

SCIENTIFIC PRO

COURS DE RENFORCEMENT 2012/2013

CELLULE DE MATHÉMATIQUES

TERMINALE S2

FONCTIONS NUMÉRIQUES

EXERCICE 1

A) Trouver un prolongement par continuité de f en x_0

$$1^\circ / f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}, x_0 = 1$$

$$2^\circ / f(x) = \frac{1 - \sqrt{2} \cos x}{1 - \sqrt{2} \sin x}, x_0 = \frac{\pi}{4}$$

$$3^\circ / f(x) = \frac{x^3 + 5x^2 - 2x - 4}{x - 1}, x_0 = 1$$

$$4^\circ / f(x) = \frac{\tan x - 1}{2 \cos x - \sqrt{2}}, x_0 = 1$$

B) Calculer les limites suivantes en utilisant la définition du nombre dérivé

$$1^\circ / \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sin \frac{1}{x} + 1 - \cos \frac{1}{x} \right)$$

$$2^\circ / \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x^2) - \sin(ax)}{x - a}$$

C) Déterminer le nombre entier n tel que :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{4x^3 - 19x + 15} = -1$$

D) Déterminer : $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin(\frac{\pi}{6} - x)}{1 - 2 \sin x}$

E) f est définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $f(x) = \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 2 \tan x}{\cos 2x}$

Est-il possible de trouver un prolongement par continuité de f au point $x = \frac{\pi}{4}$.

EXERCICE 2

Etudier la continuité de f sur son ensemble de définition :

$$1^\circ / f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 + 2x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$2^\circ / f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 0 \\ x - 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

EXERCICE 3

Déterminer les réels a et b pour que f soit continue sur son ensemble de définition.

$$1^\circ / f(x) = \begin{cases} x + a & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ ax + 2b & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$2^\circ / f(x) = \begin{cases} x^2 - ab & \text{si } x \leq -2 \\ \frac{x^2 - a}{x - b} & \text{si } -2 < x < 1 \\ x - a & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

EXERCICE 4

Soit $f : [1, +\infty[\rightarrow [-1, +\infty[$

$$x \mapsto x^2 + 2x + 2$$

1°/ Montrer que f est bijective.

2°/ Etudier les variations de f .

3°/ Représenter f et f^{-1} dans un même repère.

4°/ Calculer $f^{-1}(x)$.

EXERCICE 5

Soit f une fonction définie sur $[1, +\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 - 2x + 5$$

1°/ Montrer que f établit une bijection de $[1, +\infty[$ vers $]4, +\infty[$.

2°/ Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]4, +\infty[$

Préciser $(f^{-1})'$ sur $]4, +\infty[$

3°/ Etudier la dérivabilité de f^{-1} au point 4.

EXERCICE 6

Soit f définie sur $[0, \pi]$ par : $f(x) = \cos x$

1°/ Montrer que f établit une bijection de $[0, \pi]$ vers $[-1, 1]$.

2°/ Montrer que f^{-1} est dérivable sur $] -1, 1[$

Préciser $(f^{-1})'$ sur $] -1, 1[$

3°/ Etudier la dérivabilité de f^{-1} aux points d'abscisses -1 et 1 .

EXERCICE 7

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = \frac{1}{2}(x + 4 + \sqrt{x^2 + 4})$$

1°/ Etudier les variations de f .

2°/ a) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un ensemble J que l'on précisera.

b) Montrer que la bijection réciproque f^{-1} de f est dérivable sur J .

c) Calculer $(f^{-1})'(x)$ pour tout x de J .

EXERCICE 8

Soit la fonction f définie sur $[3, +\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 \sqrt{x - 3}$$

1°/ Etudier les variations de f .

2°/ Montrer que l'équation $\sqrt{x - 3} = \frac{4}{x^2}$ admet une unique solution réelle α dans $]3, +\infty[$

3°/ Montrer que : $3 < \alpha < 4$.

EXERCICE 9

1°/ Montrer que pour tout réel α de l'intervalle $[0, +\infty[$, $\frac{1}{1+\alpha} \geq 1 - \alpha$

2°/ Soit g la fonction définie par $g(x) = \sqrt{x+1}$

a) Déterminer g' et g'' sur $[0, +\infty[$, en déduire le sens de variation de g' .

b) Démontrer que $\forall x \in [0, \alpha]$, $\frac{1}{2\sqrt{1+\alpha}} \leq g'(x) \leq \frac{1}{2}$

c) En déduire que $1 + \frac{\alpha}{2\sqrt{1+\alpha}} \leq \sqrt{1+\alpha} \leq 1 + \frac{\alpha}{2}$

EXERCICE 10

Soit f définie par : $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}$

1°/ Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et démontrer que : $2\sqrt{1+x^2} f'(x) = f(x)$.

2°/ En déduire que : $4(1+x^2)f''(x) + 4xf'(x) = f(x)$

EXERCICE 11

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$f(x) = \sqrt{|x^2 - 6x + 5|}$ et soit C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1°/ Exprimer $f(x)$ sans le symbole valeur absolue.

2°/ Etudier la continuité et la dérivabilité de f en particulier en 1 et 5. La courbe C admet-elle des tangentes aux points d'abscisses 1 et 5 ?

3°/ Etudier les variations de f .

4°/ Démontrer que la droite d'équation $x = 3$ est axe de symétrie de C .

5°/ Démontrer que les droites d'équations : $y = -x + 3$ et $y = x - 3$ sont asymptotes à C .

6°/ Déterminer les coordonnées des points A et B d'intersection de C avec ses deux asymptotes. A étant le point dont l'abscisse est supérieure à 3.

7°/ Soit le point K (3 ; 0). Démontrer que, pour tout x de $[1, 5]$, le point $M(x; f(x))$ est à une distance constante de C . En déduire la nature géométrique de C lorsque $1 \leq x \leq 5$.

8°/ Tracer C et ses asymptotes. On placera A et B.

EXERCICE 12

A) ETUDE DE LA FONCTION f

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = x^2 + 1 + \frac{2}{x}$$

On note C sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1°/ Etudier f et dresser son tableau de variation.

2°/ Soit P la parabole d'équation $y = x^2 + 1$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Déterminer la limite de $f(x) - (x^2 + 1)$ quand x tend vers $+\infty$ et $-\infty$. En déduire une interprétation graphique.

b) Etudier la position relative des courbes P et C .

c) Résoudre l'inéquation : $f(x) > 0$.

d) Construire les courbes P et C sur le même graphique.

B) ETUDE DE LA FONCTION $\sqrt{f}$

Soit la fonction g définie par $g(x) = \sqrt{f(x)}$ et C sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité : 1cm).

1°/ a) Donner le domaine de définition D de g .

b) Etudier la fonction g sur D .

2°/ a) Etudier la dérivabilité de g à gauche de -1.

b) Donner une équation de la tangente T à C au point d'abscisse -1.

3°/ a) Démontrer que pour tout réel x de D , on a :

$$g(x) - |x| = \frac{1 + \frac{2}{x}}{\sqrt{x^2 + 1 + \frac{2}{x} + |x|}}$$

b) Démontrer que la droite (d) d'équation $y = x$ est asymptote à C en $+\infty$.

c) Démontrer que la droite (d') d'équation $y = -x$ est asymptote à C en $-\infty$.

4°/ Tracer T , (d), (d') puis C .

EXERCICE 13

PARTIE A

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{1-x^2}{2+x}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1cm).

1°/ Déterminer D_f , puis trouver les réels a , b et c tels que $\forall x \in D_f$, $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$.

2°/ a) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

b) Déterminer les asymptotes à C_f puis tracer C_f .

3°/ Démontrer que le point $\Omega(-2 ; 4)$ est centre de symétrie de C_f .

PARTIE B

Soit ϕ la fonction définie par : $\phi(t) = \frac{1-\sin^2 t}{2+\sin t}$

1°/ Déterminer D_ϕ .

2°/ Montrer que pour tout réel t , $\phi(\pi - t) = \phi(t)$. En déduire que le domaine d'étude de ϕ peut être réduit à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

3°/ On pose $\alpha = \sqrt{3} - 2$. Justifier l'existence et l'unicité de $t_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin(t_0) = \alpha$.

4°/ Montrer que ϕ est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et que $\forall t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\phi'(t) = f'(\sin t) \cos t$

5°/ Déduire de ce qui précède les variations de ϕ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

5°/ Représenter la courbe C_ϕ de ϕ sur $[-2\pi ; 2\pi]$

EXERCICE 14

On considère sur $\mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x) = 3\sin^5 x - 5\sin^3 x + 1.$$

1°/ Expliquer pourquoi il suffit d'étudier f sur $[-\pi; \pi]$

2°/ Montrer que $I(0; 1)$ est centre de symétrie.

3°/ Montrer que la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ est axe de symétrie à C_f .

Donner le domaine d'étude utile.

4°/ Montrer que $f'(x) = -15 \sin^2 x \cos^3 x$.

5°/ Etudier f sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ et tracer C_f sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ puis sur $[-\pi; \pi]$.

6°/ a) Montrer que :

$$f(x) = \sin x (a \cos^4 x + b \cos^2 x + c) + 1 \text{ avec } a, b \text{ et } c \text{ des réels à déterminer.}$$

b) En déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 15

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 4x^3 - 3x - \frac{1}{2}$$

1°/ Calculer $f(-1)$, $f(-\frac{1}{2})$, $f(0)$ et $f(1)$

2°/ Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions distinctes comprises entre -1 et 1.

3°/ On pose $x = \cos \alpha$.

a) Exprimer $\cos 3\alpha$ en fonction de $\cos \alpha$.

b) Déterminer les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sous forme trigonométrique.

EXERCICE 16

Soit f la fonction définie sur $I = [0, \frac{\pi}{2}]$ par

$$f(x) = \frac{\sin 3x}{\cos^3 x}$$

1°/ Trouver la limite de f en $\frac{\pi}{2}$

2°/ Montrer que sur I , $f'(x) = \frac{3 \cos 2x}{\cos^4 x}$

En déduire le tableau de variation de f .

3°/ Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ a deux solutions dans I .

EXERCICE 17

Soit g la fonction définie sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ par :

$$g(x) = \frac{1}{\cos x}$$

1°/ Déterminer les variations de g .

2°/ Montrer que la restriction de g à l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ réalise une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}]$ sur un intervalle que l'on précisera.

3°/ Soit g^{-1} la réciproque de g .

Déterminer Dg^{-1} et la dérivabilité de g^{-1} en 1.

Calculer $g(\frac{\pi}{4})$ et $(g^{-1})'(\sqrt{2})$.

4°/ Montrer que $\forall x \in]1, +\infty[:$

$$(g^{-1})'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

EXERCICE 18

1°/ Soit la fonction polynôme g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 4x^3 + 3x^2 - 2$$

a) Etudier les variations de g .

b) Montrer que sur $[0; +\infty[$, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α .

c) Montrer que par contre que l'équation n'admet pas de solutions dans $]-\infty; 0]$.

d) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

2°/ On considère sur $I =]-1; +\infty[$ la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x+1}{x^3+1}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, (unité : 4cm).

a) En utilisant les résultats du 1°, étudier les variations de f .

b) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

c) Etudier les positions relatives de (C) et (T) sur I .

Que représente le point d'abscisse 0 pour (C) ?

Comment retrouver ce résultat autrement ?

3°/ a) Justifier que α est compris entre 0,6 et 0,61.

b) Démontrer que $f(\alpha) = \frac{2}{3\alpha^2}$

c) En déduire que $1,7 \leq f(\alpha) \leq 1,9$

4°/ a) Démontrer que (C) admet deux droites asymptotes.

b) Représenter (C) , (T) et les droites asymptotes.

EXERCICE 19

Soit f définie sur $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par : $f(x) = \tan x$

1°/ Montrer que f admet une fonction réciproque de I sur $\mathbb{R}$ notée h et calculer $h'(x) \forall x \in \mathbb{R}$.

2°/ Soit φ définie sur $[0; 1[$ par $\varphi(x) = h(\frac{1+x}{1-x})$

Calculer $\varphi'(x)$ pour tout x de $[0; 1[$ et montrer que $\forall x \in [0; 1[$, $\varphi(x) = \frac{\pi}{4} + h(x)$.

3°/ Soit g définie $[0; 1[$ par :

$$g(x) = \varphi(x) - h(x)(1 + 2x)$$

a) Calculer sur $[0, 1[$ les fonctions $g'(x)$ et $g''(x)$.

b) Etudier les variations de g' sur $[0, 1[$ puis en déduire celles de g .

c) En déduire qu'il existe un unique réel $c \in]0, 1[$ tel que $c = \tan \frac{\pi}{8c}$.

4°/ a) Montrer que l'équation : $h(2 - x) = 2h(x)$ admet au moins une solution $\alpha \in \mathbb{R}$

b) Montrer que α vérifie $\alpha^3 - \alpha^2 - 3\alpha + 1 = 0$

EXERCICE 20

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x + \sqrt{x|x| + 1} & \text{si } x \geq -1 \\ f(x) = (x + 1) \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

1°/ Déterminer D_f et exprimer $f(x)$ sans la valeur absolue.

2°/ Etudier la continuité de f en $x = 0$ et $x = -1$.

3°/ Etudier la dérivabilité de f en $x = 0$ et $x = -1$. Interpréter.

4°/a) Donner la nature des branches infinies.

b) Etudier la position de C_f par rapport à son asymptote en $-\infty$ sur $]-\infty; -1[$.

c) Etudier la position de C_f par rapport à son asymptote en $+\infty$ sur $]0; +\infty[$.

5°/ a) Calculer $f'(x)$ dans les intervalles où f est dérivable.

b) Donner le tableau de variation de f.

6°/ Soit h la restriction de f sur $[0; +\infty[$.

a) Montrer que h est une bijection de $[0; +\infty[$ vers J à préciser.

b) Sur quel intervalle h^{-1} est-elle dérivable ?

c) Calculer $h(1)$ et $h^{-1}(2 + 2\sqrt{2})$

7°/ Tracer C_f ; $C_{h^{-1}}$ et $C_{|f|}$ dans un même repère.

EXERCICE 21

1°/ Soit g la fonction définie sur $[-1; +\infty[$ par :

$$g(x) = 1 - 2\sqrt{x+1}$$

a) Etudier les variations de g.

b) En déduire le signe de g.

2°/ Soit la fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt{x+1} - x$$

a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f.

b) Montrer que : $\forall x \in]-1; +\infty[$ on a :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{2\sqrt{x+1}}$$

c) En déduire les variations de f puis dresser son tableau de variations.

d) Montrer que 1,25 est le maximum de f.

3°/a) Montrer que f réalise une bijection de $[0; 3]$ sur $[-1; 1]$.

b) Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique $\alpha \in [0; 3]$. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

c) Montrer que α est une solution de l'équation : $x + 1 = x^2$. En déduire la valeur exacte de α .

EXERCICE 22

PARTIE I

Soit g définie par : $g(x) = 3\sin^2 x - 1$

1°/ Etudier les variations de g sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

2°/ Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions a et b telles que : $-\frac{\pi}{3} < a < -\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{6} < b < \frac{\pi}{3}$.

3°/ En déduire le signe de $g(x)$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

PARTIE II

On considère $f(x) = \sin^3 x - \sin x + 1$.

1°/ Montrer que f est périodique de période $T=2\pi$.

2°/ Montrer que la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ est axe de symétrie à C_f .

3°/ Justifier le choix de $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ comme intervalle d'étude.

4°/ Calculer $f'(x)$, puis montrer que :

$$f'(x) = \cos x \cdot g(x)$$

5°/ Dresser le tableau de variation de f sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

6°/ Tracer la courbe de f sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

On pose : $a = -\frac{\pi}{4}$ et $b = \frac{\pi}{4}$.

EXERCICE 23

Soit g la fonction définie par :

$$\begin{cases} g(x) = x \sqrt{\frac{x+1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ g(x) = \frac{x^3 - x^2}{x^2 + 1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1°/ Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}$. Ecrire g sans barres de valeur absolue.

2°/ Etudier la continuité et la dérivabilité de g en 0 et en -1.

3°/ Etudier les branches infinies et la position de la courbe par rapport aux éventuelles asymptotes.

4°/ Calculer $h'(x)$ sur les intervalles où h est dérivable.

5°/ Soit $\varphi(x) = x^3 + 3x - 2$.

a) Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$. Donner un encadrement de α par deux entiers consécutifs.

b) En déduire le signe de φ sur $\mathbb{R}$.

6°/ Montrer que $g'(x) = \frac{x\varphi(x)}{(x^2+1)^2}$ sur $[0; +\infty[$ puis établir le tableau de variation de g sur $\mathbb{R}$.

7°/ Tracer les droites remarquables puis la courbe de g.

8°/a) Montrer que la restriction g_1 de g à $]-\infty; -1]$ est bijective de $]-\infty; -1]$ sur un intervalle J à préciser.

b) g_1^{-1} est-elle dérivable sur J ? Calculer $g_1^{-1}(-2)$ puis $(g_1^{-1})'(-\sqrt{2})$.

c) Donner les variations de g_1^{-1} et tracer $(C_{g_1^{-1}})$.

EXERCICE 24

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{|x| - 1}{|x - 2|} \text{ si } x \leq 1 \\ f(x) = x - 1 + 3\sqrt{x^2 - 1} \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

1°/ Montrer que $D_f = \mathbb{R}$.

2°/ a) Etudier la continuité de f en $x = 1$.

b) Ecrire $f(x)$ sans le symbole valeur absolue.

c) Etudier la dérivabilité de f en $x = 0$ et $x = 1$.
Interpréter graphiquement chaque résultat.

3°/ a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$ et en déduire une asymptote.

b) Etudier la branche infinie de f en $+\infty$.

4°/ a) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.

b) Dresser le tableau de variation de f .

c) Tracer C_f la courbe de f et ses asymptotes dans un même repère.

5°/ La restriction g de f sur $I =]-\infty; 0]$ est définie par $g(x) = \frac{x+1}{x-2}$.

a) Montrer que g est une bijection de I sur un intervalle J à déterminer.

b) Etudier la dérivabilité de g^{-1} sur J .

b) Tracer $C_{g^{-1}}$ la courbe de g^{-1} sur J .

d) Déterminer l'expression de $g^{-1}(x)$.

EXERCICE 25

Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \text{ si } x < 0 \\ \frac{x}{x^2 - 1} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

Soit C_f sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 4cm).

1°/ Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .

2°/ Etudier les limites de f aux bornes de D_f . On précisera la nature de chaque branche infinie éventuelle.

3°/ a) Etudier la continuité de f en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f en 0.

4°/ Achèver l'étude de f puis dresser son tableau de variation.

5°/ Tracer C_f .

6°/ On appelle h la restriction de f à $I =]-\infty; 0]$.

a) Montrer que h est une bijection de I vers un intervalle J à préciser. On note h^{-1} la bijection réciproque de h .

b) Montrer que h^{-1} est dérivable en 0 et que $[h^{-1}]'(0) = h'(0)$.

c) Déterminer $[h^{-1}]'(-\frac{1}{2})$.

d) Expliciter $h^{-1}(x)$.

e) Tracer la courbe $C_{h^{-1}}$ de h^{-1} dans le repère précédent.

EXERCICE 26

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3(x-1)^3}{3x^2+1}$

et soit C sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal d'unité 1cm.

1°) Montrer qu'il existe un unique triplet de réels $(a; b; c)$, que l'on déterminera, tel que pour tout réel x :

$$f(x) = ax + b + \frac{cx}{3x^2+1}.$$

2°) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

3°) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$f'(x) = \frac{9(x-1)^2(x+1)^2}{(3x^2+1)^2}.$$

4°) Dresser le tableau des variations de f .

5°) Montrer que la courbe C a pour asymptote oblique la droite (D) d'équation $y = x - 3$.

Étudier les positions relatives de C et (D) .

6°) Donner l'équation de la tangente (T) à C au point d'abscisse 0. Tracer (D) , (T) et la courbe C .

7°) Montrer que la courbe C a un centre de symétrie.

8°) Montrer que l'équation $f(x)=1$ a une solution unique dans $\mathbb{R}$. On notera α cette solution. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près par excès.

Partie B

On pourra dans cette partie utiliser certains résultats de la partie A.

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \frac{3(\sin x - 1)^3}{3 \sin^2 x + 1}.$$

1°) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $g'(x)$.

2°) Dresser le tableau des variations de g sur $[-\pi; \pi]$.

3°) Tracer sur un nouveau dessin, la courbe représentative de g .

EXERCICE 27

Soit f définie par : $f(x) = \cos^3 x - 3\cos x + 1$

1°/ Déterminer D_f

2°/ Etudier la dérivabilité de f sur D_f et montrer que $f'(x) = 3\sin^3 x$

2°/ Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in [0; \frac{\pi}{2}]$

3°/ Montrer que $\cos \alpha = \frac{1}{2 + \sin^2 \alpha}$.

4°/ Montrer que $\forall x \in D_f, |f'(x)| \leq 3$

5°/ Soit $x > 0$. En utilisant l'inégalité des accroissements finis sur $[0; x]$, montrer que :

$$|\cos^3 x - 3\cos x + 2| \leq 3x.$$

EXERCICE 28

Soit $f(x) = \frac{-x^2 + bx + 3}{x - 1}$, avec $x \neq 1$.

1°/ Déterminer b pour que f soit prolongeable par continuité en $x_0 = 1$ puis définir ce prolongement.

2°. Comment choisir b pour que f n'admette pas d'extrémum.

3°/ Déterminer b pour que la courbe représentative de f admette au point d'abscisse 2 une tangente parallèle à la droite d'équation $2x + 2y - 3 = 0$.

EXERCICE 29

Soit f définie par: $f(x) = \cos 4x + 2\sin 2x$

1°/ Justifier le choix de $I = [0, \pi]$ comme intervalle d'étude.

2°/a) Montrer que $f'(x) = 4\cos 2x(1 - 2\sin 2x)$

b) Résoudre dans I , l'équation $f'(x) = 0$.

c) Donner le tableau de variation de f .

3°/ Démontrer que la droite d'équation $x = \frac{\pi}{4}$ est axe de symétrie à C_f .

4°/ Tracer C_f dans un repère orthogonal.

EXERCICE 30

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{2\sin 2x}{1 + \cos x}$

1°/ Déterminer le domaine de définition D de f puis montrer qu'on peut réduire le domaine d'étude à $E = [0, \pi]$.

2°/ Déterminer la limite de f en π .

3°/ Soit α l'unique réel de $[0, \pi]$ tel que : $\cos \alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$. Montrer que $\cos^2 x + \cos x - 1 > 0$ pour tout $x \in [0, \alpha]$.

4°/ Montrer que $f'(x) = \frac{4(\cos^2 x + \cos x - 1)}{1 + \cos x}$

En déduire le signe de la dérivée et le tableau de variation de f sur $[0, \pi]$.

5°/ Tracer la courbe de f sur $]-\pi, \pi[$.

EXERCICE 31

A) Soit g la fonction définie par :

$$g(x) = 2x^2\sqrt{x+1} - 1$$

1°/a) Déterminer D_g et calculer les limites aux bornes de D_g .

b) Etudier la dérivabilité de g en -1^+ . Interpréter graphiquement le résultat.

c) Montrer que g est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et

$$\forall x \in]-1, +\infty[, g'(x) = \frac{x(5x+4)}{\sqrt{x+1}}.$$

d) Dresser le tableau de variation de g .

2°/a) Montrer que la restriction h de g à $]0, +\infty[$ est bijective. Préciser le domaine de définition J de h^{-1} ; bijection réciproque de h et ses variations.

b) Justifier que h^{-1} est dérivable sur J .

3°/ a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $[-1; +\infty[$.

b) Justifier que $0,6 < \alpha < 0,7$.

c) Déduire de ce qui précède le tableau de signe de g sur D_g .

d) Montrer que $(h^{-1})'(0) = \frac{1}{2\alpha^3(5\alpha+4)}$

4°/ Construire les courbes de g et h^{-1} dans un repère orthonormé (unité : 4cm).

A) Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \sqrt{x+1}.$$

1°/ Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition et préciser la branche infinie de C_f en $+\infty$.

2°/ Déduire de A) 3/c le tableau de variation de f

EXERCICE 32

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 2(x + \sqrt{x^2 + x}) - 3, & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{x^3 + 3x^2 + 3x - 3}{(x+1)^2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

D_f son domaine de définition et C_f sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$: unité = 1cm.

A) 1°/ Déterminer D_f .

2°/ Etudier la continuité de f en zéro.

3°/ Calculer les limites de f aux bornes de D_f . Interpréter graphiquement ces résultats.

4°/ Montrer que les droites Δ et D d'équations respectives : $y = 4x - 2$ et $y = x + 1$ sont des asymptotes obliques à C_f . Etudier la position de C_f par rapport à Δ sur $[0, +\infty[$ et par rapport à D sur $]-\infty, 0[$.

B) 1°/ Etudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement le résultat.

2°/ Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$ et pour $x < 0$.

3°/ Etudier le signe de $f'(x)$ et donner le tableau de variation de f .

C) Soit g la restriction de f à $I = [0, +\infty[$.

1°/ Montrer que g est bijective de I sur un intervalle J à préciser.

2°/ En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution x_0 , avec $x_0 > 0$. Donner la valeur exacte de x_0 .

3°/ Soit g^{-1} la réciproque de g .

a) Calculer $(g^{-1})'(0)$. g^{-1} est-elle dérivable en -3 ? Justifier.

b) Donner l'expression de g^{-1} .

4°/ Construire C_f , C_g et $C_{g^{-1}}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

EXERCICE 33

Soit $f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right) \sin(\pi x)$

1°/ Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -\pi \left(x + \frac{1}{x}\right) \frac{\sin[\pi(x - 1)]}{\pi(x - 1)}$$

2°/ En déduire que f est dérivable en 1 et calculer le nombre dérivé de en 1.

EXERCICE 34

Soit f la fonction définie par: $f(x) = \frac{|x^2 + x| + 1}{|x| + 1}$

1°/ Déterminer le domaine de définition D_f de f .

2°/ Exprimer $f(x)$ sans les valeurs absolues.

3°/ Etudier la dérivabilité de f en 0 et en -1 puis interpréter graphiquement les résultats obtenus. (On donnera les équations des demi-tangentes).

4°/ Etudier les limites de f aux bornes de D_f .

5°/ Donner l'ensemble de dérivabilité de f puis établir son tableau de variation.

6°/ Soit C_f la courbe de f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Etudier les branches infinies à C_f puis donner les positions relatives de C_f à ses asymptotes.

b) Tracer C_f . (On donnera les positions avec les axes).

7°/ Soit $g = f$ sur $\mathbb{R}^+$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers un intervalle J à préciser.

b) Déterminer l'ensemble de dérivabilité de g^{-1} .

c) Calculer $(g^{-1})' \left(\frac{7}{3}\right)$.

d) Tracer $(C_{g^{-1}})$ puis expliciter $g^{-1}(x)$.

EXERCICE 35

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 + 3}{x + 1} & \text{si } x \leq 1 \text{ et } x \neq -1 \\ f(x) = \sqrt{x^2 + x + 2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1°/ a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f .

b) f est-elle dérivable en 1 ? Interpréter les résultats obtenus.

2°/ a) Calculer les limites aux bornes de D_f .

b) Montrer que C_f admet une asymptote verticale et deux asymptotes obliques que l'on précisera par leur équation cartésienne.

c) Préciser la position des asymptotes obliques par rapport à C_f .

3°/ a) Etudier la dérivabilité de f puis calculer $f'(x)$

b) Etudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f .

c) Construire C_f et ses droites remarquables.

4°/ Soit g la restriction de f sur $I = [1, +\infty[$.

a) Montrer que g réalise une bijection de I sur un intervalle J à déterminer.

b) g^{-1} est-elle dérivable sur J ?

c) Calculer $(g^{-1})(x)$ pour $x \in J$.

d) Calculer de deux façons différentes $(g^{-1})'(x)$.

Construire la courbe de g^{-1} sur le même repère.

EXERCICE 36

On se propose d'étudier la fonction f dont on connaît le tableau de variation ci-dessous.

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
f'	-	0	-	-	-3	0	-
f		3		$+\infty$		0	

1°/ Donner les ensembles de définition de f et f' .

2°/ Quelles sont les limites de f aux bornes de D_f .

3°/ Donner les équations des asymptotes à la courbe C_f de f .

4°/ Ecrire des équations de la tangente à la courbe C_f que le tableau de variation permet de connaître.

5°/ Tracer une esquisse de C_f .

6°/ Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$? On justifiera la réponse et on donnera pour chaque racine un encadrement par deux entiers consécutifs.

EXERCICE 37

Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x^2} & \text{si } x > 0 \\ f(x) = \frac{1}{2} \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) & \text{si } -\frac{\pi}{4} \leq x \leq 0 \end{cases}$$

1°/ Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur son ensemble de définition.

2°/ Soit g la restriction de f à $\left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]$

a) Montrer que g est une bijection de $\left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Déterminer le domaine de dérivabilité de g^{-1} , puis expliciter $(g^{-1})'(x)$.

3°/ a) Montrer que l'équation $g(x) + x = 0$ admet une solution unique $\alpha \in \left] -\frac{\pi}{4}, 0 \right[$

b) En déduire que le point $I(-\alpha, \alpha) \in (C_{g^{-1}}) \cap D$ où $(C_{g^{-1}})$ est la courbe représentative de g^{-1} dans un repère orthonormé et D une droite dont une équation cartésienne est $y = -x$.

EXERCICE 38

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) \leq 1$.

Montrer que $\forall a \geq 0: |f(a) - f(-a)| \leq 2a$

En déduire que si f est impaire on a : $|f(a)| \leq a$

EXERCICE 39

Déterminer une primitive F de f dans en précisant l'ensemble de définition de f.

$$1^\circ / f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \quad 2^\circ / f(x) = \tan x + \tan^3 x$$

$$3^\circ / f(x) = \sin^2 x \cdot \cos^3 x \quad 4^\circ / (\cos 5x)^2 x \sin 3x$$

$$5^\circ / (\sin x)^{2n+1} (\cos x)^n \quad 6^\circ / f(x) = \frac{2x^3 + 5x^2 + 4x + 2}{(x+1)^2}$$

$$7^\circ / f(x) = x(2x+1)^{101} ; \quad 8^\circ / f(x) = \cos^2 x \cdot \sin^2 x$$

$$9^\circ / f(x) = \frac{x^3}{3} (x^2+1)^{103} ; \quad 10^\circ / f(x) = x \sin x$$

$$11^\circ / f(x) = x^2 \sin x ; \quad 12^\circ / f(x) = x \cos x$$

$$13^\circ / f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^2} \quad 14^\circ / f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

EXERCICE 40

Déterminer l'ensemble des primitive f sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)(3x^2 - 3x) + (6x - 3)\sqrt{x^2 - x + 1} + \frac{4x^2 + 1}{\sqrt{4x^3 + 3x}}$$

EXERCICE 41

On considère les fonctions **f, g et h** définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos^4 x, \quad g(x) = \sin^4 x, \quad h(x) = 2\sin^2 x \cos^2 x$$

1°/ Déterminer la primitive H de h sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en $\frac{\pi}{4}$.

2°/ Soit F et G les primitives respectives de f et g qui s'annule en $\frac{\pi}{4}$. Montrer que :

$$f(x) - g(x) = \cos 2x \text{ et } f(x) + g(x) + h(x) = 1$$

3°/ Déterminer alors F(x) et G(x).

EXERCICE 42

f et u sont les fonctions définies sur $I = \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ par

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x} \text{ et } u(x) = \frac{1}{\cos^4 x}$$

1°/ Vérifier que $\forall x \in I, f'(x) = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}$

2°/ En utilisant une primitive de la fonction $x \rightarrow \frac{1}{\cos^2 x}$, trouver la primitive sur I, nulle en 0, de la fonction u.

EXERCICE 43

1°/ Développer $(\cos^2 x + \sin^2 x)^3$ puis linéariser $\sin^2 2x$.

2°/ En déduire que pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$\cos^6 x + \sin^6 x = \frac{5}{5} + \frac{3}{5} \cos 4x.$$

3°/ Déterminer la primitive de $\cos^6 x + \sin^6 x$ qui prend la valeur 0 en $\frac{\pi}{4}$.

EXERCICE 44

1°/ Déterminer trois réels a, b et c tels que :

$$x^2 = a(x-1)^2 + b(x-1) + c$$

2°/ En déduire les primitives de f sur $\mathbb{R}$ tel que

$$f(x) = x^2(x-1)^{2009}$$

EXERCICE 45

Trouver une primitive sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonctions f et g, définies par :

$$f(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 + 1})^2}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad g(x) = \frac{1}{(\sqrt{x^2 + 1})(x + \sqrt{x^2 + 1})}$$

EXERCICE 46

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{1 - \sin x}$

En remarquant que $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\frac{1}{1 - \sin x} = \frac{1 + \sin x}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}$$

Déterminer les primitives de f sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

EXERCICE 47

1°/ On considère les fonctions h et F définies par :

$$h(x) = -\frac{1}{2x^2 \sqrt{\frac{x+1}{x}}} \text{ et } F(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x}}$$

Montrer que F est une primitive de h sur $]0; +\infty[$.

2°/ Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = x \sqrt{\left|\frac{x+1}{x}\right|} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0$$

a) Déterminer le domaine de définition D_f , puis écrire f(x) sans le symbole de la valeur absolue.

b) Etudier les variations de f sur $I =]0; +\infty[$.

c) Soit g la restriction de f à l'intervalle I. Montrer que g réalise une bijection de I sur J à préciser.

d) Soit g^{-1} la bijection réciproque de g. Expliciter $g^{-1}(x)$.

EXERCICE 48

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sin x + \sin^3 x$$

1°/ Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ et déterminer deux réels a et b tels que $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + af(x) = b \sin x$.

2°/ En déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 49

Soit la fonction f définie sur $\left]-\infty; \frac{3}{2}\right[$ par :

$$f(x) = (x^2 + x + 1)\sqrt{3 - 2x}$$

1°/ Montrer que $x^2 = \frac{(3 - 2x)^2}{4} - \frac{3(3 - 2x)}{2} + \frac{9}{4}$

2°/ Déterminer alors la primitive de f dans $\left]-\infty; \frac{3}{2}\right[$ qui s'annule en 1.

EXERCICE 50

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = a \cos x + b \cos^3 x, \quad \text{avec a et b deux réels}$$

1°/ Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

2°/ Comparer $f(x)$ et $f''(x)$. En déduire les primitives de f dans $\mathbb{R}$.

EXERCICES COMPLEMENTAIRES :

CIAM SM- CIAM SE- SUJETS BAC S2

SCIENTIFIC PRO

COURS DE RENFORCEMENT 2012/2013

CELLULE DE MATHÉMATIQUES

TERMINALE S2

NOMBRES COMPLEXES

EXERCICE 1

A) 1°/ Calculer $i^3, i^4, i^{4p+1}, i^{4p+2}, i^{4p+3} (p \in \mathbb{N})$

2°/ Que peut-on dire de la suite (i^n) , $n \in \mathbb{N}$?

3°/ Calculer pour tout entier n la somme $\sum_{k=0}^n i^k$

B) On donne les nombres complexes :

$$a = -2 + 3i, b = 3 - i.$$

Calculer $a^2; b^2; a + b; a - b; a \times b; \frac{a}{b}$

C) 1° / Calculer $1 + i + i^2 + \dots + i^n$

2°/ On pose $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, calculer $1 + j + j^2$

D) Mettre sous forme cartésienne :

$$(1 + i)^5; u = 1 + i; v = 1 + u + u^2 + u^3 + u^4$$

EXERCICE 2

1°/ Placer les points $A(2 + 3i)$ et $B(1 - 4i)$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

2°/ Déterminer l'abscisse de I milieu de $[AB]$ et l'abscisse de G barycentre de $(A, -2)$ et $(B, 3)$.

EXERCICE 3

u et u' sont deux complexes de module 1.

Démontrer que $Z = \frac{u+u'}{1+uu'}$ est un nombre réel.

EXERCICE 4

Démontrer que $\frac{z-u\bar{z}}{1-u}$ est réel si et seulement si $|u| = 1$. Etudier la réciproque.

EXERCICE 5

Module et argument de $1 + \sin \alpha - i \cos \alpha$, $\frac{e^{i\alpha} + e^{i\beta}}{1 + e^{i(\alpha+\beta)}}$, α et β sont des réels donnés. On donnera la condition pour que la deuxième expression soit définie.

EXERCICE 6

A) Soit $z = x + iy$, on pose $z' = \frac{z-2i}{z+1+i}$, $z \neq -1 + i$

1°/ Déterminer l'ensemble E des points M du plan d'affixe z tels que z' soit imaginaire pur.

2°/ Déterminer l'ensemble F des points M du plan d'affixe z tels que z' est réel.

B) Soit $z = x + iy$, on pose $z' = z\bar{z} - 2z + i\bar{z} + i$

1°/ Déterminer l'ensemble Γ_1 des points M d'affixe z tels que z' soit réel.

2°/ Déterminer l'ensemble Γ_2 des points M d'affixe z tels que z' soit imaginaire pur.

C) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$1^\circ / z^2 + z\bar{z} = 0; \quad 2^\circ / z^2 = \bar{z};$$

$$3^\circ / 2z + 6\bar{z} = 3 + 2i \quad 4^\circ / (z + i)(z - 5) = z^2 - i$$

D) On considère le polynôme :

$$f(z) = z^2 - (3 + 4i)z - 1 + 5i$$

1°/ Calculer sa valeur pour $z = z_1 = 2 + 3i$

2°/ Donner les expressions de $\overline{f(z)}$ et $f(\bar{z})$

Ces polynômes en z sont-ils identiques ? Pourquoi ?

3°/ Calculer $\overline{f(z_1)}$ et $f(\bar{z}_1)$. Pourrait-on prévoir le résultat obtenu pour $\overline{f(z_1)}$?

EXERCICE 7

A) Le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On pose $\forall z \in \mathbb{C} - \{i\}$, $Z = \frac{z-2}{z-i}$

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que : a) $|Z| = 1$; b) $|Z| = 2$

B) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant : $|z - 1 - i| = |z - 3 - 2i|$

C) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que : $|\bar{z} + 5 - i| = |z - 4i|$

D) On pose $f(\theta) = \frac{\cos \theta + i \sin \theta}{1 - i \tan \theta}$. Calculer $|f(\theta)|$

E) Déterminer les nombres complexes z tels que $z, \frac{1}{z}$ et $z - 1$ aient même module.

EXERCICE 8

A) Déterminer les racines carrées de Z :

a) $Z = 8 - 6i$, b) $Z = 3 + 4i$, c) $Z = 7 + 24i$.

B) Résoudre dans $\mathbb{C}$:

$$1^\circ / z^2 + 2z + 5 = 0, \quad 2^\circ / iz^2 + (1 + i)z + 1 = 0$$

$$3^\circ / (3 + i)z^2 - (7 - i)z + 10 = 0$$

$$4^\circ / z^3 - 2z^2 + z - 2 = 0$$

$$5^\circ / z^3(-1 + 5i)z^2 - (7 + 4i)z + 3 - 3i = 0$$

$$6^\circ / iz^3 + (3 - 5i)z^2 + (16i - 21)z + 30 - 20i = 0$$

C) Résoudre le système :

$$1^\circ / \begin{cases} (5 + 4i)z + (1 - i)z' = i \\ (-5 + 4i)z + (1 + i)z' = 2 + i \end{cases}$$

$$2^\circ / \begin{cases} (5 + 4i)z + (1 - i)z' = i \\ (-5 + 4i)z + (1 + i)z' = 2 + i \end{cases}$$

EXERCICE 9

A) Soit (E): $z^4 - z^3 + 2z^2 - z + 1 = 0$

1°/ Vérifier que i est solution.

2°/ Résoudre complètement (E).

B) On pose pour tout nombre complexe z :

$$f(z) = z^4 + z^2 + 1$$

1°/ Résoudre l'équation $f(z) = 0$.

2°/ En déduire que le polynôme Φ défini par :

$\Phi(x) = x^4 + x^4 + 1$ peut s'écrire comme produit de deux polynômes du second degré à coefficients réels.

C) Déterminer les couples (a, b) des nombres complexes solutions du système : $\begin{cases} a + b = 8 - 3i \\ ab = 20 - 12i \end{cases}$

D) Résoudre dans $\mathbb{C}$:

$$1^\circ/ z^8 = \frac{\sqrt{2}(1+i)}{\sqrt{2}-1}; \quad 2^\circ/ z^5 = \frac{9\sqrt{3}}{2}(1-i\sqrt{3})$$

$$3^\circ/ z^6 + 1 = 0; \quad 4^\circ/ \left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^3 = \frac{1+ia}{1-ia} \quad (a \in \mathbb{R})$$

EXERCICE 10

A) Calculer le module de z puis mettre z sous forme trigonométrique :

$$1^\circ/ z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad 2^\circ/ z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$3^\circ/ z = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad 4^\circ/ z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

B) Mettre sous forme trigonométrique :

$$1 + i; 1 - i; 1 + i\sqrt{3}; -1 + i\sqrt{3}; \frac{1+\sqrt{2}+i}{1+\sqrt{2}-i}$$

$$C) \text{ Calculer } \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{30}$$

D) Déterminer le module et un argument de

$$\frac{1 + \cos \alpha + i \sin \alpha}{1 - \cos \alpha - i \sin \alpha}$$

EXERCICE 11

A) Linéariser :

$$1^\circ/ \cos^2 x \sin^4 x; \quad 2^\circ/ \cos^3 x + \sin^3 x;$$

$$3^\circ/ \cos^6 x \quad 4^\circ/ \cos x \sin^3 x$$

B) Transformer:

$$1^\circ/ f(x) = \cos x + \sqrt{3} \sin x$$

$$2^\circ/ (x) = (\sqrt{6} + \sqrt{2}) \cos x - (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \sin x$$

C) Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$1^\circ/ \cos x + \cos 7x = \cos 4x$$

$$2^\circ/ \sin 4x + \sin 3x = \sin x$$

$$3^\circ/ \cos x + \sqrt{3} \sin x = \sqrt{2}$$

$$4^\circ/ 2 \cos x - 3 \sin x = 15$$

D) Déterminer une fonction polynôme P telle que l'on ait : $\forall x \in \mathbb{R}, \cos 5x = P(\cos x)$

Application : calculer $\cos \cos \frac{\pi}{10}$

E) On considère le complexe $u = -3 + 3i$

Déterminer le nombre complexe z défini par :

$$uz = 6\sqrt{2} \left(\cos \frac{17\pi}{12} + i \sin \frac{17\pi}{12} \right)$$

En déduire les valeurs de $\cos \frac{17\pi}{12}$ et $\sin \frac{17\pi}{12}$

EXERCICE 12

Soit le polynôme :

$$P(z) = z^3 + (-4 + 2i)z^2 - 7iz + 9 + 3i, z \in \mathbb{C}.$$

1°/ Soit $z_0 = 3$, calculer $P(z_0)$ et en déduire une résolution de $P(z) = 0$. On note z_1 et z_2 les deux solutions de cette équation, distinctes de z_0 avec $|z_1| < |z_2|$.

2°/ On désigne par A, B et C les points du plan complexe d'affixes respectives z_0, z_1 et z_2 .

a) Déterminer les coordonnées des points pondérées (A, 1) et (B, -1) et (C, -1).

b) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels

$$\text{que : } \frac{\|MA\|^2 - \|MB\|^2}{\|MC\|^2} = 1$$

EXERCICE 13

Soit f l'application du plan qui a tout point $M(z)$, ($z \neq -2 - i$), associe le point $M'(z')$ défini par :

$$z' = \frac{z - 4 - 2i}{z + 2 + i}$$

Soient les points A et B d'affixes respectives :

$$4 + 2i \text{ et } -2 - i$$

1°/ Interpréter géométriquement $|z'|$.

En déduire l'ensemble des points M du plan tels

$$\text{que : } a) |z'| = 1 \quad b) |z'| = 2$$

2°/ Interpréter géométriquement $\text{Arg } z'$.

En déduire l'ensemble des points M du plan tels

$$\text{que : } a) z' \in \mathbb{R}^+ \quad b) z' \in i\mathbb{R}$$

3°/ Retrouver le résultat de 1°/ par calcul.

4°/ Retrouver le résultat de 2°/ par calcul.

EXERCICE 14

1°/ Vérifier que $(1 + \sqrt{3})^2 = 4 + 2\sqrt{3}$ puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 + (i - 1)(\sqrt{3} - 3)z - 12i = 0$$

2°/ Donner les solutions sous forme trigonométrique et sous forme d'Euler.

3°/ Soient A, B, C, D les points d'affixes respectives :

$$z_1 = -3 - i\sqrt{3}; \quad z_2 = 3i + \sqrt{3}$$

$$z_3 = -3 + 3i; \quad z_4 = \sqrt{3} - i\sqrt{3}$$

a) Calculer $\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_4}$. En déduire la nature de ABC.

b) Montrer que les points A, B, C, D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

4°/ Soit $Z = \frac{z_1}{z_2}$.

a) Donner la forme trigonométrique de Z.

b) En déduire :

α) la forme algébrique de Z^{2005} .

β) la petite valeur de $n \in \mathbb{N}^*$ telle que $Z^n \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 15

Soit l'équation (E): $z^2 - 2 \sin \theta z + 1 = 0, \theta \in \mathbb{R}$

1°/ Pour quelles valeurs de θ (E) admet-elle :

- a) une solution nulle.
- b) deux solutions opposées.

2°/ Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$.

On appellera z_1 et z_2 les solutions de (E).

3°/ Soit $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$.

Déterminer l'ensemble des points M_1 et M_2 lorsque θ décrit $\mathbb{R}$.

EXERCICE 16

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 18 + 26i$ (1)

1°/ Montrer que $z_0 = 3 + i$ est racine de (1)

2°/ Montrer que pour toute solution z de l'équation (1), le complexe $Z = \frac{z}{z_0}$ est une racine cubique de (1).

3°/ Résoudre $Z^3 = 1$ et en déduire toutes les autres solutions de (1) sous forme algébrique.

EXERCICE 17

Soit $a = \sqrt{3} - i$ et $b = \bar{a}$.

1°/ On pose $u = \frac{a}{b}$. Ecrire u sous forme exponentielle puis sous forme algébrique.

2°/ Soit $Z = \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i} + \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}$

a) Ecrire z^n sous la forme trigonométrique.

b) Montrer que $z^n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow n = -2k$.

Préciser l'ensemble des valeurs prises par k .

3°/ On pose $v = -u \left(\sin \frac{\pi}{4} + i \cos \frac{\pi}{4} \right)$. Calculer le module de v et un argument de v .

4°/ On pose $Z = (1 - u)^{12}$.

a) Etablir que $1 - u = \left(2 \sin \frac{\pi}{12} \right) e^{-i \frac{5\pi}{12}}$.

b) En déduire le module de Z et un argument de Z .

EXERCICE 18

1°/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^5 = 1$.

2°/ Soit $\theta \in]-\pi, \pi[$.

a) Exprimer en fonction de $\tan \frac{\theta}{2}$ la solution de l'équation $\frac{1-iz}{1+iz} = e^{i\theta}$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$: $\left(\frac{1-iz}{1+iz} \right)^5 = 1$.

c) Développer et ordonner l'expression :

$(1 - iz)^5 - (1 + iz)^5$, puis résoudre l'équation :

$(1 - iz)^5 - (1 + iz)^5 = 0$

En déduire la valeur de $\tan \frac{\pi}{5}$.

3°/ On pose : $z_0 = e^{i2\pi/5}, \alpha = z_0 + z_0^4, \beta = z_0^2 + z_0^3$

a) Démontrer que : $1 + z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4 = 0$.

En déduire que α et β sont les solutions de l'équation : $X^2 + X - 1 = 0$ (E)

b) Déterminer α en fonction de $\cos \frac{2\pi}{5}$.

c) Résoudre l'équation (E) et donner la valeur exacte de $\cos \frac{2\pi}{5}$.

EXERCICE 19

θ est un nombre réel d'intervalle $]0; 2\pi[$, on considère les deux nombres complexes :

$$z = e^{i\theta} \text{ et } Z = \frac{1+z}{1-z}$$

1°/ Montrer que $Z = i \cotan \frac{\theta}{2}$

2°/ Pour quelles valeurs de θ l'argument de Z est-il défini ? A quoi est-il alors égal ?

3°/ A quoi est égal $|Z|$?

EXERCICE 20

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 1cm), on considère les points A_n d'affixe $z_n = 10 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} i \right)^n (1 + i)$, où $n \in \mathbb{N}^*$

1°/a) Ecrire z_1, z_2, z_3 et z_4 sous forme algébrique.

b) Placer les points A_1, A_2, A_3 et A_4 dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2°/ Calculer le module de z_n en fonction de n .

3°/ Démontrer que pour n pair les points A_n sont situés sur la 1^{ère} bissectrice et si n impair ils sont sur la 2^{ème} bissectrice.

EXERCICE 21

1°/ Résoudre dans l'ensemble des complexes l'équation d'inconnue z : $z^4 = 1$

En déduire l'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de

$$\text{l'équation : } \left(\frac{z-i}{z+i} \right)^3 + \left(\frac{z-i}{z+i} \right)^2 + \frac{z-i}{z+i} + 1 = 0$$

2°/ Soit n un entier naturel non nul, et A un nombre complexe.

Soit (E) l'équation d'inconnue complexe z :

$$(E): \left(\frac{z-i}{z+i} \right)^n = A$$

On appelle P et Q les points du plan complexe d'affixes respectives $-i$ et i , et M le point d'affixe z .

a) Montrer que si z vérifie l'équation (E), alors : $\frac{MP}{MQ} = \sqrt[n]{|A|}$.

b) Vérifier que si l'équation (E) a au moins une racine réelle, alors toutes ses racines sont réelles.

EXERCICE 22

z et z' deux nombres complexes non nuls.

1°/ Montrer que si $|z| = |z'|$ alors

$$\frac{(z + z')^2}{zz'} = 2 \frac{|z|^2 + \operatorname{Re}(zz')}{zz'}$$

2°/ En déduire que si $|z| = |z'|$ alors $\frac{(z+z')^2}{zz'}$ est un réel positif.

EXERCICE 23

Dans le plan complexe, on considère les points :

$$A\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right), B(2i), M(z), z \neq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i.$$

$$\text{Soit } z' = \frac{z-2i}{2z-1-i}$$

1°/ Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que z' soit réel.

2°/ Déterminer et construire l'ensemble des points tels que z' soit imaginaire pur.

3°/ Déterminer et construire l'ensemble des points M tels qu'un argument de z' soit égal à $\frac{3\pi}{2}$.

EXERCICE 24

On donne le nombre complexe : $a = \frac{1}{2}(1 + i)$

1°/ Calculer le module du complexe $a - 1$.

2°/ On pose $z_0 = 1$ et pour tout entier non nul n $z_n = a^n$. Soit M_n le point d'affixe z_n . Placer dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ les points $M_0, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7$. (Prendre pour unité 4cm).

3°/ Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$U_n = |z_n - z_{n-1}|.$$

Démontrer que la suite (U_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison q et le premier terme U_1 .

4°/ a) Calculer : $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$

b) Calculer S_7 , en déduire une interprétation géométrique.

c) Calculer si elle existe la limite de (S_n)

EXERCICE 25

1°/ a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$Z^2 - (2\cos\theta)Z + 1 = 0. \quad \theta \in \mathbb{R}$$

2°/ a) En déduire les solutions Z_1, Z_2, Z_3 et Z_4 dans $\mathbb{C}$ de l'équation $Z^4 - (2\cos\theta)Z^2 + 1 = 0$ (les solutions seront représentées sous forme trigonométrique)

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$Z_1^n + Z_2^n + Z_3^n + Z_4^n \in \mathbb{R}$$

c) Pour quelles valeurs de $\theta \in]0; \pi[$ les images des solutions sont-elles les sommets d'un carré ?

d) Ecrire le polynôme $P(Z) = Z^4 - (2\cos\theta)Z^2 + 1$ comme produit de deux facteurs du second degré à coefficients réels.

EXERCICE 26

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points :

$$A(2i); B(-i); C(5i); D\left(\frac{1}{2}i\right); M(z) \quad M'(z'), \quad \text{et la}$$

$$\text{fonction } f \text{ définie par } f(z) = z' = \frac{4iz+2}{5i-z}$$

1°/ Montrer que si $M \in (Oy)$ alors $M' \in (Oy)$.

2°/ Interpréter géométriquement $|z'|$. En déduire que si M' est sur le cercle de centre O et de rayon 4 alors M appartient à une droite à préciser.

3°/ a) Pour $z \neq i$, montrer que $\frac{z'-2i}{z'+i} = 2\frac{z-2i}{z+i}$.

b) En déduire que si M appartient à la médiatrice de [AB] alors M' appartient à un cercle à préciser.

4°/ a) Montrer que pour tout $z \neq 5i$, on a :

$$(z' + 4i)(z - 5i) = 18$$

b) En déduire l'image du cercle de centre C et de rayon 9 et celle de la demi droite des points M défini par $(\vec{u}, \vec{CM}) = \frac{\pi}{4}(2\pi)$.

EXERCICE 27

1°/ Soit le nombre complexe

$$a = \sqrt{2 - \sqrt{3}} - i\sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

a) Calculer a^2 et l'écrire sous forme exponentielle.

b) En déduire le module de a et vérifier que $\frac{7\pi}{12}$ est un argument de a.

c) Déduire de ce qui précède les valeurs exactes de $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$.

2°/ a) Résoudre dans $\mathbb{C}$: $Z^4 = -2\sqrt{3} - 2i$ et représenter les images des solutions dans le plan complexe de repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

b) En déduire que :

$$\cos\left(\frac{-5\pi}{24}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{24}\right) + \cos\left(\frac{19\pi}{24}\right) + \cos\left(\frac{-17\pi}{24}\right) = 0$$

c) Déterminer et construire dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ l'ensemble des points $M(z)$ tel que $a^2 z \in \mathbb{R}_+$.

EXERCICE 28

Soit l'équation :

$$(E) : z^2 - (1 + \sin 2t)z + \frac{1}{2}i \sin 2t = 0, t \in \left] \frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$$

1°/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). Préciser les cas de racines doubles.

2°/ Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé, on désigne par M' et M'' les points d'affixes z' et z'' solutions de (E) et par I le milieu de $[M'M'']$.

a) Déterminer l'ensemble des points I lorsque t décrit l'intervalle $\left] \frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$.

b) Montrer que les points M' et M'' sont sur un cercle que l'on précisera.

c) Démontrer que lorsque M' et M'' sont distincts que la droite qui les contient a une direction indépendante de t.

d) On pose $t = \frac{\pi}{6}$, déduire de ce qui précède une construction simple de I et des points M' et M'' .

EXERCICE 29

Soit l'équation :

$$(E): z^3 + (\sqrt{3} - 2i)z^2 + (-5 + i\sqrt{3})z - 8i = 0$$

1°/ Montrer que (E) admet une racine imaginaire pure z_0 .

2°/ Résoudre (E).

3°/ Soit le plan complexe $(O, \vec{u}, \vec{v})$, $A(-i)$, $B(\sqrt{3} + i)$, $C(-2\sqrt{3} + 2i)$.

a) Déterminer l'abscisse du barycentre G du système $(A; 4)$, $(B; 2)$, $(C; 1)$.

b) Préciser l'abscisse du point C' symétrique du point C par rapport à l'axe des abscisses.

c) Les points O, B et C' sont-ils alignés ? Justifier.

4°/ a) Donner la forme trigonométrique de z_A , z_B et z_C .

b) Donner la formule d'Euler de $\frac{z_A^5 z_B^6}{z_C^7}$.

c) Résoudre $z^4 = z_B^4$.

5°/ a) Résoudre dans $\mathbb{C}$: Résoudre $z^3 = 2 + 2i$.

b) Calculer $(-1 + i)^3$.

c) A l'aide des racines cubiques de 1 donner les solutions sous forme algébrique.

d) En déduire $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

6°/ Déduire le plus petit n tel que z_B^n soit un réel.

EXERCICE 30

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$. (unité : 5 cm).

On pose $z_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n , $z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n$.

On note A_n le point du plan d'abscisse z_n .

1°/ Calculer z_1, z_2, z_3, z_4 et vérifier que z_4 est un nombre réel. Placer les points A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 sur une figure.

2°/ Pour tout entier n , on pose $U_n = |z_n|$. Justifier que (U_n) est une suite géométrique puis établir que, pour tout entier naturel n , $U_n = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n$.

3°/ A partir de quel rang n_0 tous les points A_n appartiennent-ils au disque de centre O et de rayon 0,1 ?

4°/ a) Etablir que, pour tout entier naturel n , $\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = i$. En déduire la nature du triangle $OA_n A_{n+1}$.

b) Pour tout entier naturel n , on note L_n la longueur de la ligne brisée $A_0 A_1 A_2 \dots A_{n-1} A_n$. On a ainsi : $L_n = A_0 A_1 + A_1 A_2 + \dots + A_{n-1} A_n$. Exprimer L_n en fonction de n . Quelle est la limite de la suite (L_n) ?

EXERCICE 31

On considère l'équation :

$$(E): z^3 + (1 - 4i)z^2 - (7 + 4i)z - 3 + 4i = 0$$

1°/ Montrer que (E) admet une racine imaginaire pure z_0 .

2°/ Résoudre (E).

3°/ Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on désigne par A, B et C les points d'abscisses respectives :

$$z_A = 1 + 2i, z_B = -2 + i \text{ et } z_C = -1 - 2i.$$

a) Soit le nombre complexe défini par $z' = \frac{z - z_A}{z - z_C}$ avec $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_C\}$. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que $z' \in \mathbb{R}$.

b) Soit G le barycentre des points pondérés $(A, 2)$, $(B, -2)$ et $(C, 1)$. Déterminer l'équation du cercle de centre G et de rayon AB.

4°/ Soit le complexe $u = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$.

a) Calculer u^2 et déterminer un argument de u^2 .

b) En déduire un argument de u .

c) Déterminer l'ensemble des points M du plan pour lesquels le module de uz est égal à 8.

EXERCICE 32

Soit α un réel appartenant à $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

1°/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 - (4\sin\alpha)z + 4 = 0.$$

On notera z_1 et z_2 les deux solutions.

Calculer le module et l'argument de chacune d'elles.

2°/ Calculer $A = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$ et $B = z_1^4 + z_2^4$.

3°/ Pour quelles valeurs de α a-t-on $B = 0$?

EXERCICE 33

Soit a un nombre réel. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 - 2pz + 1 = 0 ; \text{ avec } p = \sin a + i \cos a.$$

On note z_1 et z_2 les racines de cette équation.

1°/ Montrer sans calculer explicitement z_1 et z_2 que leurs modules sont inverses l'un de l'autre et que leurs arguments sont opposés.

2°/ Déterminer a pour que z_1 et z_2 soient réels, puis pour qu'ils soient imaginaires purs.

3°/ Calculer les modules et arguments de $z_1 - p$ et $z_2 - p$.

4°/ Montrer que $z_1 + i$ et $z_2 + i$ ont même module que l'on calculera en fonction de a lorsque $\cos a$ est négatif. Que se passe-t-il lorsque $\cos a$ est positif.

5°/ Calculer Z , Z' et Z'' en fonction de p :

$$Z = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}, Z' = z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2, Z'' = z_1^3 + z_2^3$$

EXERCICE 34

Soit le plan complexe $(O, \vec{u}, \vec{v})$ et les points $C(2i)$ et $D(-1 + i)$.

$$f: M(z) \mapsto M'(z') / z' = \frac{iz + 2}{z + 1 - i}$$

1°/ a) On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$
Exprimer x' et y' en fonction de x et y .

b) Déterminer et construire l'ensemble des points $M(z)$ tels que $z' \in \mathbb{R}$.

c) Déterminer et construire l'ensemble des points $M(z)$ tels que $z' \in i\mathbb{R}$.

2°/ a) Interpréter $|z'|$ à l'aide des points M, C et D .

b) Montrer que si M appartient au cercle de centre O et de rayon 2 alors M' appartient à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

c) Montrer que si M' appartient au cercle de centre O et de rayon 1 alors M appartient à une droite à préciser.

3°/ a) Interpréter $(\vec{u}, \overrightarrow{OM'})$ à l'aide des points M, C et D .

b) En déduire l'ensemble $(\mathcal{E}_1)$ des points $M(z)$ tels que $z' \in i\mathbb{R}^-$.

c) En déduire l'ensemble des points $M(z)$ tels que $z' \in \mathbb{R}^+$.

4°/ a) Vérifier que pour $M \neq D$:

$$(z' - i)(z + 1 - i) = 1 - i$$

b) En déduire que $AM' \times DM = \sqrt{2}$ avec $A(i)$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{AM'}) + (\vec{u}, \overrightarrow{DM}) = -\frac{\pi}{4} (2\pi)$

c) En déduire :

– l'ensemble des points M' tels que M appartient au cercle de centre D et de rayon $\sqrt{2}$.

– l'ensemble des points M' tels que M appartient à la demi droite d'origine D de coefficient directeur -1 .

EXERCICE 35

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E): z^3 + 9iz^2 + (12i - 22)z - 12i - 36 = 0$$

1°/ Montrer que (E) admet une racine réelle et une racine imaginaire pure notées z_1 et z_2 . En déduire l'autre racine z_3 .

2°/ Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on considère les points $A(-2); B(-3i)$ et $C(2 + 6i)$.

a) Donner l'écriture algébrique puis l'écriture trigonométrique de $\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2}$.

b) Que peut-on en déduire pour le triangle ABC .

3°/ On pose $Z = \frac{1 - i(3 - \sqrt{3}) - z_2}{z_3 - 1 + 5i}$

a) Montrer que $Z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}$

b) Ecrire Z sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.

c) En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$.

d) Déterminer Z^6 puis résoudre dans $\mathbb{C} : z^3 = Z^6$.

4°/ Résoudre dans $\mathbb{C} : 1 + iz - z^2 - iz^3 + z^4 = 0$

5°/ On pose $Z' = \frac{2z + \frac{1}{3}z_2}{iz + z_1}$

a) Interpréter géométriquement $|Z'|$ et $\arg Z'$.

b) Déterminer puis construire l'ensemble des points $M(z)$ tels que :

a) $|Z'| = 2$

b) $\arg Z' = \frac{\pi}{2} (2\pi)$

EXERCICE 36

A) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E) : z^2 + 2(1 - \cos u)z + 2(1 - \cos u) = 0 \quad \text{où } u \in [0; 2\pi[.$$

1°/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) , on notera z_1 et z_2 les solutions.

2°/ Déterminer $|z_1|$ et $|z_2|$ et montrer que :

$$\arg z_1 = \frac{u}{2} + \frac{\pi}{2} (2\pi) \text{ et } \arg z_2 = -\frac{u}{2} - \frac{\pi}{2} (2\pi)$$

B) On considère $z_0 = -1 + itan(a)$; $a \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

1°/ Déterminer le module et un argument de z_0 .

2°/ Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, $M(z)$, $A(2)$, $B(2i)$ et C le point tel que $(\vec{u}, \overrightarrow{AC}) = a (2\pi)$. On pose $\arg z_0 = \pi - a$

a) interpréter géométriquement $\arg [z_0(z - 2)]$

b) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que $[z_0(z - 2)]$ soit réel.

c) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que

$$\arg \left[-iz_0 \left(\frac{z - 2}{z - 2i} \right) \right] = -a + k\pi$$

EXERCICE 37

1°/ Exprimer $\cos 5x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin 5x$ en fonction de $\sin x$.

2°/ En utilisant 1°, montrer que $\cos \frac{\pi}{10}$ et $\sin \frac{\pi}{5}$ sont deux solutions positives de l'équation (E) :

$$(E): 16t^4 - 20t^2 + 5 = 0$$

3°/ Résoudre (E) .

4°/ Après avoir comparé $\cos \frac{\pi}{10}$ et $\sin \frac{\pi}{5}$, déterminer leurs valeurs exactes.

EXERCICE 38

1°/ Calculer $S = \sum_{k=0}^n \cos kx$ avec $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$

2°/ Calculer $S' = \cos \left(\frac{\pi}{17} \right) + \cos \left(\frac{3\pi}{17} \right) + \dots + \cos \left(\frac{15\pi}{17} \right)$

EXERCICE 39

Soient les nombres complexes z et Z tels que :

$$z \in \mathbb{C} - \left\{ \frac{1}{2} \right\} \text{ et } Z = \frac{z-2}{2z-1}$$

On pose $z = x + iy$ et $Z = X + iY$

1°/ Exprimer X et Y en fonction de x et y

2°/ Le plan complexe étant rapporté à un repère ortho normale $(O, \vec{u}, \vec{v})$

Déterminer et construire les ensembles (E_1) , (E_2) et (E_3) des points M d'affixe z tels que :

a) Z soit réel $z \in \mathbb{R} : (E_1)$

b) Z soit un imaginaire pur $z \in i\mathbb{R} : (E_2)$

c) $|Z| = \frac{1}{2} : (E_3)$

3°/ Soient les réels θ et φ tels que :

$$\begin{cases} \arg(z) = \theta + 2k\pi & k \in \mathbb{Z} \\ \arg(Z) = \theta + 2k\pi & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calculer $\cos \varphi$ et $\sin \varphi$ en fonction de $\cos \theta$ et $\sin \theta$

b) Existe-t-il des valeurs de θ telle que :
 $\arg(Z) = \arg(z) + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

EXERCICE 40

1°/ Les réels θ_1, θ_2 et θ_3 sont dans cet ordre les trois consécutifs d'une suite arithmétique de raison $\frac{\pi}{3}$

Calculer θ_2 et θ_3 en fonction de θ_1 .

2°/ Sachant que les réels r_1, r_2 et r_3 sont dans cet ordre les trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$

Calculer r_2 et r_3 en fonction de r_1 .

3°/ On note par Z_i le nombre complexe de module r_i et dont un argument est θ_i avec $i \in \{1, 2, 3\}$

a) Calculer le module de $A = Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3$ en fonction de r_1

b) Déterminer un argument de A en fonction de θ_1

4°/ On suppose que $\theta_1 \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ et $A = 8i$

a) Déterminer les réels θ_1 et r_1 .

b) Donner sous forme algébrique les nombres complexes Z_1, Z_2 et Z_3 .

EXERCICE 41

On considère l'équation (E) suivante :

$$(E): z^3 + (1 - 3i)z^2 + (2 - 18i)z - 48 - 96i = 0$$

On note a, b et c ses racines complexes.

PARTIE A

On pose $S = a + b + c$, $\Delta = ab + ac + bc$, et $P = a \times b \times c$.

1°/ Montrer que (E) est sous la forme :

$$z^3 - Sz^2 + \Delta z - P = 0$$

2°/ En déduire les valeurs de :

$$\alpha = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}, \quad \beta = \frac{a+c}{b} + \frac{b+c}{a} + \frac{a+b}{c}, \quad \gamma = a^3 + b^3 + c^3$$

(Indication : utiliser le développement de ΔS)

PARTIE B

Le complexe b est tel que $\operatorname{Re}(b) = \operatorname{Im}(b)$

a) Déterminer b puis en déduire a et c sachant que $\operatorname{Im}(a) > 0$.

b) Calculer $\frac{b-c}{b-a}$ puis en déduire la nature du triangle ABC.

PARTIE C

On considère $Z = \frac{3iz+12-12i}{4z+8+16i}$ et le point M d'affixe z .

1°/ Interpréter $|Z|$ puis déterminer et tracer en couleurs les lieux géométriques suivants :

a) (E_1) est tel que $|Z| = \frac{3}{4}$ (en vert)

b) (E_2) est tel que $|Z| = \frac{3}{2}$ (en jaune)

2°/ Interpréter $\arg Z$ puis déterminer et tracer le lieu géométrique suivant :

$$\arg Z = \frac{\pi}{4} (2\pi) \text{ (en rouge)}$$

EXERCICE 42 (BAC S2-S2A-S4-S5 2011: SESSION DE REMPLACEMENT)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. (unité graphique 2 cm)

1°/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z suivante : $4z^2 - (8 - 6i)z + 1 - 5i = 0$.

2°/ On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$, $\frac{3}{2} - i$ et $1 + \frac{1}{2}i$

a) Placer les points A, B, C et D dans le repère.

b) Déterminer le module et un argument de $\frac{Z_D - Z_A}{Z_B - Z_A}$.

En déduire la nature du triangle ABD.

3) Soit f la transformation du plan d'écriture complexe $z' = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)z + 1 - i$

Donner la nature et les éléments géométriques caractéristiques de f .

4°/ On considère les suites de nombres complexes (z_n) et (a_n) définies respectivement par :

$$\begin{cases} z_0 = i + 2 \\ z_{n+1} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)z_n + 1 - i, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

et $a_n = z_n - 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

a) Démontrer que (a_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$z_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n e^{i\left(\frac{n\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right)} + 2$$

c) Déterminer l'ensemble des entiers n pour lesquels P_n , le point-image de z_n , est sur l'axe réel.

EXERCICE 43

Le plan P est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On désigne par F l'ensemble des nombres complexes de module 1 et par F^* l'ensemble F privé du réel 1.

1°/ Soit un élément de F^* .

On pose $u = \cos \theta + i \sin \theta$ avec $\theta \in]0, 2\pi[$

a) Déterminer le module et un argument de $1 - u$ en fonction de θ .

b) En déduire le module et un argument de $\frac{1}{1-u}$

2°/ Montrer que :

a) l'ensemble des points M de P d'affixe $z = 1 - u$ où u décrit F., est cercle de centre A d'affixe 1 et passant par O.

b) l'ensemble des points M de P d'affixe $z = \frac{1}{1-u}$ où u décrit F^* est la médiatrice D de [OA].

EXERCICE 44

On considère le nombre complexe

$$Z_m = \frac{-\frac{1}{2} + m + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2} - m + i\frac{\sqrt{3}}{2}} \text{ où } m \in \mathbb{R}$$

1°/ Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de Z_m .

2°/ a) Déterminer les valeurs de m pour lesquelles la partie réelle de Z_m est nulle.

b) Calculer le module et un argument de Z_m pour chacune des valeurs de m obtenues.

3°/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(z+1)^3 = \frac{1}{\sqrt{3}}Z_{-1}$

EXERCICE 45

On pose $P(z) = z^4 - 3z^3 + \frac{9}{2}z^2 - 3z + 1$

1°/ Démontrer que si le complexe α est solution de l'équation $P(z) = 0$, il en est même de $\bar{\alpha}$ et $\frac{1}{\alpha}$.

2°/ Calculer $P(1+i)$, déduisez alors la résolution de l'équation $P(z) = 0$.

3°/ Ecrivez $P(z)$ sous la forme d'un produit de deux polynôme du second degré, à coefficients réels.

EXERCICE 46 (BAC S2-S2A-S4-S5 2012 SESSION DE REMPLACEMENT)

1°/ Comparer les nombres complexes $-i$ et $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^3$

2°/ Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes chacune des équations qui suivent.

a) $z^3 - 1 = 0$

b) $z^3 = -i$

c) $u^2 - (1-i)u - i = 0$

d) $z^6 - (1-i)z^3 - i = 0$

EXERCICE 47

Pour $u = e^{i\frac{2\pi}{7}}$, on pose $S = u + u^2 + u^4$

1°/ Calculer $S + \bar{S}$ et $S\bar{S}$.

2°/ Vérifier que $\sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{8\pi}{7} > 0$.

3°/ En déduire les valeurs de A et B suivantes :

$$A = \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{8\pi}{7}$$

$$B = \sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} + \sin \frac{8\pi}{7}$$

EXERCICE 48

1°/ Déterminer les nombres complexes z et z' tels

$$\text{que : } \begin{cases} z + z' = 4(1+i) \\ z \times z' = 4(1+2i) \end{cases}$$

2°/ Soit l'équation

$$(E): z^3 - 2(2+3i)z^2 + 4(-1+4i)z - 8(i-2) = 0$$

a) Montrer que (E) admet une racine imaginaire pure notée z_0 .

b) Terminer la résolution de (E).

3°/ Soient A, B et C les points d'affixes respectives 2, 2i et 2+4i dans le plan complexe muni d'un repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ et I le milieu de [AC] et J le symétrique de par I par rapport à A.

a) Placer les points A, B et C dans le plan complexe.

b) Déterminer les affixes de I et J.

c) Soit K le point d'affixe 4, montrer que les points O, I, J et K appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

4°/ Soit $f(z) = \frac{4iz+8}{-2z+4}$ pour $z \neq 2$ et $M(z)$

a) On pose $z = x + iy$, déterminer $\text{Re}[f(z)]$ et $\text{Im}[f(z)]$ en fonction de x et y.

b) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que i) $f(z)$ soit réel.

ii) $f(z)$ soit imaginaire pur.

c) Déterminer le nombre complexe α tel que

$$f(z) = \alpha \left(\frac{z-2i}{z-2} \right)$$

d) Interpréter géométriquement $|f(z)|$ puis déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|f(z)| = 2$.

EXERCICE 49

Soit r un réel et P le polynôme défini dans C par :

$$P(z) = z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i$$

1°/ a) Ecrire P(ir) sous forme algébrique.

b) Trouver r sachant que $P(ir)=0$

c) Justifier qu'il existe a, b et c tels que

$$P(z) = (z+i)(az^2 + bz + c)$$

d) Déterminer a, b et c.

2° Résoudre dans C :

a) $z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = 0$

b) $z^6 + (-8+i)z^4 + (17-8i)z^2 + 17i = 0$

EXERCICES COMPLEMENTAIRES :

CIAM SM- CIAM SE- SUJETS BAC S2

SUJETS BAC SESSION NORMALE DE 1988 à 2012

EXERCICE 1 (BAC D 1988)

$\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes.

On considère la fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$f(z) = \frac{z + 3i}{i\bar{z} - 1}$$

1°/ Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .

2°/ Soit P le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On désigne par A, B, M, M' et M'' les points d'affixes respectives $-3i, 1, z, \bar{z}$ et $i\bar{z}$; z étant élément de D_f

a) Placer les points A, B, M, M' et M'' (on choisira pour ce dessin : le point $M(z)$ sur la droite (AB) avec $\operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Im}(z) > 0$ ($\operatorname{Re}(z) < \operatorname{Im}(z)$)).

b) Déterminer l'ensemble S_1 des points M tels que $M'' = B$.

c) Déterminer l'ensemble S_2 des points M tels que $M'' = M$, le dessiner.

d) Donner une interprétation géométrique des arguments de $(z + 3i)$ et de $(i\bar{z} - 1)$. En déduire une interprétation géométrique de l'argument de $f(z)$.

e) Déterminer l'ensemble S_3 des points $M(z)$ tels que $f(z)$ soit imaginaire pur.

En déduire l'ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{BM''}$ et $\overrightarrow{AM}$ soient orthogonaux et le dessiner.

EXERCICE 2 (BAC D 1989)

Soit le polynôme P défini dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes par :

$$P(z) = iz^3 + (1 - i\sqrt{3})z^2 - (\sqrt{3} + 1)z + i$$

1°/ a) Calculer $P(i)$.

b) En déduire dans $\mathbb{C}$ l'ensemble des racines de l'équation : $P(z) = 0$ (α).

2°/ On appelle z_1 la solution de l'équation (α) dont la partie réelle est strictement positive.

Soit $Z = z_1 - 1$.

a) Mettre Z sous forme trigonométrique.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

c) En déduire les valeurs de $\cos \frac{11\pi}{12}$ et de $\sin \frac{11\pi}{12}$

EXERCICE 3 (BAC D 1990)

Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui au nombre complexe z associe le nombre complexe Z définie par : $Z = (1 + i\sqrt{3})z + \sqrt{3}(1 - i)$

1°/ Montrer que le nombre $\omega = 1 + i$ est invariant par f .

2°/ Montrer que $Z - \omega = (1 + i\sqrt{3})(z - \omega)$

3°/ Soient m, M, W les représentant dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ des nombres complexes z, Z, ω .

a) Calculer le module et l'argument du nombre complexe : $\frac{Z - \omega}{z - \omega}$

b) Montrer que M est l'image de m dans la composée d'une rotation dont on précisera le centre et l'angle, et d'une homothétie dont on déterminera le centre et le rapport.

c) Faire une figure représentant W, m, M .

d) Montrer géométriquement que le triangle (WmM) est un triangle rectangle.

4°/ Ecrire sous forme trigonométrique le nombre $\left(\frac{Z - \omega}{z - \omega}\right)^n$ où n est un entier naturel, en fonction de n .

EXERCICE 4 (BAC D 1991)

On considère dans $\mathbb{C}$ le polynôme défini par :

$$P(X) = X^4 - 6X^3 + 14X^2 - 24X + 40$$

1°/ Montrer qu'il existe deux complexes imaginaires purs solutions de $P(X) = 0$.

2°/ En déduire une factorisation de $P(X)$ en produit de deux polynômes du 2^{ème} degré à coefficients réels.

3°/ Résoudre $P(X) = 0$.

EXERCICE 5 (BAC D 1992)

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal, soit M le point d'affixe z , A celui d'affixe i et B celui d'affixe $(-i)$.

On pose $Z = \frac{z - i}{z + i}$

1°/ a) Déterminer l'ensemble D des points $M(z)$ tels que Z soit réel.

b) Déterminer l'ensemble C des point $M(z)$ tels que Z soit imaginaire pur.

2°/ a) Interpréter géométriquement les modules de $z - i$ et $z + i$.

Montrer que $|Z| = 1$, si et seulement si z est réel.

b) Soit n un entier naturel non nul et a un réel de $]0; \frac{\pi}{2}[$

Déduire de la question précédente que l'équation :

$$(E): \left(\frac{z - i}{z + i}\right)^2 = \cos 4a + i \sin 4a$$

n'admet que des solutions réelles. (On ne demande pas de les calculer)

c) Résoudre l'équation :

$$Z^2 = \cos 4a + i \sin 4a$$

En déduire les solutions de (E).

EXERCICE 6 (BAC D 1994)

On considère le nombre complexe $c = 1 - i$

1°/ Calculer c^2 et c^5 . Dans un plan muni d'un repère orthonormé, marquez les points qui ont pour affixe c , c^2 et c^5 .

2°/ A tout point M, d'affixe z du plan, on associe le point M' d'affixe z' , avec $z' = cz + c^5$. On définit ainsi une transformation T du plan. Déterminez l'affixe du point S, invariant par T. Précisez la nature de T et ses éléments caractéristiques.

EXERCICE 7 (BAC D 1995)

On considère le polynôme P, de la variable complexe z , défini par : $P(z) = z^3 + iz^2 - 3z + 5i$

1°/ Calculer $P(i)$, puis déterminer toutes les racines de $P(z)$. On notera z_1 la racine dont la partie réelle est négative, et z_2 l'autre racine.

2°/a) Ecrire sous forme trigonométrique $\frac{z_1 - i}{z_2 - i}$.

b) Dans le plan complexe de repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on désigne par A, B, C les images respectives de i , z_1 , z_2 . Déduire de la question précédente, la nature du triangle ABC.

EXERCICE 8 (BAC D 1996)

1°/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(\sin^2 \alpha)z^2 + (\sin 2\alpha)z + 1 + \cos^2 \alpha = 0; 0 < \alpha < \pi$$

On désigne par z' et z'' les solutions obtenues avec $\text{Im}(z') > 0$.

2°/ Vérifier que $z'^2 + z''^2$ est un réel indépendant de α .

3°/ Le plan étant rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On désigne par M' et M'' les points d'affixes respectives z' et z'' .

a) Déterminer α tel que $\begin{cases} \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \\ |M'M''| = 2\sqrt{2} \end{cases}$

b) α étant le réel trouvé au 3°/a), montrer que M' et M'' appartiennent à un même cercle dont on précisera le rayon.

EXERCICE 9 (BAC D 1997)

1°/a) Calculer le module et l'argument du nombre complexe $\omega = \frac{2+2i\sqrt{3}}{4}$

b) En déduire ses racines carrées.

2°/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$Z^2 + (\sqrt{3} - 7i)Z - 4(3 + i\sqrt{3}) = 0$$

3°/ Soit Z_1 , la solution imaginaire pure et Z_2 l'autre solution, montrer que $\frac{z_2 - 2i}{z_1 - 2i} = \omega$.

4°/ Dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, soit, A, B, C les points d'affixes respectives $2i, Z_1, Z_2$ préciser la nature du triangle (ABC) en utilisant 1°/a).

EXERCICE 10 (BAC D 1998)

1°/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$a) Z^2 - 2Z + 5 = 0, \quad b) Z^2 - 2(1 + i\sqrt{3})Z + 5 + 2\sqrt{3} = 0,$$

2°/ On considère dans le plan de repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ les points A, B, C et D d'affixes respectives $Z_A = 1 + 2i, Z_B = 1 + \sqrt{3} + i, Z_C = 1 + \sqrt{3} - i, Z_D = 1 - 2i$.

a) Placer A, B, C et D dans le plan (P).

b) Vérifier que $\frac{Z_D - Z_B}{Z_A - Z_B} = i\sqrt{3}$

En déduire la nature du triangle ABD.

c) Montrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle C dont on précisera le centre et le rayon.

3°/ On considère l'équation :

$$(E): Z^2 - 2(1 + 2\cos\theta)Z + 5 + 4\cos\theta = 0, \theta \in \mathbb{R}.$$

a) Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$.

b) Montrer que les points images des solutions de (E) appartiennent à C.

EXERCICE 11 (BAC S2 1999)

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes on considère l'équation :

$$(E): z^3 + (3 - 2i)z^2 + (1 - 4i)z - 1 - 2i = 0$$

1°/ a) Vérifier que (E) admet une solution réelle.

b) Achever la résolution de l'équation (E).

2°/ Dans le plan complexe on désigne par A, B, C les points d'affixes respectifs $Z_A = -1, Z_B = -2 + i, Z_C = i$

a) Déterminer le module et un argument de $\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}$.

b) En déduire la nature du triangle ABC.

c) Donner le centre, le rapport et l'angle de la similitude plane directe qui laisse invariant A et transforme B en C.

EXERCICE 12 (BAC S2 2000)

On considère les points A_1, A_2, A_3 d'affixes respectives $Z_1 = 1, Z_2 = 1 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}, Z_3 = \frac{5+i\sqrt{3}}{4}$

1°/a) Donner une écriture trigonométrique des nombres complexes $Z_2 - Z_1$ et $Z_3 - Z_1$.

b) Donner une écriture algébrique et une écriture trigonométrique de $\frac{Z_3 - Z_1}{Z_2 - Z_1}$

En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

2°/ Soit S la similitude plane directe transformant A_2 en A_3 et A_1 en A_1 .

a) Préciser les éléments caractéristiques de S.

b) On désigne par M' d'affixe Z' , l'image par S du point M d'affixe Z. Exprimer Z' en fonction de Z.

En déduire l'image, par f du point B d'affixe :

$$1 - 4\sqrt{3} e^{-\frac{i\pi}{3}}.$$

EXERCICE 13 (BAC S2 2001)

1°/ Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit f l'application de $\mathbb{C} \setminus \{2i\}$ vers $\mathbb{C}$ définie par :

$$f(z) = \frac{2z - i}{z - 2i}$$

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$: $f(z) = z$.

Donner les solutions de z_1 et z_2 sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.

b) Calculer $z_1^4 + z_2^4$.

2°/ Soit $M(z)$ un point de P .

Soit (Γ) l'ensemble des points $M(z)$ tels que $f(z)$ soit imaginaire pur. Donner une équation cartésienne de (Γ) . Tracer (Γ) .

3°/ Montrer que $|z| = 1$ équivaut à $|f(z)| = 1$.

EXERCICE 14 (BAC S2-S4-S5 2002)

$\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes.

1°/ Montrer que, dans $\mathbb{C}$, la somme des racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité est égale à zéro ($n \geq 2$).

2°/ En utilisant les résultats du 1°/montrer que $\cos \frac{\pi}{5}$ est solution de l'équation :

$$4x^2 - 2x - 1 = 0$$

3°/ En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{5}$, $\cos \frac{2\pi}{5}$ et $\cos \frac{\pi}{10}$.

EXERCICE 15 (BAC S2-S4-S5 2003)

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation :

$$(E): Z^3 + (1 - 8i)Z^2 - (23 + 4i)Z - 3 - 24i = 0$$

1°/ a) Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure et la déterminer.

b) Montrer que $1 + 2i$ et $-2 + 3i$ sont solutions de (E) .

c) Donner l'ensemble des solutions de (E) .

2°/ Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit les points A, B et C d'affixes respectives $1 + 2i, 3i, -2 + 3i$.

Soit G le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients respectifs 2, -2 et 1.

a) Montrer que les vecteurs $\vec{GA}, \vec{GB}$ et $\vec{GC}$ ont pour affixes respectives $\sqrt{2}e^{i\pi/4}, 2i$ et $2\sqrt{2}e^{i3\pi/4}$ et que ces affixes sont, dans cet ordre, en progression géométrique, déterminer la raison de cette suite.

b) En déduire qu'il existe une similitude directe qui transforme A en B et B en C .

Donner les éléments caractéristiques de cette similitude.

EXERCICE 16 (BAC S2-S2A-S4-S5 2004)

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme $U_0 = 4$ et de raison $\frac{1}{2}$.

Soit $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite arithmétique de premier terme $V_0 = \frac{\pi}{4}$ et de raison $\frac{\pi}{2}$.

Pour tout entier naturel n , on note z_n le nombre complexe de module U_n et dont un argument est V_n .

1°/ a) Exprimer U_n et V_n en fonction de n .

b) En déduire z_n .

2°/ Démontrer que (z_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}i$ et de premier terme $z_0 = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$

3°/ Soit (P) le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ et M_n le point d'affixe z_n .

a) Déterminer la nature de la transformation F qui au point M_n associe le point M_{n+1} d'affixe z_{n+1} .

b) Donner ses éléments caractéristiques.

4°/ Pour tout entier naturel n on pose :

$$Z_n = z_0 z_1 z_2 \dots z_n$$

a) Exprimer en fonction de n un argument de Z_n .

b) Démontrer que si n est impair alors Z_n est réel.

EXERCICE 17 (BAC S2-S2A-S4-S5 2005)

1°/ Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^3 = 1$.

2°/ a) Développer $(\sqrt{2} - i\sqrt{2})^3$.

b) Soit l'équation $(E) : z^3 = 4\sqrt{2}(-1 - i)$

En posant $u = \frac{z}{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}$, déterminer sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique les racines de l'équation (E) .

En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$

EXERCICE 18 (BAC S2-S2A-S4-S5 2007)

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E): z^3 - (3 + 2i)z^2 + (1 + 4i)z + 1 - 2i = 0$$

1°/ a) Déterminer la solution réelle de cette équation.

b) Montrer que i est une solution de cette équation.

c) Déterminer la troisième solution de cette équation.

2°/ Soient les points A, B et C d'affixes respectives $1, i$ et $2 + i$.

a) Déterminer le module et un argument de $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$

b) En déduire la nature du triangle ABC .

c) Déterminer l'affixe du point D image de A par la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

d) Montrer que A, B, C et D sont sur un cercle de centre $I(1 + i)$ et de rayon r à déterminer.

EXERCICE 19 (BAC S2-S2A-S4-S5 2008)

1°/ On considère l'équation:

$$(E): z^3 + (-6 - 4i)z^2 + (12 + 21i)z + 9 - 45i = 0$$

a) Déterminer la solution imaginaire pure z_0 de l'équation (E).

a) Achever la résolution de (E) (on appellera z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive et z_2 la troisième solution).

2°/ Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A , B et C d'affixes respectives $3i$, $3 + 3i$ et $3 - 2i$.

a) Placer les points A , B et C dans le repère.

b) Calculer $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$. En déduire la nature de ABC .

3°/ Soit f la similitude directe qui laisse invariant le point B et qui transforme A en C .

a) Donner une écriture complexe de f .

b) Donner les éléments caractéristiques de f .

EXERCICE 20 (BAC S2-S2A-S4-S5 2010)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ tel que $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 2\text{cm}$; l'unité est le centimètre.

1°/ a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 1$. Les solutions seront données sous forme trigonométrique et sous forme algébrique.

b) En remarquant que $2^3 = 8$, déduire de 1°/a) les solutions de l'équation $z^3 = 8$.

2°/ On donne les points A , B et C d'affixes respectives $-1 + i\sqrt{3}$, 2 et $-1 - i\sqrt{3}$.

a) Placer ces points dans le repère.

b) Calculer le module et un argument de $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$.

c) En déduire la nature du triangle ABC .

3°/ On considère f , la transformation du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = e^{i\frac{2\pi}{3}}z$.

a) Déterminer la nature de f puis donner ses éléments géométriques caractéristiques.

b) Déterminer les affixes des points A' et C' images respectives des points A et C par f .

c) En déduire l'image de la droite (AC) par f .

EXERCICE 21 (BAC S2-S2A-S4-S5 2011)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ direct.

I. Soit $z \in \mathbb{C}$ où $\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des complexes. Posons $z = x + iy$, x et y réels.

1°/ Sous quelle forme est écrit z ? Quelle est sa partie réelle? Quelle est sa partie imaginaire?

2°/ Quelle est le module de z ?

3°/ Soit α un argument de z pour $z \in \mathbb{C}^*$.

Déterminer $\cos \alpha$ et $\sin \alpha$ en fonction de z .

4°/ Soit $M(z)$ un point du plan complexe et $M'(z')$ image de M par la rotation de centre O et d'angle θ . Exprimer z' en fonction de z et θ .

II. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) d'inconnue z qui suit. (E) : $\frac{1}{2}z^2 + 4z\sqrt{3} + 32 = 0$

1°/ Résoudre l'équation (E).

2°/ On considère les points A et B d'affixes respectives $a = -4\sqrt{3} - 4i$ et $b = -4\sqrt{3} + 4i$. Calculer OA , OB et AB .

En déduire la nature du triangle OAB .

3°/ On désigne par C le point d'affixe $c = \sqrt{3} + i$ et par D son image par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Déterminer l'affixe du point D .

4°/ On appelle G le barycentre des points pondérés $(O, 1)$; $(D, -1)$ et $(B, -1)$.

a) Montrer que le point G a pour affixe $g = -4\sqrt{3} + 6i$.

b) Placer les points A , B et G sur une figure (unité graphique : 1cm)

5°/ Déterminer une mesure en radians de l'angle $(\vec{GA}, \vec{GC})$. En déduire la nature du triangle GAC .

EXERCICE 22 (BAC S2-S2A-S4-S5 2012)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1°/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante sachant qu'elle admet une racine imaginaire pure.

$$z^3 - 2(1 + i)z^2 + 2(1 + 2i)z - 4i = 0 \quad (E)$$

2°/ On considère les points A , B et C d'affixes respectives $1 + i$, $2i$ et i . Placer A , B et C dans le repère. (unité graphique : 2cm).

3°/ Pour tout nombre complexe z différent de $1 + i$, on associe le nombre complexe z' définie par

$$z' = \frac{z - 2i}{z - 1 - i}$$

a) Interpréter graphiquement $|z'|$ et $\arg(z')$.

b) Déterminer puis construire l'ensemble (E_1) des points M d'affixe z tels que z' soit imaginaire pur.

c) Déterminer puis construire l'ensemble (E_2) des points M d'affixe z tels que $|z'| = 2$.

4°/ Soit S la similitude directe de centre C transformant A en B .

a) Déterminer la nature du triangle ABC .

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de S .

c) Déterminer les images par S de (E_1) et (E_2) et puis les construire. (Utiliser des couleurs différentes).

SCIENTIFIC PRO

COURS DE RENFORCEMENT 2012/2013

CELLULE DE MATHÉMATIQUES

TERMINALE S2

FONCTIONS LOGARITHMES ET EXPONENTIELLES

EXERCICE 1

A) On donne :

$$f_1(x) = \ln(\cos x); f_2(x) = \ln^3 x; f_3(x) = \cos(\ln x).$$

1°/ Déterminer Df_1 , Df_2 et Df_3 .

2°/ Calculer $f'_1(x)$, $f'_2(x)$ et $f'_3(x)$.

B) $f(x) = \ln(x^2 + x - 2)$ et $g(x) = \ln|x^2 + x - 2|$

Calculer $f'(x)$ et $g'(x)$.

C) Soit $f(x) = \log_2(\sin x + 2)$.

Déterminer Df puis calculer $f'(x)$.

D) Calculer $f'(x)$ dans les cas suivants :

1°/ $f(x) = e^{1/x}$; 2°/ $f(x) = e^{-\sqrt{x}}$; 3°/ $f(x) = e^{|\cos x|}$

E) Déterminer une primitive F de f dans chacun des cas en précisant l'ensemble de définition D de f .

1°/ $f(x) = \frac{4x+2}{x^2+x+1}$;

2°/ $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$;

3°/ $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$;

4°/ $f(x) = \frac{1}{x^2} e^{3/x}$;

5°/ $f(x) = \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)}$;

6°/ $f(x) = \cos e^{5 \sin x}$

7°/ $f(x) = \frac{x-1}{(x+1)^2}$;

8°/ $f(x) = x^2 e^{-x^3}$;

EXERCICE 2

A) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1°/ $\ln(x^2 + 5x + 6) = \ln(x + 11)$

2°/ $\ln(x + 3) + \ln(x + 2) = \ln(x + 11)$

3°/ $e^{6x} - 4e^{3x} + 3 = 0$

4°/ $e^x - e^{-x} = \frac{8}{3}$

5°/ $(\ln x)^2 + 5 \ln x + 6 = 0$

6°/ $2 \ln^3 x - 15 \ln^2 x + 6 \ln x + 7 = 0$

7°/ $e^{2x+1} - 2e^{x+1} - 1 = 0$

8°/ $7^{x+\frac{4}{3}} - 5^{3x} = 2 \left(7^{x+\frac{1}{3}} + 5^{3x-1} \right)$

9°/ $2^x + \frac{6}{2^x} = 5$

10°/ $(2 - x) \ln(x + 5) = 0$

11°/ $\log_3 x \times \log_9 x = 2$

12°/ $\log_3 x = \frac{1}{2} + \log_9(4x + 5)$

C) Résoudre les inéquations suivantes :

1°/ $e^{2x} - 3e^x + 2 < 0$; 2°/ $\ln^2 x - 5 \ln x + 6 > 0$

3°/ $2^x > 4^{1-x^2}$; 4°/ $2^x > \frac{2}{2^x-1}$

5°/ $\log_a x > \log_{a^2}(3x - 2)$ $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$

EXERCICE 3

Calculer, si elle existe, la limite de f en x_0

1°/ $f(x) = \frac{3x-2 \ln x}{x+\ln x}$; $x_0 = +\infty$

2°/ $f(x) = (\ln(x+1) - \ln x)E(x)$ $x_0 = +\infty$

3°/ $f(x) = \frac{e^x - x^2}{e^x + x^2}$; $x_0 = +\infty$

4°/ $f(x) = \frac{\ln(1+2x)}{4x^2}$; $x_0 = 0$

5°/ $f(x) = (\ln \cos x) \ln x$; $x_0 = 0^+$

6°/ $f(x) = \frac{\tan x}{\ln(1+2x)}$; $x_0 = 0$

7°/ $f(x) = \frac{1}{x e^{\sin x}}$; $x_0 = 0$

8°/ $f(x) = x - \sqrt{x} \ln x$; $x_0 = 0$

9°/ $f(x) = x^3 \left(\frac{1}{e^x} - \frac{1}{e^{x+1}} \right)$; $x_0 = +\infty$

10°/ $f(x) = e^x + 1 - \sqrt{e^{2x} + e^x + 1}$; $x_0 = +\infty$

EXERCICE 4

Calculer la limite de f en x_0

1°/ $f(x) = \frac{\ln(1+\sin x)}{\sin 2x}$; $x_0 = 0$

2°/ $f(x) = \frac{\ln(x^2 - \frac{5}{2}x + 1)}{x}$; $x_0 = 0$

3°/ $f(x) = x \left(1 + \frac{1}{x} \right)$; $x_0 = +\infty$

4°/ $f(x) = \frac{a^x - x^a}{x - a}$; $(a \in \mathbb{R}_+^*)$ $x_0 = a$

5°/ $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x$; $x_0 = +\infty$

6°/ $f(x) = \frac{(\ln x)^4}{x^2}$; $x_0 = +\infty$

7°/ $f(x) = \frac{\ln(3x-2)}{\sqrt[3]{x}}$; $x_0 = +\infty$

8°/ $f(x) = x^4 \ln x$; $x_0 = 0$

9°/ $f(x) = \frac{\ln(1+3x)}{\sqrt{x}}$; $x_0 = 0$

10°/ $f(x) = \frac{\ln(1+3x-x^2)}{x}$; $x_0 = 0$

11°/ $f(x) = \frac{x^2 (\ln x)^3}{\ln(1+\alpha x)}$; $(\alpha \in \mathbb{R}^*)$ $x_0 = 0$

12°/ $f(x) = \frac{\ln(2x-1)}{x^2+x-2}$; $x_0 = 1$

13°/ $f(x) = \frac{\ln(2x-1)^3}{x^2+x-2}$; $x_0 = 1$

14°/ $f(x) = (x-1) \ln \sqrt{x^2 + 2x - 3}$; $x_0 = 1$

15°/ $f(x) = x[\ln(x+1) - \ln x]$; $x_0 = +\infty$

EXERCICE 5

Calculer la limite de f en x_0 .

$$1^\circ / f(x) = \frac{e^{x^3} - 1}{\sin^3 x}; \quad x_0 = 0$$

$$2^\circ / f(x) = x e^{\frac{1}{\sin x}}; \quad x_0 = 0$$

$$3^\circ / f(x) = (x + 2)^{\frac{x+1}{e^{x+2}}}; \quad x_0 = -2$$

$$4^\circ / f(x) = x^3 \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}} \right); \quad x_0 = +\infty$$

$$5^\circ / f(x) = \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4x + 2} \right)^x; \quad x_0 = +\infty$$

$$6^\circ / f(x) = \left(\frac{2 - \cos x}{1 - \cos x} \right)^{\sin^2 x}; \quad x_0 = 0$$

EXERCICE 6 (Les questions sont indépendantes)

1°/ Montrer que $\forall x > 0$ on a:

$$\frac{1}{x+1} \leq \ln \left(\frac{1}{x} + 1 \right) \leq \frac{1}{x}.$$

2°/ En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$

1°/ On donne $f(x) = \ln|\ln|x||$

Déterminer Df , f' et Df' .

2°/ Discuter, suivant les valeurs du paramètre réel

a, l'existence dans $\mathbb{R}^2$ de solutions pour le système:

$$\begin{cases} e^x e^{2y} = a \\ 2xy = 1 \end{cases}$$

Résoudre complètement dans le cas $a = \sqrt{e^5}$

3°/ Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$5^{2x-1} + 3^x + 25^{\frac{x+1}{2}} - 9^{\frac{x+1}{2}} = 0$$

4°/ Déterminer les réels α et β annulant le dénominateur, et de décomposer $f(x)$ sous la forme $f(x) = a + \frac{b}{x-\alpha} + \frac{c}{x-\beta}$, en déduire une primitive de f.

$$a) f(x) = \frac{1}{1-x^2}; \quad b) f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^2-x}$$

5°/ Effectuer la division euclidienne, puis en déduire une primitive de f.

$$a) f(x) = \frac{x^4+3x^2+2x}{x^3+x^2+x+1}; \quad b) f(x) = \frac{x^8+x^7+x^6-x-1}{x^3-1}$$

6°/ Déterminer la primitive de f définie par :

$$a) f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}};$$

$$b) f(x) = \frac{1}{x(\ln x + 1)^n}, n \in \mathbb{N} - \{0\}$$

6°/ On donne $f(x) = \ln(e^x + 1)$

Démontrer que f définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à préciser, puis exprimer la bijection réciproque.

7°/ Soit $f(x) = \ln(1 + \sqrt{1+x^2})$

Justifier la dérivabilité de f et exprimer $f'(x)$.

8°/ Soit $f(x) = 3x - 3\ln|2e^x - 1|$

a) Déterminer D_f .

b) Montrer que C_f a trois asymptotes concourantes.

9°/ Etudier et représenter graphiquement f

$$a) f(x) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|;$$

$$b) f(x) = \ln \left| \frac{1}{e^x - 1} \right|$$

$$c) f(x) = \ln|x^2 + 2x - 3|;$$

$$d) f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

$$e) f(x) = \sqrt{e^x - e^{2x}};$$

10°/ Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$a) \ln|x| < -\ln|3x+2|; \quad b) \ln x - 3 \leq \frac{4}{\ln x};$$

EXERCICE 7

On considère la fonction définie par: $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

1°/ Etudier les variations de f et tracer C_f .

2°/ Déterminer la fonction F primitive de la fonction f.

3°/ Soit $g(x) = \ln|\ln|x||$

a) Déterminer Dg et calculer $g'(x)$.

b) Résoudre l'équation $g(x) = 0$.

EXERCICE 8

1°/ Soit g définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x) = 2 - x + \ln|x|$

a) Etudier les variations de g et ses limites aux bornes.

b) Démontrer qu'il existe trois nombres α_1, α_2 et α_3 tels que :

$$\begin{cases} \alpha_1 < 0 < \alpha_2 < 1 < \alpha_3 \\ g(\alpha_1) = g(\alpha_2) = g(\alpha_3) = 0 \end{cases}$$

2°/ Soit f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$ par $f(x) = \frac{x(1+\ln|x|)}{1-x}$

a) Déterminer sa fonction dérivée f' et étudier le signe de f' .

b) Montrer que : $\forall x \in \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}, f(\alpha) = -\alpha$.

3°/ Soit F définie par : $\begin{cases} F(x) = f(x) \text{ si } x \neq 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}$

a) F est-elle continue en 0?

b) F est-elle dérivable en 0?

c) Etudier les variations de f.

d) Donner l'allure de la courbe de F.

EXERCICE 9

1°/ Etudier les variations de la fonction ψ définie par:

$$\psi(x) = \frac{x-1}{x} - \ln x.$$

En déduire le signe de $\psi(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$.

2°/ Etudier les variations de la fonction f définie

$$\text{par : } f(x) = x^{\left(\frac{1}{x-1}\right)}.$$

3°/ Tracer la courbe $\mathcal{C}$ de f.

EXERCICE 10

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{e^x - 2}{e^x - 2x}$$

1°/ Donner le domaine de définition de f et calculer les limites aux bornes de D_f .

2°/ Déterminer la fonction dérivée f' de et écrire $f'(x)$ sous la forme $f'(x) = \frac{2h(x)}{(e^x - 2)^2}$ où $h(0) = 0$.

3°/ Etudier les variations de h et montrer que l'équation $h(x) = 0$ a une solution unique α dans $]1; 2[$

4°/ Montrer que $e^\alpha = \frac{2}{2-\alpha}$.

5°/ Terminer l'étude des variations de f et montrer que: $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1}$

6°/ Construire $\mathcal{C}_f$.

EXERCICE 11

Soit f la fonction de la variable réelle x définie par:

$$f(x) = 1 + x - \ln|e^x - e|$$

2°/ Montrer qu'on a pour tout x :

$$a) f(x) = 1 - \ln|1 - e^{1-x}|$$

$$b) f(x) = x - \ln|e^{x-1} - 1|$$

2°/ Dresser le tableau de variation de f .

3°/ Montrer que f définit une bijection g de $]1, +\infty[$ sur un intervalle I que l'on précisera.

4°/ Définir g^{-1} et montrer que $g^{-1} = g$.

EXERCICE 12

Déduire de la courbe représentative de la fonction $\ln$ les représentations graphiques des fonctions suivantes:

$$1^\circ/ f(x) = |\ln x|;$$

$$2^\circ/ f(x) = \ln(-x);$$

$$3^\circ/ f(x) = \ln|x|$$

$$4^\circ/ f(x) = \ln(x+1);$$

$$5^\circ/ f(x) = \frac{1}{2} \ln(x+1).$$

EXERCICE 13

Soit $\mathcal{C}$ la courbe la fonction $x \mapsto \ln x$ dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan. On se propose d'étudier le minimum de la distance de $\mathcal{C}$ à l'origine O du repère.

1°/ Tracer soigneusement $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $]0; 2[$ en choisissant 5 cm comme unité. Placer le point A de $\mathcal{C}$ qui semble être le plus proche de l'origine du repère. Quelle semble être la plus petite distance entre O et un point de $\mathcal{C}$?

2°/ Soit M un point de $\mathcal{C}$ d'abscisse x . Exprimer la distance OM en fonction de x .

3°/ Justifier que les fonctions

$x \mapsto OM$ et $f: x \mapsto x^2 + (\ln x)^2$ ont les mêmes variations.

4°/ f est définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

a) Calculer sa dérivée $f'(x)$ et montrer que le signe de $f'(x)$ sur $]0; +\infty[$ est celui de $g(x) = x^2 + \ln x$

b) Etudier les variations de g sur $]0; +\infty[$ et préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.

c) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet, sur $]0; +\infty[$, une solution unique notée α dont on donnera une approximation décimale à 10^{-3} près.

d) En déduire le signe de $f'(x)$ puis l'existence pour f d'un minimum unique.

5°/ a) Déterminer alors le point M_0 pour lequel la distance OM est minimale et montrer que cette distance vaut $\alpha\sqrt{1+\alpha^2}$. En donner une valeur approchée à 10^{-3} près et comparer à la valeur obtenue graphiquement.

b) Montrer que la droite (OM_0) et la tangente à $\mathcal{C}$ en M_0 sont perpendiculaires.

EXERCICE 14

$$\text{Soit } f(x) = \left[1 - \frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right]^{\frac{1}{x}}.$$

1°/ Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?

2°/ Etudier la limite de f pour $x_0 = 1$.

3°/ Montrer que $\ln f(x) = \frac{1}{x} (\ln(1 + h(x)))$, avec:

$$h(x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln \frac{1}{x}}$$

4°/ Etudier $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)}{x}$.

En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \ln f(x)$. Quelle est la limite en 0 de f ?

EXERCICE 15

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité: 2cm)

1°/ Soit f définie sur $]0; +\infty[$ par:

$$f(x) = \frac{1}{x} - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_f \quad \text{sa courbe représentative.}$$

a) En posant $t = 1 + \frac{1}{x}$, calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

b) Dresser le tableau de variation de f et tracer la courbe $\mathcal{C}_f$.

2°/ Soit g la fonction définie sur $] -\infty; -1[$ par:

$$g(x) = \frac{1}{x+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_g \quad \text{sa courbe représentative.}$$

a) Démontrer que les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont symétriques par rapport au point $A\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

b) Tracer $\mathcal{C}_g$ sur le graphique précédent.

EXERCICE 16

Soit la fonction définie sur $I =]0; +\infty[$ par :

$f(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{x^2-1}{2x}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité: 2cm).

A – ETUDE DES VARIATIONS DE f

1°/ a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Qu'en déduisez-vous pour la courbe $\mathcal{C}$?

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2°/ Soit f' la fonction dérivée de f , montrer que pour tout x de I : $f'(x) = \frac{x^2+3-2\ln x}{2x^2}$.

3°/ Soit u la fonction définie sur I par $u(x) = x^2 + 3 - 2\ln x$.

a) Etudier le sens de variation de u .

b) Déduisez-en, pour tout x de I , le signe de $u(x)$.

4°/ Dressez le tableau de variation de f .

B – TRACE DE LA COURBE $\mathcal{C}$

1°/ Pour tout x de I on pose: $Q(x) = f(x) - \frac{1}{2}x$
Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} Q(x)$.

Qu'en déduisez-vous pour la courbe $\mathcal{C}$?

2°/ Soit $(\mathcal{D})$ la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x$.

a) Montrer que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ se coupent en K dont vous donnerez les coordonnées.

b) Etudier la position relative de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.

3°/ Tracer $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sur le même graphique.

EXERCICE 17

A / Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = 2x\sqrt{x} - 3\ln x + 6.$$

En utilisant le sens de variation de g , déterminer, suivant les valeurs de x , le signe de $g(x)$.

B / La fonction numérique f est définie par :

$$f(x) = \frac{3\ln x}{\sqrt{x}} + x - 1.$$

1°/ Déterminer les limites de f en 0, en $+\infty$.

2°/ Utiliser A/ pour déterminer le sens de variation de f .

3°/ a) Soit Δ la droite d'équation $y = x - 1$ et $\mathcal{C}$ la représentation graphique de f dans un repère orthonormé du plan. Montrer que Δ est asymptote à $\mathcal{C}$ et étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et Δ .

b) Construire $\mathcal{C}$ et Δ .

EXERCICE 18

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x + \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| & \text{si } x \in]-\infty, -1[\cup]-1, 0[\\ f(x) = x^2 e^{-x} & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$$

On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 2cm).

PARTIE A

1°/ Donner le domaine de définition de f . Calculer $f(-2)$ et $f(3)$.

2°/ Montrer que f est continue en 0.

3°/ a) Etablir que la dérivée f' de f a pour expression $\begin{cases} f'(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1} & \text{si } x \in]-\infty, -1[\cup]-1, 0[\\ f'(x) = xe^{-x}(2-x) & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$

b) f est-elle dérivable en 0 ? Justifier la réponse.

3°/ Dresser le tableau de variation de f .

4°/ Démontrer que $f(x) = 0$ admet une racine unique α comprise entre $-1,6$ et $-1,5$.

5°/ a) Justifier que la droite Δ d'équation : $y = x$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $-\infty$.

b) Etudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à Δ dans $] -\infty, 0[\setminus \{-1\}$

6°/ Tracer $\mathcal{C}$ en représentant sur la même figure les asymptotes les demi-tangentes en 0 et les points d'intersections de $\mathcal{C}$ avec les axes de coordonnées.

PARTIE B

Soit g la restriction de f à $[0; 2]$

1°/ Montrer que g définit une bijection de $[0; 2]$ sur un intervalle à préciser.

2°/ On note g^{-1} la bijection réciproque de g .

a) Résoudre l'équation $g^{-1}(x) = 1$.

b) Montrer que $(g^{-1})'(\frac{1}{e}) = e$.

3°/ On appelle $\mathcal{C}^{-1}$ la courbe de g^{-1} .

Tracer $\mathcal{C}^{-1}$ en utilisant $\mathcal{C}$ et une transformation à préciser (on placera sur $\mathcal{C}^{-1}$ le point d'ordonnée 1 et la tangente au point d'abscisse $\frac{1}{e}$).

EXERCICE 19

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln \left(\frac{2-\sin x}{2+\sin x} \right)$

1°/ a) Déterminer D_f .

b) Etudier la parité et la périodicité de f .

c) Justifier le choix de l'intervalle $I = [0, \pi]$ comme intervalle d'étude.

2°/ On veut étudier f sur $I = [0, \pi]$.

a) Etudier la dérivabilité de f sur $I = [0, \pi]$.

b) Montrer que $f'(x) = \frac{-4\cos x}{3+\cos^2 x}$

c) Dresser le tableau de variation de f .

3°/ a) Exprimer $f(\pi - x)$ en fonction de $f(x)$. En déduire un élément de symétrie pour (C) la courbe de f .

b) Tracer (C) sur $[-\pi, \pi]$

EXERCICE 20

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x - 1 + \frac{1}{x} & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = 1 - (\ln x)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1°/ a) Déterminer le domaine de définition D_f de f .

b) Démontrer que f est continue et dérivable en 1.

c) Calculer les limites de f aux bornes de D_f et préciser les branches infinies de $\mathcal{C}$.

d) Etudier les variations de f .

Démontrer que le point d'abscisse e est un point d'inflexion de $\mathcal{C}$.

e) Tracer $\mathcal{C}$.

2°/ Soit h la restriction de f à l'intervalle $]1, +\infty[$.

a) Démontrer que h réalise une bijection de $]1, +\infty[$ vers un intervalle vers un intervalle que l'on précisera.

b) En déduire que h admet une fonction réciproque h^{-1} dont on précisera le sens de variation.

c) Calculer $h^{-1}(-1)$. Justifier que h^{-1} est dérivable en -1 et déterminer l'équation de la tangente à la courbe de h^{-1} en son point d'abscisse -1 .

d) Justifier la dérivabilité de h^{-1} en son domaine de définition.

e) Tracer la courbe représentative de h^{-1} .

f) Expliciter l'expression de $h^{-1}(x)$.

EXERCICE 21

PARTIE I

Soit la fonction g définie sur $[1, 3]$ par :

$$g(x) = 3x^2 \ln x + x^2 + 2x - 6$$

1°/ a) Déterminer sans calcul de dérivée les variations sur $[1, 3]$ des fonctions :

$$g_1(x) = 3x^2 \ln x, g_2(x) = x^2, g_3(x) = 2x - 6$$

b) En déduire les variations de g sur $[1, 3]$.

Préciser si g est strictement croissante ou strictement décroissante.

2°/ a) Justifier que g s'annule pour une unique valeur α sur $[1, 3]$.

b) Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de α .

c) Déduire des questions précédentes le signe de $g(x)$ pour tout x de l'intervalle $[1, 3]$.

PARTIE II

Soit f définie sur $[1, 3]$ par : $f(x) = x^3 \ln x + x^2 - 6x$

1°/ Calculer la dérivée de f .

2°/ A l'aide du résultat obtenu en 1.2°, dresser le tableau de variation de f .

3°/ a) Donner l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 1.

b) Tracer $\mathcal{C}_f$ (unité : 5cm sur Ox et 1cm sur Oy).

EXERCICE 22

Le plan P est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 3 cm).

1°/ Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Montrer que f est continue en 0.

2°/ a) Etudier le sens de variation de la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)$$

Calculer $g(0)$ et en déduire que sur $\mathbb{R}^+$:

$$\ln(1+x) \leq \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)$$

b) Par une étude analogue, montrer que si $x \geq 0$, alors $\ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$.

c) Établir que pour tout x strictement positif on a :

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \leq -\frac{1}{2} + \frac{x}{3}$$

En déduire que f est dérivable en zéro et que $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

3°/ a) Soit h la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$h(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(1+x)$$

Étudier son sens de variation et en déduire le signe de h sur $[0, +\infty[$.

b) Montrer que sur $[0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$.

c) Dresser le tableau de variation de f en précisant la limite de f en $+\infty$.

d) On désigne par C la représentation graphique de f . Construire la tangente T à C au point d'abscisse 0. Montrer que C admet une asymptote. Tracer C .

EXERCICE 23

$$\text{On donne } f(x) = x + 1 + \ln \left| \frac{x+1}{x-3} \right|.$$

1°/ Etudier la fonction f .

2°/ Démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ de f admet un point d'inflexion Ω et que Ω est un centre de $\mathcal{C}$.

3°/ Déterminer l'asymptote oblique $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C}$.

4°/ Vérifier que Ω appartient à $\mathcal{D}$ et étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.

5°/ Tracer $\mathcal{C}$.

EXERCICE 24

PARTIE I

Soit la fonction f définie sur $] -1, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x}{x+1} - \ln(x+1)$$

1°/ Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

2°/ Dresser le tableau de variation de f .

3°/ Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet sur $[1, +\infty[$ une unique solution $\alpha \in]3,9; 4[$.

4°/ Calculer $f(0)$ et préciser suivant les valeurs de x le signe de $f(x)$ sur son ensemble de définition.

PARTIE II

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} g(x) = \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ g(x) = (1-x)e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

1°/ Etudier la continuité et la dérivabilité de g en 0.

2°/ a) Montrer que pour tout $x < 0$, $g'(x) < 0$.

b) Montrer que pour tout $x > 0$, on a $g'(x) = \frac{f(x)}{2x\sqrt{x}}$.

c) En déduire le signe de $g'(x)$ sur $]0, +\infty[$.

3°/ Dresser le tableau de variation de g .

4°/ Montrer que la droite D d'équation $y = -x$ est asymptote à C_g au voisinage de $-\infty$.

5°/ Construire C_g dans un repère orthonormé (unité : 2cm).

PARTIE III

Soit h la restriction de g à l'intervalle $[\alpha, +\infty[$.

1°/ Montrer que h admet une bijection réciproque h^{-1} dont on précisera le domaine de définition.

2°/ h^{-1} est-elle dérivable sur son domaine de définition ? Justifier.

3°/ Calculer $h(4)$. En déduire $(h^{-1})' \left(\frac{\ln 5}{2} \right)$.

4°/ Construire $C_{h^{-1}}$, courbe représentative de h^{-1} dans le repère précédent.

EXERCICE 25

PARTIE A

Soit la fonction g définie sur $] -\infty; 0]$ par :
 $g(x) = xe^{-x}$.

1°/ Dresser le tableau de variation de g .

2°/ En déduire le signe de g .

3°/ Démontrer que l'équation $g(x) = -\frac{1}{2}$ admet une solution unique α et que $-0,36 < \alpha < -0,35$.

PARTIE B

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = g(x) + [g(x)]^2 & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = x + \ln\left(\frac{xe+1}{x+1}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1°/ a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Etudier la branche infinie de f en $-\infty$.

2°/ a) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est une asymptote oblique à la courbe C_f de f en $+\infty$.

b) Etudier la position de C_f par rapport à (D) sur $]0; +\infty[$.

3°/ a) Etudier la continuité de f en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter graphiquement les résultats obtenus.

4°/ a) Montrer que $f'(x) = g'(x)[1 + 2g(x)]$ sur $]-\infty; 0]$ et donner son signe.

b) Calculer $f'(x)$ sur $]0, +\infty[$ et donner son signe.

c) Montrer que $f(\alpha) = -\frac{1}{4}$ et dresser le tableau de variation de f .

5°/ Tracer C_f dans un repère orthonormé (unité : 2cm).

EXERCICE 26 BAC S2 2010 REMPLACEMENT

Soit f la fonction numérique à variable réelle

$$\text{définie par : } f(x) = \begin{cases} x - 1 + e^{x-1} & \text{si } x \leq 1 \\ x + \ln\left(\frac{1+x}{2x}\right) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1°/ Vérifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.

2°/ Etudier la continuité de f en 1 et la dérivabilité de f en 1.

Interpréter graphiquement les résultats.

3°/ a) Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

b) Démontrer que, $(D1) : y = x - 1$ est une asymptote oblique de (C_f) , courbe représentative de f , au voisinage de $-\infty$.

c) Démontrer que $(D2) : y = x - \ln 2$ est une asymptote oblique de (C_f) au voisinage de $+\infty$.

d) Déterminer les positions relatives de $(D1)$ et $(D2)$, respectivement, par rapport à (C_f) .

4°/ Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

5°/ Tracer (C_f) dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité 1 cm. Tracer les droites remarquables.

6°/ Etablir que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I à préciser.

7°/ Tracer $(C_{f^{-1}})$, la courbe déf $^{-1}$ réciproque de f , dans le repère précédent.

8°/ a) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine délimité par la courbe C_f , la première bissectrice et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 3$.

b) En déduire l'aire délimitée par (C_f) , $(C_{f^{-1}})$ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$. On justifiera la réponse.

EXERCICE 27 BAC S2 2009 REMPLACEMENT

I / Soit la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{-2}{1+x^2} + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

1°/ Etudier les variations de g et dresser le tableau de variations.

2°/ Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que $0,5 < \alpha < 0,6$.

3°/ En déduire le signe de g sur $]0, +\infty[$.

II / Soit la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x > 0 \\ x - (x+1)e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1°/ Déterminer l'ensemble de définition de f et calculer les limites aux bornes de celui-ci.

2°/ a) Etudier la continuité de f en 0, puis la dérivabilité de f en 0 à droite.

b) Interpréter graphiquement les résultats du 2a).

3°/ Etudier les branches infinies de la courbe de f au voisinage de $-\infty$.

4°/ a) Montrer que pour tout x appartenant à $]0, +\infty[$ $f'(x) = g(x)$.

b) Etudier le sens de variation de f et dresser le tableau de variations de f .

c) Etablir que $f(\alpha) = \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}$

5°/ Tracer (C) la courbe de f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, (On prendra $\alpha = 0,5$; unité = 2cm). On précisera l'équation de la tangente au point d'abscisse -1.

6) Soit $I =]0, +\infty[$.

Montrer que f est une bijection de I sur un intervalle J à préciser.

7°/ Déterminer l'aire $A(\lambda)$ du domaine compris entre (C) l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \lambda$ ($\lambda > 1$).

EXERCICE 28

Soit f la fonction définie sur $I =]0, +\infty[$ par :

$f(x) = (1 + \ln x)^2 - 2x$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 5cm)

1°/ Déterminer la limite de f en 0.

Qu'en déduisez-vous pour la courbe $\mathcal{C}$?

2°/ Montrer que, pour tout x de I , on peut écrire :

$$f(x) = x \left[\frac{1}{x} + 2 \frac{\ln x}{x} + 4 \left(\frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2 - 2 \right]$$

Déduisez en la limite de f en $+\infty$.

3°/ Déterminer la fonction dérivée f' de f et montrer que, pour tout x de I , $f'(x)$ a le même signe que $\ln x - x + 1$.

4°/ Soit g la fonction définie sur I par :

$$g(x) = \ln x - x + 1.$$

a) Etudier le sens de variation de g .

b) Déduisez-en, pour tout x de I , le signe de $g(x)$.

5°/ Dressez le tableau de variation de f et tracer $\mathcal{C}$.

EXERCICE 29

Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = (1-x)\ln(1-x) & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

On note C_f la courbe dans un repère orthonormé (unité 2cm)

1°/ a) Montrer que $D_f = \mathbb{R}$.

b) Calculer les limites aux bornes de D_f .

c) Etudier les branches infinies de C_f .

2°/ a) Etudier la continuité de f en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter graphiquement les résultats.

3°/ a) Calculer $f'(x)$.

b) Dresser le tableau de variation de f .

c) Montrer que pour tout $x \in [0; +\infty[$, $f'(x) \geq 1$.

d) En déduire la position de C_f par rapport à la droite (D) d'équation $y = x$ sur $[0; +\infty[$.

4°/ Tracer C_f .

5°/ Soit g la restriction de f sur $[0; +\infty[$.

a) Montrer que g est une bijection de $[0; +\infty[$ vers un intervalle J à préciser.

b) Etudier la dérivabilité de g^{-1} en 1 et en déduire lorsqu'il existe $(g^{-1})'(1)$.

c) Tracer la courbe de g^{-1} dans le même repère.

d) Montrer que $g^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

EXERCICE 30

Soit f la fonction de courbe C_f définie par :

$$f(x) = 3\sqrt{2}e^{-x}\sin x$$

1°/ Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $f(x) = 0$,

b) $f'(x) = 0$,

c) $f''(x) = 0$

2°/ On se propose d'étudier f sur $I = [0; 2\pi]$.

a) Etudier les variations de f sur I . On déterminera à 10^{-2} près $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$, $f\left(\frac{5\pi}{4}\right)$.

b) Tracer C_f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (10cm représente π unité sur $x'Ox$ et une unité sur $y'Oy$).

c) Donner une équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$. Tracer T .

d) Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = -\frac{3\sqrt{2}}{2}e^{-x}(\cos x + \sin x).$$

Prouver que pour tout réel x : $F'(x) = f(x)$

EXERCICE 31

Cg est la courbe représentative de g définie par

$$g(x) = \frac{e^{2x} - 4}{e^{2x} + 4}$$

1°/ a) Déterminer Dg et calculer les limites aux bornes de Dg.

b) Calculer g'(x) et dresser le tableau de variation de g.

2°/ a) Déterminer le réel a tel que g''(a)=0

b) Le point a est-il un point d'inflexion pour Cg ? Justifier la réponse.

3°/ a) Montrer que le point A(ln2, 0) est centre de symétrie pour Cg.

b) Déterminer une équation de la tangente (T) en A. Etudier la position de Cg par rapport à (T).

4°/ a) Montrer que l'équation g(x)=x admet une solution unique $\alpha \in [-1, 0]$

b) Encadrer

b) Encadrer α à 10^{-1} près.

5°/ a) Déterminer les réels a et b tels que

$$g(x) = \frac{ae^{2x}}{e^{2x} + 4} + b$$

b) Déterminer une primitive G de g sur Dg telle que G(0) = ln2.

EXERCICE 32

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{xe^x}{e^x - 1} \text{ et } f(0) = 1$$

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$)

1°/ a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$

b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Montrer que f est continue en 0.

2°/ Soient $x \in \mathbb{R}^*$ et les points M(x; f(x)) et M'(-x; f(-x)).

a) Etablir que $f(-x) = \frac{x}{e^x - 1}$ puis déterminer le coefficient directeur de la droite (MM')

b) En déduire le nombre dérivé de f en 0 puis déterminer l'équation de la tangente T à C en 0.

3°/ a) Etablir que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x + \frac{x}{e^x - 1}$ puis en déduire la limite de f en $+\infty$

b) Déterminer la limite de f en $-\infty$.

4°/ a) Démontrer que pour tout réel x, on a $e^x \geq x + 1$ et que l'égalité n'a lieu que pour x = 0.

b) Montrer que f'(x) est du signe de $e^x - x - 1$

c) Dresser le tableau de variation de f'(x).

5°/ a) Montrer que la courbe C admet en $+\infty$ une asymptote Δ à préciser.

b) Etudier la position de C par rapport à Δ .

6°/ a) Montrer que f admet une bijection réciproque notée f^{-1} définie sur un intervalle J à préciser.

b) Justifier que f^{-1} est dérivable sur J puis dresser le tableau de variation de f^{-1} .

c) Donner l'équation de la tangente à Cf^{-1} en 1.

7°/ Tracer Cf et Cf^{-1}

EXERCICE 33

PARTIE A

1°/ Soit la fonction h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par

$$h(x) = 4e^x + 2x - 1$$

a) Montrer que h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

b) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$.

c) Dresser le tableau de signe de h.

d) Montrer que $\alpha < 0$.

2°/ Soit g la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = 4e^x + x^2 - x$$

a) Montrer que $g(\alpha) = \alpha^2 - 3\alpha + 1$

b) Etudier les variations de g en utilisant le tableau de signe de h.

c) En déduire que pour tout réel x on $g(x) > 0$.

PARTIE B

1°/ Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = 4\ln|x| + 1 - xe^{-x}$$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) (unité 1cm)

a) Déterminer Df.

b) Montrer que :

– la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à (C)

– (C) admet une branche parabolique de direction yy' en $-\infty$.

– (C) admet une branche parabolique de direction xx' en $+\infty$.

2°/ Montrer que pour tout réel x on a :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{xe^x}$$

En déduire le signe de f'(x) pour $x \neq 0$.

3°/ Dresser le tableau de variation de f puis tracer (C).

PARTIE C

1°/ Montrer que pour tout réel t appartenant à $[10, 11]$ on a : $10 \leq f(t) \leq 11$

2°/ Soit p la primitive de f sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 11.

En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que pour tout x de $[10, 11]$ on a :

$$11x - 121 \leq p(x) \leq 10x - 110.$$

EXERCICE 34

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 + e^{1-x} & \text{si } x > 1 \\ e^{x-1} \ln|x| & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

PARTIE A

Soit $h(x) = x \ln|x| + 1$

1°/ Etudier les variations de h dans son domaine de dérivabilité.

2°/ Montrer que l'équation $h(x) = 0$, admet une solution unique $\alpha \in]-2; -1[$.

3°/ En déduire le signe de $h(x)$.

PARTIE B

1°/ Montrer que $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$, puis étudier les limites aux bornes de D_f , préciser les asymptotes éventuelles.

2°/ Montrer que la droite $(D); y = x - 2$ est une asymptote et étudier sa position par rapport à C_f .

3°/ Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 1. Interpréter les résultats obtenus.

4°/ Calculer $f'(x)$ dans les différents intervalles où f est dérivable.

5°/ Montrer que $f'(x) = \frac{e^{x-1}}{x} h(x)$ sur $] -\infty; 1[- \{0\}$, en déduire le signe de $f'(x)$ sur $] -\infty; 1[- \{0\}$

6) Dresser le tableau de variations de f

7°/ Montrer que $f(\alpha) = -\frac{e^{\alpha-1}}{\alpha}$ puis tracer C_f .

PARTIE C

Soit g la restriction de f à l'intervalle $]1; +\infty[$.

1°/ Montrer que g admet une bijection réciproque notée g^{-1} sur $]1; +\infty[$

2°/ Calculer $g(2)$ puis déterminer le coefficient directeur de la tangente à $(C_{g^{-1}})$ au point d'abscisse $x = e$

3°/ Tracer $(C_{g^{-1}})$

4°/ On pose $t(x) = \frac{e^{1-x}}{x} - e^{1-x} \ln x$

a) Déterminer une primitive $T(x)$ de t sur $[1; +\infty[$

b) Soit α un réel supérieur à 2.

Calculer $H(\alpha) = T(\alpha) - T(2)$, en déduire

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} H(\alpha).$$

EXERCICE 35

Soit φ la fonction numérique définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t) = 1 + e^t + te^t.$$

1°/ Etudier les variations de φ . En déduire le signe de $\varphi(x)$.

2°/ On définit la fonction numérique f par :

$$f(0) = 0 \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{x}{1 + e^x}$$

a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0

b) Etudier les variations de f .

Montrer que la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ est asymptote à la courbe représentative de f dans un repère orthonormé, l'unité de longueur étant 4cm.

3°/ Tracer la courbe de f .

EXERCICE 36 (BAC S2 2011 REMPLACEMENT)

La fonction f est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2} \right) e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ \frac{x}{x+1} + \ln(x+1) & \text{si } -1 < x \leq 0 \end{cases}$$

(C_f) est sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité graphique : 2 cm.

PARTIE A

1°/ Démontrer que l'ensemble de définition de f est $D_f =]-1; +\infty[$.

2°/ a) Montrer les égalités suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

b) Déduire de la question précédente les droites asymptotes de (C_f) .

3°/ a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} = 0$

b) Etudier la continuité de f en 0.

c) En posant $h = \frac{1}{x}$, étudier $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x}$

d) Étudier $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x}$

f est-elle dérivable en 0 ?

Interpréter graphiquement les résultats.

4°/ Démontrer que :

a) Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \left(\frac{1-x}{x^4} \right) e^{-\frac{1}{x}}$

b) Pour tout $x \in]-1; 0[$, $f'(x) = \frac{x+2}{(x+1)^2}$

5°/ Dresser le tableau de variation de f .

6°/ Tracer (C_f) la courbe de f .

PARTIE B

Soit $\alpha < 1$ un nombre réel tel que $-1 < \alpha < 0$.

1°/ a) Montrer que pour tout x tel que $-1 < x < 0$,

$$\frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{x+1}$$

b) En utilisant une intégration par parties démontrer que :

$$\int_{\alpha}^0 \ln(1+x) dx = -\alpha \ln(\alpha+1) + \alpha - \ln(\alpha+1).$$

2°/ a) En déduire l'aire $A(\alpha)$ du domaine du plan délimité par l'axe des abscisses, la courbe (C_f) et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 0$.

b) Calculer $\lim_{\alpha \rightarrow -1^+} A(\alpha)$.

EXERCICE 37 (BAC S2 2008)

PARTIE A

Soit la fonction f est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 + \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| & \text{si } x < 0, \\ (2+x)e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1°/ Montrer que f est définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$.

2°/ a) Calculer les limites aux bornes du domaine de définition de f . Préciser les asymptotes parallèles.

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x + 2]$. Interpréter graphiquement le résultat.

3°/ a) Etudier la continuité de f en 0.

b) Démontrer que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{x} = -1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{x} = -1$$

b) En déduire que f est dérivable en 0 à gauche et à droite. f est-elle dérivable en 0 ?

4°/ Calculer $f'(x)$ pour :

a) $x \in]0; +\infty[$; b) $x \in]-\infty; -1[\cup]-1; 0[$

5°/ Etudier le signe de $f'(x)$ pour $x \in]0; +\infty[$ et pour $x \in]-\infty; -1[\cup]-1; 0[$.

6°/ Dresser le tableau de variations de f .

7°/ Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à $]-3; -2[$.

8°/ Tracer (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1cm. On mettra en évidence l'allure de (C_f) au point d'abscisse 0 et les droites asymptotes.

PARTIE B

Soit g la restriction de f à $]-\infty; -1[$.

1°/ Montrer que g définit une bijection de $]-\infty; -1[$ sur un intervalle J à préciser.

2°/ On note g^{-1} sa bijection réciproque.

a) Calculer $g(-2)$. Montrer que g^{-1} est dérivable en $\ln 3$.

b) Calculer $(g^{-1})'(\ln 3)$.

c) Représenter la courbe de g^{-1} dans le repère précédent.

PARTIE C

Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la région du plan délimitée par les droites d'équations respectives $x = -2, x = -3, y = x + 2$ et la courbe de f .

A l'aide d'une intégration par parties calculer $\mathcal{A}$.

EXERCICE 38

Soit f définie par :
$$\begin{cases} f(x) = xe^{1-x^2} & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = ax^2 + bx & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Déterminer a et b pour que f soit dérivable en 1, puis étudier et représenter graphiquement f .

EXERCICE 39

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x \ln \left(\frac{x+1}{x} \right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2cm.

1°/ Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

2°/ Soit g la fonction définie sur $]-\infty; 0[$ par :

$$g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}} + 1$$

En étudiant les variations de g , déterminer le signe de $g(x)$ sur $]-\infty; 0[$.

3°/ Soit h définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$h(x) = \ln \left(\frac{x+1}{x} \right) - \frac{1}{x+1}$$

a) Etudier les variations de h .

b) En déduire le signe de $h(x)$ sur $]0; +\infty[$.

4°/ Montrer que :

$$-\forall x \in]-\infty; 0[, f'(x) = \frac{g(x)}{\left(1 + e^{\frac{1}{x}}\right)^2}$$

$$-\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = h(x).$$

5°/ a) Calculer la limite en $+\infty$ de f puis interpréter géométriquement le résultat.

b) Calculer la limite en $-\infty$ de f .

c) Etablir le tableau de variation de f .

6°/ Calculer la limite en $-\infty$ de $x \left(1 - e^{\frac{1}{x}}\right)$ puis montrer que la limite en $-\infty$ de $\left[f(x) - \frac{x}{2}\right]$ est égal à $-\frac{1}{4}$. Interpréter géométriquement le résultat.

7°/ Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un ensemble que l'on précisera.

8°/ Calculer $f(1)$ puis dire si f^{-1} est dérivable en $y_0 = \ln 2$; dans le cas échéant, calculer $(f^{-1})'(\ln 2)$.

9°/ Tracer la courbe (C') de f^{-1} dans le repère précédent.

EXERCICE 40

Soit définie par: $f(x) = \frac{5^x}{5^{2x} - 1}$

1°/ Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}^*$.

2°/ Montrer que f est impaire

3°/ Etudier les variations de f sur $]0, +\infty[$ et en déduire ses variations sur $]-\infty; 0[$.

4) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = \frac{2}{3}$.

b) En déduire les solutions de $f(x) = -\frac{2}{3}$.

EXERCICES COMPLEMENTAIRES :

CIAM SM- CIAM SE- SUJETS BAC S2

SCIENTIFIC PRO

COURS DE RENFORCEMENT 2012/2013

CELLULE DE MATHÉMATIQUES

TERMINALE S2

SUITES NUMÉRIQUES

EXERCICE 1

1°/ Montrer que la suite définie par :

$$U_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{n+p}$$
 est monotone

2°/ Etudier la monotonie de (U_n) : $U_n = \frac{2^n}{n^{3/2}}$

3°/ Déterminer le sens de variation de la suite (U_n)

définie par : $U_n = \frac{2^n}{n^2}$

4°/ Etudier la monotonie de la suite (U_n) :

$$U_n = \sum_{p=0}^n \frac{1}{p!}$$

5°/ Montrer que la suite (U_n) définie par :

$U_n = (-1)^n$ est périodique et déterminer la période.

6°/a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \frac{1}{n^2+1} \leq 1$.

b) En déduire que la suite (U_n) définie par :

$U_n = (-1)^n + \frac{1}{n^2+1}$ est bornée.

EXERCICE 2

Etudier la convergence de (U_n)

1°/ $U_n = \frac{\ln n}{n}$, 2°/ $U_n = \frac{3n + \sin n}{n^2}$, 3°/ $U_n = \frac{n^2 + (-1)^n}{n^2}$

4°/ $U_n = \frac{\sqrt{1+\sqrt{2}+\dots+\sqrt{n}}}{n^2}$

5°/ $U_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \dots + \frac{n}{n^2+n}$

6°/ $V_n = \frac{n}{n^2} + \frac{n}{n^2+1} + \dots + \frac{n}{n^2+2n+1}$

7°/ $U_n = \frac{n}{n^3} + \frac{n}{n^3+1} + \dots + \frac{n}{n^3+3n^2+n} + \frac{n}{n^3+3n^2+3n+1}$

EXERCICE 3

Déterminer la limite de la suite (U_n)

1°/ $U_n = \frac{n^4+3n}{n!-7n}$, 2°/ $U_n = \frac{4^n-n!}{2(n!+n^5)}$, 3°/ $U_n = \frac{3^n-n^2}{5^n+2n}$

4°/ $U_n = \frac{4^n}{n^3}$, 5°/ $U_n = \frac{(\ln n)^3}{\sqrt{n}}$, 6°/ $(\sin n)e^{-n}$

EXERCICE 4

1°/ Calculer a et b tels que :

$$\frac{2}{(n+1)(n+3)} = \frac{a}{n+1} + \frac{b}{n+3}$$

2°/ Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)(k+3)}$

EXERCICE 5

$$U_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

1°/ Montrer que (U_n) est croissante.

2°/ Montrer que si $n > 2$, $2^{n-1} < n!$

3°/ Montrer que (U_n) est majorée par une suite géométrique convergente.

EXERCICE 6

On considère la suite (U_n) définie par :

$$U_0 = \frac{2}{3} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{U_n}{2} + \frac{n}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

1°/ Calculer U_1 et U_2 .

2°/ Soit (V_n) définie par : $V_n = U_n\sqrt{2} - n$

Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

3°/ Calculer V_n puis U_n en fonction de n uniquement. La suite (U_n) converge-t-elle ?

4°/ On considère la suite (S_n) définie par :

$$S_n = \sum_{i=0}^n U_i. \text{ Calculer } S_n \text{ en fonction de } n.$$

EXERCICE 7

Soit θ un réel tel que $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ et soit la suite

(U_n) définie par :

$$U_0 = 2\cos\theta \text{ et } U_{n+1} = \sqrt{2 + U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1°/ Calculer les trois premiers termes de la suite en fonction de θ .

2°/ Montrer par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} : U_n = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$$

3°/ Soit (V_n) définie par $V_n = \frac{\theta}{2^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Déterminer la limite de la suite (V_n) .

4°/ En déduire que (U_n) est convergente et calculer sa limite.

EXERCICE 8

On définit la suite a par : $\begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ a_{n+2} = \frac{(a_{n+1})^2 + 2}{a_n} \end{cases}$

1°/ Calculer les cinq premiers termes de cette suite.

2°/ Démontrer qu'en fait $a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n$

EXERCICE 9

On considère la suite (U_n) définie par :

$$U_0 = 0 \text{ et } U_{n+1} = \sqrt{6 + U_n}.$$

1°/ En utilisant la droite d'équation $y=x$ et la représentation graphique de f (unité : 2 cm), construire sur l'axe des abscisses U_0, U_1, U_2 et U_3 .

2°/ Conjecturer à quel ensemble appartiennent les U_n . Démontrer ce résultat par récurrence. Que peut-on dire de la monotonie de (U_n) ? Conclure.

3°/ Déterminer la limite de la suite (U_n) .

4°/ Démontrer successivement que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$|U_{n+1} - 3| \leq \frac{1}{3} |U_n - 3| \text{ et } |U_n - 3| \leq 3 \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

5°/ Retrouver le résultat du 3°/

EXERCICE 10

Soit f définie sur l'intervalle $[0, 2]$ par : $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$

1°/ Étudier les variations de f sur $[0 ; 2]$. Montrer que si $x \in [1; 2]$ alors $f(x) \in [1; 2]$.

2°/ (U_n) et (V_n) sont deux suites définies sur $\mathbb{N}$

$$\text{par : } \begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases} \text{ et } \begin{cases} V_0 = 2 \\ V_{n+1} = f(V_n) \end{cases}$$

a) Tracer C_f sur $[0 ; 2]$. Construire sur l'axe des abscisses les trois premiers termes de chacune des suites (U_n) et (V_n) .

À partir de ce graphique, que peut-on conjecturer concernant le sens de variation et la convergence des suites (U_n) et (V_n) ?

b) Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que :

- Pour tout entier naturel n , $1 \leq V_n \leq 2$.

- Pour tout entier naturel n , $V_{n+1} \leq V_n$.

On admettra que l'on peut démontrer de la même façon que :

- Pour tout entier naturel n , $1 \leq U_n \leq 2$.

- Pour tout entier naturel n , $U_n \leq U_{n+1}$.

c) Montrer que pour tout entier naturel n

$$V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{V_n - U_n}{(U_n + 1)(V_n + 1)}$$

En déduire que pour tout entier naturel n ,

$$V_n - U_n \geq 0 \text{ et } V_{n+1} - U_{n+1} \leq \frac{1}{4} (V_n - U_n)$$

d) Montrer que pour tout entier naturel n ,

$$V_n - U_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

e) Montrer que les suites (U_n) et (V_n) convergent vers un même réel α .

Déterminer la valeur exacte de α .

EXERCICE 11

Soit la suite (U_n) définie par :

$$U_n = \exp\left(1 - \frac{n}{2}\right), n \in \mathbb{N}.$$

1°/a) Montrer que (U_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b) Justifier que (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = \ln U_n$ est une suite arithmétique. Quelle est sa raison ?

2°/ On pose $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$

$$\text{et } P_n = U_0 \times U_1 \times \dots \times U_n$$

a) Exprimer S_n et P_n en fonction de n .

b) Déterminer les limites de S_n et P_n .

EXERCICE 12

On considère les suites (U_n) et (V_n) définies par :

$$\begin{cases} U_1 = 12 \\ U_{n+1} = \frac{U_n + 2V_n}{3} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} V_1 = 1 \\ V_{n+1} = \frac{U_n + 3V_n}{4} \end{cases}$$

1°/ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $W_n = V_n - U_n$

a) Démontrer que (W_n) est une suite géométrique.

b) Exprimer W_n en fonction de n .

c) Démontrer que (W_n) est convergente et calculer sa limite.

2°/ Montrer que la suite (U_n) est décroissante puis que la suite (V_n) est croissante.

3°/ Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n \geq V_n$. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_1 \geq U_n \geq V_n \geq V_1$.

4°/ Déduire de ce qui précède que les suites (U_n) et (V_n) convergent vers une même limite.

5°/ On considère la suite (t_n) définie par :

$$t_n = 3U_n + 8V_n.$$

a) Montrer (t_n) est constante.

b) En déduire la valeur limite commune des suites (U_n) et (V_n) .

EXERCICE 13

n désigne un entier naturel. On étudie la suite (U_n)

$$\text{définie par : } \begin{cases} U_0 = 2 \\ U_n - 2U_{n+1} = 2n + 3 \end{cases}$$

1°/ Montrer qu'il existe un entier b indépendant de n , tel que $V_n = U_n + bn - 1$ soit le terme général d'une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.

2°/ En déduire que $U_n = \frac{1}{2^n} - 2n + 1$.

$$3^\circ / \text{ On pose } S_n = \sum_{k=0}^n V_k$$

Calculer S_n en fonction de n et la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$.

Calculer la plus petite valeur de n pour que S_n soit supérieure à 1,99.

$$4^\circ / \text{ On pose } T_n = \sum_{k=0}^n U_k$$

Calculer T_n en fonction de n . T_n admet-elle une limite quand n tend vers $+\infty$?

EXERCICE 14

Partie A

Le but de cette partie est d'étudier la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x + \frac{2\ln x}{x}$

(C) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 1 cm).

1°/ Étude de la fonction auxiliaire g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x^2 + 2 + 2\ln x$.

a) Étudier le sens de variation de g et calculer $g(1)$.

b) En déduire le signe de $g(x)$ pour tout x de $]0; +\infty[$.

2°/ a) Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

b) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

c) Montrer que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote à (C) et étudier la position de (C) par rapport à Δ .

d) Déterminer les coordonnées du point A de (C) sachant que (C) admet en A une tangente T parallèle à Δ .

e) Tracer (C), Δ et T dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

3°/ Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_0 . Prouver que $\frac{1}{2} \leq x_0 \leq 1$.

Partie B

Le but de cette partie est de déterminer une valeur approchée de x_0 .

On désigne par h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$h(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

1°/ Montrer que x_0 est l'unique solution de l'équation $h(x) = x$.

2°/ On note I l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$. Montrer que, pour tout x appartenant à I , $h(x)$ appartient aussi à I .

3°/ a) Calculer la dérivée h' de h et la dérivée seconde h'' de h .

b) Étudier les variations de h' sur I .

c) En déduire que, $\forall x \in I, |h'(x)| \leq e^{-\frac{1}{2}}$.

4°/ On considère la suite définie pour tout entier naturel n de $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = h(U_n)$.

a) Montrer par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$\frac{1}{2} \leq U_n \leq 1.$$

b) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$|U_{n+1} - \alpha| \leq e^{-\frac{1}{2}} |U_n - \alpha|.$$

c) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$|U_n - x_0| \leq \frac{1}{2} e^{-\frac{n}{2}}.$$

5°/ a) Déterminer le plus petit entier naturel x_0 tel que, pour tout entier $n \geq n_0$ on ait :

$$\frac{1}{2} e^{-\frac{n}{2}} < 10^{-2}$$

b) Montrer que : $|U_{n_0} - x_0| \leq 10^{-2}$. Que représente U_{n_0} relativement à x_0 ?

Calculer U_{n_0} à 10^{-2} près par défaut.

EXERCICE 15

Le plan complexe est muni d'un rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité : 6cm).

On considère la suite (α_n) de nombres réels définie par $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ et $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \frac{5\pi}{6}$. Pour tout entier naturel n , on appelle M_n le point du cercle C de centre O et de rayon 1 tel que l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM_n})$ ait pour mesure α_n .

1°/ Placer les douze points $M_0, M_1, M_2, \dots, M_{11}$.

2°/ On appelle z_n l'afixe de M_n . Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, z_n = e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6})}$.

3°/ a) Montrer que pour tout entier naturel n on a les propriétés suivantes :

— M_n et M_{n+6} sont diamétralement opposés

— M_n et M_{n+12} sont confondus.

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+4} = e^{-i\frac{2\pi}{3}} z_n$. En déduire que la distance $M_n M_{n+4}$ vaut $\sqrt{3}$ puis que $M_n M_{n+4} M_{n+8}$ est équilatéral. On admettra que tous les triangles équilatéraux ayant pour sommets des points M_n sont de la forme $M_n M_{n+4} M_{n+8}$.

EXERCICE 16

Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$U_0 = \frac{\pi}{4} \text{ et } U_{n+1} = -\ln \cos(U_n)$$

1°/ Étudier la fonction f de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = -\ln(\cos x)$.

2°/ a) Étudier le sens de variation de la fonction g de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - x$:

a) En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .

3°/ a) Tracer dans un repère orthonormé la courbe C de f et la droite Δ d'équation $y=x$.

Représenter graphiquement les premiers termes de la suite (U_n) .

4°/ a) Démontrer que tous les termes de la suite (U_n) appartiennent à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

c) Montrer que la suite (U_n) est convergente.

d) Montrer que sa limite est α .

EXERCICE 17

On considère la suite $(U_n)_{n \geq 2}$ définie par :

$$U_2 = \cos\left(\frac{\pi}{2^2}\right) \text{ et } U_{n+1} = U_n \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right), n \geq 2$$

1°/ Etablir que $\forall n \geq 2, 0 < U_n < 1$.

2°/ Montrer que (U_n) est convergente.

3°/ On introduit la suite $(V_n)_{n \geq 2}$ définie par : $V_n = U_n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right), n \geq 2$

a) Vérifier que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

b) Calculer V_2 . En déduire l'expression de U_n en fonction de n , pour tout $n \geq 2$.

4°/ Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

EXERCICE 18

Soit la suite (U_n) définie par

$$U_0 = 1 \text{ et } U_{n+1} = 1 + \frac{1}{U_n}$$

1°/ Tracer la courbe représentative de f définie par $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ puis représenter les premiers termes de la suite.

2°/ Soit la suite (V_n) telle que $V_n = U_{2n}$.

a) Montrer que $V_{n+1} = \frac{2V_n+1}{V_n+1}$ et $V_n > 0$

b) Montrer que (V_n) est majorée par 2.

c) Montrer que $V_{n+1} - V_n$ et $V_n - V_{n-1}$ ont même signe. En déduire que (V_n) est croissante.

d) Montrer que (V_n) est convergente et calculer sa limite.

EXERCICE 19

Soit U une suite à termes positifs de premier terme

$U_1 = 1$ telle que $(U_{n+1})^2 = 2U_n, \forall n \geq 1$.

1°/ Calculer U_2, U_3, U_4 .

2°/ On pose $V_n = \ln U_n - \ln 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que V est une suite géométrique dont on précisera la raison.

3°/ Calculer la limite de V puis celle de U .

4°/ Soit A_p la somme des p premiers termes de V et B_p le produit des p premiers termes de U .

a) Calculer A_p et B_p en fonction de p .

b) Déterminer les limites de (A_p) et (B_p) .

EXERCICE 20

1°/ Montrer en utilisant l'inégalité des accroissements finis appliquée à l'intervalle $[k, k+1]$ ($k \in \mathbb{N}^*$) que :

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$$

2°/ On note U la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

Utiliser 1°/ pour montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$U_n + \frac{1}{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq U_n$$

3°/ Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{U_n}$

4°/ On pose pour $n \in \mathbb{N}^*, V_n = U_n - \ln n$

Démontrer que la suite V est décroissante, puis qu'elle est convergente.

EXERCICE 21

Soit (U_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n = \frac{(1,2)^n}{n^2}$

1°/a) Calculer les 10 premiers termes de la suite.

b) Conjecturer le sens de variations de (U_n) puis sur sa limite.

c) Calculer U_{11} et U_{12} . (U_n) est-elle monotone ?

2°/ Soit (V_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, V_n = \ln U_n$

a) Expliquer pourquoi (U_n) et (V_n) ont même sens de variation.

b) Vérifier que $V_n = n \ln(1,2) - 2 \ln n$.

3°/ Soit f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = x \ln(1,2) - 2 \ln x$$

a) Etudier le sens de variation de f .

b) En déduire le sens de variation de (V_n) et donc celui de (U_n) .

c) Trouver la limite de (V_n) puis celle de (U_n) .

EXERCICE 22

1°/ Soit la suite (U_n) définie par U_0 son premier terme et la relation : $U_{n+1} = \sqrt{\frac{1+U_n}{2}}$ ($U_0 \in \mathbb{R}$).

1°/a) Montrer que (U_n) existe si et seulement si, $U_0 \in [-1, 1]$.

b) Déterminer U_0 de sorte que (U_n) soit constante.

2°/ Dans la suite, on posera $U_0 = \sin \alpha_0$, avec $\alpha_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

a) Justifier ce choix. Que devient (U_n) si $\alpha_0 = \frac{\pi}{6}$?

b) Etablir l'égalité pour tout $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\sqrt{\frac{1 - \sin \alpha}{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right).$$

c) Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $\alpha_n \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $U_n = \sin \alpha_n$.

Quelle relation y-a-t-il entre α_{n+1} et α_n ?

d) On considère la suite (β_n) définie par :

$$\beta_n = \alpha_n - \frac{\pi}{6}$$

Montrer que (β_n) est une suite géométrique.

En déduire α_n puis U_n en fonction de n et α_0 .

La suite (U_n) a-t-elle une limite ? Si oui quelle est cette limite ?

EXERCICES COMPLEMENTAIRES :

CIAM SM- CIAM SE- SUJETS BAC S2

SCIENTIFIC PRO

COURS DE RENFORCEMENT 2012/2013

CELLULE DE MATHÉMATIQUES

TERMINALE S2

SIMILITUDES PLANES DIRECTES

EXERCICE 1 (A, B, C et D sont indépendantes)

A) 1°/ Quelle est l'application géométrique correspondant à la transformation :

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto z' = z + 3 + 4i$$

2°/ Quelle est l'image par f de $\Delta: y = -x$?

3°/ Quelle est l'image du cercle trigonométrique ?

B) Quelle est la transformation f correspondante à l'application : $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$z \mapsto z' = -2z + 4i$$

C) 1°/ Caractérisez la transformation f correspondante à l'application :

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)z$$

2°/ Quelle est l'image par f de l'axe des abscisses et du cercle trigonométrique ?

D) Donner la nature et les éléments caractéristiques de $f, g, f^{-1}, g^{-1}, g \circ f$ et $f \circ g$.

$$f: z' = -4iz + 1 - 4i; \quad g: z' = \frac{1}{4}iz + 1 - 2i$$

EXERCICE 2

Dans un repère orthonormé, on considère la transformation Γ qui fait correspondre à un point $M(z)$ le point $M'(z')$ tel que :

$$z' = (1 + i\sqrt{3})z + 2\sqrt{3}$$

1°/ Quelle est la nature de Γ ?

2°/ Soit D la droite d'équation : $x - y\sqrt{3} = 0$. Quelle l'équation de D' transformée de D ?

3°/ Quel est le transformé C' du cercle C de centre $A(1; 2)$ et de rayon $R=2$? (on donnera l'équation de C').

EXERCICE 3

Soit $A(1; 2)$ et $B(3; 0)$ dans $(O, \vec{u}, \vec{v})$ et soit :

-H l'homothétie de centre A et de rapport $-\frac{1}{\sqrt{2}}$,

-R la rotation de centre B d'angle $-\frac{\pi}{4}$,

-T la translation de vecteur $\vec{BO}$.

Déterminer le point C dont le transformé par la transformation $S = T \circ R \circ H$ est l'origine.

Donner ensuite les éléments caractéristiques de S .

EXERCICE 4

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, soit A le point d'affixe 1, R la rotation de centre O , d'angle $\frac{2\pi}{3}$, B l'image de A par R et C l'antécédent de A par R .

1°/ Montrer que B a pour affixe j et C a pour affixe

$$\bar{j} \text{ où } j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2°/ Soit E le milieu de $[BC]$ et F celui de $[AC]$. Déterminer la nature du triangle EFC .

3°/ Soit T la translation transformant F en B . On pose $S = T \circ R$. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de S .

EXERCICE 5

On considère l'application f qui a tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{3+i\sqrt{3}}{4}z + \frac{1-\sqrt{3}}{2}. \text{ On note } A \text{ le point d'affixe } 2$$

1°/ a) Déterminer l'affixe de A' image de A .

b) Déterminer l'affixe du point P tel que $f(P) = 0$.

2°/ Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f .

3°/ Lorsque le point M est distinct de A :

a) Démontrer que AMM' est rectangle en M' .

b) Le point M et le milieu de $[AM]$ étant donnés.

Déduire une construction au compas du point M' .

EXERCICE 6

Soit dans $\mathbb{C}$ le polynôme

$$P(z) = z^3 + (1+i)z^2 - (7+4i)z + 65 + 13i,$$

P admet deux racines conjuguées. On note z_0 la troisième racine.

Déterminer z_0 puis les racines conjuguées en utilisant les coefficients de P .

2°/ Dans le plan complexe on considère les points A, B, C, D d'affixes respectives : $2 + 3i; 2 - 3i; -3 + i; -5 - i$.

Soit les similitudes directes S et S' telles que :

$$S(A) = C \text{ et } S(B) = D \text{ et } S' \circ S \text{ est la translation de vecteur } \vec{AC}.$$

Déterminer les éléments caractéristiques de S' . En déduire l'expression complexe de S ?

EXERCICE 7

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ (unité 2cm).

1°/ Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.

On pose : $a = \sqrt{3} + i$ et $b = \sqrt{3} - i$. Ecrire a et b sous forme exponentielle et placer les points A et B d'afixes respectives a et b .

2°/ a) Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Calculer l'afixe a' du point A' image du point A par r . Ecrire a' sous forme algébrique et placer A' sur la figure précédente.

b) Soit h l'homothétie de centre O et de rapport $-\frac{3}{2}$. Calculer l'afixe b' du point B par h . Placer B' sur la figure précédente.

3°/ Soit C le centre du cercle circonscrit au triangle OA'B' et R le rayon de ce cercle. On désigne par c l'afixe du point C.

a) Justifier les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} c\bar{c} &= R^2; (c - 2i)(\bar{c} + 2i) = R^2; \\ \left(c + \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right)\left(\bar{c} + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\right) &= R^2 \end{aligned}$$

b) En déduire que :

$$c - \bar{c} = 2i \text{ et que } c + \bar{c} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

c) En déduire l'afixe du point C et la valeur de R.

EXERCICE 8

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On désigne par s l'application qui à tout point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$

$$\text{tel que : } \begin{cases} x' = -x - y + 2 \\ y' = x - y - 1 \end{cases}$$

1°/ Déterminer l'afixe z' de M' en fonction de l'afixe z de M .

2°/ Démontrer que s est une similitude plane directe. Préciser ses éléments caractéristiques.

3°/ Soit g l'application qui à tout point M de P associe l'isobarycentre G des points $M, M' = s(M)$ et $M'' = s(M')$.

a) Calculer, en fonction de l'afixe z de M les afixes des points M'' et G.

b) Démontrer que g est une similitude plane directe. Quel est son centre ?

c) Déterminer l'afixe du point M_0 tel que $g(M_0)$ soit le point O. Reporter sur une figure les points M_0, M'_0, M''_0 correspondants, ainsi que le point I, centre de la similitude s .

EXERCICE 9

1°/ Factoriser : $\alpha^2 - 2i\alpha - 1$, $\alpha \in \mathbb{C}$

2°/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E): z^2 - \alpha(\alpha + i)z + i\alpha^3 = 0$$

2°/ On notera r le module de α et θ un de ses arguments. Calculer le module et un argument de chacune des solutions de (E).

3°/ P désigne le plan complexe ; on note S_α l'application définie sur P par :

$$S_\alpha : P \rightarrow P$$

$$M(z) \rightarrow M'(z) \text{ tel que : } z' = i\alpha z + \alpha^2.$$

Déterminer α pour que S_α soit une rotation d'angle $\frac{5\pi}{6}$

EXERCICE 10

Soit $a \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et f_a l'application complexe dans lui-même qui, au point M d'afixe z associe le point M' d'afixe z' définie par :

$$z' = (-1 + itana)z - itana + 2$$

1°/ Déterminer le module et un argument du nombre complexe $-1 + itana$.

2°/ Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f_a .

3°/ Soit h_a l'homothétie de centre le point Ω d'afixe 1 et de rapport $\frac{1}{\cos a}$.

Donner une écriture complexe de la rotation r_a tel que $f_a = r_a \circ h_a$.

EXERCICE 11

Soit la suite de points M_n du plan complexe d'afixe z_n telle que $z_0 = 8$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$z_{n+1} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{4} z_n$$

1°/ Déterminer le module et un argument de $\frac{1+i\sqrt{3}}{4}$.

En déduire que pour tout entier n , M_{n+1} est l'image de M_n par la composée d'une rotation et d'une homothétie que l'on caractérisera.

2°/a) Calculer les afixes z_1, z_2 et z_3 de M_1, M_2 et M_3 que l'on placera dans le plan complexe. Vérifier que z_3 est réel.

Pour quelles valeurs de n , z_n est-il aussi réel ?

b) Soit $\theta_n = \arg z_n(2\pi)$. Montrer que la suite $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite périodique.

3°/ Calculer $\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}}$

En déduire que le triangle $OM_n M_{n+1}$ est rectangle et que $M_n M_{n+1} = \sqrt{3} OM_{n+1}$.

4°/ Pour tout entier n , on pose $U_n = |z_{n+1} - z_n|$

a) Montrer que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $4\sqrt{3}$.

En déduire la longueur L_n de la ligne brisée formée par les points $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n$.

b) Déterminer la limite de L_n .

EXERCICE 12

Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $Z^4 + 7 + 24i = 0$

a) Vérifier que $Z_0 = 2 - i$ est une solution de (E).

b) En déduire les autres solutions de (E).

2°/ Dans le plan complexe de repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on considère les points $A(1 + 2i)$, $B(-2 + i)$, $C(-1 - 2i)$ et $\Omega(2 - i)$.

a) Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude S_1 de centre Ω qui transforme A en B.

b) Soit S_2 la transformation qui a tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que :

$$2z' = (1 + i)z + 1 - 3i.$$

Caractériser la transformation $S = S_2 \circ S_1$.

3°/ Soit r la rotation de centre A d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

a) Donner l'abscisse du point D tel que $r(O) = D$.

b) Montrer que les points O, A, D et B appartiennent à un même cercle C dont on précisera le centre et le rayon.

c) Déterminer l'image du cercle C par r .

4°/ Soit $T_2 : M(z) \rightarrow M_2(z_2)$ tel que : $z_2 = \alpha z + \beta$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$. Déterminer α et β tels que $S_2 \circ T_2$ soit : a) une translation de vecteur $\vec{u}(1, 0)$.

b) une rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

EXERCICE 13

On se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :
(e) : $z^3 - 6(1 + i)z^2 + 24iz - 11 - 16i = 0$

Soit H l'homothétie de rapport $\frac{1}{3}$, dont le centre est le point I d'abscisse $-1 - i$.

Pour tout point m, d'abscisse z, on pose $M = H(m)$, le point d'abscisse Z.

1°/ Calculer Z en fonction de z puis z en fonction Z.

2°/ Démontrer que (e) s'écrit (E) : $Z^3 = 1$.

3°/ Résoudre l'équation (E). En déduire les solutions de (e).

EXERCICE 14

Soient $A(1 + i)$, $B(2)$ et $C(3 + 3i)$ dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité : 1cm)

1°/ Construire les points A, B et C.

2°/ a) Démontrer que l'écriture complexe de la similitude S de centre A, transformant B en C est
 $z' = 2iz + 3 - i$.

b) Déterminer le rapport et l'angle de S.

3°/ Soit la suite de points (A_n) définie par :

$$A_0 = B \text{ et } A_{n+1} = S(A_n)$$

a) Construire A_2 et A_3 dans la même figure sachant que $A_1 = C$.

b) Montrer que les points A, A_0 et A_2 sont alignés.

4°/ Soit la suite (U_n) définie par $U_n = A_n A_{n+1}$.

a) Calculer U_0 et exprimer U_n en fonction de U_{n-1} .

b) Calculer en fonction de n la somme

$$S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$$

EXERCICE 15

Soient les points A, B et C d'abscisses respectives

$$z_A = i, z_B = -1 + 3i \text{ et } z_C = -4 + 4i.$$

1°/ On considère la similitude directe plane S définie par $S(A) = B$ et $S(B) = C$.

a) Déterminer et construire l'image de la droite (AB) par S.

b) Déterminer et construire l'image du cercle (C) de centre A et de rayon AB par S.

2°/ a) Déterminer l'écriture complexe de S.

b) En déduire les éléments caractéristiques de S.

3°/ Soit la similitude directe plane F d'écriture complexe : $z' = \frac{u^3}{-2+2i}z + 1 - i$ avec $u \in \mathbb{C}$.

a) Calculer $(1 + i)^3$.

b) Déterminer les valeurs de u pour que F soit une translation.

EXERCICE 16

1°/ On considère le polynôme :

$$P(z) = z^4 + (1 + i)z^3 - z - 1 - i$$

a) Montrer que $P(z) = (z + 1 + i) \cdot Q(z)$.

b) Déterminer Q(z) puis résoudre dans $\mathbb{C}$ $P(z) = 0$ et écrire les solutions sous forme algébriques et exponentielle.

2°/ Soient A, B et C les points d'abscisses respectives $j, \frac{j^2}{2}$ et $1 + j$, dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude S qui transforme O en A et B en C.

3°/ Soit (U_n) la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_n = j^n \end{cases}$

a) Montrer que $U_{n+3} = U_n \forall n \geq 0$.

b) Soit F_1 et F_2 , les transformations d'écritures complexes respectives :

$$z' = j^n z + b \text{ et } z' = j^{n+3} z + b.$$

Montrer que $F_1 = F_2$.

4°/ Soit F la transformation du plan d'écriture complexe $z' = j^n z + j$

a) Déterminer le plus petit entier $n \neq 0$ tel que F soit une translation.

b) Montrer que $F \circ F \circ F$ est la translation de vecteur nul $\forall n \geq 1$.

5°/ Soient u un nombre complexe non nul et H la transformation du plan d'écriture complexe :

$$z' = (u^3 + 8j + 2)z + u + 1.$$

Déterminer u pour que H soit une homothétie de rapport $k = 2$.

EXERCICE 17

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^3 = 18 + 26i \quad (E)$$

1°/ Montrer que $z_0 = 3 + i$ est solution de (E).

2°/ Montrer que u est solution de $z^3 = 1$ si et seulement si uz_0 est solution de (E). En déduire les solutions de (E) sous forme algébrique.

3°/ Soit f la transformation du plan qui a tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que $z' = az + b$ avec $a \neq 0$. et g la transformation du plan qui a tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que

$$z' = (18 + 26i)z - 17 - 26i$$

a) Montrer que $fofof$ est la transformation du plan qui a tout point M d'affixe z associe le point M'

d'affixe z' tel que : $z' = a^3z + b \left(\frac{1-a^3}{1-a} \right)$

b) Déterminer les nombres complexes a et b tels que $fofof = g$.

EXERCICE 18

1°/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 + (3 - i)z + 4 - 3i = 0$$

On désigne par z' la solution dont la partie imaginaire est la plus grande et z'' l'autre.

Soit A et B les points d'affixes respectives z' et z''

et s la similitude directe de centre A de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

a) Déterminer l'affixe de C image de B par s .

b) Déterminer l'affixe z du point M tel que :

- AMB soit rectangle et isocèle en M .

- AMB soit rectangle et isocèle en A

EXERCICE 19

On pose:

$$Q(z) = z^3 - (i + 2i\cos\alpha)z^2 - (1 + \cos\alpha)^2z + i(1 + \cos^2\alpha)$$

où z désigne un nombre complexe, i l'unité imaginaire pure, α un nombre tel que $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

Les trois racines de $Q(z)$ sont désignées par a , b et c respectivement. On veut déterminer les racines de $Q(z)$ de deux façons différentes.

1^{ère} façon :

1°/ Sans calculer a , b et c , calculer $(a + b + c)$ $(ab + ac + bc)$ et abc .

2°/ Sachant que la somme de deux de ces racines est égale à $(2i\cos\alpha)$, utiliser les résultats précédents pour résoudre l'équation $Q(z) = 0$.

2^{ème} façon :

3°/ Montrer $Q(z)$ a une racine imaginaire pure que l'on déterminera.

4°/ En déduire les autres racines de $Q(z)$.

5°/ a étant la racine de $Q(z)$ dont la partie réelle est positive, donner son module en fonction de α et déterminer le cosinus et le sinus de son argument en fonction de α .

6°/ Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$; soit la similitude directe de centre ω d'affixe c , c étant la racine imaginaire pure de $Q(z)$ et qui transforme le point B d'affixe b en A d'affixe a . Donner l'écriture complexe de f . Déduire de cette écriture que f est une rotation de centre ω .

EXERCICE 20

1°/ Soient M_0, M_1 et M_2 les points d'affixes respectives $z_0 = \frac{1}{2}i$, $z_1 = 3 - 10i$ et $z_2 = -3 + 10i$.

On considère la similitude S de centre M_0 , de rapport 2 et d'angle $-\frac{\pi}{6}$.

a) déterminer l'écriture complexe de S .

b) Déterminer les affixes des points A et B tels que $S(M_1) = A$ et $S(B) = M_1$.

c) Déterminer l'image de B par SoS .

2°/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $S^n = SoSo \dots S$.

a) Déterminer les éléments caractéristiques de S^n .

b) Déterminer le plus petit entier non nul n tel que S^n soit une homothétie.

EXERCICE 21

Soit la suite de points M_n du plan complexe d'affixe z_n telle que $z_0 = 8$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$z_{n+1} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{4} z_n$$

1°/ Déterminer le module et un argument de $\frac{1+i\sqrt{3}}{4}$.

En déduire que pour tout entier n , M_{n+1} est l'image de M_n par la composée d'une rotation et d'une homothétie que l'on caractérisera.

2°/a) Calculer les affixes z_1, z_2 et z_3 de M_1, M_2 et M_3 que l'on placera dans le plan complexe. Vérifier que z_3 est réel.

Pour quelles valeurs de n , z_n est-il aussi réel ?

b) Soit $\theta_n = \arg z_n(2\pi)$. Montrer que la suite $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite périodique.

3°/ Calculer $\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}}$

En déduire que le triangle OM_nM_{n+1} est rectangle et que $M_nM_{n+1} = \sqrt{3} OM_{n+1}$.

4°/ Pour tout entier n , on pose $U_n = |z_{n+1} - z_n|$

a) Montrer que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $4\sqrt{3}$.

En déduire la longueur L_n de la ligne brisée formée par les points $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n$.

b) Déterminer la limite de L_n .

EXERCICE 22

PARTIE A

Dans plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points $I(1)$, $A(1 - 2i)$ et $B(-2 + 2i)$

Soit (C) le cercle de diamètre [AB].

On fera une figure que l'on complètera avec les différents éléments intervenant dans l'exercice. On prendra pour unité graphique 2 cm.

1°/ Déterminer le centre Ω du cercle (C) et calculer son rayon.

2°/ Soit D le point d'affixe $z_D = \frac{3+9i}{4+2i}$.

Montrer que D est un point du cercle (C).

3°/ Sur le cercle (C), on considère le point E, d'affixe z_E , tel qu'une mesure en radian de l'angle $(\vec{OI}, \vec{OE})$ est $\frac{\pi}{4}$.

a) Préciser le module et un argument de $z_E + \frac{1}{2}$.

b) En déduire que $z_E = \frac{5\sqrt{2}-2}{4} + \frac{5\sqrt{2}}{4}i$.

PARTIE B

On considère la transformation T qui à tout point M(z) associe le point M'(z') telle que :

$$z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)z + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}i$$

1°/ a) Montrer que T laisse invariant le point Ω .

b) Montrer que $z' + \frac{1}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}}(z + \frac{1}{2})$.

2°/a) Etablir que $\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ (\vec{\Omega M}, \vec{\Omega M'}) = \frac{\pi}{4} \end{cases}$

b) En déduire la nature T et préciser ses éléments caractéristiques.

c) Soit K le point d'affixe $z_K = 2$.

Déterminer par le calcul l'image de K par T. Comment peut-on retrouver géométriquement ce résultat ?

d) Déterminer l'équation cartésienne du cercle C' image du cercle de centre I et de rayon $\frac{3}{2}$.

4°/ Soit $M_n(z_n)$ et $M_{n+1}(z_{n+1})$ image de M_n par T.

On donne $z_0 = -\frac{1}{2}i$.

a) Calculer z_1 et z_2 puis exprimer z_{n+1} en fonction de z_n .

b) On pose $U_n = z_n + \frac{1}{2}$. Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n .

c) Démontrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$U_n = U_0 \left[\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \right]^n.$$

EXERCICE 23

1°/ Soit (E) : $8z^3 - 8(1+i)z^2 + 6iz + 1 - i = 0$

Résoudre l'équation (E) sachant qu'elle admet une solution réelle.

2°/ Soit $A\left(\frac{1}{2}\right)$, $B\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)$ et $C\left(\frac{1}{2}i\right)$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité 2cm)

a) Placer les points A, B et C.

b) Donner la nature du quadrilatère OABC (Justification à l'appui)

3°/ Soit S la similitude de centre $I\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i\right)$ centre de OABC de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{4}$

a) Construire l'image de OABC par S

b) Déterminer l'écriture complexe de S

4°/ Soit $S^n = \text{SoSoSo} \dots \text{oS}$ et $S^2 = \text{SoS}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

a) Déterminer une équation cartésienne de l'image de la droite (BC) par S^2

b) Déterminer le plus petit entier naturel n pour que S^n soit une homothétie.

d) En déduire l'expression de z_n en fonction de n.

EXERCICE 24

Soit $A(12)$, $B(9i)$ et soit f l'application de P dans P qui à tout point M(z) associe le point M'(z') défini par $z' = -\frac{3}{4}iz + 9i$

1°/ Montrer que f admet un point invariant Ω dont on précisera les coordonnées.

2°/ Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f et les images de A et O par f.

3°/ Montrer que Ω appartient aux cercles C_1 et C_2 de diamètres respectifs OA et OB ;

4°/ Que représente Ω pour le triangle OAB ?

5°/ Calculer le rapport $\frac{\Omega A \times \Omega B}{\Omega O^2}$

6°/ Faire une figure comportant les points A, B et Ω , ainsi que les cercles C_1 et C_2 .

EXERCICE 25

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité 1cm). On considère le

point A d'affixe $4 + i$ et le point B d'affixe $4e^{i\frac{7\pi}{12}}$

Soit le point C image de B par la similitude directe de centre O de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

1°/ Placer sans utiliser la calculatrice les points A, B et C. Justifier la construction.

2°/ Calculer l'affixe du point C. On donnera le résultat sous forme algébrique.

3°/ Soit ε , l'ensemble des points M du plan d'affixe z vérifiant : $|(1+i)z - 3 - 5i| = \sqrt{2}|z + \sqrt{3} - i|$

a) Montrer que M(z) appartient à ε si et seulement si $|z - 4 - i| = |z + \sqrt{3} - i|$

b) Déterminer alors ε à l'aide des points A, B et C.

EXERCICE 26

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit S_1 la similitude directe de centre O , d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de rapport 4 et soit S_2 la similitude directe de centre O , d'angle $\frac{6\pi}{5}$ et de rapport 6.

1°/ On pose $S_n = S_1 \circ S_1 \circ \dots \circ S_1$,

$$S'_n = S_2 \circ S_2 \circ \dots \circ S_2 \text{ et } f = S'_n \circ S_n.$$

Déterminer l'entier naturel n tels que S_n soit :

- a) une translation ;
- b) une homothétie de rapport positif ;
- c) une homothétie de rapport négatif ;

2°/ Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f .

3°/ f peut-elle être une homothétie de rapport 144 ?

4°/ On appelle M le point d'affixe 6 et M' son image par f . Peut-on avoir $OM' = 240$?

Démontrer qu'il existe un couple d'entiers naturels unique (m, n) tel que $OM' = 576$?

Calculer alors la mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM'})$.

EXERCICE 27

Soit le complexe $a = -1 - i$ et $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de nombres complexes définies par :

$$\begin{cases} z_0 = 0 \text{ et } z_1 = i \\ z_{n+1} = (1 - a)z_n + az_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

1°/ Déterminer z_1 et z_3 sous forme algébrique.

2°/ Soit (U_n) la suite définie par :

$$U_n = z_{n+1} - z_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

- a) Déterminer U_0 et U_1 sous forme algébrique.
- b) Démontrer que (U_n) est géométrique de raison $-a$.

c) Exprimer U_n en fonction de n et de a .

3°/ Soit $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_{n-1}$. Exprimer S_n en fonction de z_n . En déduire que $z_n = -1 + (1 + i)^n$.

4°/ a) Déterminer le module et un argument de a .

b) Donner la forme algébrique de z_{19} .

5°/ Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on désigne par A_0 le point d'affixe z_0 , A_1 le point d'affixe z_1 , A_2 le point d'affixe z_2 .

Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe S qui transforme A_0 en A_1 et A_1 en A_2 .

EXERCICE 28

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. (Unité 5 cm)

Soit f la transformation qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \left(\frac{1+i}{2} \right) z + 1$$

1°/ Justifier que f est une similitude directe dont on précisera le centre Ω (d'affixe ω), le rapport k et l'angle θ .

2°/ On note A_0 le point O et, pour tout entier naturel n , on pose $A_{n+1} = f(A_n)$.

a) Déterminer les affixes des points A_1, A_2 et A_3 puis placer les points A_0, A_1, A_2 et A_3 .

b) Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = \Omega A_n$. Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique puis établir que, pour tout entier naturel n , $u_n = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n$.

c) A partir de quel rang n_0 tous les points A_n appartiennent-ils au disque de centre Ω et de rayon 0,1 ?

3°/ a) Quelle est la nature du triangle $\Omega A_0 A_1$?

En déduire, pour tout entier naturel n , la nature du triangle $\Omega A_n A_{n+1}$.

b) Pour tout entier naturel n , on note L_n la longueur de la ligne brisée $A_0 A_1 \dots A_{n-1} A_n$.

On a ainsi : $L_n = A_0 A_1 + A_1 A_2 + \dots + A_{n-1} A_n$.

Exprimer L_n en fonction de n . Quelle est la limite de la suite (L_n) ?

EXERCICES COMPLEMENTAIRES :

CIAM SM- CIAM SE- SUJETS BAC S2



FASCICULES DEJA PARUS :

1°/ FASCICULE DE MATH TS1/S3 :

TOME 1 : ANALYSE ET ALGEBRE

2°/ FASCICULE DE SCIENCES PHYSIQUES

TS2 :

TOME 1 : MECANIQUE-CHIMIE ORGANIQUE- CINETIQUE CHIMIQUE

3°/ FASCICULE DE SCIENCES PHYSIQUES

TS1/S3 :

TOME 1 : MECANIQUE

EN CONSTRUCTION :

1°/ FASCICULE DE MATH DU 2nd SEMESTRE
TS2

2°/ FASCICULE DE SCIENCES PHYSIQUES
TS1/S2/S3

TOME 2 : ELECTROMAGNETISME

TOME 3 : OSCILLATIONS ELECTRIQUES

TOME 4 : OPTIQUE ET PHENOMENES CORPUSCULAIRES

TOME 5 : CHIMIE : ACIDES-BASES

SCIENTIFIC PRO 2012/2013