercice 24

- Une urne U_1 contient 5 boules rouges et 3 boules noires.
- Une urne U_2 contient 4 boules rouges, 2 boules vertes et une boule noire.



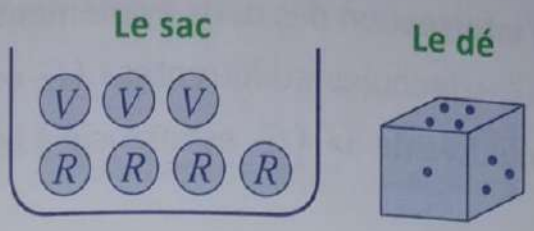
Toutes les boules sont indiscernables au toucher.
On tire au hasard deux boules de l'urne U_1 et une boule de l'urne U_2.

ProfSalmi.blogspot.com

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants:
A : «obtenir 3 boules de même couleur».
B : «obtenir 2 boules rouges exactement».
C : «obtenir une boule de chaque couleur».

Solutions

Exercice 23



L'expérience dans cet exercice est formée de deux épreuves indépendantes :
$\mathscr{E}_1$: «Tirage simultané de deux boules du sac».
$\mathscr{E}_2$: «Lancer du dé».

▸ Calculons $p(A)$ où A est l'événement : «Obtenir deux boules rouges et le n°5».
On considère les deux événements :
E_1 : «Obtenir deux boules rouge». E_1 est associé à l'épreuve $\mathscr{E}_1$.
E_2 : «Obtenir le numéro 5». E_2 est associé à l'épreuve $\mathscr{E}_2$.
On a : $A = E_1 \cap E_2$
Or les deux épreuves $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$ sont indépendantes, donc : E_1 et E_2 sont indépendants.
D'où : $p(A) = p(E_1) \times p(E_2)$

$$= \frac{C_4^2}{C_7^2} \times \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{21}$$

▸ Calculons $p(B)$ où B est l'événement : «Obtenir deux boules vertes et un nombre pair».
B est l'intersection des deux événements :
F_1 : «Obtenir deux boules vertes». (F_1 est associé à l'épreuve $\mathscr{E}_1$)
et
F_2 : «Obtenir un nombre pair». (F_2 est associé à l'épreuve $\mathscr{E}_2$)
or $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$ sont indépendantes, donc F_1 et F_2 sont indépendants.

ProfSalmi.blogspot.com

$B = F_1 \cap F_2$ et $F_2 = \{2;4;6\}$

Donc : $p(B) = p(F_1) \times p(F_2)$

$$= \frac{C_3^2}{C_7^2} \times \frac{3}{6}$$

$$= \frac{1}{14}$$

▸ Calculons $p(C)$ où C est l'événement : «obtenir deux boules de couleurs différentes et un multiple de 3».

L'événement C est l'intersection des deux événements:

G_1 : «obtenir deux boules de couleurs différentes». (G_1 est associé à l'épreuve $\mathscr{E}_1$).

et G_2 : «obtenir un multiple de 3». (G_2 est associé à l'épreuve $\mathscr{E}_2$).

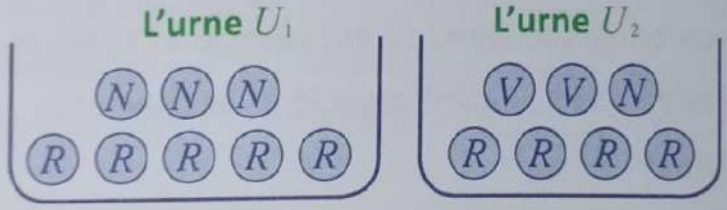
$C = G_1 \cap G_2$

Donc : $p(C) = p(G_1) \times p(G_2)$; $G_2 = \{3;6\}$

$$= \frac{C_4^1 \times C_3^1}{C_7^2} \times \frac{2}{6}$$

$$= \frac{4}{21}$$

Exercice 24



L'expérience dans cet exercice est formée de deux épreuves indépendantes:

$\mathscr{E}_1$: «Tirage simultané de deux boule des U_1 ».

$\mathscr{E}_2$: «Tirage d'une boule de U_2 ».

▸ Calculons $p(A)$ où A est l'événement : «obtenir 3 boules de même couleur».

Pour réaliser l'événement A, il faut :

- tirer simultanément 2 boules rouges de U_1 et une boule rouge de U_2.

ou

- tirer simultanément 2 boules noires de U_1 et une boule noire de U_2.

On considère les événements:

R_1 : «tirer simultanément deux boules rouges de U_1 ». (R_1 est associé à l'épreuve $\mathscr{E}_1$)

R_2 : «tirer une boule rouge de U_2 ». (R_2 est associé à l'épreuve $\mathscr{E}_2$).

N_1 : «tirer simultanément deux boules noires de U_1 ». (N_1 est associé à $\mathscr{E}_1$)

ProfSalmi.blogspot.com

N_2 : «tirer une boule noire de U_2 ». (N_2 est associé à l'épreuve $\mathscr{E}_2$).

On a : $A=(R_1\cap R_2)\cup(N_1\cap N_2)$

Les événements $R_1\cap R_2$ et $N_1\cap N_2$ sont incompatibles, donc :

$p(A)=p(R_1\cap R_2)+p(N_1\cap N_2)$ (car R_1 et R_2 sont indépendants de même que N_1 et N_2)

$$=p(R_1)\times p(R_2)+p(N_1)\times p(N_2)$$
$$=\frac{C_5^2}{C_8^2}\times\frac{C_4^1}{C_7^1}+\frac{C_3^2}{C_8^2}\times\frac{C_1^1}{C_7^1}$$
$$=\frac{10}{49}+\frac{3}{196}$$
$$=\frac{43}{196}$$

▸ Calculons $p(B)$ où B est l'événement : «obtenir exactement 2 boules rouges».

Pour réaliser l'événement B, il faut :

- tirer simultanément 2 boules rouges de U_1 et une boule non rouge de U_2.

ou

- tirer simultanément une boule rouge et une boule noire de U_1 et une boule rouge de U_2.

Soit B_1 l'événement: «tirer simultanément une boule rouge et une boule noire de U_1 ».

On a alors : $B=(R_1\cap\overline{R_2})\cup(B_1\cap R_2)$

Les événements $R_1\cap\overline{R_2}$ et $B_1\cap R_2$ sont incompatibles.

Donc : $p(B)=p(R_1\cap\overline{R_2})+p(B_1\cap R_2)$

$=p(R_1)\times p(\overline{R_2})+p(B_1)\times p(R_2)$; (car les événements R_1 et $\overline{R_2}$ sont indépendants ainsi que B_1 et R_2)

$$=\frac{C_5^2}{C_8^2}\times\frac{C_3^1}{C_7^1}+\frac{C_5^1\times C_3^1}{C_8^2}\times\frac{C_4^1}{C_7^1}$$
$$=\frac{15}{98}+\frac{15}{49}$$
$$=\frac{45}{98}$$

▸ Calculons $p(C)$ où C est l'événement : «obtenir une boule de chaque couleur».

Pour réaliser l'événement C, il faut tirer simultanément une boule rouge et une boule noire de U_1 et tirer une boule verte de U_2.

Soit V_2 l'événement: «tirer une boule verte de U_2 ».

On a : $C=B_1\cap V_2$

ProfSalmi.blogspot.com

Donc : $p(C) = p(B_1) \times p(V_2)$ (car B_1 et V_2 sont indépendants)

$$= \frac{C_3^1 \times C_5^1}{C_8^2} \times \frac{C_2^1}{C_7^1}$$

$$= \frac{15}{98}$$

9 Epreuves répétées (Répétition d'épreuves identiques et indépendantes)

On considère une épreuve $\mathscr{E}$ dont le résultat est soit S «succès» de probabilité p, soit $\overline{S}$ «échec» de probabilité 1-p.

On répète cette épreuve n fois de suite dans les mêmes conditions.

Les résultats sont 2 à 2 indépendants.

La probabilité de l'événement S_k «Le succès S est réalisé k fois exactement» est : $p(S_k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ pour tout $k \in \{0;1;2;...;n\}$.

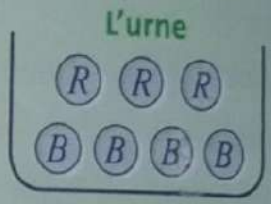
Exercices

Exercice 25

Une urne contient 3 boules rouges et 4 boules blanches.

Les boules sont indiscernables au toucher.

On tire au hasard une boule de l'urne, on note sa couleur, puis on la remet dans l'urne; on répète cette épreuve 9 fois de suite. (Tirage successif et avec remise de 9 boules).



1. Calculer la probabilité d'obtenir une boule rouge deux fois exactement.
2. Calculer la probabilité d'obtenir une boule rouge 6 fois exactement.
3. Calculer la probabilité d'obtenir une boule rouge au moins une fois.

Exercice 26

Pour passer un examen, Ali doit répondre à 5 questions 2 à 2 indépendantes. Pour chaque question, Ali doit choir une seule réponse parmi les quatre réponses proposées. Une seule réponse parmi les quatre proposées est exacte.

Ali n'a pas bien préparé cet examen, et commence à réponde au hasard. (Il y a équiprobabilité dans le choix des réponses de Ali).

1. Montrer que la probabilité que Ali ait obtenu une seule bonne réponse pour les cinq questions est $\frac{405}{1024}$.

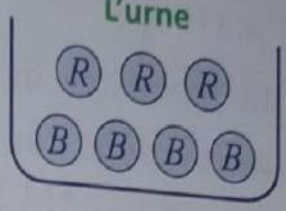
ProfSalmi.blogspot.com

2 Calculer la probabilité que Ali ait obtenu 3 bonnes réponse exactement.
3 Calculer la probabilité que Ali ait obtenu au moins une bonne réponse.
4 Pour réussir cet examen, il faut avoir au moins 3 bonnes réponses.
Quelle est la probabilité que Ali réussisse cet examen?

Solutions

Exercice 25

On tire au hasard une boule de l'urne, on note sa couleur puis on la remet dans l'urne. On répète cette épreuve 9 fois de suite dans les mêmes conditions, le résultat de chaque épreuve est soit S «obtenir une boule rouge», soit $\overline{S}$ son événement contraire.



La probabilité de l'événement S est : $p = \frac{3}{7}$.

Donc la probabilité de l'événement S_k «obtenir k fois exactement une boule rouge».

est : $p(S_k) = C_9^k p^k (1-p)^{9-k}$ pour tout $k \in \{0;1;...;9\}$

1 Calculons la probabilité de l'événement A «obtenir une boule rouge deux fois exactement».

On a : $p(A) = p(S_2)$

$= C_9^2 p^2 (1-p)^7$

$= C_9^2 \left(\frac{3}{7}\right)^2 \times \left(\frac{4}{7}\right)^7$

$= 0,1315$

2 Calculons $p(B)$ où B est l'événement «obtenir une boule rouge 6 fois exactement».

On a : $B = S_6$

Donc : $p(B) = C_9^6 \left(\frac{3}{7}\right)^6 \times \left(\frac{4}{7}\right)^3 \simeq 0,0971$

3 Calculons $p(C)$ où C est l'événement «obtenir une boule rouge au moins une fois».

L'événement contraire de l'événement C est : .

$\overline{C}$ «Ne pas obtenir de boule rouge».

On a : $\overline{C} = S_0$

Donc : $p(\overline{C}) = p(S_0) = C_9^0 \left(\frac{3}{7}\right)^0 \times \left(\frac{4}{7}\right)^9 = \left(\frac{4}{7}\right)^9$

D'où : $p(C) = 1 - p(\overline{C}) = 1 - \left(\frac{4}{7}\right)^9 \simeq 0,9935$

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 26

Passer cet examen, c'est répondre aux cinq question, c'est donc une répétition 5 fois de suite dans les mêmes conditions d'une même épreuve «Répondre au hasard à une question»,

Les épreuves sont 2 à 2 indépendantes, le résultat de chaque épreuve est soit S «La réponse choisie est bonne» soit $\overline{S}$ son événement contraire. On a : $p(S)=\frac{1}{4}$.

La probabilité de l'événement S_K «Ali ait obtenu k réponses justes exactement».

est $p(S_K)=C_5^K\left(\frac{1}{4}\right)^K\times\left(1-\frac{1}{4}\right)^{5-K}$ pour tout $K\in\{0;1;2;3;4;5\}$.

1 Montrons que : $p(A)=\frac{405}{1024}$

A est l'événement : «Ali a obtenu une seule réponse exacte».

On a : $A=S_1$

Donc : $p(A)=p(S_1)=C_5^1\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^4=\frac{405}{1024}$

2 Calculons $p(B)$ où B est l'événement «Ali a obtenu 3 bonnes réponses exactement».

On a : $B=S_3$

Donc : $p(B)=p(S_3)=C_5^3\left(\frac{1}{4}\right)^3\times\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{45}{512}$

3 Calculons $p(C)$ où C est l'événement «Ali a obtenu au moins une bonne réponse».

L'événement contraire de C est :

$\overline{C}$ «Ali n'a obtenu aucune réponse exacte».

On a : $\overline{C}=S_0$

Donc : $p(\overline{C})=p(S_0)=\left(\frac{3}{4}\right)^5$

D'où : $p(C)=1-p(\overline{C})=1-\left(\frac{3}{4}\right)^5=\frac{781}{1024}$

4 Calculons $p(D)$ où D est l'événement «Ali a obtenu au moins 3 réponses exactes».

On a : $D=S_3\cup S_4\cup S_5$

Or, les événements S_3, S_4 et S_5 sont 2 à 2 incompatibles,

ProfSalmi.blogspot.com

donc : $p(D) = p(S_3) + p(S_4) + p(S_5)$

D'où : $p(D) = p(B) + C_5^4\left(\frac{1}{4}\right)^4 \times \left(\frac{3}{4}\right) + C_5^5\left(\frac{1}{4}\right)^5$

$= \frac{45}{512} + \frac{15}{1024} + \frac{1}{1024}$

$= \frac{53}{512}$

Donc la probabilité pour que Ali réussisse cet examen en répondant au hasard à toutes les questions est : $\frac{53}{512}$ soit environ 0,1.

10 Variables aléatoires - Espérance mathématique - Variance et écart-type

1. Variables aléatoires - Loi probabilité d'une variable aléatoire:

Définition 1:

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire.

On appelle variable aléatoire, toute fonction X de Ω dans $\mathbb{R}$, qui à tout élément de Ω (éventualité) associe un réel. L'ensemble des valeurs prises par X est noté $X(\Omega)$.

- Les variables aléatoires sont généralement notées X, Y, Z, ...
- L'événement $(X = a)$ est l'ensemble des issues de Ω auxquelles on associe le réel a.
- L'événement $(X > a)$ est l'ensemble des issues de Ω auxquelles on associe un réel strictement supérieur à a.

Exemple: Si $X(\Omega) = \{2;5;6;7\}$, alors :

- $(X > 5) = (X = 6) \cup (X = 7)$
- $(X \leq 5) = (X = 2) \cup (X = 5)$
- $(2 \leq X \leq 7) = (X = 2) \cup (X = 5) \cup (X = 6)$
- $(X = 2) \cup (X = 5) \cup (X = 6) \cup (X = 7) = \Omega$

Définition 2:

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω.

On pose : $X(\Omega) = \{x_1; x_2; ...; x_n\}$

Définir la loi de probabilité de X consiste à associer à chaque valeur x_i de $X(\Omega)$, la probabilité de l'événement $(X = x_i)$.

ProfSalmi.blogspot.com

On résume généralement la loi de probabilité d'une variable aléatoire X par le tableau :

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$p(X=x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

(On vérifie que : $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$)

1. Espérance mathématique, variance et écart-type:

Définition:

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau :

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$p(X=x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

- L'espérance mathématique de X est le nombre réel noté $E(X)$ définie par:
$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n$
- La variance de X est le nombre réel positif noté $V(X)$ définie par :
$E(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 p_i = (x_1 - E(X))^2 p_1 + (x_2 - E(X))^2 p_2 + ... + (x_n - E(X))^2 p_n$
ou encore : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ où $E(X^2) = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + ... + x_n^2 p_n$.
- L'écart-type de X est le nombre réel positif noté $\sigma(X)$ défini par :
$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$. (Racine carrée de la variance).

Exercices

Exercice 27

Un sac contient : 5 boules blanches portant les numéros: 0; 0; 1; 1; 2.
3 boules rouges portant les numéros : 0; 1; 3.
Toutes les boules sont indiscernables au toucher.
On tire simultanément et au hasard 3 boules du sac.

1 Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de boules blanches parmi les 3 boules tirées.

a. Déterminer les valeurs prises par X.

b. Déterminer la loi de probabilité de X.

c. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

ProfSalmi.blogspot.com

d. Calculer la probabilité d'obtenir au moins une boule blanche.

2 Soit Y la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le produit des nombres portés par le 3 boules tirées.

a. Montrer que : $Y(\Omega) = \{0;1;2;3;6\}$.

b. Déterminer la loi de probabilité de Y.

c. Calculer $E(Y)$, $V(Y)$ et $\sigma(Y)$.

d. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants:

A : «obtenir un produit supérieur ou égal à 2».

B : «obtenir un produit inférieur à 3».

Exercice 28

D est un dé cubique non pipé (Equilibré) dont les faces sont numérotées de 1 à 6 (chaque face porte un seul numéro).

On considère le jeu suivant:

Le joueur lance le dé une fois,

- si le nombre obtenu est pair, il perd 10dh;
- si le nombre obtenu est 3, il gagne 20dh;
- dans tout autre cas, il perd 5dh.

On note X la variable aléatoire représentant le gain algébrique du joueur.

(X positif = gain, X négatif = pertes).

1 Déterminer la loi de probabilité de X.

2 Calculer la probabilité que le joueur perde à ce jeu.

3 Calculer $E(X)$. Peut-on lui conseiller de jouer à ce jeu?

Exercice 29

Une urne contient 3 jetons noirs, 4 jetons rouges et deux jetons verts.

Tous les jetons sont indiscernables au toucher.

On tire au hasard successivement et sans remise 3 jetons de l'urne.

1 Soit X la variable aléatoire égale au nombre de jetons verts restant dans l'urne après le tirage de 3 jetons.

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

2 Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de couleurs des jetons tirés.

a. Déterminer la loi de probabilité de Y.

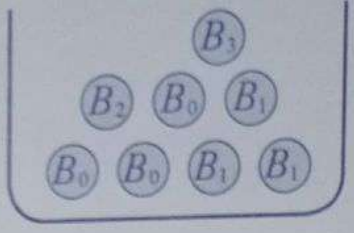
b. Calculer $E(Y)$, $V(Y)$ et $\sigma(Y)$.

ProfSalmi.blogspot.com

Solutions

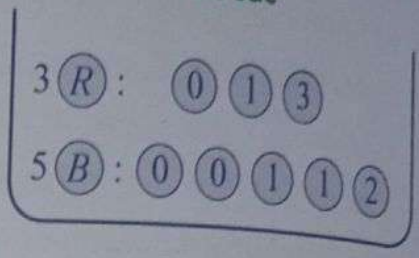
Exercice 27

Le sac



Autre disposition :

Le sac



1 On tire au hasard simultanément 3 boules du sac qui contient 8 boules, donc l'univers Ω est l'ensemble des combinaisons de 3 éléments choisis parmi 8, d'où : $Card\Omega = C_8^3 = 56$

a. X est la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules blanches parmi les 3 boules tirées.

Déterminons $X(\Omega)$:

Dans un tirage simultané de 3 boules, on peut avoir:

- 3 boules blanches, donc $X = 3$.

ou

- 2 boules blanches et 1 boule non blanche, donc $X = 2$.

ou

- 1 boule blanche et 2 boules non blanches, donc $X = 1$.

ou

- 3 boules non blanches, donc $X = 0$.

Les valeurs prises par X sont : 0; 1; 2 et 3, donc : $X(\Omega) = \{0;1;2;3\}$.

b. Déterminons la loi de probabilité de X :

Le tirage est au hasard et les boules sont indiscernables au toucher, il y a donc équiprobabilité.

$$p(X=0) = p(RRR) = \frac{Card(X=0)}{Card\Omega} = \frac{C_3^3}{C_8^3} = \frac{1}{56}$$

$$p(X=1) = p(BRR) = \frac{Card(X=1)}{Card\Omega} = \frac{C_5^1 \times C_3^2}{C_8^3} = \frac{15}{56}$$

$$p(X=2) = p(BBR) = \frac{Card(X=2)}{Card\Omega} = \frac{C_5^2 \times C_3^1}{C_8^3} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28}$$

ProfSalmi.blogspot.com

$p(X=3)=p(BBB)=\dfrac{Card(X=3)}{Card\Omega}=\dfrac{C_5^3}{C_8^3}=\dfrac{10}{56}=\dfrac{5}{28}$

On résume la loi de probabilité de X dans le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{5}{28}$

c. ▸ **Calculons** $E(X)$: $E(X)=\sum x_i p(X=x_i)$

$$=\left(0\times\frac{1}{56}\right)+\left(1\times\frac{15}{56}\right)+\left(2\times\frac{15}{28}\right)+\left(3\times\frac{5}{28}\right)$$

$$=\frac{15}{8}$$

$$=1,875$$

Donc : $E(X)=1,875$

▸ **Calculons** $V(X)$:

On a : $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$

Or : $E(X^2)=\sum x_i^2 p(X=x_i)$

$$=\left(0^2\times\frac{1}{56}\right)+\left(1^2\times\frac{15}{56}\right)+\left(2^2\times\frac{15}{28}\right)+\left(3^2\times\frac{5}{28}\right)$$

$$=\frac{225}{56}$$

Donc: $V(X)=\dfrac{225}{56}-\left(\dfrac{15}{8}\right)^2=\dfrac{225}{448}\simeq 0,5$

▸ **Calculons** $\sigma(X)$:

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\dfrac{15\sqrt{7}}{56}\simeq 0,7$

d. Calculons $p(A)$ où A est l'événement «obtenir au moins une boule blanche».

On a : $A=(X\geq 1)$

Donc : $p(A)=p(X\geq 1)$

$$=1-p(X=0)$$

$$=1-\frac{1}{56}=\frac{55}{56}$$

D'où: $p(A)=\dfrac{55}{56}$.

2 Y est la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le produit des nombres obtenus.

a. **Montrons que** $Y(\Omega)=\{0;1;2;3;6\}$

ProfSalmi.blogspot.com

Dans un tirage simultané de 3 boules, on peut avoir :

- Au moins une boule porte le n°0, donc : $Y=0$.

ou

- Les 3 boules portent le numéro 1, donc : $Y=1\times1\times1=1$

ou

- 2 boules portent le n°1 et une boule porte le n°2, donc : $Y=1\times1\times2=2$

ou

- 2 boules portent le n°1 et une boule porte le n°3, donc : $Y=1\times1\times3=3$

ou

- 1 boule porte le n°1, une boule porte le n°2 et une boule porte le n°3, donc : $Y=1\times2\times3=6$

D'où : $Y(\Omega)=\{0;1;2;3;6\}$

b. **Déterminons la loi de probabilité de** Y :

- **Calculons** $p(Y=0)$:

Méthode 1: (utilisation de l'événement contraire)

Le nombre de boules ne portent pas le numéro 0 est 5,

donc : $p(\overline{Y=0})=\frac{C_5^3}{C_8^3}=\frac{5}{28}$

D'où : $p(Y=0)=1-p(\overline{Y=0})$

$=1-\frac{5}{28}$

$=\frac{23}{28}$

Méthode 2:

$Card(Y=0)=\underset{(0}{C_3^1}\times\underset{\overline{00})}{C_5^2}+\underset{(00}{C_3^2}\times\underset{\overline{0})}{C_5^1}+\underset{(000)}{C_3^3}=46$

Donc : $p(Y=0)=\frac{Card(Y=0)}{Card\Omega}=\frac{46}{56}=\frac{23}{28}$

- Calculons $p(Y=k)$ pour $k\in\{1;2;3;6\}$:

$p(Y=1)=\frac{C_3^3}{C_8^3}=\frac{1}{56}$ (il y a 3 boules numérotées 1)

$p(Y=2)=\frac{C_3^2\times C_1^1}{C_8^3}=\frac{3}{56}$ (il y a 1 boule n°2)

$p(Y=3)=\frac{C_3^2\times C_1^1}{C_8^3}=\frac{3}{56}$ (il y a 1 seule boule n°3)

ProfSalmi.blogspot.com

$$p(Y=6)=\frac{C_3^1\times C_1^1\times C_1^1}{C_8^3}=\frac{3}{56}$$

On résume la loi de probabilité de Y dans le tableau suivant :

y_i	0	1	2	3	6
$p(Y=y_i)$	$\frac{23}{28}$	$\frac{1}{56}$	$\frac{3}{56}$	$\frac{3}{56}$	$\frac{3}{56}$

c. Calculons $E(Y)$:

$$E(Y)=\sum y_i p(Y=y_i)$$
$$=\left(0\times\frac{23}{28}\right)+\left(1\times\frac{1}{56}\right)+\left(2\times\frac{3}{56}\right)+\left(3\times\frac{3}{56}\right)+\left(6\times\frac{3}{56}\right)$$
$$=\frac{17}{28}\simeq 0,6$$

Calculons $V(Y)$:

On a : $V(Y)=E(Y^2)-(E(Y))^2$

Or: $E(Y^2)=\sum y_i^2 p(Y=y_i)$
$$=\left(0^2\times\frac{23}{28}\right)+\left(1^2\times\frac{1}{56}\right)+\left(2^2\times\frac{3}{56}\right)+\left(3^2\times\frac{3}{56}\right)+\left(6^2\times\frac{3}{56}\right)$$
$$=\frac{37}{14}$$

Donc : $V(Y)=\frac{37}{14}-\left(\frac{17}{28}\right)^2=\frac{1783}{784}\simeq 2,27$

Calculons $\sigma(Y)$: $\sigma(Y)=\sqrt{V(Y)}=\sqrt{\frac{1783}{784}}\simeq 1,5$

d. Calculons $p(A)$:

A est l'événement «obtenir un produit supérieur ou égal à 2»

On a : $A=(Y\geq 2)$

Or: $Y(\Omega)=\{0;1;2;3;6\}$.

Donc : $(Y\geq 2)=(Y=2)\cup(Y=3)\cup(Y=6)$

Les événements : $(Y=2)$, $(Y=3)$ et $(Y=6)$ sont 2 à 2 incompatibles, donc:

$$p(A)=p(Y=2)+p(Y=3)+p(Y=6)$$
$$=\frac{3}{56}+\frac{3}{56}+\frac{3}{56}=\frac{9}{56}$$

ProfSalmi.blogspot.com

D'où : $p(A)=\frac{9}{56}$

Calculons $p(B)$:

B est l'événement «obtenir un produit inférieur à 3»

On a : $B=(Y<3)$

Donc : $B=(Y=2)\cup(Y=1)\cup(Y=0)$ (compte tenu des éléments de $Y(\Omega)$) et comme les événements $(Y=2)$, $(Y=1)$ et $(Y=0)$ sont 2 à 2 incompatibles, alors : $p(B)=p(Y=2)+p(Y=1)+p(Y=0)$

$$=\frac{3}{56}+\frac{1}{56}+\frac{23}{28}=\frac{25}{28}$$

Donc : $p(B)=\frac{25}{28}$

Remarque :

On peut utiliser l'événement contraire pour calculer $p(B)$:

On a : $B=(Y<3)$

Donc : $\overline{B}=(Y\geq 3)=(Y=3)\cup(Y=6)$ (car $Y(\Omega)=\{0;1;2;3;6\}$)

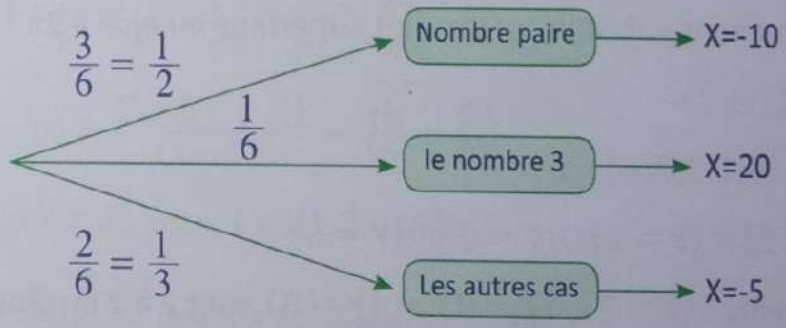
D'où : $p(\overline{B})=p(Y=3)+p(Y=6)$

$$=\frac{3}{56}+\frac{3}{56}=\frac{3}{28}$$

Donc : $p(B)=1-\frac{3}{28}=\frac{25}{28}$

Exercice 28

En lançant le dé, on peut obtenir 3 nombres pairs: 2 ou 4 ou 6.



1 Déterminons la loi de probabilité de X :

Les valeurs prises par X sont : -10; -5 et 20.

Donc : $X(\Omega)=\{-10;-5;20\}$

ProfSalmi.blogspot.com

- $p(X=-10)=\frac{1}{2}$
- $p(X=-5)=\frac{1}{3}$ (voir l'arbre pondéré)
- $p(X=20)=\frac{1}{6}$

On résume la loi de probabilité de X dans le tableau suivant :

x_i	-10	-5	20
$p(Y=x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

2 Calculons $p(A)$ où A est l'événement «Le joueur perd le jeu».

Méthode 1:

On a : $A=(X=-10)\cup(X=-5)$

Les événements $(X=-10)$ et $(X=-5)$ sont incompatibles,

donc : $p(A)=p(X=-10)+p(X=-5)$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$

D'où : $p(A)=\frac{5}{6}$

Méthode 2:

L'événement contraire de A est l'événement $\overline{A}$: «Le joueur gagne au jeu».

On a : $\overline{A}=(X=20)$

Donc : $p(A)=1-p(\overline{A})$

$=1-p(X=20)$

$=1-\frac{1}{6}$

$=\frac{5}{6}$

3 Calculons $E(X)$:

$E(X)=\sum x_i p(X=x_i)$

$=\left(-10\times\frac{1}{2}\right)+\left(-5\times\frac{1}{3}\right)+\left(20\times\frac{1}{6}\right)$

$=-\frac{10}{3}$

$\simeq -3,33$

L'espérance mathématique est négative, donc le joueur a plus de chance de

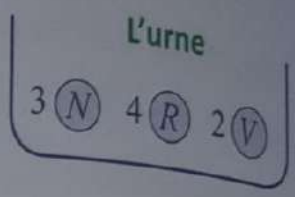
ProfSalmi.blogspot.com

perdre que de gagner. (La moyenne de perte est plus de 3dh).

On conseille donc de ne pas jouer à ce jeu.

Exercice 29

On tire successivement et sans remise 3 jetons de l'urne qui contient 9 jetons, donc l'univers Ω est l'ensemble des arrangements sans répétition de 3 éléments choisis s parmi 9, d'où: $Card\Omega = A_9^3 = 504$



1 a. Déterminons la loi de probabilité de X :

La variable aléatoire X est égale au nombre de jetons verts restant dans l'urne après le tirage de 3 jetons.

Quand on tire successivement et sans remise 3 jetons de l'urne, on peut avoir:

- 3 jetons non verts (aucun jeton vert), il reste alors dans l'urne 2 jetons verts, donc : $X = 2$.

ou

- 1 jeton vert et 2 jetons non verts, il reste alors dans l'urne 1 jeton vert, donc: $X = 1$.

ou

- 2 jetons verts et 1 jeton non vert, il ne reste alors aucun jeton vert dans l'urne, donc : $X = 0$.

Donc les valeurs prises par X sont : 0; 1 et 2.

D'où : $X(\Omega) = \{0;1;2\}$

- $p(X=0) = p(VV\overline{V}) = \dfrac{Card(X=0)}{Card\Omega} = \dfrac{(A_2^2 \times A_7^1) \times 3}{A_9^3} = \dfrac{1}{12}$
- $p(X=1) = p(V\overline{V}\ \overline{V}) = \dfrac{Card(X=1)}{Card\Omega} = \dfrac{(A_2^1 \times A_7^2) \times 3}{A_9^3} = \dfrac{1}{2}$
- $p(X=2) = p(\overline{V}\ \overline{V}\ \overline{V}) = \dfrac{Card(X=2)}{Card\Omega} = \dfrac{A_7^3}{A_9^3} = \dfrac{5}{12}$

x_i	0	1	2
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$

b. Calculons $E(X)$:

ProfSalmi.blogspot.com

$$E(X)=\sum x_i p(X=x_i)$$
$$=\left(0\times\frac{1}{12}\right)+\left(1\times\frac{1}{2}\right)+\left(2\times\frac{5}{12}\right)=\frac{4}{3}$$

Donc : $E(X)=\frac{4}{3}$

On a : $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$

Or : $E(X^2)=\sum x_i^2 p(X=x_i)$
$$=\left(0^2\times\frac{1}{12}\right)+\left(1^2\times\frac{1}{2}\right)+\left(2^2\times\frac{5}{12}\right)$$
$$=\frac{13}{6}$$

Donc : $V(X)=\frac{13}{6}-\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{7}{18}\simeq 0,39$

▸ **Calculons** $\sigma(X)$:

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{7}{18}}\simeq 0,62$

2 Y est la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de couleurs des jetons tirés.

a. **Déterminons la loi de probabilité de** Y :

Quand on tire successivement et sans remise 3 jetons de l'urne, on peut obtenir:

- 3 jetons de même couleur, donc : $Y=1$.

ou

- 2 jetons de même couleur et 1 jeton d'une autre couleur, donc : $Y=2$.

ou

- 3 jetons de couleurs différentes 2 à 2 (un jeton de chaque couleur), donc : $Y=3$.

Les valeurs prises par Y sont donc : 1, 2 et 3.

Donc : $Y(\Omega)=\{1;2;3\}$

▸ $(Y=1)$ est l'événement : «obtenir 3 jetons rouges ou 3 jetons noirs».

Donc : $p(Y=1)=p(RRR)+p(NNN)$
$$=\frac{A_4^3}{A_9^3}+\frac{A_3^3}{A_9^3}$$
$$=\frac{1}{21}+\frac{1}{84}=\frac{5}{84}$$

ProfSalmi.blogspot.com

▸ $(Y=2)$ est l'événement : «obtenir (2 jetons rouges et 1 jeton non rouge) ou (2 jetons noirs et 1 jeton non noir) ou (2 jeton verts et 1 jeton non vert)».

Donc : $p(Y=2)=p(RR\overline{R})+p(NN\overline{N})+p(VV\overline{V})$

$$=\frac{(A_4^2\times A_5^1)\times 3}{A_9^3}+\frac{(A_3^2\times A_6^1)\times 3}{A_9^3}+\frac{(A_2^2\times A_7^1)\times 3}{A_9^3}$$

$$=\frac{5}{14}+\frac{3}{14}+\frac{1}{12}$$

$$=\frac{55}{84}$$

▸ $(Y=3)$ est l'événement : «obtenir 1 jeton de chaque couleur».

Donc : $p(Y=3)=p(RNV)=\frac{(A_4^1\times A_3^1\times A_2^1)\times 3!}{A_9^3}=\frac{2}{7}=\frac{24}{28}$

y_i	1	2	3
$p(Y=y_i)$	$\frac{5}{84}$	$\frac{55}{84}$	$\frac{2}{7}$

▸ **Calculons** $E(Y)$ **:**

$$E(Y)=\sum y_i p(Y=y_i)$$
$$=\left(1\times\frac{5}{84}\right)+\left(2\times\frac{55}{84}\right)+\left(3\times\frac{2}{7}\right)$$
$$=\frac{187}{84}\simeq 2,2$$

▸ **Calculons** $V(Y)$ **:**

On a : $V(Y)=E(Y^2)-(E(Y))^2$

Or : $E(Y^2)=\sum y_i^2 p(Y=y_i)$

$$=\left(1^2\times\frac{5}{84}\right)+\left(2^2\times\frac{55}{84}\right)+\left(3^2\times\frac{2}{7}\right)$$
$$=\frac{21}{4}$$

Donc : $V(Y)=\frac{21}{4}-\left(\frac{187}{84}\right)^2=\frac{2075}{7056}\simeq 0,29$

▸ **Calculons** $\sigma(Y)$ **:**

$$\sigma(Y)=\sqrt{V(Y)}=\sqrt{\frac{2075}{7056}}=\frac{5\sqrt{83}}{84}\simeq 0,54$$

ProfSalmi.blogspot.com

11 Loi Binomiales

Définition :

On considère une expérience aléatoire à deux issues: succès S et échec $\overline{S}$ de probabilités respectives p et $1-p$.

On répète n fois de suite cette expérience dans les mêmes conditions et de façons indépendantes.

Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de succès obtenus au terme des n épreuves.

On dit que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre n et p. (On note : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n;p)$).

Propriétés :

Si X est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p, alors :

- L'ensemble des valeurs prises par X est : $X(\Omega)=\{0;1;...;n\}$
- La loi de probabilité de X est donnée par : $p(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ pour tout $k \in \{0;1;...;n\}$
- L'espérance mathématique de X est : $E(X)=np$.
- La variance de X est : $V(X)=np(1-p)=E(X)(1-p)$
- L'écart-type de X est : $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{np(1-p)}$.

Exercices

Exercice 30 (Lancer d'un dé)

On dispose d'un dé cubique non pipé (équilibré) dont les faces sont numérotées : 1; 1; 1; 2; 3; 4.

On lance le dé 3 fois de suite. Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'apparitions d'un nombre pair.

1 Déterminer la loi de probabilité de X.

2 Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

Exercice 31 (Tirage de boules)

Un sac contient 3 boules noires, 2 boules rouges et 2 boules vertes.

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On tire au hasard successivement et avec remise 20 boules du sac.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'apparitions d'une boule rouge.

ProfSalmi.blogspot.com

1 Justifier que X suite un loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2 Calculer la probabilité d'obtenir une boule rouge au moins une fois?

3 Calculer $p(17 < X \leq 19)$.

4 Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X.

Exercice 32 (Lancer de fléchette)

Dans un jeu de lancer de fléchettes, Karim atteint la cible 3 fois sur 4.
Karim a procédé à 5 lancers successifs d'une fléchette.
Les lancers sont 2 à 2 indépendants.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois que Karim atteint la cible.

1 Déterminer la loi de probabilité de X.

2 Quelle est la probabilité que Karim atteigne la cible au moins une fois?

3 Calculer la probabilité que Karim atteigne la cible deux fois exactement.

4 Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$

Exercice 33 (Tirage de boules)

Une urne contient 3 boules rouges, 2 boule blanches et une boule jaune. Les boules sont indiscernables au toucher.

1 On tire au hasard successivement et sans remise toutes les boules de l'urne.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges tirées avant l'apparition pour la première fois d'une boule blanche.

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Calculer l'écart-type $\sigma(X)$.

2 On tire maintenant au hasard simultanément 3 boules de l'urne. On répète cette épreuve n fois de suite $(n > 3)$ dans les mêmes conditions (on remet les 3 boules tirées dans l'urne avant de procéder à un autre tirage).

a. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 boules de couleurs 2 à 2 distinctes, $(n-1)$ fois exactement?

b. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 boules de même couleur au moins une fois. On notera p_n cette probabilité.

c. Calculer la probabilité d'obtenir seulement 2 boules de même couleur 3 fois exactement.

d. Quelle est la plus petite valeur de n pour laquelle $p_n > 0,99$.

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 30

Solutions

1 Déterminons la loi de probabilité de X.

L'expérience dans cet exercice est une répétition d'une même épreuve «Lancer du dé» 3 fois de suite dans les mêmes conditions les épreuves sont 2 à 2 indépendantes et le résultat de chaque épreuve est soit S «obtenir un nombre pair» soit $\overline{S}$ «obtenir un nombre impair». Les nombres portés par les faces du dé sont : 1; 1; 1; 2; 3; 4, donc les nombres pairs qu'on peut obtenir sont 2 et 4, d'où $p(S)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

La variable aléatoire X égale au nombre d'apparitions d'un nombre pair, suit la loi binomiale de paramètres $n=3$ et $p=\frac{1}{3}$.

Donc $X(\Omega)=\{0;1;2;3\}$.

et $\forall k\in\{0;1;2;3\}$; $p(X=k)=C_3^k\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{3-k}$.

- Pour $k=0$: $p(X=0)=C_3^0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^3=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$.
- Pour $k=1$: $p(X=1)=C_3^1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{4}{9}$.
- Pour $k=2$: $p(X=2)=C_3^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{9}$.
- Pour $k=3$: $p(X=3)=C_3^3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^0=\frac{1}{27}$.

k	0	1	2	3
$p(X=k)$	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$

2 Calculons $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

Puisque $X\searrow B\left(3;\frac{1}{3}\right)$ (X suit la loi binomiale de paramètres 3 et $\frac{1}{3}$)

alors : $E(X)=np=3\times\frac{1}{3}=1$

$V(X)=np(1-p)=3\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}\simeq 0,816$

Exercice 31

1 Justifions que X suite une loi binomiale. L'expérience dans cet exercice est un répétition 20 fois de suite d'une même épreuve «tirer une boule, noter sa couleur puis la



ProfSalmi.blogspot.com

remettre dans le sac» dans les mêmes conditions, les épreuves sont 2 à 2 indépendantes, le résultat de chaque épreuve est soit S «obtenir une boule rouge», soit $\overline{S}$ «Ne pas obtenir de boule rouge», la probabilité du succès est $p = P(S) = \frac{2}{7}$.

La variable aléatoire X égale au nombre d'apparitions d'une boule rouge (c-à-d nombre de succès) suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = \frac{2}{7}$.

2 Calculons la probabilité de l'événement A «obtenir une boule rouge au moins une fois».

On a : $A = (X \geq 1)$

Donc : $p(A) = p(X \geq 1)$

$= 1 - p(X = 0)$; (car : $(\overline{X \geq 1}) = (X = 0)$)

$= 1 - C_{20}^{0}\left(\frac{2}{7}\right)^{0}\left(\frac{5}{7}\right)^{20}$

$= 1 - \left(\frac{5}{7}\right)^{20} \simeq 0,999$

Remarque : $p(X \geq 1) = \sum_{k=1}^{20} p(X = k)$.

3 **Calculons** $p(17 < X \leq 19)$

On a : $(17 < X \leq 19) = (X = 18) \cup (X = 19)$

les événements $(X = 18)$ et $(X = 19)$ sont incompatibles.

Donc $p(17 < X \leq 19) = p(X = 18) + p(X = 19)$

$= C_{20}^{18}\left(\frac{2}{7}\right)^{18} \times \left(\frac{5}{7}\right)^{2} + C_{20}^{19}\left(\frac{2}{7}\right)^{19} \times \left(\frac{5}{7}\right)$

$\simeq 1,6 \times 10^{-8}$

4 **Calculons** $E(X)$, $V(X)$ **et** $\sigma(X)$.

Puisque X suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = \frac{2}{7}$, alors :

- $E(X) = np = 20 \times \frac{2}{7} = \frac{40}{7}$
- $V(X) = np(1-p) = \frac{40}{7} \times \frac{5}{7} = \frac{200}{49}$
- $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{10\sqrt{2}}{7}$

Exercice 32

1 **Déterminons le loi de probabilité de** X.

L'expérience dans cet exercice est une répétition d'une même épreuve «Karim lance la flèche» 5 fois de suite dans les mêmes conditions, les épreuves sont

ProfSalmi.blogspot.com

2 à 2 indépendantes, le résultat de chaque épreuve est soit le succès S «Karim atteint la cible» de probabilité $p = p(S) = \frac{3}{4}$, soit $\overline{S}$ «Karim rate la cible».
La variable aléatoire X égale au nombre de fois que Karim atteint la cible suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{3}{4}$.

Donc : $X(\Omega) = \{0;1;2;3;4;5\}$ et $\forall k \in X(\Omega)$; $p(X = k) = C_5^k \left(\frac{3}{4}\right)^k \left(\frac{1}{4}\right)^{5-k}$.

2 Calculons $p(A)$ où A est l'événement : «Karim atteint la cible au moins une fois».

On a : $A = (X \geq 1)$.

Donc : $p(A) = P(X \geq 1)$

$$= 1 - P(X = 0)$$
$$= 1 - \left(1 - \frac{3}{4}\right)^5$$
$$= 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^5$$
$$= \frac{1023}{1024} \simeq 0,999$$

3 Calculons $p(B)$ où B est l'événement : «Karim atteint la cible deux fois exactement».

On a : $B = (X = 2)$.

Donc : $p(B) = P(X = 2)$

$$= C_5^2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^3$$
$$= \frac{45}{512}$$

4 **Calculons $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.**

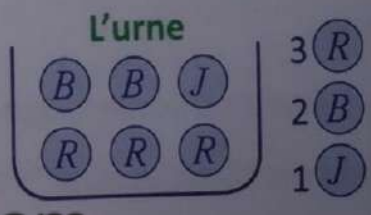
Comme X suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{3}{4}$,

alors : ▸ $E(X) = n \times p = 5 \times \frac{3}{4} = \frac{15}{4}$.

▸ $V(X) = np(1-p) = \frac{15}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{15}{16}$.

▸ $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{\sqrt{15}}{4} \simeq 0,968$.

Exercice 33



1 On tire au hasard successivement et sans remise les 6 boules de l'urne, donc l'univers Ω est l'ensemble des

ProfSalmi.blogspot.com

permutations de 6 éléments.

Donc : $Card\Omega = 6! = 720$.

infos: $A_n^n = n!$

X est la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges tirées avant l'apparition pour la première fois d'une boule blanche. Puisque l'urne contient 3 boules rouges, et qu'il est possible que la première boule tirée soit blanche, alors $X(\Omega) = \{0;1;2;3\}$.

Calculons $p(X = k)$ pour $k \in \{0;1;2;3\}$.

$(X = k)$ est l'événement : «obtenir une boule blanche pour la 1ère fois au $k^{ième}$ tirage.

Pour $k = 0$:

Réaliser l'événement $(X = 0)$ c'est :

- Tirer une boule blanche au premier tirage et les 5 autres après : B.... (Le nombre de cas est : $A_2^1 \times 5!$ qui peut s'écrire aussi $A_2^1 \times A_5^5$ ou $C_2^1 \times A_5^5$ ou $C_2^1 \times 5!$).

ou

- Tirer la boule jaune au 1er tirage, puis une boule blanche au 2ième tirage, puis les 4 boules restantes aux 4 derniers tirages $(JB....)$ (Le nombre de cas est : $A_1^1 \times A_2^1 \times 4!$ s'écrit aussi : $C_1^1 \times C_2^1 \times A_4^4$

Donc : $Card(X = 0) = (A_2^1 \times 5!) + (A_1^1 \times A_2^1 \times 4!) = 288$

D'où, d'après l'hypothèse de l'équiprobabilité, (car le tirage est au hasard et les boules sont indiscernables au toucher)

$$p(X = 0) = \frac{Card(X = 0)}{Card\Omega} = \frac{288}{720} = \frac{2}{5}$$

Pour $k = 1$:

Réaliser l'événement $X = 1)$, c'est :

- Tirer une boule rouge au 1er tirage, puis une blanche au 2ième tirage, puis les 4 boules restantes aux 4 derniers tirages $(\text{Ⓡ}\text{Ⓑ}....)$ (Le nombre de cas est : $A_3^1 \times A_2^1 \times 4!$ s'écrit aussi : $C_3^1 \times C_2^1 \times A_4^4$).

ou

- Tirer une boule rouge et la boule jaune aux deux premiers tirages puis tirer une boule blanche au 3ième tirage, puis les 3 boules restantes aux 3 derniers tirages :

ProfSalmi.blogspot.com

(Ⓡ Ⓙ Ⓑ... ou Ⓙ Ⓡ Ⓑ...) (Le nombre de cas est : $2 \times (A_3^1 \times A_1^1) \times A_2^1 \times 3!$

(Coefficient de l'ordre des 2 couleurs rouge et jaune)

Donc : $Card(X=1) = (A_3^1 \times A_2^1 \times 4!) + 2 \times (A_3^1 \times A_1^1) \times A_2^1 \times 3! = 216$

D'où : $p(X=1) = \dfrac{Card(X=1)}{Card\Omega} = \dfrac{216}{720} = \dfrac{3}{10}$

Pour $k=2$:

Réaliser l'événement $(X=2)$ c'est :

- Tirer 2 boules rouges puis une boule blanche : (Ⓡ Ⓡ Ⓑ...) (Le nombre de cas est : $A_3^2 \times A_2^1 \times 3!$)

ou

- Tirer 2 boules rouges et la boule jaune aux 3 premiers tirages, puis tirer une boule blanche, puis les 2 autres boules : (Ⓙ Ⓡ Ⓡ Ⓑ.. ou Ⓡ Ⓙ Ⓡ Ⓑ.. ou Ⓡ Ⓡ Ⓙ Ⓑ..) (Le nombre de cas est : $3 \times (A_1^1 \times A_3^2) \times A_2^1 \times 2!$)

Donc : $Card(X=2) = (A_3^2 \times A_2^1 \times 3!) + 3 \times (A_1^1 \times A_3^2) \times A_2^1 \times 2! = 144$

D'où : $p(X=2) = \dfrac{Card(X=2)}{Card\Omega} = \dfrac{144}{720} = \dfrac{1}{5}$

Pour $k=3$:

Réaliser l'événement $(X=3)$ c'est :

- Tirer les 3 boules rouges aux 3 premiers tirages, puis une boule blanche au 4ième tirage puis les 2 autres boules : Ⓡ Ⓡ Ⓡ Ⓑ.. (Le nombre de cas est : $A_3^3 \times A_2^1 \times 2!$)

ou

- Tirer les 3 boules rouges et la boule jaune aux 4 premiers tirages, puis les 2 boules blanches au 5ième et 6ième tirage : (Ⓡ Ⓡ Ⓡ Ⓙ Ⓑ Ⓑ ou Ⓡ Ⓡ Ⓙ Ⓡ Ⓑ Ⓑ ou Ⓡ Ⓙ Ⓡ Ⓡ Ⓑ Ⓑ ou Ⓙ Ⓡ Ⓡ Ⓡ Ⓑ Ⓑ) (Le nombre de cas est : $4 \times (A_3^3 \times A_1^1) \times 2!$

Donc : $Card(X=3) = A_3^3 \times A_2^1 \times 2! + 4 \times (A_3^3 \times A_1^1) \times 2! = 72$

D'où : $p(X=3) = \dfrac{Card(X=3)}{Card\Omega} = \dfrac{72}{720} = \dfrac{1}{10}$

On résume la loi de probabilité de X dans le tableau suivant :

ProfSalmi.blogspot.com

k	0	1	2	3
$p(X=k)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

b. Calculons $\sigma(X)$

On a : $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$ et $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$

On a : $E(X)=\sum_{k=0}^{3}kp(X=k)=\left(0\times\frac{2}{5}\right)+\left(1\times\frac{3}{10}\right)+\left(2\times\frac{1}{5}\right)+\left(3\times\frac{1}{10}\right)=1$

$E(X^2)=\sum_{k=0}^{3}k^2p(X=k)=\left(0^2\times\frac{2}{5}\right)+\left(1^2\times\frac{3}{10}\right)+\left(2^2\times\frac{1}{5}\right)+\left(3^2\times\frac{1}{10}\right)=2$

Donc : $V(X)=2-1^2=1$

D'où : $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=1$

2 Dans cette question, l'expérience est une répétition n fois de suite d'une même épreuve : «tirer au hasard simultanément 3 boules de l'urne, puis les remettre dans l'urne» dans les mêmes conditions, les épreuves sont 2 à 2 indépendantes.

a. On considère l'événement : A «obtenir 3 boules de couleurs 2 à 2 distinctes en un seul tirage».

On a : $p(A)=\frac{C_3^1\times C_2^1\times C_1^1}{C_6^3}=\frac{3}{10}$

Donc, d'après la propriété des épreuves répétées, la probabilité que l'événement A se réalise $(n-1)$ fois exactement au terme des n épreuves est :

$$C_n^{n-1}(p(A))^{n-1}\times(1-p(A))$$
$$=n\left(\frac{3}{10}\right)^{n-1}\times\frac{7}{10}$$
$$=\frac{7n\times3^{n-1}}{10^n}$$

b. On considère l'événement B «obtenir 3 boules de même couleur en un tirage». Réaliser l'événement B, c'est tirer 3 boules rouges simultanément» donc $p(B)=\frac{C_3^3}{C_6^3}=\frac{1}{20}$.

Soit H l'événement «obtenir 3 boules de même couleur au moins une fois au terme des n épreuves».

ProfSalmi.blogspot.com

On a : $p(H) = 1 - p(\overline{H})$

$= 1 - (1 - p(B))^n = 1 - \left(1 - \frac{1}{20}\right)^n = 1 - \left(\frac{19}{20}\right)^n$

Donc : $p_n = 1 - \left(\frac{19}{20}\right)^n$

c. On considère l'événement C «obtenir 2 boules exactement de même couleur parmi les 3 boules tirées».

Réaliser l'événement C, c'est :

- Tirer 2 boules rouges et une boule non rouge (Le nombre de cas est $C_3^2 \times C_3^1$)

ou

- Tirer 2 boules blanches et un boule non blanche (Le nombre de cas est $C_2^2 \times C_4^1$).

Donc : $CardC = C_3^2 \times C_3^1 + C_2^2 \times C_4^1 = 13$

D'où : $p(C) = \frac{CardC}{Card\Omega} = \frac{13}{20}$

Soit K l'événement «réaliser l'événement C trois fois exactement».

D'après la propriété des épreuves répétées on a :

$$p(K) = C_n^3 (p(C))^3 (1 - p(C))^{n-3}$$
$$= \frac{n(n-1)(n-2) \times 13^3 \times 7^{n-3}}{6 \times 20^n}$$

d. Déterminons la plus petite valeur de n pour laquelle $p_n > 0,99$.

Soit n un entier naturel tel que $n > 3$

On a : $p_n > 0,99 \iff 1 - \left(\frac{19}{20}\right)^n > 0,99$

$$\iff \left(\frac{19}{20}\right)^n < 0,01$$

$$\iff \ln\left(\frac{19}{20}\right)^n < \ln(0,01)\text{; (car la fonction ln est strictement croissante)}$$

$$\iff n \ln\left(\frac{19}{20}\right) < \ln(0,01)$$

$$\iff n > \frac{\ln(0,01)}{\ln\left(\frac{19}{20}\right)}\text{; (car } \ln\left(\frac{19}{20}\right) < 0)$$

Or : $\frac{\ln(0,01)}{\ln\left(\frac{19}{20}\right)} \simeq 89,78$

Donc, la plus petite valeur de n telle que $p_n > 0,99$ est 90.

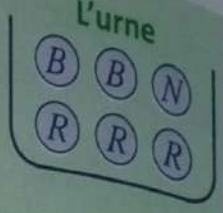
ProfSalmi.blogspot.com

Exercices de synthèse

Exercices

Exercice 34

Une urne contient 3 boules rouges, 2 boules blanches et une boule noire.



Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

1 On tire au hasard successivement et avec remise 3 boules de l'urne.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants:

A «Obtenir 3 boules de couleurs 2 à 2 distinctes (une boule de chaque couleur)»

B «Obtenir 3 boules de même couleur».

C «Obtenir 2 couleurs exactement».

D «Obtenir 2 boules rouges exactement»

2 On tire maintenant au hasard successivement et sans remise 3 boules de l'urne.

Calculer la probabilité de chacun des événements A, B, C et D.

3 On tire maintenant au hasard simultanément 3 boules de l'urne.

a. Calculer la probabilité de chacun des événements A, B, C et D.

b. Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules rouges restantes dans l'urne après le tirage des 3 boules.

Déterminer la loi de probabilité de X.

4 On considère l'épreuve E «On tire au hasard simultanément 3 boules de l'urne, on note leur couleur, puis on les remet dans l'urne».

On répète 4 fois de suite l'épreuve E dans les mêmes conditions.

Les épreuves sont 2 à 2 indépendantes.

Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de fois qu'on obtient 3 boules de même couleur.

a. Déterminer la loi de probabilité de Y.

b. Calculer $E(Y)$, $V(Y)$ et $\sigma(Y)$.

c. Calculer la probabilité d'obtenir 3 boules de même couleur 3 fois exactement.

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 35

Un sac contient: 3 jetons blancs numérotés: 1; 1;2
4 jetons rouges numérotés: 1;1;2:2
5 jetons verts numérotés: 1;2;2;2;3
Tous les jetons sont indiscernables au toucher.



1 On tire au hasard successivement et avec remise 4 jetons du sac.

a. Calculer la probabilité d'obtenir 4 jetons de même couleur.

b. Calculer la probabilité d'obtenir un seul jeton blanc.

c. Calculer la probabilité d'obtenir 4 jetons portant le même numéro.

d. Calculer la probabilité d'obtenir un seul jeton vert et un seul nombre pair.

2 On tire maintenant au hasard successivement et sans remise 4 jetons du sac.

a. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants

A «Obtenir 4 jetons de même couleur»

B «Obtenir un seul jeton rouge»

C «Obtenir exactement deux jetons verts numérotés 2».

D «Obtenir 4 jetons portant le même numéro».

E «Obtenir un seul jeton rouge et un seul nombre impair».

b. Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage de 4 jetons associe le nombre de jetons verts qui portent un nombre impair.

Déterminer la loi de probabilité de X.

3 On tire maintenant au hasard simultanément 4 jetons du sac.

Calculer la probabilité de chacun des événements A, B, C, D et E.

4 On considère le jeu suivant:

On tire au hasard successivement et sans remise deux jetons du sac;

On gagne si on obtient deux jetons verts portant le n°2.

Wiam a joué 3 fois de suite à ce jeu (Elle remet les 2 jetons tirés dans le sac avant le tirage suivant).

a. Quelle est la probabilité que Wiam gagne 3 fois?

b. Quelle est la probabilité que Wiam gagne une fois exactement?

c. Wiam désire jouer n fois de suite à ce jeu pour que la probabilité de l'événement

G «Wiam gagne au moins une fois» soit strictement plus grande que 0,999.

Déterminer la plus petite valeur de n.

ProfSalmi.blogspot.com

Exercice 36

Un gardien de but doit faire face, lors d'une démonstration, à un certain nombre de tirs directs. Les expériences précédentes conduisent à penser que:

- S'il a arrêté le $n^{ième}$ tir, la probabilité pour qu'il arrête le suivant $[le(n+1)^{ième}]$ est 0,8;
- S'il a laissé passer le $n^{ième}$ tir, la probabilité pour qu'il arrête le suivant est 0,6;
- La probabilité pour qu'il arrête le premier tir est 0,7.

On note A_n l'événement: «le gardien arrête le $n^{ième}$ tir».

En notant $p(A_n)$ la probabilité de A_n, on peut écrire: $p(A_1) = 0,7$

1 a. Donner, pour $n \geq 1$, les valeurs de $P_{A_n}(A_{n+1})$ et $P_{\overline{A_n}}(A_{n+1})$

b. Exprimer $p(A_{n+1} \cap A_n)$ et $p(A_{n+1} \cap \overline{A}_n)$ en fonction de $p(A_n)$

c. En déduire que, pour tout entier strictement positif $n \geq 1$, on a: $p(A_{n+1}) = 0,2p(A_n) + 0,6$

2 On pose à présent, pour $n \geq 1$, $p_n = p(A_n)$ et $u_n = p_n - 0,75$

a. Démontrer que (u_n) est une suite géométrique de raison 0,2.

b. En déduire une expression de p_n en fonction de n.

c. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.

Solutions

Exercice 34

1 On tire successivement et avec remise 3 boules de l'urne qui contient 6 boules, donc l'univers Ω est l'ensemble des arrangements avec répétition de 3 éléments choisis parmi 6, donc $card\Omega = 6^3 = 216$.



▸Calculons $p(A)$ où A l'événement «obtenir une boule de chaque couleur».

On a: $CardA = (3^1 \times 2^1 \times 1^1) \times 3! = 36$

Or le tirage est au hasard et les boules sont indiscernables au toucher, il y a donc équiprobabilité, d'où:

ProfSalmi.blogspot.com

$p(A)=\frac{carA}{card\Omega}=\frac{36}{216}=\frac{1}{6}$

Attention:
Attention au coefficient de l'ordre des couleurs; $A_3^3=3!=6$: RBN; RNB; NBR, NRB; BNR ; BRN.

▸ Calculons $p(B)$ où B es l'événement «obtenir 3 boules de même couleur»

Réaliser B, c'est:

- Tirer 3 boules rouges; le nombre de cas est 3^3

ou

- Tirer 3 boules blanches; le nombre de cas est 2^3

ou

- Tirer 3 boules noires; le nombre de cas est 1^3

Donc $cardB=3^3+2^3+1^3=36$

D'où $p(B)=\frac{cardB}{card\Omega}=\frac{36}{216}=\frac{1}{6}$

▸ Calculons $p(C)$ où C est l'événement «obtenir 2 couleurs exactement».

Méthode 1:

On remarque que: $A\cup B\cup C=\Omega$

et comme les événements A,B et C sont 2 à 2 incompatibles,

alors $p(A)+p(B)+p(C)=p(\Omega)$

$p(C)=1-(p(A)+p(B))$

$=1-\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)$

$=\frac{2}{3}$

Donc : $p(C)=\frac{2}{3}$

Méthode 2:

On a: $C=(RR\overline{R})\cup(NN\overline{N})\cup(BB\overline{B})$

Donc: $cardC=(3^2\times3^1)\times3+(1^2\times5^1)\times3+(2^2\times4^1)\times3=144$

D'où: $p(C)=\frac{cardC}{card\Omega}=\frac{144}{216}=\frac{2}{3}$

▸ Calculons $p(D)$ où D est l'événement «obtenir deux boules rouges exactement»

ProfSalmi.blogspot.com

on a: $p(D) = p(RR\overline{R})$

$$= \frac{cardD}{card\Omega}$$

$$= \frac{(3^2 \times 3^1) \times 3}{6^3}$$

$$= \frac{3}{8}$$

Donc : $p(D) = \frac{3}{8}$

Attention:
Le coefficient de l'ordre dans ce cas est: $C_3^1 = 3$
si on tient compte de la position de la boule de couleurs différentes des deux autres boules.
ou $C_3^2 = 3$ si on tient compte de la position des deux boules de même couleur.

2 Dans cette question, le tirage est successif et sans remise de 3 boules de l'urne, donc l'univers Ω dans ce cas est l'ensemble des arrangements sans répétition de 3 boules parmi 6; d'où $card\Omega = A_6^3 = 120$.

▸ **Calculons** $p(A)$

on a: $cardA = (A_3^1 \times A_2^1 \times A_1^1) \times 3! = 36$ (On peut aussi écrire: $(3^1 \times 2^1 \times 1^1)3!$ ou $(C_3^1 \times C_2^1 \times C_1^1) \times 3!$)

donc: $p(A) = \frac{cardA}{card\Omega} = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}$

▸ Calculons $p(B)$. Dans ce cas, obtenir 3 boules de même couleur, c'est obtenir 3 boules rouges, donc $cardB = A_3^3 = 3! = 6$

donc $p(B) = \frac{cardB}{card\Omega} = \frac{6}{120} = \frac{1}{20}$

▸ **Calculons** $p(C)$

On a: $A \cup B \cup C = \Omega$ de plus, A, B et C sont 2 à 2 incompatibles, donc $\overline{C} = A \cup B$

d'où: $p(C) = 1 - p(\overline{C})$

$$= 1 - (p(A) + p(B))$$

$$= 1 - \left(\frac{3}{10} + \frac{1}{20}\right)$$

$$= \frac{13}{20}$$

Donc: $p(C) = \frac{13}{20}$

▸ **Calculons** $p(D)$

On a: $cardD = (A_3^2 \times A_3^1) \times 3 = 54$

ProfSalmi.blogspot.com

Donc: $p(D)=\frac{cardD}{card\Omega}=\frac{54}{120}=\frac{9}{20}$

b. X est la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules rouges restantes dans l'urne après le tirage des 3 boules.

Quand on tire simultanément 3 boules, on peut avoir:

- 3 boules rouges, il ne reste alors aucune boule rouge dans l'urne: $X=0$

ou

- 2 boules rouges et une boule non rouge, il reste alors une seule boule rouge dans l'urne: $X=1$.

ou

- 1 boule rouge et 2 boules non rouges, il reste alors dans l'urne 2 boules rouges: $X=2$

ou

- 3 boules non rouges (aucune rouge), il reste alors dans l'urne 3 boules rouges: $X=3$

Donc: $X(\Omega)=\{0;1;2;3\}$

- Pour déterminer les valeurs prises par X, on peut aussi utiliser le tableau:

Les boules tirées	Nombre de boules rouges restant: valeurs de X
RRR	0
$RR\overline{R}$	1
$R\,\overline{R}\,\overline{R}$	2
$\overline{R}\,\overline{R}\,\overline{R}$	3

Donc : $X(\Omega)=\{0;1;2;3\}$

- $p(x=0)=p(RRR)=\frac{C_3^3}{C_6^3}=\frac{1}{20}$
- $p(X=1)=p(RR\overline{R})=\frac{C_3^2\times C_3^1}{C_6^3}=\frac{9}{20}$
- $p(X=2)=p(R\,\overline{R}\,\overline{R})=\frac{C_3^1\times C_3^2}{}$
- $p(X=3)=p(\overline{R}\,\overline{R}\,\overline{R})=\frac{C_3^3}{C_6^3}=\frac{1}{20}$

Remarque:

- Le nombre de boules rouges, dans l'urne est 3
- Le nombre de boules non rouges est aussi égal à 3.

On résume la loi de probabilité de X dans le tableau suivant:

ProfSalmi.blogspot.com

x_i	0	1	2	3
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$

4 a. Déterminons la loi de probabilité de Y

La variable aléatoire y suit la loi binomiale de paramètres $n=4$ et $p=p(B)=\frac{1}{20}$

Donc: $\begin{cases} Y(\Omega)=\{0;1;2;3;4\} \\ et\ \forall k\in y(\Omega)\ ;\ p(Y=k)=C_4^k\left(\frac{1}{20}\right)^k\times\left(\frac{19}{20}\right)^{4-k} \end{cases}$

b. Calculons $E(Y), V(Y)$ et $\sigma(Y)$

Puisque Y suit la loi binomiale de paramètres $n=4$ et $p=\frac{1}{20}$,

alors: ▸ $E(Y)=np=4\times\frac{1}{20}=\frac{1}{5}$

▸ $V(Y)=np(1-p)=\frac{1}{5}\times\frac{19}{20}=\frac{19}{100}$

▸ $\sigma(Y)=\sqrt{V(Y)}=\frac{\sqrt{19}}{20}\simeq 0,436$

c. Calculons $p(E)$ où E est l'événement: «obtenir 3 boules de même couleur 3 fois exactement»

on a: $E=(Y=3)$

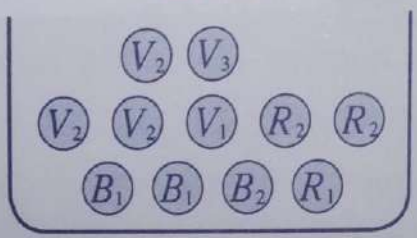
Donc: $p(E)=p(y=3)$

$=C_4^3\left(\frac{1}{20}\right)^3\times\left(\frac{19}{20}\right)$

$=\frac{19}{40000}=0,000475$

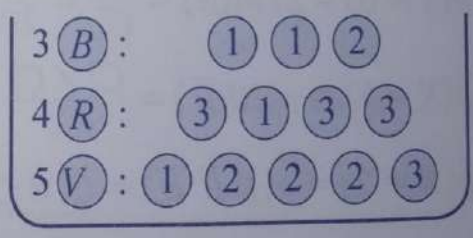
Exercice 35

Le sac



ou encore:

Le sac



1 On tire successivement et avec remise 4 jetons du sac qui contient 12 jetons, donc l'univers Ω est l'ensemble des arrangements avec répétition de 4 éléments

ProfSalmi.blogspot.com

choiss parmi 12; d'où $card\Omega = 12^4 = 20736$

a. Calculons $p(F)$ où F est l'événement: «obtenir 4 jetons de même couleur».

Ⓡ Ⓡ Ⓡ Ⓡ ou Ⓥ Ⓥ Ⓥ Ⓥ ou Ⓑ Ⓑ Ⓑ Ⓑ

On a: $card = 4^4 + 5^4 + 3^4 = 962$

et puisque le tirage est au hasard, et les jetons sont indiscernables au toucher, il y a donc équiprobabilité,

Donc: $p(F) = \frac{cardF}{card\Omega} = \frac{962}{20736} = \frac{481}{10368}$

b. Calculons $p(G)$ où G est l'événement «obtenir un seul jeton blanc»

Ⓑ $\overline{Ⓑ}$ $\overline{Ⓑ}$ $\overline{Ⓑ}$ ou $\overline{Ⓑ}$ Ⓑ $\overline{Ⓑ}$ $\overline{Ⓑ}$ ou $\overline{Ⓑ}$ $\overline{Ⓑ}$ Ⓑ $\overline{Ⓑ}$ ou $\overline{Ⓑ}$ $\overline{Ⓑ}$ $\overline{Ⓑ}$ Ⓑ

On a: $cardG = (3^1 \times 9^3) \times 4 = 8748$ (Nombre de choix de la position du jeton blanc est $C_4^1 = 4$)

Donc: $p(G) = \frac{cardG}{card\Omega} = \frac{8748}{20736} = \frac{27}{64}$

c. Calculons $p(H)$ où H est l'événement «obtenir 4 jetons portant le même numéro».

Le sac contient 5 jetons portant le n°1

6 jetons portant le n°2

1 jetons portant le n°3

Donc: $cardH = 5^4 + 6^4 + 1^4 = 1922$

D'où: $p(H) = \frac{cardH}{card\Omega} = \frac{1922}{20736} = \frac{961}{10368}$

d. Calculons $p(K)$ où K est l'événement «obtenir un seul jeton vert et un seul nombre pair»

Réaliser l'événement K, c'est:

- Tirer un jeton vert portant le numéro 2 et 3 jetons parmi les 4 jetons non verts et ne portant pas le n°2.

(Le nombre de ces cas est: $(3^1 \times 4^3) \times 4$

ou

- Tirer un jeton vert ne portant pas le numéro 2 (parmi 2) et un jeton non vert portant le n° 2 (parmi 3) et 2 jetons parmi les 4 non verts et ne portant pas le n°2:

ProfSalmi.blogspot.com

(le nombre de cas est: $(2^1 \times 3^1 \times 4^2) \times A_4^2$)

Donc: $cardK = (3^1 \times 4^3) \times 4 + (2^1 \times 3^1 \times 4^2) \times A_4^2 = 1920$

D'où: $p(K) = \frac{cardK}{card\Omega} = \frac{1920}{20736} = \frac{5}{54}$

2 On tire maintenant successivement et sans remise 4 jetons du sac qui contient 12 jetons, donc l'univers Ω dans cette question est l'ensemble des arrangements sans répétitions de 4 éléments choisis parmi 12, d'où $card\Omega = A_{12}^4 = 11880$.

a. Calculons $p(A)$

A est l'événement «obtenir 4 jetons de même couleur» vu que le nombre de jetons blancs est inférieur à 4, il n'est donc pas possible d'obtenir 4 jetons blancs.

Réaliser A, c'est tirer 4 jetons rouges (parmi 4) ou 4 jetons verts (parmis 5), donc

$cardA = A_4^4 + A_5^4 = 144$ d'où $p(A) = \frac{cardA}{card\Omega} = \frac{144}{11880} = \frac{2}{165}$

Calculons $p(B)$

B est l'événement «obtenir un seul jeton rouge»

($R\overline{R}\ \overline{R}\ \overline{R}$ *ou* $\overline{R}R\overline{R}\ \overline{R}$ *ou* $\overline{R}\ \overline{R}\ R\overline{R}$ *ou* $\overline{R}\ \overline{R}\ \overline{R}\ R$: il y a donc 4 cas)

Donc $cardB = (A_4^1 \times A_8^3) \times 4 = 5376$

D'où $p(B) = \frac{cardB}{card\Omega} = \frac{5376}{11880} = \frac{224}{495}$

Calculons $p(C)$:

C est l'événement «obtenir exactement 2 jetons verts numérotés 2».

Donc: $cardC = (A_3^2 \times A_9^2) \times C_4^2 = 2592$

Le nombre de jetons verts numérotés 2 est 3, ceux ne vérifiant pas cette condition sont en nombre de 9.

Le coefficient de l'ordre des 2jetons verts n°2 est $C_4^2 = 6$: les 2 jetons verts n°2 vont occuper 2 places parmi 4: $V_2V_2VV; V_2\overline{V_2}V_2\overline{V_2}; V_2\overline{V_2}\ \overline{V_2}V_2;$ $\overline{V_2}V_2\overline{V_2}\ V_2; \overline{V_2}V_2V_2\overline{V_2}; \overline{V_2}\ \overline{V_2}V_2V_2$

D'où: $p(C) = \frac{cardC}{card\Omega} = \frac{2592}{11880} = \frac{12}{55}$

Calculons $p(D)$

D est l'événement «obtenir 4 jetons portant le même numéro».

ProfSalmi.blogspot.com

Réaliser l'événement D, c'est tirer 4 jetons numérotés 1 (parmi 5), ou tirer 4 jetons numérotés 2 (parmi 6)

Donc: $cardD = A_5^4 + A_6^4 = 480$

D'où: $p(D) = \frac{cardD}{card\Omega} = \frac{480}{11880} = \frac{4}{99}$

Calculons $p(E)$

E est l'événement «obtenir un seul jeton rouge et un seul nombre impair»

Les jetons rouges portent soit le n°1, soit le n°2.

Réaliser l'événement E c'est:

- Tirer un jeton rouge portant un n° impair (parmi 2) et 3 jetons non rouges et ne portant pas de n° impair (parmi 4).

ou

- Tirer un jeton rouge portant le n°2 (parmi 2) et 1 jeton non rouge portant un n° impair (parmi 4) et 2 jetons parmi 4 non rouges et ne portant pas de n° impair.

Donc: $cardE = (A_2^1 \times A_4^3) \times 4 + (A_2^1 \times A_4^1 \times A_4^2) \times A_4^2 = 1344$

D'où: $p(E) = \frac{cardE}{card\Omega} = \frac{1344}{11880} = \frac{56}{495}$

b. X est la variable aléatoire qui à chaque tirage (successif et sans remise de 4 jetons) associe le nombre de jetons verts qui portent un nombre impair (parmi les 4 jetons tirés).

Quand on tire successivement et sans remise 4 jetons du sac qui contient 2 jetons verts portant un n° impair, on peut avoir parmi les 4 jetons tirés:

- 2 jetons verts qui portent un n° impair: $X = 2$

ou

- 1 jeton vert qui porte un n° impair: $X = 1$

ou

- Aucun jeton vert qui porte un n° impair: $X = 0$

Donc les valeurs prises par X sont: 0,1 et 2.

D'où $X(\Omega) = \{0;1;2\}$

Remarque: tu peux aussi t'aider de ce tableau pour déterminer les valeur de X :

(V_i : jeton vert n° impair $\overline{V_i}$: jeton non vert ou ne portant pas de n° impair)

ProfSalmi.blogspot.com

Tirages	Valeurs de X
$V_1V_1\overline{V_1}\,\overline{V_1}$	2
$V_1\overline{V_1}\,\overline{V_1}\,\overline{V_1}$	1
$\overline{V_1}\,\overline{V_1}\,\overline{V_1}\,\overline{V_1}$	0

- $p(X=0)=\dfrac{A_{10}^4}{A_{12}^4}=\dfrac{14}{33}$
- $p(X=1)=\dfrac{(A_2^1\times A_{10}^3)\times 4}{A_{12}^4}=\dfrac{16}{33}$
- $p(X=2)=\dfrac{(A_2^2\times A_{10}^2)\times C_4^2}{A_{12}^4}=\dfrac{1}{11}$

On peut résumer la loi de probabilité de x dans le tableau suivant:

x_i	0	1	2
$p(X=x_i)$	$\frac{14}{33}$	$\frac{16}{33}$	$\frac{1}{11}$

3 Dans cette question, on tire au hasard simultanément 4 jetons du sac, donc l'univers dans cette question est l'ensemble des combinaisons de 4 éléments choisis parmi 12; d'où $card\Omega=C_{12}^4=495$

- **Calculons** $p(A)$

A est l'événement «obtenir 4 jetons rouges ou 4 jetons verts»

$cardA=C_4^4+C_5^4=6$

Donc: $p(A)=\dfrac{cardA}{card\Omega}=\dfrac{6}{495}=\dfrac{2}{165}$

- **Calculons** $p(B)$

$cardB=C_4^1\times C_8^3=224$

- **Calculons** $p(C)$

on a: $cardC=C_3^2\times C_9^2=108$

Donc $p(C)=\dfrac{cardC}{card\Omega}=\dfrac{108}{495}=\dfrac{12}{55}$

- **Calculons** $p(D)$

on a: $cardD=C_5^4+C_6^4=20$

Donc: $p(D)=\dfrac{cardD}{card\Omega}=\dfrac{20}{495}=\dfrac{4}{99}$

- **Calculons** $p(E)$

Réaliser l'événement E, c'est: - tirer un jeton rouge portant un nombre impair (parmi 2) et 3 jetons parmi les 4 jetons non rouges et ne portant pas de nombre

ProfSalmi.blogspot.com

impair.

ou

- tirer un jeton rouge portant un nombre pair (parmi 2) et un jeton non rouge portant un nombre impair (parmi 4) et deux jetons parmi le 4 jetons non rouges et ne portant pas de nombre impair.

Donc: $cardE = (C_2^1 \times C_4^3) + (C_2^1 \times C_4^1 \times C_4^2) = 56$

D'où $p(E) = \frac{cardE}{card\Omega} = \frac{56}{495}$

4 on tire maintenant successivement et sans remise deux jetons du sac, on gagne si on obtient deux jetons verts.

portant le n°2.

Wiam a joué 3 fois de suite à ce jeu (en remettant les 2 jetons tirés dans le sac avant de refaire l'expérience). Il s'agit donc d'épreuves répétées 3 fois dans les mêmes conditions (Epreuves identiques et indépendantes) le résultat de chaque épreuve est soit gagner de probabilité $p = \frac{A_3^2}{A_{12}^2} = \frac{3 \times 2}{12 \times 11} = \frac{1}{22}$, soit perdre.

a. La probabilité que Wiam gagne 3 fois est:

$$C_3^3 p^3 (1-p)^0 = p^3 = \frac{1}{22^3} = \frac{1}{10648}$$

b. La probabilité que Wiam gagne une fois exactement est:

$$C_3^1 p(1-p)^2 = 3 \times \frac{1}{22} \times \left(\frac{21}{22}\right)^2 = \frac{3 \times 21^2}{22^3} = \frac{1323}{10648}$$

c. Si wiam joue n fois de suite à ce jeu, alors la probabilité de l'événement G «Wiam gagne au moins une fois» est:

$$\begin{aligned} p(G) &= 1 - p(\overline{G}) \\ &= 1 - C_n^0 p^0 (1-p)^n \\ &= 1 - \left(\frac{21}{22}\right)^n \end{aligned}$$

Déterminons la plus petite valeur de l'entier naturel n tel que $p(G) > 0,999$.

$$\begin{aligned} p(G) > 0,999 &\Leftrightarrow 1 - \left(\frac{21}{22}\right)^n > 0,999 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{21}{22}\right)^n < 1 - 0,999 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{21}{22}\right)^n < 0,001 \end{aligned}$$

(car la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$)

ProfSalmi.blogspot.com

$$\Leftrightarrow In\left(\frac{21}{22}\right)^n < In(0,001)$$
$$\Leftrightarrow nIn\left(\frac{21}{22}\right) < In(0,001)$$
$$\Leftrightarrow n > \frac{In(0,001)}{In\left(\frac{21}{22}\right)};\ \left(car\ In\left(\frac{21}{22}\right) < 0\right)$$

En utilisant la calculatrice, on obtient: $\frac{In(0,001)}{In\left(\frac{21}{22}\right)} \simeq 148,49$

Donc, la plus petite valeur de l'entier n tel que $p(G) > 0,999$ est 149. Wiam doit donc jouer au moins 149 fois de suite à ce jeu pour que la probabilité qu'elle gagne au moins une fois dépasse 0,999.

Remarque: Pour les question a) b) et c, il est possible de définir en variable aléatoire

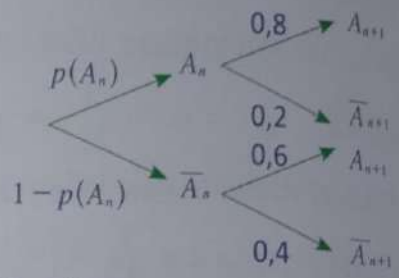
x complant le nombre de succès (gain) dans ce cas, x suit une loi binomiale.

Exercice 36

1 a. Donnons les valeurs de $P_{A_n}^{(A_{n+1})}$ et $P_{\overline{A}_n}^{(A_{n+1})}$

D'après les données de l'exercice:

$p(A_1) = 0,7$; $P_{A_n}^{(A_{n+1})} = 0,8$ et $P_{\overline{A}_n}^{(A_{n+1})} = 0,6$



Pour compléter l'arbre: $P_{A_n}^{(\overline{A}_{n+1})} = -P_{An}^{(A_{n+1})} = 1 - 0,8 = 0,2$

$$P_{\overline{A}_n}^{(\overline{A}_{n+1})} = 1 - 0,6 = 0,4$$

b. Exprimons $p(A_{n+1} \cap A_n)$ et $p(A_{n+1} \cap \overline{A}_n)$ en fonction de $p(A_n)$

▸ On a: $p(A_{n+1} \cap A_n) = p(A_n) \times P_{A_n}^{(A_{n+1})}$ et $P_{A_n}^{(A_{n+1})} = 0,8$

donc: $p(A_{n+1} \cap A_n) = 0,8p(A_n)$

▸ On a: $p(A_{n+1} \cap \overline{A}_n) = p(A_{n+1} \cap \overline{A}_n) \times P_{\overline{A}_n}^{(A_{n+1})}$ et $p_{\overline{A}_n}(A_{n+1}) = 0,6$

donc: $p(A_{n+1} \cap \overline{A}_n) = 0,6p(\overline{A}_n) = 0,6(1 - p(A_n) = 0,6 - 0,6p(A_n))$

c. Déduisons que: $(\forall n\mathbb{N}^*); p(A_{n+1}) = 0,2p(A_n) + 0,6$

Soit $n \in \mathbb{N}$,

on a: $A_{n+1} = (A_{n+1} \cap A_n) \cup (A_{n+1} \cap \overline{A}_n)$

or, les événements $A_{n+1} \cap A_n$ et $A_{n+1} \cap \overline{A}_n$ sont incompatibles, donc

ProfSalmi.blogspot.com

$$p(A_{n+1}) = p(A_{n+1} \cap A_n) + p(A_{n+1} \cap \overline{A}_n)$$
$$= 0,8p(A_n) + 0,6 - 0,6p(A_n)$$
$$= 0,6 + 0,2p(A_n)$$

Donc: $(\forall n \in \mathbb{N}^*);\ p(A_{n+1}) = 0,6 + 0,2p(A_n)$

2 a. Montrons que $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique

Soit $n \in \mathbb{N}$,

On a: $p(A_{n+1}) = 0,2p(A_n) + 0,6$

donc: $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,6$

or: $u_1 = p_n - 0,75$

donc: $u_{n+1} = p_{n+1} - 0,75$
$$= 0,2p_n + 0,6 - 0,75$$
$$= 0,2p_n - 0,15$$
$$= 0,2\left(p_n - \frac{0,15}{0,2}\right)$$
$$= 0,2(p_n - 0,75)$$
$$= 0,2u_n$$

on a: $(\forall n \in \mathbb{N}^*);\ u_{n+1} = 0,2u_n$, donc $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique de raison

$q = 0,2$ et de premier terme $u_1 = p_1 - 0,75 = 0,7 - 0,75 = -0,05$

b. Exprimons p_n en fonction de n

$(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique de raison $q = 0,2$ et de premier terme $u_1 = -0,05$ donc: $(\forall n \in \mathbb{N}^*);\ u_n = u_1 \times q^{n-1} = -0,05 \times (0,2)^{n-1}$

or $p_n = u_n + 0,75$

donc: $(\forall n \in \mathbb{N}^*);\ p_n = 0,75 - 0,05 \times (0,2)^{n-1}$

c. Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$

on a: $-1 < 0,2 < 1$ donc: $\lim\limits_{n\to+\infty} (0,2)^n = 0$

d'où: $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 0,75$

ProfSalmi.blogspot.com

SOMMAIRE

CONTENUS	PAGES
Nombres complexes	4
Les fonctions exponentielles	127
Calcul intégral	271
Équations différentielles	363
Géométrique analytique dans l'espace	378
Calcul de probabilités	442

ProfSalmi.blogspot.com



مكتبة السلام الجديدة

31/34 Place My Youssef - Habouss - Casablanca
Tel.: 05-22-30-40-16 / 05-22-30-37-11
Fax: 05-22-44-10-47
E-mail: lib.essalam@menara.ma
lib.essalam@hotmail.fr - lib.essalam@gmail.com
www.librairieessalam.com

Prix de vente public:
90,00 DH

ISBN 978-9954-682-26-5
9 789954 682265

ProfSalmi.blogspot.com