

COURS DE RENFORCEMENT 5 ETOILES DE MATHS ET PC M. SECK ET M. DIOP

FASCICULE DE MATHS

LIEU CEM MARTYR

TS2

TEL: 77 623 40 75

ANNEE 2022/2023

*«Si la séance d'un cours
n'aborde pas une boutade
en élucidant un point
manifestement difficile,
ou n'établi pas un rapport entre
un propos anonyme et son auteur
ou ne résout pas par réflexion
un problème épineux ou ambigu
Abstiens-toi, réfléchis seul
et fait effort sans te lasser,
il n'y a là que mauvaise compagnie»*

Cours de renforcement 5 étoiles M. Seck et M. Diop Série Math TS

Année 2022/2023

2^{ème} Édition

Cet ouvrage est un outil destinés à vous, élève de Terminale S2 précisément à ceusses qui bénéficient des cours de renforcement 5 étoiles Maths et PC de M. SECK et de M. DIOP, pour vous aider à préparer les devoirs de classe, mais aussi le Baccalauréat et les concours. Il comprend :

1. Des résumés de cours (dans la nouvelle version à venir, mais sera présenter par M. Seck dans le cours de renforcement les 5 étoiles) pour servir de fiches de leçons, vous facilitant la rétention des notions fondamentales du programme.
2. Des exercices variés qui sont corrigés dans le cours de renforcement précisément au **CEM Martyr de Thiaroye**, prenant en charge toutes les compétences exigibles du programme et nous vous apprenons aussi à répondre à des questions types.
3. Des exercices d'approfondissement gradués et variés, pour le renforcement de votre culture général (vos capacités) durant l'année scolaire.
4. Des problèmes de synthèses et des sujets de baccalauréat, pour vous permettre de jauger votre niveau par rapport à ce que vous attend à l'examen.

Nous accueillerons avec reconnaissance les remarques, critiques et suggestions qui nous permettrons de l'améliorer.

ABIB SECK

Table des matières

I	ANALYSE	5
1	Fonctions numériques	6
1.1	Limites, Continuité	6
1.2	Dérivées et primitives	9
1.2.1	Calculs de dérivées	9
1.2.2	Calculs de primitives	10
1.3	Étude de fonctions	14
1.3.1	Fonctions polynômes, rationnelles et trigonométriques	14
1.3.2	Fonctions logarithme népérien	21
1.3.3	Fonctions exponentielles	26
2	Suites numériques	32
2.1	Suites numériques	32
2.2	Exercices d'approfondissement	37
3	Calcul intégral	41
3.1	Intégrale d'une fonction continue	41
3.2	Intégration par parties	41
3.3	Changement de variable affine	42
3.4	Intégrations des fonctions particulières	42
4	Équations différentielles linéaires	47
4.1	Généralités	47
4.2	Équations du type $y' - ay = 0$	48
4.3	Équations du type $y'' + ay' + by = 0$	49
4.4	Exercices d'approfondissement	50
II	ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE	55
5	Nombres complexes	56
5.1	Étude algébrique des nombres complexes	56
5.2	Étude trigonométrique des nombres complexes	57
5.3	Résolutions d'équations	58

5.4	Lieux géométriques	59
5.5	Calculs des nombres complexes	60
6	Similitude plane directe	64
6.1	Similitudes directes du plan	64
6.2	Similitudes directes et problèmes de géométrie	65
III	ORGANISATION DES DONNÉES	71
7	Dénombrement	72
7.1	Dénombrement	72
8	Probabilité	77
8.1	Calculs de probabilités	77
8.2	Variable aléatoire	82
9	Statistiques	85
9.1	Série Statistique double	85
9.2	Série double injective	89
10	Sujets de bac 2015 à 2023	93
10.1	Epreuve du 1 ^{ière} groupe	93
10.2	Epreuve du 2 ^{ième} groupe	117

Première partie

ANALYSE

FONCTIONS NUMÉRIQUES

Sommaire

1.1	Limites, Continuité	6
1.2	Dérivées et primitives	9
1.3	Étude de fonctions	14

1.1 Limites, Continuité

Success comes from working harder, living and digging better than the others. Il faut beaucoup travail.

Exercice 1.1.1.

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes.

1. $f(x) = x^2\sqrt{x} + \frac{2}{x}$

2. $f(x) = \frac{x\sqrt{x}}{x-4}$

3. $f(x) = \frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$

4. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x+1}$

5. $f(x) = x\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

6. $f(x) = \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x}$

7. $f(x) = \frac{1}{x^2+2\sqrt{x}}$

Exercice 1.1.2.

Calcul de limites.

1. Calculer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions suivantes.

(a) $x \rightarrow \frac{x^2-5x+4}{2x^2-8}$ (b) $x \rightarrow \frac{3x-5}{x^2-x+1}$

(c) $x \rightarrow \frac{x^2+1}{-2x+3}$ (d) $x \rightarrow \frac{x^2+1}{|-2x+3|}$

2. Dans chacun des cas suivants, calculer la limite de la fonction f en 0.

$$\begin{array}{ll} (a) f(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} & (b) f(x) = \frac{\sin^3(x)}{x^2} \\ (c) f(x) = \frac{\tan^2(x)}{x} & (d) f(x) = \frac{\sin(x)}{\tan(x)} \\ (e) f(x) = \frac{x^3 \cos^3(x)}{\sin^2(x)} & (f) f(x) = \frac{1}{\sin(2x)} - \frac{1}{2 \tan(x)}. \end{array}$$

3. Dans chacun des cas suivants, calculer la limite de la fonction f en 0.

$$\begin{array}{ll} (a) f(x) = \frac{\sin(x) + \tan(x)}{x} & (b) f(x) = \frac{\sin(x) + \tan(x)}{\sqrt{x^2}} \\ (c) f(x) = \frac{\sin(x) - \tan(x)}{x} & (d) f(x) = \frac{\sin(x) - \tan(x)}{\sqrt{x^2}}. \end{array}$$

4. (a) Démontrer que :

$$\forall x \in [1, +\infty[, \frac{1}{2} \leq \frac{x}{x+1} < 1.$$

$$\text{En déduire : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x+1} \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x}(x+1)}.$$

(b) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |\cos(x) + \sin(x)| \leq 2. \text{ En déduire les limites en } +\infty \text{ et en } -\infty \text{ de la fonction :}$$

$$x \rightarrow \frac{\cos(x) + \sin(x)}{x^2}$$

5. Utiliser les propriétés de comparaison pour calculer les limites suivantes.

$$\begin{array}{ll} (a) \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & (b) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \\ (c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(x)}{x^2 + 1} & (d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x + \sin(x)} \\ (d) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \cos(x)}{3 + \cos(x)} & (d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \cos(x)}{3 + \cos(x)}. \end{array}$$

6. (a) Démontrer que : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$.

(b) En déduire les limites suivantes.

$$\begin{array}{ll} (a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{1 - \cos(x)} & (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x)}{\cos(x) - 2} \\ (c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2(x) - 1}{x \tan(x)} & (d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos(x)}}{\sin(x)}. \end{array}$$

7. Calculer les limites suivantes.

$$\begin{array}{ll} (a) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^2-1} & (b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-2}}{x-2} \\ (c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x^2} & (d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+x} - \sqrt{5-x}}{\sqrt{2x+7} - \sqrt{10-x}} \\ (e) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{\sqrt{x^2-x-6}} & (f) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+x-2}}. \end{array}$$

8. Dans chacun des cas suivants, Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$.

$$\begin{array}{ll} (a) f(x) = x + \sqrt{1-x} & (b) f(x) = 2x + \sqrt{x-1} \\ (c) f(x) = \sqrt{2x+1} - \sqrt{x+1} & (d) f(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}. \end{array}$$

9. Dans chacun des cas suivants, calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et $-\infty$.

(a) $f(x) = \sqrt{2x^2 - x + 3}$

(b) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$

(c) $f(x) = 2x + \sqrt{x^2 + 1}$

(d) $f(x) = \frac{x - \sqrt{|x|}}{3x+2}$

(e) $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 4}$

(f) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{|x+2|}} - \frac{x}{\sqrt{|x+1|}}$.

10. (a) Démontrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{2}$.

(b) En déduire les limites suivantes :

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x} - 1}{x},$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{2x},$

iii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin(x)} - 1}{\sin(2x)}.$

11. Calculer les limites suivantes :

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{\sin^2(2x)},$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(3x)}{x^2},$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin(x)} - 1}{\sin(2x)}.$

12. Calculer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions suivantes :

(a) $x \rightarrow \sqrt{x^2 - 2x} + x$

(b) $x \rightarrow \frac{x - \sqrt{x^2 - x + 1}}{2x - \sqrt{4x^2 + x}}$

(c) $x \rightarrow \sqrt{|\sqrt{x^2 + 1} - x^2|}$

(d) $x \rightarrow \sqrt{\sqrt{x^2 + 1} - x}$

Exercice 1.1.3.

Calculer les limites ci-dessous en identifiant l'expression à un taux de variation.

a. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan(x) - 1}{4x - \pi};$

b. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x)}{\pi - \sin(x)};$

c. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x) - \cos(x)}{x - \frac{\pi}{4}}.$

1.2 Dérivées et primitives

1.2.1 Calculs de dérivées

Exercice 1.2.1.

- Déterminer la dérivée des fonctions suivantes.
 - $x \mapsto -x^2 + x^3 - 4$
 - $x \mapsto (x^2 + 1)^4$
 - $x \mapsto (5x + 2)^3(3 - 4x)$
 - $x \mapsto x^5(2 - 4x^2)^3$.
- Déterminer la dérivée des fonctions suivantes.
 - $x \mapsto \frac{2x-1}{-x+1}$
 - $x \mapsto \frac{x^2+2x+1}{x^2-x-1}$
 - $x \mapsto \left(\frac{x-1}{3x+1}\right)^2$
 - $x \mapsto \frac{(2x-1)^2}{(3x+1)^2}$.
- Dans chacun des cas suivants, étudier la dérivabilité de la fonction f sur son ensemble de définition puis déterminer sa dérivée.
 - $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$
 - $f(x) = (x^2 - 1)\sqrt{x + 1}$
 - $f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x-1}}$
 - $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{3x-2}$.
- Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sin^6(x) + \cos^6(x) + 3\sin^2(x)\cos^2(x)$.
Démontrer que f est une fonction constante.
- Déterminer la dérivée des fonctions suivantes.
 - $x \mapsto \cos(x) - \sin(x)$
 - $x \mapsto \cos(-3x + \frac{\pi}{3})$
 - $x \mapsto \sin(x^2 - \frac{\pi}{6})$
 - $x \mapsto \sin^2(2x - \frac{\pi}{4})$
 - $x \mapsto \sin(\cos(x))$
 - $x \mapsto x^2 \cos(\frac{1}{x})$
 - $x \mapsto \sin \sqrt{\frac{1}{1-x^2}}$
 - $x \mapsto \tan(\tan(x))$
 - $x \mapsto \frac{1+\cos(x)}{\sin^2(x)}$
 - $x \mapsto \frac{\sqrt{x^2-4x}}{\cos^2(x)}$.
- En utilisant la définition du nombre dérivé, calculer les limites suivantes.
 - $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x) - \sin(a)}{x - a}$
 - $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\tan(x) - \tan(a)}{x - a}$
 - $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos^2(x) - \cos^2(a)}{x - a}$
 - $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2\sin(x) + 1}{x - \pi}$
 - $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin(x) - 1}{6x - \pi}$
 - $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{x+1}}{x - 1}$.
- En utilisant la définition du nombre dérivé, calculer les limites suivantes.
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$
 - $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{x+1}}{x - 1}$
 - $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + x + 3} - 3}{x - 2}$
 - $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3x} - \sqrt{x+6}}{2x - 6}$.
- Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2-3x+1}{x+1}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative.
 - Déterminer une équation de la tangente à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 1.
 - Existe-t-il des points de $(\mathcal{C})$ où la tangente a pour coefficient directeur -4 ?
- Dans chacun des cas suivants, étudier la dérivabilité de la fonction f sur son ensemble de définition puis déterminer sa dérivée.
 - $f(x) = (\sqrt[3]{2x^2 - x - 6})^5$
 - $f(x) = (\sqrt[5]{2x^2 - x - 6})^3$
 - $f(x) = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2x^2 - x - 6}}\right)$
 - $f(x) = \frac{1}{(\sqrt{2x^2 - x - 6})^3}$.

1.2.2 Calculs de primitives

Exercice 1.2.2.

Dans chacun des cas suivants déterminer une primitive de f sur I après avoir effectué la transformation.

1. $f(x) = x^2(x-1)^{2021}$.
Écrire $x^2 = a(x-1)^2 + b(x-1) + c$; a , b et c à trouver.

2. $f(x) = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$; $I =]1, +\infty[$.
Écrire $f(x)$ sous la forme : $f(x) = a + \frac{b}{(x-1)^2}$.

3. $f(x) = \frac{4x^2+16x-1}{(x+2)^2}$; $I =]-2; +\infty[$.
Écrire $f(x)$ sous la forme : $f(x) = a + \frac{b}{(x+2)^2}$.

4. $f(x) = \frac{2x^3+13x^2+24x+2}{(x+3)^2}$; $I =]-3; +\infty[$.
Écrire $f(x)$ sous la forme : $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x+3)^2}$.

5. $f(x) = \frac{x^3-3x^2+6x-3}{2x^2(x-1)^2}$; $I =]-1; 1[\setminus \{0\}$.
Écrire $f(x)$ sous la forme : $f(x) = \frac{a}{2x^2} + \frac{bx}{(x-1)^2}$.

6. Exprimer $1 + \cos(t)$ en fonction de $\cos\left(\frac{t}{2}\right)$.
En déduire une primitive de $f(x) = \frac{1}{1+\cos(3x)}$ sur $]-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}[$.

Exercice 1.2.3.

1. On donne $f(x) = \frac{2x-3}{\sqrt{1+x}}$.
(a) Déterminer les réels a , et b $f(x) = a\sqrt{1+x} + \frac{b}{\sqrt{1+x}}$.

(b) en déduire une primitive de f sur $] -1; +\infty[$.

2. Soit $f(x) = \frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$
(a) Vérifier que : $x^2 + 1 = \frac{1}{2}[(x+1)^2 + (x-1)^2]$.
(b) En déduire une primitive de f sur $]1; +\infty[$.

Exercice 1.2.4.

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sin(x) + \sin^3(x)$.

1. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ et retrouver 2 réels a et b tels que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) + af(x) = b \sin(x)$.

2. En déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1.2.5.

1. On considère les fonctions définies par :

$$f(x) = \sin^2 x \cos^4 x \quad \text{et} \quad g(x) = \cos^2 x \sin^4 x.$$

(a) Calculer $A(x) = f(x) + g(x)$ et $B(x) = f(x) - g(x)$.

(b) En déduire les primitives de $f(x)$ et $g(x)$.

2. On considère la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{3x^3 - 5x^2 + 2x - 1}{x^2 - 4x + 4}$$

(a) Préciser son ensemble de définition.

(b) Déterminer les nombres réels a , b , c et d tels que pour tout x :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2} + \frac{d}{(x-2)^2}.$$

(c) En déduire les primitives de f sur D_f .

Exercice 1.2.6.

1. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(x) = \sin^2 x \cos^4 x - \cos^2 x \sin^4 x$.

(a) Montrer que $\varphi(x) = \frac{1}{4} \cos 2x \sin^2 2x$.

(b) En déduire la primitive de φ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en zéro.

Exercice 1.2.7.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x \sin(x)$.

1. Démontrer que pour tout réel x $f(x) = 2 \cos(x) - f''(x)$.

2. En déduire la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur 0 en π .

Exercice 1.2.8.

Soit $f(x) = \frac{1}{1-\sin(x)}$ $x \in I =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

1. En remarquant que $x \in I$ $\frac{1}{1-\sin(x)} = \frac{1+\sin(x)}{(1+\sin(x))(1-\sin(x))}$,

2. Déterminer la primitive de f sur I .

Exercice 1.2.9.

Déterminer une primitive de la fonction f dans les cas suivants :

- | | | |
|--|--|---|
| 1) $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + x - 1$. | 2) $f(x) = \sin(x) \cos^3(x)$. | 3) $f(x) = \frac{4x+2}{x^2+x-2}$. |
| 4) $f(t) = \sin(\omega t + \varphi)$. | 5) $f(x) = \sqrt{x} - \frac{2}{x^3}$. | 6) $f(x) = 2 + \frac{3}{x-1} - \frac{4}{(x+1)^2}$. |
| 7) $f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^4}$. | 8) $f(x) = \frac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$. | 9) $f(x) = \frac{1-\cos(x)}{(x-\sin(x))^2}$. |

Exercice 1.2.10.

1. Soit u et v les fonctions définies sur $I =]-\frac{1}{2}; +\infty[$ par : $u(x) = \frac{1}{(2x+1)^2}$ et $v(x) = \frac{1}{(2x+1)^2}$.
Déterminer une primitive de u et une primitive de v sur I .

2. Soit h la fonction définie sur I par : $h(x) = \frac{x}{(2x+1)^3}$.

(a) Montrer que pour tout $x \in I$, $h(x) = \frac{1}{2(2x+1)^2} - \frac{1}{2(2x+1)^3}$.

(b) Déterminer l'ensemble des primitives H de h sur I .

(c) En déduire la primitive G de h sur I qui prend la valeur 4 en -1 .

Exercice 1.2.11.

Soit $f(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2}$.

- Déterminer la primitive de f qui s'annule en 1.
- Soit $g(x) = \frac{1}{\sqrt{4x+8}}$.
 - Sur quel intervalle g admet-elle des primitives ?
 - Déterminer la primitive de g qui prend la valeur 4 en 2.
- Soit $h(x) = \frac{1}{x}$.
 - Déterminer un intervalle I sur lequel h admet des primitives.
 - Préciser dans ce cas l'ensemble des primitives de h sur I .

Exercice 1.2.12.

- Soit la fonction définie par $f(x) = \frac{8x}{(x^2-4)^2}$.
 - Prouver qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{2, -2\}$, on ait :

$$f(x) = \frac{a}{(x-2)^2} + \frac{b}{(x+2)^2}.$$
 - Déduire de 1.a) les primitives sur $] -2; 2[$ de f .
- Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{x-2}{x^2-4x+3}$
 - Déterminer toutes les primitives de g .
 - En déduire la primitive G_0 de g qui prend la valeur 1 en 0.

Problème 1.2.1. DE SYNTHÈSE N°1

Soit la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$$\begin{cases} f(x) = xe^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = x \ln(1+x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

Le plan est munie d'un repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2 cm). On désignera par (C_f) la courbe représentative de f et (Δ) la droite d'équation $y = x$.

Partie A

- Montrer que f est continue en $x_0 = 0$.
 - Étudier la dérivabilité de f en 0.
- Montrer que pour $x < 0$, $f'(x) > 0$, $f'(x) > 0$.
 - Étudier les variations de f' sur $[0; +\infty[$. En déduire que pour $x > 0$, $f'(x) > 0$.
 - Dresser le tableau de variation de f .
- Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right)$ (on pourra poser $u = \frac{1}{x}$).
 - Montrer que $(D) : y = x + 1$ est asymptote à (C_f) au voisinage de $-\infty$. On admettra que (C_f) est au dessous de (D) .
- Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe (C_f) en $+\infty$.
 - Construire (C_f) , on précisera les coordonnées de I , point d'intersection de (C_f) et (Δ) pour $x > 0$.

Partie B :

1. Déterminer les réels a , b et c tels que pour tout x de $\mathbb{R}^+$: $\frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}$.
2. En déduire au moyen d'une intégration par partie que la fonction F telle que :
 $F(X) = \frac{(x^2-1)\ln(1+x)}{2} - \frac{1}{4}(x^2 - 2x)$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}^+$.
3. Calculer l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par (Δ) , (C_f) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = e - 1$.

Partie C :

1. (a) Montrer que f admet une bijection réciproque notée f^{-1} .
(b) f^{-1} est-elle dérivable en 0 ?
(c) Préciser la nature de la tangente en 0 à la courbe représentative de f^{-1} .
2. Construire $(C_{f^{-1}})$ courbe représentative de f^{-1} dans le repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$.
3. Déduire du B.3) l'aire du domaine (D) ensemble des points $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tel que $\begin{cases} 0 \leq x \leq e - 1 \\ f(x) \leq y \leq f^{-1}(x) \end{cases}$.

QUI CHERCHE TROUVE. IL FAUT CONTINUER À TRAVAILLER!!!

1.3 Étude de fonctions

1.3.1 Fonctions polynômes, rationnelles et trigonométriques

Exercice 1.3.1.

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 + \sqrt{4x^2 + 4} & \text{si } x \leq 0 \\ x + 1 + \frac{x}{1+x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \text{et } C_f \text{ sa courbe.}$$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f .
2. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
3. Étudier les branches infinies de C_f .
4. Tracer C_f dans un repère orthonormal.

Exercice 1.3.2.

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin^2 x \cos^2 x$.

1. Étudier la parité et la périodicité de f .
 - (a) En déduire qu'on peut réduire le domaine d'étude à $[0; \pi]$.
 - (b) Montrer que la droite $\Delta : x = \frac{\pi}{2}$, est un axe de symétrie pour la courbe de f sur $[0, \pi]$
2. Montrer que la droite $f(x) = \sin^2 x - \sin^4 x$ pour tout réel x .
3. (a) Montrer que $f(x) = 2 \sin x \cos x (1 - 2 \sin^2 x)$.
 (b) Dresser le tableau de variation de f sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.
4. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x)}{(1 - \cos x) \cos 2x}$.

Exercice 1.3.3.

Soit la fonction numérique f définie par : $\begin{cases} \frac{x^2+x-4}{x-1}; & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 - 2x + 4; & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

(C_f) sa courbe représentative dans un même repère orthonormal $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

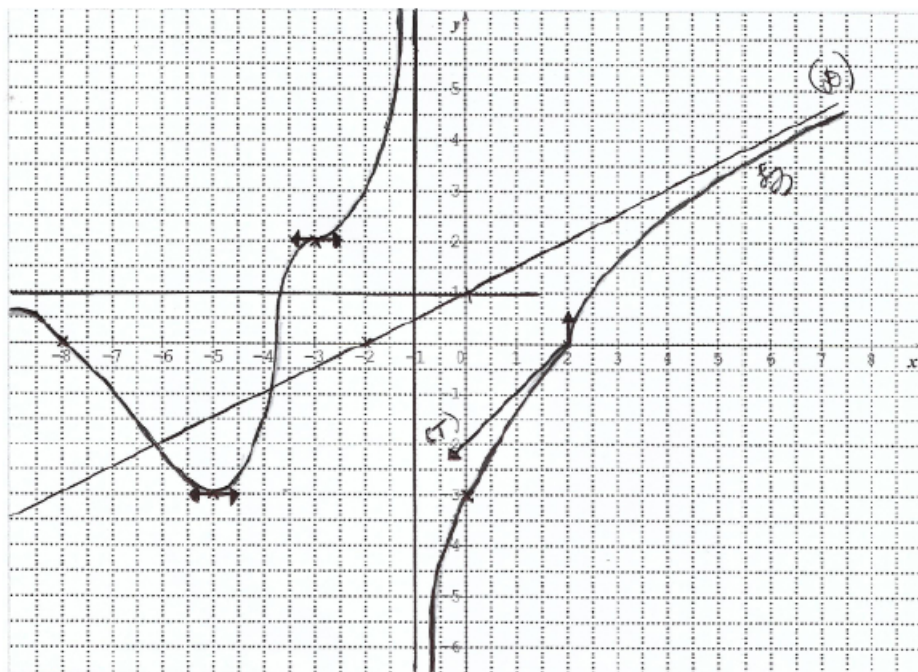
1. (a) Démontrer que $D_f = \mathbb{R}$.
 (b) Calculer les limites aux bornes de D_f .
2. (a) Étudier la continuité de f en 0.
 (b) Étudier la dérivabilité de f en 0 puis interpréter géométriquement les résultats.
3. (a) Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour $x < 0$.
 (b) Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour $x > 0$, puis montrer que pour tout $x > 0$
 $f'(x) = (x+1)^2(x-2)$.
4. Étudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.
5. Soit g la restriction de f à $I =]-\infty; 0[$. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur I et $-2,6 < \alpha < -2,5$.
6. (a) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x + 2$ est une asymptote à (C_f) en $-\infty$.

(b) Étudier l'autre branche infinie.

(c) Construire (C_f) .

Exercice 1.3.4.

Soit f une fonction numérique et (C_f) sa représentation graphique dans un repère orthonormal (voir figure ci-dessous).



1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Déterminer les limites aux bornes du domaine de définition de f .
3. Donner toutes les équations des asymptotes de la courbe de f .
4. Déterminer le nombre de solution(s) de l'équation $f(x) = 0$.
5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = -\frac{3}{2}$.
6. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$.
7. (a) f est-elle dérivable en 2 ? justifier votre réponse.
(b) Déterminer le domaine de continuité et le domaine de dérivabilité de f .
8. Que représente le point d'abscisse -3 pour (C_f) ? Donner la valeur de $f''(-3)$.
9. Dresser le tableau de variations de f .

Exercice 1.3.5.

On considère la fonction f définie par :
$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & \text{si } x \in]-\infty; -1] \\ \frac{x^2 - x - 2}{x - 1} & \text{si } x \in]-1; 2] \\ x - \sqrt{x + 2} & \text{si } x \in]2; +\infty[\end{cases}$$

1. (a) Prouver que l'ensemble de définition D_f de f est $\mathbb{R} - \{1\}$.

- (b) Étudier la continuité de f en -1 et en 2 .
2. (a) Montrer que f est dérivable en -1 et écrire une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse -1 .
- (b) Étudier la position relative de (T) de (C_f) .
- (c) Étudier la dérivabilité en 2 . Interpréter géométriquement les résultats obtenus.
3. (a) Calculer les limites de f aux bornes de D_f .
- (b) en déduire l'existence d'une asymptote dont on précisera une équation.
- (c) Étudier les branches infinies de (C_f) .
4. (a) Calculer $f'(x)$ sur les intervalles où f est dérivable. Dresser le tableau de variation de f .
- (b) Construire (C_f) .
5. Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I =]1; +\infty[$.
- (a) Montrer que g admet une bijection réciproque g^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition.
- (b) En justifiant, déterminer l'ensemble de dérivabilité de g^{-1} .
- (c) Dresser le tableau de variation de g^{-1} .
- (d) Calculer $(g^{-1})'(4)$.
- (e) Dans le même repère que (C_f) , construire $(C_{g^{-1}})$.

Exercice 1.3.6.

On considère la fonction f définie par :
$$f(x) = \begin{cases} x + 2 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{2x + |x^2 - 4|} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f puis écrire $f(x)$ sans le symbole valeur absolue.
2. (a) Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0 et 2 .
- (b) Interpréter le résultat du a).
3. (a) Déterminer les limites aux bornes de D_f .
- (b) Étudier les branches infinies de la courbe (C_f) .
4. Calculer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f .
5. Démontrer que sur $] -\infty; 0[$ l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $\alpha \in [-1, 3; -1, 2]$.
6. On pose $h = f$ dans $[2; +\infty[$ (restriction de f à l'intervalle $[2; +\infty[$).
- (a) Montrer que h réalise une bijective de $[2; +\infty[$ vers un intervalle J à préciser.
- (b) Étudier la dérivabilité et les variations de h^{-1} .
- (c) Calculer $(h^{-1})'(\frac{5}{2})$.
- (d) Tracer (C_f) et $(C_{h^{-1}})$ dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$. (unité graphique 2cm).

Exercice 1.3.7.

Soit h la fonction donnée par :
$$\begin{cases} h(x) = \frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x+1} & \text{si } x < -1 \\ h(x) = (x+1)\sqrt{\left|\frac{1+x}{1-x}\right|} - 3 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}.$$

1. Déterminer les domaine de définition de h . Écrire h sans barres de valeurs absolue.

2. Calculer les limites de h en $R -\infty, -1^+, -1^-$ et $+\infty$.
3. Étudier la continuité et la dérivabilité de h en -1^+ . Interpréter graphiquement le résultat.
4. Calculer $h'(x)$ sur l'intervalle où h est dérivable.
5. Montrer que $h'(x) < 0 \forall x \in]-\infty, 1[\cup]1, 2[$. En déduire le tableau de variation de h .
6. Montrer que la droite D d'équation $y = x - 1$ est une asymptote à la courbe de h en $+\infty$ puis étudier la position de g par rapport à D sur $]0, 1[\cup]2, +\infty[$. Préciser les autres asymptotes.
7. Tracer les asymptotes, les demi-asymptotes, tangentes et la courbe de h dans un repère.
8. Soit g la restriction de h à $] -\infty, -1[$.
 - (a) Montrer que g admet une bijection de $] -\infty, -1[$ sur un intervalle J à préciser.
On note g^{-1} la réciproque de g . Déterminer $g^{-1}(x)$.
 - (b) Sans calculer $g^{-1}(x)$ explicitement, calculer $(g^{-1})'(\sqrt{2})$.
 - (c) Tracer la courbure de g^{-1} sur la figure précédente.

Exercice 1.3.8.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} 2x - 3 + 2\sqrt{x^2 + x} & \text{si } x \geq 0 \\ x + 1 - \frac{4}{(x+1)^2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$, D_f son domaine de définition (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1cm).

Partie A :

1. Déterminer D_f .
2. Étudier la continuité de f en 0.
3. Calculer les limites de f aux bornes de D_f . Interpréter graphiquement ces résultats.
4. (a) Montrer que $(\Delta) : y = 4x - 2$ est une asymptote oblique à (C_f) en $+\infty$.
Étudier la position de (C_f) par rapport à (Δ) sur $[0; +\infty[$.
(b) Montrer que $(D) : y = x + 1$ est une asymptote oblique à (C_f) en $-\infty$.
Étudier la position de (C_f) par rapport à (D) sur $] -\infty; 0[$.

Partie B :

1. Étudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement les résultats.
2. Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$ et pour $x < 0$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$.
4. Donner le tableau de variation de f .
5. tracer (C_f) .

Partie C : Soit g la restriction de f à $I = [0; +\infty]$

1. Montrer que g est Bijective de I sur un Intervalle J à préciser.
2. En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution x_0 . Donner la valeur exacte de x_0 .
3. Soit g^{-1} la bijection réciproque de g . Calculer $(g^{-1})'(0)$.
4. Tracer (C_f) , (C_g) et $(C_{g^{-1}})$ dans le repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$ avec des couleurs différentes.

Exercice 1.3.9.

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x - \sqrt{x} & \text{si } x \in]1; +\infty[\\ \sqrt{x^2 - 3x + 3} & \text{si } x \in]-\infty; 1] \end{cases}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .
2. (a) Déterminer la nature des branches infinies de la courbe de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
(b) Étudier la position de (C_f) par rapport à son asymptote en $-\infty$.
3. (a) Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 1.
(b) Déterminer $f'(x)$ sur les intervalles où f est dérivable. Dresser le tableau de variation de f .
4. Soit g la restriction de f à l'intervalle $] -\infty; 1]$.
(a) Montrer que g réalise une bijection de $] -\infty; 1]$ vers un intervalle j que l'on précisera.
(b) Dresser le tableau de variation de la réciproque g^{-1} de g .
(c) Calculer $(g^{-1})'(\sqrt{3})$.
(d) Expliciter $g^{-1}(x)$.
5. Soit h la restriction de f à l'intervalle $[1; 4]$. Montrer que : $\forall x \in [1, 4]$ on a $\frac{1}{32} \leq h''(x) \leq \frac{1}{4}$.
En déduire que : $\forall x \in [1, 4], \frac{1}{32}(x-1) \leq h'(x) \leq \frac{1}{4}(x+20)$.
6. Dans un repère orthonormal direct, construire (C_f) et $(C_{g^{-1}})$.

Exercice 1.3.10.

Soit f la fonction donnée par : $f(x) = \begin{cases} x\sqrt{\left|\frac{x+1}{x}\right|} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^3-x^2}{x^2+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, D_f son domaine de définition et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2 cm).

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$. Écrire f sans barres de valeur absolue.
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0 et -1 .
3. Étudier les branches infinies et la position de (C_f) par rapport aux éventuelles asymptotes.
4. Calculer $f'(x)$ sur les intervalles où f est dérivable.
5. Soit $g(x) = x^3 + 3x - 2$.
(a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$.
Donner un encadrement de α par deux entiers consécutifs.
(b) En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.
6. (a) Montrer que $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$ sur $]0; +\infty[$.
(b) Établir le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
7. Tracer les droites remarquables puis (C_f) .

Problème 1.3.1. DE SYNTHÈSE N°2

Soit f la fonction de variable réelle définie par : $f(x) = \frac{x^2-3x+6}{x-2}$.

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2 cm.

1. Déterminer les réels a , b et c tel que : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$, $\forall x \in D_f$.
2. Dresser le tableau de variation de f .
3. Montrer que (C_f) admet deux asymptotes (D) et (D') dont l'une (D) est oblique.
Étudier les positions relatives de (D) et (C_f) .
4. (a) Donner une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse $x_0 = 1$.
(b) Existe-t-il des points de (C_f) où la tangente est perpendiculaire à l'asymptote oblique (D) ? Si oui, donner des équations de ces tangentes.
5. Vérifier que pour tout x de D_f on a $f(4-x) + f(x) = 2$ et interpréter graphiquement.
6. Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I =]0; 2[$.
(a) Montrer que $g : I \rightarrow J$ réalise une bijection où J est un intervalle que l'on déterminera.
(b) Dresser le tableau de variations de g^{-1} .
(c) Calculer $(g^{-1})'(-4)$. Donner, par deux méthodes différentes l'équation de la droite (T') tangente à (C_g) courbe de g^{-1} au point d'abscisse $x_0 = -4$.
7. (a) Tracer les courbes (C_f) et (C_g) .
(b) Discuter graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m , le nombre de solutions de l'équation $x^2 - (3+m)x + 6 + 2m = 0$. Retrouver ces résultats algébriquement.

Problème 1.3.2. DE SYNTHÈSE N°3

Partie A

Soit la fonction numérique définie par $g(x) = x^3 - 3x - 4$

1. Dresser le tableau de variation de g .
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que $2 \leq \alpha \leq 3$.
3. Donner le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = \frac{x^3+2x^2}{x^2-1}$ et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

1. (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +1^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +1^+} f(x)$
(b) Interpréter graphiquement les limites précédentes.
2. (a) Montrer que $\forall x \in D_f$, $f(x) = x + 2 + \frac{x+2}{x^2-1}$.
(b) En déduire que la courbe (C_f) admet une asymptote oblique (Δ) à préciser puis étudier la position relative de (C_f) et (Δ) .
(c) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
3. Montrer que $\forall x \in D_f$, $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$. En déduire le signe de $f'(x)$ sur D_f (on pourra utiliser 3.A.).
4. Dresser le tableau de variation de f .
5. Déterminer les points de (C_f) où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x + 2$.

6. Donner une équation de la tangente de (C_f) en $x_0 = -2$.
7. Construire la courbe (C_f) .
8. Soit h la restriction de f sur l'intervalle $I =]-\infty; -1[$.
 - (a) Montrer que h réalise une bijection de I sur un intervalle J à préciser.
 - (b) Calculer $(h^{-1})'(0)$.

Problème 1.3.3.

Partie A :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + 3x - 2$.

1. Etudier les variations de g puis dresser son tableau de variations.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que $1 < \alpha < 2$.
3. En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B :

Soit f la fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^3 - x^2}{x^2 + 1} & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = x + \sqrt{x^2 - x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f puis calculer les limites aux bornes de D_f .
2. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. Interpréter les résultats.
3. (a) Montrer que la droite $(D) : y = x - 1$ est asymptote oblique à (C_f) en $+\infty$.
(b) Etudier la position relative de (C_f) par rapport à (D) sur $[0; +\infty[$.
4. Montrer que $f(\alpha) = -\frac{\alpha^2 + 3\alpha - 2}{\alpha^2 + 1}$.
5. Calculer $f'(x)$ sur les intervalles où f est dérivable.
6. Montrer que $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$ sur $[0; +\infty[$.
7. Etablir le tableau de variations de f .
8. Construire (C_f) . (unité 2cm)

Partie C :

Soit h la restriction de f à l'intervalle $I =]-\infty; 0[$.

1. Montrer que h réalise une bijection de I vers un intervalle J à préciser.
2. Soit h^{-1} la bijection réciproque de h .
 - (a) h^{-1} est-elle dérivable sur J ?
 - (b) Calculer $h(-1)$.
 - i. h^{-1} est-elle dérivable en $-1 + \sqrt{2}$?
 - ii. Calculer $(h^{-1})'(-1 + \sqrt{2})$.
 - (c) Donner le tableau de variations de h^{-1} .
 - (d) Tracer $C_{h^{-1}}$.
 - (e) Expliciter $h^{-1}(x)$, pour $x \in J$.

« L'ignorant affirme, le savant doute, le sage réfléchit » Aristote

BON COURAGE

1.3.2 Fonctions logarithme népérien

Exercice 1.3.11.

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

- a)** $\ln(x^2 - 2x - 2) = 1$; **b)** $\ln(-x) + \ln(x + 1) = \ln(x^3 - 1)$;
c) $2(\ln|x|)^2 - \ln|x| + 5 = 0$; **d)** $-(\ln(-x^2 + 1))^2 - \ln(-x^2 + 1) + 6 = 0$
e) $\ln(x^2 - 1) - \ln(x + 3) = \ln(x^2 - 3x + 2)$; **f)** $\ln(\ln x) > 0$
g) $\ln(-2x + 5) > e$; **h)** $\ln(x + 1) \leq \ln(x + 2) + \ln(x^2 - 1)$;
i) $-2(\ln 2x)^2 + 5 \ln 2x - 3 > 0$.

Exercice 1.3.12.

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

- a)** $\begin{cases} \ln|x-1| + \ln|y+3| = 1 \\ 7\ln|x-1| - 6\ln|y+3| = 2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \ln(xy) = 6 \\ \ln x \ln y = \ln 5 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ \ln x + \ln y = \ln 3 \end{cases}$.

Exercice 1.3.13.

Donner le tableau de variation des fonctions suivantes dans chacun des cas suivants :

- a)** $f(x) = \ln\left(\frac{3x+1}{x-3}\right)$ **b)** $f(x) = \ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right|$ **c)** $f(x) = x \ln(x-1)$ **d)** $f(x) = \ln(\ln(|x-1|))$
e) $f(x) = \frac{\ln|x|+2}{\ln|x|-1}$ **f)** $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 1)$ **g)** $f(x) = x^2 \ln(x+1)$ **h)** $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ **i)** $f(x) = \frac{\ln x + 1}{\ln x}$.

Exercice 1.3.14.

- Dans chacun des cas suivants, préciser l'ensemble de dérivabilité de la fonction f , puis déterminer sa dérivée.
a) $f(x) = x \ln|x|$ **b)** $f(x) = \sqrt{\ln x}$ **c)** $f(x) = \ln^2 x$ **d)** $\sqrt{x} \ln x$
e) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ **f)** $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ **g)** $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ **h)** $f(x) = \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x}$.
- Dans chacun des cas suivants, préciser l'ensemble de dérivabilité de la fonction f , puis déterminer sa dérivée.
a) $f(x) = \ln(-x)$ **b)** $f(x) = \ln(2x + 1)$ **c)** $f(x) = \ln \sqrt{x}$ **d)** $f(x) = \ln(2x^2 - 3x + 4)$
e) $f(x) = \ln \frac{2}{x}$ **f)** $f(x) = \ln \frac{x+1}{x-2}$ **g)** $f(x) = \ln \left| \frac{x-2}{x+4} \right|$ **h)** $f(x) = \cos(\ln x)$.
- Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = (x-1)^2, & \text{si } x < 1 \\ f(x) = \ln x, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$
 - Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
 - Étudier la dérivabilité de f en 1.
Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- Soit g la fonction définie par :

$$\begin{cases} g(x) = 3x^2 + 2x + 1, & \text{si } x < 0 \\ g(x) = x + 1 + \ln(x + 1), & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$
 - Démontrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.
 - Étudier la dérivabilité de g en 0.
Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

5. Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x \ln |x|, & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

- (a) Justifier que f est continue en 0.
- (b) Démontrer que f est impaire.
- (c) Étudier f et tracer sa courbe représentative.

Exercice 1.3.15.

Soit $g(x) = 2x^3 + x^2 + \ln x$

1. Dresser le tableau de variations de g .
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α puis vérifier que $0,5 < \alpha < 0,6$.
3. Soit $f(x) = x^2 + x - \frac{1+\ln x}{x}$.
 - (a) Étudier les branches infinies de C_f .
 - (b) Dresser le tableau de variations de f puis tracer C_f .

Exercice 1.3.16.

Soit f la fonction définie par $f(x) = 2x + (1 - 2x) \ln x$.

1. On considère la fonction g définie : $g(x) = \frac{1}{x} - 2 \ln x$.
 - (a) Étudier les variations de g .
 - (b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α . Donner un encadrement à 10^{-2} près de α .
 - (c) Dédire des questions précédentes le signe de $g(x)$.
2. (a) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe. Donner le tableau de variations de f .
 - (b) Montrer que $f(\alpha) = 2\alpha + \frac{1}{2\alpha} - 1$. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.
 - (c) Construire C_f courbe de f .

Exercice 1.3.17.

On considère la fonction h définie : $h(x) = x^2 + 2x + \ln |x + 1|$.

Partie A

1. Étudier les variations de h . Calculer $h(0)$ et $h(-2)$.
2. En déduire le signe de h pour $x \in]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$.

Partie B

On considère la fonction f définie : $f(x) = \frac{\ln |x+1|}{x+1} - x$.

1. Montrer pour tout réel x de D_f , $f'(x) = -\frac{h(x)}{(x+1)^2}$. En déduire le signe de $f'(x)$.
2. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition D_f .
Dresser le tableau de variation de f .

3. Montrer que la droite D d'équation $y = -x$ est asymptote à la courbe C_f de f .
En déduire la position relative de C_f et D .
4. Montrer que le point $I(-1, 1)$ est un centre de symétrie de C_f .
5. Tracer la courbe C_f dans un repère orthonormé.

Exercice 1.3.18.

1. On considère la fonction f définie par
$$\begin{cases} f(x) = \ln(-x + 2) & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = \ln|x^2 - 1| & \text{si } x > 0. \end{cases}$$
 - (a) Déterminer l'ensemble de définition de f . Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
 - (b) Étudier les variations de f . Donner le tableau de variation de f .
 - (c) Déterminer les points d'intersection de C_f avec les axes de coordonnées.
 - (d) Montrer qu'il existe un unique point A de C_f où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = -x$; donner une équation de cette tangente T .
2. Soit h la restriction de C_f sur l'intervalle $[0, 1[$.
 - (a) Montrer que h admet une bijection réciproque h^{-1} dont on dressera le tableau de variation.
 - (b) h^{-1} est-elle dérivable en 0 ? En $\ln \frac{3}{4}$? Si oui donner leur nombre dérivés.
 - (c) Expliciter $h^{-1}(x)$. Tracer C_f et $(C_{h^{-1}})$.

Problème 1.3.4. DE SYNTHÈSE N°4

On considère la fonction numérique g définie sur $I = [-\frac{1}{2}, +\infty[$ par $g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$.

1. Démontrer que $g'(x) = \frac{-x^3}{1+x} \forall x \in I$.
2. Dédurre de 1) que $\forall x \in I$ on a
$$\begin{cases} -2x^3 \leq g'(x) \leq 0 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 \leq g'(x) \leq -2x^3 & \text{si } -\frac{1}{2} \leq x \leq 0 \end{cases}$$

En déduire que $\forall x \in I, -\frac{1}{2}x^4 \leq g(x) \leq 0$.
3. On considère la fonction numérique f définie sur $] -1; +\infty[$ par
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$
. On note C_f sa courbe représentative.
 - (a) Vérifier que $\forall x \geq -\frac{1}{2}$ et $x \neq 0$, on a $f(x) = -\frac{g(x)}{x^2} + \frac{1}{2} - \frac{x}{3}$.
 - (b) En utilisant l'ingalité trouvée au 2) démontrer que f dérivable en 0 et déterminer une équation de la tangente (T) à C_f au point d'abscisse 0.
 - (c) f est elle continue en 0 ? Justifier votre réponse.
4. Soit h la fonction définie sur $] -1, +\infty[$ par $h(x) = \frac{-x^2 - 2x}{1+x} + 2 \ln(1+x)$
 - (a) Étudier le sens de variation de h .
 - (b) Calculer $h(0)$ et en déduire le signe de h sur $] -1, +\infty[$.
 - (c) Démontrer que $\forall x \in] -1, 0[\cup] 0, +\infty[$ on a $f'(x) = \frac{h(x)}{x^3}$.
 - (d) Dresser le tableau de f et calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
 - (e) Construire dans un repère C_f et (T)

Problème 1.3.5. DE SYNTHÈSE N°5

I. Soit f la fonction numérique définie par

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} & \text{si } x \in]-\infty; 0] \\ f(x) = \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| & \text{si } x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[\end{cases}$$

1. Préciser le domaine de définition de f .
2. f est-elle continue au point d'abscisse 0.
3. (a) Montrer que, pour $0 < x < 1$, on a : $\frac{f(x)}{x} = \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x}$.
(b) Étudier la dérivabilité de f en 0.
(c) En déduire que (C_f) admet au point d'abscisse 0, deux demi-tangentes dont on donnera les équations.
(d) Étudier le signe de $f(x) - 2x$ sur $] -\infty; 0]$. Quelle conséquence graphique peut-on en tirer ?
4. Calculer les limites aux bornes de Df ; puis étudier le signe de $f'(x)$. En déduire le tableau de variation de f .
5. Tracer (C_f) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

II. Soit g la restriction de f à $]0; 1[$

- (a) Montrer que g est une bijection de I sur intervalle J à préciser.
- (b) Tracer (C_f) dans le même repère.

Problème 1.3.6. DE SYNTHÈSE N°6

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} \sqrt{|x^2 + x|} & \text{si } x < 0 \\ \ln(x+1) + x^2 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

1. Montrer l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.
2. (a) Écrire $f(x)$ sans valeur absolue.
(b) Étudier la continuité de f en 0 et -1 .
(c) Étudier la dérivabilité de f en 0 et -1 .
(d) Interpréter graphiquement les résultats obtenus en 2. (c).
3. Calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
4. Montrer que la droite d'équation $y = -x - \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe (C_f) de f quand $x \rightarrow -\infty$.
Préciser la direction de la branche infinie (C_f) en $+\infty$.
5. Calculer $f'(x)$ sur $] -\infty, -1[$ et sur $] -1, 0[$ puis étudier son signe sur $] -\infty, -1[$ et sur $] -1, 0[$.
6. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
7. Représenter la courbe (C_f) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$: Unité 2 cm.

Problème 1.3.7. DE SYNTHÈSE N°7**PARTIE A**

Le but de cette partie est d'étudier la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x \ln x}{x+1} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
2. (a) Soit φ la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $\varphi(x) = \ln x + x + 1$.
Étudier les variations de φ . Établir que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution β et une seule, et que $0,27 \leq \beta \leq 0,28$. (on ne demande pas dce construire la courbe représentative de φ .)
(b) Pour $x > 0$, expression $f'(x)$ à l'aide de $\varphi(x)$. En déduire les variations de f .
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$, puis la limite de $\ln x - f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
4. Construire les courbes représentatives (C_f) de f et (σ) de $x \rightarrow \ln x$ dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ l'unité graphique 4 cm.

PARTIE B

On se propose d'étudier l'équation $f(x) = 1$.

A cet effet on introduit la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = e \cdot e^{\frac{1}{x}}$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution α et une seule, et que $3,5 \leq \alpha \leq 3,7$.
Placer le point C d'abscisse α .
2. (a) Prouver que l'équation $f(x) = 1$ équivaut à l'équation $g(x) = x$.
(b) Étudier la monotonie de g .
(c) Prouver que pour tout élément x de $[3,5; 3,7]$, $g(x)$ appartient aussi à $[3,5; 3,7]$.
(d) Établir que pour tout élément x de $[3,5; 3,7]$: $|g'(x)| \leq |g'(3,5)| \leq \frac{1}{3}$.
En déduire que : $|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{3}|x - \alpha|$.
3. Soit (U_n) la suite d'éléments de $[3,5; 3,7]$ définie par la relation de récurrence $U_{n+1} = g(U_n)$ et la condition initiale $U_0 = 3,5$.
(a) Montrer que pour tout entier $n \geq 0$: $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^n}$.
(b) Donner une valeur décimale approchée de α à 10^{-3} près.

PARTIE C

On se propose d'étudier l'équation $f(x) = n$ où n est un entier naturel non nul.

1. Montrer, pour tout n , cette équation admet une solution α_n et une seule. (En particulier $\alpha_1 = \alpha$).
2. Comparaison de α_n à e^n .
(a) Établir que $f(e^n) \leq n$. En déduire que $\alpha_n \geq e^n$.
(b) Prouver que la relation $f(\alpha_n) = n$ peut s'écrire sous la forme :

$$\ln \left(\frac{\alpha_n}{e^n} \right) = \frac{n}{\alpha_n}. \quad (1.1)$$

- (c) En déduire, à l'aide de 2.(a), la limite de $\frac{\alpha_n}{e^n}$ lorsque n tend vers l'infini.

QUI CHERCHE TROUVE. IL FAUT CONTINUER À TRAVAILLER!!!

1.3.3 Fonctions exponentielles

Exercice 1.3.19.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

$$\begin{array}{lll} a) e^{-x}(e^{2x} - 4) = 0 & b) (e^x - 2)(e^{-x} + 1) = 0 & c) e^{2x-1} - e^{4x-5} = 0 \\ d) e^{2x} - 2e^x - 3 = 0 & e) 2e^x - 2e^{-x} - 3 = 0 & f) e^{2x} \times e^{x+1} = e^3 \\ g) \frac{e^x+3}{2e^x-7} = 1 & h) \frac{e^x-2}{e^x+3} = 4 & i) e^{2x} + 2e^x - 3 = 0 \\ j) 3e^{2x} + e^x - 10 = 0 & k) 2e^{2x} - 11e^x + 15 = 0 & l) e^{3x-2} + \frac{e}{e^{3x+2}} = e + 1. \end{array}$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

$$\begin{array}{lll} a) e^{4x} - 2e^{3x} - 9e^{2x} + 18e^x = 0 & b) 6e^{5x+2} - 7\sqrt{e^{8x+4}} + e^{3x+2} = 0 & c) e^{4x+2} - \frac{e^2}{e^{4x+2}} = e^2 - 1 \\ d) 2^{3x+1} - 2^{2x} - 2^{x+3} + 4 = 0 & e) 2^{x+2} + 4^{x-1} = 224 & f) 5^{2x-1} + 3^x + 25^{x+\frac{1}{2}} - 9^{\frac{x}{2}+1} = 0 \\ g) e^{4-\ln x} = x & h) \ln(e^x + 10) = 1 & i) \ln(2e^x + 1) = 1 \\ j) \ln(2^{3x} - 3e^{2x}) = \ln(3e^x - 2) & k) 2x = \ln(3e^x - 2) & l) \sqrt{e^{2x} - 3} = \sqrt{3 - e^x} \end{array}$$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes suivants.

$$\begin{array}{lll} a) \begin{cases} 4e^x - 3e^y = 9 \\ 2e^x + e^y = 7 \end{cases} & b) \begin{cases} 5e^x - e^y = 19 \\ e^{x+y} = 30 \end{cases} & c) \begin{cases} e^x \times e^{2y-1} = 1 \\ e^{x+2} \times e^y = e \end{cases} \\ d) \begin{cases} e^{2x} - 7e^{y+1} = -10 \\ x - y = 1 \end{cases} & e) \begin{cases} \ln x + \ln 4 = \ln 3 - \ln y \\ e^x = e^{2-y} \end{cases} & f) \begin{cases} e^x e^y = 10 \\ e^{x-y} = \frac{2}{5} \end{cases} \\ g) \begin{cases} \ln(3x + 4y) - \ln 7 = \ln(2 - 5x) + \ln 5 \\ e^{x-2} e^{y+3} = 1 \end{cases} & h) \begin{cases} \log_{2(-x+2y)} + 1 = \log_{2^{2x-3y+4}} \\ 3^{5x+y} \times 3^{-x-6y} = 81 \end{cases} \\ i) \begin{cases} e^{x+\ln 2} + e^{y+\ln 5} = 16 \\ e^{x+\ln 3} + e^{y+\ln 3} = 15 \end{cases} & & \end{array}$$

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

$$\begin{array}{ll} a) e^{-x} \geq 2 & b) e^{-x^2} < 1 \\ c) e^{x^2-3} \leq e^{2x} & d) 2e^x - 5e^x + 2 > 0. \end{array}$$

Exercice 1.3.20. . .

PARTIE A

Soit g la fonction définie par $g(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}} - 1$

1. Dresser le tableau de variation de g .
2. En déduire le signe de $g(x)$ sur $] -\infty; 0[$.

PARTIE B

Soit f la fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = x \left(1 - e^{\left(\frac{1}{x}\right)}\right) & \text{si } x < 0 \\ f(x) = x(1 - \ln x)^2 + x & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

On note (C_f) la courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, unité 1 cm.

1. Montrer que f est définie dans $\mathbb{R}$.

2. Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
3. (a) Étudier la continuité de f en 0.
(b) Étudier la dérivabilité de f en 0 puis interpréter graphiquement les résultats.
4. Étudier les branches infinies de (C_f) .
5. Étudier les variations de f et dresser le tableau de variation de f .
6. Déterminer l'intersection de (C_f) par rapport à $(\Delta) : y = x$ pour $x \in]0; +\infty[$.
7. Tracer (C_f) .
8. Calculer l'aire $A(\alpha)$ du domaine délimité par la courbe (C_f) , la droite (Δ) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = e$ et $x = \alpha$, ($\alpha > e$).
9. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} A(\alpha)$.

Exercice 1.3.21. .

PARTIE A

Soit g la fonction définie dans $]0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{x}{x-1} - \ln|x-1|$.

1. (a) Déterminer l'ensemble de définition de g .
(b) Calculer les limites de g aux bornes de D_g .
2. Déterminer g' , la fonction dérivée de g et dresser le tableau de variations de g .
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α telle que $4 < \alpha < 5$.
4. Dédire de l'étude précédente le signe de g sur D_g .

PARTIE B

On Considère la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln|x-1|}{e^{2x}+3e^x+2}, & \text{si } x > 0 \\ \frac{x}{e^{2x}+3e^x+2}, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

1. (a) Vérifier que f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et calculer les limites aux bornes de son domaine.
(b) Préciser les asymptotes à (C_f) , la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.
2. (a) étudier la continuité de f en 0.
(b) On admet que : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1-x) + x}{x} = -\frac{1}{2}$. Montrer que : $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\frac{1}{6}$.
Donner l'interprétation graphique des ces résultats.
3. (a) Montrer que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1}$.
(b) Calculer $f'(x)$ sur les intervalle où f est dérivable puis dresser le tableau de variation de f .
4. Construire (C_f) dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$ unité graphique 2 cm. On pourra prendre $\alpha \approx 4,5$.
On placera les points $-1; 0; 2$ et 5 .
5. (a) Déterminer les réels a et b tels que pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; -1\}$; On ait :

$$\frac{-6x}{x^2 + 3x + 2} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x+1}$$

(b) En déduire que : $\frac{-e^x}{e^{2x}+3e^x+2} = \frac{-12e^{-x}}{1+2e^{-x}} + \frac{6e^{-x}}{1+e^{-x}}$.

- (c) Calculer l'aire du domaine limité par (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -\ln 2$ et $x = 0$.

Exercice 1.3.22. .

PARTIE A Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par : $\begin{cases} f(x) = \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| & \text{si } x \in [0, 1[\cup]1, +\infty[\\ f(x) = x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1} & \text{si } x \in]-\infty, 0[. \end{cases}$

- Étudier la continuité de f en 0.
- (a) Montrer que pour tout $x \in]0, 1[$, $|x - 1| = 1 - x$ et

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x}$$

- (b) Étudier la dérivabilité de f en 0.
- (c) En déduire les équations des demi-tangentes à la courbe de f au point d'abscisse 0.
- Montrer que $\forall x \in]-\infty, 0[$, $f(x) = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x + 1}$.
- Calculer les limites de f aux bornes des intervalles de son ensemble de définition.
- Donner les équations des asymptotes à la courbe (C_f) de f .
- Calculer $f'(x)$ dans chacun des intervalles où f est dérivable.
- Établir le tableau de variation f .
- Tracer la courbe (C_f) (unité graphique : 2 cm).

PARTIE B

Soit g la restriction de f à l'intervalle $I =]1, +\infty[$.

- Montrer que g réalise une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle J à préciser.
- Montrer que l'équation $g(x) = -e$ admet une unique solution $\alpha \in]1, +\infty[$.
- Montrer que $\forall x \in J$, $g^{-1}(x) = 1 - \frac{2e^x}{e^x - 1}$.
- Tracer $(C_{g^{-1}})$ dans le même repère.

Exercice 1.3.23. .

PARTIE A

Soit la fonction g définie par : $g(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1} - \ln x$.

- Montrer que g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $g'(x) = -\frac{(x^2-1)^2}{x(x^2+1)^2}$. En déduire le tableau de variation de g .
- Calculer $g(1)$ puis le signe de $g(x)$ sur $]0, +\infty[$.

PARTIE B

Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = (x+1)e^{-x} + x^2 - 1 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ f(x) = \frac{x \ln x}{x^2 - 1} & \text{si } x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[\\ f(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$

- (a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
- (b) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

- (c) Préciser la nature des branches infinies de la courbe de f .
2. Étudier la continuité de f en 0 et en 1.
3. (a) Montrer que pour tout $x \in]-\infty; 0[$ on a : $\frac{f(x)}{x} = (x+1) \left(\frac{e^{-x}+x+1}{x} \right)$.
- (b) Étudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement les résultats obtenus. On admettra que f est dérivable en 1 et que $f'(1) = 0$.
- (c) Montrer que, pour tout $x \in]0, 1[\cup]1; +\infty[$ on a : $f'(x) = \frac{(x^2+1)}{(x^2-1)}g(x)$.
- (d) Déterminer la dérivée de f sur $] -\infty; 0[$.
4. Établir le tableau de variation de f .
5. Tracer la courbe de f dans un repère orthonormal (unité graphique : 2 cm).

Exercice 1.3.24. .

PARTIE A

Soit la fonction

$$U :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto U(x) = 1 + \ln x - e^{-x}$$

1. Étudier les variations de U .
2. Montrer que l'équation $U(x) = 0$ admet une solution $\alpha \in]0, 6; 0, 7[$.
3. En déduire le signe de $U(x)$.

PARTIE B

Soit la fonction f définie par
$$\begin{cases} f(x) = x \ln x + e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ f(x) = \frac{1}{|x^2-1|} e^{\frac{1}{2}x} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

1. (a) Déterminer le domaine de définition de f .
- (b) Étudier la continuité de f en 0.
- (c) Étudier la dérivabilité de f en 0, interpréter graphiquement les résultats.
2. (a) Montrer que $\forall x \in]0; +\infty[$ on a $f'(x) = U(x)$.
- (b) Pour $x \leq 0$, écrire $f(x)$ sans symbole de la valeur absolue et calculer $f'(x)$.
3. Dresser le tableau de variation de f et montrer que $f(\alpha) = 1 + (\alpha + 1) \ln \alpha$.
4. Étudier la nature de la branche infinie de (C_f) en $+\infty$.

PARTIE C

Soit h la restriction de f à l'intervalle $I = [\alpha; +\infty[$.

1. Montrer que h admet une bijection réciproque h^{-1} définie sur J à préciser.
2. h^{-1} est-elle dérivable sur J ?
3. Calculer $h(1)$ puis en déduire une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse $\frac{1}{e}$.
4. Tracer (C_f) , $(C_{h^{-1}})$ et (T) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 2 cm).
5. Calculer l'aire du domaine (D) délimité par l'axe des abscisses, par (C_f) , par l'axe des abscisses et des droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

Exercice 1.3.25.

Soit f la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x) = \ln |e^{-2x} - 2e^{-x}| & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = x \ln \left(\frac{x+2}{x} \right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. Vérifier que $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\ln 2\}$ et exprimer $f(x)$ sans valeur absolue.
2. Étudier la continuité de f en 0.
3. Étudier la dérivabilité de f en 0.
4. (a) Montrer que sur $] -\infty, -\ln 2[: f(x) = -2x + \ln(1 - 2e^x)$.
(b) En déduire l'asymptote (Δ) en $-\infty$.
(c) Étudier la position de (C_f) par rapport à (Δ) sur $] -\infty, -\ln 2[$.
5. Étudier la nature de la branche infinie en $+\infty$.
6. (a) Sur $]0; +\infty[$ calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
(b) Étudier les variations de f' sur $]0; +\infty[$ et en déduire son signe.
7. Donner le tableau de variation de f ?
8. Tracer (C_f) (unité : 1 cm).
9. Déterminer les réels a et b pour que $\frac{x}{x+2} = a + \frac{b}{x+2}$.
10. $\lambda > 1$, à l'aide d'une intégration par partie, calculer l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ du domaine délimité par (C_f) , l'axe des abscisses et les droites $x = 1$, $x = \lambda$.
11. Calculer $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\lambda)$.

Exercice 1.3.26.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (1+x)(1+e^{1-x})$.
On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, tel que $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2 \text{ cm}$.

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 - xe^{1-x}$.
Déduire des variations de g le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
(b) Étudier, pour chaque branche infinie, la direction asymptotique et l'asymptote éventuelle à (C_f) .
(c) Étudier les variations de f , et montrer que f admet une application réciproque f^{-1} , définie sur $\mathbb{R}$.
 f^{-1} est-elle dérivable en 4 ?
(d) Étudier la position de (C_f) par rapport à sa tangente au point d'abscisse 1.
(e) Construire, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les courbes (C_f) et (C_f^{-1}) (représentative de f et f^{-1}) ainsi que les droites (Δ) et (Δ') d'équations respectives $y = x + 1$ et $y = x - 1$.
3. (a) Montrer que l'on a $f(x) = x$ si et seulement si :

$$x < -1 \text{ et } \ln(-1-x) - x + 1 = 0$$

(b) Étudier la fonction

$$h :]-\infty; -1[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \ln(-1-x) - x + 1$$

En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une solution réelle unique α .

4. (a) Comparer $f(x)$ et x pour $x = -2$, puis pour $x = -1$.

En déduire que si

$$-2 \leq x \leq -1; \text{ alors } -2 \leq f^{-1}(x) \leq -1$$

.

(b) Déduire de la question précédente que si : $-2 \leq x \leq -1$ alors :

$$\frac{1}{1+2e^3} \leq (f^{-1})'(x) \leq \frac{1}{1+e^2}$$

.

(c) Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = f^{-1}(U_n) \text{ pour } n \geq 0 \end{cases}$.

i. Démontrer que : $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{1+e^2} |U_n - \alpha|$.

ii. En déduire que : $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{(1+e^2)^n} |U_0 - \alpha|$.

iii. Montrer que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente et préciser sa limite.

QUI CHERCHE TROUVE. IL FAUT CONTINUER À TRAVAILLER!!!

SUITES NUMÉRIQUES

Sommaire

2.1	Suites numériques	32
2.2	Exercices d'approfondissement	37

Notre plus grande gloire sur terre ce n'est pas de ne jamais tomber mais de nous relever à chaque fois que nous tombons. Il faut continuer à travailler!!!

2.1 Suites numériques

Exercice 2.1.1.

On donne :
$$\begin{cases} U_1 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{nU_n + 5}{n+1} \end{cases}.$$

1. Calculer les trois premiers termes de (U_n) .
2. On pose $V_n = nU_n$.
 - (a) Calculer les trois premiers termes de (V_n) .
 - (b) Montrer que (V_n) est une suite arithmétique.
 - (c) Exprimer (V_n) puis (U_n) en fonction de n .
3. Exprimer la somme suivante en fonction de n : $S_n = V_1 + V_2 + \cdots + V_n$

Exercice 2.1.2.

Soit θ un réel tel que $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. La suite (U_n) est définie par :
$$\begin{cases} U_0 = 2 \cos(\theta) \\ U_{n+1} = \sqrt{2 + U_n} \end{cases}$$

1. Calculer les trois premiers termes de la suite en fonction de n .
2. Montrer, par récurrence que pour tout entier naturel n on a $U_n = 2 \cos(\frac{\theta}{2^n})$.
3. En déduire que (U_n) est convergente ; quelle est sa limite.

Exercice 2.1.3.

Soit (U_n) définie par :
$$\begin{cases} U_0 = e \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + n^2 + n. \end{cases}$$

1. Calculer U_1 et U_2 en fonction de n .
2. Soit le polynôme du second degré P défini par : $P(x) = ax^2 + bx + c$ et la suite (V_n) définie par $V_n = P(n)$.
 - (a) Déterminer les réels a , b et c sachant que $V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n + n^2 + n$.
 - (b) Exprimer V_n en fonctions de e .
3. Montrer que la suite (W_n) définie par $W_n = U_n - V_n$ est géométrique.
4. Exprimer W_n et U_n en fonction de n et e .
5. Calculer en fonction de n la somme $S_n = \sum_{k=0}^n W_k$.

Exercice 2.1.4.

On considère les suites (U_n) et (V_n) définies par : $\begin{cases} V_0 = 1 \\ V_{n+1} = \frac{-1}{2V_n+3} \end{cases}$ et $U_n = \frac{2V_n+1}{V_n+1}$

1. Montrer que (U_n) est une suite géométrique.
2. Exprimer U_n puis V_n en fonction de n et étudier leur convergence.
3. Calculer $S_n = \sum_{k=0}^n U_k$.

Exercice 2.1.5.

1. Démontrer que : $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
2. Soit $(U_n) : \begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 2U_n + an + b \end{cases}$ où a et b sont des réels.
3. Soit $V_n = \frac{1}{3}U_n + n$
 - (a) Déterminer les nombres réels a et b pour que (V_n) soit une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
 - (b) Écrire V_n et U_n en fonction de n .
4. On pose $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$ et $T_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$
Écrire S_n et T_n en fonction de n puis calculer leurs limites.

Exercice 2.1.6.

- A) Soit n un entier naturel non nul. En utilisant un raisonnement par récurrence, démontrer que : $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
- B) Soit $(U_n) : \begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n - \frac{1}{3}n - \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$
1. Calculer U_1 et U_2 .
 2. Soit (V_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $V_n = 2U_n + n$.
Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$.
 3. Exprimer V_n puis U_n en fonction de n puis préciser leurs limites en $+\infty$.

4. Calculer $S_n = \sum_{p=0}^n V_p$ en fonction de n puis déterminer sa limite en $+\infty$.
5. En déduire $S'_n = \sum_{p=0}^n U_p$ en fonction de n puis déterminer sa limite en $+\infty$.

Exercice 2.1.7.

A) Montrer par récurrence que :

$$\sum_{p=0}^{n-1} p = \frac{n(n-1)}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{p=0}^{n-1} p^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

B) Soit la suite (U_n) définie par

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = U_n + n(n+1) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- Déterminer l'ensemble des indices de (U_n) .
- Montrer que (U_n) est une suite positive.
- Déterminer le sens de variation de (U_n) .
- (a) Montrer que pour tout $p \in \{0; 1; 2; \dots; n-1\}$, $U_{p+1} - U_p = P^2 + P$.
(b) En déduire que : $U_n = \frac{n(n^2-1)}{3}$.

Exercice 2.1.8.

Soit a un nombre réel tel que $0 < a < \frac{\pi}{4}$ et

$$(U_n) : \begin{cases} U_1 = 1 + \frac{1}{2 \sin^2 a} \\ U_{n+1} = 1 + (\cos 2a)U_n \end{cases}$$

- Montrer que $U_n > 1$.
- On pose $V_n = U_n - \frac{1}{2 \sin^2 a}$.
(a) Montrer que (V_n) est géométrique.
(b) Exprimer V_n et U_n en fonction de n et de a .
(c) Les suites (V_n) et (U_n) sont-elles convergentes ? Justifier votre réponse.
- Pour tout entier naturel montrer non nul, on pose :
 $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$
Quelle est l'expression de S_n en fonction de n et a . En déduire la limite de S_n .

Exercice 2.1.9.

On considère les suites (U_n) et (V_n) définies par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{U_n}{U_{n+1}} \end{cases}$ et $V_n = \frac{1}{U_n}$.

- Montrer que (V_n) est une suite arithmétique.

2. Exprimer V_n puis U_n en fonction de n et étudier la convergence des suites (U_n) et (V_n) .
3. Calculer $S_n = \sum_{k=0}^n V_k$.

Exercice 2.1.10.

Soit la suite définie par $\begin{cases} U_0 = 4 \\ U_{n+1} = \sqrt{2 + U_n} \end{cases}$

1. Montrer que suite U_n est minorée par 2.
 2. Vérifier que $U_{n+1} - U_n = \frac{(1+U_n)(2-U_n)}{U_{n+1}+U_n}$.
- En déduire que la suite U_n est décroissante.
3. Justifier que la suite U_n est convergente et calculer sa limite.
 4. (a) Démontrer $|U_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{4}|U_n - 2|$.
 (b) En déduire que $|U_{n+1} - 2| \leq \frac{2}{4^n}$.
 (c) Retrouver la limite de la suite U_n .
 (d) Déterminer le plus petit entier n_0 tel que $|U_{n_0} - 2| \leq 10^{-10}$.

Exercice 2.1.11.

Soit la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{20 + U_n} \end{cases}$

1. (a) Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} \ 0 \leq U_n \leq 5$.
 (b) Étudier le sens de variation de (U_n) .
 (c) En déduire que (U_n) converge vers un réel l à déterminer.
2. (a) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N} \ |U_{n+1} - 5| \leq \frac{1}{5}|U_n - 5|$.
 (b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N} \ |U_n - 5| \leq \left(\frac{1}{5}\right)^n |U_0 - 5|$.
 (c) Retrouver le réel l en 1.(c).

Exercice 2.1.12.

Soit la fonction f définie par : $g(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

1. Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une solution unique α sur $I =]0; +\infty[$.
 Montrer que $1 \leq \alpha \leq 2$.
2. Montrer que $\forall x \geq 1, |g'(x)| \leq \frac{1}{2}$.
3. En déduire que $\forall x \geq 1, |g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$.
4. Soit (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 1 + \frac{1}{\sqrt{U_n}} \end{cases}$
 (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq U_n \leq 2$.
 (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \ |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$.
 (c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N} \ |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

(d) Calculer la limite de la suite (U_n) .

Exercice 2.1.13.

On se propose d'étudier l'existence et les propriétés de la suite (U_n) définie par la donnée d'un réel U_0 et la relation pour tout $n \geq 0$, $U_{n+1} = \sqrt{\frac{1-U_n}{2}}$.

1. Montrer que la suite (U_n) existe si, et seulement si, $U_0 \in [-1, 1]$.
2. Déterminer U_0 de sorte que la suite (U_n) soit constante.

Dans la suite de l'énoncé, on posera $U_0 = \sin(\alpha_0)$, avec $\alpha_0 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

1. Justifier ce choix. Que devient (U_n) si $\alpha_0 = \frac{\pi}{6}$?
2. Établir que, pour tout $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\sqrt{\frac{1-\sin(\alpha)}{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$
3. Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $\alpha_n \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tel que $U_n = \sin(\alpha_n)$. Quelle relation y-a-t'il entre α_{n+1} et α_n ?
4. On considère la suite (β_n) de terme général vérifiant : $\beta_n = \alpha_n - \frac{\pi}{6}$. Montrer que cette suite est une suite géométrique. En déduire α_n puis U_n en fonction de n et α_0 . La suite (U_n) a-t-elle une limite ? Quelle est cette limite.

Exercice 2.1.14.

Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = (\sqrt{x^2 + 2})^{-1}$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α sur $[0; +\infty[$ puis vérifier que $\alpha \in]0, 6; 0, 7[$. Montrer que $\forall x \in [0, 1] \quad |f'(x)| \leq \sqrt{2} \times 4^{-1}$.
2. Soit (U_n) définie par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = f(U_n)$.
 - (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq U_n \leq 1$ et que pour tout $n \in \mathbb{N} \quad |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\sqrt{2}}{4} |U_n - \alpha|$.
 - (b) En déduire que $n \in \mathbb{N} \quad |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^n |U_0 - \alpha|$ puis (U_n) converge vers $\sqrt{\sqrt{2} - 1}$.

Exercice 2.1.15.

Une suite réelle $(u_n)_{n \geq 1}$ est définie par son premier terme $u_1 = 2$ et par la relation variable pour $n \geq 1$: $\ln(u_{n+1}) = \frac{1}{2} \left[\ln(u_n) + \ln\left(\frac{n}{(n+1)^2}\right) \right]$.

1. Vérifier, en utilisant les propriétés du logarithme népérien noté $\ln$, que cette suite est effectivement bien définie et que tous ses termes sont inférieurs ou égaux à 2.
2. On pose, pour $n \geq 1$, $v_n = nu_n$, puis $w_n = \ln(v_n)$. Déterminer la relation entre v_n et v_{n+1} et en déduire que la suite (w_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
3. Déterminer la limite de (w_n) et en déduire celle de (u_n) .
4. Calculer la somme $S_n = w_1 + w_2 + \dots + w_n$. En déduire une expression du produit $P_n = v_1 v_2 \dots v_n$ puis une expression du produit $Q_n = u_1 u_2 \dots u_n$.
5. Trouver les limites de S_n , P_n et de Q_n .

2.2 Exercices d'approfondissement

Exercice 2.2.1.

- Étudier les variations de la fonction f définie sur $] -1; +\infty[$ par $f(x) = 2\ln(x+1)$. Tracer sa courbe représentative (C_f) dans le repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ unité : 2 cm.
 - Démontrer que sur $[2; +\infty[$ la fonction l , définie par $l(x) = f(x) - x$, est bijectives et l'équation $l(x) = 0$ admet une solution unique λ .
- On considère la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par ;

$$\begin{cases} U_0 = 5 \\ U_{n+1} = 2\ln(1 + U_n) \end{cases}$$
- Sans faire de calcul, représenter les quatre premiers termes de la suite sur le graphique.
 - Démontrer par récurrence que pour tout n , $U_n \geq 2$.
 - Montrer que, pour tout x de l'intervalle $[2; +\infty[$, $|f'(x)| \leq \frac{2}{3}$.
 - En déduire que pour tout n , on a : $|U_{n+1} - \lambda| \leq \frac{2}{3}|U_n - \lambda|$, et que $|U_{n+1} - \lambda| \leq 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$, et que la suite (U_n) converge vers λ .
 - Déterminer le plus petit entier naturel p tel que $|U_p - \lambda| \leq 10^{-2}$. Que représente U_p pour λ .

Exercice 2.2.2.

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Soit (U_n) la suite définie par $U_0 > 0$ et, pour tout entier $n \geq 0$;
 $U_{n+1} = \frac{1}{2} \left(U_n + \frac{a}{U_n} \right)$.

- Montrer que pour tout entier n , $U_n > 0$.
- Pour quelle valeurs de U_0 la suite (U_n) est-elle constante ?
- On suppose, dans la suite du problème, que $U_0^2 - a \neq 0$.
 - Démontrer, que pour tout entier $n \geq 0$.

$$U_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2U_n} (U_n - \sqrt{a})^2$$

$$U_{n+1} + \sqrt{a} = \frac{1}{2U_n} (U_n + \sqrt{a})^2$$

- Montrer que la suite (U_n) est strictement décroissante pour $n \geq 1$. En déduire la suite (U_n) admet une limite (on ne demande pas de calculer cette limite).
- On définit la suite numérique (V_n) par : $V_n = \frac{U_n - \sqrt{a}}{U_n + \sqrt{a}}$.
 - Calculer V_{n+1} en fonction de V_n .
 - calculer V_{n+1} en fonction de V_1 et de n . En déduire la limite de la suite (V_n) .
 - Trouver la limite de la suite (U_n) .

Exercice 2.2.3.

Soient $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites numériques définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_n = \frac{y_{n-1}}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} y_0 = 2 \\ y_n = \frac{3}{4}x_{n-1} + \frac{1}{2}y_{n-1} \end{cases}$$

1. Soit $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $V_n = x_n + y_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - (a) Montrer que $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une géométrie.
 - La suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle convergente ?
 - (b) Démontrer par récurrence sur n que : $x_n > 0$ et $y_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. On considère la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $U_n = \frac{x_n}{y_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Démontrer qu'elle vérifie : $U_n = \frac{1}{3U_{n+2}}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
3. Soit $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $W_n = \frac{U_n - \frac{1}{3}}{U_n + 1}$.
 - (a) Démontrer que $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
 - (b) Donner l'expression de $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$, puis de U_n en fonction de n .
 - (c) En déduire que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.
4. En utilisant les valeurs de $U_n = \frac{x_n}{y_n}$ et $V_n = x_n + y_n$.
 - (a) Donner les expressions de x_n et y_n en fonction de n .
 - (b) En déduire les limites des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Problème 2.2.1. DE SYNTHÈSE N°8

Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$g(x) = \frac{2x}{1+x} - \ln(1+x)$$
PARTIE A

1. Étudier les variations de g .
2. Sachant qu'à 10^{-3} près $\ln 4 = 1,386$ et $\ln 5 = 1,609$, démontrer qu'il existe un réel unique α vérifiant $3 < \alpha < 4$ et $g(\alpha) = 0$.
3. Construire la courbe représentative $(\mathcal{J})$ de g dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (on prendra $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2 \text{ cm}$).
4. (a) Calculer, en fonction de α , l'aire $A(\alpha)$ de l'ensemble des point M du plan P dont les coordonnées (x, y) vérifient : $\begin{cases} 0 < x < \alpha \\ 0 < y < g(x) \end{cases}$. On remarquera que toute expression de la forme $\frac{ax+b}{x+1}$ peut être mise sous la forme $\gamma + \frac{\beta}{x+1}$.
(b) Exprimer $A(\alpha)$ rationnellement en fonction de α .

PARTIE B

1. Soit $x_1 \in]3, \alpha[$, et M_1 le point de $(\mathcal{J})$ d'abscisse x_1 .
(a) Écrire l'équation de la tangente à $(\mathcal{J})$ en M_1 .

- (b) On désigne par x_2 l'abscisse du point d'intersection de T et de l'axe des abscisses. En déduire l'expression de x_2 en fonction de x_1 , $g(x_1)$ et $g'(x_1)$.
2. (a) Démontrer que l'on a $h'(x) = \frac{g''(x)g(x)}{[g'(x)]^2}$.
- (b) Calculer $g''(x)$ et étudier le signe sur $]3; \alpha[$. En déduire que h est strictement croissante sur $[3; \alpha]$.
3. Étudier le signe de $h(x) - x$ sur $[3; \alpha]$. En déduire : $3 < x_1 < x_2 < \alpha$.
4. On définit alors la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par son premier terme x_1 ($3 < x_1 < \alpha$) et la relation : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_{n+1} = h(x_n)$. On admettra que, pour tout entier naturel n non nul : $3 < x_n < \alpha$.
- (a) Démontrer que la suite (x_n) est strictement croissante.
- (b) Admettant que la suite (x_n) est convergente, que peut-on dire de sa limite ?

Problème 2.2.2. DE SYNTHÈSE N°9

PARTIE A

Soit f la fonction numérique définie sur $D =]1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$.

- Montrer que la dérivée de f garde un signe constant sur D .
- Étudier la fonction f (sens de variation, limites aux de D).
- En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $]1; 2[$.

PARTIE B

- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a même ensemble de solution que l'équation, $1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = x$. On appelle g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = 1 + \sqrt{x}$, soit α la solution dans $]1; 2[$ de $f(x) = 0$, montrer que $g(\alpha) = \alpha$.
- (a) Montrer que x est éléments de $]1; 2[$, alors $g(x)$ appartient aussi à $]1; 2[$.
- (b) Justifier la dérivabilité de g sur $]0; +\infty[$.
Calculer la dérivée g' de g et montrer que pour tout x de $]1; 2[$, $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$.
- (c) En déduire que pour tout x de $]1; 2[$: $|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$.
- On définit la suite (U_n) en posant U_0 et $U_{n+1} = g(U_n) = 1 + \frac{1}{\sqrt{U_n}}$.
- (a) Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 0$, U_n est un élément de $[1; 2]$.
- (b) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}$, les inégalités : $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$ et $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
- (c) En déduire la limite de la suite (U_n) .
- (d) Déterminer un entier p tel que U_p soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près.
- (e) A l'aide d'une calculatrice, déterminer U_p .

Problème 2.2.3. DE SYNTHÈSE N°10

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \frac{x^2+3x+3}{2x+2}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité 1 cm.

- (a) Déterminer le domaine de définition de f et calculer les limites de f aux bornes de ce domaine.

- (b) Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variations.
2. (a) Déterminer les réels a , b , et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{2x+2}$.
(b) En déduire que (C_f) admet une asymptote oblique (Δ) , dont on déterminera l'équation.
(c) Étudier la position relative entre (C_f) et (Δ) .
3. (a) Construire la courbe (C_f) et ses asymptotes.
(b) Montrer que (C_f) admet un centre de symétrie que l'on précisera.
4. Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I =]0; +\infty[$.
(a) Montrer que g est une bijection de $]0; +\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.
(b) Déterminer $g^{-1}\left(\frac{7}{4}\right)$ et $(g^{-1})'\left(\frac{7}{4}\right)$.
(c) Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution α que l'on déterminera la valeur exacte et une valeur approchée à 10^{-1} près.
(d) Tracer, dans le même repère, la courbe (C_g) de la fonction g^{-1} .
5. On considère l'intervalle $K = [2; 3]$.
(a) Montrer que, $x \in K$ implique que $\forall x \in K, f(x) \in K$.
(b) Montrer que $\forall x \in K, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.
6. Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = g(U_n)$.
(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in K$.
(b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - \alpha| \leq |U_n - \alpha|$.
(c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
(d) En déduire la limite de (U_n) .

QUI CHERCHE TROUVE. IL FAUT CONTINUER À TRAVAILLER!!!

CALCUL INTÉGRAL

Sommaire

3.1	Intégrale d'une fonction continue	41
3.2	Intégration par parties	41
3.3	Changement de variable affine	42
3.4	Intégrations des fonctions particulières	42

Le génie est fait de 1% d'inspiration et de 99% transpiration. Il faut encore travailler.

3.1 Intégrale d'une fonction continue

Exercice 3.1.1.

Calculer les intégrales suivantes :

- | | | | |
|--|--|---|--|
| 1) $\int_0^4 (x-2)(x^2-4x+1)^3 dx$ | 2) $\int_0^1 \frac{2t}{1+t^2} dt$ | 3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos^5 t dt$ | 4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$ |
| 5) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^{2x} dx$ | 6) $\int_0^1 t e^{t^2+1} dt$ | 7) $\int_1^2 3x\sqrt{1+x^2} dx$ | 8) $\int_0^1 \frac{3x}{(x^2+1)^2} dx$ |
| 9) $\int_{\pi}^0 (2-3\sin(2x)) dx$ | 10) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos x dx$ | 11) $\int_{\frac{1}{e}}^e \frac{\ln x}{x} dx$ | 12) $\int_2^1 \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$ |
| 13) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx$ | 14) $\int_1^4 x-3 dx$ | 15) $\int_{-2}^2 1-x^2 dx$ | 16) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx$ |
| 17) $\int_0^t \frac{8t^2}{\sqrt{(-t^3+5)^4}} dt$ | 18) $\int_1^4 \cos^3 t \sin^2 t dt$ | 19) $\int_2^4 \frac{9}{t \ln t^2} dt$ | 20) $\int_1^4 \frac{(\ln t)^2}{t^2} dt$ |
| 21) $\int_{-5}^0 \frac{7}{t^2-2t+1} dt$ | 22) $\int_0^1 \frac{x+3}{\sqrt{2x+1}} dx$ | 23) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} (-6e^{2x} - e^{-x}) dx$ | 24) $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$ |
| 25) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 5 \sin t \times e^{\cos t} dt$ | 26) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} x^2 \cos 3x dx$ | | |

3.2 Intégration par parties

Exercice 3.2.1. 1. À l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes.

- a) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (2x+1) \cos x dx$ b) $\int_0^{\pi} (x-1) \sin 3x dx$
 c) $\int_0^2 (2x+1) e^{2x} dx$ d) $\int_2^3 (2x+1) \ln x dx$

2. À l'aide d'une intégration par partie, calculer les intégrales suivantes.

- a) $\int_1^e x^2 \ln x dx$ b) $\int_1^{e^2} \sqrt{x} \ln x dx$
 c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx$ d) $\int_0^1 x \sqrt{x+1} dx$

3. Dans chacun des cas suivants, à l'aide d'une intégration par parties déterminer une primitives de la fonction f sur K

(a) $f(x) = (x + 1) \cos x$, $K = \mathbb{R}$

(b) $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, $K =]0; +\infty[$

(c) $f(x) = (3x + 2)e^{2x}$, $K = \mathbb{R}$

(d) $f(x) = \ln \frac{x^2-1}{x^2}$, $K =]1; +\infty[$

4. À l'aide de deux intégrations par parties, calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_0^\pi x^2 \cos x dx$ b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin 2x dx$ c) $\int_0^1 x^2 e^x dx$ d) $\int_0^1 (3x^2 - x + 1)e^x dx$

e) $\int_0^1 x^2 e^{3x} dx$ f) $\int_{-1}^1 (1+x)^2 e^{-x} dx$ g) $\int_0^\pi \cos x e^x dx$ h) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \cos 3x \times e^{2x} dx$

5. Calculer les intégrales suivantes, en utilisant une intégration par parties :

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin^2 t dt$ b) $\int_1^4 \frac{\ln^2 t}{5\sqrt{t^3}} dt$ c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3t} \sin 2t dt$ d) $\int_1^4 t \sqrt{t+1} dt$

3.3 Changement de variable affine

Exercice 3.3.1.

1. À l'aide d'un changement de variable affine, calculer les les intégrales suivantes.

a) $\int_0^1 x \sqrt{x+1} dx$ b) $\int_0^{\frac{1}{2}} x^2 \sqrt{2x+1} dx$ c) $\int_0^{\frac{1}{2}} x^2 \sqrt{2x+1} dx$ d) $\int_{\frac{5}{4}}^2 \frac{x^2}{(3x-4)^5} dx$.

2. Soit a et b deux nombres réels strictement positifs.

(a) Démontrer, à l'aide d'un changement de variables affine, que : $\int_1^a \frac{dt}{t} = \int_b^{ba} \frac{dt}{t}$.

(b) Quelle propriété de la fonction logarithme népérien retrouve-t-on ?

3. Sans faire de calcul, donner les valeurs des intégrales suivantes.

a) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (x^3 - \tan x) dx$ b) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos x + \sin x) dx$ c) $\int_{-1}^1 \ln \left(\frac{2-x}{2+x} \right) dx$.

4. (a) Calculer $\int_0^x \sin x dx$.

(b) En déduire la valeur des intégrales suivantes.

i. $\int_{-x}^x \sin x dx$ et $\int_{-x}^x |\sin x| dx$.

ii. $\int_0^{2x} \sin x dx$ et $\int_0^{2x} |\sin x| dx$.

iii. $\int_0^{2x} \sin x dx$ et $\int_0^{2x} |\sin x| dx$.

iv. $\int_{\frac{5\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| dx$.

3.4 Intégrations des fonctions particulières

Exercice 3.4.1.

1. On considère les deux intégrales :

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cos^4 x dx \text{ et } B = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 x \sin^4 x dx.$$

(a) Calculer $A + B$ et $A - B$.

- (b) En déduire les valeurs de A et B .
2. On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{2x+5}{(x+1)^2}$.
- (a) Déterminer deux nombres réels a et b tels que :
- $$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}, f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2}.$$
- (b) En déduire la valeur de $\int_1^3 \frac{x^2-1}{x(x^2+1)} dx$.

Exercice 3.4.2.

1. Soit la fonction définie sur $]0; 1[$ par : $f(x) = \frac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$.
- (a) Trouver deux réels a et b tels que $f(x) = \frac{a}{x^2} - \frac{b}{(x-1)^2}$.
- (b) En déduire la primitive F de f sur $]0; 1[$ vérifiant la condition $F\left(\frac{1}{2}\right) = 6$.
2. On donne $g(x) = \sin^4 x \cos^5 x$. Trouver les primitives de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3.4.3.

1. (a) Déterminer les réels a , b et c tels que : $\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}$.
- (b) Calculer $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x(x^2+1)} dx$.
2. On considère la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par ;
- $$f(x) = \frac{3x^3 - 5x^2 + 2x - 1}{x^2 - 4x + 4}$$
- (a) préciser son ensemble de définition.
- (b) Déterminer les nombres réels a , b , c et d tels que pour tout x : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2} + \frac{d}{(x-2)^2}$.
- (c) Calculer $\int_{-1}^1 f(x) dx$.

Exercice 3.4.4.

Le plan est rapporté à un repère orthogonal (O, I, J) tel que $OI = 2\text{cm}$ et $OJ = 1\text{cm}$ soit (D) un domaine du plan défini par les systèmes suivants.

$$(D_1) : \begin{cases} 2 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq x + 2 \ln x \end{cases} \quad (D_2) : \begin{cases} \ln 3 \leq x \leq \ln 5 \\ -x - \frac{e^{\frac{5}{x}}}{x^2} \leq y \leq 0 \end{cases}$$

$$(D_3) : \begin{cases} 1 \leq x \leq e \\ e^{-2x} \leq y \leq \frac{\ln(3x+1)}{x} \end{cases} \quad (D_4) : \begin{cases} 0 \leq x \leq \lambda \\ 0 \leq y \leq \frac{1}{x+2} - \frac{1}{7x+2} \end{cases} \quad \lambda > 0$$

1. Calculer les aires A_1 , A_2 et A_3 des domaines (D_1) , (D_2) et (D_3) .
2. Calculer l'aire A_4 du domaine (D_4) en fonction de λ .
3. Calculer $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A_4$

Exercice 3.4.5.

1. (a) Démontrer que pour tout x on a : $\frac{e^{2x}}{1+e^x} = e^x - \frac{e^x}{1+e^x}$.

- (b) En déduire la valeur de l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx$.
2. Soit la fonction définie par $f(x) = \ln(1 + e^x)$.
- (a) Calculer la dérivée de f .
- (b) Calculer à l'aide d'une intégration par parties la valeur de l'intégrale $J = \int_0^1 e^x \ln(1 + e^x) dx$.

Exercice 3.4.6.

1. Déterminer trois réels a, b, c tels que, pour tout $t \in]0; +\infty[$.
- $$\frac{1}{t(1+t)^2} = \frac{a}{t} + \frac{b}{1+t} + \frac{c}{(1+t)^2}.$$
2. Soit $x \geq 1$.
- (a) Calculer $\int_1^x \frac{dt}{t(1+t)^2}$.
- (b) Soit φ la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par : $\varphi(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t(1+t)^2} dt$.
En intégrant par parties, calculer $\varphi(x)$ en fonction de x .
- (c) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2} = 0$. En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \frac{1}{2} \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right)$.

Exercice 3.4.7.

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x + 1 - xe^{x-1}$. On note C_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

Étudier la limite de la fonction f en $-\infty$ puis en $+\infty$.

Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote à la courbe C_f en $-\infty$ et préciser la position de la courbe C_f par rapport à la droite (Δ) .

- Calculer la dérivée f' et la dérivée f'' de la fonction f .
- Dresser le tableau de variation de la fonction f' en précisant la limite de la fonction f' en $-\infty$.
- Calculer $f'(1)$ et en déduire le signe de $f'(x)$ pour tout réel x .
- Dresser le tableau de variation de la fonction f .

Soit I l'intervalle $[1, 9; 2]$. Démontrer que, sur I , l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique, α .

Tracer la droite (Δ) et la courbe C_f (unité graphiquement 2cm).

Partie B

- On considère la fonction g définie sur l'intervalle I par :
 $g(x) = 1 + \ln \left(2 + \frac{1}{x} \right)$.
- Démontrer que, sur I l'équation $f(x) = 0$ équivaut à l'équation $g(x) = x$.
- Étudier le sens de variation de la fonction g sur I et démontrer que, pour tout x appartient à I , $g(x)$ appartient à I .
- Démontrer que, pour tout x de l'intervalle I , $|g'(x)| \leq \frac{1}{9}$.

5. Soit (U_n) la suite de nombres réels définies par :

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = g(U_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

On déduit de la question 2)B). Que tous les termes de cette suite appartiennent à l'intervalle I . On ne demande pas de le démontrer.

(a) Démontrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{9}|U_n - \alpha|$.

(b) En déduire, en raisonnant par récurrence, que : pour tout n de $\mathbb{N}$, $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{9}\right)^n \times \frac{1}{10}$.

(c) En déduire que la suite (U_n) converge et préciser sa limite.

Partie C

1. En intégrant par parties, calculer l'intégrale $J = \int_1^\alpha x e^{x-1} dx$.

2. (a) Déterminer, en unités d'aire, l'aire $\mathcal{A}$ de la portion de plan limitée par la courbe C_f , l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = 1$ et la droite d'équation $x = \alpha$.

(b) Démontrer qu'on peut écrire $\mathcal{A} = (\alpha - 1) \left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)$.

Exercice 3.4.8.

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x \ln|x|}{x+1} \text{ si } x \in]-\infty; 1] - \{-1\} \\ f(x) = (x^2 - x)e^{-\frac{1}{x-1}} \text{ si } x \in]1; +\infty[\\ f(0) = 0; f(-1) = 1 \end{cases}$$

Partie A

1. Vérifier que $D_f = \mathbb{R}$ et exprimer $f(x)$ sans la valeur absolue.

2. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

3. Étudier la continuité de f en $x = 0$; $x = -1$ et $x = 1$.

4. Étudier la dérivabilité de f en $x = 0$ et $x = 1$. Interpréter.

5. Préciser la nature des branches infinies de (C_f) .

Partie B

1. Soit $h(x) = \ln|x| + x + 1$. Donner le tableau de variation de h .

2. Montrer que $h(x) = 0$ admet une unique solution α différente de -1 et vérifier que $0,27 < \alpha < 0,28$.

3. En déduire le signe $h(x)$ suivant les valeurs de x .

4. (a) Sur $] -\infty; 1] \setminus \{-1\}$ calculer $f'(x)$ et préciser son signe.

(b) Calculer $f'(x)$ sur $]1; +\infty[$.

5. Donner le tableau de variation de f .

6. (a) Préciser les abscisses des points d'intersection de (C_f) avec (Ox) .

(b) Tracer (C_f) (unité 1 cm).

Partie C

1. (a) Déterminer les réels a et b tel que : $\frac{x}{x+1} = a + \frac{b}{x+1}$.
(b) En déduire une primitive de : $x \mapsto \frac{x}{x+1}$.
2. Soit λ un nombre réel appartenant à $]0; 1[$. Calculer à l'aide d'une intégration par parties $I(\lambda) = \int_{\lambda}^1 \frac{\ln(x+1)}{\ln x} \times f(x) dx$
3. Calculer $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} I(\lambda)$.

QUI CHERCHE TROUVE. IL FAUT CONTINUER À TRAVAILLER!!!

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

Sommaire

4.1	Généralités	47
4.2	Équations du type $y' - ay = 0$	48
4.3	Équations du type $y'' + ay' + by = 0$	49
4.4	Exercices d'approfondissement	50

Le réusite est au bout de l'effort. Il faut continué à travailler

4.1 Généralités

Exercice 4.1.1.

- Dans chacun des cas suivants, vérifier que la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle K .
 - $f(x) = \frac{x^2}{2} - x + 1$, $(E) : 2(y + y') = x^2$ et $K = \mathbb{R}$.
 - $f(x) = 2(x - 1)e^x$, $(E) : y' - y = 2e^x$ et $K = \mathbb{R}$.
 - $f(x) = (1 + x)^2$, $(E) : \frac{y'}{2y} = \frac{1}{1+x}$ et $K =]-1; +\infty[$.
 - $f(x) = \sqrt{2x}$, $(E) : yy' = 1$ et $K =]0; +\infty[$.
 - $f(x) = x \cos x$, $(E) : y - xy' = x^2 \sin x$ et $K = \mathbb{R}$.
 - $f(x) = x \ln x - x$, $(E) : xy' - y = x$ et $K =]0; +\infty[$.
- Dans chacun des cas suivants, vérifier que la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle K .
 - $f(x) = e^x + e^{2x}$, $(E) : y'' + y' - 2y = 4e^{2x}$ et $K = \mathbb{R}$.
 - $f(x) = e_x^{-x}$, $(E) : y''' + y'' = 0$ et $K = \mathbb{R}$.
 - $f(x) = \frac{2}{x}$, $(E) : y'' + \frac{2}{x}y' = 0$ et $K =]0; +\infty[$.
 - $f(x) = \tan x$, $(E) : y' - y^2 = 1$ et $K =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.
 - $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$, $(E) : y'' + x(y')^2 = 0$ et $K =]-1; 1[$.

3. Soit l'équation différentielle (E) : $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$.
- Vérifier que les fonction $x \mapsto e^{-x}$ et $x \mapsto e^2x$ sont solutions sur $\mathbb{R}$ de (E).
 - Démontrer que, pour tous nombres réels a , b et c , la fonction $x \mapsto ae^{-x} + be^x + ce^{2x}$ est solution sur $\mathbb{R}$ de (E).
4. (a) Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles $y' = e^x \sin x$ et $y' = e^x \cos x$.
- En déduire la résolution sur $\mathbb{R}$ de chacune des équations différentielles suivantes.
 - $y'' = e^x \sin x$
 - $y'' = e^x \cos x$.
5. Soit la fonction $f : x \mapsto x \sin x + \cos x$.
- Déterminer $f'(x)$ et $f''(x)$.
 - En déduire une relation entre x , $f(x)$, $f'(x)$ et $f''(x)$.
 - Former une équation différentielle dont f est solution.

4.2 Équations du type $y' - ay = 0$

Exercice 4.2.1.

- Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes.
 - $4y' + 3y = 0$
 - $y \ln 5 - y' = 0$
 - $\frac{1}{5}y + \frac{1}{3}y' = 0$
 - $y\sqrt{3} = y$.
- Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes.
 - $9y^2 = (y')^2$
 - $(y')^2 - 2yy' = 0$
 - $y'' = 3y$
 - $2y''' + 5y'' = 0$.
- Dans chacun des cas suivants, résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) et déterminer la solution vérifiant la condition initiale donnée.
 - (E) : $y' - 3y = 0$ et $y(0) = 2$.
 - (E) : $3y' + y = 0$ et $y(1) = e$.
 - (E) : $y' + y \ln 2 = 0$ et $y(1) = 1$.
 - (E) : $y' = y$ et $y(1) = -1$.
- Le plan est muni du repère (O, I, J) . Dans chacun des cas suivants, résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) et déterminer la solution dont la courbe représentative passe par le point A.
 - (E) : $2y' + 3y = 0$ et $A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
 - (E) : $-y' = y$ et $A \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
 - (E) : $2y' - \frac{1}{2}y = 0$ et $A \begin{pmatrix} 2 \\ 2e \end{pmatrix}$.
 - (E) : $y' - \pi y = 0$ et $A \begin{pmatrix} 2 \\ e^\pi \end{pmatrix}$.

5. Le plan est muni du repère (O, I, J) .

Déterminer la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $2f' + f = 0$ et dont la courbe représentative admet en son point d'abscisse -2 une tangente de coefficient directeur $\frac{3}{5}$.

6. Le plan est muni du repère (O, I, J) .

Déterminer la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $2f' + f = 0$ et dont la courbe représentative admet en son point d'abscisse -1 une tangente parallèle à la droite d'équation : $y + x = 0$.

4.3 Équations du type $y'' + ay' + by = 0$

Exercice 4.3.1.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes.

- a) $y'' - 4y = 0$ b) $y'' + 16y = 0$ c) $2y'' - y' - 6y = 0$
 d) $y'' - 4y' + 13y = 0$ e) $y'' + 3y' = 0$ f) $y'' - 6y' + 9y = 0$.

2. Dans chacun des cas suivants, résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) et déterminer la solution vérifiant les conditions initiales données.

(a) $(E) : y'' + 2y' + y = 0$, $y(0) = -1$ et $y'(0) = 0$.

(b) $(E) : y'' + 16y = 0$, $y(0) = 0$ et $y'(0) = -1$.

(c) $(E) : y'' - (\ln 2)^2 y = 0$, $y(0) = 1$ et $y(2) = 1$.

(d) $(E) : 4y'' + y = 0$, $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$ et $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

(e) $(E) : y'' + 2y' - 3y = 0$, $y(0) = 3$ et $y'(0) = -1$.

(f) $(E) : y'' + y' + y = 0$, $y(0) = 1$ et $y'(0) = \sqrt{3}$.

3. Le plan est muni du repère (O, I, J) .

Déterminer la fonction f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'' - \pi f = 0$ et dont la courbure représentative admet au point $A\left(\frac{0}{\pi}\right)$ une tangente de coefficient directeur π .

4. Le plan est muni du repère (O, I, J) .

Déterminer la fonction f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'' - f' + \frac{9}{4}f = 0$ et dont la courbure représentative est tangente en O à la droite d'équation : $y = 2x$.

5. Le plan est muni du repère (O, I, J) .

(a) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E) : y'' - 3y' + 2y = 0$.

(b) Quelle est la solution de (E) dont la courbure représentative $(\mathcal{C})$ admet au point d'abscisse 0 la même tangente que la courbe $(\mathcal{C})$ représentative de la fonction $x \mapsto e^{3x}$?

6. Le plan est muni du repère (O, I, J) .

Déterminer la fonction f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $9f'' - 18f' + 10f = 0$ et dont la courbe représentative $(\mathcal{C})$ passe par les points $A\left(\frac{0}{\sqrt{3}}\right)$ et $B\left(\frac{\pi}{0}\right)$.

7. Soit la fonction $f : x \mapsto \sin x + \cos x$.

(a) Déterminer $f'(x)$ et $f''(x)$.

(b) Former une équation différentielle du second ordre sans second membre dont f soit solution.

(c) Résoudre cette équation.

8. On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = e^{-2x}$.

(a) vérifier que la fonction $g : x \mapsto (x + 1)e^{-2x}$ est solution sur $\mathbb{R}$ de (E).

(b) Démontrer qu'une fonction $f + g$ est solution de (E) si et seulement si la fonction f est solution de l'équation différentielle : $y' + 2y = 0$.

(c) En déduire les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E).

4.4 Exercices d'approfondissement

Exercice 4.4.1.

1. équation du second ordre à coefficients constants.

Résoudre les équations différentielles suivantes.

(a) $y'' - 4y' + 3y = (2x + 1)e^{-x}$;

(b) $y'' - 4y' + 3y = (2x + 1)e^x$;

(c) $y'' - 2y' + y = (x^2 + 1)e^x + e^{3x}$;

(d) $y'' - 4y' + 3y = x^2e^x + xe^{2x} \cos x$;

(e) $y'' - 2y' + 5y = -4e^{-x} \cos(x) + 7e^{-x} \sin x - 4e^x \sin(2x)$.

2. Résoudre les équations différentielles suivantes :

(a) $y' + y = \frac{1}{1+e^x}$ sur $\mathbb{R}$;

(b) $(1+x)y' + y = 1 + \ln(x+1)$ sur $] -1, +\infty[$;

(c) $y' - \frac{y}{x} = x^2$ sur $]0; +\infty[$;

(d) $y' - 2xy = -(2x-1)e^x$ sur $\mathbb{R}$;

(e) $y' - \frac{2}{t}y = t^2$ sur $]0; +\infty[$.

3. Raccordement détaillé.

(a) Soient C et $D \in \mathbb{R}$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \begin{cases} Ce^{\left(\frac{-1}{x}\right)} & \text{si } x > 0 \\ De^{\left(\frac{-1}{x}\right)} & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

i. Donner la condition nécessaire et suffisante portant C et D pour que f soit prolongeable par continuité en 0.

ii. Démontrer que si cette condition est remplie, ce prolongement, toujours noté f , est alors dérivable en 0 et que f' est continue en 0.

(b) on considère l'équation différentielle $x^2y' - y = 0$.

Résoudre cette équation sur les intervalles $]0; +\infty[$ et $] -\infty; 0[$.

(c) Résoudre équation précédente sur $\mathbb{R}$.

4. Raccordement des solutions (tous les cas possibles).

Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ des équations différentielles suivantes :

(a) $ty' - 2y = t^3$;

(b) $t^2 y' - y = 0$;

(c) $(1 - t)y' - y = t$.

5. Résoudre le système différentielle suivante :

$$a. \begin{cases} x'_1 = (2 - t)x_1 + (t - 1)x_2 \\ x'_2 = 2(1 - t)x_1 + (2t - 1)x_2 \end{cases} \quad b. \begin{cases} x' = x + 2y - z \\ y' = 2x + 4y - 2z \\ z' = -x - 2y + z \end{cases} \quad c. \begin{cases} x' = y + z \\ y' = -x + 2y + z \\ z' = x + z \end{cases}.$$

Exercice 4.4.2.

On se propose de rechercher les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x : $f''(x) - 4f'(x) + 3f(x) = 6x^2 + 5x$ (1).

1. On désigne par g un polynôme défini par : $g(x) = ax^2 + bx + c$ où a , b et c sont trois réels. Trouver a , b et c pour que, pour tout réel x , la fonction g vérifie : $g''(x) - 4g'(x) + 3g(x) = 6x^2 + 5x$.

2. On pose $F = f - g$.

(a) Montrer que si f vérifie, pour tout réel x , la relation (1) alors F est solution de l'équation différentielle : $F'' - 4F' + 3F = 0$ (2). Réciproquement établissez que si F est solution de (2), f définie par $f = F + g$ vérifie (1).

(b) Résolvez l'équation (2). Déduisez-en toutes fonctions f qui satisfont f qui à (1).

Exercice 4.4.3.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{9}{2}e^{-2x} - 3e^{-3x}$.
Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 3e^{-3x}$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E') : $y' + 2y = 0$.

2. En déduire que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{9}{2}e^{-2x}$ est solution de (E').

3. Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -3e^{-3x}$ est solution de l'équation (E).

4. En remarquant que $f = g + h$, montrer que f est une solution de (E).

Exercice 4.4.4.

Soit (E) l'équation différentielle suivante : $y' - 2y = \frac{-2}{1+e^{-2x}}$.

1. Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction définie par : $f(x) = g(x)e^{2x}$. Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si $g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{2x}}$.

2. en déduire toutes les solutions de (E).

Exercice 4.4.5.

Soit l'équation différentielle : $4y'' + \pi^2 y = 0$.

1. Résoudre cette équation différentielle.

2. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Déterminer la fonction g solution de cette équation différentielle qui satisfait aux conditions suivantes :

(a) La courbe représentative de g passe par le point N de coordonnées $\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

- (b) La tangente à cette courbe en N est parallèle à l'axe des abscisses.
3. Vérifier que pour tout nombre réel : $g(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{4}\right)$.
4. Résoudre sur l'intervalle $[-2, 2]$ l'équation $g(x) = -\frac{1}{2}$.

Exercice 4.4.6.

1. Soit (E_0) l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = 0$. Déterminer les solutions générales de (E_0) .
2. (E) est l'équation différentielle : $y'' + 2y' + y = x$.
- (a) Déterminer les réels a et b tels que la fonction h définie par $h(x) = ax + b$ solution de (E) .
- (b) Démontrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si $g = f - h$ est solution de (E_0) .
En déduire toutes les solutions de (E) .
- (c) Déterminer la solution f_0 de (E) satisfaisant aux conditions initiales $f'(0) = 0$ et $f(0) = 0$.

Exercice 4.4.7.

Soit $(E) : y'' + 4y' + 5y = e^{-x}(\sin x - 3 \cos x)$

1. On pose $g(x) = e^{-x}(a \cdot \cos x + b \cdot \sin x)$. Déterminer les réels a et b tels que g soit une solution de (E) .
2. Démontrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si $f - g$ est solution de $(E') : y'' + 4y' + 5y = 0$.
3. Résoudre (E') puis (E) .
4. Déterminer la solution f de (E) qui admet au point O origine du repère une tangente parallèle à la droite $(\Delta) : 2y + x + 1 = 0$.

Exercice 4.4.8.

on se propose de trouver une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$, s'annulant en 1 et vérifiant pour $x > 0 : xf'(x) - 3f(x) = \ln x$ (E).

1. Trouver toutes les fonctions polynômes P du troisième degré telles que, pour tout réel $x : xP'(x) - 3P(x) = 0$.
2. Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ telle que $f(1) = 0$; soit h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = x^3 h(x)$.
- (a) Calculer $h(1)$.
- (b) Calculer $f'(x)$ en fonction de $h'(x)$ et de $h(x)$.
- (c) Montrer que f vérifie (E) si et seulement si, pour tout $x > 0 : h'(x) = \frac{3}{x^4 \ln x}$.
- (d) On suppose que f vérifie la propriété (E).
Montrer h est définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par
 $h(x) = \int_1^x \frac{3}{t^4} dt$
Déterminer $h(x)$ à l'aide d'une intégration par parties.
- (e) Montrer qu'il existe une fonction f et une seule solution du problème posé et en donner l'expression.

Exercice 4.4.9.**Partie A**

Soit la fonction g définie par $g(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1} - \ln x$.

1. Montrer que g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $g'(x) = -\frac{(x^2-1)^2}{x(x^2+1)^2}$.
En déduire le tableau de variation de g .
2. Calculer $g(1)$ puis le signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$.

Partie B

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)e^{-x} + x^2 - 1 & \text{si } x \in]-\infty; 0] \\ \frac{x \ln x}{x^2 - 1} & \text{si } x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[\\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

1. (a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
(b) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
(c) Préciser la nature des branches infinies de la courbes de f .
2. Étudier la continuité de f en 0. et en 1.
3. (a) Montrer que pour tout $x \in]-\infty; 0[$ on a : $\frac{f(x)}{x} = (x+1) \left(\frac{e^{-x}+x+1}{x} \right)$.
(b) Étudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement les résultats obtenus. On admettra que f est dérivable en 1 et que $f'(1) = 0$.
(c) Montrer que, pour tout $x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[$ on a : $f'(x) = \frac{(x^2+1)}{(x^2-1)} g(x)$.
(d) Déterminer la dérivée de f sur $] -\infty; 0[$.
4. Établir le tableau de variation de f .
5. Tracer la courbe de f dans un repère orthonormal (unité graphique : 2 cm).

Partie C

Soit l'équation différentielle $(E) : y'' + 2y' + y = 0$.

1. Déterminer la solution de (E) dont la courbe passe par le point $A(0; 1)$ et y admet une tangente parallèle à l'axe (xx') .
2. En déduire une primitive de f sur $] -\infty; 0[$.
3. Calculer l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ du domaine limité par la courbe de f l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 0$ avec $\alpha < 0$.
4. Calculer $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \mathcal{A}(\alpha)$.

Exercice 4.4.10.**Partie A**

On donne l'équation différentielle suivante : $4y'' + 4y' + y = 0$.

Déterminer la solution de l'équation dont la représentation graphique admet, à l'origine des coordonnées, une tangente perpendiculaire à la droite (D) d'équation $2x + y - 1 = 0$.

Partie B

On désigne par f la fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}} & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = x(-1 + \ln x)^2 + x & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

1. (a) Rappeler $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{\sqrt{t}}$ puis démontrer que $\lim_{x \rightarrow 0} x(\ln x)^2 = 0$.
 (b) Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. interpréter les résultats trouvés.
2. (a) Montrer que $f'(x) = \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{4}\right)e^{-\frac{x}{2}}$ si $x \leq 0$ et $f'(x) = (\ln x)^2$ si $x > 0$.
 Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f .
 (b) (T_1) et (T_2) sont respectivement les tangentes à la courbe (C_f) représentative de f aux points d'abscisses 1 et e . Tracer (C_f) , (T_1) et (T_2) dans un repère orthonormé $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$.
3. (a) Démontrer que la restriction h de f à $]0; +\infty[$ admet une réciproque h^{-1} .
 (b) Dresser le tableau de variations de h^{-1} et représenter $(C_{h^{-1}})$.
4. Soit $\alpha \in]0; e[$ et n un entier naturel; on pose pour tout n $I_n(\alpha) = \int_{\alpha}^e x(\ln x)^n dx$.
 (a) À l'aide d'une intégration par parties, exprimer $I_n(\alpha)$ en fonction de n et $I_{n-1}(\alpha)$.
 (b) Calculer $I_0(\alpha)$, $I_1(\alpha)$ et $I_2(\alpha)$.
 (c) On donne $J(\alpha) = \int_{\alpha}^e h(x) dx$.
 Calculer $J(\alpha)$ en fonction de α . Calculer $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} J(\alpha)$ puis interpréter le résultat.

Deuxième partie

ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE

NOMBRES COMPLEXES

Sommaire

5.1	Étude algébrique des nombres complexes	56
5.2	Étude trigonométrique des nombres complexes	57
5.3	Résolutions d'équations	58
5.4	Lieux géométriques	59
5.5	Calculs des nombres complexes	60

Suivant son idée, c'était une idée fixe et il était surpris de ne pas avancer. IL faut continuer à travailler.

5.1 Étude algébrique des nombres complexes

Exercice 5.1.1.

- Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants.
 - $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)$
 - $\frac{1}{1+\sqrt{2}-i\sqrt{3}}$
 - $\frac{2+i}{2-i}$
 - $\frac{(3-i)(1+2i)}{(1-3i)(2+i)}$
 - $\frac{(-1-2i)^3}{(1+i)^4}$
 - $\left(\frac{3-i}{1-2i}\right)^2$.
- Déterminer les parties réelle et imaginaire des nombres complexes suivants.
 - $(3+4i)^3$
 - $(2-i)^3$
 - $\frac{2+i}{3+4i} - \frac{3-4i}{2-i}$
 - $(3+4i)^3 - (2-i)^3$.
- Pour quelles valeurs du nombre réel x le nombre complexe $[10-x+i(2+x)](x-i)$ est-il un nombre réel ? Un nombre complexe ?
- vérifier que : $\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} + \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i} - 1 = 0$.
- Calculer i^3 , i^4 et i^5 . En déduire i^{18} et i^{19} .
 - Calculer $1+i+i^2+i^3$, puis $i^{199}+i^{200}+i^{201}+i^{202}$.
 - Calculer $\sum_{k=0}^{2000} i^k$ et $\sum_{k=0}^{2002} (-1)^k$.

6. Écrire sous forme algébrique le conjugué des nombres complexes suivants.

$$\begin{array}{ll} a) (4 - i\sqrt{3})(1 + i) & b) \frac{2-i}{-3+i} \\ c) \frac{(1-i)(2+i)}{2i(-3+i)} & d) \frac{(2-3i)(1+i)}{(2-i)^2}. \end{array}$$

7. Soit $Z_1 = \frac{3+2i}{-5+7i}$ et $Z_2 = \frac{3-2i}{5+7i}$.

Démontrer, sans calcul, que $Z_1 - Z_2$ est un nombre réel et $Z_1 + Z_2$ un nombre imaginaire pur.

8. Calculer le module des nombres complexes suivants.

$$\begin{array}{lll} a) \frac{2}{1-i} & b) -\frac{1}{4i} & c) \frac{\sqrt{2}(1+i)}{\frac{1}{2}(\sqrt{3}-i)} \\ d) \frac{(-5+7i)(4-2i)}{(3+4i)(7+5i)} & e) \frac{(1-i)^2}{(1+i)^3} & f) \left(\frac{\sqrt{3}-i}{1-i}\right)^3. \end{array}$$

9. Déterminer les nombres complexes z tels que : $|z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |z - 1|$.

10. Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ les systèmes suivants.

$$(a) \begin{cases} (1+i)z - iz' = 2+i \\ (2+i)z + (2-i)z' = 7-4i \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} (2+i)z + 7iz' = 2+i \\ (1-i)\bar{z} - i\bar{z}' = 4-i. \end{cases}$$

5.2 Étude trigonométrique des nombres complexes

Exercice 5.2.1.

1. Dans chacun des cas suivants :

(a) Déterminer le module et un argument de z ;

(b) En déduire la forme algébrique de z .

$$a) z = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \quad b) z = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad c) z = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$d) z = (1+i)^2 \quad e) z = (1-i)^4 \quad f) z = \frac{-1+i\sqrt{3}}{3+i}$$

$$g) z = \left(\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{-1+i}\right)^3.$$

2. Soit $z_1 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1-i$.

(a) Déterminer le module et un argument de z_1 et z_2 .

(b) Écrire sous forme algébrique et trigonométrique le quotient $\frac{z_1}{z_2}$.

(c) En déduire les valeurs de $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$.

3. Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes suivants.

$$a) (-1-i)i \quad b) (\sqrt{3}+i)(-1+i\sqrt{3}) \quad c) \frac{i}{1-i}$$

$$d) \frac{1-i}{1+i\sqrt{3}} e^{i\frac{\pi}{4}} \quad e) \frac{e^{-2i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}} \quad f) \frac{5-5i}{10e^{i\frac{\pi}{4}}}$$

$$g) \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{-1+i}\right)^{10}.$$

4. Soit $z_1 = \frac{\sqrt{3}+i}{-\sqrt{3}+i}$ et $z_2 = \frac{4i}{1-i\sqrt{3}}$.

(a) Écrire sous forme exponentielle z_1 et z_2 .

- (b) En déduire la forme algébrique des nombres complexes : $z_1 z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $(z_1)^3$ et $\frac{z_2^6}{z_1^3}$.
5. (a) Déterminer le module, un argument, la partie réelle et la partie imaginaire des racines 4^{ième} de $-i$.
 (b) Placer dans le plan complexe les points images de ces racines.
 (c) Calculer la somme et le produit de ces racines.
6. (a) Calculer : $(2 + i)^3$.
 (b) En déduire les racines cubiques de $2 + 11i$.

5.3 Résolutions d'équations

Exercice 5.3.1.

1. Calculer et écrire sous forme algébrique les racines carrées des nombres complexes suivants.
 a) $z = 5 - i$ b) $z = -8i$ c) $z = 7 + 24i$.
2. (a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2iz - 2 = 0$.
 (b) On désigne par z_1 et z_2 les solutions de cette équation, avec $\Re(z_1) > \Re(z_2)$.
 Calculer : $2z_1 - 3z_2$; $(z_1 - z_2)^2$; $(z_1)^8$; $(z_2)^{10}$.
3. (a) Calculer : $(1 - 8i)^2$.
 (b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :
 $(2 + i)z^2 - (9 + 2i)z + 5(3 - i) = 0$.
4. (a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :
- $$z^2 - 4z + 5i(z + 1) = 0 \quad (5.1)$$
- $$(z^2 - 4z + 5)^2 + (z + 1)^2 = 0 \quad (5.2)$$
- (b) En déduire qu'il existe quatre nombres réels a , b , c et d que l'on précisera tels que pour tout nombre réel x , on a : $(x^2 - 4x + 5)^2 + (x + 1)^2 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$.
5. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes et représenter graphiquement les images des solutions.
 a) $z^4 - \sqrt{2}z^2 + 1$ b) $z^8 + z^4 + 1 = 0$
6. Soit P le polynôme défini par : $P(z) = z^3 - 3z^2 + (3 - i)z - 2(1 - i)$.
 (a) Déterminer trois nombres complexes a , b et c tels que : $P(z) = (z - 2)(az^2 + bz + c)$.
 (b) Résoudre $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ l'équation : $P(z) = 0$.
7. Soit P le polynôme défini par : $P(z) = z^4 + (5 - 2i)z^3 + (8 - 10i)z^2 + (6 - 16i)z - 12i$.
 (a) Vérifier que : $P(2i) = P(-3) = 0$.
 (b) Déterminer un polynôme Q du second degré tel que pour tout nombre complexe z , on a :
 $P(z) = [z^2 + (3 - 2i)z - 6i]Q(z)$.
 (c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $P(z) = 0$.
8. Soit P le polynôme défini par :
 $P(z) = z^3 - (11 + 2i)z^2 + 2(17 + 7i)z - 42$

- (a) Démontrer qu'il existe un nombre réel α solution de l'équation : $P(z) = 0$
 (b) Déterminer le polynôme Q tel que : $P(z) = (z - \alpha)Q(z)$.
 (c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $P(z) = 0$.
9. Soit P le polynôme défini par :
 $P(z) = z^3 - 2(1 + 2i)z^2 + 7iz + 3(1 - 3i)$.
- (a) Démontrer qu'il existe un imaginaire pur $i\beta$ solution de l'équation : $P(z) = 0$.
 (b) Déterminer le polynôme Q tel que : $P(z) = (z - i\beta)Q(z)$.
 (c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $P(z) = 0$.

5.4 Lieux géométriques

Exercice 5.4.1.

- Déterminer et représenter les ensembles de points M du plan dont on l'affixe z vérifie la condition indiquée.
 - $|z + \bar{z} - 1| = 4$
 - $|z - \bar{z} - 1 + i| = 2$
 - $|\arg(3i - z)| \equiv 0[2\pi]$
 - $|\arg(z^2 - 4)| \equiv \arg(z + 2)[2\pi]$
 - $|\arg(\bar{z} - 3 + i)| \equiv \frac{\pi}{4}[\pi]$
 - $|\arg(\frac{1}{z^2 + 2})| \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$.
- Déterminer d'ensembles des points M dont l'affixe z vérifie la condition.
 - $|z + 5 - 2i| = |\bar{z} - 2 + i|$
 - $|z + 1 + i| = |3z - 9 - 3i|$.
- À tout nombre complexe z distinct de i , on associe le nombre complexe Z tel que : $Z = \frac{z+i}{z-i}$.
 Déterminer et représenter les ensembles des points M du plan dont l'affixe z vérifie la condition indiquée.
 - Z est un nombre réel strictement positif.
 - Z est un nombre réel strictement négatif.
 - Z est un nombre imaginaire pur.
 - $|Z| = 1$.
 - $|Z| = 3$.
- À tout nombre complexe z distinct de $-1 + 2i$, on associe le nombre complexe Z tel que :

$$Z = \frac{z - 2 + 4i}{z + 1 - 2i}.$$

Déterminer les ensembles de points M dont l'affixe z vérifie la condition indiquée.

- $|Z| = 1$.
 - Z est un nombre réel.
 - $|Z| = 2$.
 - Z est un nombre imaginaire pur.
- Déterminer et construire l'ensemble des points du plan dont l'affixe z vérifie la condition indiquée.
 - $z\bar{z} + i(z - \bar{z}) - 3 = 0$
 - $(z\bar{z})^2 - z\bar{z} - 6 = 0$.
 - Déterminer l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie la condition indiquée.
 - $(z - 1 - i)(\bar{z} - 1 + i) = 5$.
 - $2|z - i| = |z - \bar{z} + 2i|$

$$(c) \quad z^2 - (1 - 2i)^2 = -\bar{z}^2 - (1 + 2i)^2.$$

7. Déterminer et construire l'ensemble des points du plan dont l'affixe z vérifie la condition indiquée.

(a) $\frac{2z-1}{z^2}$ est un nombre réel.

(b) $\frac{4-(z+\bar{z})i}{1-i+\frac{1}{2}(z-\bar{z})}$ est un nombre réel.

5.5 Calculs des nombres complexes

Exercice 5.5.1.

Mettre sous forme algébrique les complexes suivants :

a) $(2 - 5i)(3 + i)$ b) $(1 - i)(1 + i)$ c) $(1 + i)(1 - 2i)(1 + 3i)$ d) $(2 - i)^3$
 e) $\frac{1}{1+i}$ f) $\frac{(3+2i)(1+i)}{1-i}$ g) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$

Exercice 5.5.2.

Soit l'application

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto z + 1$$

1. Calculer les parties réelles et imaginaires de $f(x)$ en fonction de x et y en posant $z = x + iy$.
2. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tel que $f(z)$ soit un nombre réel.

Exercice 5.5.3.

Mettre les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique :

$z_1 = 2i$; $z_2 = -2i$; $z_3 = \frac{-5\sqrt{3}}{2}$; $z_4 = 1 + i$; $z_5 = 1 - i$;
 $z_6 = 1 - i\sqrt{3}$; $z_7 = 2\left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; $z_8 = \left(\frac{i}{1-i}\right)^4$; $z_9 = (1 + i)^{2021}$; $z_{10} = (\sqrt{3} - i)^{30}$.

Exercice 5.5.4. 1. On pose : $j = \frac{-1+i}{2}$.

Calculer : j^2 , j^3 , $1 + j^2 + j^3$ et $\frac{1+j}{(1-i)^2} + \frac{1-j}{(1+i)^2}$.

2. On considère les nombres complexes

$$z_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}} \text{ et } z_2 = \frac{1}{\sqrt{3} + i}$$

calculer : $z_1 + z_2$; $z_1 z_2$; $z_1^2 + z_2^2$; $z_1^3 + z_2^3$.

3. calculer : $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{30}$ et $\left(\frac{3}{\sqrt{3}+i}\right)^{12}$.

Exercice 5.5.5.

Soit $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

1. Calculer : j^2 , j^3 et $1 + j + j^2$.

2. Soit (E) l'équation : $z^4 + z^2 + 1 = 0$.

- (a) Vérifier que j est solution de (E) .
 (b) Dédire de ce qui précède une factorisation dans $\mathbb{R}$ de $P(x) = x^4 + x^2 + 1$.

Exercice 5.5.6.

Soit l'équation $(E) : z^3 - (4 - 6i)z^2 + (-8 + 15i)z + 11 + 3i = 0$.

Montrer que l'équation (E) admet une solution imaginaire pure à déterminer puis en déduire l'ensemble des solutions de l'équation.

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ on donne les points $A(z_A = i)$, $B(z_B = 3 + 2i)$, $C(z_C = 1 + 3i)$

1. Calculer $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.
2. En déduire la nature précise du triangle ABC .

Déterminer l'abscisse du point D image de A par la similitude plane directe S qui laisse B invariant et transforme C en A .

Montrer que les points A , B , C et D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre I et le rayon r .

Exercice 5.5.7.

1. Soit P le polynôme de la variation complexe défini par :

$$P(z) = z^3 - (3 + 4i)z^2 - 3(1 - 4i)z + 9$$

- (a) Calculer $P(3)$.
- (b) Montrer que $P(z)$ peut se mettre sous la forme $(z - 3)Q(z)$; où Q est un polynôme que l'on déterminera.
- (c) On pose $z = Z + 2i$ et $Q(z) = Q_1(Z)$. Déterminer le polynôme Q_1 , puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Q_1(z) = 0$.
- (d) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.
2. On note z_1 , z_2 et z_3 ces solutions de façon que : $\text{Im}(z_1) < \text{Im}(z_2) < \text{Im}(z_3)$.
 On désigne par B , C , et D leurs images respectives dans le plan complexe. On considère en outre le point A d'abscisse $Z_0 = 2 - i$.
- (a) Placer A , B , C et D sur une figure.
- (b) Soit f l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M d'abscisse z , associe le point M' d'abscisse $z' = az + b$, où a est un complexe nul et b un complexe.
 Déterminer a et b pour que $f(A) = C$ et $f(B) = D$. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f .
- (c) Déterminer les images par f des points C et D .
- (d) Déterminer l'expression complexe de $h = f \circ f \circ f \circ f$. En déduire sa nature et ses éléments caractéristiques.

Exercice 5.5.8.

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. On considère l'équation $(E) : z^3 - (6 + 3i)z^2 + (9 + 12i)z - 9(2 + 3i) = 0$.
 - (a) Montrer que (E) admet une solution z_1 dont l'image appartient à (Oy) .
 - (b) Déterminer les deux autres solutions z_2 et z_3 de (E) .
 - (c) Prouver que les points $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$ et $M_3(z_3)$ sont les sommets d'un triangle équilatéral.
 - (d) Quel est le centre du cercle passant par ces 3 points.
 - (e) 2 solutions non réelles.
2. Soit l'équation $(E') : z^2 + (x + 1)z - \frac{(y^2 - 9)}{4} = 0$, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et z une variable complexe. Déterminer et construire l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que (E') possède :
 - (a) Une solution double.
 - (b) 2 solutions réelles distinctes.

Exercice 5.5.9.

On considère le polynôme de la variable complexe z défini par :

$$P(z) = z^3 + (-4 - \alpha + i)z^2 + (2 + 4\alpha - 8i - \alpha i)z - 2\alpha + 8\alpha i$$

α étant un nombre complexe.

1. Vérifier que α est une racine de P . En déduire toutes les racines de P , z_1 et z_2 sont les autres et $\operatorname{Re}(z_2) > \operatorname{Re}(z_1)$.
2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on appelle A , B et M les points images respectifs de z_1 , z_2 et α . Montrer qu'il existe deux valeurs α_0 et α_1 de α pour lesquelles le triangle ABM est rectangle isocèle en A ,

$$\operatorname{Re}(\alpha_0) < \operatorname{Re}(\alpha_1).$$

3. On pose $\beta = \alpha_0 + 1$. Déterminer le plus petit entier n , $n > 2$ tel que β^n soit imaginaire pur.
4. (a) Calculer β^4 .
 - (b) Déterminer les racines 4^{ième} de l'unité.
 - (c) Déduire de 4.(a) et de 4.(b) les solutions dans $\mathbb{C}$ de $(E) : z^4 + 64 = 0$.
 - (d) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E') : (z + 1)^4 = -64(-z + i)^4$.
5. On note M_i , $1 \leq i \leq 4$ les points images respectives des solutions de (E) . Montrer que M_i , $1 \leq i \leq 4$ sont les sommets d'un carré dont on précisera la longueur du côté.

Exercice 5.5.10.

1. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On place les points $A(-2i)$, $B(4 - 2i)$, $C(4 + 2i)$ et $D(1)$.
 - (a) Placer les points A , B et C dans le plan.

- (b) Déterminer la nature du triangle ABC .
2. A tout nombre complexe z différent de $-2i$, on associe le nombre complexe $Z' = \frac{z-(4+2i)}{z+2i}$. A tout point $M(z)$ distinct de A , on associe le point $M'(z')$.
- (a) Déterminer et construire l'ensemble E des points $M(z)$ tels que $|Z'| = 1$.
- (b) Prouver que M' est distinct de D .
- (c) Prouver que : $DM' \times AM = 4\sqrt{2}$ et que : $(\vec{i}, \overrightarrow{DM'}) + (\vec{i}, \overrightarrow{AM}) = \frac{5\pi}{4} [2\pi]$.
- (d) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que Z' soit réel négatif.
- (e) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que $\arg(Z') = \frac{\pi}{2} [\pi]$.
3. Soit $P(z) = z^3 - 2(\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})z - 8i$.
- (a) Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure.
- (b) Achever la résolution de l'équation $P(z) = 0$. Donner la forme trigonométrique de chaque solution.

QUI CHERCHE TROUVE. IL FAUT CONTINUER À TRAVAILLER!!!

SIMILITUDE PLANE DIRECTE

Sommaire

6.1	Similitudes directes du plan	64
6.2	Similitudes directes et problèmes de géométrie	65

Il est venu, il a vu, il a vaincu. Il faut continuer à travailler.

Année 2021/2022

6.1 Similitudes directes du plan

Exercice 6.1.1.

- Dans chacun des cas suivants, déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe d'écriture complexe donnée.
 - $z' = iz + 1$
 - $z' = (1 - i)z + 1$
 - $z' = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{4}\right)z + 2i$
 - $z' = z + 3 - i$
 - $z' = -z + 2i$
 - $z' = -\sqrt{3}z$
- Dans chacun des cas suivants, déterminer l'écriture complexe de la similitude directe de centre Ω de rapport k et d'angle α .
 - $\Omega(1 + i)$, $k = 2$ et $\alpha = \frac{2\pi}{3}$
 - $\Omega(-3)$, $k = \sqrt{2}$ et $\alpha = \frac{\pi}{2}$
 - $\Omega(i)$, $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\alpha = \frac{\pi}{3}$
 - $\Omega(-2 + \frac{i}{2})$, $k = \frac{1}{2}$ et $\alpha = -\frac{\pi}{3}$
 - $\Omega(1 - i)$, $k = 2$ et $\alpha = \frac{\pi}{4}$
- Dans chacun des cas suivants, déterminer l'écriture complexe de la similitude directe s définie par : $s(A) = A'$ et $s(B) = B'$.
 - $A(3 + 2i)$, $A'(3)$, $B(1)$ et $B'(i)$
 - $A(2 + i)$, $A'(3 + 2i)$, $B(2)$ et $B'(3i)$
- Soit s la similitude directe d'écriture complexe : $z' = 3iz - 9 - 3i$
 - Déterminer les éléments caractéristiques de s .
 - Déterminer l'image par s :
 - du cercle de centre $K(1 - 3i)$ et de rayon 1 ;
 - de la droite $(\mathcal{D})$ d'équation : $x = 1$.

5. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

- Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe de centre $A(i - i)$ de rapport 2 et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.
- Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe de centre O , de rapport 4 et d'angle $\frac{3\pi}{4}$.
- déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe qui laisse invariant le point $A(1 - i)$ et qui transforme le point $B(3 + i)$ au point $C(1 + i)$.
- Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe qui transforme $A(1 - i\sqrt{2})$ en $B(1 - i\sqrt{3})$ et $C(1 + \sqrt{6})$ en $D(-\sqrt{3} + i)$.

6. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Dans chacun des cas suivants, déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f , g , f^{-1} , g^{-1} , $g \circ f$ et $f \circ g$.

- $f : z' = z - 2i$; $g : z' = z + i$.
- $f : z' = z - i$; $g : z' = (1 + i)z + 1 - i$.
- $f : z' = 3z + 2i$; $g : z' = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}z + \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$.
- $f : z' = (1 - i\sqrt{3})z - \sqrt{3}$; $g : z' = (1 + i\sqrt{3})z + \sqrt{3}$.
- $f : z' = -4iz + 1 - 4i$; $g : z' = \frac{1}{4}iz + 1 - 2i$.

Exercice 6.1.2.

Déterminer l'expression complexe des transformations

- f est la similitude directe de centre $\Omega(1; 1)$ de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
- t est la translation de vecteur $\vec{u}(2; -3)$.
- r est la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et de centre $\Omega(2; 3)$.
- h est l'homothétie de centre $\Omega(-3; 7)$ de rapport $k = -2$.

6.2 Similitudes directes et problèmes de géométrie

Exercice 6.2.1.

Soit f la similitude directe d'expression complexe $z' = (1 - i)z + 1$.

- Donner les éléments caractéristiques de f .
- Donner l'image de la droite (D) d'équation $2x + 5y - 7 = 0$ par f .
- Donner une équation de l'image du cercle $(\mathbb{C})$ d'équation $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 9$ par f .
- Soit s la similitude expression complexe $z' = (1 + i)z + 3 + i$.
Donner l'expression complexe de $f \circ s$.

Exercice 6.2.2.

Soit l'équation $(E) : z^3 - (4 + 6i)z^2 + (-8 + 15i)z + 11 + 3i = 0$

- montrer que l'équation (E) admet une solution imaginaire pure à déterminer puis en déduire l'ensemble des solutions de l'équation.
- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on donne les points $A(z_A = i)$, $B(z_B = 3 + 2i)$, $C(z_C = 1 + 3i)$.
 - Calculer $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.
 - En déduire la nature précise du triangle ABC.
- Déterminer l'abscisse du point D image de A par la similitude plane directe S qui laisse B invariant et transforme C en A.
- Montrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre I et le rayon r.

Exercice 6.2.3.

On considère l'équation (E) : $z^4 = -72 - 4i$ où $z \in \mathbb{C}$.

- Vérifier que $z_0 = 1 + 2i$ est solution de l'équation (E).
 - Montrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation (E') : $\left(\frac{z}{z_0}\right)^4 = 1$.
 - Déduire les solutions de l'équation (E).
- Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A(1 + 2i)$; $B(-2 + i)$; $C(-1 - 2i)$; $\Omega(2 - i)$.
Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude s de centre Ω tels que $s(A) = B$.
- Soit T la transformation qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$, z et z' deux nombres complexes.
On pose $z' = x' + iy'$ et $z = x + iy$ et $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(x - y + 1) \\ y' = \frac{1}{2}(x + y - 3) \end{cases}$
 - Montrer que $z' = \frac{1}{2}((1 + i)z + 1 - 3i)$.
 - Déterminer le point invariant de la transformation T.
 - Déterminer les éléments caractéristiques de la transformation T.

Exercice 6.2.4.

Le plan complexe (P) est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère l'application r de (P) dans (P) qui à tout point M d'abscisse $z = x + iy$ on associe le point M' d'abscisse $z' = x' + iy'$ où $(x, y; x', y')$ réels tel que :

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 3 \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y - \sqrt{3} \end{cases}$$

- Calculer le module et un argument du nombre complexe $a = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- Exprimer z' en fonction de z .
- Montrer que l'application r admet un unique point invariant Ω dont on déterminera l'abscisse de ω .

4. Exprimer $(z' - \omega)$ en fonction de $(z - \omega)$ et en déduire la nature et les éléments caractéristiques de l'application r .
5. Déterminer l'image par l'application r de la droite d'équation : $x + \sqrt{3}y - 6 = 0$.

Exercice 6.2.5.

Le plan est muni du repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

1. Soit $f : M(z) \longrightarrow M'(z)$ avec $z' = (1 + i\sqrt{3})z - i\sqrt{3}$.
 - (a) Montrer que f admet un point invariant I .
 - (b) Exprimer IM' en fonction de IM .
 - (c) Donner une mesure de l'angle $(\vec{IM}, \vec{IM'})$.
 - (d) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f .
Donner les éléments caractéristiques de f^{-1} .
2. Soit (D) la droite d'équation : $\sqrt{3}x + y = 0$ et soit le cercle $(\mathbb{C})$ de centre O et de rayon 2. Donner l'image de (D) et de $(\mathbb{C})$.
3. Soit g une similitude directe telle que $g \circ g = f$. Donner l'expression de g .
4. Soit T la transformation qui à $M(z)$ associe $M_1(z_1)$ avec $M(x, y)$ et $M_1(x_1, y_1)$

$$\begin{cases} x_1 = x - y\sqrt{3} + \sqrt{3} \\ Y_1 = x\sqrt{3} + y + \sqrt{3} \end{cases}$$
 - (a) Exprimer z_1 en fonction de z .
 - (b) Donner la nature de T et les éléments caractéristiques.
5. Soit $h = T \circ f$. Donner le rapport et l'angle de h .

Exercice 6.2.6.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $4z^2 - 12z + 153 = 0$.
2. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C et P d'affixes respectives :
 $z_A = \frac{3}{2} + 6i, z_B = \frac{3}{2} - 6i, z_C = -3 - \frac{1}{4}i, z_P = 3 + 2i$ et le vecteur $\vec{W}$ d'affixe $z_{\vec{W}} = -1 + \frac{5}{2}i$.
 - (a) Déterminer l'affixe Z_Q du point Q , image du point B par la translation t de vecteur $\vec{W}$.
 - (b) Déterminer l'affixe Z_R du point R , image du point P , par la l'homothétie de centre C et de rapport $-\frac{1}{3}$.
 - (c) Déterminer l'affixe Z_S du point S , image du point P , par la rotation r , de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
 - (d) Placer les points P, Q, R et S dans le plan.
3. (a) Démontrer que le quadrilatère $PQRS$ est un parallélogramme.
 (b) Calculer $\frac{Z_R - Z_Q}{Z_P - Z_Q}$, puis déduire la nature précise du parallélogramme $PQTS$.
 (c) Justifier que les points P, Q, R et S appartiennent, à un même cercle noté $\mathbb{C}$ dont on donnera l'affixe de son centre Ω et de son rayon ρ .

4. La droite (AP) est-elle tangente au cercle $\mathbb{C}$? Justifier la réponse.
5. (a) Déterminer l'application S de $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ associé à $H' \circ R'$ où H' est l'homothétie de centre Ω , centre de $\mathbb{C}$ et de rapport $-\frac{1}{3}$, et R' , la rotation de centre Ω et de d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
- (b) Déterminer l'image par $H' \circ R'$ de la droite (AP) .

Exercice 6.2.7.

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on considère les points A_0, A_1, A_2 et Ω d'affixes respectives $z_0 = 1 + i$, $z_1 = -\frac{5}{2} + \frac{3}{2}i$, $z_2 = -\frac{11}{4} - \frac{1}{4}i$ et ω . Soit S la similitude plane directe telle que $S(A_0) = A_1$ et $S(A_1) = A_2$.

1. (a) Montrer que l'écriture complexe de S est $f : z \rightarrow \frac{1}{2}iz - 2 + i$.
Donner son rapport, son centre $\Omega(\omega)$ et la mesure principale de son angle.
- (b) On considère les points $M(z)$ et $M'(z')$ tels que $S(M) = M'$. Montrer que $Z' - \omega = \frac{1}{2}i(z - \omega)$.
En déduire la nature du triangle $\Omega MM'$.
2. Pour tout entier naturel n on pose $A_{n+1} = S(A_n)$ et $U_n = A_n A_{n+1}$.
 - (a) Placer les points A_0 et Ω puis construire A_1, A_2 et A_3 .
 - (b) Démontrer que la suite $(U_n)_{n \geq 0}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ (on pourra montrer que $U_n = \frac{\sqrt{5}}{2}\Omega A_n$).
3. On pose $V_n = \sum_{k=0}^n U_k$ pour tout entier naturel n .
 - (a) Exprimer V_n en fonction de n .
 - (b) Étudier la convergence de la suite $(V_n)_{n \geq 0}$.
4. (a) Calculer en fonction de n la longueur ΩA_n notée R_n .
- (b) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $r_n < 0,006$.

Exercice 6.2.8.

Le plan étant muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on désigne par S l'application du plan dans lui-même qui, à tout point $M(x; y)$ associe le point $M'(x'; y')$ tels que :

$$\begin{cases} x' = -2x - 2y + 3 \\ y' = 2x - 2y - 1 \end{cases}$$

1. M étant le point d'affixe $z = x + iy$ et M' le point d'affixe $z' = x' + iy'$.
 - (a) Montrer que l'écriture complexe de S est : $z' = (-2 + 2i)z + 3 - i$.
 - (b) En déduire la nature et les éléments de S .
 - (c) Soit (Δ) la droite d'équation $y = -x_2$ et (Δ') par S .
Déterminer une équation de la droite (Δ') .
2. Soit M un point quelconque du plan d'affixe z , on note alors $S(M) = M'$ et $S(M') = M''$.
 - (a) Déterminer l'affixe z'' de M'' en fonction de l'affixe z de M .
 - (b) Soit G le barycentre du système de points pondérés $\{(M, 2); (M', 1); (M'', 1)\}$.
Déterminer l'affixe z_G de G en fonction

- (c) Soit g l'application du plan dans lui même qui, à tout point M d'affixe z associe G le barycentre du système pondérés $\{(M, 2); (M', 1); (M'', 1)\}$.

Montrer que g est une similitude plane directe, on précisera les éléments caractéristiques.

Exercice 6.2.9.

1. Question de cours

- (a) Rappeler les formes algébrique, exponentielle et trigonométrique d'un nombre complexe z .
 (b) Donner l'écriture complexe de la rotation r de centre $k(z_0)$ d'angle θ .

2. On donne $z_0 = 1 - i\sqrt{3}$.

- (a) Donner une écriture trigonométrique de z_0 .
 (b) Montrer que : $z_0^4 = -8 + 8i\sqrt{3}$.
 (c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = 1$.
 (d) En déduire les solutions de (E) : $z^4 = -8 + 8i\sqrt{3}$ sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.

On peut remarquer que (E) équivaut à $\left(\frac{z}{1-i\sqrt{3}}\right)^4 = 1$

- (e) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$, unité graphique 2 cm. placer les points A, B, C et D d'affixes respectives :
 $z_A = 1 - i\sqrt{3}$, $z_B = -1 + i\sqrt{3}$, $z_C = \sqrt{3} + i$ et $z_D = -\sqrt{3} - i$.
 (f) Donner une écriture complexe de la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
 (g) Vérifier que : $r(A) = C$; $r(C) = B$ et $r(B) = D$.
 (h) En déduire que les points A, B, C et D sont situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 6.2.10.

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité 2 cm).

On considère les points A, B et C d'affixes respectives

$$Z_A = -1 + i\sqrt{3} \quad Z_B = -1 - i\sqrt{3}, \quad Z_C = 2.$$

- Placer ces points sur un dessin.
- Vérifier que $\frac{Z_A - Z_C}{Z_B - Z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.
 - En déduire la nature du triangle ABC .
 - Déterminer le centre et le rayon du cercle γ_1 circonscrit au triangle ABC .
- Établir que l'ensemble γ_2 des points M d'affixes z qui vérifie $2(z + \bar{z}) + z\bar{z} = 0$ est un cercle de centre Ω d'affixe -2 . Préciser son rayon construire γ_2 .
 - Vérifier que les points A et B sont éléments de γ_2 .
- On appelle r_1 la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
 - Quelles sont les images des points A et B par la rotation r_1 ? Construire C_1 du point C par la rotation r_1 puis calculer son affixe.
 - Déterminer l'image du cercle Γ_2 par la rotation r_1 .

5. Soit r une rotation. Pour tout M d'affixe z , on note M' l'image de M par r et z' l'affixe de M' . On pose $z' = az + b$, avec a et b des nombres complexes vérifiant $|a| = 1$ et $a \neq 1$.

On suppose que r transforme le cercle γ_2 en le cercle γ_1 .

- (a) Quelle est l'image du point Ω par r ? En déduire une relation entre a et b .
- (b) Déterminer en fonction de a l'affixe du point $r(C)$, image du point C par la rotation r ; En déduire que le point $r(C)$ appartient à un cercle fixe que l'on définira. Vérifier que ce cercle passe par C_1 .

QUI CHERCHE TROUVE. IL FAUT CONTINUER À TRAVAILLER!!!

Troisième partie

ORGANISATION DES DONNÉES

DÉNOMBREMENT

Sommaire

7.1	Dénombrement	72
-----	------------------------	----

Il faut travailler, beaucoup travailler, toujours travailler, encore travailler.

7.1 Dénombrement

Exercice 7.1.1.

Une association est formée de 35 personnes dont 15 hommes et 20 femmes. On se propose de former un bureau de 5 personnes : quelle est le nombre de bureaux comportant :

1. Au moins 2 femmes.
2. Aucun homme.
3. Exactement 3 hommes.

Exercice 7.1.2. Dans un centre de vacances accueillant 120 personnes ; 24 personnes font du tennis et 15 du basket. En outre 6 personnes pratiquent à la fois tennis et basket.

1. Combien de personnes pratiquent du tennis et non du basket ?
2. Combien de personnes pratiquent du basket et non du tennis ?
3. Combien de personnes ne pratiquent aucun des deux sports ?

Exercice 7.1.3.

Une course comporte 16 chevaux dont un porte le nom de «mélakh» et un autre le nom «turbo». On suppose que dans cette course il n'y a pas d'ex-aequo.

1. Déterminer le nombre d'arrivée des 3 premiers chevaux.
2. Déterminer le nombre d'arrivée des 3 premiers chevaux sachant que «mélakh» soit premier.
3. Déterminer le nombre d'arrivée des 3 premiers chevaux où turbo est le dernier.
4. Déterminer le nombre d'arrivée des 3 premiers chevaux où figure turbo.
5. Déterminer le nombre d'arrivée des 3 premiers chevaux, où «mélakh» arrive devant turbo.

Exercice 7.1.4.

Une urne contient trois jetons blancs (un carré, un rond et un triangle), quatre jetons noirs (trois carrés et un triangle) et trois rouges (un carré et deux ronds).

On tire simultanément trois jetons de l'urne.

1. Déterminer le nombre tirages possibles.
2. Déterminer le nombre de tirages comportant :
 - (a) Trois jetons de couleurs différentes.
 - (b) Trois jetons de formes différentes.
 - (c) Trois jetons de même forme.
 - (d) Trois jetons de même couleur.
 - (e) Trois jetons de même forme et de même couleur.
 - (f) trois jetons de formes différentes et de couleurs différentes.

Exercice 7.1.5.

6 personnes choisissent séparément, au hasard, de déjeuner dans l'un des 6 restaurants du village.

1. Calculer le nombre de répartitions possibles de ces six personnes.
2. Le nombre de répartitions où il n'y a aucune rencontre.
3. Le nombre de répartitions où 3 personnes se rencontrent et les autres ne se rencontrent pas.

Exercice 7.1.6.

Une urne contient 4 boules rouges, 5 boules vertes et 5 boules jaunes. On tire au hasard simultanément 4 boules de l'urne ;

Déterminer le nombre de tirages contenant :

1.
 - (a) 4 boules de même couleur.
 - (b) 4 boules de couleurs différentes.
 - (c) Au moins 2 boules rouges.
 - (d) Au plus une boules rouge.
2. Dans cette partie, on tire successivement les 4 boules sans les remettre.
Répondre aux mêmes questions qu'en 1..
3. On tire successivement les 4 boules avec remise. Répondre successivementaux mêmes questions qu'en 1.

Exercice 7.1.7.

Une Urne contient 6 boules rouges numérotées de 1 à 6 ; 2 boules blanches et 4 boules vertes numérotés de 1 à 4.

On tire successivement avec remise 3 boules. Déterminer le nombre de tirages contenant :

1. 3 boules toutes de couleurs différentes.
2. Exactement 2 numéros pairs.

3. Exactement 2 rouges ou 1 numéro pair.
4. Au moins 2 rouges.

Exercice 7.1.8.

A l'entrée d'un immeuble, on dispose d'un clavier de 12 touches ; 3 lettres (A, B, C) 9 chiffres (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). Le code déclenchant l'ouverture de la porte peut être changé par le régisseur. Ce code est formé d'une lettre suivie d'un nombre de 3 chiffres.

1. Dans cette question les 3 chiffres sont distincts ou non.
 - (a) Combien de codes commençant par la lettre A le régisseur peut-il proposer ?
 - (b) Combien de codes peut-il proposer ?
2. Dans cette question on sait que la lettre du code est B et que les chiffres sont distincts.
 - (a) Combien de codes le régisseur peut-il proposer ?
 - (b) Combien de codes comportant le chiffre 7 peut-il proposer ?

Exercice 7.1.9.

Une Urne contient 7 boules rouges numérotées de 1 à 7 ; 3 boules blanches numérotées de 1 à 3 et 5 boules vertes numérotées de 1 à 5.

On tire successivement sans remise 3 boules. Déterminer le nombre de tirages contenant :

1. Successivement une boule rouge, une boule blanche et une boule verte.
2. 3 boules toutes de couleurs différentes.
3. Exactement 2 numéros pairs.
4. Exactement 2 rouges ou 1 numéro pair.
5. Au plus 2 rouges.

Exercice 7.1.10.

Un enfant dispose d'une boîte de 7 crayons de couleurs différentes : rouge, verte, bleue, marron, jaune, orange, violet. Il doit colorier un dessin de 5 zones numérotées de 1 à 5.

1. On suppose que l'enfant colorie les 5 zones de couleurs différentes.
 - (a) De combien de façons peut-il choisir les 5 crayons à utiliser ?
 - (b) Les 5 crayons étant choisis, de combien de façons peut-il colorier les 5 zones ?
 - (c) Déterminer le nombre de dessins sachant que la première zone est en rouge.
 - (d) Déterminer le nombre de dessins sachant que l'une des zones est coloriée en rouge.
2. On suppose maintenant que plusieurs zones peuvent recevoir la même couleur. Déterminer le nombre de façon de colorier les 5 zones avec les 7 couleurs disponibles.

Exercice 7.1.11.

Une compagnie aérienne dessert les 6 villes : Dakar, Lagos, Abidjan, Harare, Rabat et Alger. On appelle ligne aérienne tout trajet joignant 2 de ces villes (Lagos-Dakar et Dakar-Lagos désignent la même ligne).

1. Combien la compagnie met-elle de lignes en service ?
2. Quel serait le nombre de lignes si la compagnie desservait une ville supplémentaire ?
3. Pendant les mois de vacances, la compagnie prévoit d'assurer 45 lignes. Combien de villes desservira-t-elle pendant cette période ?

Exercice 7.1.12.

Dans un aquarium nagent 5 poissons de couleur bleue dont 3 males et 2 femelles et 4 poissons de couleur rouge dont 1 mâle et 3 femelles. On y prélève simultanément trois poissons.

1. Calculer le nombre total de prélèvements.
2. Combien y-a-il de prélèvements ne contenant que des poissons de même sexe ?
3. Combien y-a-il de prélèvements ne contenant que des poissons de même couleur ?
4. Combien y-a-il de prélèvements contenant :
 - (a) 3 poissons de même couleur et de même sexe ?
 - (b) 2 couleurs différentes ou 2 sexes différents ?

Exercice 7.1.13.

On considère le mot «théorème».

On appelle anagramme de ce mot, tout autre mot composé avec les même lettres.

1. Combien d'anagrammes (ayant un sens ou non) peut-on composer ?
2. Combien d'anagrammes peut-on composer si on supprime les accents ?

Exercice 7.1.14.

Un dé parfait a six faces numérotés de 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

On le lance dix fois de suite. À chaque jet, on note le nombre marqué sur la face supérieure. Déterminer le nombre de jets correspondants aux événements suivants :

1. A : « On obtient deux fois le 6 et deux fois seulement ».
2. B : « On obtient au moins une fois le nombre 6 ».
3. C : « On obtient un 6 pour la première fois au troisième jet ».
4. D : « On obtient un 6 au troisième jet (pour la première fois ou non) et un multiple de 3 au septième jet ».

Exercice 7.1.15.

Dans une assemblée de douze personnes on veut créer un comité de 3 personnes avec les fonctions de président, secrétaire et trésorier. Cette assemblée est composée de huit hommes et quatre femmes.

1. de combien de manières peut-on former ce comité, une même personne ne pouvant cumuler plusieurs fonctions ?
2. de combien de manières peut-on former ce comité si veut qu'une femme soit présidente ?

Exercice 7.1.16.

8 athlète parmi lesquels Hussein Bolt, s'alignent pour la finale de 100 m des jeux olympiques. Sachant qu'il n'y a pas d'ex æquo,

1. Quel est le nombre de podiums possibles ?
2. Quel est le nombre de podiums dans lesquels :
 - (a) Bolt est premier ?
 - (b) Figure Bolt ?

Exercice 7.1.17.

Dans un jeu de 32 cartes, combien de «mains» de 5 cartes peut-on avoir comportant :

1. exactement 2 valets ?
2. 3 carreaux ?
3. Plus de 2 dames ?
4. Au moins un roi ?

QUI CHERCHE TROUVE. IL FAUT CONTINUER À TRAVAILLER!!!

PROBABILITÉ

Sommaire

8.1	Calculs de probabilités	77
8.2	Variable aléatoire	82

Success comes from working harder, living and digging better than the others. Il faut beaucoup travailler.

8.1 Calculs de probabilités

Exercice 8.1.1.

- On dispose d'une urne U_1 contenant trois boules rouges et sept boules noires. On extrait simultanément deux boules de cette urne, on considère que tous les tirages sont équiprobables.
 - Quelle est la probabilité P_1 que les deux boules tirées soient rouges ?
 - Quelle est la probabilité P_2 que les deux boules tirées soient noires ?
 - Quelle est la probabilité P_3 que les deux boules tirées soient de même couleur ?
 - Quelle est la probabilité P_4 que les deux boules tirées soient de couleur différentes ?
- On dispose aussi d'une deuxième urne U_2 contenant quatre boules rouges et six boules noires. On tire simultanément deux boules de l'urne U_1 et une boule de l'urne U_2 . On suppose que tous les tirages sont équiprobables. On considère les événements suivants.
 - R « les trois boules tirées sont rouges ».
 - D « les trois boules tirées ne sont pas toutes de même couleur ».
 - B « la boule tirée dans l'urne U_2 est rouge ».
 - Calculer $P(R)$.
 - Quelle est la probabilité de tirer trois boules de même couleur ?
 - Calculer la probabilité de l'événement B sachant que l'événement D est réalisé.

Exercice 8.1.2.

Dans un groupe de 8 élèves, composés de 5 filles et 3 garçons, on choisit au hasard 3 élèves pour jouer 3 rôles dans une petite pièce de théâtre.

1. Déterminer la probabilité pour que les 3 rôles soient tenus par les 3 garçons.
2. Déterminer la probabilité pour qu'au moins une fille joue l'un des rôles.
3. Déterminer la probabilité pour que 2 filles exactement jouent deux des rôles.

Exercice 8.1.3.

Un G.I.E comporte 5 femmes et 6 hommes. Une délégation de 4 membres doit le représenter à une réunion. De combien de manières peut-on former cette délégation ?

1. Calculer la probabilité des événements suivants :
 - (a) A : « la délégation comporte 2 femmes ».
 - (b) B : « la délégation comporte au moins 2 femmes ».
2. Le bureau du G.I.E est constitué comme suit : un président, un vice président, un trésorier, un secrétaire. Tout cumul de mandat étant exclu.
 - (a) De combien de manière peut-on en choisir ce bureau parmi les membres du G.I.E ?
 - (b) Calculer la probabilité des événements suivants :
 - i. C : « le bureau formé comprend au plus 3 femmes ».
 - ii. D : « le bureau est présidé par un homme et une femme est trésorière ».

Exercice 8.1.4.

Une urne contient 4 boules rouges, 3 noires et 1 blanche. On tire au hasard 3 boules en 1 seule fois.

1. Calculer la probabilité des événements suivants :
 - (a) A : « deux boules rouges au moins ».
 - (b) B : « deux boules de même couleur au moins ».
 - (c) C : « une boule de chaque couleur ».

Exercice 8.1.5.

Une boîte contient 5 jetons ; 2 jetons noirs et 3 jetons blancs indiscernable au toucher.

1. On extrait simultanément et au hasard 2 jetons de la boîte.
 - (a) Calculer la probabilité des événement suivant :
 E : « On extrait 2 jetons noirs »
 F : « on extrait 2 jetons de mêmes couleur ».
 - (b) On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de jetons noirs tirés. Définir la loi de la probabilité de X et son espérance mathématique.
2. On effectue 2 tirages successifs de 2 jetons de la boîtes de la manière suivante : On tire un jeton de la boîte et on note sa couleur et on le remet dans la boîte en ajoutant en plus dans la boîte un autre jeton de la même couleur que celui qu'on a tiré. on tire ensuite un second jeton. On considère les évènement suivants :
 N_1 : « on obtient un jeton noir au premier tirage ».
 N_2 : « On obtient un jeton noir au second tirage ». B_1 : « On obtient un jetons blanc au 1^{ière} tirage ».

- (a) calculer $P(N_2/N_1)$ et $P(N_2/B_1)$.
- (b) En déduire $P(N_2)$.

Exercice 8.1.6.

Un arrondissement de m habitant compt 48% d'hommes. Des études statistiques montrent que 4% des hommes et 7% de femmes sont atteints de paludisme. On choisit un individu au hasard parmi ces habitants. Calculer la probabilité pour qu'il soit :

1. Un homme atteint de paludisme.
2. Une femme atteint de paludisme.
3. Une personne atteint de paludisme.
4. Un homme non atteint de paludisme.
5. Un homme sachant qu'il atteint de paludisme.
6. une femme sachant que cette individu est atteint de paludisme.

Exercice 8.1.7.

Le parc des compteurs d'eau des abonnés de thiarbye se repartit de la façon suivant :

- 10% des compteurs ont moins de 2 ans et se trouve de ce fait sous garantie.
- 60% des compteurs ont entre 2 et 20 ans.
- 30% des compteurs ont plus de 20 ans.

Lors du passage de l'agent chargé de relever les compteurs, la probabilité de trouver le compteur défectueux est la suivante :

- 1% s'il s'agit d'un compteur garantie.
- 5% s'il s'agit d'un compteur âgé de 2 à 20 ans.

on notera les événements :

A : « Le compteur est sous garantie ».

B : « le compteur a entre 2 et 20 ans d'âges ».

C : « Le compteur a plus de 20 ans ».

D : « Le compteur est défectueux ».

1. Calculer la probabilité de l'évènement suivant : « Le compteur se trouve encore sous garantie et il est défectueux ».
2. Calculer la probabilité de l'évènement.
3. l'agent constate qu'un compteur est défectueux, calculer la probabilité qu'il soit encore sous garantie. L'agent trouve 8 compteurs défectueux. Quelle est la probabilité pour que l'un au moins soit garantie.

Exercice 8.1.8.

Un examinateur à l'oral du baccalauréat prépare 36 sujets de mathématiques répartis de la manière suivante 10 études de fonctions, 10 transformations ponctuelles, 8 intégrales, 8 exercices de trigonométrie. Chaque candidat tire 2 sujets au hasard et ne doit en traiter qu'un seul.

Déterminer les probabilités suivantes :

1. La probabilité p_1 de tirer une étude de fonction et un exercice de trigonométrie.

2. La probabilité p_2 de tirer 2 sujets de trigonométrie.
3. La probabilité p_3 de tirer 2 de même nature.
4. La probabilité p_4 de tirer 2 de nature différentes.
5. La probabilité de réussir à son examen si le candidat a fait l'impasse sur le calcul intégral et sur la trigonométrie, en supposant qu'il connaisse bien tous les autres sujets.

Exercice 8.1.9.

Une urne contient les 8 cartes piques : le 7, le 8, le 9, le 10, le Valet, la Dame, le Roi et l'As. On tire une carte, on note sa valeur, on la remet dans la boîte et après avoir mélangé, on tire une seconde carte. On suppose que l'hypothèse d'équiprobabilité est satisfaite.

1. Quelle est la probabilité de tirer le 7 puis le Roi ?
2. Quelle est la probabilité de tirer le 7 et le Roi ?
3. Quelle est la probabilité de tirer 2 figures ? (Une figure est un Roi, Une Dame ou un Valet).
4. Quelle est la probabilité pour qu'au moins une des cartes soit le 7 ?
5. Quelle est la probabilité pour qu'au moins une des cartes soit une figure ?

Exercice 8.1.10.

Une urne contient 5 billets de 500 F, 3 de 100 F et 2 de 50 F. On tire simultanément 4 billets de l'urne. On suppose que les tirages sont équiprobables

Calculer la probabilité des événements suivants :

1. A : « La valeur totale des quatre billets est de 300 F ».
2. B : « La valeur totale des quatre billets est de 1300 F ».
3. C : « Parmi les quatre billets tirés, il y en a au moins deux de 100 F ».
4. D : « On a tiré un billet de 500 F, un de 100 F et 2 de 50 F ».

Exercice 8.1.11.

Libasse débute au jeu de fléchettes. Il effectue des lancers successifs d'une fléchette. Lorsqu'il atteint la cible à un lancer la probabilité qu'elle atteigne la cible suivant est égale à $\frac{1}{3}$. Lorsqu'il a manqué la cible à un lancer, la probabilité qu'elle manque la cible au lancer suivant est égale à $\frac{4}{5}$.

On suppose qu'au premier lancer elle a autant de chances d'atteindre la cible que la manquer.

Pour tout entier naturel n strictement positif, on considère les événements suivants :

A_n : « Libasse atteint la cible au $n^{\text{ième}}$ coup » ; B_n : « Libasse rate la cible au $n^{\text{ième}}$ coup » ;

pour les questions 1. et 2., on pourra éventuellement utiliser un arbre pondéré. On pose $P_n = p(A_n)$.

1. Déterminer P_1 et montrer que $P_2 = \frac{4}{15}$.
2. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 2$, $P_n = \frac{2}{15}P_{n-1} + \frac{1}{5}$.
3. Pour $n \geq 1$, on pose $U_n = p_n - \frac{3}{13}$. Montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique, dotée du premier terme U_1 et la raison q .
4. Écrire U_n puis p_n en fonction de n .
5. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$.

6. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $P_n > 0,6665$.

Exercice 8.1.12.

Une urne contient quatre boules noires et deux boules blanches. Soit n un entier naturel supérieur ou égale à 2. On répète n fois l'épreuve qui consiste à tirer une boule puis à la remettre dans l'urne ; on suppose que toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées et que les tirages sont indépendants.

On note p_n la probabilité de tirer exactement une boule blanche lors du $n^{\text{ième}}$ tirage.

1. Calculer les probabilités p_2 , p_3 et p_4 .

2. On considère les événements suivants :

B_n : « On tire une boule blanche lors du $n^{\text{ième}}$ tirage », U_n : « On tire une boule blanche et une seule lors de $n - 1$ premiers tirages ».

(a) Calculer la probabilité de l'événement B_n .

(b) Exprimer la probabilité de l'événement U_n en fonction de n .

(c) En déduire l'expression de p_n en fonction de n et vérifier l'égalité :

$$p_n = \frac{n-1}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

3. On pose $S_n = p_2 + p_3 + \dots + p_n$.

(a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a

$$S_n = 1 - \left(\frac{n}{2} + 1\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

(b) Déterminer la limite de la suite (S_n) .

Exercice 8.1.13.

Une urne contient dix boules numérotées de 1 à 10. Les boules portant les numéros 1, 2, 3, 4, 5 sont blanches, celles portant les numéros 6, 7, 8 sont bleues, celles portant les numéros 9 et 10 sont vertes. On tire simultanément deux boules de l'urne. On admet que tous les tirages sont équiprobables. On considère les événements suivant :

E_1 : « Les deux boules tirées portent des numéros pairs ».

E_2 : « Les deux boules tirées sont de même couleur ».

E_3 : « Les deux boules tirées portent des numéros pairs et sont de même couleurs ».

E_4 : « Les deux boules tirées sont de couleurs différentes et portent des numéros pairs ».

E_5 : « Sachant que les deux boules tirées sont de couleurs différentes, elles portent des numéros pairs ».

1. Calculer la probabilité des événements E_1 , E_2 , E_3 .

2. E_1 , E_2 sont-ils indépendants ?

3. Calculer la probabilité de E_5 , en déduire celle de E_6 .

Exercice 8.1.14.

Une urne contient n boules blanches et n boules noires. On en extrait n simultanément :

1. Combien de résultats peut-on obtenir ?
2. Soit p un entier naturel vérifiant $0 \leq p \leq n$.
 - (a) Démontrer que $(C_n^0)^2$ résultats ne comportent pas de boules blanches.
 - (b) Démontrer que $(C_n^1)^2$ résultats ne comportent une seule boule blanche.
 - (c) Démontrer que $(C_n^p)^2$ résultats ne comportent exactement p boules blanches.
3. Calculer la somme : $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2$

A Monsieur Baye Fara Niang

Professeur de mathématiques au Lycée de Thiaroye

8.2 Variable aléatoire

Exercice 8.2.1.

Pour un examen dix examinateurs sont préparés chacun deux sujets. On dispose donc de vingt sujets que l'on place dans des enveloppes identiques. Deux candidats se présentent : Chacun choisit au hasard deux sujets ; de plus les sujets choisis par le premier candidat ne seront plus disponibles pour le deuxième. On note A_1 l'événement : « les deux sujets obtenus par le deuxième candidat proviennent du même examinateur ». et A_2 « les deux sujets obtenus par le deuxième candidat proviennent du même examinateur ».

1. Montrer que la probabilité de l'événement A_1 est égale à $\frac{1}{9}$.
2. (a) Calculer directement la probabilité conditionnelle $P\left(\frac{A_2}{A_1}\right)$.
 (b) Montrer que la probabilité que les deux candidats obtiennent chacun deux sujets provenant d'un même examinateur est $\frac{1}{323}$.
3. (a) Calculer $P\left(\frac{A_2}{A_1}\right)$.
 (b) En remarquant que $A_2 = (A_2 \cap A_1) \cup (A_2 \cap \bar{A}_1)$. Calculer $P(A_2)$ puis en déduire que $P(A_2 \cup A_1) = \frac{33}{323}$.
4. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de candidats qui ont choisi chacun deux sujets provenant d'un même examinateur. La variable aléatoire X prend donc les deux valeurs 0, 1 ou 2.
 - (a) Déterminer la loi de probabilité de X .
 - (b) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X .

Exercice 8.2.2.

Une épreuve consiste à tirer une boule d'un sac contenant cinq boules numérotées de 0 à 4. On notera P_n la probabilité de tirer la boule numérotée n .

1. Calculer P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 .
 Les P_n sont les cinq premiers termes d'une suite arithmétique de raison $\frac{1}{20}$.
2. Soit X la variable aléatoire réelle qui prend les valeurs 0, 1, 2, et 4 avec les probabilités respectives P_0, P_1, P_2 , et P_4 .
 Calculer l'espérance mathématique de X et son écart type.

Exercice 8.2.3.

Une urne contient six boules indiscernables au toucher : Quatre boules grises et deux boules jaunes.

1. On tire simultanément au hasard deux boules de l'urne. On note X la variable aléatoire qui à chaque tirage de deux boules associe le nombre de boules grises tirées.
Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance.
2. On tire au hasard deux fois de suite deux boules simultanément, les boules n'étant pas remises dans l'urne. On note A, B, C, D les événements suivants :
 - (a) A « Aucune boule grise n'est tirée au cours du premier tirage de deux boules ».
 - (b) B « une boule grise et une boule jaune sont tirées au cours du premier tirage de deux boules ».
 - (c) C « deux boules grises sont tirées au cours du premier tirage de deux boules ».
 - (d) D « une boule grise et une boule jaune sont tirées au cours du deuxième tirage de deux boules ».
 - i. Calculer $P(D/A)$; $P(D/B)$; $P(D/C)$.
 - ii. En déduire les probabilités des événements $D \cap A$; $D \cap B$; $D \cap C$.
 - iii. En déduire la probabilité de l'événement D .

Exercice 8.2.4.

1. Industriel produit des balances dans deux usines A et B . Pour une période donnée. L'usine A fabrique 2400 balances dont 6% , présentent des défauts, l'usine B fabrique 4000 balances dont 7% , présentent des défauts. Ces deux productions sont stockées au centre d'expédition. On prélève au hasard l'une de ces balances.
 - (a) Quelle est la probabilité que la balance présente un défaut.
 - (b) Quelle est la probabilité que la balance ne soit pas défectueuse ?
 - (c) Sachant que la balance est défectueuse qu'elle est la probabilité qu'elle soit de soit l'usine A ? de l'usine B ?
2. Des tests effectués sur les balances vendues ont montré que 90% , de ces balances fonctionnaient encore parfaitement à la fin de la garantie d'un an.
3. Un hôtelier en achète six. Notons X la variable aléatoire qui compte le nombre de balances qui fonctionnent parfaitement au bout d'un an.
 - (a) Expliquer pourquoi la loi de probabilité de X est une loi binomiale.
 - (b) Quelle est la probabilité qu'au bout d'un an :
 - i. Toutes les balances fonctionnent.
 - ii. Aucune balance ne fonctionne.
 - iii. Au moins la moitié des balances fonctionnent.
 - iv. Au plus la moitié des balances fonctionnent.

Exercice 8.2.5.

Une boîte contient 8 indiscernables au toucher dont un rouge numéroté 1, trois rouges numérotés 2 ; deux verts numérotés 1, un vert numéroté 2 et un jaune numéroté 2.

1. Question de cours.

Rappeler la définition de deux événements indépendants d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$.

2. Un enfant choisit au hasard et successivement sans remise deux cubes de la boîte.

On admettra que la probabilité de choisir un cube est indépendante de son numéro et de sa couleur.

(a) On note :

A , l'événement : « Obtenir des cubes de couleurs différentes » ;

B , l'événement : « Obtenir au plus un cube portant le numéro 2 ».

i. Calculer la probabilité de A .

ii. Vérifier que la probabilité de B est égale à $\frac{9}{14}$.

iii. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

(b) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de cubes rouges tirés par l'enfant.

i. Déterminer la loi de probabilité de X .

ii. Calculer l'espérance mathématique de X .

iii. Calculer la variance de X .

3. L'enfant tire cette fois simultanément trois cubes de la boîte.

(a) Déterminer la probabilité de l'événement

C : « Obtenir au plus un cube portant le numéro 2 ».

(b) L'enfant répète n fois l'expérience, en remettant dans la boîte les cubes tirés avant de procéder au tirage suivant. On note p_n , la probabilité de l'événement

D_n « C soit réalisé au moins une fois ».

Exprimer p_n en fonction de n .

(c) Étudier le sens de variation de la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$.

QUI CHERCHE TROUVE. IL FAUT CONTINUER À TRAVAILLER!!!

STATISTIQUES

Sommaire

9.1	Série Statistique double	85
9.2	Série double injective	89

Rien ne se crée, rien ne se perd tout se transforme.

9.1 Série Statistique double

Exercice 9.1.1.

Pour préparer l'examen du Baccalauréat, Monsieur Seck a relevé au cours d'une contrôle les notes x_i de Mathématiques et y_i de Sciences Physiques des ses élèves du cours de renforcement les 5 étoiles. Il a obtenu les résultats suivants :

$x_i \backslash y_i$	09	10	14	15	17	19
09	0	1	2	7	1	2
10	0	1	6	1	2	6
13	1	0	1	3	2	5
16	0	1	2	4	5	2
18	0	0	2	2	3	8
19	0	0	1	1	2	3

1. Représenter le tableau en y mettant les effectifs marginaux.
2. Calculer les moyennes conditionnelles $\bar{x}_1$; $\bar{x}_2$; $\bar{y}_4$.
3. Calculer les variances $V(x)$ et $V(y)$.
4. Calculer la covariance $Cov(x; y)$.
5. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y . Peut-on déduire de ce coefficient qu'il existe une relation entre les notes de mathématiques et celles de Sciences Physiques dans cette classe.

Exercice 9.1.2.

Une étude sur le nombre d'années d'exercice X , des ouvriers d'une entreprise et leur salaire mensuel Y en milliers de francs, a donné des résultats indiqués dans le tableau ci-dessous avec des données manquantes désignées par a et b .

$Y \backslash X$	2	6	10	14	18	22
75	a	5	0	0	0	0
125	0	7	1	0	2	0
175	2	0	9	8	15	4
225	0	1	0	3	b	1

- Déterminer a et b pour que la moyenne de la série marginale de X soit égale à $\frac{596}{59}$ et celle de la série marginale de Y soit $\frac{8450}{59}$.
- Dans la suite, on suppose que $a = 40$ et $b = 20$. A chaque valeur x_i de X on associe la moyenne m_i de la série conditionnelle : $\frac{Y}{X} = x_i$. On obtient ainsi la série double (X, M) .
Définie par le tableau ci-dessous. Les calculs se feront à deux chiffres après la virgule.

X	2	6	10	14	18	22
M	80	113	170	189	199	185

- Calculer le coefficient de corrélation de X et M puis interpréter le résultat.
- Déterminer l'équation de la droite de régression de M en X .
- Quelle serait le salaire moyen d'un ouvrier de l'entreprise si son ancienneté était 30 ans, si cette tendance se poursuit.

Exercice 9.1.3.

A l'oral d'un examen, chaque candidat est interrogé en 1^{ière} langue où il obtient la note x et en 2^{ème} langue où il obtient la note y (notes sur 20).

Les résultats obtenus par les 100 candidats sont donnés dans le tableau ci-dessous :

$y \backslash x$	$[0, 4[$	$[4, 8[$	$[8, 12[$	$[12, 16[$	$[16, 20]$
$[0, 4[$	2	5	2		
$[4, 8[$	1	12	10	3	
$[8, 12[$		3	28	12	1
$[12, 16[$		1	5	10	2
$[16, 20]$				1	2

Pour effectuer les calculs demandés :

- On suppose que chaque candidat a obtenu la note égale au centre de la classe correspondante ;
 - On utilisera impérativement les variables : $u = \frac{x-10}{4}$ et $v = \frac{y-10}{4}$.
- Calculer la moyenne arithmétique $\bar{x}$ et l'écart type $\sigma(x)$ des notes obtenus en 1^{ière} langue.
 - Calculer la moyenne arithmétique $\bar{y}$ et l'écart type $\sigma(y)$ des notes obtenus en 2^{ème} langue.
 - Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre les notes obtenues en 1^{ière} langue et 2^{ème}.

Exercice 9.1.4.

Le tableau suivant indique la distribution de 50 logements en fonction de leur nombre X pièces principales et leur surface Y en cm^2 .

$X \backslash Y$	30	50	70	90	120
1	1	0	0	0	0
2	1	2	2	0	0
3	0	1	6	6	0
4	0	0	2	16	5
5	0	0	0	4	4

- Déterminer n_{34} et n_{43} .
- (a) Déterminer les distributions marginales associées à X et Y .
(b) Calculer $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $V(X)$, $V(Y)$, $\gamma(X)$ et $\gamma(Y)$.
- Construire le nuage des points, représentant la série statistique double donnée.
- (a) Calculer $\text{Cov}(X, Y)$.
(b) Déterminer les droites de régression D et D' respectivement de Y en X et de X en Y .
(c) Calculer r (coefficient de corrélation linéaire des variables X et Y) et construire.

Exercice 9.1.5.

Dans une maternité, on a relevé pour chacune des 20 naissances d'une journée, l'âge x de la mère (en années) et la masse y du nouveau-né (en kilogrammes).

Les résultats sont groupés dans le tableau à double entrée ci-dessous :

$y \backslash x$	16	18	20	22	26	Totaux
2,6	0	0	0	0	1	1
2,8	1	1	0	3	0	5
3	0	2	0	2	2	6
3,2	0	0	3	1	0	4
3,4	0	2	0	0	0	2
3,6	0	0	1	0	1	2
Totaux	1	5	4	6	4	20

Donner les formules avant d'effectuer les calculs puis les réponses à 10^{-2} près par défaut.

- (a) Déterminer les séries marginales associées aux caractères x et y .
(b) Déterminer les moyennes respectives de ces séries marginales.
(c) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire de x et y . La corrélation est-elle bonne ?
- A la fin de la journée, une équipe de journalistes de passage pour les besoins d'un reportage désire prendre en photo un bébé.
On suppose que les bébés ont tous les mêmes chances d'être choisis pour la photo.
Soient les événements :

- A «Le bébé choisi pèse 3,2 kilogrammes» ;
 - B «Le bébé choisi a une maman de 22 ans» ;
 - C «Le bébé choisi pèse 2,8 kilogrammes».
- (a) Déterminer les probabilités des événements A , B et $A \cap B$.
En déduire la probabilité $P(A \cup B)$. Justifier les résultats.
- (b) Déterminer la probabilité $P(C \setminus \overline{B})$. justifier.

Exercice 9.1.6.

Une étude faite sur certain nombre d'entreprises suivant l'investissement mensuel X et le chiffre d'affaire mensuel Y (en millions de francs) a donné les résultats :

$X \backslash Y$	2	6	10	14	18
6	4	2	1	0	0
8	2	5	2	0	0
10	1	6	16	5	1
12	0	2	3	6	2
14	0	1	0	1	3

1. Donner le nombre total d'entreprises.
2. Combien d'entreprises ont un chiffres d'affaire de 6 millions de francs ?
3. On considère la série conditionnelle X sachant que $y = 2$ notée X/Y_1 .

X/Y_1	6	8	10	12	14
Effectif	4	2	1	0	0

- (a) Calculer sa moyenne T_1 (T_1 est donc l'investissement moyen des entreprises ayant un chiffre d'affaire mensuel de 2 millions de francs).
- (b) Déterminer de la même façon pour chacune des autres séries conditionnelles X/Y_i la moyenne T_i (pour $i = 1, 2, 3, 4$ et 5) puis compléter le tableau suivant :

Y_i	6	8	10	12	14
T_i					

4. Calculer la covariance de Y et T .
5. Donner le coefficient de corrélation linéaire de (Y, T) . Quel commentaire peut-on faire ?
6. Quel devra être l'investissement moyen pour un chiffre d'affaire de 20 millions de francs ?

Exercice 9.1.7.

On a posé à 1000 personnes la question suivante :
 “Combien de fois êtes vous arrivé en retard au travail au cours des deux derniers mois “ ? Les réponses ont été regroupées dans le tableau suivant :

RETARD DU 2 ^{ième} Mois	RETARD DU 1 ^{ère} Mois			
	0	1	2	TOTAL
0	262	212	73	547
1	250	73	23	346
2	60	33	14	107
TOTAL	572	318	110	1000

- On choisit un individu de cette population.
Déterminer la probabilité pour que l'individu ait au moins un retard.
 - Le premier mois,
 - le deuxième mois sachant qu'il n'en a pas eu le premier mois.
- On souhaite faire une étude de l'évolution du nombre de retards sur un nombre n de mois (n entier non nul). On fait les synthèses suivantes :
 - Si l'individu n'a pas eu de retard le mois n , la probabilité d'avoir zéro retard le mois $n+1$ est 0,46.
 - Si l'individu a eu exactement un retard le mois n , la probabilité de ne pas avoir de retard le mois $n+1$ est 0,66.
 - Si l'individu a eu deux retards le mois n , la probabilité de ne pas avoir de retard le mois $n+1$ est encore 0,66.

On note R_n^0 , l'événement « l'individu n'a eu aucune retard le mois n », R_n^1 , l'événement « l'individu a eu exactement un retard le mois n », R_n^2 , l'événement « l'individu a eu deux retards le mois n ».

Les probabilités des événements R_n^0 , R_n^1 et R_n^2 sont respectivement notées p_n , q_n et r_n .

- Pour le premier mois ($n=1$), la probabilité $p_1 = p(R_1^0)$, $q_1 = 1(R_1^1)$ et $r_1 = p(R_1^2)$ sont obtenues à l'aide du tableau précédent. Déterminer les probabilités p_1 , q_1 et r_1 .
- Montrer que $p_{n+1} = 0,46p_n + 0,66q_n + 0,66r_n$. On pourra s'aider d'un arbre.
- Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = -0,2p_n + 0,66$.
- Soit la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = p_n - 0,55$.
Démontrer que $(u_n)_{n \geq 1}$ est une suite géométrique dont on donnera la raison.
- Déterminer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de u_n puis en déduire celle de p_n .

9.2 Série double injective

Exercice 9.2.1.

On donne la série statistique suivante à 2 variable

X_i	1,2	1,4	1,6	1,8	2
Y_i	13	12	14	16	a

Par la méthode des moindres carrés, on a obtenu l'équation de la droite de régression de Y en X , à savoir : $Y = 9X + 0,6$.

- Calculer $\overline{X}$.

2. Exprimer $\bar{Y}$ en fonction de a .
3. En utilisant 1. et 2. montrer que $a = 20$.
4. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de X et Y . La corrélation est-elle forte ?
5. Estimer la valeur de Y pour $X = 3,2$.

Exercice 9.2.2.

Le tableau suivant donne la taille Y (en cm) d'une fleur en fonction de l'âge X (en semaine).

X	1	2	3	4	5	6	7
Y	x_1	12	16	x_2	34	36	41

1. Déterminer x_1 et x_2 sachant que : $\bar{y} = 24$ et $\text{Cov}(X, Y) = 23$.
2. Déterminer une équation de la droite de régression de Y et X .
3. Quelle serait la taille de la fleur au bout de 15 semaines si l'évolution se poursuivait régulièrement ?
4. Calculer le coefficient de corrélation linéaire.

Exercice 9.2.3.

1. (X, Y) est une série statistique double. Soit (D_1) la droite de régression de Y en X .
Soit (D_2) la droite de régression de X en Y . On suppose que : $(D_1) : y = ax + b$ et $(D_2) : x = a'y + b'$.
Soit r le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y . Établir que : $r^2 = aa'$.
2. Dans une entreprise une étude simultanée portant sur deux caractères X et Y donnent les résultats suivants :
 - La droite de régression de Y en X a pour équation : $2,4X - y = 0$;
 - La droite de régression de X en Y a pour équation : $3,5y - 9x + 24 = 0$.
 - (a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y , sachant que leur covariance est positive.
 - (b) Calculer la moyenne de chacun des caractères X et Y .

Exercice 9.2.4.

Le tableau statistique ci-dessous donne le degré de salinité Y_i du lac Rose pendant le $i^{\text{ième}}$ mois de pluie, noté X_i .

X_i	0	1	2	3	4
Y_i	4,26	3,4	2,01	1,16	1,01

Dans ce qui suit il faudra rappeler chaque formule le cas échéant, avant de faire les calculs.
On donnera les valeurs approchées par excès des résultats à 10^{-3} près.

1. (a) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire de cette série (X, Y) et interpréter le résultat.
(b) Cette équation permet-elle d'estimer le degré de salinité du lac au 6^{ième} mois de pluie ?
(c) Le cas échéant, justifier la réponse .
2. on pose $Z = \ln(Y - 1)$.
(a) Donner le tableau correspondant à la série (X, Z) . Les résultats seront arrondis au millième près.

- (b) Donner l'équation de la droite de régression de Z en X , puis exprimer Y en fonction de X .
 (c) Utiliser cette caractérisation pour répondre à la question 1.(c).

Exercice 9.2.5.

Un hypermarché dispose de 20 caisses. Le tableau ci-dessous donne le temps moyen d'attente à une caisse en fonction du nombre de caisses ouvertes.

Nombre de caisses ouvertes X	3	4	5	6	8	10	12
Temps moyen d'attente (en minutes)	16	12	9,6	7,9	6	4,7	4

- Construire le nuage de points $M_i(x_i; y_i)$ correspondant à cette série statistique. Unités graphiques :
 en abscisse : 1 cm pour une minutes d'attente ;
 en ordonnée : 1 cm pour une minute d'attente.
- Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage et le placer sur le graphique.
- Ajustement affine.
 - Calculer le coefficient de corrélation linéaire r .
 - Déterminer, l'équation de la droite de régression (D) de y en x par la méthode des moindres carrés. Tracer la droite (D) sur le graphique. (Marquer les points utilisés pour tracer (D)).
 - Estimer à l'aide d'un calcul utilisant l'équation de la droite (D).
 - Le nombre de caisses à ouvrir pour que le temps moyen d'attente à une caisse soit de 5 minutes.
 - Le temps moyen d'attente à la caisse lorsque 15 caisses sont ouvertes.
 - Pensez-vous que, dans le cas de la questions ii., l'ajustement affine soit fiable ?

Exercice 9.2.6.

Les parties **A** et **B** sont indépendantes.

Partie A : Une étude du service des transports donne la distance de freinage d'une voiture sur une route en bon état en fonction de sa vitesse.

vitesse en km/h : x	40	50	60	70	80	90	100	110	120
Distance en m : y	8	12	18	24	32	40	48	58	72

On désigne par X la vitesse et par Y la distance de freinage.

- Représenter le nuage de points.
 On prendra 1 cm pour 10 km/h en abscisse et 1 cm pour 5 m en ordonnée.
NB : On commencera en abscisse les graduations à partir de 40 km/h et en ordonnée les graduations à partir de 8 m.
- Déterminer l'équation de la droite régression de Y en X .
- Déterminer le coefficient de corrélation linéaire r . Avons-nous une bonne corrélation ?
- On suppose que cette évolution se poursuit. Un automobiliste roulant à 150 km/h entame un freinage à 85 m d'un obstacle immobile. Percutera-t-il l'obstacle ?
 - Quelle devrait être sa vitesse maximale au moment du freinage pour ne pas heurter l'obstacle ?

Cause des accidents : X	Type de transport : Y	
	Particuliers y_1	Transporteurs en commun y_2
Accidents liés à l'excès de vitesse : x_1	440	360
Accidents à cause mécanique : x_2	110	90

Partie B : Une autre étude sur les causes des accidents donne les résultats ci-contre.

1. Déterminer l'effectif total des accidents enregistrés lors de l'étude.
2. Déterminer les fréquences conditionnelles f_{y_2/x_1} et f_{x_2/y_2} .
3. Déterminer les fréquences marginales $f_{.1}$ et $f_{.2}$.

QUI CHERCHE TROUVE. IL FAUT CONTINUER À TRAVAILLER!!!

SUJETS DE BAC 2015 À 2023

Sommaire

10.1 Epreuve du 1 ^{ière} groupe	93
10.2 Epreuve du 2 ^{ième} groupe	117

10.1 Epreuve du 1^{ière} groupe

Bac 1. 2015-SN

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettent d'afficher des formulaires ou des tracés de courbes sont interdits. Leur utilisation sera considérée comme une fraude. (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998.)

Exercice 10.1.1. (03,5 points)

Le 1., 2. et 3. de cet exercice sont faits chacun de quatre affirmations. Dire pour chacune de ces affirmations si elle est vraie ou fausse.

- L'événement contraire de « A sachant B » est : (0,5 pt)
 - $\bar{A}$ sachant B
 - A sachant $\bar{B}$
 - $\bar{A}$ sachant $\bar{B}$
 - $\bar{A} \cap B$.
- Soient E et F deux événements indépendants d'un même espace probabilisé, on a : (0,5 pt)
 - $p(E/F) = 0$
 - $p(E \cup F) = p(E) \times p(\bar{F}) + p(F)$
 - $p(E \cap F) = 0$
 - $p(E/F) = 1$
- Une variable aléatoire X suit une loi de binomiale de paramètres n et p où $n = 4$ et $p \in]0; 1[$
 - si $p = \frac{1}{2}$ alors $p(X = 2) = 2p(X = 1)$,
 - si $p = \frac{1}{4}$ alors $p(X = 3) > \frac{1}{4}$,

MATHEMATIQUES 2015-SN

(c) si $p = \frac{1}{2}$ alors $p(X > 1) = 1$,

(d) si $p(X = 1) = 8p(X = 0)$ alors $p = \frac{2}{3}$. **(0,75 pt)**

4. Le plan (P) est rapporté au repère direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

A et B sont deux points du plan (P) d'affixes respectives z_A et z_B . Considérons M et M' deux points du plan (P) distincts de A et B .

Notons z et z' les affixes respectives de M et M' .

Interpréter géométriquement les résultats ci-dessous :

a) $|z - z_A| = 1$. **(0,25 pt)** b) $|z - z_A| = |z - z_B|$. **(0,5 pt)**

c) $|z'| = |z_A - z_B|$. **(0,5 pt)** d) $\arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right) = \arg\left(\frac{z' - z_A}{z' - z_B}\right) [\pi]$. **(0,5 pt)**

Exercice 10.1.2. (05 points)

1. Soit $p(z) = z^3 + 3z^2 - 3z - 5 - 20i$, $z \in \mathbb{C}$.

(a) Démontrer que $2 + i$ est une racine de $p(z)$. **(0.25 pt)**

(b) En déduire les solutions de l'équation $p(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$. **(01 pt)**

2. Dans le plan (P) rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 1 cm, on considère les points A , B et C d'affixes respectives $2 + i$, $-1 - 2i$ et $-4 + i$.

(a) Placer les points A , B et C puis calculer les distances AB et BC . **(0.75 pt)**

(b) Démontrer que $\arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right) = \left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right) [2\pi]$. **(0.25 pt)**

(c) En déduire une mesure en radian de l'angle $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right)$. **(0.25 pt)**

(d) Déduire de tout ce qui précède la nature du triangle ABC . **(0.25 pt)**

3. Soit r la rotation qui laisse invariant le point B et qui transforme A en C .

(a) Montrer que l'application f associée à r est définie par : **(0.5 pt)**

$$f(z) = iz - 3 - i.$$

(b) Préciser les éléments géométriques caractéristiques de r . **(0.25 pt)**

4. Soit $T : M(z) \mapsto M'(z)$ telle que $z' = i\alpha^2 z + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

(a) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles T est une homothétie de rapport 2. **(0.5 pt)**

(b) Déterminer les éléments géométriques caractéristiques de T pour le nombre complexe α vérifiant $|\alpha| = \sqrt{2}$ et $\arg \alpha = -\frac{\pi}{4}$. **(0.25 pt)**

5. On considère la transformation $g = r \circ T$. On suppose dans ce qui suit que $\alpha = 1 - i$.

(a) Montrer que l'application h associée à g est définie par : **(0.25 pt)**

$$h(z) = 2iz - 2.$$

(b) Donner les éléments géométriques caractéristiques de g . **(0.5 pt)**

Exercice 10.1.3.

Au Sénégal une entreprise veut vérifier l'efficacité de son service de publicité. Elle a relevé chaque mois durant une période de 6 mois les sommes X consacrées à la publicité et le chiffre d'affaire constaté Y (X et Y sont en milliards de FCFA).

On donne le tableau ci-dessous :

MATHEMATIQUES 2015-SN

Rang du mois	1	2	3	4	5	6
<i>X</i>	1,2	0,5	1	1	1,5	1,8
<i>Y</i>	19	49	100	125	148	181

Les résultats seront donnés au centième près.

Le détail des calculs n'est pas indispensable. On précisera les formules utilisées.

1. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de *X* et *Y*. (01 pt)
2. (a) Déterminer l'équation de la droite de régression de *Y* en *X*. (01 pt)
 (b) Déterminer la somme qu'il faut investir en publicité si l'on désire avoir un chiffre d'affaire de 300 milliards si cette tendance se poursuit. (0,5 pt)

Exercice 10.1.4. (09 points)

A)

1. En utilisant une intégration par parties, calculer pour tout réel α :
 $I(\alpha) = \int_0^\alpha e^t(t+2)dt$. (0,5 pt)
 En déduire $I(x)$. (0,25 pt)
2. Soit k une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Considérons la fonction h telle que
 $h(x) = k(x)e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}$.
 On se propose de déterminer la fonction h de façon à ce qu'elle vérifie les conditions suivantes, $\forall x \in \mathbb{R}$;

$$\begin{cases} h'(x) + h(x) = x + 2 \\ h(0) = 2 \end{cases}$$

 (a) Vérifier que $k'(x) = (x+2)e^x$. (0,5 pt)
 (b) En déduire k puis h . (0,25+0,25 pt)

B)

1. (a) Etudier les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction g définie par :
 $g(x) = x + 1 + e^{-x}$. (01,5 pt)
 (b) En déduire que $g(x)$ est strictement positif. (0,25 pt)
2. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
 $f(x) = \ln(x + 1 + e^{-x})$.
 $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
 (a) Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variations. (02,5 pts)
 (b) Pour tout x strictement positif, on note M , le point de la courbe de la fonction logarithme népérien d'abscisse x et N le point de $(\mathcal{C}_f)$ de même abscisse.
 i. Démontrer que $0 < \overline{MN} < \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$. (0,25 pt)
 ii. Quelle est la limite de $\overline{MN}$ quand x tend vers $+\infty$. (0,25 pt)
3. (a) Démontrer que :
 $f(x) = -x + \ln(xe^x + e^x + 1), \forall x \in \mathbb{R}$. (0,5 pt)
 (b) En déduire que $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote oblique (Δ) au voisinage de $-\infty$ et déterminer la position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à (Δ) pour $x < -1$. (0,25+0,25 pt)
4. Construire $(\mathcal{C}_f)$ et (Δ) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (01,5 pt)

Bac 2. 2016-SN

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettent d'afficher des formulaires ou des tracés de courbes sont interdits. Leur utilisation sera considérée comme une fraude. (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998.)

Exercice 10.1.5. (04 points)

1. On considère l'équation (E) : $z^3 - 13z^2 + 59z - 87 = 0$, où z est un nombre complexe.

(a) Déterminer la solution réelle de (E). (0,5 pt)

(b) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E). (0,5 pt)

2. On pose $a = 3$, $b = 5 - 2i$ et $c = 5 + 2i$.

Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'afixes respectives a , b et c . Soit M le point d'afixe z distinct de A et de B.

(a) Calculer $\frac{b-a}{c-a}$. En déduire la nature du triangle ABC. (0,5+0,5 pt)

(b) On pose $Z = \frac{z-3}{z-5+2i}$.

i. Donner une interprétation géométrique de l'argument de Z. (0,5 pt)

ii. En déduire l'ensemble des points M d'afixe z tels que Z soit un nombre réel non nul. (0,5 pt)

3. Soit (C) le cercle circonscrit au triangle ABC et I le point d'afixe $2 - i$.

(a) Donner l'écriture complexe de la rotation r de centre I et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. (0,5 pt)

(b) Déterminer l'image (C') de (C) par r . Construire (C'). (0,5 pt)

Exercice 10.1.6. (06 points).

A l'occasion de ses activités culturelles, le FOSCO d'un lycée organise un jeu pour le collectif des professeurs. Une urne contenant 4 boules rouges et une boule jaune et une boule jaune indiscernables au toucher est placée dans la cour de l'école. Chaque professeur tire simultanément 2 boules de l'urne.

- Si les deux boules sont de même couleur, il les remet dans l'urne et procède à un second tirage successif avec remise de 2 autres boules.
- Si les deux boules sont de couleurs distinctes, il les remet toujours dans l'urne, mais dans ce cas le second tirage de 2 autres boules s'effectue successivement sans remise.

1. Calculer la probabilité des événements suivants :

A : « Le professeur tire 2 boules même couleur au premier tirage. » (0,25 pt)

B : « Le professeur tire deux boules de couleurs différentes au premier tirage. » (0,25 pt)

C : « Le professeur tire deux boules de même couleur au second tirage sachant que les boules tirées au premier tirage sont de même couleur. » (0,5 pt)

D : « Le professeur tire deux boules de même couleur au second tirage sachant que les boules tirées au premier tirage sont de couleurs distinctes. » (0,5 pt)

E : « Le professeur tire 2 boules de couleurs distinctes au second tirage sachant que les boules tirées au premier tirage sont de couleurs distinctes. » (0,5 pt)

F : « Le professeur tire 2 boules de couleurs distinctes au premier et au second tirage. » (0,5 pt)

MATHEMATIQUES-2016-SN

2. Pour le second tirage, chaque boule rouge tirée fait gagner au FASCO 1000 F et chaque boule jaune tirée fait gagner au collectif des professeurs 1000 F.

Soit X la variable aléatoire à laquelle on associe le gain obtenu par le FASCO.

- (a) Déterminer les différentes valeurs prises par X et sa loi de probabilité. (01 pt)
- (b) Déterminer la fonction de répartition de X . (01 pt)
3. Étant donné que le collectif est composé de 50 professeurs qui ont tous joué indépendamment et dans les mêmes conditions, déterminer la probabilité des événements suivants :
- G : « le FASCO réalise un gain de 100 000 F. » (0,5 pt)
- H : « le collectif des professeurs réalise un gain de 100 00 F. » (0,5 pt)
- I : « Ni gagnant, ni perdant. » (0,5 pt)

Problème 10.1.1. (10 points).

Partie A

Soit g la fonction définie par : $g(x) = -2\ln(x+1) + \frac{x}{x+1}$.

1. (a) Déterminer D_g , puis calculer les limites de g aux bornes de D_g . (0,75 pt)
- (b) Calculer $g'(x)$, étudier son signe et dresser le tableau de variations de g . (01 pt)
2. (a) Calculer $g(0)$. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions dont l'une que l'on désigne $\alpha \in]-0,72; -0,7[$. (0,25+0,5 pt)
- (b) Déterminer le signe de $g(x)$. (0,5 pt)

Partie B

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2}{\ln(x+1)} & \text{si } x > -1 \\ f(x) = (1+x)e^{-x-1} & \text{si } x \leq -1 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. (a) Montrer que $D_f = \mathbb{R}$ et calculer les limites aux bornes de D_f . (0,75 pt)
- (b) Étudier la nature des branches infinies. (0,5 pt)
2. (a) Étudier la continuité de f en -1 et en 0 . (0,5 pt)
- (b) Étudier la dérivabilité de f en -1 et en 0 et interpréter graphiquement les résultats. (01 pt)
3. (a) Montrer que pour tout $x \in]-1; +\infty[$ et $x \neq 0$ on a $f'(x) = \frac{-xg(x)}{\ln^2(x+1)}$ et calculer $f'(x)$ sur $] -\infty; -1[$. (0,5 pt)
- (b) Étudier les variations de f et dresser le tableau de variations. (01 pt)
4. Soit h la restriction de f à $[0; +\infty[$.
- (a) Montrer que h réalise une bijection de $[0; +\infty[$ sur un intervalle J à préciser. (0,25 pt)
- (b) Donner le sens de variation de h^{-1} . (0,25 pt)
- (c) Construire (C_f) et $(C_{h^{-1}})$. (1,25 pt)

MATHEMATIQUES-2016-SNPartie C

Soit m la fonction définie par $m(x) = \frac{\ln(x+1)}{x^2} - \frac{1}{x(x+1)}$.

1. (a) Déterminer les fonctions u et v telles que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $m(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$.
(0,25 pt)
- (b) En déduire la fonction H définie sur $]0; +\infty[$ telle que $H'(x) = m(x)$ puis calculer $\int_1^2 \frac{1}{f(x)} dx$. **(0,75 pt)**

Bac 3. 2017-SN

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettent d'afficher des formulaires ou des tracés de courbes sont interdits. Leur utilisation sera considérée comme une fraude. (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998.)

Exercice 10.1.7. (04 points)

Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse.

Chaque réponse trouvée rapporte 0,5 point et la justification 0,5 point ; soit au total **1 point** pour la réponse trouvée. Une réponse fausse ou l'absence de réponse n'enlève pas de point.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2x}$ est égale à :
(a) 0.
(b) 0,5.
(c) 1.
2. $\int_1^e \ln x dx$ est égale à :
(a) 1.
(b) $e - 1$.
(c) e .
3. La solution générale de l'équation différentielle $y'' + 6y' + 9y = 0$ est donnée par :
(a) $y(x) = Axe^{-3x}$.
(b) $y(x) = Ae^{-3x} + Be^{3x}$.
(c) $y(x) = (Ax + B)e^{-3x}$.
4. f est définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x(\ln x)^2$. Alors $f'(x)$ est égale à :
(a) $(\ln x)^2$.
(b) $x \ln x$.
(c) $(\ln x)^2 + 2 \ln x$.

Exercice 10.1.8. (6 point)

Dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, on considère le polynôme $P(z)$ définie par : $P(z) = z^4 + (3 - i)z^3 + (4 - 3i)z^2 + (12 - 4i)z - 12i$ et l'équation (E) : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.

1. (a) Montrer que $P(z)$ est divisible par $(z - i)(z + 3)$. (0,5 pt)
(b) factoriser $P(z)$. (0,5 pt)
(c) En déduire les solutions de l'équation : $P(z) = 0$ sous la forme trigonométrique. (01 pt)

MATHEMATIQUES-2017-SN

2. (a) Déterminer les nombres complexes α et β solutions de l'équation (E) avec $\text{Im}(\alpha) > 0$. (0,5 pt)
- (b) Écrire α et β sous la forme trigonométrique. (0,5 pt)
3. On considère un dé bien équilibré à six faces et sur chaque face, on inscrit l'un des nombres : i ; $2i$; $\sqrt{3} + i$; $\sqrt{3} - i$ et -3 .
On lance ce dé note z le nombre qui apparaît sur sa face supérieure.
- (a) Calculer la probabilité de chacun des évènements A et B suivants :
 A : « z est réel » ; (0,5 pt)
 B : « z est imaginaire pur ». (0,5 pt)
- (b) On lance 5 fois de suite ce même dé. Calculer la probabilité d'obtenir 4 fois la réalisation de l'évènement B . (0,5 pt)
4. On définit la variable aléatoire θ qui, à chaque nombre z inscrit sur une face, associe son argument principal.
- (a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par θ . (0,5 pt)
- (b) Déterminer la loi de probabilité de θ . (0,5 pt)
- (c) Calculer son espérance mathématique $E(\theta)$. (0,5 pt)

Problème 10.1.2. (10 points)**Partie A**

On considère la fonction numérique d'une variable réelle f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2 + \ln(2e^{-x} - 1) & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{-1}{x(1-\ln x)} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, unité graphiquement 2 cm.

1. (a) Montrer que l'ensemble de définition D_f de f est $\mathbb{R} \setminus \{e\}$, puis calculer les limites aux bornes de D_f . (1,5 pt)
- (b) Montrer que pour tout $x \leq 0$, $f(x) = x + 2 = \ln(2 - e^x)$. (0,25 pt)
- (c) Étudier le signe de $x(1 - \ln x)$. (0,25 pt)
- (d) Étudier la continuité de f en 0. (0,5 pt)
- (e) On admet que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2 - e^x)}{x} = -1$. Calculer la limite $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ et interpréter géométriquement le résultat. (01 pt)
- (f) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x + 2 + \ln 2$ est une asymptote à (C_f) au voisinage de $-\infty$, puis étudier la position relative de (C_f) et de la droite (Δ) . (0,5 pt)
2. (a) Étudier les variations de f . (1,5 pt)
- (b) Dresser son tableau de variations. (0,5 pt)
- (c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution γ à 10^{-1} près. (0,25 pt)
3. Tracer les droites asymptotes à (C_f) , puis la courbe (C_f) . (1,25 pt)

MATHEMATIQUES-2017-SNPartie B

Soit g la restriction de f à l'intervalle $I =]e; +\infty[$.

1. Montrer que g réalise une bijection de I vers un intervalle J à préciser. **(0,25 pt)**
2. On note g^{-1} la bijective réciproque de g .
 - (a) Dresser le tableau de variations de g^{-1} . **(0,25 pt)**
 - (b) Comment obtient-on la courbe $(C_{g^{-1}})$ à partir de la courbe (C_g) ? (On ne demande pas la construction de $(C_{g^{-1}})$). **(0,25 pt)**

Partie C

Soit F la fonction définie par : $F(x) = \ln |1 - \ln x|$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_F et F . **(0,5 pt)**
2. Déterminer la fonction dérivée F' de F . **(0,5 pt)**
3. En déduire l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 3$ et $x = 5$. **(0,5 pt)**

Bac 4. 2018-SN

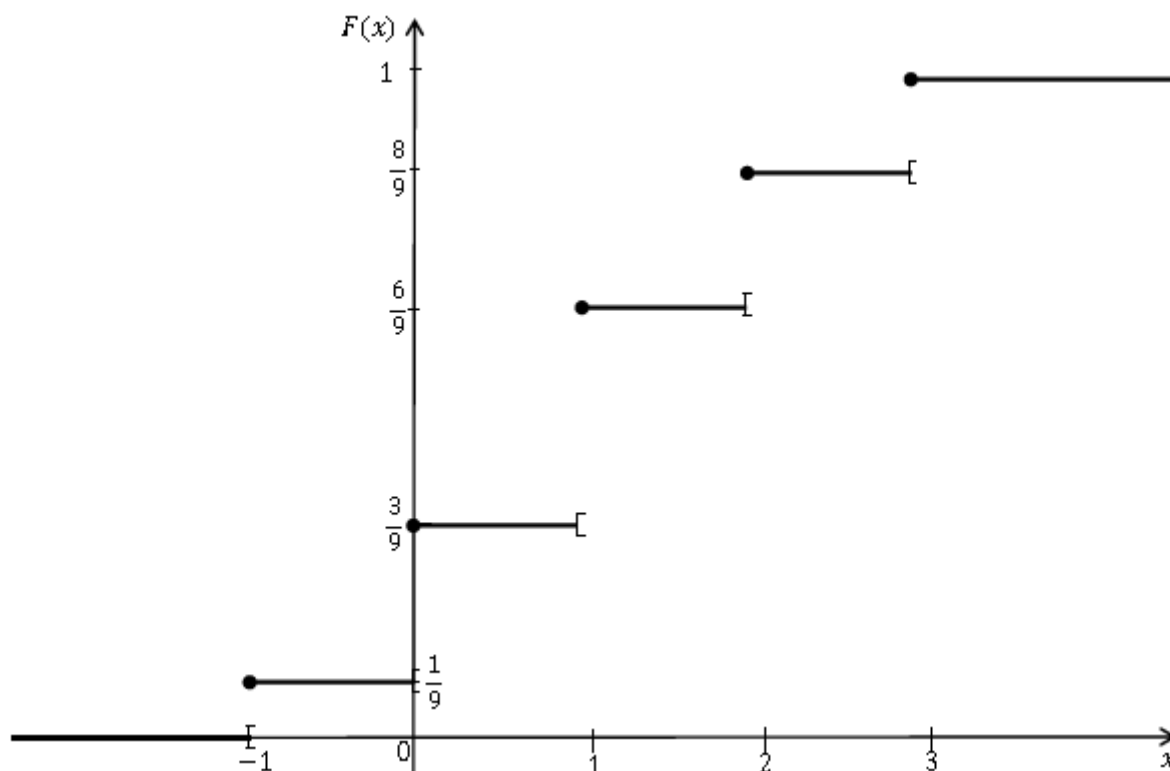
MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbes sont interdits. Leur utilisation sera considérée comme une fraude. (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998.)

Exercice 10.1.9. (05 points)

1. On considère la fonction F de la variable aléatoire X ,
 $F : \mathbb{R} \longrightarrow [0; 1]$
 $x \longmapsto p(X \leq x)$, p étant une probabilité définie sur un univers fini et non vide.

Dans un repère orthogonale, la représentation graphique de F est la suivante :



- (a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$. (0,5 pt)
 (b) Déterminer la loi de probabilité de X . (1 pt)
 (c) Calculer les probabilités $p(X \leq 0)$ et $p(X \geq 1)$. (0,5+0,5 pt)
 (d) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de X . (0,5 pt)
 (e) Vérifier que l'écart type $\sigma(X)$ de X est égal à $\frac{\sqrt{12}}{3}$. (0,5 pt)
2. On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant chacune 3 boules. Les boules de U_1 sont numérotées respectivement 1, 2, 3 et celles de U_2 portent respectivement les nombres -2 , -1 , 0. On tire au hasard une boule de chaque urne et on effectue la somme Y des numéros des boules tirées.

MATHEMATIQUES-2018-SN

- (a) Dresser un tableau à double entrée permettant d'obtenir les valeurs possibles de Y . (0,75 pt)
 (b) En déduire que Y et X ont la même loi de probabilité. (0,75 pt)

Exercice 10.1.10. (05 points)

- Calculer $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2$. En déduire dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes les solutions de l'équation $z^2 - i = 0$. (0,25+0,5 pt)
- On pose $P(z) = z^3 + z^2 - iz$ où z est un nombre complexe.
 - Démontrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution réelle, que l'on déterminera. (0,25 pt)
 - Résoudre l'équation $P(z) = 0$ dans l'ensemble des nombres complexes. (0,5 pt)
- Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm. On considère les points A , B et C d'affixes respectives $Z_A = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $Z_B = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ et $Z_C = -1$.
 - Déterminer la forme exponentielle de Z_A et celle de Z_B . (0,5 pt)
 - Placer avec précision les points A , B et C dans le plan complexe. (0,75 pt)
- Soit D le symétrique du point A par rapport à l'axe réel.
 - Donner l'affixe Z_D du point D sous forme algébrique. (0,25 pt)
 - Démontrer que : $\frac{Z_D - Z_C}{Z_A - Z_C} = e^{-i\frac{\pi}{4}}$. En déduire la nature du triangle ACD . (0,25×2 pt)
- Soit E le point d'affixe $\frac{\sqrt{2}}{2}i$ et F son symétrique par rapport à O . On considère la similitude directe S qui transforme E en A et F en B .
 - Déterminer l'écriture complexe de S et ses éléments caractéristiques. (0,25×4 pt)
 - Soit $(\mathbb{C})$ le cercle de centre E et de rayon 1. Déterminer l'image $(\mathbb{C}')$ de $(\mathbb{C})$ par S . (0,5 pt)

Problème 10.1.3. (10 points)**PARTIE A**

- Soit l'équation différentielle $(E) : y'' + 4y' + 4y = 0$
Déterminer les solutions h de (E) définies sur $\mathbb{R}$. (0,5 pt)
- On considère l'équation différentielle $(F) : y'' + 4y' + 4y = -4x$.
 - Déterminer les réels a et b tels que la fonction $\varphi : x \mapsto ax + b$ soit solution de (F) . (0,5 pt)
 - Montrer qu'une fonction f est solution de (F) si et seulement si $(f - \varphi)$ est solution de (E) . (0,75 pt)
 - En déduire toutes les solutions de (F) . (0,5 pt)
 - Donner la solution f de (F) qui vérifie : $f(0) = 2$ et $f'(0) = -2$. (0,5 pt)

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $] -\infty; -1[\cup]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right), & \text{si } x < -1 \\ xe^{-2x} + e^{-2x} - x + 1, & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{et } (C_f) \text{ sa courbe représentative dans un repère orthonormé } (O, \vec{i}, \vec{j})$$

d'unité graphique 2 cm.

MATHEMATIQUES-2018-SN

1. (a) Calculer les dérivées f' et f'' de la fonction f sur $[0; +\infty[$. (1 pt)
(b) Étudier les variations de f' , puis dresser le tableau de variation de f' sur $[0; +\infty[$. (0,5+0,5 pt)
(c) En déduire le signe f' sur $[0; +\infty[$. (0,5 pt)
2. Étudier les variations de f sur $] -\infty; -1[$. (0,5 pt)
3. Dresser le tableau de variation de f . (0,5 pt)
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α et que $1 \leq \alpha \leq 2$. (0,5+0,5 pt)
5. Montrer que la courbe (C_f) admet une asymptote oblique (D) que l'on déterminera, puis étudier la position de (D) par rapport à la courbe (C_f) . (0,5+0,5 pt)
6. Construire les asymptotes, puis la courbe (C_f) . (1,75 pt)

Bac 5. 2019-SN

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettent d'afficher des formulaires ou des tracés de courbes sont interdits. Leur utilisation sera considérée comme une fraude. (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998.)

Exercice 10.1.11. (4,5 points)

Dans une classe de première S_2 , sur 45 élèves 30 ont eu la moyenne au premier devoir de mathématiques. On considère que dans cette classe si un élève a la moyenne à un devoir donné la probabilité qu'il ait la moyenne au devoir suivant est $\frac{1}{2}$ et s'il a raté la moyenne à un devoir donné la probabilité qu'il ait la moyenne au devoir suivant est $\frac{1}{3}$.

Soit E_n l'évènement « l'élève a eu la moyenne au $n^{\text{ième}}$ devoir », $\overline{E_n}$ l'évènement « l'élève n'a pas eu la moyenne au $n^{\text{ième}}$ devoir » et p_n la probabilité de l'évènement E_n .

1. Déterminer p_1 . (0,5 pt)
2. (a) Déterminer $p(E_2/E_1)$ et $p(E_2/\overline{E}_1)$. (0,5 pt)
(b) En déduire p_2 . (0,5 pt)
3. Montrer que pour tout entier naturel non nul n , $p_{n+1} = \frac{1}{6}p_n + \frac{1}{3}$. (0,75 pt)
4. Soit (U_n) la suite définie pour tout entier naturel non nul n , par : $U_n = p_n - \frac{2}{5}$.
(a) Montrer que (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme. (01 pt)
(b) Exprimer U_n en fonction de n puis p_n en fonction de n . (01 pt)
(c) Calculer la limite de p_n quand n tend vers l'infini. (0,25 pt)

Exercice 10.1.12. (5,5 points)PARTIE A

Pour tout complexe z on note $f(z) = z^5 + 2z^4 + 2z^3 - z^2 - 2z - 2$.

1. Déterminer le polynôme Q tel que, quelque soit $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = (z^3 - 1)Q(z)$. (0,5 pt)
2. Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : f(z) = 0$. (0,5 pt)
3. Écrire les solutions de (E) sous la forme trigonométrique puis les représenter dans le plan complexe $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. (0,5+0,5 pt)

PARTIE B

Considérons les points A , B , C et D du plan $\mathcal{P}$ tels que :

$$A\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad B(-1 + i), \quad C(-1 - i) \quad \text{et} \quad D\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

MATHEMATIQUES-2019-SN

1. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? (0,5 pt)
2. Soit r la rotation de centre le point Ω d'affixe 1 qui transforme A en D .
Déterminer l'écriture complexe de r . (0,5 pt)
3. Quelle est la nature du triangle ΩAD ? (0,5 pt)
4. Déterminer l'affixe du centre du cercle circonscrit au triangle ΩAD . (0,5 pt)
5. On pose $U_n = (z_A)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ où z_A est l'affixe du point A .
Déterminer la valeur minimale de n pour laquelle U_n est réel. (1 pt)
6. Donner la forme algébrique de U_{2019} . (0,5 pt)

Problème 10.1.4. (10 points)

Soit f la fonction définie pour tout réel x par : $f(x) = -x + 2 + (2x - 4)e^{\frac{x}{2}}$.
On note (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan. On choisit 2 cm pour unité graphique.

PARTIE A :

Soit g la fonction numérique définie pour tout x réel par : $g(x) = -1 + xe^{\frac{x}{2}}$.

1. Calculer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$. (0,75 pt)
2. Étudier le sens de variations de g puis dresser le tableau de variations de g . (1 pt)
3. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution α et une seule puis prouver que $0,70 \leq \alpha \leq 0,71$.
(0,75 pt)
Étudier le signe de $g(x)$. (0,5 pt)

PARTIE B :

1. (a) Exprimer $f'(x)$ à l'aide de $g(x)$. (0,5 pt)
(b) En déduire les sens de variations de f . (0,5 pt)
(c) Démontrer que : $f(\alpha) = 4 - \alpha - \frac{4}{\alpha}$, où α est le nombre définie en 3. partie A. (0,5 pt)
2. Donner un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 0,1. (0,5 pt)
3. (a) Déterminer la limite de $f(x)$ et de $\frac{f(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$. (0,75 pt)
(b) Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$. (0,25 pt)
4. Démontrer que (C_f) admet au voisinage de $-\infty$ une asymptote (D) dont on donnera une équation. (0,5 pt)
5. Dresser le tableau de variations de f . (0,5 pt)
6. Tracer sur le même graphique (C_f) et (D) . (1,5 pt)
7. A l'aide d'une intégration par parties, calculer pour tout nombre réel x l'intégrale
 $I(x) = \int_0^x (2t - 4)e^{\frac{t}{2}} dt$. (0,75 pt)
8. Soit λ un réel négatif. Calculer en cm^2 l'aire $\mathcal{A}$ du domaine constitué des points de coordonnées (x, y) satisfaisant à : $\lambda \leq x \leq 0$ et $f(x) \leq y \leq 2 - x$. (0,25 pt)
Interpréter graphiquement la limite de l'aire $\mathcal{A}$ quand λ tend vers $-\infty$. (0,5 pt)

Bac 6. 2020-SN

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettent d'afficher des formulaires ou des tracés de courbes sont interdits. Leur utilisation sera considérée comme une fraude. (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998.)

Exercice 10.1.13. (07 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Partie A

- Soient z et z' deux nombres complexes. Compléter les propriétés sur les modules et arguments suivantes :
 - $|z^n| = \dots$;
 - Si $z' \neq 0$, alors $|\frac{z}{z'}| = \dots$;
 - $\arg(z^n) = \dots$, n un entier naturel ;
 - Si $z' \neq 0$, alors $\arg(\frac{z}{z'}) = \dots$.

(0,25+0,25 pt)
- Soient A, B, C et D des points du plan deux à deux distincts, d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D . Donner l'interprétation géométrique de :
 - $|z_B - z_A|$;
 - $\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_C}\right)$.

(0,25+0,25 pt)
- Rappeler la formule de Moivre. (0,5 pt)

Partie B

Soit s une transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = a^3 z + a^2$, où $a \in \mathbb{C}$.

- On donne $a = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de s . (2 pts)
- Déterminer les nombres complexes a pour lesquels :
 - s est une translation. (1 pt)
 - s est une rotation d'angle $\frac{3\pi}{2}$. (1 pt)
 - s est une homothétie de rapport -8 . (1 pt)

Exercice 10.1.14. (03 points)

- On dispose de deux dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On lance simultanément les deux dés et on s'intéresse à la somme S des chiffres apparus sur la face de dessus.
 - Déterminer les valeurs possibles de S . (0,5 pt)
 - Déterminer la probabilité d'obtenir une somme égale à 9. (0,5 pt)
- Marama et Birane disposent chacun de deux dés et s'adonnent au jeu précédent, chacun de son côté.
 - Quelle est la probabilité que chacun affiche un même score de 9, 7 ou 8 ? (0,75 pt)
 - Quelle est la probabilité qu'ils affichent le même score. (0,5 pt)
 - Celui qui affiche le plus grand score gagne. Calculer la probabilité pour que Marama gagne. (0,75 pt)

MATHEMATIQUES-2020-SN**Problème 10.1.5.**

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 + \frac{3e^x}{e^x + 2} & \text{si } x \leq 0 \\ x + 2 + \frac{\ln(x+1)}{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \text{et } (C_f) \text{ sa courbe représentative dans un repère orthonormé } (O, \vec{i}, \vec{j})$$

d'unité graphique 1 cm.

1. Établir que f est définie sur $\mathbb{R}$ (0,5 pt)
2. (a) Étudier la continuité de f en 0. (0,75 pt)
 (b) Pour $x < 0$, montrer que $\frac{f(x)-2}{x-0} = 1 + \frac{2(e^x-1)}{x} \times \frac{1}{(e^x+2)}$. (0,5 pt)
 En déduire $\lim_{x \rightarrow 0, x < 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$. (0,25 pt)
 (c) Conclure sur la dérivabilité de f en 0 et interpréter graphiquement les résultats. (0,5 pt)
3. (a) En utilisant les variations de la fonction h définie par $h(x) = \ln(x) - x$, montrer que $\ln(x) < x$ pour $x > 0$. (0,5 pt)
 En déduire que $\ln(x+1) < (x+1)^2$ pour $x > 0$. (0,5 pt)
 (b) Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$ et utiliser **3.a.** pour déterminer son signe. (0,5+0,5 pt)
 (c) Calculer $f'(x)$ pour $x < 0$ et donner son signe. (0,5+0,25 pt)
4. (a) Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition $\mathcal{D}_f$. (0,5 pt)
 (b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x+1)]$ et interpréter graphiquement le résultat. (0,25+0,25 pt)
 (c) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x+2)]$ interpréter graphiquement le résultat. (0,25+0,25 pt)
 (d) Étudier le signe de $f(x) - (x+1)$ pour $x < 0$, montrer que $f(x) - (x+2) > 0$ pour $x > 0$ et interpréter graphiquement les résultats. (0,25+0,25=0,25 pt)
5. Déterminer les coordonnées du point A de la courbe où la tangente est parallèle à l'asymptote pour $x > 0$. (0,25 pt)
6. Établir que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à préciser. (0,5 pt)
7. Représenter graphiquement les courbes de f et f^{-1} dans un même repère. (1 pt)
8. Calculer $\int_{-\ln 3}^0 (f(x) - (x+1)) dx$. (0,5 pt)
9. interpréter le résultat précédent en terme d'aire. (0,25 pt)

Bac 7. 2021-SN

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettent d'afficher des formulaires ou des tracés de courbes sont interdits. Leur utilisation sera considérée comme une fraude. (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998.)

Exercice 10.1.15. (05 points)

Une urne U_1 contient 4 boules noires et 3 boules blanches.

Une urne U_2 contient 3 boules noires et 2 boules blanches.

Expérience : On jette un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6, chaque face ayant la même probabilité d'apparaître. Si la face numérotée 6 apparaît, on tire une boule dans U_1 , sinon on tire une boule dans U_2 .

On considère les événements suivants :

A « obtenir la face numérotée 6 », B « tirer une boule blanche ».

1. Schématiser la situation de l'expérience sous forme d'un arbre pondéré. (0,5 pt)
2. Donner les probabilités de $A \bar{A}$, où $\bar{A}$ est l'événement contraire de A. (0,5 pt)
3. Déterminer la probabilité de l'événement B. (0,75 pt)
4. Calculer $p_B(A)$, probabilité de A sachant B. (0,5 pt)
5. L'expérience précédente se déroule 5 fois de suite de façon indépendante.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.
6. Donner la loi de probabilité de X. (1,5 pt)
Trouver l'espérance mathématique de X, $E(X)$ et la variance de X, $V(X)$. (0,5 pt)
7. L'expérience se déroule en n parties indépendantes.
Déterminer la valeur minimale de n pour laquelle la probabilité d'obtenir au moins une boule blanche dépasse 0,99. (0,75 pt)

Exercice 10.1.16. (05 points)

1. (a) Déterminer le nombre complexe a tel que $a(1+i) = 1+3i$, puis calculer ia^2 . (0,5+0,5 pt)
(b) Montrer que l'équation $Z^2 - (1+3i)Z - 4+3i = 0$, $Z \in \mathbb{C}$ a pour solution a et ia. (0,5+0,5 pt)
2. Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm, on considère les points A et B d'abscisses respectives $a = 2+i$ et $b = -1+2i$.
(a) Placer A et B dans le repère. (0,5 pt)
(b) Vérifier que $b = ia$ et en déduire la nature exacte du triangle OAB. (0,25+0,5 pt)
3. Soit C le point d'abscisse $c = 1 + \frac{1}{2}i$.
(a) Déterminer l'abscisse d du point D tel que le triangle OCD soit isocèle et tel que $\text{mes}(\vec{OC}, \vec{OD}) = \frac{\pi}{2}$. (0,75 pt)
(b) On note J, K, L et M les milieux respectifs de [AB], [DA], [CD] et [BC].
Déterminer la nature exacte du quadrilatère JKLM et justifier la réponse. (1 pt)

MATHEMATIQUES-2021-SN**Problème 10.1.6. (10 points)****Parti A**

1. Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{1+x} - 1 - \ln(1+x)$.
 - (a) Dresser le tableau de variations de g sur $[0; +\infty[$. (1 pt)
 - (b) En déduire le signe de $g(x)$ sur $[0; +\infty[$. (0,25 pt)
2. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm. On considère la fonction f de représentation graphique (C_f) définie par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}[1 + \ln(1+x)] & \text{si } x \geq 0 \\ x + \frac{2e^x}{e^x+1} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$
 - (a) Montrer que l'ensemble de définition D_f de f est $\mathbb{R}$. (0,5 pt)
 - (b) Étudier les limites de f aux bornes de D_f . (0,75 pt)
 - (c) Montrer que f est continue en 0. (0,5 pt)
 - (d) Démontrer que pour tout $x \in [0; +\infty[$, on a : $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{1}{e^x} \left[\frac{\ln(1+x)}{x} - \frac{e^x-1}{x} \right]$. (0,5 pt)
 - (e) Étudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter géométriquement les résultats obtenus. (1,25 pt)
3. Calculer $f'(x)$ sur chacun des intervalles où f est dérivable. (1 pt)
4. Étudier le sens de variations de f puis dresser son tableau de variations. (1 pt)
5. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]-\infty; 0[$ et vérifier que $-0,7 < \alpha < -0,6$. (0,75 pt)
6. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote oblique à (C_f) en $-\infty$ et donner l'autre asymptote à (C_f) . (0,5 pt)
7. Placer la position de (Δ) par rapport à (C_f) sur $] -\infty; 0[$. (0,25 pt)
8. Tracer (C_f) et ses asymptotes. (0,75 pt)

Partie B

Soit $\lambda \in]-\infty; 0[$ tel que $\lambda < \alpha$, α étant le réel défini dans la **partie A**.

Soit la partie du plan comprise entre (C_f) , (Δ) , les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = \alpha$ et par $\mathcal{A}(\lambda)$ son aire exprimée avec l'unité d'aire.

1. Calculer $\mathcal{A}(\lambda)$ en fonction de λ et α . (0,75 pt)
2. En déduire $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \mathcal{A}(\lambda)$. (0,25 pt)

Bac 8. 2022-SN

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettent d'afficher des formules ou des tracés de courbes sont interdits. Leur utilisation sera considérée comme une fraude. (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998.)

Exercice 10.1.17. (04 pts)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$. Soit le nombre complexe a défini par $a = \sqrt{2 - \sqrt{3}} - i\sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

1. Montrer que $a^2 = -2\sqrt{3} - 2i$, puis en déduire le module de a .

0,5+0,5 pt

2. Ecrire a^2 sous la forme trigonométrique puis vérifier qu'une des mesures de l'argument de a est $\frac{19\pi}{12}$.

0,5+0,5 pt

3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ puis de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

01 pt

4. Représenter sur le même graphe les points images de a , $-a$ et a^2 .

01 pt

Exercice 10.1.18. (04 pts)

On jette trois fois de suite un dé non truqué à six faces portant les chiffres allant de 1 à 6. On lit les numéros des faces supérieures et on les note dans cet ordre a, b, c . Puis on forme l'équation du second degré $(E) : ax^2 + bx + c = 0$. On note Ω l'univers de cette expérience aléatoire.

1. Soit A l'événement : « -1 est solution de (E) et $b = 6$ ».

Justifier que la probabilité de l'événement A est $p(A) = \frac{5}{216}$.

0,5 pt

2. On considère les événements suivants :

B : « -2 est solution de (E) et $c = 4$ ».

C : « la somme des solutions est -2 et leur produit est 1 ».

D : « les deux solutions sont confondues et $b = 4$ ».

La probabilité de chacun des événements B, C et D appartient à l'ensemble $I = \left\{\frac{1}{72}; \frac{1}{108}; \frac{1}{54}\right\}$.

Donner la probabilité de chacun des événements B, C et D en le justifiant.

01,5 pt

3. L'épreuve précédente est répétée 10 fois de suite et de façon indépendante.

(a) Soit F l'événement : « L'événement A se réalise une seule fois au 3^{ème} essai ».

Montrer que la probabilité de l'événement F est $p(F) = \frac{5 \times (211)^9}{(216)^{10}}$.

0,5 pt

MATHEMATIQUES-2022-SN

(b) Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de réalisations de l'événement A à l'issue des 10 épreuves.

i. Déterminer la loi de probabilité de Y .

0,5 pt

ii. Montrer que le nombre espéré de réalisations de A est égal à $\frac{25}{108}$.

0,5 pt

iii. Calculer la variance de Y .

0,5 pt

Problème 10.1.7. (12 points)

A. Soient la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} 1 + x - x \ln x & \text{Si } 0 < x < 1 \\ 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{Si } x \geq 1 \end{cases}$ et (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(0, \vec{i}, \vec{j})$, d'unité 2cm.

1. Montrer que l'ensemble de définition de f est $D_f =]0, +\infty[$.

0,5 pt

2. Etudier la continuité de f en 1.

0,5 pt

3. Etudier la dérivabilité de f en 1 et interpréter graphiquement les résultats obtenus.

01,25 pt

4. Déterminer les limites de f aux bornes de D_f et interpréter graphiquement les résultats obtenus.

0,75 pt

5. Montrer que f admet un prolongement par continuité à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat.

0,5 pt

6. Etudier la dérivabilité de h à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat.

0,5 pt

7. Calculer $f'(x)$ dans chacun des intervalles $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$.

01 pt

Dresser le tableau de variations de f .

01 pt

8. (a) Tracer (C_f) .

01 pt

(b) Calculer l'aire A en cm^2 de la partie du plan comprise entre (C_f) , la droite d'équation $y = 1$, la droite d'équation $x = 1$ et la droite d'équation $x = 4$.

01 pt

MATHEMATIQUES-2022-SN**B.**(a) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[1, +\infty[$.i. Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution α et que $1 < \alpha < 2$.En déduire un encadrement de α à 10^{-1} près.

01,25 pt

ii. Montrer que : $\forall x \in [1, +\infty[, |g'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

0,5 pt

iii. En déduire que : $\forall x \in [1, +\infty[, |g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$.

0,25 pt

(b) Soit (W_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} W_0 = 2 \\ W_{n+1} = 1 + \frac{1}{\sqrt{W_n}}, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$,i. $W_n \geq 1$.

0,75 pt

ii. $|W_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3}|W_n - \alpha|$.

0,25 pt

iii. $|W_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |W_0 - \alpha|$.

0,75 pt

En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n$.

0,25 pt

Bac 9. 2023-SN

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettent d'afficher des formulaires ou des tracés de courbes sont interdits. Leur utilisation sera considérée comme une fraude. (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998.)

Exercice 10.1.19. (03 points)

1. soit a un nombre rationnel strictement positif et n un entier naturel. Donner les limites suivantes :

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp^x - 1}{x}.$$

(1,5 pt)

2. Donner les primitives des fonctions suivantes :

$$a) (\exp \circ f)f' \quad b) \frac{f'}{f}.$$

(1,5 pt)

Exercice 10.1.20. (04 points)

Un jeune agriculteur décide de pratiquer de la culture sous serre dans son champ. A cet effet, il choisit dans son plan de représentation un repère orthonormal $(o; \vec{u}; \vec{v})$. Il place dans ce repère deux points A et B dont les affixes respectives z_A et z_B sont des racines du polynôme P défini par :

$$P(z) = 2z^3 - 3(1+i)z^2 + 4iz + 1 - i, \quad o \ z \in \mathbb{C}.$$

Son objectif est de pratiquer sa culture sous serre dans l'ensemble (E) des points M de son plan de représentation tels que $\|\vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MO}\| \leq 2$, qui contient un point du segment $[AB]$.

1. Vérifier que 1 et i sont des racines de P .

(0,5 pt)

2. Déterminer le polynôme g tel que $P(z) = (z-1)(z-i)g(z)$.

(0,5 pt)

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

(0,5 pt)

4. On pose $z_A = 1$, $z_B = i$ et $z_C = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

(a) Placer les points A , B et C d'affixes respectives z_A , z_B et z_C dans le repère orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$ en choisissant comme unité graphique 4cm.

(0,75 pt)

(b) Démontrer que C est le milieu de $[AB]$, puis que C appartient à l'ensemble (E) .

(0,5 pt)

MATHEMATIQUES-2023-SN

(c) Déterminer l'affixe z_G du point G barycentre du système $\{(A, 1); (B, 1); (C, 2)\}$, puis placer G .

(0,5 pt)

5. Déterminer puis construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que $\|\vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MO}\| \leq 2$.

(0,5 pt)

6. Le jeune agriculteur atteindra-t-il son objectif?

(0,25 pt)

Exercice 10.1.21. (04 points)

On considère la suite numérique $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :
$$\begin{cases} U_0 = 6 \\ U_{n+1} = \frac{1}{U_n} + \frac{3}{4}U_n \end{cases}, n \in \mathbb{N}.$$

1. Déterminer U_1 et U_2 .

(0,5 pt)

2. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \geq \sqrt{3}$.

(1 pt)

3. Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{3}{4}x$.

(1 pt)

(a) Etudier le sens de variations de f .

(1 pt)

(b) En déduire par récurrence que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

(0,5 pt)

4. Démontrer que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

(1 pt)

Problème 10.1.8.**PARTIE A (02 points)**

On considère l'équation différentielle $(E) : \frac{1}{2}y' + y = 3e^{-2x} + 2$.

1. Résoudre l'équation différentielle $(E') : \frac{1}{2}y' + y = 0$.

(0,25 pt)

2. Soit h une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = axe^{-2x} + b$ où a et b sont des réels. Déterminer a et b pour que h soit une solution de (E) .

(0,5 pt)

MATHEMATIQUES-2023-SN

3. (a) Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Posons $a = 6$ et $b = 2$.

Déterminer que g est solution de (E) si et seulement si $g - h$ est solution de (E') .

(0,5 pt)

- (b) En déduire l'ensemble des solutions de (E) .

(0,5 pt)

4. Déterminer la solution k de (E) dont la courbe représentative (C_k) dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ passe par le point o .

(0,25 pt)

PARTIE B (07 points)

Soient f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} (6x - 2)e^{-2x} + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x + \ln|1-x|}{1-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité graphique 2cm.

1. Justifier que l'ensemble de définition D_f de f est égal à $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

(0,5 pt)

2. Etudier les limites aux bornes de D_f et interpréter graphiquement, si possible, les résultats obtenus.

(1,5 pt)

3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat.

(0,5 pt)

4. étudier la continuité de f en 0.

(0,5 pt)

5. Etudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter géométriquement les résultats obtenus.

(01 pt)

6. Calculer $f'(x)$ puis étudier son signe sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[\setminus \{1\}$.

(0,75 pt)

7. Dresser le tableau de variations de f .

(0,5 pt)

8. Montrer sur l'intervalle $]1, 2[$ que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α et que $1, 2 < \alpha < 1, 3$.

(0,5 pt)

9. Construire (C_f) et ses asymptotes.

(0,75 pt)

10. Calculer en cm^2 l'aire $A(E)$ de la partie E du plan comprise entre les droites d'équations $x = 2$, $x = 3$, $y = -1$ et la courbe (C_f) de f .

(0,5 pt)

10.2 Epreuve du 2^{ième} groupe

Bac 10. 2017-SN

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettent d'afficher des formulaires ou des tracés de courbes sont interdits. Leur utilisation sera considérée comme une fraude. (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998.)

Exercice 10.2.1. (05 points)

Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

1. Le plan (P) est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
 On désigne par A et B les points d'affixes $z_A = -2$ et $z_b = -1 + i$.
 A tout point M d'affixe z différent de -2 , on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{iz+i+1}{z+2}$.
 Déterminer puis tracer l'ensemble E des points M tels que $|z'| = 1$. (2,5 pt)
2. Soit le polynôme P définie par $P(z) = z^3 + (-2 + i)z^2 + z - 2 + i$.
 (a) Vérifier que i et $-i$ sont des racines de P . (0,5 pt)
 (b) Factoriser $P(z)$ en polynômes du premier degré. (2 pts)

Exercice 10.2.2. (05 points)

On considère la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$U_n = \ln \left(\frac{2n+1}{2n-1} \right).$$

1. Calculer U_1, U_2, U_3 et U_4 . (1 pt)
2. Calculer $U_1 + U_2 + U_3 + U_4$. (1 pt)
3. Étudier la convergence de la suite (U_n) . (0,5 pt)
4. Soit $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$.
 (a) Montrer que $S_n = \ln(2n + 1)$. (2 pts)
 (b) Calculer la limite de S_n en $+\infty$. (0,5 pt)

Exercice 10.2.3. (05 points)

1. Résoudre l'équation différentielle $(E) : y' - 2y = 0$. (1,5 pt)
2. (a) Trouver la solution f de (E) telle que $f(0) = \frac{1}{2}$. (1,5 pt)
 (b) Déterminer le réel a tel que $\int_0^a f(x)dx = 2$. (2 pt)

MATHEMATIQUES-2017-SN**Exercice 10.2.4. (05 points)**

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système suivant.

$$\begin{cases} x + y + z &= 16 \\ x - y + z &= 6 \\ x - 4y + 19z &= 153 \end{cases} \quad (2 \text{ pts})$$

2. Considérons la série (X_i, Y_i) suivante :

x_i	a	4	b	8	c	12
y_i	-3	a	4	$-b$	7	c

(a) Exprimer $\bar{X}$, $\bar{Y}$ et $\frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 x_i y_i$ en fonction des réels a , b et c . (1,5 pt)

(b) Déterminer a , b et c sachant que : $\bar{X} = \frac{40}{6}$, $\bar{Y} = \frac{14}{6}$ et $\text{cov}(X, Y) = \frac{179}{18}$. (1,5 pt)

Bac 11. 2018-SN

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettent d'afficher des formulaires ou des tracés de courbes sont interdits. Leur utilisation sera considérée comme une fraude. (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998.)

Exercice 10.2.5. (06 points)

Chaque borne réponse rapporte 1,5 point et chaque mauvaise ou absence de réponse vaut 0 point. Choisir la bonne réponse.

i est un nombre complexe

1. i^{2018} est égal à :

a) $2018i$; b) $-i$; c) 1 ; d) -1 .

2. $\cos^3 x$ est égal à :

a) $\frac{1}{4} \cos 3x + \frac{3}{4} \cos x$; b) $3 \cos x$; c) $1 - \sin 3x$; d) $\cos 2x \sin x - \cos x \sin 2x$.

3. $\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}\right)^{12}$ est égal à :

a) -1 ; b) 0 ; c) 1 ; d) $12 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)$.

4. $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$ est égal à :

a) $\frac{1}{e}$; b) $\frac{1}{2}$; c) 1 ; d) e .

Exercice 10.2.6. (05 points)

Une école de formation professionnelle veut organiser des circuits de sorties pédagogiques comprenant, dans un ordre donné, les 6 villes sénégalaises : Dakar, Fatick, Kédougou, Saint-louis, Théis et Ziguinchor.

1. Combien y a-t-il de circuits possibles ?

2. Si la première ville visitée est Saint-Louis, combien peut-on organiser de circuits ? (01 pt)

3. Cette école programme aussi des circuits permettant de visiter successivement 2 villes. (01 pt)

(a) Si les excursions sont organisées dans 6 villes citées précédemment, quelle est la probabilité pour que Fatick ou Ziguinchor en fasse partie ? (01,5 pt)

(b) Si l'école décide d'organiser 56 circuits dans d'autres villes, combien de villes différentes va-t-elle faire visiter ? (01,5 pt)

Exercice 10.2.7. (04 points)

On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_n = e^{2-n}$.

1. (a) Montrer que (U_n) est une suite géométrique. préciser la raison et le premier terme. (01 pt)

(b) Soit (V_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = \ln U_n$.

i. Montrer que (V_n) est une suite arithmétique. (0,5 pt)

ii. Préciser la raison et le premier terme. (0,5 pt)

MATHEMATIQUES-2018-SN

(c) On pose $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$ et $P_n = U_0 \times U_1 \times \cdots \times U_n$.

i. Exprimer S_n et P_n en fonction de n . (01 pt)

ii. Étudier la convergence de (S_n) et de (P_n) . (01 pt)

Exercice 10.2.8. (05 points)

1. En utilisant une intégration par partie calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x dx$. (02 pts)

2. Calculer l'intégrale suivante : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^2 x dx$. (03 pts)

Bac 12. 2019-SN

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbes sont interdits. Leur utilisation sera considérée comme une fraude. (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998.)

Exercice 10.2.9. (04 points)

On considère la série statistique à double caractère, x et Y , donnée par le tableau ci-dessous.

$Y \backslash X$	$45 \leq x < 50$	$50 \leq x < 55$	$55 \leq x < 60$
$150 \leq y < 155$	9	1	0
$155 \leq y < 160$	18	4	1
$160 \leq y < 165$	5	12	6

- Calculer la moyenne $\bar{X}$ et l'écart type σ_X de la variable X . (1 pt)
 - Calculer la moyenne $\bar{Y}$ et l'écart type σ_Y de la variable Y . (1 pt)
- Calculer le coefficient de corrélation entre X et Y . (1,5 pt)
 - Un ajustement affine de la série (X, Y) est-il justifié? (0,5 pt)

Exercice 10.2.10. (07 points)

La fonction f a pour tableau de variations :

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow -5$	$\searrow +\infty$	$\searrow -\infty$

- Donner en utilisant ce tableau les limites suivantes :
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(\sqrt{x})$. (0,5 pt)
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(-1 + \frac{1}{x}\right)$. (0,5 pt)
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5}{f(x) + 3}$. (0,5 pt)
- Déterminer le nombre de solutions dans D_f de l'équation : $f(x) = 5$. (0,5 pt)
- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une racine unique $\alpha > 0$. En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x . (1 pt)
- Dans cette question, on suppose que f est dérivable en tout point de D_f .

MATHEMATIQUES-2019-SN

- (a) Préciser le nombre dérivé de f en -1 en justifiant clairement. (0,75 pt)
- (b) Dresser le tableau de signe de f' dérivée de f . (0,75 pt)
5. On suppose maintenant que le point d'abscisse -1 est un point anguleux de la courbe représentative de f à demi-tangentes non verticales et non horizontales.
- (a) Préciser le signe des nombres dérivés de f à gauche et à droite en -1 .
- (b) Tracer une courbe susceptible de représenter f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.

Exercice 10.2.11. (04 points)

1. Résoudre l'équation différentielle $(E) : 4y'' - 8y' + 13y = 0$. (1,5 pt)
2. Déterminer la solution particulière f de (E) dont la courbe représentative $\mathcal{C}$ passe par le point $A\left(\frac{\pi}{2}; 3\right)$ et admet une tangente parallèle à la droite d'équation $y = 0$ en ce point. (2,5 pt)

Exercice 10.2.12. (04 points)

Soit (U_n) une suite définie par $U_n = \int_n^{n+1} e^{-2x} dx$.

1. Calculer U_0 , U_1 et U_2 . (1,5 pt)
2. Montrer que $U_n = -\frac{1}{2}e^{-2n}(e^{-2} - 1)$. (1,5 pt)
3. Démontrer que (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison. (1 pt)
4. Calculer la somme : $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_{n-1}$. (1 pt)

Bac 13. 2020-SN

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettent d'afficher des formulaires ou des tracés de courbes sont interdits. Leur utilisation sera considérée comme une fraude. (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998.)

Exercice 10.2.13. (10 points)

Plusieurs réponses peuvent être exactes. Choisir les bonnes réponses en les justifiant. Chaque réponse justifiée est notée (1 point) et chaque réponse fautive (0 point).

- Soit f une fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\frac{f(x)}{2x^2+3} = 1$. Alors on peut conclure que :
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2x^2 + 3$,
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$,
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$,
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x^2) = 1$.
- Soit la suite (U_n) définie par $U_0 = 3$ et $U_{n+1} = 2U_n - 1$. Alors on peut conclure que :
 - la suite (U_n) vers 0,
 - la suite (W_n) définie par $W_n = U_n - 1$ est géométrique,
 - la suite (U_n) est bornée,
 - la suite (V_n) définie par $V_n = \ln(U_n - 1)$ est arithmétique.
- Une urne contient 6 jetons blancs et 4 jetons noirs. On tire un jeton 10 fois de suite avec remise. On note X la variable aléatoire égale au nombre de jetons noirs obtenus à l'issue des 10 tirages. Alors on peut conclure :
 - X est une loi binomiale de paramètre 10 et $\frac{2}{5}$,
 - $P(X = 0) = \frac{1}{2^{10}}$,
 - $P(X \leq 7) = 1 - P(X \geq 7)$,
 - $E(X) = 4$.
- Soit $z' = \frac{2z-1}{z+i}$ avec $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$. Alors on peut conclure que l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z'| = 1$:
 - est un cercle passant par l'origine,
 - est une droite,
 - est une droite privée d'un point,
 - est un cercle privé d'un point.
- Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose $I_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} \left(2 \frac{\ln t}{t}\right) dx$. Alors on peut conclure que :
 - pour tout $n \geq 1$, $I_n = 2n + 1$,
 - la suite $\left(\frac{I_{n+1}}{I_n}\right)$ a pour limite 2.
 - $k \geq 1$, $I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_k = k^2$,
 - $\lim_{n \rightarrow +\infty} (I_{n+1} - I_n) = 0$.

Exercice 10.2.14. (10 points)

On considère une fonction numérique f d'une variable réelle x . La droite (Δ) d'équation $y = 3x + 1$ est une tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse $x = 2$.

- Déterminer $f'(2)$. (1 pt)
 - Calculer $f(2)$. (1,5 pt)
 - Sachant que $f(x) = a \ln\left(\frac{x}{2}\right) + b$, déterminer a et b . (2 pts)
- Soit g la fonction numérique d'une variable réelle x définie par $g(x) = f(x^2 + 1)$. On note (C_g) la courbe représentative de g et P un point de (C_g) d'abscisse $x = 1$.
 - Montrer que la tangente (Δ') à (C_g) au point P a pour coefficient directeur 6. (1 pt)
 - Donner l'équation cartésienne de (Δ') . (1,5 pts)

MATHEMATIQUES-2020-SN

(c) Montrer que $g(x) = 6 \ln \left(\frac{x^2+1}{2} \right) + 7$. **(1 pt)**

3. Donner les coordonnées du point d'intersection de (Δ) et (Δ') . **(2 pts)**

Bac 14. 2021-SN

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettent d'afficher des formulaires ou des tracés de courbes sont interdits. Leur utilisation sera considérée comme une fraude. (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998.)

Exercice 10.2.15. (10 points)

Dans ce questionnaire à choix multiples, une seule réponse est juste. Indiquer sur la copie numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie en la justifiant. Chaque bonne réponse rapporte (2 points). Une réponse fausse ou une absence de réponse est notée (0 point).

- La limite en $+\infty$ de la fonction f définie par $f(x) = x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$ est égale à :
a. 2 b. $+\infty$ c. $\frac{1}{2}$ d. 0
- Si $p(A) = \frac{7}{10}$, $p_A(E) = \frac{2}{5}$ et $p(E) = \frac{31}{100}$, alors la probabilité de A sachant E , $p_E(A)$ est égale à :
a. $\frac{7}{25}$ b. $\frac{28}{31}$ c. $\frac{3}{25}$ d. $\frac{2}{5}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le complexe $(1+i)^n$ est un imaginaire pur si et seulement si :
a. $n = 4k$ b. $n = 2 + 4k$ c. $n = 8k$ ($k \in \mathbb{Z}$).
- Si $F : x \mapsto x(\alpha \ln x + \beta)$ est une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $f : x \mapsto -\ln x$, alors (α, β) est égal à :
a. $(-1, 0)$ b. $(0, 1)$ c. $(-1, 1)$ d. $(-1, -1)$.
- L'intégrale $\int_{-2}^4 \frac{2x}{x^2+1} dx$ est égale à :
a. $\ln \frac{17}{5}$ b. $-\ln 17 + \ln 5$ c. $\ln 17 + \ln 5$.

Exercice 10.2.16. (10 points)

Soit f est une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

- $f'(x) > 0 \iff x \in]-\infty; 0[\cup]\frac{1}{5}; 2[$; $f'(x) < 0 \iff x \in]0; \frac{1}{5}[\cup]2; +\infty[$; $f'(\frac{1}{5}) = 0$.
- $f(0) = 1$; $f(2) = 3$; $f(\frac{1}{5}) = \frac{3}{4}$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x - 2] = 0$.
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - 1}{x} = \frac{1}{2}$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - 1}{x} = -\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - 3}{x - 2} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - 3}{x - 2} = -\infty$.

- Dresser le tableau de variations de f . (2,5pts)
- Donner les équations des asymptotes à la courbe (C_f) de f . (2pts)
- f est-elle dérivable en 0, en 2 ? Justifier les réponses. (2pts)
- Préciser les tangentes ou demi-tangentes à (C_f) . (1,5pt)
- Tracer une courbe susceptible de représenter f dans un repère orthonormé d'unité graphique 1 cm. (2pts)

Bac 15. 2022-SN

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettent d'afficher des formulaires ou des tracés de courbes sont interdits. Leur utilisation sera considérée comme une fraude. (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998.)

Exercice 10.2.17. (07 points)

Une urne contient trois pièces de 5 francs, cinq pièces de 10 francs et deux pièces de 25 francs. On tire simultanément deux pièces.

On suppose que les tirages sont équiprobables.

Dans la chaque énoncé donner en justifiant la bonne réponse, **1 point** pour chaque réponse correcte justifiée.

1. A « On tire deux pièces de 5 francs ». Alors la probabilité de l'événement A est :

a. $P(A) = \frac{9}{15}$ b. $P(A) = \frac{3}{15}$ c. $P(A) = \frac{1}{15}$ d. $P(A) = \frac{2}{15}$.

2. B « On tire deux pièces de 10 francs et une pièce de 5 francs ». Alors :

a. $P(B) = \frac{7}{15}$ b. $P(B) = \frac{5}{15}$ c. $P(B) = \frac{7}{15}$ d. $P(B) = \frac{2}{9}$.

3. C « On tire une pièce de 10 francs et une pièce de 5 francs ». Alors :

a. $P(C) = \frac{4}{15}$ b. $P(C) = \frac{5}{15}$ c. $P(C) = \frac{7}{15}$ d. $P(C) = \frac{9}{15}$.

4. G « On tire deux pièces de 25 francs ». Alors :

a. $P(G) = \frac{12}{45}$ b. $P(G) = \frac{5}{45}$ c. $P(G) = \frac{7}{15}$ d. $P(G) = \frac{1}{45}$.

5. D « La somme des pièces tirées est 30 francs ». Alors :

a. $P(D) = \frac{2}{15}$ b. $P(D) = \frac{3}{45}$ c. $P(D) = \frac{7}{15}$ d. $P(D) = \frac{3}{5}$.

6. E « La somme des pièces tirées est 35 francs ». Alors :

a. $P(E) = \frac{8}{15}$ b. $P(E) = \frac{1}{15}$ c. $P(E) = \frac{2}{9}$ d. $P(E) = \frac{7}{15}$.

7. F « La somme des pièces tirées est un multiple de 10 francs ». Alors :

a. $P(F) = \frac{4}{9}$ b. $P(F) = \frac{21}{45}$ c. $P(F) = \frac{2}{15}$ d. $P(F) = \frac{1}{15}$.

Exercice 10.2.18. (03 points)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z : $z^2 - 2z + 4 = 0$.

On donnera les solutions sous forme algébrique, puis trigonométrique et ensuite exponentielle.

01+01+01 pts

Exercice 10.2.19. (10 points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x^2+1}, & x < 1 \\ \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{2}, & x \geq 1 \end{cases}$.

MATHEMATIQUES-2022-SN

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$, d'unité graphique 2cm.

1. (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 0,5 pt
(b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 0,5 pt
(c) Interpréter les résultats précédents en termes d'asymptote. 01 pt
(d) résoudre l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$. 01 pt
2. (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$, puis $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$. 01 pt
(b) Interpréter les résultats 2.a. f est-elle dérivable en 1 ? 01 pt
3. Calculer $f'(x)$ et donner son signe : 02 pts
a. pour $x < 1$, b. pour $x > 1$.
4. Dresser le tableau de variations de f . 01 pt
5. représenter (C_f) et les asymptotes dans le repère orthonormé $(0; \vec{i}; \vec{j})$. 02 pts

Bac 16. 2023-SN

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbes sont interdits. Leur utilisation sera considérée comme une fraude. (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998.)

Exercice 10.2.20. (05 points)

Pour chaque item, choisir la lettre correspondant à la bonne réponse en justifiant votre choix.

1. La forme trigonométrie de $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ est :

$$A = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} ; \quad B = -\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} ; \quad C = \cos \left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4}\right).$$

(01 pt)

2. $(-1+i)^{11}$ est égal à : $A = -11 + 11i$; $B = -32 + 32i$; $C = 32 + 32i$.

(01 pt)

3. La valeur exacte de $\int_0^1 x e^x dx$ est : $A = e$; $B = 1$; $C = 0$.

(01 pt)

4. Les solutions de l'équation différentielle $Y'' + 2y - 3y = 0$ sont sous la forme :

$$A = e^{-3x}(a \cos x + b \sin x) ; \quad B = a e^x + b e^{-3x} ; \quad C = e^x[a \cos(-3x) + b \sin(-3x)] \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont des réels.}$$

(01 pt)

5. La suite (U_n) définie par $U_0 = 3$ et $U_n = -\frac{5}{3}U_{n-1}$.

$$A : \text{converge vers } 0 ; \quad B : \text{est monotone} ; \quad C : \text{vérifie } U_n = \frac{(-5)^n}{3^{n-1}}.$$

(01 pt)

Exercice 10.2.21. (05 points)

Une enquête a été menée auprès de 30 ménages. Le tableau à double entrée ci-contre donne, pour chaque ménage, le nombre X d'enfants et le revenu annuel Y , en millions de francs CFA. Soit la série statistique double définie par le tableau ci-dessous où X et Y représentent les caractères étudiés.

$Y \backslash X$	5	855	11	14
7	0	11	3	4
12	2	5	1	1
27	2	3	2	1
38	1	2	0	2

1. Donner les séries marginales associées aux caractères X et Y .

(01 pt)

2. Déterminer les moyennes $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$ de ces séries marginales.

(01,5 pt)

MATHEMATIQUES-2023-SN

3. (a) Calculer les variances $V(X)$ et $V(Y)$ de ces séries marginales.

(02 pts)

(b) En déduire les écarts-types $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$ des séries marginales.

(0,5 pt)

Exercice 10.2.22. (05 points)

On considère la suite (U_n) définie par : $U_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} dx$.

1. Démontrer que $U_0 + U_1 = 1$.

(01 pt)

2. (a) Calculer U_1 .

(01 pt)

(b) en déduire U_0 .

(0,5 pt)

3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \geq 0$.

(0,5 pt)

4. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} + U_n = \frac{1-e^{-n}}{n}$.

(01 pt)

5. Déduire des questions 3. et 4. que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq \frac{1-e^{-n}}{n}$.

(0,5 pt)

6. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

(0, pt)

Exercice 10.2.23. (05 points)

La maladie à corona virus affecte 15% de la population d'un pays.

On met au point un test rapide pour diagnostiquer la maladie.

- Si le test est positif, la personne testée est malade dans 95% des cas.
- Si le test est négatif, la personne testée est malade dans 2% des cas.

On note M l'événement « être malade », T l'événement « avoir un test positif » et $p(A)$ la probabilité de l'événement A quelconque de cette expérience aléatoire.

On pose : $p(T) = \alpha$.

1. faire un arbre pondéré qui traduit cette situation.

2. (a) Donner les valeurs de $p(M)$ et $p(\bar{M})$.

(0,5 pt)

(b) Exprimer $p(\bar{T})$ en fonction de α .

(0,5 pt)

3. (a) Montrer que $p(M) = 0,02 + 0,93\alpha$.

(01 pt)

(b) En déduire la valeur exacte de α .

(01 pt)

4. Une personne est malade. Déterminer la probabilité que son test ait été négatif.

(01 pt)

[illegible]