Thierno Korka DIALLO

Ingénieur en Génie Électromécanique — Diplômé de l'École Polytechnique de Thiès

Collection CRACKS

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Mathématiques

La Clé du Bac

TS2

Plus de 275 exercices classés en 10 chapitres

Exercices corrigées

Tout ce qu'il vous faut pour devenir un génie en maths

Préface

Ce livre s'adresse aux élèves de Terminale S2.

Il propose 275 exercices regroupés en répartis sur 10 chapitres qui vous permettront d'évaluer votre maîtrise des connaissances minimales requises mais aussi de mesurer votre sens de l'adaptation devant des exercices de niveau de difficulté supérieure, bien sûr pour ceux qui veulent aller plus loin. À la fin du livre, l'élève trouvera les solutions de quelques exercices, lesquelles sont détaillés mais ne sauraient être cependant des solutions types.

Il est clair que ce manuel ne saurait se substituer aux professeurs dans leurs enseignements, ni empiéter sur les programmes ultérieurs, mais il vient en appoint aux activités déjà effectuées en classe.

J'espère que cet ouvrage atteindra le principal objectif pour lequel il a été conçu à savoir constituer un répertoire d'exercices pour le travail crypto-personnel des élèves afin d'améliorer leur niveau déjà assez appréciable en mathématiques.

Toute suggestion ou jugement inspirés par une critique vraiment scientifique est pour moi le bienvenu. Envers les préjugés de ce qu'on appelle « l'opinion publique », à laquelle je n'ai jamais fait de concessions, j'ai pour devise, après comme avant, la parole du Grand Florentin : Suis ton chemin et laisse dire les gens.

« Un vrai génie est un vrai rêveur. Mais le vrai génie est celui qui parvient à transformer ses rêves en réalité »

Thierno Korka DIALLO

Dakar le 14 Juillet 2017

Remerciements

Parmi ceux qui m'ont fait bénéficier de leur avis, de leurs conseils et de leur expérience, je souhaite remercier mon ami, frère et cousin **Mamadou Dian DIALLO**, brillant étudiant en doctorat de mathématiques à l'université de Ziguinchor, pour ses précieuses contributions, **M. Ibnou Abasse NDIAYE,** professeur de mathématiques au lycée Blaise DIAGNE, **M. Modou FAYE** professeurs de Mathématiques au Lycée Djignabo de Ziguinchor, pour son soutien, **M. Ibrahima DIAO** (LDZ), **M. Ismaïla FATY** (LDZ), tous professeurs de Mathématiques au Lycée Djignabo de Ziguinchor, **M. Moussa FALL** professeur de Mathématiques au Lycée Elhadj Omar Lamine Badji de Ziguinchor. Je tiens également à honorer ma dette contractée auprès de mes anciens professeurs des Sciences Physiques notamment à **M. Mafal FALL**, ancien professeur de Sciences Physiques au Lycée Djignabo de Ziguinchor, secrétaire général du syndicat RÉEL, **M. Babacar POUYE** (LDZ), **M. Yaya THIAM** (LDZ), **M. Daouda SOW** (LDZ), **M. Abdou GUENE** (LDZ), **M. Feu Ousmane FALL,** Paix à son âme (LDZ), **M. DIAKITÉ** (LSLL), **Messieurs YAGUE** et **FAYE** professeurs de Sciences Physique au Lycée Elhadj Omar Lamine BADJI.

J'adresse des remerciements particuliers à **M. Waly NDIAYE** (lycée de Saly), **M. CISSE** (lycée Demba DIOP), **M. Djibril FALL** (Maison d'Education Mariama BA), **M. Omar Kata NIASS** (lycée Taiba).

J'adresse des remerciements particuliers à de brillants élèves ingénieurs polytechniciens : **M. Saer DIA**, **M. Elhadj Baba THIAM**, **M. Samba CISSE** pour leur soutien constant.

J'adresse mes remerciements particuliers à mes amis et camarades de Promotion de TSI : **Khadim NDIAYE**, **Salimata Dédji MANE** et **Maïmouna BALDE**.

Contacts de Thierno Korka DIALLO

Téléphone (Sénégal) : (+221) 77 465 32 33 — **Mail** : korka1991@yahoo.com

Page facebook : Club de l'Excellence — **Groupe Facebook** : Les Amis du Club de l'Excellence

<u>Alerte 1</u> : *Un travail laborieux constellé d'ardues journées et nuits entières a été consacré pour la rédaction de ce présent ouvrage et ceci dans la seule souche de la mise en gage de votre réussite.*

Aidez-nous donc à nous soucier davantage de votre réussite, à vivre de notre passion en vous gardant de photocopier ce présent ouvrage.

Nous vous implorons de ne pas emprunter les sentiers battus de cet acte tant indigne qu'infâme qu'est la piraterie.

<u>Alerte 2</u> : *Dans l'intention de ternir mon image, des éléments malintentionnés publient des « annales » en mon nom. De ce fait, je décline toute ma responsabilité quant à l'utilisation par une tierce personne de mon nom ou de mes documents protégés à fins personnelles ou lucratives.*

CONSEILS PRATIQUES – JOUR J

1. Veille du bac

1.1 Préparez votre convocation ainsi que votre pièce d'identité

1.2 N'oubliez pas :

- Vos stylos. Prenez-en au moins cinq (05).

- Vos crayons de couleurs, ainsi que votre crayon noir.

- Votre règle et vos matériels géométriques (compas, rapporteur, double décimètre, taille).

- Votre calculatrice avec des piles neuves. N'utilisez pas une machine calculatrice que vous ne maitrisez pas.

2. Le jour J

Apres être entré en salle, le surveillant vous demandera de garder sur votre table, le strict nécessaire, tout le reste sera déposé le long du mur.

Le sujet est distribué :

2.1 Lisez le sujet *en entier*

2.2 Relevez les points attribués aux différents exercices. Déterminer alors le temps à passer sur chaque exercice.

- Un exercice de 3 points doit être traité en 36 minutes

- Un exercice de 4 points doit être traité en 48 minutes

- Un exercice de 5 points doit être traité en 60 minutes

2.3 L'épreuve dure 4 heures, essayez de réserver 15 minutes en fin d'épreuve *pour la relecture.*

2.4 Commencez par traiter les exercices qui vous semblent plus « faciles ».

2.5 Soyez rigoureux dans tout votre travail

2.6 Respectez la numérotation des questions

2.7 Séparez les réponses par une ligne.

2.8 Encadrez vos résultats

2.9 Si vous butez sur une question, n'y passez pas trop de temps, admettez le résultat et continuez votre travail.

2.10 Prenez plusieurs intercalaires

2.11 Contrôlez de temps en temps le temps qui vous reste.

2.12 Si possible, consacrez le dernier quart d'heure pour la relecture de la copie.

3 Rédaction

3.1 Le fond

3.1.1 Enoncez complètement les théorèmes avant leur utilisation si nécessaire.

3.1.2 Attention, votre calculatrice peut vous induire en erreur.

3.2 La forme

3.2.1 Est-il besoin de rappeler qu'une écriture lisible est indispensable car certaines écritures peuvent être mal lues par le correcteur :

Ainsi : x et n peuvent se confondre. Z et 2,

3.2.2 Attention aux indices et aux exposants

3.2.3 N'abrégez pas.

3.2.4 Tout calcul doit être suivi d'une conclusion sous forme d'une phrase. Les Sciences Physiques ne sont pas que des calculs.

Concours (publiques) ouvert aux élèves de terminale

Tout élève souhaitant avoir les fascicules de préparation à ces concours pourra nous contacter au 77 465 32 33

- Concours d'Entrée à l'Ecole Polytechnique de Thiès (EPT)

- Concours d'Entrée à l'Ecole Supérieure Polytechnique (ESP)

- Concours ITS (Ingénieur des Travaux Statistiques)

- Concours d'Entrée à l'Ecole Militaire de Santé (EMS)

- Concours ENSA (Ecole Nationale de la Science Agronome)

- Concours d'Entrée aux Grandes Ecoles Militaires

— Table des matières —

Première partie — Organisation de données

Probabilités 8

Statistiques 17

Deuxième partie — Algèbre

Nombres complexes 25

Troisième partie — Analyse

Limite – Continuité 41

Dérivation – Etude de fonctions 49

Primitives – Fonction logarithme népérien 64

Fonction exponentielle 78

Suites numériques 91

Calcul intégral 105

Equations différentielles 120

Quatrième partie

Indications et solutions 132

Thierno Korka DIALLO – Directeur Technique de SENESAC
Ingénieur électromécanicien, diplômé de l'Ecole Polytechnique de Thiès

Première partie

Organisations de données

Génie = 1% d'inspiration + 99% de transpiration

Méditez ...

" On ne peut jamais acquérir le savoir sans emprisonner son âme charnelle, sans la souffrance, la fatigue, la faim et la soif. Quiconque veut avoir la science doit tout lui donner. Entraîne-toi à la veillée nocturne, à la résistance à la faim et à la soif. Quiconque ne le cherche pas ainsi, ne l'aura point. Toi qui veux acquérir le savoir, révise à chaque fois, à chaque instant. "

Cheikh Ahmadou BAMBA

Professeur Cheikh Anta DIOP

Le professeur Cheikh Anta DIOP (1923 - 1986) fut un historien, anthropologue et homme politique sénégalais. Il a mis l'accent sur l'apport de l'Afrique et en particulier de l'Afrique noire à la culture et à la civilisation mondiale. Cheikh Anta DIOP a toutefois eu un indéniable rôle de visionnaire en ce qui concerne la place de l'Afrique dans l'histoire.

Probabilités

EXERCICE 1

Les parties sont indépendantes.

Première partie

Dans chacune de situations décrites ci-dessous, énoncer l'événement contraire de l'événement donné.

1) Dans une classe, on choisit deux élèves au hasard.

A : « Les deux élèves sont des filles ».

2) Dans un groupe de suisses et de belges, on discute avec une personne.

B : « La personne est un homme belge ».

3) Au restaurant, Luc prend un plat et un dessert.

C : « Luc prend une viande et une glace ».

4) A une loterie, Elise achète 3 billets.

D : « L'un des billets au moins est gagnant »,

E : « Deux billets au maximum sont gagnants.

Deuxième partie

Une urne contient des boules blanches, noires et rouges. On tire une boule de l'urne. On note :

A : « Tirer une boule blanche ».

B : « Tirer une boule ni blanche ni rouge ».

C : « Tirer une boule noire ou une boule rouge ».

1) A et B sont-ils incompatibles ?

2) B et C sont-ils incompatibles ?

3) Traduire par une phrase ne comportant pas de négation $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

Troisième partie

Lors d'un jet de deux dés cubiques, on s'intéresse aux événements suivants :

A : « La somme obtenue est au moins égale à 5 ».

B : « La somme obtenue est au plus égale à 5 ».

C : « La somme obtenue est strictement inférieure à 3 ».

1) A et B sont-ils contraires ?

2) $\overline{B}$ et C sont-ils incompatibles ?

3) Traduire par une phrase $\overline{C}$.

4) A et $\overline{C}$ sont-ils incompatibles ?

EXERCICE 2

On choisit une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. On note :

A l'événement : "La carte choisie est un pique".

B l'événement : "La carte choisie est rouge (cœur ou carreau)".

C l'événement : "La carte choisie est une figure (valet, dame, roi)".

1) Présenter un modèle mathématique décrivant l'expérience aléatoire.

2) Déterminer les probabilités des événements A, B, C, $A \cap B$, $B \cap C$, $A \cup B$, $A \cup C$.

3) Déterminer la probabilité de l'événement D "La carte choisie n'est ni un pique ni une figure".

EXERCICE 3

Un sac contient 7 boules noires et 5 boules vertes indiscernables au toucher.

On tire successivement et sans remise 3 boules du sac.

Calculer les probabilités des événements suivants :

A "obtenir un tirage unicolore"

B " obtenir au moins une boule verte"

EXERCICE 4

Une urne contient 7 boules vertes et 5 boules noires indiscernables au toucher. On tir simultanément et sans remise 2 boules de l'urne. On considère les événements suivants :

A : " Obtenir une boule verte au premier tirage"

B : " Obtenir une boule verte au second tirage"

Calculer P(A), P(B/A) et P(B)

EXERCICE 5

On jette 3 fois un dé à 6 faces, et on note a, b et c les résultats successifs obtenus.

On note $Q(x) = ax^2 + bx + c$. Déterminer la probabilité pour que :

Q ait deux racines réelles distinctes.

Q ait une racine réelle double.

Q n'ait pas de racines réelles.

EXERCICE 6

Dans une assemblée de 250 personnes, on ne remarque que les hommes portant la cravate ou ayant les yeux bleus. Il y'a 120 hommes qui portent la cravate, 85 hommes qui ont les yeux bleus, dont 50 portent la cravate.

On discute avec une personne choisie au hasard dans cette assemblée.

1) Quelle est la probabilité que ce soit un homme portant la cravate.

2) Quelle est la probabilité que ce soit un homme aux yeux bleus et portant la cravate.

3) Quelle est la probabilité que ce soit un homme aux yeux bleus ou portant la cravate.

4) Quelle est la probabilité de discuter avec une personne qui n'est ni un homme aux yeux bleus, ni un homme portant la cravate ?

EXERCICE 7

Un tireur vise une cible. La probabilité pour qu'il touche la cible est 0,7. Il tire trois fois de suite. On note X le nombre de fois où il a atteint la cible.

Déterminer la loi de probabilité de X.

EXERCICE 8

Un sac contient 10 boules blanches et 08 boules vertes indiscernables au toucher. On tire simultanément 04 boules du sac. Soit X la variable égale au nombre de boules blanches tirées.

1) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X.

2) Déterminer la loi de probabilité de X.

EXERCICE 9

On sélectionne les candidats à un jeu télévisé en les faisant répondre à dix questions. Ils devront choisir, pour chacune des questions, parmi quatre affirmations, celle qui est exacte. Un candidat se présente et répond à toutes les questions *au hasard*. On appelle X la variable aléatoire désignant le nombre de réponses exactes données par ce candidat à l'issue du questionnaire.

1) Quelle est la loi de probabilité de X ?

2) Calculer la probabilité pour qu'il fournisse au moins 8 bonnes réponses, et soit ainsi admis.

EXERCICE 10

Pierre possède un jeu électronique. Une partie est un duel entre Pierre et un monstre choisi au hasard parmi deux par la machine. On pose :

A l'événement « Pierre combat le monstre M_1 »

B l'événement « Pierre combat le monstre M_2 »

Les deux monstres sont de forces inégales.

On admet que si Pierre combat M_1, la probabilité qu'il gagne la partie est $\frac{1}{3}$.

Si Pierre combat M_2, la probabilité qu'il gagne la partie est $\frac{1}{4}$.

1) Pierre joue une partie. Quelle est la probabilité qu'il gagne ?

2) Sachant qu'il a gagné, quelle est la probabilité qu'il ait combattu M_1 ?

EXERCICE 11

Le jeu du tapis vert consiste à cocher quatre cartes :

Un seul pique, un seul carreau, un seul trèfle, un seul coeur sur le tableau suivant :

♠	1	R	D	V	10	9	8	7
♥	1	R	D	V	10	9	8	7
◆	1	R	D	V	10	9	8	7
♣	1	R	D	V	10	9	8	7

1) Un joueur ayant coché dans les conditions imposées quatre cartes sur cette table, quelle est la probabilité de chacun des événements suivants qui, seuls, permettent un gain :

A : « Les quatre cartes cochées ont été tirées »

B : « Exactement trois des cartes cochées ont été tirées »

C : « Exactement deux des cartes cochées ont été tirées »

En déduire que la probabilité pour que le joueur soit gagnant est égale à $\frac{323}{4096}$.

2) Un tirage a lieu en direct à la télévision, chacun des sept jours de la semaine. On suppose qu'un joueur joue tous les jours une table dans les conditions imposées.

Quelle est la probabilité pour que le joueur soit gagnant en une semaine :

a) Exactement trois fois ?

b) Au moins une fois ?

EXERCICE 12

Une urne contient 6 boules indiscernables au toucher : 4 boules vertes et 2 boules jaunes.

1) On tire au hasard simultanément 2 boules de l'urne et on note X la variable aléatoire qui à chaque tirage de 2 boules, associe le nombre de boules vertes tirées. Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.

2) On tire au hasard deux fois de suite 2 boules simultanément, les boules tirées n'étant pas remises dans l'urne. On note A, B, C et D les événements suivants :

A : « Aucune boule verte n'est tirée au cours du premier tirage de 2 boules. »

B : « Une boule verte et une boule jaune sont tirées au cours du premier tirage de 2 boules. »

C : « Deux boules vertes sont tirées au cours du premier tirage de 2 boules. »

D : « Une boule verte et une boule jaune sont tirées au cours du deuxième tirage de 2 boules. »

a) Calculer $P(D/A)$, $P(D/B)$ et $P(D/C)$.

b) En déduire la probabilité des événements $D\cap A$, $D\cap B$, et $D\cap C$.

c) Calculer $P(D)$.

On remarquera que $D = D\cap(A\cup B\cup C)$.

EXERCICE 13

Un sac contient 10 jetons numérotés de 1 à 10. On en tire simultanément deux au hasard. On appelle x le petit des numéros tirés. Donner la loi de probabilité de la variable x, et calculer son espérance mathématique et sa variance.

EXERCICE 14

Une urne contient 6 boules blanches et 4 boules rouges indiscernables au toucher.

Un « essai » consiste à tirer simultanément 3 boules de l'urne. Lors d'un essai, un joueur gagne 1 point s'il a obtenu au moins 2 boules rouges.

1) Calculer la probabilité p d'obtenir 1 point au cours d'un essai.

2) Soit X la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules rouges obtenues au cours d'un essai.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer son espérance mathématique $E(X)$ et son écart-type $\sigma(X)$.

c) Déterminer la fonction de répartition $F(X)$ et construire sa courbe dans le plan muni d'un repère convenablement choisi.

EXERCICE 15

On jette au hasard simultanément deux dés cubiques. Le dé est normal. Le dé B est pipé de sorte que ses faces chiffrées de 1 à 6, apparaissent avec la probabilité :

$$P(1) = P(2) = P(3) = 0{,}1 \quad ; \quad P(4) = P(5) = 0{,}2 \quad ; \quad P(6) = 0{,}3$$

On considère la variable aléatoire X représentant le plus grand des deux chiffres portés par les faces supérieures de A et B.

1) Etudier la loi de P(X) et la fonction de répartition F(X) associées à X.

2) Construire la représentation graphique de F(X) dans un repère orthonormé. Calculer l'espérance mathématique E(X) et la variance V(X).

EXERCICE 16

Un porte-monnaie contient quatre pièces de 500 F CFA et six pièces de 200 F CFA. Un enfant tire au hasard et simultanément 3 pièces de ce porte-monnaie.

1) Calculer la probabilité de l'événement A :"tirer trois pièces de 500 F".

2) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de pièces de 500 F figurant parmi les trois pièces tirées.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de X.

3) L'enfant répète cinq fois l'expérience en mettant chaque fois les trois pièces tirées dans le porte-monnaie.

Quelle est la probabilité que l'événement A se réalise trois fois à l'issue des cinq tirages ?

EXERCICE 17

Une classe de terminale S d'un lycée compte 30 élèves dont 10 filles.

1) À chaque séance du cours de mathématiques le professeur interroge au hasard trois élèves.

Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : " Exactement deux des trois élèves interrogés sont des garçons " ;

B : " Les trois élèves interrogés sont de même sexe " ;

C : " Il y a au plus une fille parmi les trois élèves interrogés ".

2) Parmi les 19 internes de la classe, on compte 4 filles.

On choisit au hasard dans cette classe deux délégués de sexes différents.

Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

D : " Les deux délégués sont internes ",

E : " Un seul des deux délégués est interne ".

3) À la fin de chaque séance, le professeur désigne au hasard un élève qui effacera le tableau. Un même élève peut être désigné plusieurs fois.

a) Déterminer la probabilité P_n pour que le tableau soit effacé au moins une fois par une fille à l'issue de n séances.

b) Déterminer le nombre minimal de séances pour que $P_n > 0{,}9999$.

EXERCICE 18

On considère deux urnes U_1 et U_2 :

— U_1 contient 6 boules blanches et 4 boules noires.

— U_2 contient 8 boules blanches et 2 boules noires.

D'une de ces urnes, choisie au hasard, on extrait une boule que l'on remet dans l'urne :

Si la boule est blanche, on recommence le tirage dans la même urne.

Si la boule est noire, on recommence le tirage dans l'autre urne.

On applique cette règle à chaque tirage et on suppose qu'à l'intérieur de chaque urne, les tirages sont équiprobables. n étant un entier naturel non nul, on note P_n la probabilité pour que le $n^{\text{ième}}$ tirage se fasse dans l'urne U_1.

1) Calculer P_1.

2) Dans quel cas le deuxième tirage se fait-il dans U_1 ?

3) Calculer P_2.

4) Démontrer que : $\forall n \geqslant 2,\ P_n = \frac{2}{5}P_{n-1} + \frac{1}{5}$.

5) Déterminer le nombre réel a tel que la suite (u_n) définie par $U_n = P_n - a$ soit géométrique.

6) Calculer alors P_n en fonction de n et en déduire la limite de la suite (P_n).

7) Dans quelle urne vont se faire la majorité des tirages ?

EXERCICE 19

Une urne A contient 2 boules rouges et 3 boules noires ; une urne B contient 3 boules rouges et 2 boules noires.

On tire au hasard une boule de l'urne A :

(i) Si elle est noire, on la place dans l'urne B,

(ii) Sinon, on l'écarte du jeu.

On tire au hasard ensuite une boule de l'urne B.

On considère les événements suivants :

R_1 : « La boule tirée de A est rouge » ; N_1 : « La boule tirée de A est noire » ;

R_2 : « La boule tirée de B est rouge » ; N_2 : « La boule tirée de B est noire ».

1) a) Calculer les probabilités des événements R_1 et N_1.

b) Calculer les probabilités des événements « R_2 sachant R_1 » et « R_2 sachant N_1 ».

En déduire que la probabilité de R_2 est de $\frac{27}{50}$.

c) Calculer la probabilité de N_2.

2) On répète n fois l'épreuve précédente (tirage d'une boule de A, suivi du tirage d'une boule de dans les mêmes conditions initiales indiquées ci-dessus), en supposant les différentes épreuves indépendantes. Quel nombre minimum d'essais doit-on effectuer pour que la probabilité d'obtenir au moins une fois une boule rouge de l'urne B soit supérieure à 0,99 ?

EXERCICE 20

Une urne contient 10 boules indiscernables, 5 rouges, 3 jaunes, et 2 vertes.

Dans les questions 1) et 2) on tire au hasard et simultanément 3 boules de cette urne. Les réponses seront données sous forme de fractions irréductibles.

1) Soit les événements suivants :

A : «Les trois boules sont rouges.»

B : «Les trois boules sont de la même couleur.»

C : «Les trois boules sont chacune d'une couleur différente.»

a) Calculer les probabilités $p(A)$, $p(B)$ et $p(C)$.

b) On appelle X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de couleurs obtenues.

Déterminer la loi de probabilité de X. Calculer E(X).

2) Dans cette question, on remplace les 5 boules rouges par n boules rouges où n est un entier supérieur ou égal à 2. L'urne contient donc $n + 5$ boules, c'est-à-dire, n rouges, 3 jaunes et 2 vertes

On tire au hasard et simultanément deux boules de cette urne. Soit les événements suivants :

D : « Tirer deux boules rouges.»

E : « Tirer deux boules de la même couleur.»

a) Montrer que la probabilité de l'événement D est $p(D) = \dfrac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$.

b) Calculer la probabilité de l'événement E, $p(E)$ en fonction de n.

Pour quelles valeurs de n a-t-on $p(E) \geqslant \dfrac{1}{2}$?

EXERCICE 21

1) Une urne contient quatre jetons numérotés de 1 à 4.

On tire au hasard un jeton de l'urne, on lit le numéro, noté a, porté sur le jeton puis on remet le jeton tiré dans l'urne. On tire ensuite un deuxième jeton de l'urne et on note b le numéro du jeton tiré. Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de orthonormal de l'espace. On considère les vecteurs $\vec{U}\begin{pmatrix} a \\ -5 \\ 1-a \end{pmatrix}$ et $\vec{V}\begin{pmatrix} 1+b \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$.

Montrer que la probabilité que ces vecteurs soient orthogonaux est égale à $\dfrac{1}{4}$.

2) Deux personnes A et B jouent au jeu suivant, constitué d'un certain nombre de parties identiques décrites ci-après : au cours d'une partie, chaque joueur effectue le tirage de deux jetons décrit dans la première question.

Si A obtient des vecteurs orthogonaux et B des vecteurs non orthogonaux, A est déclaré vainqueur, le jeu s'arrête.

Si A obtient des vecteurs non orthogonaux et B des vecteurs orthogonaux, B est déclaré vainqueur et le jeu s'arrête. Dans les autres cas, les joueurs entreprennent une nouvelle partie ; le jeu continue.

Pour tout entier n, on désigne par :

A_n l'événement : "A gagne la $n^{ième}$ partie"

B_n l'événement : "B gagne la $n^{ième}$ partie"

C_n l'événement : "le jeu continue après la $n^{ième}$ partie"

a) Calculer les probabilités $P(A_1)$, $P(B_1)$, et $P(C_1)$.

b) Exprimer $P(C_{n+1})$ en fonction de $P(C_n)$ et montrer que $P(C_n) = \left(\frac{5}{8}\right)^n$.

Exprimer $P(A_{n+1})$ en fonction de $P(C_n)$ et en déduire que $P(A_n) = \frac{3}{16} \times \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}$.

3) a) Déterminer la limite de $P(A_n)$ quand n tend vers $+\infty$.

b) Déterminer le plus petit entier n tel que $P(A_n)$ soit inférieur ou égal à 0,01.

Statistiques

EXERCICE 1

Un fermier doit embaucher des ouvriers agricoles. Lors de précédent recrutements analogues, il fait une étude statistique et a dressé le tableau suivant :

Salaire proposé (FCFA)	60 000	64 000	68 000	72 000
Nombre de candidatures	11	17	20	25

1) Représenter le nuage de points associés à cette série.

2) Déterminer et représenter la droite de régression de y en x.

3) En déduire une estimation du salaire que doit proposer le fermier s'il veut recruter trente ouvriers.

EXERCICE 2

On considère la série double (x_i, y_i) déterminer par le tableau ci-contre :

x_i	—3	—1	0	5
y_i	1	—1	4	2

1) Représenter le nuage de points associés à cette série

2) Déterminer une équation de la droite de régression de Y en X puis une équation de la droite de régression de X en Y. tracer ces deux droites.

3) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de cette série.

EXERCICE 3

On observe le cours du dollars US en francs français pendant 10 jours consécutifs.

Jour x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Cours y_i	6,81	6,78	6,84	6,86	6,89	6,68	6,95	7	7,10	7,08

1) Calculer le coefficient de corrélation linéaire.

2) Déterminer les coordonnées du point moyen G.

3) Déterminer une équation de la droite de régression linéaire de y en x.

4) Quel devrait être le cours du dollar le 11e jour ?

EXERCICE 4

L'etude du poids P de la larve d'un insecte mesuré en fonction de l'age x a conduit au tableau suivant :

X(mois	1	2	3	4	5
P(mg)	7	13	25	47	88

1) On pose $y = \ln(P)$ où ln désigne le logarithme népérien.
a) Calculer les différentes valeurs prises par y à 10^{-2} prés.
b) Tracer le nuage de points représentant les couples (x, y) dans un repère orthonormé (unité 2 cm) : placer le barycentre G du nuage.
2) Déterminer une équation de la droite de régression de Y en X.
3) Si l'évolution se poursuit dans les mémes conditions, quel sera le poids de la larve au bout de six mois puis 9 mois.

EXERCICE 5

Le tableau suivant donne le prix en francs du mètre carré des logements neufs achetés entre 1986 et 1993 selon l'année d'achat.

Année	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993
Rang de l'année	1	2	3	4	5	6	7	8
Prix	2409	2671	2912	3208	3555	3940	4291	4647

On désigne par X la variable égal au rang de l'année et Y la variable égale au prix du m².

1) Représenter dans un repère orthogonal le nuage de points associés à cette série statistique.

(i) Sur l'axe des abscisses, choisir 2 cm pour représenter 1 année

(ii) Sur l'axe des ordonnées, placer 2 400 F à l'origine puis choisir 1 cm pour 100 F.

2) Déterminer une équation de la droite de régression de Y en X et la tracer dans le repère précédent.

3) Calculer (à un franc prés) le prix du mètre carré en 1996 que ce tableau conduit à prévoir.

EXERCICE 6

Une étude sur les causes des accidents donne les résultats ci-contre.

Type de transport : Y / Cause des accidents: X	Particuliers : y_1	Transporteurs en commun : y_2
Accidents liées à l'excès de vitesse x_1	440	360
Accidents à cause mécanique : x_2	110	90

1) Déterminer l'effectif totale des accidents enregistrés lors de cette étude ?
2) Déterminer les fréquences conditionnelles $f_{y_2|x_1}$ et $f_{x_2|y_2}$.
3) Déterminer les fréquences marginales f_1 et f_2.

EXERCICE 7

Les importations d'un pays se chiffrent en moyenne à 1154 milliards de francs CFA par an. Le tableau suivant donne en chiffre les importations de ce pays de 2000 à 2007.

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Rang de l'année x	1	2	3	4	5	6	7	8
Montant en milliards y FCFA des importations	907	1025	1025	1092	1095	1217	k	14[illegible]

1) Trouver la valeur de k.

2) On suppose k est égal à 1402.

a) Construire le nuage de points correspondant au tableau ci-dessus dans un repère orthogonal avec x en abscisse et y en ordonnée.

Echelle : en abscisse : 1 cm pour 1 ; en ordonnée : 1 cm pour 150.

b) Calculer le coefficient de corrélation entre x et y.

c) Déterminer une équation de la droite de régression de y en x.

En supposant que l'évolution se poursuit de la même façon, estimer le montant des importations dans ce pays en 2012.

EXERCICE 8

Une étude du service des transports donne la distance de freinage d'une voiture sur une route en bon état en fonction de sa vitesse.

Vitesse (km/h) : X	40	50	60	70	80	90	100	110	120
Distance en m : Y	8	12	18	24	32	40	48	58	72

On désigne par X la vitesse et par Y la distance de freinage.

1) Représenter le nuage de points. On prendra en abscisse 1 cm pour 10 km/h et en ordonnée 1 cm pour 5 m.

NB : On commencera en abscisse les graduations à partir de 40 km/h et en ordonnée les graduations à partir de 8 m.

2) Déterminer l'équation de la droite de régression de Y en X.

3) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire r. Avons-nous une bonne corrélation ?

4) On suppose que cette évolution se poursuive. Un automobiliste roulant à 150 km/h entame un freinage à 85 m d'un obstacle immobile. Percutera-t-il l'obstacle ?

EXERCICE 9

1) (X, Y) est une série statistique double. Soit (D_1) la droite de régression de Y en X.

Soit (D_2) la droite de régression de X en Y. On suppose que :

$(D_1) : y = ax + b$ et $(D_2) : x = a'y + b'$.

Soit r le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y. Etablir que $r^2 = aa'$.

2) Dans une entreprise une étude simultanée portant sur deux caractères X et Y donnent les résultats suivants :

(i) la droite de régression de Y en X a pour équation : $2{,}4x - y = 0$.

(ii) la droite de régression de X en Y a pour équation : $3{,}5y - 9x + 24 = 0$.

a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y, sachant que leur covariance est positive.

b) Calculer la moyenne de chacun des caractères X et Y.

EXERCICE 10

Une étude faite sur l'effectif X des familles d'une cité et la quantité Y de sucre en Kilogrammes consommée par mois dans chaque famille, a donné les résultats ci-dessous :

Y \ X	[5 ; 7]	[8 ; 10]	[11 ; 13]	[14 ; 18]
[10 ; 15]	1	3	0	0
[5 ; 25]	5	9	8	3
[25 ; 35]	0	7	5	9

1) Calculer la moyenne et l'écart-type des séries marginales X et Y.

2) A chaque centre x_i de classe de la série de X on associe la moyenne z_i de Y sachant que $X = x_i$.

3) Dans la suite on considère la série (x, z) définie par le tableau suivant :

x_i	6	9	12	16
z_i	18,75	22,5	23,85	27,5

a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et z.

b) Un ajustement affine est-il justifié ? (justifier la réponse).

c) Déterminer une équation de la droite de régression de z en x.

d) Estimer la quantité moyenne de sucre consommée par mois pour une famille d'effectif égal à 20.

EXERCICE 11

Une entreprise a mis au point un nouveau produit et cherche à fixer le prix de vente. Une enquête est réalisée auprès des clients potentiels ; les résultats sont donnés dans le tableau suivant où y_i représente le nombre d'exemplaires du point que les clients sont disposés à acheter si le prix de vente exprimé en milliers de francs, est x_i :

x_i	60	80	100	120	140	160	180205	200
y_i	952	805	630	522	510	324	205	84

On appelle x la variable statistique dont les valeurs sont x_i et y celle dont les valeurs sont y_i.

1) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de y et x. La valeur trouvée justifie-t-elle la recherche d'un ajustement linéaire ?

2) Déterminer l'équation de la droite de régression de y en x.

3) Les frais de conception du produit se sont élevés à 28 millions de francs. Le prix de fabrication de chaque produit est de 25000 francs.

a) Déduire de la précédente question que le bénéfice z en fonction du prix de vente x est donné par l'égalité : $z = -5{,}95x^2 + 1426{,}25x - 59937{,}5$ où x et z sont exprimés en milliers de francs.

b) Déterminer le prix de vente x permettant de réaliser un bénéfice maximum et calculer ce bénéfice.

Thierno Korka DIALLO – Directeur Technique de SENESAC
Ingénieur électromécanicien, diplômé de l'Ecole Polytechnique de Thiès

NB : Prendre 2 chiffres après la virgule sans arrondir.
Rappel : Bénéfice = Prix de vente - prix de revient.

EXERCICE 12

Le tableau statistique suivant donne le nombre de candidats ayant obtenu un couple de notes.

Maths / SP	2	6	10	14	18	Totaux
6	4	2	1	0	0	7
8	2	5	2	0	0	9
10	1	6	16	5	1	29
12	0	2	3	6	2	13
14	0	1	0	1	3	5
Totaux	7	16	22	12	6	63

On appelle x la série des notes de Sciences Physiques et y la série des notes de mathématiques.

1) Déterminer pour chaque x_i la moyenne de la série conditionnelle $\frac{y}{x}$.

2) On considére la serie double $(x_i\ ;\ z_i)$ avec $z_i = \frac{y}{x_i}$.

a) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé construire le nuage de points $M(x_i\ ;\ z_i)$.

b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre la série $X = (x_i)$ et $Z = (z_i)$.

c) Déterminer l'équation de la droite d'ajustement linéaire de z en X par la méthode des moindres carré et tracer cette droite.

EXERCICE 13

Dans cet exercice, le détail des calculs n'est pas exigé. On donnera les formules utilisées pour répondre aux questions. Les résultats seront donnés à 0,1 près.

Le tableau ci-après donne le poids moyen (y) d'un enfant en fonction de son âge.

x (années)	0	1	2	4	7	11	12
y (Kg)	3,5	6,5	9,5	14	21	32,5	34

1) Représenter le nuage de points de cette série statistique dans le plan muni du repère orthogonal.

Unité graphique : en abscisse 1 cm pour 1 année et en ordonnée 1 cm pour 2 kg.

2) Déterminer les coordonnées du point moyen G puis placer G.

3) a) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire r.

b) Interpréter le résultat.

4) Donner une équation de la droite de régression (D) de y en x. Tracer (D).

5) a) Déterminer graphiquement, à partir de quel âge le poids sera supérieur à 15 Kg. Expliciter votre raisonnement.

b) Retrouver ce résultat par le calcul.

EXERCICE 14

Au Sénégal une entreprise veut vérifier l'efficacité de son service de publicité. Elle a relevé chaque mois durant une période de 6 mois les sommes X consacrées à la publicité et le chiffre d'affaire constaté Y (X et Y sont en milliards de F CFA). On donne le tableau ci-dessous :

Rang du mois	1	2	3	4	5	6
X	1,2	0,5	1	1	1,5	1,8
Y	19	49	100	125	148	181

Les résultats seront donnés au centième près.

Le détail des calculs n'est pas indispensable. On précisera les formules utilisées.

1) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de X et Y.

2) a) Déterminer l'équation de la droite de régression de Y en X.

b) Déterminer la somme qu'il faut investir en publicité si l'on désire avoir un chiffre d'affaire de 300 milliards si cette tendance se poursuit.

EXERCICE 15

Le tableau statistique ci-dessous donne le degré de salinité Y_i du Lac Rose pendant le $i^{ème}$ mois de pluie, noté X_i.

X_i	0	1	2	3	4
Y_i	4,26	3,4	2,01	1,16	1,01

Dans ce qui suit il faudra rappeler chaque formule le cas échéant, avant de faire les calculs. On donnera les valeurs approchées par excès des résultats à 10^{-3} près.

1) a) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire de cette série (X, Y) et interpréter le résultat.

b) Quelle est l'équation de la droite de régression de Y en X.

c) Cette équation permet-elle d'estimer le degré de salinité du lac au 6ième mois de pluie, le cas échéant ? Justifier la réponse.

2) On pose $Z = \ln(Y - 1)$.

a) Donner le tableau correspondant à la série (X, Z). Les résultats seront arrondis au millième près.

b) Donner le coefficient de corrélation linéaire de cette série (X, Z).

c) Donner l'équation de la droite de régression de Z en X, puis exprimer Y en fonction de X.

d) Utiliser cette équation pour répondre à la question 1) c).

EXERCICE 16

Pour lancer un nouveau produit P sur le marché, une société de la place effectue un sondage auprès des éventuels clients. Dans le tableau ci-dessous :

x représente le prix de vente unitaire du produit P exprimé en centaines de francs CFA ;

y représente la quantité du produit P demandée en millier.

Prix de vente unitaire x_i	3	3,5	4,5	6,5	8	10
Demande y_i	6,25	4,90	3,75	2,75	2,40	2,25

Le plan est rapporté à un repère orthogonal d'unités graphiques :

1 cm pour une centaine de francs CFA sur l'axe des abscisses ;

2 cm pour un millier sur l'axe des ordonnées.

1) a) Représenter graphiquement le nuage des points $M_i\binom{x_i}{y_i}$.

b) La forme du nuage suggère-t-elle un ajustement affine ? Justifier la réponse.

2) On effectue le changement de variable suivant : $w_i = \ln y_i$.

a) Recopier et compléter le tableau suivant : (les valeurs de w_i seront arrondies à 10^{-4} près).

x_i	3	3,5	4,5	6,5	8	10
$w_i = \ln y_i$						

b) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire de la série $(x_i\ ;\ y_i)$.

c) Déterminer, par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite de régression de w en x.

d) En déduire qu'il existe deux nombres réels α et β tels que : $y = \alpha \cdot \beta^x$.

Donner les valeurs approchées de α et β à 10^{-3} près.

Déterminer une estimation de la demande y en fonction du prix x.

e) En supposant que cette tendance est maintenue, déterminer le nombre d'unités de produit P que les consommateurs sont prêts à acheter si le prix de vente unitaire est fixé à 15 centaines de francs CFA.

Deuxième partie

Algèbre

Méditez ...

" Essaie toujours de te cacher toi qui est à la quête du savoir. Ainsi tu t'épargneras les épreuves et les peines. Aie de la détermination ainsi tu dépasseras ta génération. "

Cheikh Ahmadou BAMBA

Professeur Souleymane NIANG

Le professeur Souleymane Niang (1929 - 2010) fut un grand mathématicien spécialiste de la science du calcul (la mécanique) et deuxième recteur noir de l'université Cheikh Anta DIOP. Il fut l'un des premiers mathématiciens d'Afrique. Il a élaboré et démontré un théorème qui porte son nom : le théorème Niang.

AGI

Nombres complexes

EXERCICE 1

Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

1) $z_1 = \frac{3+6i}{3-4i}$ 2) $z_2 = \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{1-7i}{4+3i}$ 3) $z_3 = \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}$ 4) $z_4 = e^{i\pi}$

5) $z_5 = e^{i\frac{\pi}{2}}$ 6) $z_6 = e^{i\frac{\pi}{3}}$ 7) $z_7 = e^{-i\frac{\pi}{4}}$ 8) $z_8 = e^{i\frac{\pi}{4}}$

EXERCICE 2

Déterminer les parties réelle et imaginaire des nombres complexes suivants :

a) $z = (3+4i)^3$ b) $z = (2-i)^3$

c) $z = \frac{2+i}{3+4i} - \frac{3-4i}{2-i}$ d) $z = (3+4i)^3 - (2-i)^3$

EXERCICE 3

Première partie

1) Calculer le module et l'argument des complexes suivants :

$$a = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad b = -1 - i\sqrt{3} \quad ; \quad c = -3i \quad ; \quad d = 4$$

2) Déterminer les parties réelles et parties imaginaires des complexes suivants :

a) $z_1 = (-1-i)^{15}$ b) $z_2 = \left(1+i\sqrt{3}\right)^{245}$ c) $z_3 = (1-i)^{12}\left(\sqrt{3}-3i\right)$ d) $z_4 = \left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+i}\right)^{20}$

3) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Mettre sous forme trigonométrique les complexes suivants :

$$z_1 = \sin\alpha - i\cos\alpha \quad ; \quad z_2 = \frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$$

Deuxième partie

1) Calculer le module de z puis mettre z sous forme trigonométrique :

a) $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $z = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $z = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) Mettre sous forme trigonométrique :

$1+i$; $1-i$; $1+i\sqrt{3}$; $-1+i\sqrt{3}$; $\dfrac{1+\sqrt{2}+i}{1+\sqrt{2}-i}$

3) Calculer $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{30}$.

4) Soit $\alpha \in [0\,;\,\pi]$. Déterminer le module et un argument de : $z = \frac{1+\cos\alpha+i\sin\alpha}{1-\cos\alpha-i\sin\alpha}$.

Troisième partie

Déterminer la forme trigonométrique de chacun des nombres complexes suivants :

a) $z_1 = 1-i$ b) $z_2 = \left(1-i\sqrt{3}\right)^5$ c) $z_3 = \frac{(1+i)^3}{(1+i\sqrt{3})^2}$

Quatrième partie

En utilisant la formule de Moivre, calculez :

1) $z_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)^6$ 2) $z_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^5$ 3) $z_3 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{30}$

EXERCICE 4

Première partie

Calculer $|z|$ puis mettre z sous forme exponentielle.

1) $z = \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$ 2) $z = \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$ 3) $z = -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$ 4) $z = -\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$

5) $z = 1$ 6) $z = -1$ 7) $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$ 8) $z = i$

Deuxième partie

Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes :

1) $z_1 = \frac{3}{1-i}$ 2) $z_2 = \frac{(1+i)^3}{1-i} + \frac{(1-i)^4}{(1-i)^2}$

3) $z_3 = \frac{(\sqrt{6}-i\sqrt{2})(1+i)}{1-i}$ 4) $z_4 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$ 5) $z_5 = \frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}$

EXERCICE 5

Résoudre les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} iz - 2\omega = -4+3i \\ \bar{z} + 2\bar{\omega} = 3 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (5+4i)z + (1-i)z' = i \\ (-5+4i)z + (1+i)z' = 2+i \end{cases}$ 3) $\begin{cases} a+b = 8-3i \\ ab = 20-12i \end{cases}$

EXERCICE 6

Première partie

Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

1) $(z-1)(\bar{z}-2)$ soit un nombre réel.

2) $(z-1)(\bar{z}-2)$ soit un nombre imaginaire pur.

Deuxième partie

Soit z un nombre complexe distinct de 1.

On pose $z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}^2$ et $Z = \frac{z+1}{z-1}$.

1) Déterminer la partie réelle X et la partie imaginaire Y de Z en fonction de x et y.
2) Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z tels que Z soit un réel.

3) Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z tels que Z soit un nombre imaginaire.

EXERCICE 7

Soit $A(-1+2i)$ et $B(-1-2i)$.

1) Quel est l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que : $\left|\frac{z-z_B}{z-z_A}\right| = 1$?

2) Quel est l'ensemble (F) des points M d'affixe z tels que : $\arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$?

3) Quel est l'ensemble (G) des points M d'affixe z tels que : $\frac{z-z_B}{z-z_A} \in \mathbb{R}_+^*$?

4) Représenter (E), (F) et (G).

EXERCICE 8

Linéariser :

1) $\cos^2 x \cdot \sin^4 x$ 2) $\cos^3 x + \sin^3 x$ 3) $\cos^6 x$ 4) $\cos x \cdot \sin^3 x$
5) $\cos^5 x$ 6) $\sin^5 x$ 7) $\cos^2 x \cdot \sin^3 x$ 8) $\cos^n x$

EXERCICE 9

On pose $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = 1 - i$.

1) Déterminer la forme trigonométrique de z_1 et de z_2.

2) Déterminer la forme algébrique et la forme trigonométrique de $z_1 z_2$.

3) En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

EXERCICE 10

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soient A, B et C les points d'affixes respec
$a = 2i, b = -\sqrt{3} + i,\ c = -\sqrt{3} - i$.

1) Placer les points A, B et C sur une figure.

2) Soit $Z = \frac{a-b}{c-b}$.

a) Interpréter géométriquement le module et un argument de Z.

b) Ecrire Z sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.

c) En déduire la nature du triangle ABC ainsi qu'une mesure de l'angle $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$.

EXERCICE 11

Première partie

Déterminer les racines carrées de Z :

a) $Z = 8 - 6i$ b) $Z = 3 + 4i$ c) $Z = -7 + 24i$

Deuxième partie

Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1) $z^2 + 2z + 5 = 0$
2) $iz^2 + (1+i)z + 1 = 0$
3) $(3+i)z^2 - (7-i)z + 10 = 0$
4) $z^3 - 2z^2 + z - 2 = 0$
5) $z^3 + (-1+5i)z^2 - (7+4i)z + 3 - 3i = 0$
6) $iz^3 + (3-5i)z^2 + (16i - 21)z + 30 - 20i = 0$
7) $z^8 = \frac{\sqrt{2}(1+i)}{\sqrt{2}-i}$
8) $z^4 = 8a^2 - (1+a)^2 + 4a(1-a)i, a \in \mathbb{R}$
9) $\alpha z^2 + (-\beta + i\alpha)z - i\beta = 0, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$
10) $z^5 = \frac{9\sqrt{3}}{2}(1 - i\sqrt{3})$
11) $z^4 = z + \bar{z}$
12) $z^6 + 1 = 0$

Troisième partie

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $(2+i)z + 3 - 2i = 1 + i$
2) $|z|^2 = 2z - 5 + 2i$
3) $2z - 3\bar{z} = 5 - 4i$
4) $2z^2 + 3z + 4 = 0$

Quatrième partie

1) Trouver les complexes p et q tels que l'équation $z^2 + pz + q = 0$ admette pour solutions $1 + 2i$ et $3 - 5i$.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $2z^2 - 6z + 5 = 0$
b) $3\bar{z} - 2 + 6i - z = 0$
c) $z^2 - 5z + 9 = 0$
d) $z^4 + z^2 - 20 = 0$

Cinquième partie

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $z^5 = 1$
2) $z^7 = 1 + i\sqrt{3}$
3) $z^6 - (1+2i)z^3 + 3(1+i) = 0$
4) $z^6\bar{z} = 1$
5) $z^2 - 2z + 3 = 0$
6) $z^2 + \sqrt{2}z + 1 = 0$

Thierno Korka DIALLO – Directeur Technique de SENESAC
Ingénieur électromécanicien, diplômé de l'Ecole Polytechnique de Thiès

7) $z^4 - 2z^2 - 12 = 0$ 8) $\frac{1}{z} + z + 1 = 0$ 9) $z^2 - (2+3i)z - 1 + 3i = 0$

Sixième partie

Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1) $z^2 + 2z + 5 = 0$,
2) $iz^2 + (1+i)z + 1 = 0$
3) $(3+i)z^2 - (7-i)z + 10 = 0$
4) $z^3 - 2z^2 + z - 2 = 0$
5) $z^3 + (-1+5i)z^2 - (7+4i)z + 3 - 3i = 0$
6) $iz^3 + (3-5i)z^2 + (16i - 21)z + 30 - 26i = 0$

EXERCICE 12

Première partie

On considère le polynôme $P(z) = z^3 - 2(1+2i)z^2 + 7iz + 3(1-3i)$.

Résoudre $P(z) = 0$ sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure.

Deuxième partie

On considère l'équation suivante : (E) : $z^3 - (3+2i)z^2 + (1+5i)z + 2 - 2i = 0$

1) Montrer que (E) admet une unique racine réelle z_1 et unique racine imaginaire pure z_2 que l'on précisera.

2) Achever la résolution de (E).

Troisième partie

On considère l'équation suivante (E) : $z^3 + (2+i)z^2 + 2(1+i)z + 2i = 0$.

1) Montrer que (E) admet une unique racine imaginaire pure z_1 que l'on précisera.

2) Déterminer les autres racines z_2 et z_3 de (E).

Quatrième partie

Soit $P(z) = z^3 + (1-3i)\,z^2 + (2-3i)z - 6i$.

1) Montrer qu'il existe un unique réel a tel que ai soit une racine de P.

2) Montrer qu'il existe deux réels b et c tels que $P(z) = (z-3i)(z^2 + bz + c)$.

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

Cinquième partie

1) Trouver les racines carrées de $-45 - 28i$.

Soit $P(z) = z^3 - 6z^2 + (24+7i)z - 25 - 25i$, z étant un nombre complexe.

2) a) Préciser le produit p des racines de $P(z)$.

b) Représenter dans le plan complexe les points d'affixes les racines cubiques de p.

3) a) Calculer $P(i)$ et $P(2+i)$.

b) En déduire une factorisation de $P(z)$.

4) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

EXERCICE 13

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^{12} = 1$ (1)

2) Donner les solutions sous forme trigonométrique puis algébrique.

3) En déduire les solutions de l'équation $1 + z^4 + z^8 = 0$ (2)

EXERCICE 14

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^3 = 1$.

2) Développer $(\sqrt{2} - i\sqrt{2})^3$.

3) Soit l'équation (E) : $z^3 = 4\sqrt{2}(-1 - i)$. En posant $u = \frac{z}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}$, déterminer sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique les racines de l'équation E.

4) En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

EXERCICE 15

1) Le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On pose $\forall z \in \mathbb{C} - \{i\}$, $Z = \frac{z-2}{z-i}$.

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que : a) $|Z| = 1$ b) $|Z| = 2$

2) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant : $|z - 1 - i| = |z - 3 - 2i|$.

3) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que : $|\bar{z} + 5 - i| = |z - 4i|$.

4) On pose $f(\theta) = \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{1 - i\tan\theta}$. Calculer $|f(\theta)|$.

5) Déterminer les nombres complexes z tels que z, $\frac{1}{z}$ et $z - 1$ aient même module.

EXERCICE 16

Soit un entier naturel n et un réel $\theta \neq 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. On considère les sommes :

$$C = 1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta \quad ; \quad S = 1 + \sin\theta + \sin 2\theta + \cdots + \sin n\theta$$

1) On pose $u = e^{i\theta}$. Montrer que : $C + iS = 1 + u + u^2 + \cdots + u^n$.

2) Montrer que :

$$C + iS = e^{i\frac{n\theta}{2}} \frac{\sin\left[\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta\right]}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

3) En déduire C et S.

EXERCICE 17

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par :

$$P(z) = z^4 - 4(1+i)z^3 + 12iz^2 + 8(1-i)z - 20$$

1) a) Écrire sous forme algébrique $(1-i)^2$ puis en déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 = -2i$.

b) Déterminer les nombres b et c pour que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on ait : $P(z) = (z^2 + 2i)(z^2 + bz + c)$.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(\mathcal{E})$: $P(z) = 0$.

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = 1 - i$, $z_B = -1 + i$, $z_C = 1 + 3i$ et $z_D = 3 + i$.

a) Faire une figure.

b) On pose : $Z = \frac{z_{\overrightarrow{BA}}}{z_{\overrightarrow{BC}}}$. Écrire Z sous la forme algébrique.

c) Interpréter géométriquement le module et un argument de Z.

d) Quelle est la nature exacte du triangle ABC puis du quadrilatère ABCD ?

EXERCICE 18

Soit la suite (z_n) définie par : $\begin{cases} z_0 = i \\ z_{n+1} = (1+i)z_n + 2i \end{cases}$

1) Calculer z_1 et z_2.

2) On considère la suite (U_n) définie par : $U_n = z_n + 2$.

a) Montrer que : $U_n = (2+i)(1+i)^n$.

b) Exprimer z_n en fonction de n.

3) Soit M_{n+1}, M_n, A et B les points d'affixes respectives z_{n+1}, z_n, i, $-\frac{1}{2} - \frac{i}{2}$.

Démontrer que : $\frac{AM_{n+1}}{BM_n} = \sqrt{2}$ et que : $\left(\widehat{\overrightarrow{BM_n}, \overrightarrow{AM_{n+1}}}\right) = \frac{\pi}{4}(2\pi)$.

EXERCICE 19

On donne le nombre complexe : $a = \frac{1}{2}(1+i)$.

1) Calculer le module du complexe $a - 1$.

2) On pose $z_0 = 1$ et pour tout entier non nul n $z_n = a^n$. Soit M_n le point d'affixe z_n. Placer dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ les points M_0, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7.

(Prendre pour unité 4 cm).

3) Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_n = |z_n - z_{n-1}|$.

Démontrer que la suite (U_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison q et le premier terme U_1.

4) a) Calculer : $S_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$.

b) Calculer S_7, en déduire une interprétation géométrique.

c) Calculer si elle existe la limite de (S_n).

EXERCICE 20

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points M_n d'affixes $z_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n (1 + i\sqrt{3})$ où n est un entier naturel.

1) Exprimer z_{n+1} en fonction de z_n puis z_n en fonction de z_0 et n.

Donner z_0, z_1, z_2, z_3 et z_4 sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.

2) Placer les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4 (unité graphique : 4 cm).

3) Déterminer la distance OM_n en fonction de n.

4) a) Montrer que l'on a $M_nM_{n+1} = \dfrac{\sqrt{5}}{2^n}$ pour tout n entier naturel.

b) On pose $L_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \cdots + M_nM_{n+1}$.

Déterminer L_n en fonction de n, puis la limite de L_n quand n tend vers $+\infty$.

5) Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OM_0}\,;\,\overrightarrow{OM_n})$ en fonction de n.

Pour quelles valeurs de n les points O, M_0 et M_n sont-ils alignés ?

EXERCICE 21

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 1 cm).

Soient les nombres complexes $a = \frac{\sqrt{3}+1}{4} + i\left(\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)$ et $z_0 = 6 + 6i$ d'image A_0.

Pour tout n entier naturel non nul, on désigne par A_n le point d'affixe z_n définie par $z_n = a^n z_0$.

Première partie

1) Exprimer z_1 et a^2 sous forme algébrique.

Écrire z_1 sous forme exponentielle et montrer que $a^2 = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$.

2) Exprimer z_3 puis z_7 en fonction de z_1 et a^2 ; en déduire l'expression de z_3 et z_7 sous forme exponentielle.

3) Placer les points A_0, A_1, A_3 et A_7 images respectives des complexes z_0, z_1, z_3 et z_7.

Deuxième partie

Pour tout n entier naturel, on pose $|z_n| = r_n$.

1) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $r_n = 12 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}$.

2) En déduire que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

3) Déterminer la limite de la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et interpréter géométriquement le résultat obtenu.

4) Déterminer le plus petit entier naturel p tel que $OA_p \leqslant 10^{-3}$ et donner alors une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{OA_p})$.

EXERCICE 22

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 6 cm).

On considère la suite (α_n) de nombres réels définie par $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ et pour tout entier naturel n, $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \frac{5\pi}{6}$.

Pour tout entier naturel n, on appelle M_n le point du cercle C de centre O et de rayon 1 tel que l'angle $(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{OM_n})$ ait pour mesure α_n.

1) Placer les douze points M_0, M_1, M_2, ..., M_{11}.

2) On appelle z_n l'affixe de M_n. Montrer que pour tout entier naturel n, on a l'égalité : $z_n = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6}\right)}$.

3) a) Montrer que pour tout entier naturel n, les propriétés suivantes :

(i) Les points M_n et M_{n+6} sont diamétralement opposés ;

(ii) Les points M_n et M_{n+12} sont confondus.

b) Montrer que pour tout entier naturel n, on a l'égalité $z_{n+4} = e^{-i\left(\frac{2\pi}{3}\right)} z_n$.

En déduire que la distance M_nM_{n+4} vaut $\sqrt{3}$ puis que le triangle $M_nM_{n+4}M_{n+8}$ est équilatéral.

On admettra que tous les triangles équilatéraux ayant pour sommets des points M_n sont de la forme $M_nM_{n+4}M_{n+8}$.

4) Douze cartons indiscernables au toucher, marqués M_0, M_1, M_2, ..., M_{11}, sont disposés dans une urne. On tire au hasard et simultanément trois cartons de l'urne. Calculer la probabilité d'obtenir les trois sommets d'un triangle équilatéral.

EXERCICE 23

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'

2) On considère les points Ω, A, B et C d'affixes respectives $1, 2, b = \frac{3+i\sqrt{3}}{2}$ et $c = 1 + b^2$.

On désigne par $(\mathcal{C})$ le cercle de centre Ω et de rayon 1.

a) Vérifier que B est un élément de $(\mathcal{C})$. Donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B})$. Quelle est la nature du triangle ?

b) Ecrire sous forme exponentielle $b - 1$ et $c - 1$. et en déduire que les points Ω, B et C sont alignés.

3) Pour tout $z \in \mathbb{C}^* - \{1\}$. On considère les points $M(z)$ et $M'(1 + z^2)$.

a) Montrer que les points Ω, M et M' sont alignés si et seulement si $\frac{z^2}{z-1} \in \mathbb{R}$.

b) On pose $z = e^{i\theta}$, avec $\theta \in]0; 2\pi[$. Ecrire $\frac{z^2}{z-1}$ sous forme exponentielle et déterminer les points $M(e^{i\theta})$ tels que Ω, M et M' sont alignés.

4) A tout point $M(z)$ distinct de O et Ω on associe le point $M'(z')$ tels que $z' = \frac{\bar{z}-1}{\bar{z}}$.

a) Vérifier que $z' - 1 = -\frac{1}{z}$ et déduire que les vecteurs $\overrightarrow{\Omega M'}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont colinéaires et de sens contraires.

b) Construire M' à partir d'un point M du cercle trigonométrique privé de Ω.

5) a) Soit $\theta \in]0 ; 2\pi[$, Donner l'écriture algébrique du nombre complexe z tel que :

$$\frac{\bar{z} - 1}{\bar{z}} = e^{i\theta}$$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(\bar{z} - 1)^3 + i\bar{z}^3 = 0$.

EXERCICE 24

Dans chacun des cas suivants, déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation dont on donne l'écriture complexe.

1) $z' = -4z + 10 - 5i$

2) $z' = e^{-i\frac{\pi}{4}}z + 1 + \sqrt{2} - i$

3) $z' = z + 3 + 4i$

4) $z' = -2z + 4i$

5) $z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)z$

6) $z' = (1 + i)z + 2 - i$

7) $z' = (-3 + 4i)\bar{z} + 12 + 6i$

8) $z' = i\bar{z} + 1$

EXERCICE 25

On considère dans le plan affine euclidien P associé au corps des complexes $\mathbb{C}$ la similitude directe plane S de centre A(1, 1), de rapport $\sqrt{2}$, d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1) Par la similitude S, le point m d'affixe z a pour transformé le point m' d'affixe z'. Exprimer z' en fonction de z.

2) On considère les points Ω, A, B et C d'affixes respectives $1, 2, b = \frac{3+i\sqrt{3}}{2}$ et $c = 1 + b^2$.

On désigne par $(\mathcal{C})$ le cercle de centre Ω et de rayon 1.

a) Vérifier que B est un élément de $(\mathcal{C})$. Donner une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}})$. Quelle est la nature du triangle ?

b) Ecrire sous forme exponentielle $b - 1$ et $c - 1$, et en déduire que les points Ω, B et C sont alignés.

3) Pour tout $z \in \mathbb{C}^* - \{1\}$. On considère les points $M(z)$ et $M'(1 + z^2)$.

a) Montrer que les points Ω, M et M' sont alignés si et seulement si $\frac{z^2}{z-1} \in \mathbb{R}$.

b) On pose $z = e^{i\theta}$, avec $\theta \in]0; 2\pi[$. Ecrire $\frac{z^2}{z-1}$ sous forme exponentielle et déterminer les points $M(e^{i\theta})$ tels que Ω, M et M' sont alignés.

4) A tout point $M(z)$ distinct de O et Ω on associe le point $M'(z')$ tels que $z' = \frac{z-1}{z}$.

a) Vérifier que $z' - 1 = -\frac{1}{z}$ et déduire que les vecteurs $\overrightarrow{\Omega M'}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont colinéaires et de sens contraires.

b) Construire M' à partir d'un point M du cercle trigonométrique privé de Ω.

5) a) Soit $\theta \in]0 ; 2\pi[$, Donner l'écriture algébrique du nombre complexe z tel que :

$$\frac{\bar{z} - 1}{\bar{z}} = e^{i\theta}$$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(\bar{z} - 1)^3 + i\bar{z}^3 = 0$.

EXERCICE 24

Dans chacun des cas suivants, déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation dont on donne l'écriture complexe.

1) $z' = -4z + 10 - 5i$

2) $z' = e^{-i\frac{\pi}{4}}z + 1 + \sqrt{2} - i$

3) $z' = z + 3 + 4i$

4) $z' = -2z + 4i$

5) $z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)z$

6) $z' = (1 + i)z + 2 - i$

7) $z' = (-3 + 4i)\bar{z} + 12 + 6i$

8) $z' = i\bar{z} + 1$

EXERCICE 25

On considère dans le plan affine euclidien P associé au corps des complexes $\mathbb{C}$ la similitude directe plane S de centre A(1, 1), de rapport $\sqrt{2}$, d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1) Par la similitude S, le point m d'affixe z a pour transformé le point m' d'affixe z'. Exprimer z' en fonction de z.

2) On considère la transformation R qui, à un point m d'affixe z associe le point m' d'affixe $z' = (2+i)$

Caractériser géométriquement R.

3) Caractériser géométriquement la transformation composée S°R.

EXERCICE 26

On considère l'équation (E) : $z^3 - (5+3i)z^2 + (6+11i)z - 10i = 0$ où z désigne un nombre complexe.

1) a) Démontrer que (E) admet une unique solution réelle z_1.

b) Résoudre l'équation (E). On notera z_2 la solution de (E) telle que : $\mathrm{Re}(z_2) = z_1$ et z_3 la troisième solution.

2) Le plan affine euclidien étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on appelle A, B et C les points d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3.

a) Déterminer le barycentre des points pondérés (A ; 2), (B ; –2) et (C ; 1).

b) Soit S la similitude plane directe qui transforme A en B et B en C. Déterminer le rapport, l'angle et le centre de S.

c) Calculer l'affixe du point C', image de C par S.

d) Sans aucun calcul, démontrer que le barycentre des points pondérés (B ; 2), (C ; –2) et (C' ; 1) est le point I.

EXERCICE 27

Soient, dans le plan complexe P, deux points M (z) et M' (z') tels que l'on ait : $z' = (1+i)z + 1$.

1) Calculer le module et un argument de 1 + i.

2) Déterminer les éléments géométriques de la transformation du plan complexe qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe $(1+i)z + 1$.

3) Déterminer l'ensemble des M du plan complexe tels que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ aient la même norme.

EXERCICE 28

Soit un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$:

1) Soit S la similitude de centre ω (2, –2), de rapport 2, d'angle $\frac{\pi}{2}$, qui à un point M(x, y) fait correspondre un point M'(x', y').

Exprimer x' et y' en fonction de x et de y.

2) Soit H l'homothétie de centre I(0, 2), de rapport $\frac{1}{2}$ qui, à un point M_1 d'affixe z_1 fait correspondre un point M'_1 d'affixe z'_1.

Exprimer z'_1 en fonction de z_1.

3) Donner les éléments de la transformation HoS. Quelle est cette transformation ?

EXERCICE 29

Soit (P) le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1) On considère la rotation R_1 de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$. Déterminer l'affixe z_1 du transformé M_1 par R_1 d'un point M d'affixe z.

2) On considérer la rotation R_2 de centre Ω de coordonnées (2, 2) et d'angle $-\frac{\pi}{4}$. Déterminer l'affixe z_2 du transformé M_2 par R_2 d'un point M d'affixe z.

3) Déterminer en fonction de l'affixe z d'un point M, l'affixe z_3 de $R_2 \circ R_1(M)$ puis reconnaitre $R_2 \circ R_1(M)$.

EXERCICE 30

Le plan complexe est reporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On prendra 1 cm pour unité graphique. Les questions sont indépendantes.

1) Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation : $\bar{z} - 3iz - 3 + 6i = 0$.

2) On considère le point A d'affixe $4 - 2i$.

Déterminer la forme algébrique de l'affixe du point B tel que OAB soit un triangle équilatéral de sens direct.

3) Soit D le point d'affixe $2i$.

a) Représenter l'ensemble (E) des points M d'affixe z différente de $2i$ tels que : $\arg(z - 2i) = \frac{\pi}{4}(2\pi),\ k \in \mathbb{Z}$

b) Représenter l'ensemble (F) des points M d'affixe z tels que $z = 2i + 2e^{i\theta},\ \theta \in \mathbb{R}$.

4) A tout point d'affixe $z \neq -2$, on associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \frac{z-1}{\bar{z}+2}$.

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z différente de -2 tels que $|z'| = 1$.

EXERCICE 31

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 4 cm).

Soit A le point d'affixe $z_A = i$ et B le point d'affixe $z_B = e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.

1) Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. On appelle C l'image de B par r.

a) Déterminer une écriture complexe de r.

b) Montrer que l'affixe de C est $z_C = e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

c) Ecrire z_B et z_C sous forme algébrique.

d) Placer les points A, B et C.

2) Soit D le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients 2, —1 et 2.

a) Montrer que l'affixe de D est $z_B = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.

b) Montrer que A, B, C et D sont sur un même cercle.

3) Soit h l'homothétie de centre A et de rapport 2. On appelle E l'image de D par h.

a) Déterminer une écriture complexe de h.

b) Montrer que l'affixe de E est $z_E = \sqrt{3}$. Placer le point E.

4) a) Calculer le rapport $\frac{z_D - z_C}{z_E - z_C}$. On écrira le résultat sous forme exponentielle.

b) En déduire la nature du triangle CDE.

EXERCICE 32

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, (unité graphique : 4 cm), on donne les points A et B d'affixes respectives 1 et $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Pour chaque point M du plan, d'affixe z, M_1 d'affixe z_1 désigne l'image de M par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$, puis M' d'affixe z' l'image de M_1 par la translation de vecteur $-\vec{u}$.

Enfin on note T la transformation qui à chaque point M associe le point M'.

1) a) Démontrer que $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z - 1$.

b) Déterminer l'image du point B par T.

c) Montrer que T admet un unique point invariant dont on précisera l'affixe.

2) On pose $z = x + iy$, avec x et y des réels.

a) Pour z non nul, calculer la partie réelle du quotient $\frac{z'}{z}$ en fonction de x et de y.

b) Démontrer que l'ensemble (E) des points M du plan tels que le triangle OMM' soit rectangle en O, est un cercle (C), dont on précisera le centre et le rayon, privé de deux points. Tracer (E).

3) Dans cette question on pose $z = 1 + i$.

a) Vérifier que M appartient à (E). Placer M et M' sur la figure.

b) Calculer le module de z'.

c) Calculer l'aire, en cm², du triangle OMM'.

EXERCICE 33

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ ayant comme unité graphique 2 cm.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.

On pose $a = \sqrt{3} + i$ et $b = \sqrt{3} - i$. Écrire a et b sous forme exponentielle et placer les points A et B d'affixes respectives a et b.

2) Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Calculer l'affixe a' du point A' image du point A par r. Écrire a' sous forme algébrique et placer A' sur la figure précédente.

3) Soit h l'homothétie de centre O et de rapport $-\frac{3}{2}$.

Calculer l'affixe b' du point B' image du point B par h. Placer B' sur la figure précédente.

4) Soit C le centre du cercle circonscrit au triangle OA'B' er R le rayon de ce cercle. On désigne par c l'affixe du point C.

a) Justifier les égalités suivantes :

$$c\bar{c} = R^2 \quad ; \quad (c - 2i)(\bar{c} + 2i) = R^2 \quad ; \quad \left(c + \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right) = R^2 \quad ; \quad \left(\bar{c} + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\right) = R^2$$

b) En déduire que $c - \bar{c} = 2i$ puis que $c + \bar{c} = -\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

c) En déduire l'affixe du point C et la valeur de R.

EXERCICE 34

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm.

On réalisera une figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.

On considère les points A d'affixe i, B d'affixe −2i et D d'affixe 1.

On appelle E le point tel que le triangle ADE soit équilatéral direct.

Soit f l'application qui à tout point M d'affixe $z \neq i$ associe le point M' d'affixe $z' = \frac{2z-i}{iz+1}$.

1) Démontrer que le point E a pour affixe $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1 + i)$.

2) Exprimer sous forme algébrique l'affixe du point D' associé au point D par l'application f.

3) a) Démontrer que, pour tout nombre complexe z différent de i, $(z' + 2i)(z - i) = 1$.

CE $\sum\pi\int$

b) En déduire que pour tout point M(z) : $BM' \times AM = 1$ et $\left(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{BM'}\right) = -\left(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{AM}\right) + 2k\pi$ où k un entier relatif.

4) a) Démontrer que les points D et E appartiennent au cercle (C) de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.

b) En utilisant les résultats de la question 3) b), placer le point E′ associé au point E par l'application f. On laissera apparents les traits de construction.

5) Quelle est la nature du triangle BD′E′ ?

EXERCICE 35

Le plan complexe est rapporté est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit (C) le cercle de centre O et de rayon 1. On considère le point A de (C) d'affixe $z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}$.

1) Déterminer l'affixe z_B du point B image de A par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

Déterminer l'affixe z_C du point C image de B par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

2) a) Justifier que (C) est le cercle circonscrit au triangle ABC. Construire les points A, B et C.

b) Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.

3) Soit h l'homothétie de centre O et de rapport —2.

a) Compléter la figure en plaçant les points P, Q et R images respectives des points A, B et C par h

b) Quelle est la nature du triangle PQR ? Justifier.

4) a) Donner l'écriture complexe de h.

b) Calculer $z_A + z_B + z_C$.

En déduire que A est le milieu du segment [QR].

c) Que peut-on dire de la droite (QR) par rapport au cercle (C) ?

CE $\Sigma\pi\int$

b) En déduire que pour tout point $M(z)$: $BM' \times AM = 1$ et $\left(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{BM'}\right) = -\left(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{AM}\right) + 2k\pi$ où k est un entier relatif.

4) a) Démontrer que les points D et E appartiennent au cercle (C) de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.

b) En utilisant les résultats de la question 3) b), placer le point E' associé au point E par l'application f. On laissera apparents les traits de construction.

5) Quelle est la nature du triangle BD'E' ?

EXERCICE 35

Le plan complexe est rapporté est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit (C) le cercle de centre O et de rayon 1. On considère le point A de (C) d'affixe $z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}$.

1) Déterminer l'affixe z_B du point B image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

Déterminer l'affixe z_C du point C image de B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

2) a) Justifier que (C) est le cercle circonscrit au triangle ABC. Construire les points A, B et C.

b) Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.

3) Soit h l'homothétie de centre O et de rapport -2.

a) Compléter la figure en plaçant les points P, Q et R images respectives des points A, B et C par h.

b) Quelle est la nature du triangle PQR ? Justifier.

4) a) Donner l'écriture complexe de h.

b) Calculer $z_A + z_B + z_C$.

En déduire que A est le milieu du segment [QR].

c) Que peut-on dire de la droite (QR) par rapport au cercle (C) ?

Troisième partie

Analyse

Méditez ...

" La seule science utile est celle que la personne a apprise et enseignée exclusivement pour l'amour de Dieu Très Haut. "

Cheikh Ahmadou BAMBA

Professeur Sakhir THIAM

Parmi les grands mathématiciens noirs, le professeur Sakhir THIAM est sénégalais. Professeur d'université depuis 1978, il est agrégé en Mathématiques de l'université de Paris (1976), docteur ès sciences mathématiques, docteur d'État en économie théorique des universités Paris VI et IX Dauphine.

Il est membre du Comité d'experts de la division pour l'Administration publique et la gestion du développement de l'ONU de 2002 à 2005. Il est linguiste et précurseur de l'intégration des langues nationales dans l'enseignement supérieure au Sénégal en particulier et en Afrique en général.

Limite - Continuité

EXERCICE 1

Etudier la limite éventuelle dans les cas suivants :

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2-1}+x$

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2-1}+x$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-1}+x}{x}$

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-1}+3}{\sqrt{x^2-1}}$

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^5-3x^2}{1-5x^3}$

6) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+7}{x^3-5x+1}$

7) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}$

8) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x(x+1)}$

9) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x(x+1)}-\dfrac{1}{x}$

10) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^3}{x^2+1}-x\right)$

11) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$

12) $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{3-\sqrt{x}}{x^2-81}$

13) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{x(x-2)^2}-\dfrac{1}{x^2-3x+2}$

14) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

15) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2-5x+1}}$

16) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2-5x+1}}$

17) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^4+2x+1}-(x^2-1)$

18) $\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[3]{x+19}-3}$

19) $\lim\limits_{x \to 10} \dfrac{\sqrt[3]{x+54}-4}{2\sqrt[3]{x+17}-\sqrt[3]{20x+16}}$

20) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}-\sqrt{x}$

21) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2}$

EXERCICE 2

Calculer les limites à gauche puis à droite et conclure.

1) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{-x^2-x+2}{x^2-2x+1}$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}-1}$

3) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{\sqrt{1-x}-2}{\sqrt{6-x}-3}$

4) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x+3}{9-x^2}$

5) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-x-1}{1-\sqrt{x}}$

6) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x[E(x)-x]}{|x|}$

7) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x+2}$

8) $\lim\limits_{x\to -3}[x-E(x)]$

9) $\lim\limits_{x\to \frac{4}{3}}[3x+1-E(x)]$

10) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2}$

11) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[3]{x+19}-3}$

12) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2}{2x^3-3x^2+1}$

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$

14) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x\sqrt{x}-8}{4-x}$

15) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+2)\sqrt{|x+2|}}{x^2+x-2-|x+2|}$

16) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x-|x-4|}{x+5}$

17) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{|x^3|-1}}{x-1}$

18) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2-3x+4}-\sqrt{x+4}}{x-3+\sqrt{9-x^2}}$

EXERCICE 3

Démontrer les résultats suivants :

1) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=1$

2) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}=\dfrac{1}{2}$

3) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}=\dfrac{1}{2}$

EXERCICE 4

1) Étudier la limite éventuelle en zéro de la fonction f.

a) $f(x)=x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

b) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}+\sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

c) $f(x)=\dfrac{\sin(x^2)}{x}$

d) $f(x)=\dfrac{\tan x}{\sqrt{x}}$

2) Limite de : $g : x \alpha \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-4}}$ en 2^+.

EXERCICE 5.

Les questions sont indépendantes.

1) Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x\to 1}\frac{x^4-4x+3}{2(x-1)^2}$

b) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2x^2}\left[(1+x)^4-1-4x\right]$

2) Etudier la limite en zéro des fonctions définies par :

a) $f(x)=\dfrac{(1-\cos x)(1+2x)}{x^4-x^2}$

b) $g(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$

c) $k(x)=\dfrac{(1-x)^4-1+4x-x^3}{3x^2}$

d) $l(x)=\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$

EXERCICE 6

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\tan 2x}{\sqrt{1-\cos x}}$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 x}{\tan^2 2x}$

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos(\pi x)}{\tan x}$

4) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-\tan x}{1-\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}$

5) $\lim\limits_{x \to \frac{2\pi}{3}} \dfrac{\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(\frac{x}{4}\right)}{\tan 3x}$

6) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x+\cos x}$

EXERCICE 7

Calculer les limites en 0 des fonctions suivantes ($(p\,;q)$ sont des entiers naturels) :

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\tan x}$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x(1-\cos x)}{\sin 3x-3\sin x}$

5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x-\sin px}{x-\sin qx}$

6) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{\sin x}$

7) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos\left[\frac{\pi}{2}\cos x\right]}{\sin(\sin x)}$

8) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{x^2+2kx+1}-\sqrt{n^2x^2+1}$

EXERCICE 8

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin\left(\dfrac{\pi x-1}{2x^2+3}\right)$

5) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sin\left(\dfrac{\pi x-1}{2x+1}\right)$

6) $\lim\limits_{x \to -\infty} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

7) $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin x}{\pi-x}$

8) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$

9) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x}$

10) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{\tan x}$

11) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\cos x}{\sin x}$

12) $\lim\limits_{x \to 0^-} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

13) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cos x-2x}{x}$

14) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x\sqrt{4-x}}{2+\sin\left(\frac{1}{x}\right)}$

15) $\lim\limits_{x \to -\infty} 2x-1+\cos x$

16) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cos x+x}{\cos x+2}$

17) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x}$

18) $\lim\limits_{x \to 0} x\,E\left(\dfrac{1}{\sin x}\right)$

19) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(1-\cos x)}{\sin(x^2)}$ 20) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(\sin(\sin x))}{x}$ 21) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2\sin(\tan(x^2))}{1-\cos(x^2)}$

22) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{2x-\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$ 23) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$ 24) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\tan x$

25) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{2\cos 2x+1}{2\cos x-1}$ 26) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\tan x}$ 27) $\lim\limits_{n \to +\infty} \sin\left(\dfrac{n^2+2n+3}{n+1}\pi\right)$

EXERCICE 9

Soit g la fonction définie de $[1\,;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{\sin x}{x^3}$. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

EXERCICE 10

On rappelle que pour tout réel x, $|\sin x| \leqslant |x|$. Etudier la limite en 0 de : $f(x) = \frac{\sin(x^3+x^2)}{x^3+x}$.

EXERCICE 11

f est la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$.

1) Vérifier que pour tout $x \geqslant 1$, on a : $\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{2\sqrt{x}}$

2) En déduire la limite de f en $+\infty$.

EXERCICE 12

En utilisant les théorèmes de comparaison, déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to 0} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 2) $\lim\limits_{x \to 0} x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cos x}{x^2+1}$ 4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x+\sin x}$

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+\cos x}{3+\cos x}$ 6) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x+\cos x}{3-\cos x}$ 7) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(x+1)\sin x}{x^2+2}$ 8) $\lim\limits_{x \to +\infty} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

EXERCICE 13

1) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$.

2) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})\sin(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$ puis $\lim\limits_{x \to +\infty} x\sin(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$.

EXERCICE 14

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$.

1) Déterminer la limite de f en zéro.

2) Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.

3) Démontrer que f est une fonction paire. Interpréter graphiquement ce résultat.

EXERCICE 15

1) Etudier les branches infinies ou directions asymptotiques dans les cas suivants :

a) $a(x) = \frac{5x^3+3\sqrt{x}}{x}$ b) $b(x) = \sqrt{3x+5}$ c) $c(x) = x - \sqrt{x}$

d) $d(x) = x + \sin \pi x$ e) $e(x) = x + x^2 \cos^2 \pi x$ f) $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$

2) Soit la fonction définie par $f(x) = \alpha x + \beta - \sqrt{x^2+1}$ où α et β sont des paramètres réels.

a) Etudier suivants les valeurs des réels α et β les branches infinies ou asymptotes de f.

b) Déterminer α et β pour que la droite (D) : $2x - y + 2 = 0$ soit asymptote oblique en $-\infty$.

EXERCICE 16

Soit $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

f est-elle continue sur $[-\pi, \pi]$?

EXERCICE 17

1) Soit $T(x)$ la fonction définie par : $T(x) = \begin{cases} \frac{ax}{x^2+1} & \text{si } x < 1 \\ ax^2 + x & \text{si } x > 1 \\ b & \text{si } x = 1 \end{cases}$

Déterminer les réels a et b pour que la fonction T soit continue en 1.

2) Etudier la continuité de f sur son ensemble de définition : $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 0 \\ x^2+1 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ x^2+2x-1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

EXERCICE 18

Etudier la continuité de la fonction f suivante : $\begin{cases} f(x) = \frac{|x|\sqrt{|x|}}{x} & \forall x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

EXERCICE 19

1) Montrer que la fonction suivante admet un prolongement par continuité en 0 et définir ce prolongement

$$f(x) = \frac{\sin 2x}{3x}$$

1) Déterminer la limite de f en zéro.

2) Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.

3) Démontrer que f est une fonction paire. Interpréter graphiquement ce résultat.

EXERCICE 15

1) Etudier les branches infinies ou directions asymptotiques dans les cas suivants :

a) $a(x) = \frac{5x^3+3\sqrt{x}}{x}$ b) $b(x) = \sqrt{3x+5}$ c) $c(x) = x - \sqrt{x}$

d) $d(x) = x + \sin \pi x$ e) $e(x) = x + x^2 \cos^2 \pi x$ f) $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$

2) Soit la fonction définie par $f(x) = \alpha x + \beta - \sqrt{x^2+1}$ où α et β sont des paramètres réels.

a) Etudier suivants les valeurs des réels α et β les branches infinies ou asymptotes de f.

b) Déterminer α et β pour que la droite (D) : $2x - y + 2 = 0$ soit asymptote oblique en $-\infty$.

EXERCICE 16

Soit $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

f est-elle continue sur $[-\pi, \pi]$?

EXERCICE 17

1) Soit T(x) la fonction définie par : $T(x) = \begin{cases} \frac{ax}{x^2+1} & \text{si } x < 1 \\ ax^2 + x & \text{si } x > 1 \\ b & \text{si } x = 1 \end{cases}$

Déterminer les réels a et b pour que la fonction T soit continue en 1.

2) Etudier la continuité de f sur son ensemble de définition : $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 0 \\ x^2+1 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ x^2+2x-1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

EXERCICE 18

Etudier la continuité de la fonction f suivante : $\begin{cases} f(x) = \frac{|x|\sqrt{|x|}}{x} & \forall x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

EXERCICE 19

1) Montrer que la fonction suivante admet un prolongement par continuité en 0 et définir ce prolongement

$$f(x) = \frac{\sin 2x}{3x}$$

2) Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}$?

a) $f(x) = \sin x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ b) $f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{2}{1-x^2}$

3) On considère la fonction $f(x) = \sin x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$.

Dire si la fonction suivante est prolongeable par continuité à $\mathbb{R}$ tout entier.

EXERCICE 20

Trouver un prolongement par continuité de f en x_0.

1) $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x-1}$, $x_0 = 1$ 2) $f(x) = \frac{1-\sqrt{2}\cos x}{1-\sqrt{2}\sin x}$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$

3) $f(x) = \frac{x^3+5x^2-2x-4}{x-1}$, $x_0 = 1$ 4) $f(x) = \frac{\tan x - 1}{2\cos x - \sqrt{2}}$, $x_0 = 1$

EXERCICE 21

1) Etudier la continuité aux points x_0 : $x_0 = -1$, $x_0 = 2$, $x_0 = 3$ de la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2+2x+3}{x^2-x-2}$.

2) Soit la fonction g définie par : $g(x) = \dfrac{\sqrt{1+3x^2}-2}{x-1}$.

a) Déterminer le domaine de continuité de g.

b) Peut-on prolonger la fonction g par continuité sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 22

1) Déterminer et justifier la continuité des fonctions suivantes sur des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ les plus grands possibles en utilisant les opérations sur la continuité :

a) $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$ b) $g(x) = \pi \tan x$ c) $h(x) = \frac{1}{x^2+1+\cos x}$

d) $k(x) = \frac{x+\sin x}{\sqrt{x}}$ e) $l(x) = \sqrt{\sin x + 1}$ f) $u(x) = E(x)\cos x$

g) $v(x) = \tan\left[x\left(\frac{\sin x+1}{\cos x}\right)\right]$

2) En utilisant la continuité des fonctions, justifier la continuité des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \tan\left[\frac{\pi}{2}(x-1)\right]$ sur $I =]0\,;2[$ b) $g(x) = \text{cotan}\,\pi x$ sur D_g

c) $h(x) = \sqrt{\frac{x+1-a}{x-1-a}}$ sur D_h où a est un réel d) $u(x) = \frac{\sqrt{\sin x+1}-1}{\sin \pi x}$ sur D_u

3) Soit f la fonction numérique : $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sin x}$

a) Trouver son ensemble de définition.

b) Peut-on la prolonger par continuité au point $x = 0$?

EXERCICE 23

1) a) Sachant que $1-\frac{x^2}{2} \leqslant \cos x \leqslant 1$ pour tout réel x, prouver que, pour tout réel positif x :

$$x-\frac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$$

b) Préciser un encadrement de $\sin x$ pour x négatif.

c) En déduire la limite en 0 de la fonction g définie par $g(x)=\dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

2) Soit (C) un cercle de centre O et de rayon r. On considère un secteur circulaire AOB d'angle θ avec $0<\theta<\pi$.

a) Montrer que l'aire s du segment de disque déterminé par la corde AB est : $S=\dfrac{1}{2}r^2(\theta-\sin\theta)$.

b) Les tangentes en A et B au cercle (C) se coupent en T. Montrer que l'aire S du triangle ABT est :

$$S=\frac{1}{2}r^2\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\theta$$

c) Déterminer la limite en 0 du quotient $\dfrac{s}{S}$.

EXERCICE 24

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que : $\begin{cases} f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2} \\ f(0)=0 \end{cases}$

1) Prouver que f est croissante sur $\mathbb{R}$.

2) Majorer $\frac{1}{1+x^2}$ sur $[0\,;1]$ par une constante. En déduire une majoration de $f(1)$.

3) Prouver que, pour tout x de $[1\,;+\infty[$, $\dfrac{1}{1+x^2} \leqslant \dfrac{1}{x^2}$.

4) En déduire une majoration sur $[1\,;+\infty[$ de f par une fonction g.

5) Déduire de ce qui précède que f admet une limite ℓ en $+\infty$.

6) Préciser un encadrement de ℓ.

EXERCICE 25

1) Montrer que, pour tout x de $[0\,;1[$: $\sqrt{1-t} < \sqrt{1-t^2} < \sqrt{1+t}$.

2) On considère les fonctions g et h telles que : $g(x) = -2\sqrt{1-x}+2$; $h(x) = 2\sqrt{1-x}-2$.

En étudiant la variation des fonctions $f-g$ et $f-h$, comparer les fonctions f, g et h pour tout x de $[0\,;1[$.

3) En déduire que f admet une limite ℓ pour $x=1$. Encadrer cette limite.

EXERCICE 26

Soit u et v deux fonctions définies par : $u(x) = -x-\sqrt{x^2-1}$ et $v(x) = -x+\sqrt{x^2-1}$.

1) Etudier les variations de u et de v sur $[1\,;+\infty[$.

2) Soit $k \in \mathbb{N}^*$; on pose : $I_k = [-k+\sqrt{k^2-1}\,;\,+\infty[$ et $J_k =]-\infty\,;\,-k-\sqrt{k^2-1}]$.

a) En utilisant les variations de u et v puis montrer que $I_{k+1} \subset I_k$ et $J_{k+1} \subset J_k$.

b) Montrer que $\forall\, k \leqslant n$, on a : $I_n \cup J_n \subseteq I_k \cup J_k$.

3) Soit $f_k(x) = \sqrt{x^2+2kx+1}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de f_k en fonction de I_k et J_k.

b) En déduire l'ensemble de définition de la fonction f définie par :

$$f(x) = \left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{x^2+2kx+1}\right) - \sqrt{n^2x^2+1}$$

4) Calculer $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2kx+1}-\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}\right)$ et en déduire $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

EXERCICE 27

Le tableau ci-dessous résume les variations de f définie sur $I = [-2\,;2]$:

x	-2		0		2
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	3

On précise que $f(0) = 1$.

1) Peut-on trouver $\alpha \in I$ tel que $f(\alpha) = 6$?

2) Peut-on trouver $\beta \in I$ tel que $f(\beta) = \frac{1}{10}$?

3) Montrez qu'il existe un unique réel $\gamma \in [0\,;\,2]$, tel que $f(\gamma) = 2{,}5$.

CE $\Sigma\pi\int$

Dérivation - Etude de fonctions

EXERCICE 1

Calculer les limites suivantes sans utiliser la dérivée :

a) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\tan x - \tan a}{a - x}$ b) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sin x - \sin a}{\cos x - \cos a}$ c) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sin(x-a)}{a-x}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(3x)}{\sin(2x)}$ e) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{xf(a) - af(x)}{x-a}$ f) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sin(x^2) - \sin(a^2)}{x-a}$

EXERCICE 2

1) Etudier la dérivabilité de f en 0 :

a) $f(x) = x^2\sqrt{x}$ b) $f(x) = x|x|$ c) $f(x) = \frac{x^2+|x|}{x^2+1}$ d) $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$

2) Etudier la dérivabilité de f au point a indiqué :

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$; $a = 1$ b) $f(x) = \frac{x+3}{x-1}$; $a = 2$ c) $f(x) = (x-3)\sqrt{x+4}$; $a = 3$

EXERCICE 3

1) Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes au point x_0 puis interpréter graphiquement le résultat

a) $f(x) = \frac{3x - 7|x+1|}{x^2+2x}$, $x_0 = -1$

b) $f(x) = |x|\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, $x_0 = 0$

c) $f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)\sin(\pi x)$, $x_0 = 1$

d) $f(x) = x\,E(x)$, $x_0 = 1$

e) $f(x) = \begin{cases} 3 - 2x & \text{si } x < 0 \\ 2x + 3 + \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, $x_0 = 0$

f) $f(x) = \begin{cases} x\sqrt{3-x} & \text{si } x \leq 3 \\ (x-3)\sqrt{x-3} & \text{si } x > 3 \end{cases}$, $x_0 = 3$

2) Etudier la dérivabilité de la fonction $g(x) = \sqrt{|2x^2 + 3x - 5|}$ au point $x_0 = -\frac{5}{2}$.

EXERCICE 4

Dans chacun des cas suivants déterminer D_f puis étudier la continuité et la
Interpréter.

Thierno Korka DIALLO – Directeur Technique de SM
Ingénieur électromécanicien, diplômé de

La clé
CE
1) $\begin{cases} f(x) \\ f(x) \end{cases}$
2) $\begin{cases} f(x) \\ f(x) \end{cases}$
3) $\begin{cases} f(x) \\ f(x) \end{cases}$
EXERCI
1) Dém
Donner
2) Mon
0 et 1.
EXERCI
Etudier
1) Mon
2) Trou
EXERC
Premi
Déterm
1) $f(x$
5) $f(x$
Deuxi
Soit f
1) Dét
2) En
EXERC
Premi

CE $\Sigma\pi\int$

AN2

Dérivation - Etude de fonctions

EXERCICE 1

Calculer les limites suivantes sans utiliser la dérivée :

a) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\tan x - \tan a}{a - x}$

b) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sin x - \sin a}{\cos x - \cos a}$

c) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sin(x-a)}{a - x}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(3x)}{\sin(2x)}$

e) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{xf(a) - af(x)}{x - a}$

f) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sin(x^2) - \sin(a^2)}{x - a}$

EXERCICE 2

1) Etudier la dérivabilité de f en 0 :

a) $f(x) = x^2\sqrt{x}$ b) $f(x) = x|x|$ c) $f(x) = \frac{x^2+|x|}{x^2+1}$ d) $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$

2) Etudier la dérivabilité de f au point a indiqué :

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$; $a = 1$ b) $f(x) = \frac{x+3}{x-1}$; $a = 2$ c) $f(x) = (x-3)\sqrt{x+4}$; $a = 3$

EXERCICE 3

1) Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes au point x_0 puis interpréter graphiquement le résultat

a) $f(x) = \frac{3x - 7|x+1|}{x^2+2x}$, $x_0 = -1$

b) $f(x) = |x|\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, $x_0 = 0$

c) $f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)\sin(\pi x)$, $x_0 = 1$

d) $f(x) = x\,E(x)$, $x_0 = 1$

e) $f(x) = \begin{cases} 3 - 2x & \text{si } x < 0 \\ 2x + 3 + \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, $x_0 = 0$

f) $f(x) = \begin{cases} x\sqrt{3-x} & \text{si } x < 3 \\ (x-3)\sqrt{x-3} & \text{si } x > 3 \end{cases}$, $x_0 = 3$

2) Etudier la dérivabilité de la fonction $g(x) = \sqrt{|2x^2 + 3x - 5|}$ au point $x_0 = -\frac{5}{2}$.

EXERCICE 4

Dans chacun des cas suivants déterminer D_f puis étudier la continuité et la dérivabilité de f en 1

Interpréter.

Thierno Korka DIALLO – Directeur Technique de SENESAC
Ingénieur électromécanicien, diplômé de l'Ecole Polytechnique

CE $\Sigma\pi\int$

1) $\begin{cases} f(x) = x^2 - 1 & \text{si } x < 1 \\ f(x) = \frac{x-1}{x+1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} f(x) = \frac{2x^2+6}{x+1} & \text{si } x < 1 \\ f(x) = \sqrt{x^2-1} + 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} f(x) = -2\sqrt{1 - x|x|} & \text{si } x \leqslant 1 \\ f(x) = \frac{1-x}{\sqrt{x^2-2x+5}} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

EXERCICE 5

1) Démontrer que l'équation $x^3 + 3x = 5$ admet une solution et une seule dans $\mathbb{R}$.

Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de cette solution.

2) Montrer que le polynôme P tel que : $P(x) = x^5 - 3x - 1$ admet au moins une racine comprise entre 0 et 1.

EXERCICE 6

Etudier les variations de la fonction $f(x) = 2x^3 + 4x^2 + 2x + 1$.

1) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_0.

2) Trouver une valeur approchée de x_0 à 10^{-2} prés.

EXERCICE 7

Première partie

Déterminer les primitives des fonctions suivantes, en précisant l'intervalle considéré :

1) $f(x) = x$ 2) $f(x) = x^3$ 3) $f(x) = 3x^5 + 1$ 4) $f(x) = \sqrt{x}$

5) $f(x) = 7\cos x - 2\sin x$ 6) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ 7) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 8) $f(x) = x^n$

Deuxième partie

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par $f(x) = \frac{2x-3}{(x-1)^3}$.

1) Déterminer les deux réels a et b vérifiant $f(x) = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{(x-1)^3}$.

2) En déduire une primitive de f sur $]1\,;+\infty[$.

EXERCICE 8

Première partie

Déterminer les primitives des fonctions suivantes, en précisant l'intervalle considéré :

CE $\Sigma\pi\int$

1) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

2) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{3x^2+1}}$

3) $f(x) = \frac{x^3}{(x^4+1)^2}$

4) $f(x) = \sin x \cdot \cos^3 x$

5) $f(x) = x\sqrt{x}$

6) $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$

7) $f(x) = x\cos 2x$

8) $f(x) = \cos 2x \cdot \cos^2 x$

9) $f(x) = \cos 3x \cdot \cos 5x$

10) $f(x) = \sin 3x \cdot \sin 4x$

11) $f(x) = \sin x \cdot \sin 3x \cdot \cos 5x$

12) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{3x^2+2}}$

Deuxième partie

Déterminer une primitive F de f en précisant l'ensemble de définition de f.

1) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

2) $f(x) = \tan x + \tan^3 x$

3) $f(x) = \sin^2 x \cdot \cos^3 x$

4) $f(x) = \frac{2x^3+5x^2+4x+2}{(x+1)^2}$

EXERCICE 9

Soit f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x^2+2x}{(x^2+x+1)^2}$.

1) Montre que f admet une primitive F sur $\mathbb{R}$ de la forme $F(x) = \frac{ax+b}{x^2+x+1}$.

2) Trouver toutes les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 10

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x - \cos x$.

1) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que $\alpha \in \left]\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{4}\right[$.

2) Montrer qu'il existe un réel $c \in \left]\alpha ; \frac{\pi}{4}\right[$ tel que $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) g'(c)$.

3) Montrer que $g'(c) > \frac{3}{2}$. En déduire que $\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3} g\left(\frac{\pi}{4}\right) < \alpha < \frac{\pi}{4}$.

EXERCICE 11

On considère la fonction $f(x) = ax + b + \frac{1}{x}$.

1) Déterminer a et b pour que la courbe (C) de f passe par le point $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2} ; 2\sqrt{2} - 1\right)$ et admette, en ce point, une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

2) Démontrer que le point Ω, intersection des asymptotes à (C), est centre de symétrie.

EXERCICE 12

On considère la fonction $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$.

1) Etudier le sens de variation de la fonction f.

2) Donner une équation de la tangente (T) à (C) au point $\omega(2 ; 1)$.

3) Soit A le point d'intersection de (C) avec l'axe des ordonnées ; la droite (ωA) coupe la courbe en trois points ω, A et B. Donner les coordonnées de B.

EXERCICE 13

Etudier le sens de variation des fonctions suivantes définies sur l'intervalle I :

1) $f(x) = 2x^2 + x$; $I = [-2 ; 2]$

2) $f(x) = \frac{1-\sin x}{\cos x}$ $I = \left[-\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{4}\right]$

3) $f(x) = \frac{x^2+6|x|-1}{x+2}$; $I = D_f$

4) $(x) = x^2 + 3|x-1| - 1$; $I = \mathbb{R}$

EXERCICE 14

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{|x^2-x-2|}{x^2+6x+9}$.

1) Ecrire $f(x)$ sans le signe de la valeur absolue.

2) f est – elle dérivable en -1 ? en 2 ?

3) Déterminer le domaine de dérivabilité et calculer la fonction dérivée f'.

EXERCICE 15

La fonction f a pour tableau de variation :

x	$-\infty$		-1		$-\infty$	0	$+\infty$		$-\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	-5	↘	$-\infty$	‖	$+\infty$	↘	$-\infty$

1) Donner en utilisant ce tableau les limites suivantes :

a) $\lim_{x\to+\infty} f(\sqrt{x})$ b) $\lim_{x\to+\infty} f\left(-1+\frac{1}{x}\right)$ c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{-5}{f(x)+3}$ d) $\lim_{x\to+\infty}\left(5 - f\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

2) Déterminer le nombre de solutions dans D_f de l'équation : $f(x) = 5$.

3) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une racine unique $\alpha > 0$. En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

4) Dans cette question, on suppose que f est dérivable sur D_f.

a) Préciser le nombre dérivé de f en -1 en le justifiant clairement.

b) Dresser le tableau de signe de f' dérivée de f.

5) On suppose maintenant que le point d'abscisse -1 est un point anguleux de (C_f) à demi-tangentes non verticales.

a) Préciser le signe des nombres dérivés de f à gauche et à droite en -1.

b) (C_f) peut-elle présenter une demi-tangente horizontale à gauche ou à droite au point d'abscisse -1 ?

6) Soit g une fonction dérivable sur D_f telle que $g'(x) = \frac{(x+2)f(x)}{x^3}$. Etudier le signe de $g'(x)$.

EXERCICE 16

Soit f une fonction définie sur $[1\,;+\infty[$ par : $f(x) = x^2 - 2x + 5$.

1) Montrer que f établit une bijection de $[1\,;+\infty[$ vers $[4\,;+\infty[$.

2) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]4\,;+\infty[$.

3) Préciser $(f^{-1})'$ sur $]4\,;+\infty[$.

4) Etudier la dérivabilité de f^{-1} au point 4.

EXERCICE 17

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 4x^3 - 3x - \frac{1}{2}$.

1) Calculer $f(-1)$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)$, $f(0)$ et $f(1)$.

2) Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions distinctes comprises entre -1 et 1.

3) On pose $x = \cos\alpha$.

a) Exprimer $\cos 3\alpha$ en fonction de $\cos\alpha$.

b) Déterminer les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sous forme trigonométrique.

EXERCICE 18

Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}_+$ vers $[4\,;+\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x^2 + 16}$.

1) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[4\,;+\infty[$.

2) Expliciter $f^{-1}(x)$.

EXERCICE 19

Soit f la fonction de $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ vers $[0\,;1]$ définie par $f(x) = \sin^2 x$.

1) Démontrer que f admet une fonction réciproque f^{-1}.

2) Déterminer l'ensemble sur lequel f^{-1} est dérivable et démontrer que sa dérivée est la fonction :

$$F(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$$

EXERCICE 20

On considère l'application $f :]0\,;2[\to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \tan\left[\frac{\pi}{2}(x-1)\right]$.

1) Montrer que f est une bijection de $]0\,;2[$ sur un intervalle que l'on précisera.

2) Soit h la bijection réciproque de f. Montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que l'on a : $h'(x) = \frac{2}{\pi(x^2+1)}$.

3) Pour tout x non nul, on pose : $c(x) = h(x) + h\left(\frac{1}{x}\right)$.

Calculer sa dérivée et montrer que c est constante sur chacun des intervalles $\mathbb{R}^{-*}$ et $\mathbb{R}^{+*}$ puis déterminer chacune de ces constantes.

EXERCICE 21

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2}{(x+2)(3-x)}$.

1) Déterminer son ensemble de définition et son tableau de variation ; dessiner sa courbe représentative (C) dans un repère orthogonal (O, i, j).

On déterminera l'abscisse du point A où la courbe coupe son asymptote parallèle à la l'axe des abscisses

2) Déterminer l'ensemble $f(]-2\,;0[)$ image par f de l'intervalle $]-2;0[$.

Démontrer que l'application g de $]-2;0[$ dans $f(]-2\,;0[)$ définie par $g(x) = f(x)$ est bijective.

3) Dresser le tableau de variation de l'application réciproque g^{-1}; calculer $g^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$, $(g^{-1})'\left(\frac{1}{4}\right)$. Dessiner les courbes représentatives de g et g^{-1} dans un même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

EXERCICE 22

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x - 4$.

1) Etudier le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$.

2) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$. donner une valeur approchée de α à 0,01 près.

3) En déduire le signe de $g(x)$.

4) On considère la fonction f définie sur $]1\,;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{x^3+2x^2}{x^2-1}$, déterminer la dérivé f'.

5) Démontrer $f'(x)$ a même signe que $g(x)$ sur $]1;+\infty[$. Dresser le tableau de f. Donner une valeur approchée de $f(\alpha)$.

6) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x + 2$ est asymptote oblique à courbe (C_f) représentative de la fonction f en $+\infty$.

7) Déterminer une équation de la tangente au point d'abscisse.

8) Tracer la courbe représentative de la fonction f.

EXERCICE 23

On considère la fonction f définie sur $[3\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = x^2\sqrt{x-3}$.

1) a) Justifier que f est continue sur $[3\,;\,+\infty[$ et déterminer son ensemble dérivabilité.

b) Etudier le comportement de (C_f) en $+\infty$.

CE $\Sigma\pi\int$

c) Calculer la dérivée et dresser le tableau de variation de f.

2) a) Montrer que l'équation $\sqrt{x-3} = \frac{4}{x^2}$ possède une unique solution réelle.

b) Donner un encadrement à 10^{-4} près de cette solution.

3) a) Montrer que f réalise une bijection de $[3\,;\,+\infty[$ vers un intervalle J à déterminer.

b) Déterminer le domaine de continuité et de dérivabilité de f^{-1} la réciproque de f.

4) Tracer (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ sur un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

EXERCICE 24

Nous admettons qu'il existe une fonction f, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et vérifiant $f(0) = 0$ et pour tout réel x, $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

1) Parité

a) Montrer que la fonction $g(x) = f(x) + f(-x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

b) Calculer $g(0)$ et en déduire que la fonction f est impaire.

2) Limite de f en $+\infty$

a) Montrer que la fonction $h(x) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et calculer sa dérivée.

b) En déduire qu'il existe une constante c telle que, pour tout $x > 0$, on ait : $f(x) = c - f\left(\frac{1}{x}\right)$ (1)

c) A l'aide de (1), prouver que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = c$.

3) On considère la fonction u, définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ par $u(x) = \tan x$.

a) Montrer que la fonction $T(x) = f(x) - x$ est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ et calculer sa dérivée.

b) Calculer $T(0)$.

c) En déduire que, pour tout x de $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$, on a $f(\tan x) = x$.

d) Calculer les valeurs exactes de $f(1)$, $f(\sqrt{3})$, $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ainsi que la valeur exacte de la constante c.

4) Tracé

a) Etudier le sens de variation de f sur $[0\,;\,+\infty[$ et dresser le tableau de variations.

b) Tracer la courbe (C_f) en précisant les branches infinies éventuelles et la tangente à l'origine.

EXERCICE 25

1) Soit la fonction g définie par : $g(x) = x\sqrt{1+x^2} - 1$.

a) Etudier les variations g.

b) Montrer qu'il existe un réel unique α tel que $g(\alpha) = 0$ et que de plus $0,7 < \alpha < 0,8$.

c) En déduire le signe de g sur son ensemble de définition.

2) Soit la fonction h définie par : $h(x) = \frac{x^3}{3} - \sqrt{1+x^2}$.

a) Etudier les limites de h aux bornes de son ensemble de définition.

b) Montrer que, pour tout élément x de D_h, on a $h'(x) = \frac{xg(x)}{\sqrt{1+x^2}}$.

c) En déduire le tableau de variation de la fonction h.

3) Tracer $(\mathcal{C}_h)$ sur un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

EXERCICE 16

Soit f définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x^2+1} - x & \text{si } x \leqslant 0 \\ \sqrt{x^2+2x} + x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0 ?

2) Calculer la dérivée f' de f.

3) Etudier les variations de f.

4) Etudier les branches infinies de (C_f).

5) Préciser la position de (C_f) par rapport à ses asymptotes.

6) Etudier les points d'inflexion à (C_f).

7) Pour $x \in]-\infty ; 0]$, déterminer le point où (C_f) admet une tangente de coefficient directeur -1.

8) Construire (C_f) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

9) Montrer que f_1, la restriction de f à l'intervalle $]-\infty ; 0]$, admet une fonction réciproque f_1^{-1}. Construire $(C_{f_1^{-1}})$.

10) Montrer que f_2, la restriction de f à l'intervalle $]0 ; +\infty[$, admet une fonction réciproque f_2^{-1}. Déterminer l'expression de f_2^{-1}.

EXERCICE 17

Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = x - 2 + \sqrt{|x|} & \text{si } x \in]-\infty ; 0[\\ f(x) = \frac{x^2+kx-k}{x^2-2x+2} & \text{si } x \in]0 ; +\infty[\end{cases}$

Première partie

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.

2) Pour quelle valeur de k f est-elle continue au point d'abscisse $x_0 = 0$?

3) On donne $k = 4$.

a) Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = 0$.

b) Donner l'ensemble de dérivabilité de f.

4) Etudier les variations de f.

5) Montrer qu'il existe un réel unique a de l'intervalle $\left[\frac{1}{2} ; 1\right]$ tel que $f(a) = 0$.

6) Ecrire une équation de la tangente (T) à la courbe (C) représentative de f au point d'abscisse $x_0 = 0$.

7) Tracer la courbe (C) et la droite (T) ainsi que les demi-tangentes dans un même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Deuxième partie

Soit g la restriction de f à l'intervalle $[0 ; 2]$.

1) a) Déterminer les coordonnées du point I intersection de la droite (D) d'équation $y = 1$ et la courbe (C) de f.

b) Montrer que I est centre de symétrie à la courbe (C) de f.

c) Montrer que g admet une bijection réciproque notée g^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition.

2) Dresser le tableau de variation de g^{-1}, bijection réciproque de g sur $[0 ; 2]$.

3) Sans expliciter g^{-1}, calculer $(g^{-1})'(1)$.

4) Tracer (C') la courbe de g^{-1} dans le même repère que (C).

EXERCICE 28

On considère la fonction f de la variable réelle x définie par : $f(x) = x + \sqrt{x^2 + x + 1}$.

1) Etudier les variations de f.

2) a) Déterminer x_0 tel que $f(x_0) = 0$.

b) En déduire le signe de $f(x)$ sur son ensemble de définition.

3) (C) désigne la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, i, j) (unité 2 cm).

a) Montrer que (C) admet deux asymptotes.

b) Préciser la position de (C) par rapport à l'asymptote oblique.

c) Tracer (C).

4) a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J de $\mathbb{R}$ que l'on précisera.

b) Déterminer l'image d'un élément quelconque de J par l'application réciproque f^{-1} de f.

c) Tracer (C') courbe de f^{-1} dans le même repère que (C).

On ne demande pas l'étude des variations de f^{-1}.

d) Montrer qu'il existe trois constantes réelles a, b et c telles que : $f^{-1}(x) = ax + b + \frac{c}{2x+1}$.

e) Déterminer une primitive de f^{-1}.

EXERCICE 29

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} 1 + x - \sqrt{x} & \text{si } x \geqslant 1 \\ \sqrt{x^2 - 3x + 3} & \text{si } x < 1 \end{cases}$

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.

2) a) Déterminer la nature des branches infinies de la courbe de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) Etudier la position de la courbe de f par rapport à son asymptote en $-\infty$.

3) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 1. Interpréter les résultats obtenus.

4) a) Préciser le domaine de dérivabilité de f.

b) Déterminer la fonction dérivée f' de f sur les intervalles où f est dérivable.

c) Dresser le tableau de variation de f.

5) Soit g la restriction de f à l'intervalle $]-\infty ; 1]$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $]-\infty ; 1]$ vers J à préciser.

b) Dresser le tableau de variation de la réciproque g^{-1} de g.

c) Expliciter $g^{-1}(x)$.

d) Sans utiliser l'expression de $g^{-1}(x)$, calculer $(g^{-1})'(\sqrt{3})$.

6) Soit h la restriction de f à l'intervalle $[1 ; 4]$.

Montrer que pour tout x de $[1 ; 4]$, on a : $\frac{1}{32} \leqslant h''(x) \leqslant \frac{1}{4}$ puis en déduire que pour tout x de $[1 ; 4]$:

$$\frac{x-1}{4} \leqslant h'(x) \leqslant \frac{x+20}{32}$$

7) Tracer la courbe représentative de f et celle de g^{-1} dans un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

EXERCICE 30

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R} - \{1\}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x+1| + \frac{1}{x-1}$.

On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f.

1) Ecrire f sans symboles de valeur absolue et calculer les limites aux bornes de son domaine définition.

c) Tracer (C') courbe de f^{-1} dans le même repère que (C).

On ne demande pas l'étude des variations de f^{-1}.

d) Montrer qu'il existe trois constantes réelles a, b et c telles que : $f^{-1}(x) = ax + b + \frac{c}{2x+1}$.

e) Déterminer une primitive de f^{-1}.

EXERCICE 29

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} 1 + x - \sqrt{x} & \text{si } x \geqslant 1 \\ \sqrt{x^2 - 3x + 3} & \text{si } x < 1 \end{cases}$

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.

2) a) Déterminer la nature des branches infinies de la courbe de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) Etudier la position de la courbe de f par rapport à son asymptote en $-\infty$.

3) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 1. Interpréter les résultats obtenus.

4) a) Préciser le domaine de dérivabilité de f.

b) Déterminer la fonction dérivée f' de f sur les intervalles où f est dérivable.

c) Dresser le tableau de variation de f.

5) Soit g la restriction de f à l'intervalle $]-\infty ; 1]$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $]-\infty ; 1]$ vers J à préciser.

b) Dresser le tableau de variation de la réciproque g^{-1} de g.

c) Expliciter $g^{-1}(x)$.

d) Sans utiliser l'expression de $g^{-1}(x)$, calculer $(g^{-1})'(\sqrt{3})$.

6) Soit h la restriction de f à l'intervalle $[1 ; 4]$.

Montrer que pour tout x de $[1 ; 4]$, on a : $\frac{1}{32} \leqslant h''(x) \leqslant \frac{1}{4}$ puis en déduire que pour tout x de $[1 ; 4]$:

$$\frac{x-1}{4} \leqslant h'(x) \leqslant \frac{x+20}{32}$$

7) Tracer la courbe représentative de f et celle de g^{-1} dans un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

EXERCICE 30

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R} - \{1\}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x+1| + \frac{1}{x-1}$.

On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f.

1) Ecrire f sans symboles de valeur absolue et calculer les limites aux bornes de son domaine définition.

2) Montrer que $(\mathcal{C})$ admet trois asymptotes et préciser leur équation.

3) Montrer que f est continue en $x_0 = -1$.

4) Etudier la dérivabilité de f en -1 et donner une interprétation graphique du résultat.

5) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f.

6) préciser les coordonnées des points d'intersection de $(\mathcal{C})$ avec les axes du repère.

7) Construire $(\mathcal{C})$.

EXERCICE 31

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \sqrt{|x^2 - 6x + 5|}$ et soit (C) sa courbe représentati dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1 cm).

1) Exprimer $f(x)$ sans le symbole valeur absolue.

2) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en particulier en 1 et 5. La courbe (C) admet-elle de tangentes aux points d'abscisses 1 et 5 ?

3) Etudier les variations de f.

4) Démontrer que la droite d'équation $x = 3$ est axe de symétrie de (C).

5) Démontrer que les droites d'équations : $y = x - 3$ et $y = -x + 3$ sont asymptotes à (C).

6) Déterminer les coordonnées des points A et B d'intersection de (C) avec ses deux asymptotes. A étan le point dont l'abscisse est supérieure à 3.

7) Soit le point K (3 ; 0). Démontrer que, pour tout x de $[1 ; 5]$, le point $M(x ; f(x))$ est à une distanc constante de (C). En déduire la nature géométrique de (C) lorsque $1 \leqslant x \leqslant 5$.

8) Tracer (C) et ses asymptotes en faisant figurer A et B.

EXERCICE 32

Soit la fonction :

$$f_m : \mapsto \frac{x^2 + 3x + 2m}{x^2 + \left(\frac{5}{2}m + 1\right)x + 3}, \qquad m \in \mathbb{R}$$

On appelle $(\mathcal{C}_m)$ la courbe représentative de f_m dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Montrer que $(\mathcal{C}_m)$ passe par trois points fixes quand m varie.

2) Montrer que $(\mathcal{C}_m)$ admet pour asymptote la droite d'équation $y = 1$. Déterminer m pour le point I, intersection de $(\mathcal{C}_m)$ de l'asymptote, ait pour abscisse $\frac{3}{2}$; soit $(\mathcal{C}_0)$ la courbe correspondante.

3) Former l'équation aux abscisses des points d'intersection de $(\mathcal{C}_0)$ et de la droite (D) d'équatio $y(x) = tx$, $t \in \mathbb{R}$, et discuter le nombre de solutions.

4) Former les équations des tangentes issues de O à $(\mathcal{C}_0)$ et trouver les coordonnées des points d contact.

5) Etudier la position de $(\mathcal{C}_0)$ par rapport à la tangente en O.

6) Calculer $f_0''(x)$ et résoudre l'équation $f_0''(x) = 0$.

Montrer que les points correspondants de $(\mathcal{C}_0)$ sont alignés.

EXERCICE 33

Soit la fonction $f(x) = \frac{x}{2} + \sqrt{\frac{x^2}{4} - 1}$.

1) Calculer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

2) Montrer que f est continue sur son domaine de définition.

3) a) Etudier la dérivabilité de f à gauche de -2, interpréter géométriquement ce résultat.

b) Montrer que f est dérivable sur $]-\infty\,;\,-2[$.

c) Prouver que :

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{4} - 1}} \frac{-1}{2\sqrt{\frac{x^2}{4} - 1} - x}$$

d) Dresser le tableau de variations de f.

4) Montrer que f réalise une bijection de $]-\infty\,;\,-2]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

5) On désigne par f^{-1} la réciproque de f.

a) Etudier la dérivabilité de f^{-1} à droite en -1, interpréter géométriquement ce résultat.

b) Déterminer le domaine de dérivabilité de f^{-1}.

c) Expliciter f^{-1}, pour $x \in$ J.

EXERCICE 34

Première partie : Signe d'une fonction

1) Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = -x^3 + ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont trois réels.

Déterminer les réels a, b et c sachant que la courbe $(\mathcal{C}_h)$ passe par le point A(0 ; 2) et possède une tangente horizontale au point B(1 ; 4).

2) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = -x^3 + 3x + 2$.

a) Calculer les limites au borne du domaine de définition de g.

b) Etudier les variations de g puis dresser son tableau de variation.

c) Expliquer pourquoi -1 et 2 sont les seules solutions réelles de l'équation $g(x) = 0$.

d) En déduire que le tableau de signe de $g(x)$.

Deuxième partie : Etude d'une fonction

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R} - \{0\}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{-x^3-3x-1}{x^2}$. On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. L'unité graphique est le centimètre.

1) Calculer les limites aux bornes du domaine de définition de f.

2) On note f' la fonction dérivée de f. Montrer que pour $x \neq 0$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$.

3) Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.

4) a) Montrer que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = -x$ est asymptote oblique à $(\mathcal{C})$.

b) Etudier la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à $(\mathcal{D})$.

5) Montrer que pour $x \neq 0$, $f''(x) = \frac{-6x-6}{x^4}$ et en déduire que le point d'abscisse -1 est un point d'inflexion à $(\mathcal{C})$.

6) Déterminer les équations des droites $(\mathcal{T})$ et $(\mathcal{T}')$ tangentes à $(\mathcal{C})$ respectivement au point d'abscisse 1 et au point d'abscisse -1.

7) Construire $(\mathcal{D})$, $(\mathcal{T})$, $(\mathcal{T}')$ et $(\mathcal{C})$.

8) Utiliser la courbe $(\mathcal{C})$ de f pour déterminer en fonction du paramètre réel m le nombre et le signe des solutions éventuelles de l'équation $(E_m) : f(x) = m$.

EXERCICE 35

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x}{x+2} & \text{si} \quad x < -1 \\ \sqrt{x+1} & \text{si} \quad x \geqslant -1 \end{cases}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Première partie

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.

2) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en $x_0 = -1$.

3) Etudier les variations de f.

4) Après avoir étudié les branches infinies, tracer (C).

Deuxième partie

Soit h la restriction de f sur l'intervalle $[-1 ; +\infty[$ et (C_1), sa courbe représentative.

1) Démontrer que : $\forall x \in [1 ; 2]$, $|f(x)| < \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

2) Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution x_0 appartenant à l'intervalle $[1 ; 2]$.

3) En appliquant l'inégalité des accroissements finis à l'intervalle $[1 ; 2]$, démontrer que :

$$\forall x \in [1\,;2], \qquad |f(x) - x_0| < \left|\frac{x + x_0}{2\sqrt{2}}\right|$$

Troisième partie

Dans le plan complexe, on donne g l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $g(x) = i\bar{z}$.

1) Reconnaître l'application s du plan dans lui-même associée à l'application complexe g.

2) Construire (C'), image de (C_1) par s dans le même repère que (C).

3) Déterminer l'expression analytique de g.

4) Déterminer une équation de (C').

EXERCICE 36

On considère la fonction $f : x \longmapsto f(x) = 1 - x + \frac{1}{x}$.

(C_f) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Etudier les variations de f.

2) Etudier les branches infinies de (C_f) et étudier la position de (C_f) par rapport à son asymptote (D).

3) Tracer (C_f).

4) Discuter suivant les valeurs du paramètre m, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

5) Lorsque la droite d'équation $y = m$ coupe (C_f) en deux points distincts M_1 et M_2 d'abscisses respectives x_1 et x_2, on considère les points $H_1\begin{pmatrix}x_1\\0\end{pmatrix}$ et $H_2\begin{pmatrix}x_2\\0\end{pmatrix}$.

a) Prouver que x_1 et x_2 sont solutions de l'équation : $x^2 - (1-m)x - 1 = 0 \quad (1)$.

b) Prouver que $H_1H_2^2 = (x_2 - x_1)^2 = (x_2 + x_1)^2 - 4x_1x_2$.

c) En déduire $H_1H_2^2$ en fonction de m.

6) On note (C_m) le cercle de diamètre $[H_1H_2]$.

a) Vérifier que l'abscisse du centre de (C_m) est $\frac{1}{2}(1-m)$ et que son rayon r vérifie $r^2 = 1 + \frac{(1-m)^2}{4}$.

b) Déduisez-en que (C_m) : $x^2 + y^2 - (1-m)x - 1 = 0$.

EXERCICE 37

Soit f la fonction définie par : $f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; on note ($\mathcal{C}$) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = \frac{1}{(\sqrt{1+x^2})^3}$.

3) Dresser le tableau de variations de f.

4) En déduire le signe de $f(x)$ pour tout réel x.

5) Vérifier que la tangente $(\mathcal{T})$ à la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y = x + 1$.

6) Etudier la position relative de $(\mathcal{C})$ par rapport à $(\mathcal{T})$.

7) Démontrer que le point $W\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ est un point d'inflexion de $(\mathcal{C})$.

8) Montrer que le point W est un centre de symétrie de $(\mathcal{C})$.

9) Montrer que $(\mathcal{C})$ admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote horizontale $(\mathcal{D})$ dont on donnera une équation et au voisinage de $-\infty$ une asymptote horizontale qui est l'axe des abscisses.

10) Etudier la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à la droite $(\mathcal{D})$ et à $(O, \vec{i})$.

11) Tracer $(\mathcal{C})$, $(\mathcal{T})$ et $(\mathcal{D})$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

12) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera.

13) Tracer dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe $(\mathcal{C}')$ représentative de la fonction f^{-1}.

14) Etudier la dérivabilité de f^{-1} sur J.

15) Montrer que pour tout $x \in]0\,;\,2[$, $f\left(\frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}\right) = x$.

16) Donner l'expression de $f^{-1}(x)$ pour $x \in]0\,;\,2[$.

17) Calculer $(f^{-1})'(x)$.

18) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - x$.

a) Montrer que g est strictement décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

b) En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique dans $]1\,;\,2[$.

EXERCICE 1

Première partie

Calculer les primitives des fonctions suivantes, en précisant l'intervalle considéré :

1) $f(x) = x$ 2) $f(x) = x^3$ 3) $f(x) = 3x^5 + 1$ 4) $f(x) = \sqrt{x}$

5) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ 6) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 7) $f(x) = x\sqrt{x}$ 8) $f(x) = \frac{x}{x-1}$

Deuxième partie

Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives de la fonction f sur $\mathbb{R}$

1) $f(x) = (2x^2 + 1)^2$

2) $f(x) = (x + 1)^2(x - 1)$

3) $f(x) = \frac{x^2+x-1}{x^4}$

4) $f(x) = \frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

5) $f(x) = 3(2 - 3x)^3$

6) $f(x) = (x^2 + x + 1)(2x + 1)$

7) $f(x) = 4x(x^2 - 1)^3$

8) $f(x) = x^3(x^4 - 5)^3$

Troisième partie

Déterminer une primitive des fonctions suivantes. On pourra utiliser la division euclidienne.

1) $f(x) = \frac{2x^2-3x+4}{(x-1)^2}$ sur $]1\,;\,+\infty[$

2) $f(x) = \frac{2x-1}{(x+1)^2}$ sur $]-1\,;\,+\infty[$

3) $f(x) = \frac{x}{(x^2-4)^2}$ sur $]2\,;\,+\infty[$

4) $f(x) = \frac{24x^3+18x^2+10x-9}{(2x+1)^2(3x-1)}$ sur $\left]-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{3}\right[$

5) $f(x) = \frac{2x^2-3x+4}{(x-1)^2}$ sur $]1\,;\,+\infty[$

6) $f(x) = \frac{2x-1}{(x+1)^2}$ sur $]-1\,;\,+\infty[$

7) $f(x) = \frac{x}{(x^2-4)^2}$ sur $]2\,;\,+\infty[$

8) $f(x) = \frac{24x^3+18x^2+10x-9}{(2x+1)^2(3x-1)}$ sur $\left]-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{3}\right[$

9) $f(x) = \frac{x^4+3x^2+2x}{x^3+x^2+x+1}$

10) $f(x) = \frac{x^8+3x^7+x^6-x-1}{x^3-1}$

11) $f(x) = \frac{3x-1}{(3x^2-2x-1)^2}$ et $K = \left]-\frac{1}{3}\,;\,1\right[$

12) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$ et $K =]0\,;\,+\infty[$

Thierno Korka DIALLO – Directeur Technique de SENESAC
Ingénieur électromécanicien, diplômé de l'Ecole Polytechnique de Thiès

13) $f(x) = \frac{3x^2+2}{2(x^3+2x)^3}$ et $K =]-\infty\,;\,0[$

14) $f(x) = \frac{1}{x+2}$; $I =]2\,;+\infty[$

15) $f(x) = \frac{2}{3x+2}$; $I =]0\,;+\infty[$

16) $f(x) = \frac{x+3}{x^2+6x+5}$; $I =]0\,;+\infty[$

17) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$; $I =]0\,;+\infty[$

18) $f(x) = \tan x$; $I = \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$

19) $f(x) = \frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$; $I = \left]\frac{\pi}{2}\,;\pi\right[$

20) $f(x) = \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$; $I = \left]\frac{\pi}{2}\,;\pi\right[$

Quatrième partie

Dans chacun des cas suivants, déterminer la primitive F de la fonction f sur l'intervalle K, qui vérifie la condition indiquée.

1) $f(x) = \sin x \cos x$; $K = \mathbb{R}$; $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

2) $f(x) = \cos x \sin^5 x$; $K = \mathbb{R}$; $F(0) = 3$

3) $f(x) = 2x \sin x^2$; $K = \mathbb{R}$; $F(0) = 2$

4) $f(x) = \frac{\cos x}{\sin 2x}$; $K =]0\,;\pi[$; $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$

Cinquième partie

Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

1) $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ 2) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ 3) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{3x^2+1}}$ 4) $f(x) = \frac{x^3}{(x^4+1)^2}$

Sixième partie

Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

1) $f(x) = \sin^4 x$

2) $f(x) = \tan^4 x$

3) $f(x) = \cos^3 x \sin^2 x$

4) $f(x) = \cos^2 x \sin^2 x$

5) $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

6) $f(x) = \sin x \cos^3 x$

7) $f(x) = \cos 2x \cos^2 x$

8) $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$

9) $f(x) = x \cos 2x$

10) $f(x) = 7\cos x - 2\sin x$

11) $f(x) = \sin^2 x$

12) $f(x) = \cos^4 x$

13) $f(x) = \cos 5x \sin 3x$

14) $f(x) = \cos 3x \sin x$

15) $f(x) = \tan^2 x + \tan^4 x$

Septième partie

Déterminer une primitive F de f dans chacun des cas en précisant l'ensemble de définition D de f.

1) $f(x) = \frac{4x+2}{x^2+x+1}$

2) $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$

3) $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$

4) $f(x) = \frac{1}{x\ln x\ln(\ln x)}$

5) $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^n}$

6) $f(x) = \frac{x-1}{(x+1)^2}$

7) $f(x) = \frac{1}{x\ln(x^2)}$

8) $f(x) = \ln x$

EXERCICE 1

Montrer que les fonctions définies par $\frac{x}{3x+1}$, $-\frac{1}{3}\frac{x}{3x+1}$ sont des primitives sur un même intervalle de la fonction définie par $\frac{1}{(3x+1)^2}$. Diffèrent-elles simplement d'une constante ?

EXERCICE 2

1) Déterminer trois nombres réels a, b et c tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}, \qquad f(x) = \frac{x(x-2)}{(x+1)^2} = a + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$$

2) Déduisez en une primitive de f sur $I =]-1\,;\,+\infty[$.

3) Soient $f(x) = -x + \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ et $g(x) = -\frac{x^2}{2} + (1+x)\ln(1+x) + (1-x)\ln(1-x) + 2$

Calculer $g'(x)$ pour x dans $]-1\,;\,1[$ et déterminer la primitive de f qui s'annule en 0.

EXERCICE 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par $f(x) = \frac{2x-3}{(x-1)^3}$.

1) Déterminer les deux réels a et b vérifiant $f(x) = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{(x-1)^3}$.

2) En déduire une primitive de f sur $]1\,;\,+\infty[$.

EXERCICE 5

1) Déterminer deux réels a et b tels que : $\frac{1}{\sin x} = \frac{a\sin x}{1-\cos x} + \frac{b\sin x}{1+\cos x}$ puis en déduire une primitive de $\frac{1}{\sin x}$.

2) Déterminer deux réels a et b tels que : $\frac{1}{\cos x} = \frac{a\cos x}{1-\sin x} + \frac{b\cos x}{1+\sin x}$ puis en déduire une primitive de $\frac{1}{\cos x}$.

EXERCICE 6

Simplifier les sommes suivantes :

1) $A = \ln(\sqrt{3}+1) + \ln(\sqrt{3}-1)$ 2) $B = \ln(2+\sqrt{3}) + \ln(2-\sqrt{3})$ 3) $A = \ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$

EXERCICE 7

Dans chacun des cas suivants, comparer les nombres réels x et y, sans utiliser une calculatrice.

1) $x = \ln 5$ et $y = \ln 2 + \ln 3$

2) $x = 3\ln 2$ et $y = 2\ln 3$

3) $x = 4\ln 3$ et $y = 4\ln 2 + \ln 5$

4) $x = \ln\sqrt{e}$ et $y = \frac{1}{3}$

EXERCICE 8

Déduire de la courbe représentative de la fonction ln les représentations graphiques des fonctions suivantes:

1) $f(x) = |\ln x|$ 2) $f(x) = \ln(-x)$ 3) $f(x) = \ln(1+x)$

4) $f(x) = \ln|x|$ 5) $f(x) = \frac{1}{2}\ln(1+x)$ 6) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{2}x + 1\right)$

EXERCICE 9

1) On donne : $f_1(x) = \ln(\cos x)$, $f_2(x) = \ln^3 x$, $f_3(x) = \cos(\ln x)$.

a) Déterminer D_{f_1}, D_{f_2} et D_{f_3}.

Thierno Korka DIALLO – Directeur Technique de SENESAC
Ingénieur électromécanicien, diplômé de l'Ecole Polytechnique de Thiès

b) Calculer $f_1'(x), f_2'(x), f_3'(x)$.

2) On donne $f(x) = \ln(x^2 + x - 2)$ et $g(x) = \ln|x^2 + x - 2|$. Calculer $f'(x)$ et $g'(x)$.

3) Soit $f(x) = \log_2(\sin x + 2)$.

a) Déterminer D_f

b) Calculer $f'(x)$.

EXERCICE 10

Première partie

Calculer les limites suivantes si elles existent.

1) $\lim\limits_{x \to 0} x - \ln x$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \sin x \times \ln x$

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}$

4) $\lim\limits_{x \to 0} x \ln^2 x$

5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+3x)}{2x}$

6) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 + 2x - \ln x$

7) $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$

8) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(2x+3)}{\ln x}$

9) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^2 + 2}$

10) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x}{x-2} \ln(x-1)$

11) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x}{x-3} \ln\left(\dfrac{x}{3}\right)$

12) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 + \ln x}{\sqrt{x}}$

13) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x - 2\ln x}{x + \ln x}$

14) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+2x)}{4x}$

15) $\lim\limits_{x \to 0+} \ln(\cos x) \ln x$

16) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{\ln(1+2x)}$

17) $\lim\limits_{x \to 0} x - \sqrt{x} \ln x$

18) $\lim\limits_{x \to +\infty} x - \sqrt{x} \ln x$

Deuxième partie

Calculer la limite de f en x_0.

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+\sin x)}{\sin 2x}$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln\left(x^2 - \frac{5}{2}x + 1\right)}{x}$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln x)^4}{x^2}$

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(3x-2)}{\sqrt[3]{x}}$

6) $\lim\limits_{x \to 0} x^4 \ln x$

7) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+3x)}{\sqrt{x}}$

8) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+3x-x^2)}{x}$

9) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2(\ln x)^3}{\ln(1+ax)}$

10) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln(2x-1)}{x^2+x-2}$

11) $\lim\limits_{x \to 1} (x-1) \ln\sqrt{x^2+2x-3}$

Troisième partie

Déterminer les limites aux bornes du domaine de définition des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \frac{1-\ln x}{1+\ln x}$ 2) $g(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

3) $h(x) = x\sqrt{1+\ln x}$ 4) $u(x) = \ln|4x-2| - \ln|2x+2|$

Quatrième partie

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin x}$ 2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x)-\ln(2)}{x-2}$ 3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}$

EXERCICE 11

Première partie

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $\ln(3x-5) = 0$ 2) $\ln(6-x) = 1$

3) $\ln|3x+7| = 2\ln 2$ 4) $\ln(x-2) + \ln(x+2) = \ln 45$

5) $2\ln(x-4) = \ln x - 2\ln 2$ 6) $\ln(4x+1) + \ln(x+2) = 2\ln 3x$

7) $\ln|x+3| + \ln(x+2) = \ln(x+11)$ 8) $\ln\sqrt{x+4} + \ln\sqrt{x-1} = \ln\sqrt{6}$

9) $\ln|x+3| + \ln|x+2| = \ln|x+11|$ 10) $\ln(x^2+5x+5) = \ln(x+11)$

Deuxième partie

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $\ln(x+3) + \ln(x+2) = \ln(x+11)$ 2) $(\ln x)^2 + 5\ln x + 6 = 0$

3) $(2-x)\ln(x+5) = 0$ 4) $2\ln^3 x - 15\ln^2 x + 6\ln x + 7 = 0$

Troisième partie

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $\ln^2 x + \ln x - 2 = 0$ 2) $\ln^3 x + 2\ln^2 x - \ln x - 2 = 0$ 3) $\ln^2 4x - 5\ln 4x + 6 = 0$

EXERCICE 12

Première partie

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $\ln(x^2+9x+20) > \ln(x+13)$ 2) $\ln(x+5) + \ln(x+4) \leqslant \ln(x+13)$ 3) $\ln\left(\frac{2x-3}{5x+1}\right) \leqslant 0$

4) $\ln(3x^2+5x-27) > 0$ 5) $\ln|x| \leqslant -\ln|3x+2|$ 6) $\ln x - 3 \leqslant \frac{4}{\ln x}$

7) $\ln^2 x - 5\ln x + 6 > 0$ 8) $\ln x + \ln(2-x) + \ln(x+4) \leqslant \ln 5x$ 9) $\ln x - \frac{1}{\ln x} < \frac{3}{2}$

Thierno Korka DIALLO – Directeur Technique de SENESAC
Ingénieur électromécanicien, diplômé de l'Ecole Polytechnique de Thiès

CE $\sum \pi \int$

10) $\ln(x^2 - 4e^2) < 1 + \ln 3x$

11) $\ln\left(\frac{1}{x}\right) > \ln x$

12) $\frac{1+\ln x}{1-\ln x} > \frac{1-\ln x}{1+\ln x}$

Deuxième partie

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $\ln(2x-8) > 1$

2) $\ln x^2 \leqslant 1$

3) $\ln(2x+3) < \ln(x+1)$

4) $\ln\left(\frac{1}{x}\right) > \ln x$

5) $\ln(2-x) + \ln(x+4) > \ln(3x+2)$

6) $\ln(x+2) \leqslant \ln(x^2-4)$

7) $\ln(\ln x) > 0$

8) $\ln x + \ln(x+2) < \ln(x^2-2x+2)$

9) $(\ln x)^2 - 3\ln x - 4 < 0$

10) $(1-\ln x)(2+\ln x) \geqslant 0$

Troisième partie

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $7^{x+\frac{4}{3}} - 5^{3x} = 2\left(7^{x+\frac{1}{3}} + 5^{3x-1}\right)$

2) $\log_3 x \cdot \log_9 x = 2$

3) $\log_3 x = \frac{1}{2}\log_9(4x+5)$

4) $\log_a x > \log_{a^2}(3x-2)$; $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$

5) $3^x + 4^x = 5^x$

6) $5^{2x-1} + 3^x + 25^{x+\frac{1}{2}} - 9^{\frac{x}{2}+1} = 0$

EXERCICE 13

Résoudre les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} x+y=65 \\ \ln x + \ln y = \ln 1000 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2+y^2=169 \\ \ln x + \ln y = \ln 60 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+y=\frac{3}{2} \\ \ln x^2 + \ln y^2 = -\ln 4 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x+y=7 \\ \ln x + \ln y = 2\ln 2 + \ln 3 \end{cases}$

5) $\begin{cases} \ln\left(\frac{x^2}{y^3}\right) = 9 \\ \ln(xy^5) = -\frac{17}{2} \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2-y^2=700 \\ \ln x - \ln y = 2\ln\frac{4}{3} \end{cases}$

7) $\begin{cases} \ln x + 3\ln y = 1 \\ 3\ln x - 2\ln y = \frac{20}{3} \end{cases}$

8) $\begin{cases} (\ln x)(\ln y) = -4 \\ \ln(xy) = -2 \end{cases}$

9) $\begin{cases} \ln(x^2y^3) = -4 \\ \ln\left(\frac{x^3}{y^4}\right) = 11 \end{cases}$

10) $\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ \ln x + \ln y = \ln 3 \end{cases}$

11) $\begin{cases} x^3+y^3=12 \\ \ln x + \ln y = \ln 3 \end{cases}$

12) $\begin{cases} x^4+y^4=12 \\ \ln x + \ln y = \ln 3 \end{cases}$

EXERCICE 14

Dans chacun des cas suivants, déterminer la fonction dérivée de f. On précisera l'ensemble de définition de et celui de f'.

1) $f(x) = \ln 3x$

2) $f(x) = \ln|5-2x|$

3) $f(x) = \ln\left(\frac{2x-3}{5x+4}\right)$

4) $f(x) = \ln\left|\frac{x^2+x-1}{x+2}\right|$

5) $f(x) = \ln|\ln|x||$

6) $f(x) = \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$

7) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ 8) $f(x) = \sqrt{x \ln x}$ 9) $f(x) = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|$

10) $f(x) = \ln(x - \sqrt{x^2-1})$ 11) $f(x) = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right|$ 12) $f(x) = \ln|\cos(ax+b)|$

13) $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 1)$ 14) $f(x) = -x^2 + x^2 \ln x$ 15) $f(x) = \frac{x}{x-1} + \ln|x-1|$

16) $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$ 17) $f(x) = \frac{1+(\ln x)^2}{1-(\ln x)^2}$ 18) $f(x) = \sqrt{\ln x} + \ln(\sqrt{x})$

EXERCICE 15

Déterminer D_f, f' et $D_{f'}$ de la fonction suivante : $f(x) = \ln\left|\ln|x|\right|$.

EXERCICE 16

1) Etudier les variations de la fonction ψ définie par : $\psi(x) = \frac{x-1}{x} - \ln x$.

2) En déduire le signe de $\psi(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^{*+} - \{1\}$.

EXERCICE 17

Première partie

On considère la fonction définie par : $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

1) Etudier les variations de f et tracer C_f.

2) Déterminer la fonction F primitive de la fonction f.

Deuxième partie

Soit $g(x) = \ln\left|\ln\left|\ln|x|\right|\right|$.

1) Déterminer D_g et calculer $g'(x)$.

2) Résoudre l'équation $g(x) = 0$.

Troisième partie

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = x\ln\left(\left|\frac{1}{x}\right|\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1) Montrer que f est continue au point $x = 0$.

2) Etudier les variations de f et tracer la courbe de f.

3) Donner une équation de la tangente au point A d'abscisse 1.

Quatrième partie

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par : $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = x^2\sqrt{|\ln x|} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$

1) Monter que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.

2) Etudier la dérivabilité de f en 1.

3) Etudier les variations de f puis calculer les limites aux bornes de D_f.

4) Construire la représentation graphique de f, dans un repère orthonormal.

EXERCICE 18

Soit $f(x) = \left[1 - \frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right]^{\frac{1}{x}}$.

1) Quel est l'ensemble de définition de la fonction f?

2) Etudier la limite de f pour $x_0 = 1$.

3) Montrer que $\ln f(x) = \frac{1}{x}[\ln(1 + h(x))]$ avec : $h(x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}$.

4) Etudier $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0} \frac{h(x)}{x}$.

En déduire $\lim\limits_{x \to 0} \ln(f(x))$. Quelle est la limite en 0 de f?

EXERCICE 19

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} - \ln(1 + x) \quad ; \quad g(x) = x - \ln(1 + x)$$

1) Etudier les variations de f et g et en déduire leurs signes dans $\mathbb{R}_+$.

2) Déduire un encadrement de la fonction $x \longmapsto \ln(1 + x)$ sur $\mathbb{R}_+$.

3) On donne $u_n = \ln\left[\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1 + \frac{n}{n^2}\right)\right]$.

En utilisant la question 2) déterminer un encadrement de la suite (u_n) puis déduire sa limite.

EXERCICE 20

Soit f la fonction numérique définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = \ln(x + 1) + 1$.

On appelle (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, i, j) d'unité graphique 3 cm

1) Etudier le sens de variation de f.

2) Donner une équation de la tangente (D) à (C_f) au point d'abscisse 0.

3) Tracer la courbe (C_f) et la tangente (D).

4) En étudiant la fonction numérique g définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par : $g(x) = x - f(x)$, montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α, appartenant à $[1\,;\,3]$.

EXERCICE 21

1) Soit f une fonction définie par : $f(x) = \ln(3 + x)$.

a) Etudier les variations de f puis déterminer sa branche infinie et son asymptote. En déduire une construction de (C_f) la courbe représentative de f.

CE $\sum\pi\int$

b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha \in [1 ; 2]$.

2) Soit (U_n) la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \ln(3 + U_n) \end{cases}$

a) Sans calculer, représenter les 5 premiers termes de la suite (U_n).

b) Montrer que $\forall x \in [1 ; 2],\ f([1 ; 2]) \subset [1 ; 2]$.

c) Montrer que :

$$\forall x \in [1 ; 2], \qquad \frac{1}{5} < f'(x) < \frac{1}{4}$$

d) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{1}{5} < \frac{U_{n+1} - \alpha}{U_n - \alpha} < \frac{1}{4}$$

3) a) Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |U_n - \alpha| < \left(\frac{1}{4}\right)^n |U_0 - \alpha|$$

b) En déduire que la suite (U_n) est convergente.

c) Donner une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

EXERCICE 22

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère les fonctions f_n définies sur $\mathbb{R}_+$ par : $\begin{cases} f_n(x) = x(\ln x)^n \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$

On note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de f_n.

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f_n en 0.

2) Etudier les variations de f_n.

3) Montrer que les courbes $\mathcal{C}_n$ passent par trois points fixes.

EXERCICE 23

θ est un réel donné de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{3}\right[$.

On se propose d'étudier la suite définie pour tout naturel $n \geqslant 1$:

$$S_n(\theta) = \ln\left(2\cos\frac{\theta}{3} - 1\right) + \ln\left(2\cos\frac{\theta}{3^2} - 1\right) + \cdots + \ln\left(2\cos\frac{\theta}{3^n} - 1\right)$$

1) Vérifier que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$2\cos\frac{\theta}{3^n} - 1 > 0$$

2) Montrer que, pour tout réel x, on a :

$$\cos 3x = (2\cos 2x - 1)\cos x$$

3) Déduisez-en que :

$$S_n(\theta) = \ln\left(\cos\frac{\theta}{2}\right) - \ln\left(\frac{\theta}{2\times 3^n}\right)$$

4) Déterminez la limite, notée $S_n(\theta)$, de la suite $(S_n(\theta))$.

EXERCICE 24

On note $L_1(x) = \ln x$ et pour tout entier $n > 1$, $L_n(x) = \ln(L_{n-1}(x))$.

1) Donner l'ensemble de définition de L_1, L_2, L_3 et L_4.

2) Sans justifier l'existence, déterminer la fonction dérivée de L_n.

EXERCICE 25

Soit $f(x) = \frac{1+\ln^2 x}{x} + 2 - x$.

1) Montrer, en posant $y = \sqrt{x}$, que $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x}{x} = 0$.

2) Etudier le signe de $-\ln^2 x + 2\ln x - 1$ suivant les valeurs de x.

3) En utilisant les résultats précédents, étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variation.

4) Soit (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité 1 cm)

a) Montrer que (C_f) admet une asymptote oblique (D) d'équation $y = -x + 2$.

b) Préciser la position de (D) par rapport à la courbe (C_f).

c) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C_f) parallèle à la droite d'équation $y + x = 0$.

d) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α comprise entre 2 et 3.

e) Calculer $f(2{,}7)$ et $f(2{,}8)$. En déduire que e est une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

f) Construire (D), T puis (C_f).

EXERCICE 26

Première partie

On considère la fonction g définie par $\begin{cases} g(x) = \frac{1}{\ln^2 x} - \frac{1}{\ln x} & \text{si } x > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de g.

2) Etudier les variations de g. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Deuxième partie

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = -\frac{x}{\ln x} \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1) Montrer que f est continue et dérivable à droite en 0.

2) Etudier les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

3) Montrer que f est dérivable puis calculer $f'(x)$ et étudier les variations de f.

EXERCICE 27

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{x-1}{x}\ln x$.

1) Etudier les variations de la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $g(x) = x - 1 + \ln x$.

2) Vérifier que l'on a $g(1) = 0$. En déduire le signe de g sur $]0\,;+\infty[$.

3) Montrer que, pour tout x de $]0\,;+\infty[$ on a : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

4) Déduire des questions précédentes le signe de $f'(x)$ et les variations de f.

5) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. Donner le tableau des variations de f.

6) Etudier suivant les valeurs de x le signe de la différence $f(x) - \ln x$.

7) En déduire la position de (C) par rapport à la courbe (C') d'équation $y = \ln x$.

8) Déterminer la limite de $f(x) - \ln x$ lorsque x tend vers $+\infty$. Interpréter graphiquement

9) Tracer la courbe (C') puis la courbe (C).

EXERCICE 28

Première partie

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \frac{x^2}{2} - 1 - 2\ln(x+1)$.

1) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

2) a) Déterminer une équation de la tangente au point d'abscisse 0.

b) Etudier le comportement de la fonction f aux bornes de D_f.

c) Interpréter géométriquement les résultats.

d) Tracer la courbe (C) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ unité 2 cm.

CE $\Sigma\pi\int$

3) a) Montrer que l'équation $\frac{1}{2}x^2 - 1 = 2\ln(x+1)$ admet deux solutions exactement, dont l'une notée α appartient à l'intervalle $]2\,;\,3[$.

b) Montrer que $\alpha = \sqrt{2 + 4\ln(1+\alpha)}$.

4) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$.

a) Montrer que g est une bijection de $[1\,;\,+\infty[$ vers un intervalle J à préciser.

b) Etudier la dérivabilité et le sens de variation de g^{-1}, bijection réciproque de g.

c) Tracer la courbe (Φ) de g^{-1} dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Deuxième partie

On considère la fonction h définie sur $[2\,;\,+\infty[$ par : $h(x) = \sqrt{2 + 4\ln(1+x)}$.

1) Montrer que quel que soit x appartenant à $[2\,;\,+\infty[$ on a :

a) $h(x) > 2$

b) $0 < h'(x) < \frac{1}{3}$

2) Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 2$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = h(U_n)$.

a) Montrer par récurrence que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ U_n \geqslant 2$.

b) α est le réel définie à la question 3) de la *première partie*. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - \alpha| < \frac{1}{3}|U_n - \alpha|$.

c) Montrer que pour entier naturel $n \in \mathbb{N}$: $|U_n - \alpha| < \frac{1}{3^n}$.

d) En déduire que (U_n) converge et déterminer sa limite.

3) En déduire une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

EXERCICE 29

Soit f la fonction numérique de la variable réelle, définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{-2x+m+1}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ \ln\left[\frac{(x-1)^2}{x+1}\right] & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

Première partie

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

2) Déterminer m pour que f soit continue en $x_0 = 0$.

Deuxième partie

Dans toute la suite du problème, on suppose $m = -1$.

1) Montrer que si $0 < x < 1$, alors $\frac{f(x)}{x} = \frac{2}{x}\ln(1-x) - \frac{1}{x}\ln(1+x)$.

2) En déduire la limite de $\frac{f(x)}{x}$ quand x tend vers 0^+.

3) La fonction f est-elle dérivable au point $x_0 = 0$?

4) Déterminer les limites de f aux bornes de sen ensemble de définition.

5) Quelle est la limite de $\frac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$? Que peut-on en déduire ?

6) Etudier les variations de f.

7) Résoudre dans l'ensemble $]0\,;+\infty[$ l'équation $f(x) = 0$.

8) Tracer la représentation graphique de f dans un plan rapporté à un repère orthonormé.

9) Soit g la restriction de f à l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$.

a) Montrer que g admet une application réciproque g^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.

b) Déterminer le nombre dérivé de g^{-1} en 0.

c) Tracer la représentation graphique de g^{-1} dans le même repère.

EXERCICE 30

Première partie

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $I = \left[-\frac{1}{2};\,+\infty\right[$ par :

$$g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$$

On pose $V(x) = g(x) + \frac{1}{2}x^4,\ \forall x \in I$.

1) Etudier les variations de g et de V (il ne sera pas nécessaire de calculer les limites aux bornes de g et de V).

2) En déduire que, $\forall x \in I, -\frac{1}{2}x^4 \leqslant g(x) \leqslant 0$.

Deuxième partie

Soit la fonction f définie sur $]-1\,;\,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x-\ln(1+x)}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$

On note (C) la courbe de f dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité : 2 cm).

1) a) Vérifier, pour tout $x \geqslant -\frac{1}{2}$ et $x \neq 0$, que $f(x) = -\frac{g(x)}{x^2} + \frac{1}{2} - \frac{x}{3}$.

b) Montrer que f est dérivable en 0 et donner une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

On pourra utiliser l'inégalité trouvée à la première partie.

c) f est-elle continue en 0 ? Justifier votre réponse.

2) Soit h la fonction définie sur $]-1\,;\,+\infty[$ par : $h(x) = -\frac{x^2+2x}{1+x} + 2\ln(1+x)$.

a) Etudier le sens de variations de h ; calculer $h(0)$ et en déduire le signe de h sur $]-1\,;\,+\infty[$.

b) Démontrer que pour tout $x \in]-1\,;\,0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$, on a $f'(x) = \frac{h(x)}{x^3}$.

c) Dresser le tableau de variation complet de f.

3) Construire (C) et la tangente (T) (On précisera les asymptotes de (C)).

Troisième partie

1) a) Démontrer que la fonction w définie sur $]-1\,;\,+\infty[$ par : $w(x) = f(x) - x$ est continue et strictement décroissante.

b) En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $]-1\,;+\infty[$ et que $\frac{1}{4} < \alpha < 1$.

2) a) Sachant que pour tout $x \geqslant 0$ on a $x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x)$, démontrer alors que pour tout $x \geqslant 0$ on a $\frac{-1}{1+x} \leqslant f'(x) \leqslant 0$; puis pour tout $x \in \left[\frac{1}{4}\,;1\right]$, $|f'(x)| \leqslant \frac{4}{5}$;

b) Démontrer que si $\frac{1}{4} \leqslant x \leqslant 1$ alors $\frac{1}{4} \leqslant f(x) \leqslant 1$.

3) On définit la suite (V_n) par : $V_0 = \frac{1}{2}$ et par la relation de récurrence $V_{n+1} = f(V_n), \forall\, n \in \mathbb{N}$.

a) Justifier que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{4} \leqslant V_n \leqslant 1$.

b) Démontrer que, $\forall\, n \in \mathbb{N},\ |V_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{4}{5}|V_n - \alpha|$ puis que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ |V_n - \alpha| \leqslant \frac{3}{4}\left(\frac{4}{5}\right)^n$.

c) En déduire que la suite (V_n) converge et déterminer sa limite.

d) Déterminer un entier n_0 tel que $\forall\, n \geqslant n_0$, V_n soit une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

AN4

Fonction exponentielle

EXERCICE 1

Première partie

Resoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $e^{2x+1} - \frac{e}{e^{2x+1}} = e - 1$
2) $e^{2x} + e^{x} - 2 = 0$
3) $e^{2x} = 3e^{x}$
4) $e^{2x} - 3 = 4e^{-2x}$
5) $\frac{e^{x}+2}{1-3e^{x}} = 1$
6) $\frac{e^{2x}+e^{x}-4}{3e^{x}-2} = 1$

Deuxième partie

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $(e^{-x} - 1)(e^{2x} - 3) < 0$
2) $e^{-3x} < e^{x-7}$

Troisième partie

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} e^{x} + e^{y} = 2 \\ 3e^{x} - 2e^{y} = 4 \end{cases}$
2) $\begin{cases} e^{x} + e^{y} = 7 \\ e^{x+y} = 10 \end{cases}$
3) $\begin{cases} 2^{x} \cdot 2^{y} = 8 \\ 2^{x} + 2^{y} = 5\sqrt{2} \end{cases}$
4) $\begin{cases} 8^{x} \cdot (\sqrt{2})^{y} = 2^{2x+1} \\ 3^{x} \cdot 27^{y} = 9^{x-1} \end{cases}$

EXERCICE 2

Première partie

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \frac{e^{\frac{3}{x}}}{x^2}$
2) $f(x) = x^2 e^{-x^3}$
3) $f(x) = \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$

Deuxième partie

Calculer $f'(x)$ dans les cas suivants :

1) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$
2) $f(x) = e^{-\sqrt{x}}$
3) $f(x) = e^{|\cos x|}$

EXERCICE 3

Première partie

Soit $a > 0$ et $a > 1$.

CE $\Sigma\pi\int$

Montrer les résultats suivants :

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

4) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^a}{a^x} = 0$

6) $\lim\limits_{x\to 0+} x^a \ln x = 0$

Deuxième partie

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-e^x)$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x-e^x)$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x-1}$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{x-1}$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3e^x-1}{5e^x-2}$

6) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x}+5e^x-12}{-2e^{-3x}+5e^{2x}-2}$

7) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{2x}+5e^x-12}{-2e^{-3x}+5e^{2x}-2}$

8) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{e^x+1}{e^x-2}\right)$

9) $\lim\limits_{x\to 0+} 2^x \ln x$

10) $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{e^x-1}{\sqrt{x}}$

11) $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{e^{3x}-e^{2x}}{x}$

12) $\lim\limits_{x\to 0+} x\times 3^{-x}e^x$

13) $\lim\limits_{x\to 0+} xe^{1/x}$

14) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x^2}$

15) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x^2}$

Troisième partie

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x-\dfrac{x}{1+e^{-x}}\right)$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5^x-2^x}{x}$

3) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{2^{2x}-2}{2x-1}$

Quatrième partie

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 0+} (\sin x)^{\tan x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\ln|x|}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^{2x}$

d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} (1+\tan^2 x)^{\frac{1}{x\sin x}}$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ avec $f(x)=x^{g(x)}$ et $g(x)=\dfrac{x}{x^x-1}$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}\right]^{x\ln x}$

Cinquième partie

Calculer les limites suivantes :

CE $\sum\pi\int$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{x^2}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x}$ c) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\exp ax-\exp bx}{x}$ d) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{x^2}$

e) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\exp(-x)}{\sin x}$ f) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$ g) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ h) $\lim\limits_{n\to+\infty}n(\sqrt[n]{a}-1)$

Sixième partie

Calculer les limites des fonctions suivantes (a est un réel strictement positif).

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{x}$ 2) $\lim\limits_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a}$ 3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x-x^2}{e^x+x^2}$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x+1-\sqrt{e^{2x}+e^x+1}$ 5) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^3}-1}{\sin^3 x}$ 6) $\lim\limits_{x\to-2^-}(x+2)e^{\frac{x+1}{x+2}}$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^{x}$ 8) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3\left(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}}\right)$ 9) $\lim\limits_{x\to0}xe^{\frac{1}{\sin x}}$

EXERCICE 4

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^2}-\cos(x)}{x^2}$ 2) $\lim\limits_{x\to0}(\cos(x)+\sin(x))^{\frac{1}{x}}$ 3) $\lim\limits_{x\to1}\frac{2^x-2}{x-1}$ 4) $\lim\limits_{x\to0}(\ln(1+x))^{x}$

EXERCICE 5

Etudier les fonctions suivantes puis représenter les dans un repère orthonormé.

a) $f(x)=x3^{-x}$ b) $g(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ c) $h(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

EXERCICE 6

Première partie

On considère la fonction $f(x)=\begin{cases}xe^x & \text{si } x\leqslant 0\\ x\ln x & \text{si } x>0\end{cases}$.

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

2) Montrer que f est dérivable et calculer $f'(x)$.

Deuxième partie

Soit $f(x)=\begin{cases}1+e^{-x} & \text{si } x\leqslant 0\\ 2+x\ln x & \text{si } x>0\end{cases}$ et $g(x)=\begin{cases}xe^x & \text{si } x\leqslant 0\\ x\ln x-2x & \text{si } x>0\end{cases}$

1) Etudier la continuité de f et g.

2) Etudier les variations de f et g en précisant les branches infinies.

Troisième partie

CE $\Sigma\pi\int$

Soit $\begin{cases} f(x) = (1 - e^{-x})\ln x \\ f(0) = 0 \\ g(x) = \ln(1 + x + e^{-x}) \end{cases}$

1) Déterminer D_f et D_g.
2) Etudier la continuité et la dérivabilité de f et g.
3) Calculer les limites de f et g aux bornes de leur domaine de définition
4) Calculer $f'(x)$ et $g'(x)$.

Quatrième partie

Soit $f(x) = \frac{2e^x - 3}{e^x - 1}$ et (C) sa courbe représentative.

1) Etudier f.
2) Montrer que le point $I\left(0\,;\,-\frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie pour (C).
3) Construire (C) et déterminer les points en lesquels les tangentes à (C) a pour coefficient directeur $-\frac{1}{2}$

Cinquième partie

h est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $h(x) = x - \sqrt[3]{3x}$.

1) Justifier que h est bien définie en 0.

2) Etudier la fonction h et tracer sa courbe représentative.

Sixième partie

Soit f la fonction définie par : $f(x) = e^{-x-e^{-x}}$.

1) Calculer les limites de aux bornes de D_f.

2) Etudier le sens de variation de f puis la représenter graphiquement.

Septième partie

Soit $f(x) = e^{\frac{1}{|x|}}$.

1) Calculer les limites de f aux bornes de D_f.

2) Etudier les variations et dresser le tableau de variation de f.

3) Tracer la courbe (C_f).

EXERCICE 7

Etudier et représenter graphiquement les fonctions définies par :

1) $f(x) = \ln|e^{2x} - 4e^x + 3|$

2) $f(x) = \frac{1}{x^2}\exp\left(-\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$

3) $f(x) = \exp\left(\frac{\ln x}{x}\right)$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$

4) $f(x) = e^x(x - E(x))$ pour $x \in [-2\,;\,1]$

5) $f(x) = \frac{x}{1+\exp\left(\frac{1}{x}\right)}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$

6) $f(x) = \left|1 + \frac{1}{x}\right|^x$ si $x \in \mathbb{R} - \{0\,;\,-1\}$ et $f(0) = 1$

EXERCICE 8

Utiliser les variations de la fonction $f : x \longmapsto \frac{e^x}{x}$ pour déduire celles de $g : x \longmapsto \frac{e^{\cos x}}{\cos x}$ $(0 < x < 2\pi)$.

EXERCICE 9

Soit $f(x) = |e^{3x} - 1|$.

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

2) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

3) Etudier la branche infinie à la courbe (C_f) en $+\infty$.

4) Tracer la courbe (C_f).

EXERCICE 10

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{5^x}{5^{2x-1}}$.

1) Montrer que f est impaire.

2) Etudier les variations de f sur $]0 ; +\infty[$ et en déduire ses variation sur $]-\infty ; 0[$.

3) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = \frac{3}{2}$.

b) En déduire les solutions de l'équation $f(x) = -\frac{3}{2}$.

EXERCICE 11

On considère la suite $(U_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :

$$U_n = \frac{2^{\frac{1}{n}} + 2^{\frac{2}{n}} + \cdots + 2^{\frac{n}{n}}}{n}$$

1) Exprimer U_n en fonction de n et de $\sqrt[n]{2}$.

2) a) Étudier $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2}$.

b) Étudier $\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}$.

c) En déduire $\lim_{n\to+\infty} n(\sqrt[n]{2} - 1)$ et $\lim_{n\to+\infty} U_n$.

3) Calculer $\int_0^1 2^x dx$. Conclure.

EXERCICE 12

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|e^x - 1 - x| \leqslant \frac{x^2}{2} e^{|x|}$.

EXERCICE 13

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \ln\left(2x + \sqrt{4x^2 + 1}\right)$.

1) Etudier la fonction f, tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

CE $\Sigma\pi\int$

2) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Déterminer sa bijection réciproque f^{-1} et tracer sa courbe représentative dans le même repère que celle de f.

EXERCICE 14

1) Soit f la fonction de la variable réelle x définie par : $f(x) = 1 + x - \ln|e^x - e|$.
Montrer qu'on a pour tout x :
a) $(x) = 1 - \ln|1 - e^{1-x}|$;
b) $f(x) = x - \ln|e^{x-1} - 1|$
2) Dresser le tableau de variation de f.
3) Montrer que f définit une bijection g de $]1\,;\,+\infty[$ sur un intervalle I que l'on précisera.
4) Définir f^{-1} et montrer que $f^{-1} = f$.

EXERCICE 15

Première partie

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (1 + x)(1 + e^{1-x})$.

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité 2 cm.

1) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 - xe^{1-x}$. Déduire des variations de g le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$

2) a) Etudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) Etudier, pour chaque branche infinie, la direction asymptotique et l'asymptote éventuelle à $(\mathcal{C})$.

c) Etudier les variations de f et montrer que f admet une application réciproque f^{-1}, définie sur $\mathbb{R}$ La fonction f^{-1} est—elle dérivable en 4 ?

d) Etudier la position $(\mathcal{C})$ par rapport à sa tangente au point d'abscisse 1.

e) Construire, dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, les courbes $(\mathcal{C})$, $(\mathcal{C}')$ (représentative de f^{-1}) ainsi que les droites (Δ) et (Δ') d'équations respectives $y = x + 1$ et $y = x - 1$.

Deuxième partie

1) a) Montrer que l'on a $f(x) = x$ si et seulement si $x < -1$ et $\ln(-1 - x) - x + 1 = 0$.

b) Etudier la fonction h définie sur $]-\infty\,;-1[$ par : $f(x) = \ln(-1 - x) - x + 1$.

En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une solution réelle unique α.

2) a) Comparer $f(x)$ et x pour $x = -2$, puis pour $x = -1$.

b) En déduire que si $-2 \leqslant x \leqslant -1$, alors $-2 \leqslant f^{-1}(x) \leqslant -1$.

c) En déduire que si $-2 \leqslant x \leqslant -1$, alors :

$$\frac{1}{1 + 2e^2} \leqslant (f^{-1})'(x) \leqslant \frac{1}{1 + e^2}$$

EXERCICE 16

Première partie

1) Soit $g(x) = x + 1 - \ln x$.
a) Etudier les variations de g
b) En déduire le signe de $g(x)$ en fonction de x.
2) Soit $h(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)\ln x$. Etudier les variations de h puis tracer sa courbe représentative.

Deuxième partie

Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} x^{1+\frac{1}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0
2) Calculer $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis montrer que :

$$\forall x > 0, \qquad \frac{f(x) - x}{\ln x} = \frac{e^{\frac{\ln x}{x}} - 1}{\frac{\ln x}{x}}$$

3) Montrer que la fonction $x \longmapsto \frac{f(x)}{x}$ admet une limite en $+\infty$. La fonction $x \longmapsto f(x) - x$ admet-elle une limite en $+\infty$?
4) Montrer que f est une bijection de $[0\,;\,+\infty[$ sur lui-même.
5) Montrer que $f''(1) = 0$.
6) Tracer la courbe représentative de f et la tangente à cette courbe au point d'abscisse 1 (considéré comme point d'inflexion).

EXERCICE 17

Soit $f_m(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + m}\right)$ avec $m \in \mathbb{R}$

1) Préciser D_{f_m}.

2) Préciser la nature des branches infinies.

3) Etudier les variations de f_m.

4) Etudier la parité de f_1.

5) Montrer que f_m admet une fonction réciproque g_m dont on précisera le domaine définition.

6) Soit $f_1(x)$ et $f_{-1}(x)$.

a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{2}\left[e^{f_1(x)} - e^{-f_1(x)}\right] = x$.

b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{2}\left[e^{f_{-1}(x)} - e^{-f_{-1}(x)}\right] = x$.

c) En déduire les expressions réciproques de

7) Soit $\varphi(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. Exprimer $\phi(x)$ en fonction de g_1 et g_{-1} et montrer que $\phi(x) < 1$.

8) a) Exprimer $\phi'(x)$ en fonction de $\phi(x)$.

b) Etudier les variations de ϕ et montrer qu'elle admet une fonction réciproque φ^{-1}.

c) $\phi^{-1}(x)$ est – elle dérivable ?

d) Calculer $\phi^{-1}(0)$ et $[\phi^{-1}]'(0)$.

EXERCICE 18

Soit f la fonction définie par : $f(x) = xe^{1-x}$.

1) Etudier et représenter graphiquement f.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose :

$$g(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = 1 + \sum_{k=1}^{n} x^k \quad ; \quad S_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$$

a) Pour $x \neq 1$, donner une expression de $g(x)$.

b) En déduire, par dérivation, pour $x \neq 1$, une expression de $S_n(x)$.

c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $v_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$. Donner une expression de v_n.

d) Quelle est la limite de la suite (v_n) ?

EXERCICE 19

On considère la fonction numérique f définie sur par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{1+x} & \text{si} \quad x \geqslant 1 \\ e^{\frac{1}{1-x}} & \text{si} \quad x < 1 \end{cases}$$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ cm.

Première partie

Soit g la fonction définie sur $I = [1 ; +\infty[$ par : $g(x) = 1 + x - x\ln x$.

1) Calculer les limites de g aux bornes de I.

2) Étudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.

3) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur I.

Vérifier que : $\alpha \in]3{,}5 ; 4[$.

4) Déduire de ce qui précède le signe de g sur I.

Deuxième partie

1) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2) Étudier la dérivabilité de f en 1.

Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ et vérifier que pour tout $x \in I$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x(1+x)^2}$.

4) En déduire le signe de $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ puis dresser le tableau de variation de f.

5) Montrer que : $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$.

6) Construire (C), ses tangentes et ses asymptotes.

EXERCICE 20

1) On considère la fonction g définie par $g(x) = e^x - e^{2x}$. Etudier les variations de g.

2) On considère la fonction $h(x) = |e^x - e^{2x}|$ définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

a) Déterminer $\lim\limits_{u \to 0} \frac{e^u - 1}{u}$ en justifiant.

b) Etudier la dérivabilité de h à droite ; puis à gauche en 0.

c) Faire l'étude complète de h puis construire (C_h) dans un repère orthonormal (on représentera les demi tangentes en O).

3) On considère la fonction définie par $n(x) = \ln|e^x - e^{2x}|$.

a) Calculer les limites aux bornes du domaine de définition.

b) Montrer que : $\begin{cases} n(x) - 2x = \ln(1 - e^{-x}) & \forall x \in]0\,;\,+\infty[\\ n(x) - x = \ln(1 - e^x) & \forall x \in]-\infty\,;\,0[\end{cases}$

c) En déduire l'existence de deux asymptotes obliques (Δ_1) en $-\infty$ et (Δ_2) en $+\infty$.

d) Etudier la position des asymptotes obliques par rapport à la courbe $(\mathcal{C}_n)$ de n.

e) Faire l'étude complète de n et construire $(\mathcal{C}_n)$ dans un autre repère.

f) Montrer que la restriction ϕ de n sur $\mathbb{R}^{+*}$ admet une bijection ϕ^{-1} et construit sa courbe.

EXERCICE 21

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| & \text{si} \quad x \in]-\infty\,;\,-1[\cup]-1\,;\,0[\\ x^2 e^{-x} & \text{si} \quad x \in]0\,;\,+\infty[\end{cases}$$

On désigne par (C) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 2 cm).

Première partie

1) Donner le domaine de définition de f. Calculer $f(-2)$ et $f(3)$.

2) Montrer que f est continue en 0.

3) a) Etablir que la dérivée f' de f a pour expression :

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{x^2-1} & \text{si} \quad x \in]-\infty\ ;\ -1[\ \cup\ ]-1\ ;\ 0[\\ xe^{-x}(2-x) & \text{si} \quad x \in]0\ ;\ +\infty[\end{cases}$$

b) f est-elle dérivable en 0 ? Justifier la réponse.

3) Dresser le tableau de variation de f.

4) Démontrer que $f(x) = 0$ admet une racine unique α comprise entre $-1{,}6$ et $-1{,}5$.

5) a) Justifier que la droite (Δ) d'équation : $y = x$ est asymptote à (C) en $-\infty$.

b) Etudier la position de (C) par rapport à (Δ) dans $]-\infty\ ;\ 0[\ -\ \{-1\}$.

6) Tracer (C) en représentant sur la même figure les asymptotes les demi-tangentes en 0 et les points d'intersections de (C) avec les axes de coordonnées.

Deuxième partie

Soit g la restriction de f à $[0\ ;2]$.

1) Montrer que g définit une bijection de $[0\ ;2]$ sur un intervalle à préciser.

2) On note g^{-1} la bijection réciproque de g.

a) Résoudre l'équation $g^{-1}(x) = 1$.

b) Montrer que $(g^{-1})'\left(\frac{1}{e}\right) = e$.

3) On appelle (C^{-1}) la courbe de g^{-1}.

Tracer (C^{-1}) en utilisant (C) et une transformation à préciser (On placera sur (C^{-1}) le point d'ordonnée 1 et la tangente au point d'abscisse $\frac{1}{e}$).

EXERCICE 12

Première partie

Soit la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(1+e^{-x})$. On note par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

2) a) Montrer que (C_f) admet une asymptote (D) en $-\infty$ et donner une équation cartésienne de (D).

b) Préciser la position de (C_f) par rapport à celle de (D).

c) Déterminer une équation cartésienne de (T_1), tangente à (C_f) au point $x = 0$.

3) a) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers un ensemble J à préciser.

b) Déterminer $(f^{-1})'(\ln 2)$. En déduire une équation de (T_2) tangente à $(C_{f^{-1}})$ au point d'abscisse $x = \ln 2$.

c) Donner l'expression de f^{-1}.

4) Construire (D), (T_1), (T_2), (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ dans un même repère.

Deuxième partie

On se propose dans cette partie, d'étudier la suite $(U_n)_{n\geq 1}$ définie par : $\begin{cases} U_1 = 1 + \frac{1}{e} \\ U_{n+1} = U_n\left(1 + \frac{1}{e^{n+1}}\right) \end{cases}$

u et v sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par $u(t) = \ln(1+t) - t$ et $v(t) = \ln(1+t) - t + \frac{t^2}{2}$

1) a) Etudier u et v et en déduire leur signe.

b) En déduire que pour tout réel strictement positif t, on a $t - \frac{t^2}{2} < \ln(1+t) < t$.

2) Montrer que : $e^{-x} - \frac{e^{-2x}}{2} < f(x) < e^{-x}$.

3) a) Montrer que la suite $(U_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante.

b) Montrer que pour tout $n > 0$ on a : $\ln U_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$.

4) On pose : $S_1 = \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + \cdots + \frac{1}{e^n}$ et $S_2 = \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^4} + \cdots + \frac{1}{e^{2n}}$.

a) A l'aide des relations (1) et (2), montrer que : $S_1 - \frac{1}{2}S_2 < \ln U_n < S_1$.

b) En déduire un encadrement à 10^{-1} près de $\lim_{n\to+\infty} U_n$.

EXERCICE 23

Première partie

Soit $f : x \longmapsto (1+x)(1+e^{1-x})$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé. Soit $g : x \longmapsto 1 - xe^{1-x}$.

1) Etudier les variations de g. En déduire le signe de g.
2) Etudier les limites de f en $+\infty$ puis en $-\infty$.
3) Etudier les branches infinies de (C).
4) Etudier les variations de f puis montrer que f admet une réciproque f^{-1}. Est-elle dérivable en 4 ?
5) Etudier la position relative de (C) par rapport à sa tangente au point d'abscisse 1.
6) Construire dans le même repère les courbes (C) et $(\Delta) : y(x) = x + 1$.

Deuxième partie

1) Montrer que $f(x) = x \iff \begin{cases} x < -1 \\ \ln(-x-1) - x + 1 = 0 \end{cases}$.

2) Etudier la fonction $h(x) = \ln(-x-1) - x + 1$. En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique qu'on notera α dans un intervalle que l'on précisera.

3) Comparer $f(x)$ et x pour $x = -2$ puis $x = -1$.

4) En déduire que : $\forall x \in [-2\,;-1],\ -2 \leqslant f^{-1}(x) \leqslant -1$.

5) Déduire des questions précédentes que :

$$\forall x \in [-2\,;-1], \qquad \frac{1}{1+2e^3} \leqslant (f^{-1})'(x) \leqslant \frac{1}{1+e^2}$$

6) Montrer que :

$$\forall x \in [-2\,;-1], \qquad |f^{-1}(x) - \alpha| \leqslant \frac{1}{1+e^2}|x - \alpha|$$

7) Soit $(U_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_n = f^{-1}(U_{n-1}) \end{cases}$

a) Montrer que : $\forall n \geqslant 0,\ U_n \in [-2\,;-1]$.

b) En déduire alors que :

$$\forall n \geqslant 0,\ |U_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{(1+e^2)^n}|U_0 - \alpha|$$

c) Calculer $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} U_n$.

EXERCICE 24

À tout entier naturel n, n strictement positif, on associe la fonction f_n définie par :

$$\forall x \in [1\,;+\infty[,\ f_n(x) = \frac{\ln^n x}{n!\,x^2}$$

Première partie : Etude des fonctions f_n.

a) Calculer la limite de f_n en $+\infty$.

b) Calculer la fonction dérivée $f_n'(x)$ sur $[1\,;+\infty[$.

c) Quelles sont les valeurs de x pour lesquelles la dérivée f_n' est nulle ?

d) Donner le tableau de variation de f_n.

e) Calculer en fonction de n la valeur maximale y_n de f_n.

Deuxième partie : Etude de la suite y_n, n supérieur ou égal à 1

a) Calculer, pour $x > 1$, le rapport $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$.

b) Montrer que $y_{n+1}(x) = \frac{f_n\left(e^{\frac{n+1}{2}}\right)}{2}$.

c) En déduire que $y_{n+1}(x) \leqslant y_n(x)$.

d) Montrer que $y_n(x) \leqslant \frac{1}{2^n e}$.

e) Donner la limite de la suite y_n.

Troisième partie : Etude des primitives des fonctions f_n.

A tout entier naturel n, n strictement positif, on associe l'intégrale $I_n(x) = \int_1^x f_n(t)\,dt$.

a) β étant un nombre réel supérieur ou égal à 1, montrer que : $0 \leqslant I_n(\beta) \leqslant (\beta - 1)y_n$.

b) En déduire la limite de $I_n(\beta)$ quand n tend vers $+\infty$.

c) Démontrer que :

$$I_{n+1}(x) = I_n(x) - \frac{\ln^{n+1} x}{(n+1)!\,x}$$

d) En déduire que :

$$I_n(x) = 1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} - \frac{\ln^2 x}{2!\,x} - \cdots - - \frac{\ln^n x}{n!\,x}$$

e) Exprimer, pour n supérieur ou égal à 1 et x supérieur ou égal à 1, $Z_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(\ln x)^i}{i!}$ en fonction de $I_n(x)$.

f) β étant un nombre réel supérieur ou égal à 1, déterminer la limite de $Z_n(\beta)$ quand n tend vers $+\infty$.

g) En déduire la limite L de la suite S_n de terme général $\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}$.

EXERCICE 15

Pour tout entier naturel non nul n, on considère la fonction f_n définie par :

$$\begin{cases} f_n(x) = x^n \ln x - \dfrac{x^n - 1}{n} & \text{si } x > 0 \\ f_n(0) = \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

On désigne par (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2 cm).

Première partie

1) Etudier la continuité de f_n à droite en 0.

2) Etudier la dérivabilité de f_n à droite en 0 (on distinguera deux cas suivant les valeurs de n).

Interpréter géométriquement les résultats.

3) Etudier le sens de variation de f_n. Préciser la nature de la branche infinie.

4) Construire (C_1) et (C_2).

Deuxième partie

1) Montrer que l'équation $f_2(x) = x$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]0 ; 1[$.

2) a) Etudier le sens de variation de f_2', fonction dérivée de f_2 sur $]0 ; 1]$ et dresser son tableau de variation.

b) Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 1]$, on a : $|f_2'(x)| \leqslant \frac{2}{e}$.

3) On considère la suite numérique (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1, \ \forall n \in \mathbb{N} \\ u_{n+1} = f_2(u_n) \end{cases}$.

a) A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \in [0 ; 1]$.

b) α étant le nombre réel défini à la question 1) de la deuxième partie, démontrer que pour entier natur n, on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{2}{e}|u_n - \alpha|$.

c) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ |u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{2}{e}\right)^n |1 - \alpha|$.

d) Etudier la convergence de la suite (u_n).

CE $\Sigma\pi\int$

AN5

Suites numériques

EXERCICE 1

Répondre par vrai ou faux aux applications suivantes en justifiant les réponses.

1) Toute suite décroissante est majorée.

2) Toute suite décroissante et minorée par 0 a pour limite 0.

3) Toute suite croissante et majorée est bornée.

4) Toute suite qui admet pour limite $+\infty$ n'est pas majorée.

5) Si (u_n) et (v_n) sont des suites convergentes telles que pour tout entier naturel n :

$$u_n < v_n \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} u_n < \lim_{n\to+\infty} v_n$$

EXERCICE 2

Soit (u_n) une suite défini par : $u_0 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) u_n$.

1) Calculer les trois premiers termes de la suite.

2) Conjecture l'expression explicite du terme général u_n.

3) Démontrer par récurrence la conjecture.

EXERCICE 3

Dans chacun des cas suivants, calculer les trois premiers termes de la suite :

a) $u_n = 5n - 3,\ n \geqslant 0$

b) $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4} \end{cases}$

d) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 4 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n \end{cases}$

e) $u_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n}$

f) $u_n = \frac{3n-1}{2n+2},\ n \geqslant 0$

EXERCICE 4

Etudier la monotonie de chacune des suites suivantes définies de façon récursive :

a) $a_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = a_n + 2$.

b) $b_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $b_{n+1} = \frac{5}{6}b_n$.

c) $c_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, $c_{n+1} = -c_n^2 - c_n - 1$.

d) $d_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $d_{n+1} = (1+n)d_n$.

EXERCICE 5

Etudier la monotonie de chacune des suites suivantes définies de façon explicite :

a) $a_n = n - n^2$ b) $b_n = \sqrt{n+3}$ c) $c_n = \frac{4n-1}{n+3}$ d) $d_n = \frac{2^n}{n!}$

e) $e_n = \frac{\sqrt{n}}{2^n}$ f) $f_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2}$ g) $g_n = 4^n \times 5^{-n+1}$

EXERCICE 6

Calculer les limites des suites définies par leur terme général dans chacun des cas suivants :

a) $u_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}$ b) $u_n = \frac{3n+\sin n}{5n+2\cos 3n}$ c) $u_n = \frac{n!}{n^n}$

d) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ e) $u_n = \sin\left(n\pi - \frac{1}{n}\right)$ f) $u_n = \sqrt[n]{2+(-1)^n}$

g) $u_n = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \frac{1}{n\times(n+1)}$ h) $u_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2}$ i) $u_n = \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \cdots + \frac{n-1}{n}$

EXERCICE 7

Etudier le sens de variation et la convergence des suites ci-dessous :

1) $u_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n$, $n \geqslant 0$ 2) $u_n = 1 + \frac{1}{n}$, $n \geqslant 1$ 3) $u_n = \frac{2^n}{n^2}$, $n \geqslant 3$

EXERCICE 8

Etudier les deux suites définies par :

a) $u_n = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{25} - \frac{1}{125} + \cdots + \frac{(-1)^n}{5^n}$, $n \geqslant 0$ b) $v_n = \frac{7^{n+1}+6^{n+1}}{7^n+6^n}$, $n \geqslant 0$

EXERCICE 9

Montrer les résultats suivants par récurrence :

a) $A_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

b) $B_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c) $C_n = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

EXERCICE 10

Soit (u_n) une suite défini par $u_n = -\frac{1}{n+1}$.

1) Calculer les 5 premiers termes de la suite. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

2) Montrer que la suite (u_n) est minorée par -1. En déduire que (u_n) est bornée.

EXERCICE 11

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.

1) Montrer par récurrence que (u_n) est minorée par 1 puis en déduire les variations de (u_n).

2) Montrer que la suite (u_n) ne peut être majorée. En déduire la limite de (u_n).

EXERCICE 12

La suite (u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} \end{cases}$

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.

EXERCICE 13

Soit (w_n) la suite définie par : $\begin{cases} w_0 = 1 \\ w_{n+1} = \frac{w_n+1}{w_n+3}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Montrer par récurrence que pour tout n, $0 \leqslant w_n \leqslant 1$.

2) Démontrer par récurrence que (w_n) est décroissante.

EXERCICE 14

Soit (u_n) une suite défini par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4} \end{cases}$

1) Calculer les 3 premiers termes de la suite ; montrer que la suite est positive.

2) Tracer la courbe représentative de la fonction : $x \longmapsto \sqrt{3x + 4}$. En déduire une représentation graphique sur $(x'x)$ des quatre premiers termes de la suite (u_n).

3) Montrer que (u_n) est majorée par 4.

4) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 4 - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(4 - u_n)$.

3) En déduire par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 4 - u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$.

EXERCICE 15

Soit (u_n) de terme général : $u_n = \frac{1!+2!+\cdots+n!}{n!}, n > 0$.

1) Montrer que $u_n \geqslant 1$.

2) Montrer que : $1! + 2! + \ldots + (n-2)! \leqslant (n-2)(n-2)$.

3) En déduire que : $u_n \leqslant 1 + \frac{2n-3}{n(n-1)}$.

4) En déduire que (u_n) converge vers 1.

EXERCICE 16

Dans chacun des cas suivants, démontrer que (u_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison. Exprimer u_n en fonction de n.

1) $u_n = 15 - n$

2) $u_n = 4 - 3(n-1),\ \forall n \in \mathbb{N}$

3) $\begin{cases} u_5 = -1 \\ 5u_{n+1} = 5u_n - 2,\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

EXERCICE 17

Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 4 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n \end{cases}$

1) Calculer les 6 premiers termes de la suite.

2) Montrer que la suite (u_n) est arithmétique, préciser le terme général u_n en fonction de n.

3) Exprimer u_{100}, u_{10} et calculer la somme : $S = u_{10} + u_{11} + \cdots + u_{99} + u_{100}$.

4) Donner l'expression de la somme suivante : $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n$.

5) Résoudre l'inéquation d'inconnue n : $S_n \geqslant 50$.

EXERCICE 18

1) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme $v_0 = -328$.

a) Donner l'expression de (v_n) en fonction de n.

b) Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$. Donner l'expression de S_n en fonction de n.

2) Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique définie par : $\begin{cases} w_0 = -3 \\ w_{n+1} = w_n + 4n - 1 \end{cases}$

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour tout entier naturel n par $u_n = w_{n+1} - w_n$.

a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique, puis déterminer sa raison et son premier terme.

b) Quel est le sens de variation des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

EXERCICE 19

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = u_n - 2n + 5$ et $u_0 = 4$.

1) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle arithmétique ?

2) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_{n+1} - u_n$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle arithmétique ?

3) Donner une expression de v_n en fonction de n.

4) Donner une expression de $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ en fonction de n.

5) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $S_n = u_{n+1} - u_0$.

6) En déduire une expression de u_n en fonction de n.

EXERCICE 20

Dans chacun des cas suivants, démontrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

a) $u_n = 2^{n+3}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

b) $u_n = \frac{3^n}{24^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

c) $u_n = 4^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

d) $u_n = \frac{2^{n+2}}{5^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

EXERCICE 21

Sachant que les solutions de l'équation : $x^3 - 14x^2 + 56x - 64 = 0$ sont en progression géométrique, la résoudre.

EXERCICE 22

Donner le nombre de termes n et la raison q d'une progression géométrique sachant que le premier terme est 3, le dernier terme 192 et la somme des termes 381.

EXERCICE 23

Pour tout entier naturel n, calculer en fonction de n :

a) $S_1 = 1 + 10 + 20 + 30 + \cdots + 10n$

b) $S_2 = 1 + 10 + 100 + 1\,000 + \cdots + 10^n$

c) $S_3 = 1 - 10 + 100 - 1\,000 + \cdots + (-1)^n 10^n$

d) $S_4(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$

EXERCICE 24

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_n = 2 \cdot 3^{n-1}$.

Démontrer que (u_n) est une suite géométrique et donner sa raison ainsi que son premier terme u_0

EXERCICE 25

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ 2u_{n+1} = u_n - 1 \end{cases}$

1) Calculer les trois premiers termes de la suite (u_n).

2) Montrer que si (u_n) converge alors sa limite est -1.

3) On pose $v_n = u_n + 1$.

a) Montrer que (v_n) est géométrique.

b) En déduire les valeurs de v_n et de u_n en fonction de n.

EXERCICE 26

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \frac{2}{5}u_n$.

1) Montrer que si (u_n) est convergente alors sa limite est $\frac{5}{3}$.

2) On pose $v_n = u_n - \frac{5}{3}$. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{2}{5}$.

En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

3) Conclure quant à la convergence de (u_n).

EXERCICE 27

1) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 3.

a) Donner l'expression de (v_n) en fonction de n.

b) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$.

2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique. On sait que $u_3 = \frac{4}{3}$ et $u_8 = -324$.

a) Déterminer son premier terme u_0 ainsi que sa raison.

b) En déduire u_n en fonction de n.

c) Etudier le sens de variation de (u_n).

EXERCICE 28

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 2n^2 - n$.

1) Déterminer trois réels a, b et c tels que la suite (v_n) de terme général $v_n = u_n + an^2 + bn + c$ soit une suite géométrique.

2) Exprimer v_n en fonction de n.

3) En déduire u_n en fonction de n.

EXERCICE 29

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2 \end{cases}$

1) Calculer u_1, u_2 et u_3.

2) a) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 4$, $u_n \geqslant 0$.

b) En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 5$, $u_n \geqslant n - 3$.

c) En déduire la limite de la suite (u_n).

3) On définit la suite (v_n) par pour tout entier n : $v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.

b) En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$.

c) Soit la somme S_n définie pour tout entier naturel n par : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Déterminer l'expression de S_n en fonction de n.

EXERCICE 30

Soit (u_n) et (v_n) les suites définies par $u_0 = \frac{5}{4}$ et pour tout entier naturel n : $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - n - \frac{4}{3} \\ v_n = u_n + \frac{3}{2}n - \frac{1}{4} \end{cases}$

1) Calculer v_0, v_1 et v_2.

2) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on exprimera le terme général v_n en fonction de n.

3) Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k$ et $S'_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$.

4) Calculer les limites de S_n et S'_n.

EXERCICE 31

Soient $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ deux suites définies par : $\begin{cases} u_1 = 12 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \\ v_1 = 1 \\ v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} \end{cases}$

CE $\sum\pi\int$

1) Pour tout entier $n > 1$, on pose : $w_n = v_n - u_n$.

Montrer que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

2) Exprimer w_n en fonction de n.

3) Pour tout entier $n > 1$, on pose : $t_n = 3u_n + 8v_n$.

Montrer que la suite (t_n) est constante.

4) En déduire une expression explicite de u_n et v_n en fonction de n.

5) Calculer u_2, v_2, u_3 et v_3 à l'aide de la relation de récurrence, puis en utilisant le résultat de la question précédente.

EXERCICE 32

On cherche à démontrer la convergence de la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{3}{u_n}\right) \end{cases}$

1) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right)$.

a) Etudier les variations de f.

b) Montrer que si $\in [\sqrt{3}\,;\,+\infty[$, alors $f(x) \in [\sqrt{3}\,;\,+\infty[$.

c) Montrer que : $\forall\, x \in [\sqrt{3}\,;\,+\infty[,\ 0 \leqslant f'(x) \leqslant \frac{1}{2}$.

d) En déduire, en utilisant l'inégalité des accroissements finis, que :

$$\forall\, x \in [\sqrt{3}\,;\,+\infty[, \qquad 0 \leqslant f(x) - \sqrt{3} \leqslant \frac{1}{2}(x - \sqrt{3})$$

2) a) Montrer par récurrence que : pour tout n, $u_n \in [\sqrt{3}\,;\,+\infty[$.

En déduire que : pour tout n, $0 \leqslant u_{n+1} - \sqrt{3} \leqslant \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{3})$.

b) Montrer que pour tout n, $0 \leqslant u_n - \sqrt{3} \leqslant \frac{1}{2^n}(u_0 - \sqrt{3})$.

En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

EXERCICE 33

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2 - u_n + 2}{1 + u_n} \end{cases}$

1) a) Montrer que pour tout entier naturel n, $1 < u_n \leqslant 2$.

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

CE $\Sigma\pi\int$

c) En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

2) a) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $0 < u_{n+1} - 1 < \frac{1}{3}(u_n - 1)$

b) En déduire que pour tout entier naturel n, $0 < u_n - 1 < \left(\frac{1}{3}\right)^n$. Retrouver alors $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

3) On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a : $n < S_n < n + \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$

b) En déduire $\lim_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n}$.

EXERCICE 34

Soit θ un réel tel que $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ et soit la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 2\cos\theta \\ U_{n+1} = \sqrt{2 + U_n} \end{cases}$

1) Calculer les deux premiers termes de la suite en fonction de θ.

<u>Rappel</u> : On rappelle que $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$.

2) Montrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N} : U_n = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$.

3) Soit (V_n) définie par $V_n = \frac{\theta}{2^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

a) Quelle est la nature de la suite (V_n) ?

b) Déterminer la limite de la suite (V_n).

4) En déduire que (U_n) est convergente et calculer sa limite.

EXERCICE 35

On considère les deux suites réelles (u_n) et (v_n) définies par : $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n + 3v_n}{5} \\ v_1 = 7 \\ v_{n+1} = \frac{u_n + 4v_n}{5} \end{cases}$

1) Pour tout entier naturel n, non nul, on pose : $w_n = v_n - u_n$.

a) Démontrer que la suite (w_n) est géométrique.

b) Exprimer w_n en fonction de n. En déduire la limite de la suite (w_n).

2) a) Démontrer que la suite (u_n) est croissante et la suite (v_n) est décroissante.

b) Démontrer que la suite (u_n) est majorée et la suite (v_n) est minorée.

c) Conclure pour les deux suites.

3) Soit la suite (t_n) de terme général : $t_n = \frac{1}{3}u_n + v_n$, où $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que (t_n) est une suite constante. En déduire les limites des suites (u_n) et (v_n).

EXERCICE 36

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{3u_n}{4} + \frac{v_n}{4} \\ v_{n+1} = \frac{3v_n}{4} + \frac{u_n}{4} \\ u_0 = 1 \\ v_0 = 3 \end{cases}$

1) On pose $w_n = u_n - v_n$ pour tout entier naturel n. Montrer que (w_n) est une suite géométrique convergente.

Comparer u_n et v_n.

2) Etudier les sens de variation de u_n et v_n.

3) Montrer que (u_n) est majorée et que (v_n) est minorée.

4) En déduire que (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite ℓ.

5) On pose $D_n = u_n + v_n$ pour tout n. Montrer que (D_n) est constante puis en déduire ℓ.

EXERCICE 37

Soit la suite récurrente (u_n) définie par u_0 et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

Première partie : Etude de la suite (u_n) si $u_0 = 0$.

1) Montrer que (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

2) Représenter les 4 premiers termes de la suite.

3) Vérifier que : $u_0 < u_1 \leqslant 2$.

4) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n < u_{n+1} \leqslant 2$.

5) En déduire que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

Deuxième partie : Etude de la suite (u_n) si $u_0 = 2$.

1) Calculer u_1, u_2, u_3. Quel résultat peut-on conjecturer de u_n ?

2) Montrer par récurrence ce résultat.

Troisième partie : Etude de la suite (u_n) si $u_0 = 4$.

1) Représenter les 4 premiers termes de la suite (u_n).

2) Vérifier que : $2 \leqslant u_0 < u_1$.

3) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} : 2 \leqslant u_n < u_{n+1}$.

4) En déduire que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

EXERCICE 38

La suite de terme général u_n est définie par la donnée de u_0 et de u_1 avec $u_0 < u_1$ et la relation

$$\forall n \geqslant 2, \quad u_n = \frac{u_{n-1} + u_{n-2}}{2}$$

1) Montrer que la suite (u_n) est bornée.

2) Montrer que $u_n + \frac{1}{2}u_{n-1}$ ne dépend pas de n.

3) Déduire que (u_n) converge puis trouver sa limite.

EXERCICE 39

Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) \end{cases}$

1) a) Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$.

Etudier les variations de f et tracer sa courbe dans le plan muni d'un repère orthonormal (unité cm).

b) Utiliser le graphe précédent pour construire u_0, u_1, u_2 et u_3.

2) a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $u_n \geqslant \sqrt{2}$.

b) Montrer que pour tout $x \geqslant \sqrt{2}$, $f(x) \leqslant x$.

c) En déduire que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1.

d) Prouver qu'elle converge puis déterminer sa limite.

EXERCICE 40

Soit P_n la fonction définie, pour $n \geqslant 1$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x - 1$$

1) Montrer qu'il existe un unique réel $\varepsilon_n > 0$ tel que $P_n(\varepsilon_n) = 0$.

2) Montrer que la suite $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et convergente.

3) Calculer $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n$.

EXERCICE 41

On considère la suite complexe de terme général Z_n défini par $Z_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $2Z_{n+1} = Z_n + i$

1) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le module r_n de Z_n est inférieur ou égal à 1.

CE. $\Sigma\pi\int$

2) Soient x_n et y_n deux réels. On pose $Z_n = x_n + iy_n$ et $U_n = Z_n - i$.

a) Trouver une relation entre U_n et U_{n+1}.

b) En déduire que (x_n) converge vers 0 et que (y_n) et (y_n) convergent vers 1.

c) Déterminer la limite de (Z_n).

EXERCICE 42

Soit f la fonction définie par : $\forall\, t \in \mathbb{R},\ f(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{5}$.

1) Montrer que : $\exists!\, t_0 \in]0\,;\,1[$ tel que $f(t_0) = t_0$.

2) Montrer que : $\forall\, t \in]0\,;\,1[,\ f(t) \in]0\,;\,1[$ et $\forall\, t \in [0\,;\,1],\ |f'(t)| \leqslant \frac{1}{2}$.

3) Soit (U_n) la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = f(U_n) \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$

a) Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ U_n \in]0\,;\,1[$.

b) Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ |U_{n+1} - t_0| \leqslant \frac{1}{2}|U_n - t_0|$.

c) Montrer que : $\lim_{n\to+\infty} U_n$.

EXERCICE 43

Soit la suite U définie par :

$$\begin{cases} U_0 = \dfrac{1}{2} \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n}{\sqrt{2 - U_n^2}} \ ;\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant U_n \leqslant 1$.

2) a) Montrer que U est décroissante et en déduire qu'elle converge.

b) Déterminer la limite de la suite U.

3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} \leqslant \frac{2}{\sqrt{7}} U_n$; retrouver la limite de U.

4) Soit S la suite définie $\mathbb{N}^*$ par $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} U_k$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ U_n \leqslant \left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)^n \times \frac{1}{2}$.

b) Montrer que S est majorée et qu'elle est convergente.

5) Soit V la suite définie sur N par : $\begin{cases} V_0 = \frac{1}{2} \\ V_{n+1} = \sqrt{U_n + V_n^2} \ ; \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n \geqslant \frac{1}{2}$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant V_{n+1} - V_n \leqslant U_n$; en déduire que V est majorée.

c) En déduire que V est convergente.

EXERCICE 44

On considère la suite U définie sur N par :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ 3U_{n+1} = 2U_n - \dfrac{n}{3^n} \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) Calculer U_1 et U_2.

2) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, U_n = \frac{n+1}{3^n}$.

3) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + \frac{1}{3^{n+1}}$.

4) Soit la suite W définie par $W_n = 9U_{n+1} - 3U_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que W est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

b) Exprimer $\sum_{k=0}^{n-1} W_k$ en fonction de n.

5) On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} U_k, n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer par récurrence que $S_n = \frac{9}{4} - \frac{2n+3}{4\times 3^{n-1}}, n \in \mathbb{N}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{3^{k-1}}$ en fonction de n.

EXERCICE 45

Le problème est composé de trois parties.

La deuxième et troisième partie peuvent être traitées indépendamment de la première partie.

Le plan euclidien (P) est muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

On appelle f_a la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f_a(x) = \frac{x}{ax - a + 1}$$

où a est un réel différent de 0 et de 1.

On note $(\mathcal{C}_a)$ la courbe représentative de f_a dans le repère $\mathcal{R}$.

Première partie

1) Montrer que toutes les courbes $(\mathcal{C}_a)$ passent par deux points fixes indépendants de a.

2) Déterminer les points fixes de f_a, c'est à dire les réels ℓ tels que $f_a(\ell) = \ell$.

3) Etudier les variations de f_a ; on discutera suivant les valeurs de a.

4) Construire dans le repère $\mathcal{R}$ les courbes $(\mathcal{C}_{-4})$, $(\mathcal{C}_{0,5})$. (On prendra pour unité graphique 1 cm).

5) Construire dans un même repère orthonormé d'unité graphique 2 cm les courbes $(\mathcal{C}_{1,5})$ et $(\mathcal{C}_4)$.

Deuxième partie

Dans cette partie, a est un élément de l'intervalle $]0 ; 1[$.

Soit U_0 un élément de $[0 ; 1]$ et (U_n) la suite définie par son premier terme U_0 et par la relation de récurrence : $U_{n+1} = f_a(U_n)$.

1) a) Montrer que la fonction f_a est strictement croissante dans $[0 ; 1]$.

Quel est l'image de l'intervalle $[0 ; 1]$ par f_a ?

b) Montrer que la suite (U_n) est partout définie et que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ U_n \in [0 ; 1]$.

Que peut-on dire de la suite (U_n) si $U_0 = 0$? Si $U_0 = 1$?

2) On suppose que U_0 est différent de 0 et 1.

a) Vérifier que la suite (U_n) est strictement monotone.

b) En déduire qu'elle est convergente et calculer sa limite.

CE $\Sigma\pi\int$

Calcul intégral

EXERCICE 1

Première partie

Calculer les intégrales suivantes :

1) $\int_{-1}^{2} 2t^3\,dt$ 2) $\int_{-1}^{\frac{3}{2}} -t^4\,dt$ 3) $\int_{-1}^{-2} \frac{dt}{t^3}$ 4) $\int_{0}^{9} \sqrt{t}dt$

5) $\int_{\pi}^{0} \sin 2t\,dt$ 6) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (2-3\sin t)\,dt$ 7) $\int_{0}^{\pi} \sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)dt$ 8) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (3\cos t - \sin t)\,dt$

9) $\int_{1}^{3} x^3\,dx$ 10) $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \tan^2 x\,dx$ 11) $\int_{3}^{5} |x-3|\,dx$ 12) $\int \sin(\ln x)dx$

Deuxième partie

Calculer les intégrales suivantes :

1) $A = \int_{0}^{1} x(x^2+1)^5\,dx$ 2) $B = \int_{0}^{1} (4x+2)(x^2+2x-1)^2\,dx$ 3) $C = \int_{0}^{2} x^2(x^3-8)\,dx$

4) $D = \int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2+2x+1}$ 5) $E = \int_{-1}^{0} \frac{2x+3}{(x^2+3x-1)^2}dx$ 6) $F = \int_{-1}^{0} \sqrt{x+2}\,dx$

Troisième partie

Calculer les intégrales suivantes :

1) $\int_{1}^{e} \frac{\ln x}{x}dx$ 2) $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \sin^3 x\,dx$ 3) $\int_{1}^{2} \frac{x+1}{x^2+2x+7}dx$ 4) $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\cos x+\sin x}dx$

5) $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x+\sin x}dx$ 6) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}dx$ 7) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}dx$ 8) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\tan^{\alpha} x}dx$

9) $\int \frac{6x+7}{3x^2+7x-13}dx$ 10) $\int \sin^6 x \cdot \cos x\,dx$ 11) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$ 12) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^9 x\,dx$

Quatrième partie

En utilisant une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

1) $\int_{0}^{1} xe^{2x}dx$ 2) $\int_{0}^{\pi} x\sin x\,dx$ 3) $\int_{-\pi}^{\pi} x\cos x\,dx$ 4) $\int_{1}^{e} \ln x\,dx$ 5) $\int_{1}^{e} x\ln x\,dx$

Cinquième partie

Calculer les primitives de la fonction donnée :

a) $\frac{\ln x}{x^2}$ b) $\frac{\ln^2 x}{x^2}$ c) $\ln^2 x$ d) $\sin(\ln x)$ e) $\cos(\ln x)$

Sixième partie

Calculer les intégrales suivantes en utilisant une intégration par parties :

1) $A = \int_0^1 x(e^x - e^{-x})dx$ 2) $B = \int_1^2 x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)dx$ 3) $C = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos x + 2x\sin x}{2x\sqrt{x}}dx$

4) $D = \int_0^1 \frac{3x^2+6x+1}{x^2+2x+1}dx$ 5) $E = \int \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}dx$ 6) $F = \int_1^2 \ln x\, dx$

Septième partie

À l'aide d'un changement de variable affine, calculer les intégrales suivantes :

1) $\int_0^1 x\sqrt{x+1}\,dx$ 2) $\int_{-8}^{-3} x\sqrt{1-x}\,dx$ 3) $\int_0^{\frac{1}{2}} x^2\sqrt{2x+1}\,dx$

Huitième partie

Calculer les intégrales suivantes (primitives) en faisant le changement de variable indiqué.

1) $\int \sin^3 x\cos^4 x dx$ poser $t = \cos x$

2) $\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2}$ poser $t = x^2$

3) $\int \frac{dx}{1+\sin x}$ poser $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

Neuvième partie

Calculer les intégrales en faisant un changement de variable.

1) $\int_1^2 t^2\sqrt{a+t}\,dt$ avec $a > 0$ 2) $\int_0^3 \frac{t}{\sqrt{1+t}}dt$ 3) $\int_0^{\sqrt{3}} t\sqrt{1+t^2}\,dt$ 4) $\int_{-1}^0 \frac{x}{\sqrt{2x+3}}dx$

Dixième partie

Calculer les intégrales suivantes (on pourra utiliser un changement de variable convenable) :

1) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ 2) $\int \frac{dx}{x\cdot\ln^3 x}$ 3) $\int x\cdot\sqrt{1+x^2}\,dx$

4) $\int \frac{dx}{(1-x)\cdot\sqrt{1-x^2}}$ 5) $\int \tan x\, dx$ 6) $\int \sin x\cdot\cos x\cdot\sqrt{2+\sin x}\,dx$

7) $\int \frac{dx}{\sin x}$ 8) $\int \frac{dx}{\cos x}$ 9) $\int \frac{x}{\sqrt{2x+3}}dx$

Onzième partie

En faisant un changement de variable convenable, calculer les intégrales suivantes :

1) $A = \int_0^1 \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx$ 2) $B = \int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{(x-x^3)^{\frac{1}{3}}}{x^4}dx$ 3) $C = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\,dx$

Calculer les primitives de la fonction donnée :

a) $\frac{\ln x}{x^2}$ b) $\frac{\ln^2 x}{x^2}$ c) $\ln^2 x$ d) $\sin(\ln x)$ e) $\cos(\ln x)$

Sixième partie

Calculer les intégrales suivantes en utilisant une intégration par parties :

1) $A = \int_0^1 x(e^x - e^{-x})dx$ 2) $B = \int_1^2 x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx$ 3) $C = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos x + 2x \sin x}{2x\sqrt{x}} dx$

4) $D = \int_0^1 \frac{3x^2+6x+1}{x^2+2x+1} dx$ 5) $E = \int \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} dx$ 6) $F = \int_1^2 \ln x \, dx$

Septième partie

À l'aide d'un changement de variable affine, calculer les intégrales suivantes :

1) $\int_0^1 x\sqrt{x+1}\, dx$ 2) $\int_{-8}^{-3} x\sqrt{1-x}\, dx$ 3) $\int_0^{\frac{1}{2}} x^2\sqrt{2x+1}\, dx$

Huitième partie

Calculer les intégrales suivantes (primitives) en faisant le changement de variable indiqué.

1) $\int \sin^3 x \cos^4 x dx$ poser $t = \cos x$

2) $\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2}$ poser $t = x^2$

3) $\int \frac{dx}{1+\sin x}$ poser $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

Neuvième partie

Calculer les intégrales en faisant un changement de variable.

1) $\int_1^2 t^2\sqrt{a+t}\, dt$ avec $a > 0$ 2) $\int_0^3 \frac{t}{\sqrt{1+t}} dt$ 3) $\int_0^{\sqrt{3}} t\sqrt{1+t^2}\, dt$ 4) $\int_{-1}^0 \frac{x}{\sqrt{2x+3}} dx$

Dixième partie

Calculer les intégrales suivantes (on pourra utiliser un changement de variable convenable) :

1) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ 2) $\int \frac{dx}{x \cdot \ln^3 x}$ 3) $\int x \cdot \sqrt{1+x^2}\, dx$

4) $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$ 5) $\int \tan x \, dx$ 6) $\int \sin x \cdot \cos x \cdot \sqrt{2+\sin x}\, dx$

7) $\int \frac{dx}{\sin x}$ 8) $\int \frac{dx}{\cos x}$ 9) $\int \frac{x}{\sqrt{2x+3}} dx$

Onzième partie

En faisant un changement de variable convenable, calculer les intégrales suivantes :

1) $A = \int_0^1 \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}} dx$ 2) $B = \int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{(x-x^3)^{\frac{1}{3}}}{x^4} dx$ 3) $C = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\, dx$

Douzième partie

Calculer les intégrales suivantes

1) $A = \int \frac{\ln x - 1}{x^2} dx$

2) $B = \int_2^4 \frac{dx}{x^2 - 1}$

3) $C = \int_0^1 \frac{x^2 + 2x - 1}{x + 1} dx$

4) $D = \int_2^3 \frac{x^2}{(x+1)(x-1)(x+2)} dx$

EXERCICE 2

On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x + 1)\cos^2 x dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x + 1)\sin^2 x dx$.

1) Calculez $I + J$.

2) Calculez, à l'aide d'une intégration par parties, $I - J$.

3) Déduisez des résultats précédents les valeurs de I et de J.

EXERCICE 3

On considère les intégrales :

$$I = \int_0^{\pi} \cos^4 x \, dx \quad ; \quad J = \int_0^{\pi} \sin^4 x \, dx$$

1) Montrer que I peut s'écrire :

$$I = \int_0^{\pi} \cos x \, (\cos x - \cos x \sin^2 x) dx$$

2) A l'aide d'une intégrale par parties, montrer que :

$$I = \int_0^{\pi} \sin^2 x dx - \frac{1}{3} J$$

3) Montrer de même que :

$$J = \int_0^{\pi} \cos^2 x dx - \frac{1}{3} I$$

4) Montrer que :

$$I + J = \frac{3\pi}{4} \quad ; \quad J - I = 0$$

5) En déduire les valeurs de I et J.

EXERCICE 4

Première partie

Soit $f(x) = x^2 - 1$. Déterminer l'aire du domaine plan associé à la fonction f, dans un repère orthonormal d'unité de longueur 2 cm et sur l'intervalle $[-2 ; 2]$.

Deuxième partie

Soient f et g les fonctions définies par $f(x) = 2x^2 - 1$ et $g(x) = x$.

Calculer l'aire du domaine plan déterminé par leurs courbes représentatives sur $[-1 ; 1]$, dans un repère orthonormal d'unité de longueur $2\sqrt{2}$ cm.

Troisième partie

L'unité graphique est égale à 2 cm sur (OI) et à 3 cm sur (OJ). Représenter les domaines suivants puis calculer leur aire en cm².

1) $\begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \\ 0 \leqslant y \leqslant 3 + 2\cos x \end{cases}$

2) $\begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{2}{x^2} \end{cases}$

Quatrième partie

L'unité graphique est égale à 2 cm sur chaque axe du repère.

1) Tracer la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto x - x^3$.

2) Calculer l'aire, en cm², de l'ensemble des points M (x, y) tels que : $\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant x - x^3 \end{cases}$.

EXERCICE 5

On considère la suite (I_n) définie par : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, dt$.

1) Calculer I_0 et I_1.

2) Montrer que la suite (I_n) est décroissante. En déduire qu'elle converge.

3) Etablir une formule de récurrence liant I_n et I_{n-2} par une intégration par parties pour $n \geqslant 2$.

EXERCICE 6

On définit, pour $n \geqslant 1$, $I_n = \int_0^1 t^n e^{-t} \, dt$.

1) Montrer, sans calculer I_n, que la suite (I_n) est décroissante. Converge-t-elle ?

2) Montrer que $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$ et en déduire la limite de (I_n).

EXERCICE 7

On désigne par I_n l'intégrale :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} \, dt$$

1) Calculer $I_n - I_{n-1}$.

2) En déduire la valeur de I_n pour tout entier n.

3) Reprendre les mêmes questions pour :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nt}{\sin^2 t}\,dt$$

EXERCICE 8

On pose, pour tout entier naturel n, $I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n e^x dx$.

1) Calculer I_0, puis, à l'aide d'une intégration par parties, I_1.

2) Pour tout entier naturel non nul n, exprimer I_n en fonction de I_{n-1}. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = e - \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}$$

3) Majorer la fonction l définie par $l(x) = (1-x)^n e^x$ sur $[0\,;1]$. En déduire la limite de I_n.

4) En déduire que :

$$e = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)$$

EXERCICE 9

On considère les intégrales suivantes :

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x} \quad ; \quad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x}{\cos x}\,dx \ ;\ n \in \mathbb{N}^*$$

1) Calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^n x \cos x\, dx$ puis en déduire $I_{n+2} - I_n$ en fonction de n.

2) Calculer I_1 puis en déduire I_3 et I_5.

3) a) Soit f l'application qui à tout x de $\left[0\,;\frac{\pi}{3}\right]$ associe $f(x) = \ln\left[\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]$. Montrer que f est une primitive de la fonction g définie sur $\left[0\,;\frac{\pi}{3}\right]$ par : $g(x) = \frac{1}{\cos x}$.

b) En déduire I_0, puis I_2.

EXERCICE 10

On pose, pour $n \geqslant 1$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $v_n = u_n - \ln n$.

1) Démontrer que, pour tout entier naturel k non nul, on a :

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leqslant \frac{1}{k}$$

2) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 2$, on a : $u_n - 1 \leqslant \ln n \leqslant u_n - \frac{1}{n}$ et $0 \leqslant v_n \leqslant 1$.

3) Démontrer que pour tout entier naturel non nul, $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{dx}{x}$.

4) En déduire que la suite (v_n) converge vers une limite γ (que l'on ne cherchera pas à calculer).

Que dire de (u_n) ?

EXERCICE 11

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on considère l'intégrale :

$$I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx.$$

1) Démontrer que pour tout x dans l'intervalle $]1\,;\,e[$ et pour tout n entier naturel, on a :

$$(\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} > 0$$

2) En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

3) Calculer I_1 à l'aide d'une intégration par parties.

4) Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.

5) En déduire I_2, I_3 et I_4. Donner les valeurs exactes, exprimées en fonction de e, et les valeurs approchées à 10^{-3} près par défaut.

6) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \geqslant 0$.

7) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)I_n \leqslant e$.

8) En déduire la limite de I_n.

9) Déterminer la valeur de $nI_n + (I_n + I_{n+1})$ en déduire la limite de nI_n.

EXERCICE 12

Première partie

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x}e^{1-x}$.

Elle est dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$. On note f' sa dérivée.

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction $x \longmapsto \frac{e^x}{x}$.

2) Déterminer la limite de f en $+\infty$ on pourra pour cela justifier et exploiter l'écriture, pour tout x réel strictement positif, $f(x) = \frac{e}{\sqrt{x}} \times \frac{x}{e^x}$. Interpréter graphiquement le résultat.

3) Pour x élément de $]0\,;+\infty[$, calculer $f'(x)$.

4) Déduire des questions précédentes le tableau de variation de f.

5) Tracer la courbe (C) (unité graphique : 2 cm).

Deuxième partie

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \int_n^{n+1} f(t)dt$.

1) Interpréter géométriquement u_n.

2) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $f(n+1) \leqslant u_n \leqslant f(n)$.

3) En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

4) Prouver la convergence de la suite (u_n) et déterminer sa limite.

Troisième partie

On considère la fonction numérique F de la variable réelle x définie sur $[1\,;+\infty[$ par :

$$F(x) = \int_1^x f(t)dt$$

1) a) Montrer que F est dérivable sur $[1\,;+\infty[$ et calculer $F'(x)$.

b) En déduire le sens de variation de F.

2) a) Démontrer que, pour tout réel t positif, $t + 2 \geqslant 2\sqrt{2}\sqrt{t}$.

b) En déduire que, pour tout x de l'intervalle $[1\,;+\infty[$, $F(x) \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_1^x (t+2)e^{1-t}dt$.

c) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout x appartenant à $[1\,;+\infty[$:

$$\int_1^x (t+2)e^{1-t}dt = 4 - (x+3)e^{1-x}$$

d) En déduire que, pour tout x appartenant à $[1\,;+\infty[$, $0 \leqslant F(x) \leqslant \sqrt{2}$.

3) On note, pour tout entier naturel n non nul, S_n la somme des $n - 1$ premiers termes de la suite (u_n). Exprimer S_n à l'aide d'une intégrale. Montrer que la suite (S_n) converge et donner un encadrement de sa limite.

EXERCICE 13

Première partie

Soit q la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $q(x) = xe^{-x}$.

1) Etudier q (limites et sens de variation). La courbe représentative n'est pas demandée.

2) a) Montrer que, pour tout réel x, on a $q(x) < 1$; en déduire que pour tout réel x on a $x \neq e^x$.

b) Montrer que si $x \geqslant 0$ alors : $0 \leqslant xe^{-x} \leqslant e^{-1}$.

Deuxième partie

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f = \frac{e^x}{e^x - x}$.

1) Etudiez f.

2) Précisez les asymptotes et tracez avec soin la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité graphique : 5 cm).

3) Montrer que si $x \geqslant 0$ alors $0 < f(x) < \frac{e}{e-1}$.

Troisième partie

1) Montrer que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par : $G(x) = \left(-\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)e^{-2x}$ est une primitive de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^2e^{-2x}$.

2) A l'aide d'une intégration par parties, calculez : $\int_0^1 xe^{-x}dx$.

Donner la valeur de : $I_1 = \int_0^1 \left(1 + \frac{x}{e^x}\right)dx$.

3) Déduisez des résultats précédents la valeur de :

$$I_2 = \int_0^1 \left(1 + \frac{x}{e^x} + \left(\frac{x}{e^x}\right)^2\right)dx$$

Quatrième partie

On se propose de trouver un encadrement de $J = \int_0^1 f(x)dx$ (on ne demande pas de calculer J).

x étant un réel donné, on considère la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :

$$S_n(x) = 1 + \frac{x}{e^x} + \left(\frac{x}{e^x}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x}{e^x}\right)^n$$

1) Montrer que : $S_n(x) = \left(1 - \left(\frac{x}{e^x}\right)^{n+1}\right)f(x)$.

2) a) En utilisant les encadrements obtenus dans la *première partie* et la *deuxième partie*, démontrez que pour tout $x \geqslant 0$, on a :

$$0 \leqslant f(x) - S_n(x) \leqslant \frac{1}{e-1}\cdot\frac{1}{e^n}$$

b) Déduisez-en un encadrement de $J - I_n$, où $I_n = \int_0^1 S_n(x)dx$ et $J = \int_0^1 f(x)dx$, puis en utilisant la valeur de I_2 trouvée dans la *troisième partie*, donnez un encadrement de J.

EXERCICE 14

Dans cet exercice, n est un entier naturel non nul.

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2}e^{\frac{t}{n}}dt$$

1) a) Soit φ la fonction définie sur $[0 ; 2]$ par $\phi(t) = \frac{2t+3}{t+2}$.

Étudier les variations de φ sur $[0 ; 2]$. En déduire que, pour tout réel t dans $[0 ; 2]$:

$$\frac{3}{2} \leqslant \phi(t) \leqslant \frac{7}{4}$$

b) Montrer que, pour tout réel t dans $[0 ; 2]$, on a :

$$\frac{3}{2}e^{\frac{t}{n}} \leqslant \phi(t)e^{\frac{t}{n}} \leqslant \frac{7}{4}e^{\frac{t}{n}}$$

c) Par intégration en déduire que :

$$\frac{3}{2}n\left(e^{\frac{2}{n}}-1\right) \leqslant u_n \leqslant \frac{7}{4}n\left(e^{\frac{2}{n}}-1\right)$$

d) On rappelle que $\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$.

Montrer que, si (u_n) possède une limite ℓ, alors : $3 \leqslant \ell \leqslant \frac{7}{2}$.

2) a) Vérifier que, pour tout t dans $[0\,;2]$, on a : $\frac{2t+3}{t+2}=2-\frac{1}{t+2}$.

En déduire l'intégrale $I=\int_0^2 \frac{2t+3}{t+2}\,dt$.

b) Montrer que, pour tout t dans $[0\,;2]$, on a : $1 \leqslant e^{\frac{t}{n}} \leqslant e^{\frac{2}{n}}$.

En déduire que : $I \leqslant u_n \leqslant e^{\frac{2}{n}}\ell$.

c) Montrer que (u_n) est convergente et déterminer sa limite ℓ.

EXERCICE 15

On pose $I(a,n)=\int_0^1 x^a(1-x)^n\,dx$ avec $(a,n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ et $I(a,0)=\int_0^1 x^a\,dx$.

1) En intégrant par parties, montrer que : $I(a+1,n)=\frac{a+1}{n+1}I(a,n+1)$.

2) Etablir que : $I(a,n)-I(a,n+1)=I(a+1,n)$.

3) En déduire que : $I(a,n+1)=\frac{n+1}{n+a+2}I(a,n)$.

4) a étant fixé, calculer $I(a,0)$ et démontrer par récurrence sur n que :

$$I(a,n)=\frac{1\times 2\times 3\times\cdots(n-1)\times n}{(a+1)(a+2)(a+3)\cdots(a+n+1)}$$

EXERCICE 16

Pour n entier naturel non nul, soit f_n la fonction définie sur $I=[0\,;+\infty[$ par : $f_n(x)=\frac{x^n}{n!}e^{-x}$.

Soit a un élément non nul fixe dans I. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$I_n(a)=\int_0^a f_n(x)\,dx$$

1) Calculer $I_0(a)$.

2) Montrer que, pour tout x de I et pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$f_n'(x)=f_{n-1}(x)-f_n(x) \quad \text{et} \quad f_n(0)=0$$

et en déduire que, pour tout entier naturel :

$$I_n(a) - I_{n-1}(a) = -\frac{a^n}{n!}e^{-a}$$

3) En déduire que :

$$\forall n > 0, \qquad I_n(a) = 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}e^{-a}$$

4) Dans cette question, on pose $a = 1$.

On appelle (u_n) la suite numérique définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = 1 - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)e^{-1} = \int_0^1 f_n(x)\,dx$$

On note (C_n) la courbe représentative de f_n dans le repère orthonormal R (unité graphique : 4 cm).

a) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 0$ et donner une interprétation géométrique de u_n.

b) Montrer que pour tout entier naturel n, et pour tout $x \in [0\,;\,1]$:

$$f_n(x) \leqslant \frac{x^n}{n!}$$

c) En déduire l'encadrement pour tout entier naturel n :

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{(n+1)!}$$

d) Calculer la limite de u_n.

e) Déduire enfin que :

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)$$

EXERCICE 17

Le but du problème est l'étude d'une fonction f, d'une de ses primitives et d'une suite attachée à cette fonction. Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ avec $\|\vec{\imath}\| = 2$ cm ; $\|\vec{\jmath}\| = 5$ cm.

Première partie

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. On note (C) sa courbe représentative.

1) Montrer que f est paire. Étudier ses variations sur $[0\,;\,+\infty[$ et déterminer sa limite en $+\infty$. Tracer sa courbe (C).

2) Montrer que f établit une bijection de $[0\,;\,+\infty[$ sur $]0\,;\,1]$.

On note y un réel quelconque de l'intervalle $]0\,;\,1]$. Exprimer en fonction de y le seul réel positif x vérifiant $f(x) = y$.

CE $\Sigma\pi\int$

Deuxième partie

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$.

(On sait que, pour tout réel x, $x + \sqrt{1 + x^2} > 0$).

1) Calculer $F'(x)$. En déduire que F est la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

2) a) Déterminer la limite de F en $+\infty$.

b) Montrer que F est impaire.

c) En déduire la limite de F en $-\infty$.

3) Soit k un réel strictement positif. On note $A(k)$ l'aire en cm² de la partie du plan constituée des points $M(x ; y)$ tels que $k \leqslant x \leqslant 2k$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)$.

Exprimer $A(k)$ en fonction de k ; donner la valeur exacte de $A(k)$ et déterminer la limite de A (1) quand k tend vers $+\infty$.

Troisième partie

On pose $u_0 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ et, pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

1) Calculer u_0. Calculer u_3 à l'aide d'une intégration par parties.

Indication : Remarquer que $\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} = x^2 \times \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$).

2) Montrer que, pour tout x de l'intervalle $[0 ; 1]$, $0 \leqslant \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leqslant x^n$.

En intégrant cette double inégalité sur $[0 ; 1]$, montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

EXERCICE 18

Première partie

1) On considère la fonction numérique g définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$.

a) Dresser le tableau de variations de g.

b) Démontrer que $g(x) = 0$ admet une solution unique α tel que $1{,}89 < \alpha < 1{,}90$.

c) Déduire de ce qui précède le signe de $g(x)$.

2) On considère la fonction numérique f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$.

a) Dresser le tableau de variations de f.

b) Vérifier que $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$ puis en déduire un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 2×10^{-3}.

Deuxième partie

On considère la fonction numérique F définie sur $]0 ; +\infty[$ par $F(x) = \int_1^x f(t)dt$.

1) Montrer que F est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et préciser $F'(x)$. En déduire le sens de variation de F.

2) a) Vérifier que pour tout $t \geqslant 1$ on a :

$$\frac{\ln t}{(1+t)^2} \leqslant f(t) \leqslant \frac{\ln t}{t^2}$$

b) Pour $x > 0$ on pose $I(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t^2}\,dt$ et $J(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{(1+t)^2}\,dt$.

A l'aide d'une intégration par parties, calculer $I(x)$.

c) A l'aide d'une intégration par parties et de l'égalité $\frac{1}{t(1+t)^2} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}$ pour $t > 0$, calculer $J(x)$.

d) Déduire de ce qui précède que pour $x > 1$ on a :

$$\ln 2 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{\ln x}{x+1} \leqslant F(x) \leqslant 1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$$

e) On admet que : $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \lambda$. Sans calculer ℓ, vérifier que $\ln 2 \leqslant \ell \leqslant 1$.

3) Soit G la fonction numérique définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $G(x) = F\left(\frac{1}{x}\right) - F(x)$.

a) Calculer $G'(x)$ pour $x > 0$.

b) Vérifier que pour tout $x > 0$, $G(x) = 0$.

c) Déduire de ce qui précède la limite de F en 0.

EXERCICE 19

Les trois parties sont dans une large mesure indépendantes.

Pour tout entier naturel n, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction numérique f_n par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad f_0(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad ; \quad f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^2}$$

On note (Γ_n) la courbe représentative de f_n dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, unité graphique : 4 cm.

On désigne par I_n l'intégrale $I_n = \int_0^1 f_n(t)\,dt$.

Première partie

1) a) Etudier les limites de f_1 en $+\infty$ et en $-\infty$. Quelle est la conséquence graphique de ces résultats ?

b) Etudier les variations de f_1.

c) Tracer la courbe (Γ_1).

d) Calculer I_1.

CE $\sum\pi\int$

2) a) Etudier les limites de f_3 en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) Etudier les variations de f_3.

c) Tracer la courbe (Γ_3) sur le même dessin qu'au 1) c).

3) Calculer $I_1 + I_3$. En déduire la valeur de I_3.

4) Calculer, en unités d'aire, l'aire du domaine limité par les courbes (Γ_1), (Γ_3) et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

Deuxième partie

Pour cette partie, on dessinera la figure demandée dans un nouveau repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, unité graphique : 4 cm.

1) a) Etudier les limites de f_0 en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) Etudier les variations de f_0.

2) Soit (a_n) la suite définie, pour n entier naturel non nul, par :

$$a_n = \int_0^n \frac{dt}{1+t^2}$$

a) Interpréter graphiquement a_n.

b) Montrer que la suite (a_n) est croissante.

c) Montrer que pour tout réel t : $\frac{1}{1+t^2} \leqslant 1$ et en déduire que $a_1 \leqslant 1$.

d) Montrer que pour tout réel t non nul : $\frac{1}{1+t^2} \leqslant \frac{1}{t^2}$ et en déduire que pour tout entier naturel n non nul, $\int_0^n \frac{dt}{1+t^2} \leqslant 1 - \frac{1}{n}$.

e) Montrer, en utilisant les questions précédentes, que pour tout entier naturel n non nul, $a_n \leqslant 2$.

Que peut-on en déduire pour la convergence de la suite (a_n) ?

Troisième partie

Soit F la fonction telle que : $F(0) = 0$, F dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

1) On pose, pour tout x de $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$, $H(x) = F[\tan x]$.

a) Calculer $H(0)$.

b) Montrer que H est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $H'(x)$.

c) En déduire que, pour tout x de $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$, $H(x) = x$.

d) Montrer que $F(1) = \frac{\pi}{4}$.

2) On pose, pour tout x réel positif ou nul, $k(x) = F\left(\frac{1}{1+x}\right) + F\left(\frac{x}{2+x}\right)$

a) Montrer que la fonction k est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et déterminer $k'(x)$.

b) En déduire la valeur de $F\left(\frac{1}{2}\right) + F\left(\frac{1}{3}\right)$.

EXERCICE 10

Première partie

Etude préliminaire d'une fonction ϕ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = (2-x)e^x - 1$.

1) Déterminer les limites de la fonction ϕ en $-\infty$ et $+\infty$.

2) Montrer que la fonction ϕ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et étudier le signe de sa dérivée.

En déduire les variations de la fonction ϕ et préciser les valeurs de $\phi(-2)$, $\phi(0)$, $\phi(1)$ et $\phi(2)$.

3) Prouver que la fonction ϕ s'annule uniquement en deux valeurs que l'on nommera α et β. On prendra $\alpha < \beta$. Etudier alors le signe de la fonction ϕ sur l'ensemble des réels et récapituler cette étude dans un tableau.

4) A l'aide de la calculatrice, fournir un encadrement d'amplitude 10^{-2} des valeurs α et β.

5) Montrer que $e^{\alpha} = \frac{1}{2-\alpha}$.

Deuxième partie – Etude d'une fonction f définie par $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x-x}$ et calcul intégral.

1) Montrer que $e^x - x$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. En déduire que f est définie sur $\mathbb{R}$.

2) Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et $+\infty$.

3) Calculer la dérivée f' de la fonction f puis, à l'aide des résultats de la *première partie*, construire le tableau des variations de f.

4) Montrer que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1}$ le nombre α étant la plus petite des deux valeurs pour lesquelles la fonction ϕ de la *première partie* s'annule.

5) Déterminer une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Donner une valeur exacte puis une valeur décimale approchée à 0,01 près de l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{e^x - 1}{e^x - x}\,dx$$

Troisième partie – Etude de deux suites

1) Préciser l'ensemble de définition D_g de la fonction g définie sur cet ensemble par $g(x) = \ln\left(\frac{1}{2-x}\right)$ où ln désigne la fonction logarithme népérien.

Prouver que la fonction g est croissante sur son ensemble de définition et que l'image par g de l'intervalle $I = [-2\,;0]$ est incluse dans cet intervalle.

CE $\Sigma\pi\int$

2) a) Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$

Montrer que u_1 appartient à l'intervalle $I = [-2\,;0]$. Prouver par récurrence, à l'aide des variations de la fonction g, que la suite (u_n) a tous ses termes dans l'intervalle I et est croissante.

b) On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = g(v_n) \end{cases}$

Calculer le terme v_1 et montrer que $-2 \leqslant u_1 \leqslant v_1 \leqslant v_0 \leqslant 0$.

Etablir par récurrence, à l'aide de la croissance de la fonction g sur l'intervalle $[-2\,;0]$ que pour tout entier naturel n strictement positif, on a :

$$-2 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_{n-1} \leqslant 0$$

Préciser le sens de variation de la suite (v_n).

3) a) Soit m la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $m(x) = x - \ln(1+x)$.

Montrer que m est croissante et calculer $m(0)$. En déduire que, pour tout x positif, on a :

$$\ln(1+x) \leqslant x$$

b) Vérifier que, pour tout entier n, $v_{n+1} - u_{n+1} = \ln\left(1 + \frac{v_n - u_n}{2 - v_n}\right)$ puis en déduire que $v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{v_n - u_n}{2 - v_n}$.

Sachant que, pour tout entier n, les termes de la suite (v_n) appartiennent à l'intervalle $[-2\,;0]$, donner un encadrement de $\frac{1}{2-v_n}$ et établir que :

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{v_n - u_n}{2}$$

Prouver alors que, pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{v_0 - u_0}{2^n}$$

Que peut-on en déduire pour la suite de terme général $v_n - u_n$ et pour les suites (u_n) et (v_n) ?

4) Donner, à l'aide de la calculatrice, un encadrement d'amplitude 10^{-4} de u_{10} et v_{10}.

Equations différentielles

EXERCICE 1

Première partie

Dans chacun des cas suivants, vérifier que la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle K.

1) $f(x) = \frac{x^2}{2} - x + 1$, (E) : $2(y' + y) = x^2$ et $K = \mathbb{R}$.

2) $f(x) = (2x - 1)e^x$, (E) : $y' - y = 2e^x$ et $K = \mathbb{R}$.

3) $f(x) = (x + 1)^2$, (E) : $\frac{y'}{y} = \frac{2}{x+1}$ et $K =]-1\,;\,+\infty[$.

4) $f(x) = \sqrt{2x}$, (E) : $y'y = 1$ et $K =]0\,;\,+\infty[$.

5) $f(x) = x\cos x$, (E) : $y - xy' = x^2 \sin x$ et $K = \mathbb{R}$.

Deuxième partie

Déterminer les solutions de l'équation différentielle vérifiant les conditions données :

a) $y'\sqrt{x} = 1$ et $y(1) = 0$

b) $y' = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ et $y(2\pi) = -1$

c) $y' + 4y = 0$ et $y(0) = 8$

d) $y' = x^2 + 1$ et $y(0) = 1$

Troisième partie

Résoudre chacun des cas suivants et donner la solution particulière satisfaisant aux conditions initiales données.

a) $y' - 2y = 0$ avec $y(0) = 1$

b) $3y' + 7y = 0$ avec $y(2) = 5$

c) $y'' - 9y = 0$ avec $y(0) = -y'(0) = 1$

d) $y'' + y = 0$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$

e) $y'' - 2y' + y = 0$ avec $y(0) = y'(0) = 1$

f) $y'' - 4y' + 3y = 0$ avec $y(0) = 6$ et $y'(0) = 10$

g) $y'' + y' + y = 0$ avec $y(0) = y'(0) = 1$

h) $25y'' - 20y' + 4y = 0$ avec $y(0) = y'(0) = 1$

Quatrième partie

Chercher les intégrales particulières de ces équations sous la forme indiquée.

a) $y'' + 9y = \cos x$, $f(x) = A\cos x + B\sin x$

b) $y'' + 2y' + 3y = \cos x$, $f(x) = A\cos x + B\sin x$

c) $y'' - 2y' + 3y = e^{-x}\cos x$, $f(x) = e^{-x}(A\cos x + B\sin x)$

d) $y'' + y' - 2y = 8\sin 2x$, $f(x) = A\cos 2x + B\sin 2x$

e) $y'' + 2y' - 3y = xe^{-x}$, $f(x) = P(x)e^{-x}$ où $P(x)$ est un polynôme.

f) $y'' + +y' + y = xe^{-x}$, $f(x) = P(x)e^{-x}$ où $P(x)$ est un polynôme.

Cinquième partie

Résoudre les équations différentielles ci-dessous :

1) $2y'' + y' - y = 2e^x$

2) $y'' - 7y' + 6y = \sin x$

3) $y'' + y + \sin 2x = 0$ avec les conditions initiales $y(\pi) = y'(\pi) = 1$.

4) $5y'' - 6y' + 5y = \sin\left(\frac{4}{5}x\right)$ avec les conditions initiales $y(0) = y'(0) = 0$

5) $3y'' + 2y' = x^3 - x^2$

6) $y'' - 2y' = e^x$

Sixième partie

Les deux questions sont indépendantes.

1) Trouver l'équation différentielle de la famille de paraboles $y = C_1(x - C_2)^2$:

a) $y'' + yy' = 0$ b) $y'' + y'^2 = 0$; c) $yy'' + y'^2 = 0$ d) $2yy'' + y'^2 = 0$

2) Déterminer la courbe de la famille $y = c_1e^x + c_2e^{-2x}$ qui vérifie $y(0) = 1$ et $y'(0) = -2$

a) $y = e^x$ b) $y = e^{-2x}$ c) $y = e^{-x}$ d) $y = e^{2x}$

Septième partie

Déterminer les solutions de l'équation: différentielle dont la courbe (C) vérifie la (les)condition(s) donné (es) :

1) $y' - 3y = 0$: (C) admet au point d'abscisse 0 une tangente parallèle à la droite d'équation $y = x$.

2) $y'' - 2y = 0$: passe par le point de coordonnées (0 ; 0) et admet la droite d'équation $y = x$ comme tangente en ce point.

3) $y'' - 3y' + 2y = 0$: (C) passe par le point de coordonnées (ln2 ; 0) et admet en ce point une tangente de coefficient directeur -4.

e) $y'' - 2y' + 2y = 0$: (C) passe par le point de coordonnées $\left(\frac{\pi}{4} ; 0\right)$ et sa tangente au point d'abscisse 0 est parallèle à l'axe des abscisses.

EXERCICE 2

1) Soit l'équation différentielle $y'' + 2y' + 5y = 2\cos x$ (E')

a) Prouver cette équation différentielle admet pour solution particulière de la forme $x \longmapsto A\cos x + B\sin x$.

b) En déduire la solution générale de (E').

2) Même question avec l'équation différentielle $y'' + 9y = \cos 3x$ (E').

Une solution particulière étant de la former $x \longmapsto x(A\cos 3x + B\sin 3x)$.

a) $y' + y = xe^x$: une solution particulière de la forme $y(x) = ze^x$, z à déterminer

b) $y' + y = e^{-x}$: solution particulière de la forme $y(x) = ze^{-x}$

c) $y' - y = \cos x$: solution particulière de la forme $y(x) = z\cos x$

d) $y' - y = e^x \ln x$: solution particulière de la forme $y(x) = ze^x$

EXERCICE 3

Soit l'équation différentielle : $y'' - y' - 2y = 0$.

1) Résoudre cette équation différentielle.

2) Trouver la solution f de cette équation dont la courbe représentative dans un repère orthonormal passe par A (0 ; 2) et a en ce point une tangente de coefficient directeur 1.

EXERCICE 4

Les parties sont indépendantes.

Première partie

Soit l'équation différentielle $y' + 2y = x^2$ (E).

1) Déterminer une fonction polynôme g de degré deux solution de (E).

2) Démontrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si $f - g$ est solution de (E') : $y' + 2y = 0$.

3) Résoudre l'équation (E').

4) Donner la solution de (E).

Deuxième partie

1) Résoudre l'équation différentielle $y'' + y' - 2y = x^2 + 2x - 1$ (E')

2) Montrer que (E') admet pour solution particulière une fonction polynôme de degré 2. En déduire l'intégration générale de l'équation (E').

3) Déterminer s'il en existe une solution particulière satisfaisant aux conditions initiales suivantes $y(0) =$ 1 et $y'(0) = 2$.

Troisième partie

1) Déterminer la solution générale de l'équation différentielle (E) : $y'' + 2ay' + a^2y = 0$

2) Déterminer la solution g de (E) vérifiant g(0) et g'(0) = e.

Quatrième partie

1) Trouver la fonction f solution de l'équation différentielle $y'' + 25y = 0$ vérifiant : $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = -5 \end{cases}$

2) Soit g la fonction numérique définie sur $[0\,;\,2\pi]$ par : $g(x) = \cos 5x - \sin 5x$; (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal direct. Déterminer les points d'intersection de (C) et l'axe des abscisses.

EXERCICE 5

Soit l'équation différentielle (E) : $-\frac{1}{2}y'' + \frac{3}{2}y' - y = 0$.

Déterminer la solution g de (E) dont la courbe représentative (C) passe par le point A (0 ; —1) et dont la tangente en ce point est parallèle à l'axe des abscisses.

EXERCICE 6

Soit (E) l'équation $y' - 5y = \sin x$.

1) Déterminer deux nombres réels A et B tels que la fonction g définie par $g(x) = A\cos x + B\sin x$ soit solution de l'équation (E).

2) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On pose $h = f - g$.

a) Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si h est solution de $y' - 5y = 0$.

b) Résoudre l'équation $y' - 5y = \sin x$.

EXERCICE 7

1) Résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' + y = 0$.

2) Déterminer la solution particulière de (E) vérifiant $f(0) = 1$ et $f'(0) = \sqrt{3}$.

3) Résoudre : a) dans $\mathbb{R}$: $f(x) + \sqrt{2} = 0$

b) Dans $[0\,;\,2\pi[$: $f(x) + \sqrt{2} = 0$

EXERCICE 8

On considère l'équation différentielle suivante

où d est une fonction qui sera précisée plus loin.

1) Résoudre l'équation différentielle homogène (ou sans second membre) associée à (E.D).

2) Trouver une solution particulière de (E.D) lorsque $d(x) = e^{4x}$ et lorsque $d(x) = e^{2x}$ respectivement.

3) Donner la forme générale des solutions de (E.D) lorsque $d(x) = \frac{e^{-2x}+e^{2x}}{4}$.

EXERCICE 9

1) On considère la fonction f de l'équation différentielle $y' - 2y = 0$ qui vérifie $f(0) = 1$.

Déterminer $f(x)$ pour tout réel x.

2) Déterminer les réels a et b tels que la fonction g définie par $g(x) = (ax + b)f(x)$ soit solution de l'équation différentielle $y' - 2y = e^{2x}$ et vérifie $g(0) = 1$.

3) Déduisez-en sans l'intégration par parties la valeur des intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 (x+1)e^{2x}\,dx \quad ; \quad J = \int_0^1 (2x-1)e^{2x}\,dx$$

EXERCICE 10

Première partie

On considère un circuit électrique constitué d'un condensateur (de capacité C) se déchargeant dans une résistance R. On note $u_C(t)$ la tension aux bornes du condensateur (en Volts) à l'instant t (en secondes). À l'instant $t = 0$, on sait que $u_C(0) = 5V$. Exprimer $u_C(t)$ en fonction de t.

Deuxième partie

Une grandeur (non nulle) y évolue à une vitesse proportionnelle à elle-même. On sait que cette grandeur double tous les dix ans.

Combien de temps lui faut-il pour tripler ?

EXERCICE 11

1) Résoudre l'équation différentielle suivante : $2y' - 3y = 0$.

2) On considère les équations différentielles : $2y' + 3y = 6x^2 - 7x + 2 \qquad (1)$

a) Montrer qu'il existe une fonction P de degré 2 solution de (1).

b) Déterminer l'ensemble S' des solutions de (2).

c) Montrer que f est solution de (1) si et seulement si $f - P$ est solution de (2).

d) En déduire l'ensemble S des solutions de (1).

EXERCICE 12

Soit l'équation différentielle : $y'' - 5y' + 6y = e^{4x}$

CE $\Sigma\pi\int$

Soit ϕ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = ke^{4x}$, $k \in \mathbb{R}$.

1) Déterminer le pour que ϕ soit solution de (E).

2) Démontrer que toute autre solution f de (E) vérifie $(f-\varphi)'' - 5(f-\varphi)' + 6(f-\varphi) = 0$.

3) Résoudre l'équation différentielle $y'' - 5y' + 6y = 0$.

4) Déduire des questions précédentes la forme générale des solutions de (E).

EXERCICE 13

Soit (E) l'équation différentielle : $y'' + 4y = 3\sin x$.

On pose $y = u(x,\alpha) + \alpha\sin x$, α étant un réel constant.

1) Déterminer α pour que $u(x,\alpha)$ vérifie : $u'' + 4u = 0$ lorsque y est solution de (E).

2) Déterminer l'intégrale générale de $u'' + 4u = 0$.

3) En déduire celle de (E).

4) Démontrer qu'il existe une unique solution de (E) telle que $\begin{cases} y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ y'(\pi) = 0 \end{cases}$ puis déterminer cette solution.

EXERCICE 14

On considère l'équation différentielle suivante : $y'' - y' - 6y = -6x - 1$ (1)

1) Déterminer a et b réels tels que $g(x) = ax + b$ soit solution de (1).

2) Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - g$ est solution de $y'' - y' - 6y = 0$.

3) Résoudre $y'' - y' - 6y = 0$.

4) En déduire les solutions de (1).

5) Trouver la solution de (1) vérifiant $f(1) = 2$ et $f'(1) = 4$.

6) Soit $f(x) = e^{3x-3} + x$.

a) Etudier ses variations et tracer sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité 2 cm).

b) Préciser la tangente au point A d'abscisse 1 et tracer cette tangente.

EXERCICE 15

1) Déterminer les réels a et b pour que la fonction $f_0(x) = ax\cos 2x + bx\sin 2x$ soit solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E) : $y'' + 4y = \cos 2x + \sin 2x$.

2) Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On pose $f = g + f_0$.

CE $\sum\pi\int$

Soit ϕ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = ke^{4x}$, $k \in \mathbb{R}$.

1) Déterminer le pour que ϕ soit solution de (E).

2) Démontrer que toute autre solution f de (E) vérifie $(f-\varphi)'' - 5(f-\varphi)' + 6(f-\varphi) = 0$.

3) Résoudre l'équation différentielle $y'' - 5y' + 6y = 0$.

4) Déduire des questions précédentes la forme générale des solutions de (E).

EXERCICE 13

Soit (E) l'équation différentielle : $y'' + 4y = 3\sin x$.

On pose $y = u(x,\alpha) + \alpha\sin x$, α étant un réel constant.

1) Déterminer α pour que $u(x,\alpha)$ vérifie : $u'' + 4u = 0$ lorsque y est solution de (E).

2) Déterminer l'intégrale générale de $u'' + 4u = 0$.

3) En déduire celle de (E).

4) Démontrer qu'il existe une unique solution de (E) telle que $\begin{cases} y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ y'(\pi) = 0 \end{cases}$ puis déterminer ce solution.

EXERCICE 14

On considère l'équation différentielle suivante : $y'' - y' - 6y = -6x - 1$ (1)

1) Déterminer a et b réels tels que $g(x) = ax + b$ soit solution de (1).

2) Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - g$ est solution de $y'' - y' - 6y = 0$.

3) Résoudre $y'' - y' - 6y = 0$.

4) En déduire les solutions de (1).

5) Trouver la solution de (1) vérifiant $f(1) = 2$ et $f'(1) = 4$.

6) Soit $f(x) = e^{3x-3} + x$.

a) Etudier ses variations et tracer sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité 2 cm).

b) Préciser la tangente au point A d'abscisse 1 et tracer cette tangente.

EXERCICE 15

1) Déterminer les réels a et b pour que la fonction $f_0(x) = ax\cos 2x + bx\sin 2x$ soit solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E) : $y'' + 4y = \cos 2x + \sin 2x$.

2) Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On pose $f = g + f_0$.

CE $\Sigma\pi\int$

Soit ϕ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = ke^{4x}$, $k \in \mathbb{R}$.

1) Déterminer k pour que ϕ soit solution de (E).

2) Démontrer que toute autre solution f de (E) vérifie $(f-\varphi)'' - 5(f-\varphi)' + 6(f-\varphi) = 0$.

3) Résoudre l'équation différentielle $y'' - 5y' + 6y = 0$.

4) Déduire des questions précédentes la forme générale des solutions de (E).

EXERCICE 13

Soit (E) l'équation différentielle : $y'' + 4y = 3\sin x$.

On pose $y = u(x,\alpha) + \alpha\sin x$, α étant un réel constant.

1) Déterminer α pour que $u(x,\alpha)$ vérifie : $u'' + 4u = 0$ lorsque y est solution de (E).

2) Déterminer l'intégrale générale de $u'' + 4u = 0$.

3) En déduire celle de (E).

4) Démontrer qu'il existe une unique solution de (E) telle que $\begin{cases} y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ y'(\pi) = 0 \end{cases}$ puis déterminer cette solution.

EXERCICE 14

On considère l'équation différentielle suivante : $y'' - y' - 6y = -6x - 1$ (1)

1) Déterminer a et b réels tels que $g(x) = ax + b$ soit solution de (1).

2) Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - g$ est solution de $y'' - y' - 6y = 0$.

3) Résoudre $y'' - y' - 6y = 0$.

4) En déduire les solutions de (1).

5) Trouver la solution de (1) vérifiant $f(1) = 2$ et $f'(1) = 4$.

6) Soit $f(x) = e^{3x-3} + x$.

a) Etudier ses variations et tracer sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité 2 cm).

b) Préciser la tangente au point A d'abscisse 1 et tracer cette tangente.

EXERCICE 15

1) Déterminer les réels a et b pour que la fonction $f_0(x) = ax\cos 2x + bx\sin 2x$ soit solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E) : $y'' + 4y = \cos 2x + \sin 2x$.

2) Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On pose $f = g + f_0$.

Montrer que f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si g est solution sur $\mathbb{R}$ de (E') : $y'' + y = 0$.

En déduire toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

3) Déterminer la solution de (E) sur $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions initiales $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{8}$ et $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

EXERCICE 16

Soit (E) l'équation différentielle du second ordre : $y'' - 3y' + 2y = 0$.

1) Quelles sont les solutions de (E) ?

2) Quelle est la solution de (E) dont la courbe représentation (C) admet au point d'abscisse $x = 0$ a même tangente que la courbe (C') représentative de $y = e^{3x}$? On dit que (C) et (C') sont tangentes.

3) Représenter dans un repère les courbes (C) et (C') dont vous préciser les positions relatives.

4) λ étant un réel strictement positif, soit h_λ la fonction définie par : $h_\lambda(x) = -\lambda^2 e^x + 2\lambda e^{2x}$.

a) Montrer que h_λ est solution de (E).

b) Soit (C_λ) la courbe représentative de h_λ. Après avoir calculé en fonction de λ les coordonnées du point commun à (C_λ) et (C'), montrer que ces courbes sont tangentes en ce point.

c) Préciser les positions relatives de (C_λ) et (C').

EXERCICE 17

1) Déterminer l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$y'' + y = 0 \quad (1)$$

2) Etant donnée une fonction numérique de variable réelle, g deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^*$; on définit la fonction f de $\mathbb{R}^*$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \qquad f(x) = xg\left(\frac{1}{x}\right)$$

Exprimer $f'(x)$ à l'aide de $g'\left(\frac{1}{x}\right)$ et de x.

3) On considère l'équation différentielle : $y'' = \frac{1}{x^2}y \quad (2)$.

a) Démontrer que la fonction g deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^*$ est solution de (2) si et seulement si la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f(x) = xg\left(\frac{1}{x}\right)$ est solution de (1).

b) En déduire l'ensemble des solutions de (2) définies sur chacun des intervalles $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$.

c) Soit g une solution de l'équation (2) définie sur $]0\,;+\infty[$. Déduire de ce qui précède une primitive de la fonction : $x \mapsto \frac{1}{x^2}g(x)$.

Thierno Korka DIALLO – Directeur Technique de SENESAC
Ingénieur électromécanicien, diplômé de l'Ecole Polytechnique de Thiès

CE $\Sigma\pi\int$

EXERCICE 18

Première partie

On donne un entier naturel n strictement positif, et on considère l'équation différentielle :

$$(E_n) \qquad y' + y = \frac{x^n}{n!}e^{-x}$$

1) On fait l'hypothèse que deux fonctions g et h, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, vérifient, pour tout x réel, $g(x) = h(x)e^{-x}$

a) Montrer que g est solution de (E_n) si et seulement si, pour tout x réel :

$$h_n'(x) = \frac{x^n}{n!}$$

b) En d'déduire la fonction h associée à une solution g de (E_n), sachant que $h(0) = 0$.

Quelle est alors la fonction g ?

2) Soit φ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que φ est solution de (E_n) si et seulement si $\varphi - g$ est solution de l'équation :

$$(F) \qquad y' + y = 0$$

b) Résoudre (F).

c) Déterminer la solution générale φ de l'équation (E_n).

d) Déterminer la solution f de l''équation (E_n) vérifiant $f(0) = 0$.

Deuxième partie

Le but de cette partie est de montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e$$

1) On pose, pour tout x réel, $f_0(x) = e^{-x}$ et $f_1(x) = xe^{-x}$.

a) Vérifier que f_1 est solution de l'équation différentielle : $y' + y = f_0$.

b) Pour tout entier strictement positif n, on définit la fonction f_n comme la solution de l'équation différentielle $y' + y = f_{n-1}$ vérifiant $f_n(0) = 0$.

En utilisant la *première partie*, montrer par récurrence que, pour tout x réel et tout entier $n \geq 1$:

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!}e^{-x}$$

2) Pour tout entier naturel n, on pose : $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$.

CE $\sum \pi \int$

a) Montrer, pour tout entier naturel n et pour tout x élément de l'intervalle $[0 ; 1]$, l'encadrement :

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{x^n}{n!}$$

En déduire que $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{(n+1)!}$, puis déterminer la limite de la suite (I_n).

b) Montrer, pour tout entier naturel k non nul, l'égalité :

$$I_k - I_{k-1} = -\frac{e^{-1}}{k!}$$

c) Calculer I_0 et déduire de ce qui précède que :

$$I_n = 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{-1}}{k!}$$

d) En déduire finalement :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e$$

EXERCICE 19

Première partie

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x \cos x$. On appelle $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de f dans un repère orthogonal.

1) Montrer que pour tout réel x, $-e^x \leqslant f(x) \leqslant e^x$.

En déduire que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote au voisinage de $-\infty$. Quelle est cette asymptote ?

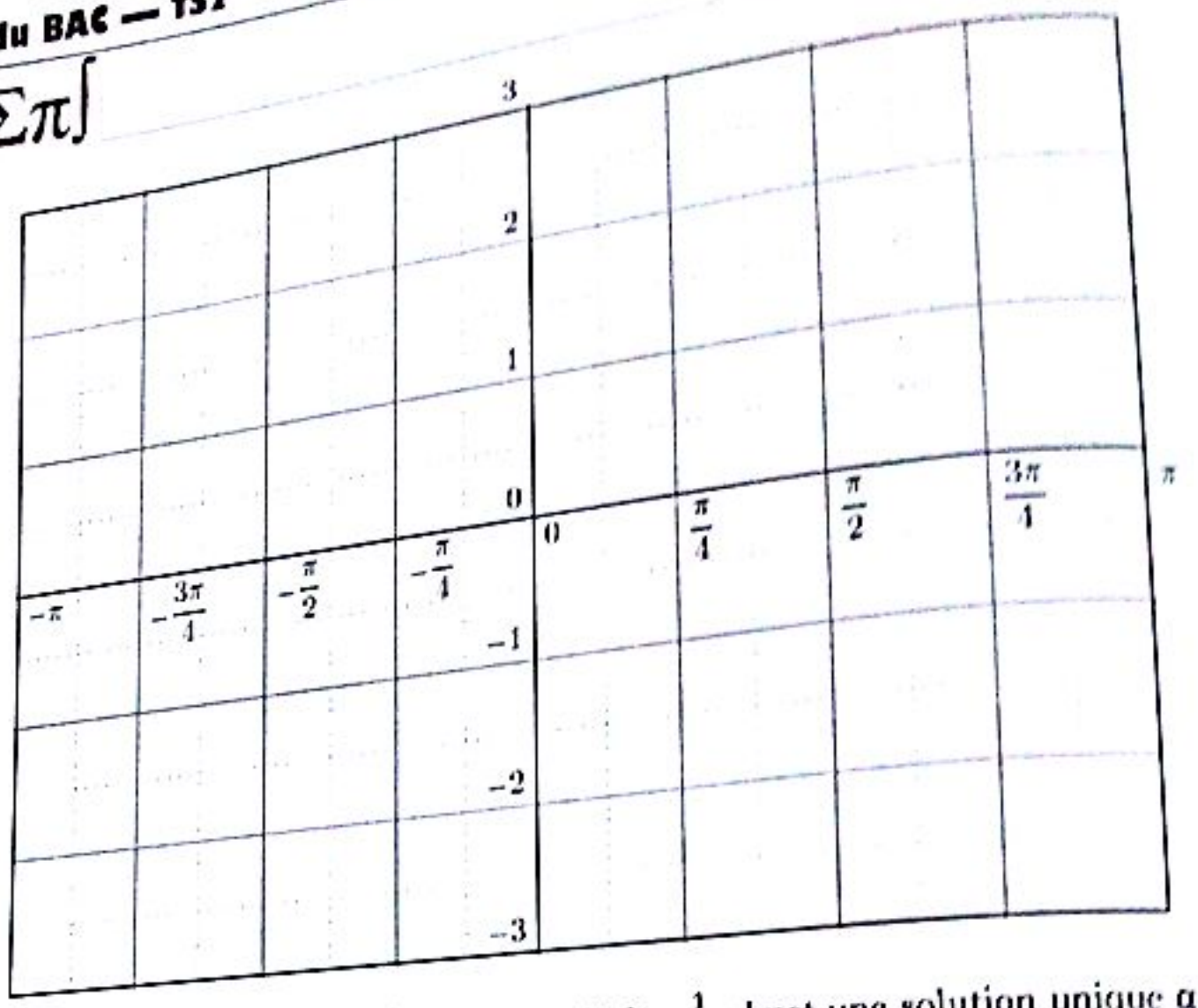
2) Déterminer les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.

3) On étudie f sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$.

Démontrer que pour tout réel $x \in \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$ on a : $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

4) Calculer $f'(x)$, où f' désigne la fonction dérivée de f. Montrer que f est croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{4}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2}\right]$. Dresser le tableau de variation de f sur $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$ indiquer les valeurs prises par f en $-\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}$.

5) Tracer (C_f) sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$ sur le graphique ci-dessous.



6) Démontrer que, sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet une solution unique α. Trouver, à l'aide de la calculatrice, la valeur approchée décimale de α arrondie au centième.

7) On note f'' la fonction dérivée seconde de f. Montrer que $f''(x) = -2e^x \sin x$.

a) En déduire que, sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse x atteint, pour $x = 0$, une valeur maximale que l'on précisera.

b) Trouver l'équation de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}_f$ en 0 et tracer $\mathscr{T}$ sur le graphique de la question 5.

Deuxième partie

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \int_0^{\pi} e^x \cos(nx)\,dx$.

1) Montrer que, pour tout entier naturel n, $\cos(n\pi) = (-1)^n$ et que $\sin(n\pi) = 0$.

2) A l'aide de deux intégrations par parties, montrer que :

$$I_n = \frac{(-1)^n e^{\pi} - 1}{1 + n^2}$$

3) Montrer que, pour tout entier naturel n, $|I_n| \leqslant \frac{e^{\pi}+1}{1+n^2}$ et en déduire $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

Troisième partie

On considère les équations différentielles (E) : $y' - 2y - 1 = 0$ et (E') : $y' - 2y = 1 - e^x \sin x$ où y est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

CE $\sum\pi\int$

Dire, en le justifiant, si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

1) (E) admet une fonction polynôme du premier degré comme solution.

2) Soit g une fonction positive définie sur $\mathbb{R}$; si g est solution de (E) alors elle est croissante sur $\mathbb{R}$.

3) La fonction $x \longmapsto 3e^{2x} + \frac{1}{2}$ est une solution de (E).

4) La primitive F de f qui s'annule en 0 est une solution de (E').

EXERCICE 20

Première partie : Résolution d'une équation différentielle

1) Déterminer les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ solutions de l'équation différentielle (E_1) :

$$y'' + 2y' + y = 0$$

2) On considère l'équation différentielle (E_2) : $y'' + 2y' + y = x + 3$.

a) Vérifier que la fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = x+1$ est solution de (E_2).

b) Démontrer qu'une fonction g est solution de (E_2) si, et seulement si, la fonction $g - p$ est solution de (E_1).

c) Déduire de 1) et 2) b) les solutions de (E_2)

d) Déterminer la solution générale de (E_2) qui vérifie : $\begin{cases} g(0) = 1 \\ g'(0) = 2 \end{cases}$

Deuxième partie : Etude d'une fonction f et courbe représentative

On appelle f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = 1 + x + xe^{-x}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormal (O, i, j) (unité graphique 2 cm).

1) a) Calculer, pour tout réel x, $f'(x)$ et $f''(x)$.

b) Etudier le sens de variation de la dérivée $f'(x)$.

c) Démontrer que, pour tout réel x, $f'(x) > 0$.

d) Calculer la limite de f en $+1$.

e) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

2) a) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à (C) et préciser la position relative de (D) et (C).

b) La courbe (C) admet en un point A une tangente parallèle à la droite (D).

Déterminer les coordonnées de A.

CE $\Sigma\pi\int$

3) Démontrer que l'équation de $f(x) = 2$ admet sur $[0\,;\,+\infty[$ une unique solution notée α, puis vérifier que $0 < \alpha < 1$.

4) a) Construire la droite (D), le point A défini au 2) b), la courbe (C) et la tangente en A à la courbe (C).

b) Donner par lecture graphique une valeur approchée de α.

Troisième partie : Recherche d'une approximation décimale de α

1) Démontrer que, sur $[0\,;\,+\infty[$, l'équation : $f(x) = 2$ équivaut à l'équation : $\dfrac{e^x}{e^x+1} = x$.

2) On appelle h la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par : $h(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1}$.

a) Calculer $h'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;1]$ et réaliser le tableau de variations de la fonction h.

b) En déduire que, pour tout réel x de $[0\,;1]$, $h(x)$ appartient à $[0\,;1]$.

c) Calculer $h''(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;1]$; étudier le sens de variations de h'.

d) En déduire que, pour tout réel x de $[0\,;1]$, $0 \leqslant h'(x) \leqslant \frac{1}{4}$.

3) On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = h(u_n) \end{cases}$

a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, un appartient à l'intervalle $[0\,;1]$.

b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$.

c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{4^n}$ puis que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

d) Déterminer un entier p tel que u_p soit une valeur approchée à 10^{-6} près de α et, à l'aide de la calculatrice, proposer une approximation décimale de u_p à 10^{-6} près. Que peut-on en déduire pour α?

Quatrième partie

« Solutions »

Après l'effort, le réconfort

" Réussir tous les concours et examens excepté ceux de ta foi est un grand échec, être spécialiste dans tous les domaines excepté celui de ta religion est une grande honte. "

Mame Cheikh DIAGNE

Professeur Galaye DIA

Le Professeur titulaire des universités de classe exceptionnelle, Galaye DIA (1941 – 2012) fut un mathématicien sénégalais. Il fut Président de la Commission Nationale de Mathématiques du Sénégal, (1986 – 1990) et Secrétaire Général de la Société Mathématiques du Sénégal (1989 – 1995) et est membre de l'Académie des Sciences et Techniques du Sénégal. Instructeur du CAMES.

Depuis 1986 il fut Président du Comité d'Orientation Scientifique, Université de l'Entreprise depuis 2010. Il est décrit comme un homme valeureux et généreux et fait partie des pionniers fondateurs de l'Université Gaston Berger de Saint-Louis.

NOTE : Chers amis, les « solutions » que je vous propose ne sont en rien des modèles, encore moins des exemples à suivre. Elles donnent simplement des indications aux questions posées, indications qui ne sont pas toujours les meilleures... Un élève peut très bien en donner d'autres et même de meilleures.

Thierno Korka DIALLO

CE $\Sigma\pi\int$

Probabilités

EXERCICE 1

Première partie

(1) L'événement $\overline{A}$ est « au moins un des deux élèves est un garçon ».

(2) L'événement $\overline{B}$ est « La personne est soit une femme, soit un suisse ».

(3) L'événement $\overline{C}$ est « Luc ne prend pas de viande ou ne prend pas de glace ».

(4) L'événement $\overline{D}$ est « aucun billet n'est gagnant ».

L'événement $\overline{E}$ est « les trois billets sont gagnants ».

Deuxième partie

(1) A et B sont incompatibles car une boule ne peut être simultanément blanche et non blanche.

(2) B et C ne sont pas incompatibles car le tirage d'une boule noire les réalise simultanément.

(3) L'événement $\overline{A}$ est « tirer une boule noire ou rouge ».

L'événement $\overline{B}$ est « tirer une boule blanche ou rouge ».

Troisième partie

1) A et B ne sont pas contraires car une somme égale à 5 les réalise simultanément.

2) $\overline{B}$ et C sont incompatibles car la somme ne peut être simultanément strictement supérieure à 5 (événement B) et strictement inférieure à 3 (événement C).

3) L'événement $\overline{C}$ est « La somme est supérieure ou égale à 3 ».

4) A et $\overline{C}$ ne sont pas incompatibles car ils sont simultanément réalisés par une somme supérieure ou égale à 5.

EXERCICE 2

1) On note Ω l'univers des possibles, ensemble des 32 cartes du jeu. Ainsi $\underline{\text{Card}(\Omega) = 32}$.

2) On a : $P(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$; $P(B) = \frac{\text{Card } B}{\text{Card } \Omega} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$; $P(C) = \frac{\text{Card } C}{\text{Card } \Omega} = \frac{3\times4}{32} = \frac{3}{8}$

$P(A \cap B) = 0$ car une carte ne peut être simultanément rouge et pique,

$P(B \cap C) = \frac{\text{Card}(B \cap C)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{6}{32} = \frac{3}{16}$; $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 0 = \frac{3}{4}$

De même, $P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} - \frac{3}{32} = \frac{17}{32}$

Ainsi $P(A) = \frac{1}{4}$; $P(B) = \frac{1}{2}$; $P(C) = \frac{3}{8}$; $P(A \cap B) = 0$; $P(B \cap C) = \frac{3}{16}$; $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$; $P(A \cup C) = \frac{17}{32}$

3) On cherche $P(\overline{A \cup C}) = 1 - P(A \cup C) = 1 - \frac{17}{32} = \frac{15}{32}$. Ainsi $P(\overline{A \cup C}) = \frac{15}{32}$

EXERCICE 3

Déterminons P(A) et P(B)

Nombre de cas possibles = $\text{card}\Omega = A_{12}^3 = 1320$

Nombre de cas favorables = $A_7^3 + A_5^3 = 210 + 60 = 270$

On en déduit : $P(A) = \frac{270}{1320} = \frac{9}{44}$

Nombre de cas favorables = $A_5^1 \times A_7^2 \times 3 + A_5^2 \times A_7^1 \times 3 + A_5^3 = 1110$

On en déduit : $P(B) = \frac{1110}{1320} = \frac{37}{41}$

EXERCICE 4

On a :

$$P(A) = \frac{A_7^1 \times A_5^1 + A_7^2}{A_{12}^2} = \frac{7}{12} \quad ; \quad P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{A_7^2}{A_{12}^2}}{\frac{A_7^1 \times A_5^1 + A_7^2}{A_{12}^2}} = \frac{A_7^2}{A_7^1 \times A_5^1 + A_7^2} = \frac{6}{11}$$

$$B = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A}) \implies P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A}) = P(B|A) \times P(A) + P(B|\overline{A}) \times P(\overline{A})$$

Ainsi : $P(B) = \frac{6}{11} \times \frac{7}{12} + \frac{7}{11} \times \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$. Donc $P(A) = \frac{7}{12}$; $P(B) = \frac{7}{12}$

EXERCICE 5

On associe à l'expérience aléatoire l'univers des possibles $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^3$, muni de l'équiprobabilité. Ainsi, la probabilité d'un événement A vaut $\frac{\text{Card A}}{6^3}$.

On s'intéresse d'abord à l'événement $A = \{(a, b, c) \in \Omega ; b^2 - 4ac > 0\}$. Il suffit de dénombrer A. On commence par établir un petit tableau avec les valeurs de $4ac$:

$c \backslash a$	1	2	3	4	5	6
1	4	8	12	16	20	24
2	8	16	24	32	40	48
3	12	24	36	48	60	72
4	16	32	48	64	80	96
5	20	40	60	80	100	120
6	24	48	72	96	120	144

On calcule le cardinal de A en regardant dans le tableau le nombre de valeurs de a et c pour lesquelles $b^2 > 4ac$, pour les 6 valeurs que peut prendre b. On trouve :

$$\text{card}(A) = 0 + 0 + 3 + 5 + 14 + 16 = 38$$

On en déduit :

$$P(A) = \frac{38}{216} = \frac{19}{108}$$

On note de même $B = \{(a,b,c) \in \Omega;\ b^2 - 4ac = 0\}$ et $C = \{(a,b,c) \in \Omega;\ b^2 - 4ac < 0\}$. Le même dénombrement prouve que :

$$P(B) = \frac{5}{216}$$

On peut calculer P(C) de la même façon, ou remarquer que les 3 événements A, B, C forment un système complet d'événements. On déduit alors :

$$P(C) = 1 - P(A) - P(B) = \frac{173}{216}$$

Conclusion : $P(A) = \frac{19}{108}$; $P(B) = \frac{5}{216}$; $P(C) = \frac{173}{216}$

EXERCICE 6

Le tableau suivant permet de dénombrer les différentes catégories :

	Cravate (évènement C)	Pas de cravate évènement $\bar{C}$	Total
Yeux bleus (évènement B)	50	35	85
(évènement $\bar{B}$)	70	95	165
Total	120	130	250

On note Ω l'univers des possibles, ensemble des 250 personnes. Ainsi $\text{Card}(\Omega) = 250$.

Il y a équiprobabilité des choix de personnes. Ainsi :

1) On a : $P(C) = \frac{\text{Card}(C)}{\text{Card}\Omega} = \frac{120}{250} = \frac{12}{25}$. Donc $P(C) = \frac{12}{25}$

2) On a : $P(B \cap C) = \frac{Card(B \cap C)}{Card\Omega} = \frac{50}{250} = \frac{1}{5}$. Donc $\underline{P(B \cap C) = \frac{1}{5}}$

3) On a : $P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = \frac{85}{250} + \frac{120}{250} - \frac{50}{250} = \frac{31}{50}$. Donc $\underline{P(B \cup C) = \frac{31}{50}}$

4) On a : $P(\overline{B} \cap \overline{C}) = P(\overline{B \cup C}) = 1 - P(B \cup C) = 1 - \frac{31}{50} = \frac{19}{50}$. Donc $\underline{P(\overline{B} \cap \overline{C}) = \frac{19}{50}}$

EXERCICE 7

<u>Loi de probabilité de X</u>

Succès : toucher la cible : $p = 0,7$

Echec : ne pas toucher la cible $\Rightarrow q = 1 - p = 0,3$

Il tire 3 fois $\Rightarrow n = 3$. Ainsi, $X = \{0, 1, 2, 3\}$

(i) $P(X = 0) = C_3^0 \times 0,7^0 \times 0,3^3 = 0,027$ (ii) $P(X = 1) = C_3^1 \times 0,7^1 \times 0,3^2 = 0,189$

(iii) $P(X = 2) = C_3^2 \times 0,7^2 \times 0,3^1 = 0,441$ (iv) $P(X = 3) = C_3^3 \times 0,7^3 \times 0,3^0 = 0,343$

On regroupe ainsi les valeurs des $P(x_i = k)$ dans le tableau ci-dessous.

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,027	0,189	0,441	0,343

EXERCICE 8

1) On a : $\underline{X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}}$

2) On a :

(i) $P(X = 0) = \frac{C_8^4}{C_{18}^4} = \frac{7}{306}$ (ii) $P(X = 1) = \frac{C_{10}^1 \times C_8^3}{C_{18}^4} = \frac{28}{153}$

(iii) $P(X = 2) = \frac{C_{10}^2 \times C_8^2}{C_{18}^4} = \frac{7}{17}$ (iv) $P(X = 3) = \frac{C_{10}^3 \times C_8^1}{C_{18}^4} = \frac{16}{51}$ (v) $P(X = 4) = \frac{C_{10}^4}{C_{18}^4} = \frac{7}{102}$

<u>En conclusion</u> :

x_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{7}{306}$	$\frac{28}{153}$	$\frac{7}{17}$	$\frac{16}{51}$	$\frac{7}{102}$

EXERCICE 9

1) *<u>Loi de probabilité de X</u>*

On répète 10 fois successivement, et de manière indépendante, la même épreuve consistant à répondre à une question en choisissant au hasard et de manière équiprobable une réponse parmi les quatre proposées.

Chaque épreuve a donc une probabilité de réussite égale à $p = 0,25$ et une probabilité échec égale à $q = 1 - p = -0,25 = 0,75$. Le nombre de succès X parmi les 10 répétitions suit donc une loi binomiale de paramètres 10 et 0,25.

Thierno Korka DIALLO – Directeur Technique de SENESAC
Ingénieur électromécanicien, diplômé de l'Ecole Polytechnique de Thiès

CE $\Sigma\pi\int$

2) *Calculons la probabilité pour qu'il fournisse au moins 8 bonnes réponses, et soit ainsi sélectionné*

On a ainsi : $\begin{cases} P(X=8) = C_{10}^{8} \times 0{,}25^{8} \times 0{,}75^{2} \\ P(X=9) = C_{10}^{9} \times 0{,}25^{9} \times 0{,}75^{1} \\ P(X=10) = C_{10}^{10} \times 0{,}25^{10} \times 0{,}75^{0} \end{cases}$

L'événement considéré a donc pour probabilité la somme de ces trois derniers nombres.

EXERCICE 10

1) Reconnaitre des probabilités conditionnelles dans les expressions « si Pierre combat M_1, la probabilité qu'il gagne la partie est $\frac{1}{3}$.», ce qui se dit « la probabilité que Pierre gagne sachant qu'il combat M_1 est $\frac{1}{3}$ »

Appliquons alors la relation $p(A|\,B) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)}$

A et B forment une partition de l'univers des possibles.

D'après la formule des probabilités totales : si l'on pose G l'événement : « Pierre gagne la partie » :

$$p(G) = p(G|\,A) \times p(A) + p(G|\,B) \times p(B)$$

Or $p(G|\,A)$ est la probabilité que Pierre gagne, sachant qu'il combat M_1.

D'après l'énonce : $\underline{p(G|\,A) = \frac{1}{3}}$ et de même $\underline{p(G|\,B) = \frac{1}{4}}$

D'après le texte, la machine choisit au hasard M_1 ou M_2 c'est à dire :

$$p(A) = p(B) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad p(G) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{24}$$

Ainsi $\underline{p(A) = p(B) = \frac{1}{2}\ ;\ p(G) = \frac{7}{24}}$

2) La probabilité que Pierre ait combattu M_1, sachant qu'il a gagné, est $p(A/G)$.

$$p(A|\,G) = \frac{p(A\cap G)}{p(G)} = \frac{p(G|\,A) \times p(A)}{p(G)} = \frac{4}{7}$$

Ainsi $\underline{p(A|\,G) = \frac{4}{7}}$

EXERCICE 11

1) Un tirage est une 4-liste de cartes, la 1ère étant un pique choisit parmi les huit, la 2ème un cœur parmi les huit, la 3ème un carreau choisit parmi les huit et la 4ème un trèfle choisi parmi les huit.

On regroupe ces tirages dans Ω, univers des résultats possibles : Card $\Omega = 8^4$.

A est l'événement de Ω ne comportant qu'une éventualité : la 4-liste cochée par le joueur, Card A = 1.

Les tirages se faisant au hasard, les événements de Ω sont équiprobables d'où :

$$\text{Card}(X=0) = C_2^2 = 1 \Rightarrow \underline{P(X=0) = \frac{1}{15}}$$

(X = 1) est l'événement obtenir une boule verte parmi les 2 boules tirées.

$$\text{Card}(X=1) = C_4^1 \times C_2^1 = 8 \Rightarrow \underline{P(X=1) = \frac{8}{15}}$$

(X = 2) est l'événement, les 2 boules tirées sont vertes.

$$\text{Card}(X=2) = C_4^2 = 6 \Rightarrow \underline{P(X=2) = \frac{6}{15}}$$

On obtient :

k	0	1	2
$P(X=k)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{6}{15}$

Calculons l'espérance mathématique de X. On a

$$E(X) = \sum_{i=0}^{n} x_i p_i = 0 \times P(X=0) + 1 \times P(X=1) + 2 \times P(X=2) = \frac{4}{3}$$

Donc $\underline{E(X) = \frac{4}{3}}$

2) a) *Calculons* P(D/A), P(D/B) et P(D/C)

Si A est réalisé alors il ne reste plus dans l'urne que des boules vertes, donc il sera impossible de réaliser D donc : $\underline{P(D|A) = 0}$

Si B est réalisé alors il reste dans l'urne 1 boule jaune et 3 boules vertes donc $\text{Card}\Omega = C_4^2 = 6$.

Donc : $\underline{P(D|B) = \frac{1}{2}}$

Si B est réalisé alors il reste dans l'urne 2 boules jaunes et 2 boules vertes donc : $\underline{P(D|C) = \frac{2}{3}}$

b) On en déduit la probabilité des événements $D \cap A$, $D \cap B$, et $D \cap C$. On a :

$$P(D|A) = \frac{P(D \cap A)}{P(A)} = 0 \Rightarrow \underline{P(D \cap A) = 0}$$

$$P(D|B) = \frac{P(D \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{P(D \cap B) = \frac{4}{15}}$$

$$P(D|C) = \frac{P(D \cap B)}{P(B)} = \frac{2}{3} \Rightarrow \underline{P(D \cap C) = \frac{4}{15}}$$

c) Calculons P(D)

On a $D = D \cap (A \cup B \cup C) = (D \cap A) \cup (D \cap B) \cup (D \cap C)$

Or $D \cap A$, $D \cap B$ et $D \cap C$ sont 2 à 2 disjoints donc :

$$P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B) + P(D \cap C) = \frac{4}{15} + \frac{4}{15} = \frac{8}{15}$$

Donc $\underline{P(D) = \frac{8}{15}}$

EXERCICE 13

Il y a C_{10}^2 façons possibles de tirer deux jetons du sac simultanément, soit 45 façons.

Donc $p(X = n) = \frac{10-n}{45}$. On a :

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$p(X = x_i)$	$\frac{9}{45}$	$\frac{8}{45}$	$\frac{7}{45}$	$\frac{6}{45}$	$\frac{5}{45}$	$\frac{4}{45}$	$\frac{3}{45}$	$\frac{2}{45}$	$\frac{1}{45}$

On en déduit directement l'espérance mathématique : $\underline{E(X) = 3,66}$

EXERCICE 14

1) Le résultat d'un essai est une combinaison de 3 boules choisies parmi les 10 de l'urne. On regroupe ces résultats dans l'univers Ω :

$$\text{card}\Omega = C_{10}^3 = 120$$

Posons A l'événement « obtenir un point au cours d'un essai »

Posons A l'événement « obtenir un point au cours d'un essai » alors $A = A_2 \cup A_3$ ou A_2 est l'événement « tirer exactement deux boules rouges au cours d'un essai » et A_3 est l'événement « tirer exactement trois boules rouges au cours d'un essai » card $A_2 = C_4^2 \times C_6^1 = 36$. Les boules étant indiscernables au toucher, les tirages sont équiprobables, d'où $p(A_2) = \frac{cardA_2}{card\Omega} = \frac{3}{10}$

De même, card $A_3 = C_4^3 = 4$ d'où $p(A_3) = \frac{cardA_3}{card\Omega} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$.

$p = p(A) = p(A_2) + p(A_3)$ Car A_2 et A_3 sont incompatibles, d'où $\underline{p = \frac{1}{3}}$

2) Déterminons les valeurs prises par la variable aléatoire puis, pour une de ces valeurs x, l'événement $(X = x)$ de Ω. Déterminer la loi de probabilité de X revient à calculer les probabilités de ces événements suivant la méthode rappelée dans (1)

CE $\Sigma\pi\int$

a) X peut prendre les valeurs 0, 1, 2, 3.

On reconnait

$$A_3 = (X = 3) \Rightarrow p(X = 3) = p(A_3) = \frac{1}{30}$$

$$A_2 = (X = 2) \Rightarrow p(X = 2) = p(A_2) = \frac{3}{10}$$

De même que dans (1), $\begin{cases} p(X=1) = \dfrac{C_4^1 \times C_6^2}{120} = \dfrac{60}{120} = \dfrac{1}{2} \\ p(X=0) = \dfrac{C_4^0 \times C_6^3}{120} = \dfrac{20}{120} = \dfrac{1}{6} \end{cases}$

On peut ainsi résumer la loi de probabilité de X dans le tableau suivant :

x	0	1	2	3
$p(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

b) Une fois la loi de X déterminée, appliquer la définition du cours.

Espérance : $E(X) = 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{1}{30} = \frac{6}{5}$

Variance : $V(X) = (0 - 1{,}2)^2 \times \frac{1}{6} + (1 - 1{,}2)^2 \times \frac{1}{2} + (2 - 1{,}2)^2 \times \frac{3}{10} + (3 - 1{,}2)^2 \times \frac{1}{30} = 0{,}56$

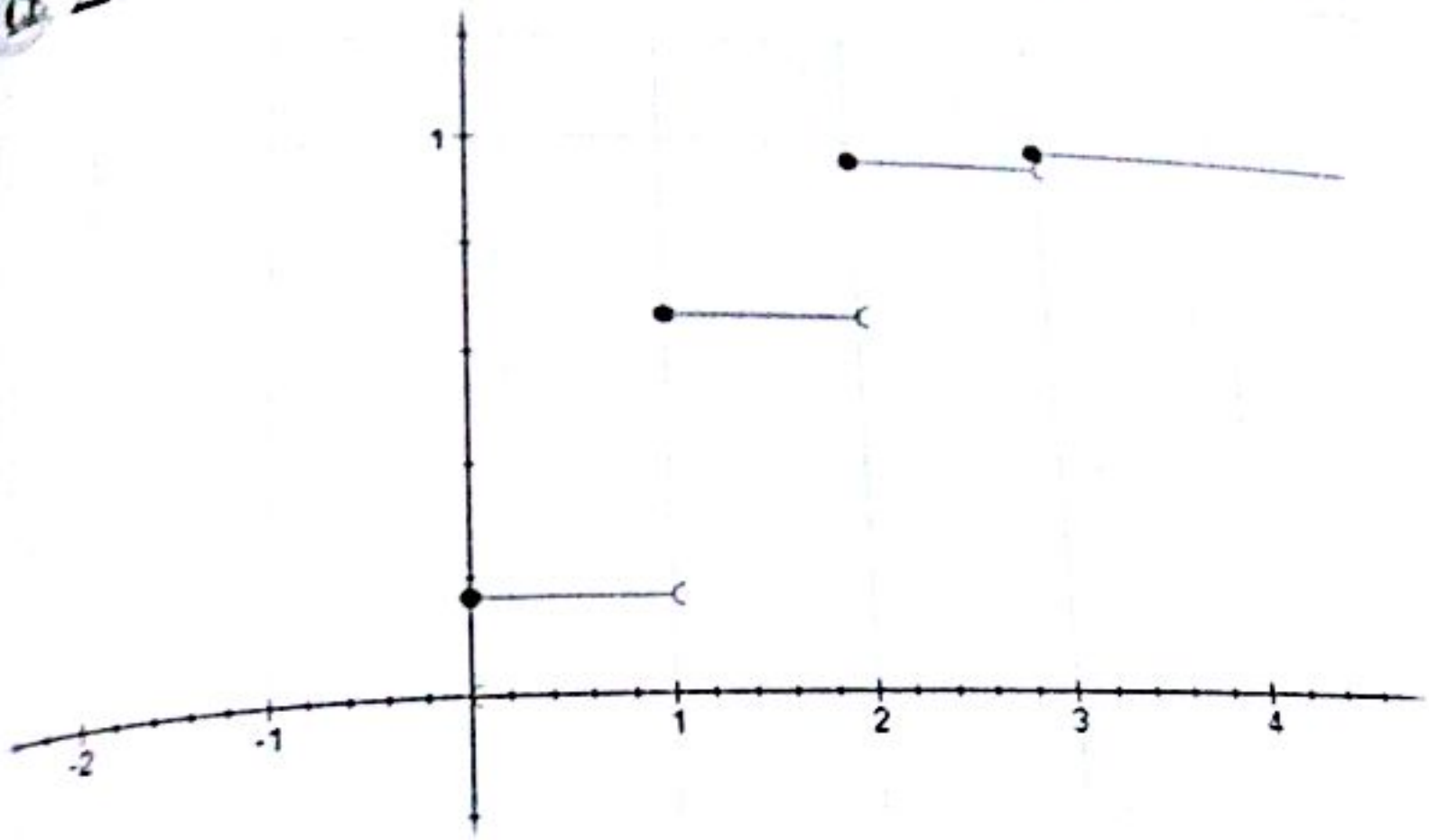
On déduit : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 0{,}75$

Conclusion : $E(X) = \frac{6}{5}$; $V(X) = 0,56$; $\sigma(X) = 0,75$

c) grâce au tableau (2) (a), on peut dresser le tableau suivant :

x	0	1	2	3
$p(X \leqslant x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$	$\frac{2}{3} + \frac{3}{10} = \frac{29}{30}$	$\frac{29}{30} + \frac{1}{30} = 1$

On trace ainsi grâce au tableau ci-dessus la représentation graphique de F :



EXERCICE 15

1°a) Loi de probabilité

Pour le dé A, on a : $p_A(1) = p_A(2) = p_A(3) = p_A(4) = p_A(5) = p_A(6) = \frac{1}{6}$

Pour le dé B, $p_B(1) = p_B(2) = p_B(3) = 0{,}1$; $p_B(4) = p_B(5) = 0{,}2$; $p_B(6) = 0{,}3$

D'où,

$$p(X = 1) = p_A(1) \times p_B(1) = \frac{1}{60}$$

$$p(X = 2) = p_A(1) \times p_B(2) + 2p_A(2) \times p_B(2) = \frac{3}{60}$$

$$p(X = 3) = p_A(1) \times p_B(3) + p_A(3) \times p_B(1) + p_A(2) \times p_B(3) + p_A(3) \times p_B(2) + p_A(3) \times p_B(3) = \frac{5}{60}$$

$$p(X = 4) = p_A(1) \times p_B(4) + p_A(4) \times p_B(1) + p_A(2) \times p_B(4) + p_A(4) \times p_B(2) + p_A(3) \times p_B(4) + p_A(4) \times p_B(3) + p_A(4) \times p_B(4) = \frac{11}{60}$$

D'une manière analogue, on trouve successivement : $p(X = 5) = \frac{15}{60}$; $p(X = 6) = \frac{25}{60}$

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{60}$	$\frac{3}{60}$	$\frac{5}{60}$	$\frac{11}{60}$	$\frac{15}{60}$	$\frac{25}{60}$

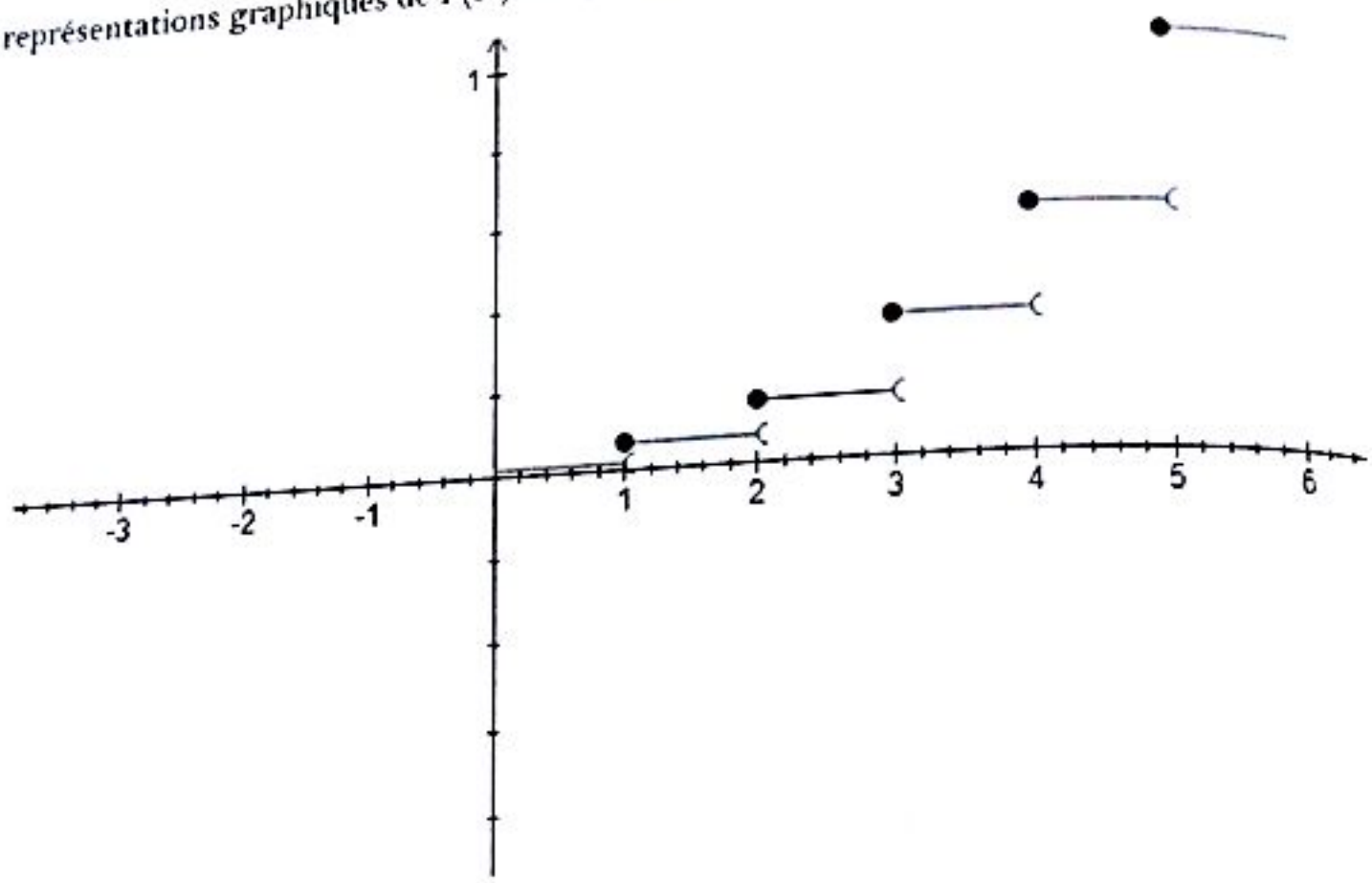
Fonction de répartition F(X) définie par : $F(X) = P(X \leqslant x)$

CE $\Sigma\pi\int$

$$\begin{cases} F(1) = P(X \leq 1) = \frac{1}{60} \\ F(2) = P(X \leq 2) = \frac{1}{60} + \frac{3}{60} = \frac{4}{60} \\ F(3) = P(X \leq 3) = \frac{4}{60} + \frac{5}{60} = \frac{9}{60} \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(4) = P(X \leq 4) = \frac{9}{60} + \frac{11}{60} = \frac{20}{60} \\ F(5) = P(X \leq 5) = \frac{20}{60} + \frac{15}{60} = \frac{35}{60} \\ F(6) = P(X \leq 6) = \frac{35}{60} + \frac{25}{60} = 1 \end{cases}$$

D'où les représentations graphiques de P(X) et F(X) sur la figure ci – dessous.



2) On a : $E(X) = \frac{1+2\times3+3\times5+4\times11+5\times15+6\times25}{60} = \frac{97}{20} = 4,85$

Et : $V(X) = \frac{1+4\times3+9\times5+16\times11+25\times15+36\times25}{60} - \left(\frac{97}{60}\right)^2 = 22,5$

Donc $\underline{E(X) = 4,85 \ ; \ V(X) = 22,5}$

EXERCICE 16

1) Total des pièces = 10 donc : $\underline{p(A) = \frac{C_4^3}{C_{10}^3}}$. Donc $\underline{p(A) = \frac{1}{30}}$

2) a) Valeurs prises par l'univers Ω : $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$

On a :

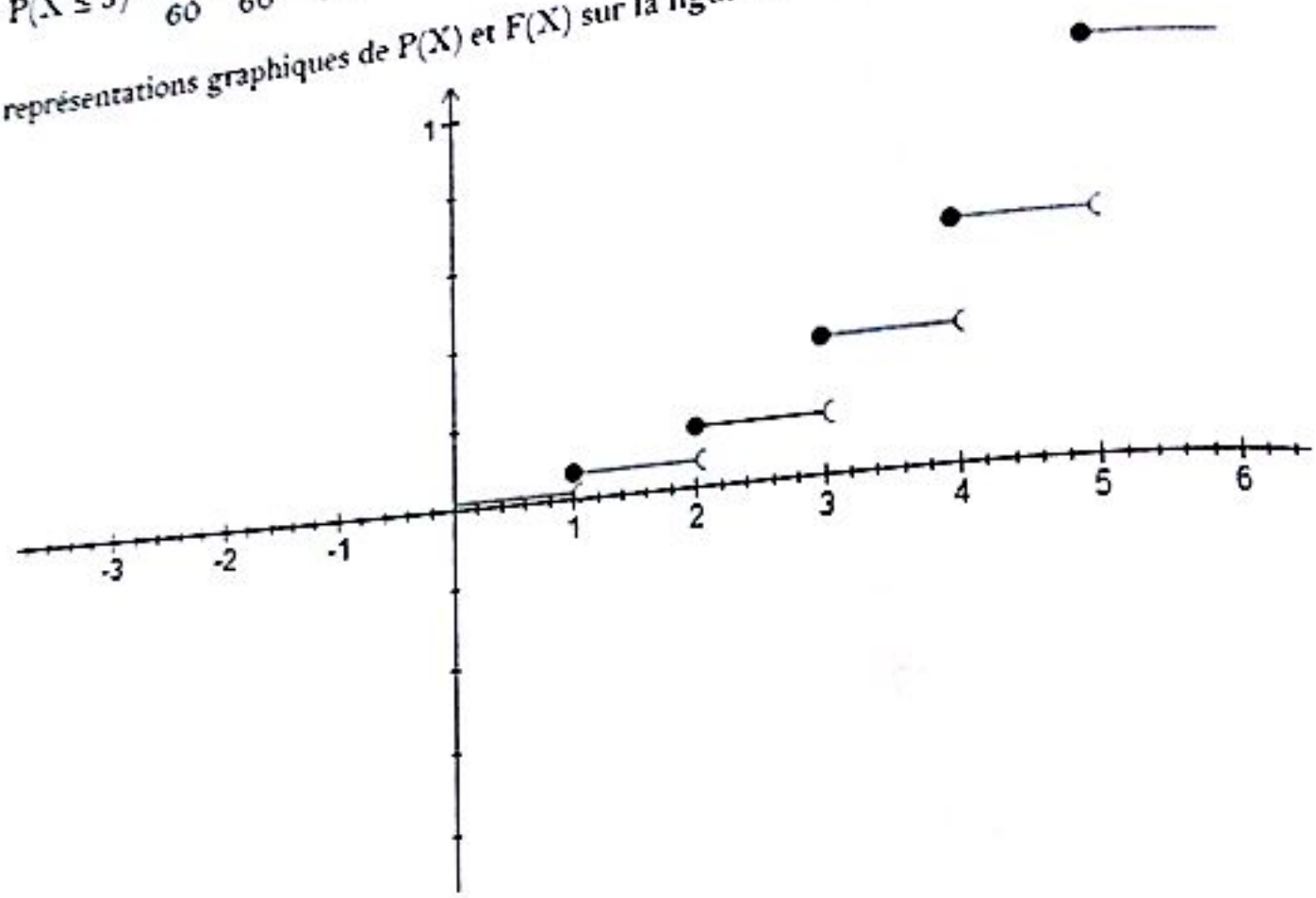
$p(X = 0) = \frac{C_4^0 \times C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{20}{120}$ et $p(X = 1) = \frac{C_4^1 \times C_6^2}{C_{10}^3} = \frac{60}{120}$ et $p(X = 2) = \frac{C_4^2 \times C_6^1}{C_{10}^3} = \frac{36}{120}$ et $p(X = 3) = \frac{C_4^3 \times C_6^0}{C_{10}^3} = \frac{4}{120}$

CE $\sum \pi \int$

$$\begin{cases} F(1) = P(X \leq 1) = \frac{1}{60} \\ F(2) = P(X \leq 2) = \frac{1}{60} + \frac{3}{60} = \frac{4}{60} \\ F(3) = P(X \leq 3) = \frac{4}{60} + \frac{5}{60} = \frac{9}{60} \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(4) = P(X \leq 4) = \frac{9}{60} + \frac{11}{60} = \frac{20}{60} \\ F(5) = P(X \leq 5) = \frac{20}{60} + \frac{15}{60} = \frac{35}{60} \\ F(6) = P(X \leq 6) = \frac{35}{60} + \frac{25}{60} = 1 \end{cases}$$

D'où les représentations graphiques de P(X) et F(X) sur la figure ci – dessous.



2) On a : $E(X) = \frac{1+2\times3+3\times5+4\times11+5\times15+6\times25}{60} = \frac{97}{20} = 4,85$

Et : $V(X) = \frac{1+4\times3+9\times5+16\times11+25\times15+36\times25}{60} - \left(\frac{97}{60}\right)^2 = 22,5$

Donc $\underline{E(X) = 4,85 \ ; \ V(X) = 22,5}$

EXERCICE 16

1) Total des pièces = 10 donc : $\underline{p(A) = \frac{C_4^3}{C_{10}^3}}$. Donc $\underline{p(A) = \frac{1}{30}}$

2) a) Valeurs prises par l'univers Ω : $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$

On a :

$p(X = 0) = \frac{C_4^0 \times C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{20}{120}$ et $p(X = 1) = \frac{C_4^1 \times C_6^2}{C_{10}^3} = \frac{60}{120}$ et $p(X = 2) = \frac{C_4^2 \times C_6^1}{C_{10}^3} = \frac{36}{120}$ et $p(X = 3) = \frac{C_4^3 \times C_6^0}{C_{10}^3} = \frac{4}{120}$

x_i	0	1	2	3
P_i	$\frac{20}{120}$	$\frac{60}{120}$	$\frac{36}{120}$	$\frac{4}{120}$

b) Formule de l'espérance mathématique : $E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i p_i$

$$E(X) = 0 \times \frac{20}{120} + 1 \times \frac{60}{120} + 2 \times \frac{36}{120} + 3 \times \frac{4}{120} = \frac{6}{5} \implies \underline{E(X) = \frac{6}{5}}$$

On a : $\sigma(X) = \sqrt{\sum_{i=1}^{4} x_i^2 p_i - E^2(X)} \approx 0{,}75$. Donc $\underline{\sigma(X) \approx 0{,}75}$

5) On a ici une variable aléatoire de Bernoulli de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{1}{30}$.

Soit Y cette variable aléatoire : $p(Y = 3) = C_5^3 \left(\frac{1}{30}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{30}\right)^2$. On trouve : $\underline{p(Y = 3) \approx 3{,}46 \cdot 10^{-4}}$

EXERCICE 18

1) L'énoncé nous dit que : $\underline{P_1 = 0{,}5}$

2) On distingue deux cas :

— Le premier tirage se fait dans U_1 et on obtient une blanche.

— Le deuxième tirage se fait dans U_2 et on obtient une noire.

3) Soit A_1 : « le premier tirage s'est fait dans U_1 »

Soit B « la boule obtenue est blanche ».

Donc $P_2 = P[(A_1 \cap B) \cup (\overline{A_1} \cap \overline{B})]$

D'où $P_2 = P(B/A_1) \times P(A_1) + P(\overline{B}/\overline{A_1}) \times P(\overline{A_1})$ donc $\underline{P_2 = \frac{2}{5}}$

4) Soit A_n : « le $n^{\text{ième}}$ tirage s'est fait dans U_1 »

Soit B « la boule obtenue est blanche ». Pour tout $n \geqslant 2$

On a : $A_n = [(A_{n-1} \cap B) \cup (\overline{A_{n-1}} \cap \overline{B})]$

Alors : $P(A_n) = P_n = P(B/A_{n-1}) \times P(A_{n-1}) + P(\overline{B}/\overline{A_{n-1}}) \times P(\overline{A_{n-1}})$

Donc $\underline{P(A_n) = P_n = \frac{2}{5} P_{n-1} + \frac{1}{5}}$

5) Posons $U_n = qU_{n-1}$ avec q réel et $n \in [2\,;+\infty[$:

$$\forall n \geqslant 2, \quad P_n - a = q(P_{n-1} - a) \iff \frac{2}{5} P_{n-1} + \frac{1}{5} = qP_{n-1} + a$$

Par identification : $\underline{\left(q = \frac{2}{5}\,;\, a = \frac{1}{3}\right)}$

6) Ainsi U_n est telle que $U_n = P_n - \frac{1}{3}$ est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$ et de premier terme $U_1 = \frac{1}{15}$

On tire alors : $P_n = \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} \times \frac{1}{15} + \frac{1}{3}$ et donc $\lim_{n \to +\infty} P_n = \frac{1}{3}$

Donc il est probable que la majorité des tirages se fasse dans U_n.

EXERCICE 19

1) a) On trouve : $p(R_1) = \frac{2}{5}$ et $p(N_1) = \frac{3}{5}$

b) Si R_1 s'est réalisée, alors l'urne B contient 3 rouges et 2 noires, et donc $p(R_2 \mid R_1) = \frac{3}{5}$

Si N_1 s'est réalisée, alors l'urne B contient 3 rouges et 3 noires, et donc $p(R_2 \mid N_1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

La formule des probabilités totale donne :

$$p(R_2) = p(R_2 \cap N_1) + p(R_2 \cap R_1) = p\left(\frac{R_2}{N_1}\right) \times p(N_1) + p\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \times p(R_1) = \frac{27}{50}$$

c) On a facilement : $p(N_2) = 1 - p(R_2) = \frac{23}{50}$. Donc $p(N_2) = \frac{23}{50}$

2) Soit p_n la probabilité d'obtenir au moins une fois une boule rouge en n tirages. On utilise l'évènement contraire, en reconnaissant un schéma de Bernoulli, ce qui mène à la formule :

$$p_n = 1 - C_n^0 \left(\frac{27}{50}\right)^0 \left(\frac{23}{50}\right)^n = 1 - \left(\frac{23}{50}\right)^n$$

On en déduit :

$$p_n \geqslant 0{,}99 \iff \left(\frac{23}{50}\right)^n \leqslant 0{,}01 \iff \ln\left(\frac{23}{50}\right)^n \geqslant \ln 0{,}01 \iff n \geqslant \frac{\ln 0{,}01}{\ln 23 - \ln 50} \approx 5{,}93$$

Donc le nombre d'essais minimum à faire est de 6.

EXERCICE 20

1) a) On a :

$$p(A) = \frac{C_5^3}{C_{10}^3} = \frac{10}{120} = \frac{1}{12} \ ; \ p(B) = \frac{C_5^3 + C_3^3}{C_{10}^3} = \frac{11}{120} \ ; \ p(C) = \frac{C_5^1 \times C_3^1 \times C_2^1}{C_{10}^3} = \frac{30}{120} = \frac{1}{4}$$

Conclusion : $p(A) = \frac{1}{12}$; $p(B) = \frac{11}{120}$; $p(C) = \frac{1}{4}$

b) L'événement B signifie que $X = 1$ et C que $X = 3$. On en déduit que :

$$p(X = 2) = 1 - p(X = 1) - p(X = 3) = 1 - \frac{11}{120} - \frac{1}{4} = \frac{79}{120}$$

Donc la loi de X est donnée par :

X	1	2	3
p	$\frac{11}{120}$	$\frac{79}{120}$	$\frac{1}{4}$

Et on a : $E(X) = \frac{259}{120} = 2,2$

2) a) Le nombre total de tirages possibles de 2 boules est : C_{n+1}^2

Le nombre de tirages de 2 rouges est : C_n^2 et donc on a : $p(D) = \frac{C_n^2}{C_{n+1}^2} = \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{\frac{(n+5)(n+4)}{2}} = \frac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$

Ainsi : $p(D) = \frac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$

b) E est la réunion de 3 événements incompatibles : tirer 2 rouges (D) ou 2 jaunes ou 2 vertes.

$$p(E) = p(D) + \frac{C_3^2}{C_{n+5}^2} + \frac{C_2^2}{C_{n+5}^2} = \frac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)} + \frac{3}{\frac{(n+5)(n+4)}{2}} + \frac{1}{\frac{(n+5)(n+4)}{2}} = \frac{n^2-n+8}{(n+5)(n+4)}$$

Soit : $p(E) = \frac{n^2-n+8}{(n+5)(n+4)}$

Cherchons pour quelles valeurs de n on a :

$$p(E) \geqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{n^2-n+8}{(n+5)(n+4)} \geqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(n^2-n+8) \geqslant (n+5)(n+4)$$

Ainsi on est amené à résoudre l'inéquation : $n^2 - 11n - 4 \geqslant 0$

Ce polynôme du second degré a pour racines : $\frac{11-\sqrt{137}}{2} = -0,35$ et $\frac{11+\sqrt{137}}{2} = 11,4$. Comme n est un entier naturel, on prend $n \geqslant 12$.

EXERCICE 21

1) Les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire $\vec{U} \cdot \vec{V}$ est nul.

Or : $\vec{U} \cdot \vec{V} = a(1+b) - 5 + (1-a)b = a + b - 5$. Donc $\vec{U} \cdot \vec{V} = 0 \Leftrightarrow a + b = 5$

Les couples de jetons dont la somme des numéros lus lors du tirage est de 5 sont $\Omega = \{(1;4)(4;1)(2;3)(3;2)\}$

Avec pour chaque couple (tirage avec remise) une probabilité de tirage de $\left(\frac{1}{4}\right)^2$.

Les différents tirages sont incompatibles. La probabilité que ces vecteurs soient orthogonaux est donc de $4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

2) a) A_1 désigne l'événement : « A gagne la première partie ». Pour réaliser A_1 il faut que A obtienne des vecteurs orthogonaux et B des vecteurs non orthogonaux, tirages indépendants de probabilités respectives $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$. Par suite, $P(A_1) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$.

CE $\sum\pi\int$

Un raisonnement semblable au précédent conduit à $P(B_1) = \frac{3}{16}$.

Le jeu s'arrête à la fin de la première partie lorsque l'événement $A_1 \cup B_1$, union des événements incompatibles A_1 et B_1, est réalisé. Il se poursuit dans le cas contraire. Par suite $C_1 = A_1 \cup B_1$.

D'où : $P(C_1) = 1 - \left(\frac{3}{16} + \frac{3}{16}\right) = \frac{5}{8}$.

b) Remarquons que $P(C_{n+1} \mid C_n) = \frac{5}{8}$ et que par définition $P(C_{n+1} \mid C_n) = \frac{P(C_{n+1} \cap C_n)}{P(C_n)}$.

Or $P(C_{n+1} \cap C_n) = P(C_{n+1})$ puisque l'événement C_{n+1} ne peut se produire que si C_n est réalisé donc $C_{n+1} \subset C_n$ et par suite $P(C_{n+1} \mid C_n) = \frac{P(C_{n+1})}{P(C_n)}$.

On déduit des résultats précédents que $P(C_{n+1}) = \frac{5}{8}P(C_n)$ donc $P(C_n)$ est le $n^{\text{ième}}$ terme de la suite géométrique de premier terme $P(C_1)$ et de raison $\frac{5}{8}$.

Il en résulte que $P(C_n) = P(C_1) \times \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1} = \frac{5}{8} \times \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1} = \left(\frac{5}{8}\right)^{n}$. Donc $P(C_n) = \left(\frac{5}{8}\right)^{n}$

Pour que A gagne la $(n+1)^e$ partie il faut que le jeu continue après la $n^{\text{ième}}$ partie, que A obtienne au cours de cette la $(n+1)^e$ partie deux vecteurs orthogonaux et que B n'obtienne pas de vecteurs orthogonaux.

De manière évidente $P(A_{n+1} \mid C_n) = \frac{3}{16}$ et $P(A_{n+1} \cap C_n) = P(A_{n+1})$ (raisonnement identique à celui rédigé ci-dessus pour C_{n+1}). Donc $P(A_{n+1} \cap C_n) = \frac{P(A_{n+1})}{P(C_n)}$.

Il en résulte donc que $P(A_n) = \frac{3}{16} \times \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}$.

3) a) On a : $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1} = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = \frac{3}{16} \times 0 = 0$. Donc $\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = 0$

b) On cherche le plus petit entier n tel que $\frac{3}{16} \times \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1} \leqslant 0{,}01$.

En prenant le logarithme népérien des deux membres et en remarquant que la fonction logarithme népérien est croissante : $(n-1)\ln\left(\frac{5}{8}\right) + \ln\left(\frac{3}{16}\right) \leqslant \ln(0{,}01)$.

Il en résulte que : $(n-1)\ln\left(\frac{5}{8}\right) \leqslant \ln(0{,}01) - \ln\left(\frac{3}{16}\right)$.

Ou encore : $n \geqslant 1 + \frac{\ln(0{,}01) - \ln\left(\frac{3}{16}\right)}{\ln\left(\frac{5}{8}\right)} = 7{,}24$ et par suite la plus petite valeur de $n = 8$.

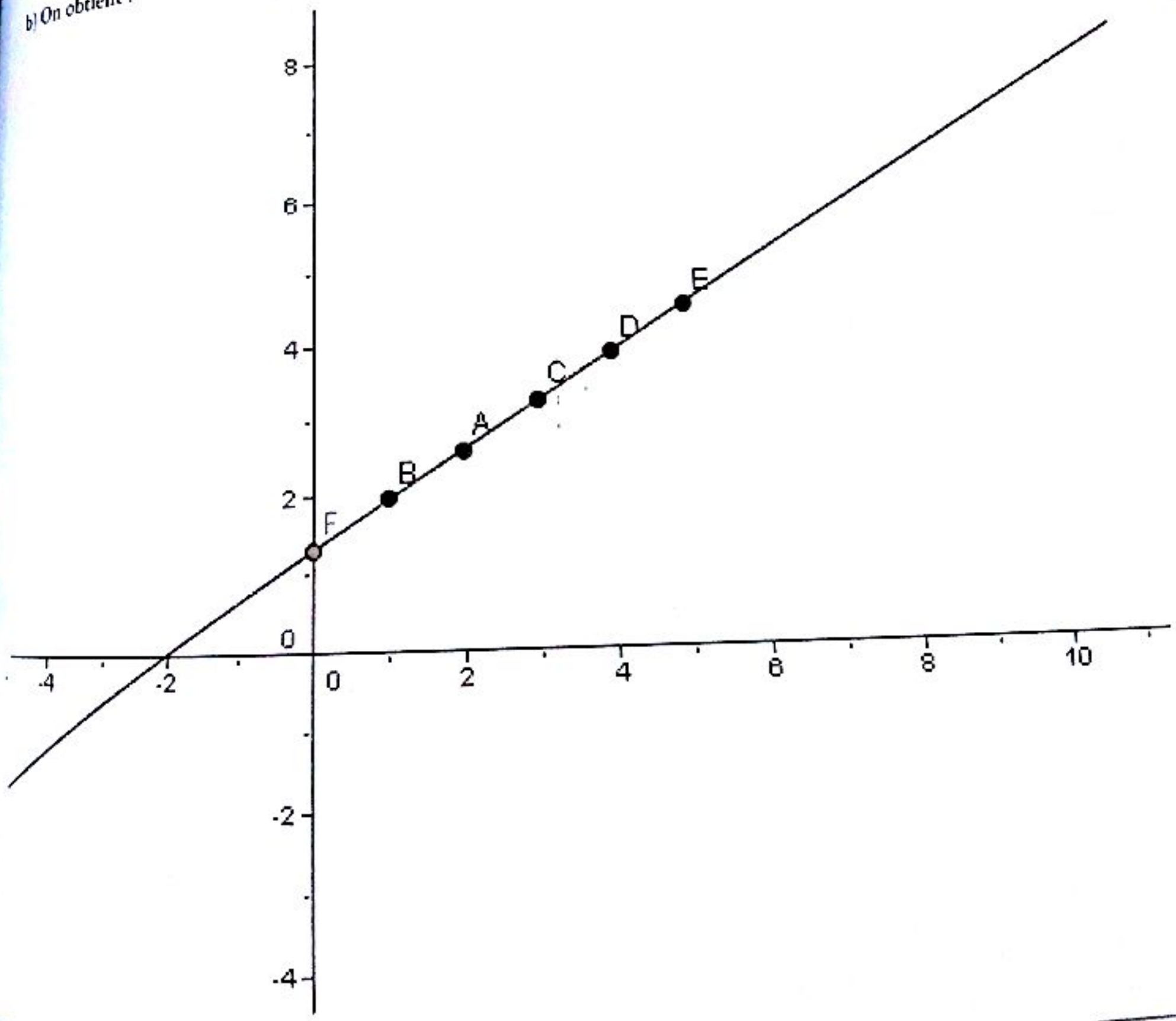
EXERCICE 4

1) a) On trouve, en calculant les valeurs de ln P :

$y_1 = \ln 7 \simeq 1{,}94591$; $y_2 = \ln 13 \simeq 2{,}56494$; $y_3 = \ln 25 \simeq 3{,}21887$;

$y_4 = \ln 47 \simeq 3{,}85014$; $y_5 = \ln 88 \simeq 4{,}47733$.

b) On obtient :



2) Pour avoir les paramètres de la série statistique (X, Y), nous présentons les calculs dans un tableau :

x_i	1	2	3	4	5	$\Sigma x_i = 15$
y_i	1,94591	2,56494	3,21887	3,85014	4,47733	$\Sigma y_i = 16,05719$
$x_i y_i$	1,94591	5,1388	9,65661	15,40056	22,38665	$\Sigma x_i y_i = 54,52853$
x_i^2	1	4	9	16	25	$\Sigma x_i^2 = 55$
y_i^2	3,7865	6,5789	10,3611	14,8235	20,0464	$\Sigma y_i^2 = 55,5964$

On a :

$\bar{x} = \frac{1}{5}\sum x_i = 3$; $\bar{y} = \frac{1}{5}\sum y_i = 3,21$; $\sigma_{XY} = \frac{1}{5}\sum x_i y_i - \bar{x}\cdot\bar{y} = 1,27$; $V(X) = \frac{1}{5}\sum x_i^2 - \bar{x}^2 = 2$

L'équation de la droite de régression de Y en X est : $y - \bar{y} = a(x - \bar{x})$

Avec : $a = \frac{\sigma_{XY}}{V(X)} = 0,635$ d'où donc $(D_{Y/X})$: $y(x) = 0,635x + 1,3$.

3) Le poids P au bout de six mois est, en utilisant la droite d'ajustement précédente, P tel que ln P = 0,635 × 6 + 1,3 soit ln P ≃ 5,11, d'où : $P = e^{5,11} \simeq 165,7$ mg.

EXERCICE 6

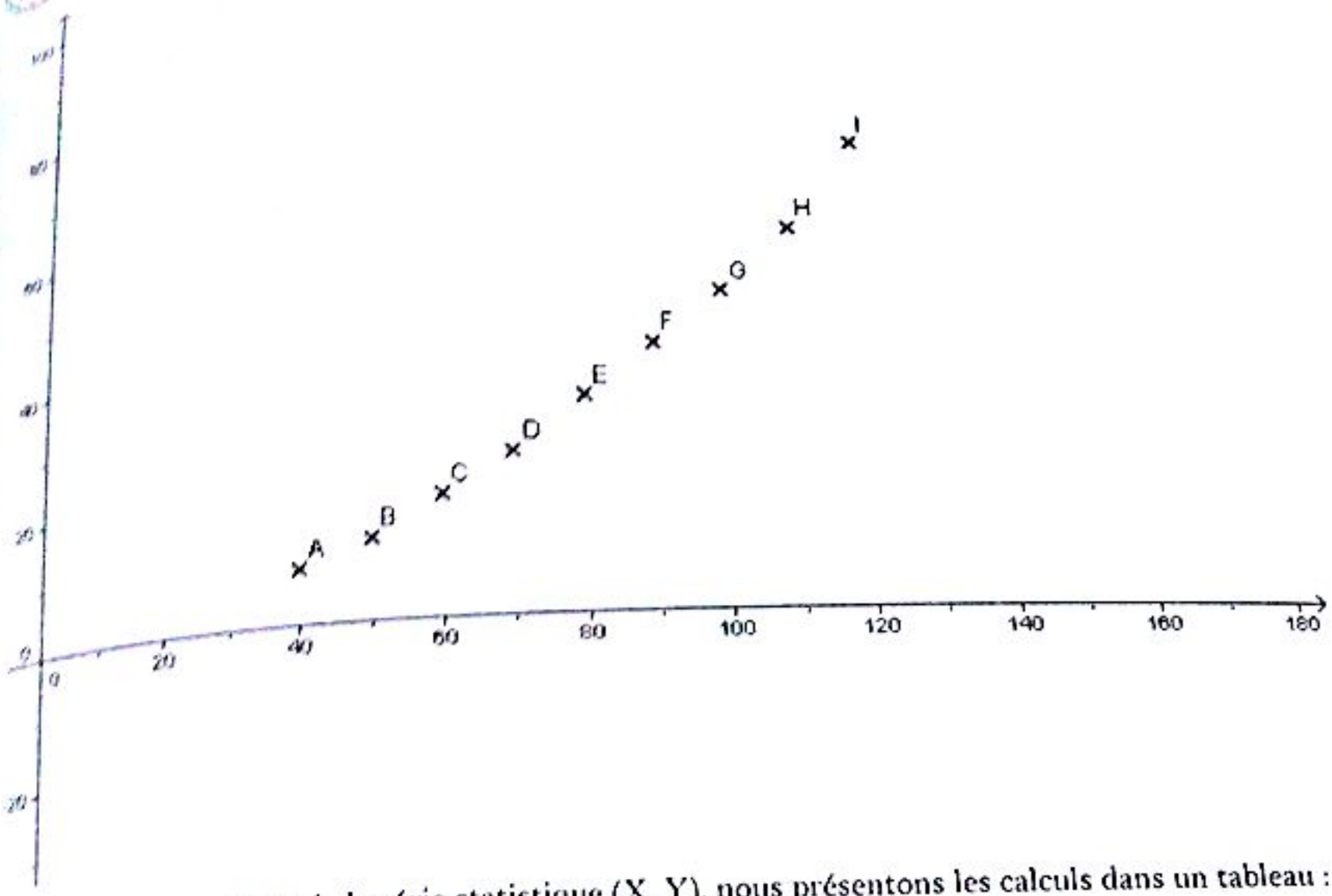
1) On fait la somme des nombres inscrits dans le tableau pour avoir le nombre d'accidents soit : K = 440 + 110 + 90 + 360 = 1000 accidents.

2) $f_{y_2/x_1} = \frac{360}{440+360} = 45\%$ de même $f_{x_2/y_2} = \frac{90}{360+90} = 20\%$

3) $f_1 = \frac{440+110}{1000} = 55\%$ de même que $f_2 = \frac{110+90}{1000} = 20\%$

EXERCICE 8

1) Représentation du nuage de points



1) Pour avoir les paramètres de la série statistique (X, Y), nous présentons les calculs dans un tableau :

X	40	50	60	70	80	90	100	110	120	$\Sigma x_i = 720$
Y	8	12	18	24	32	40	48	58	72	$\Sigma y_i = 312$
$x_i y_i$	320	600	1080	1680	2560	3600	4800	6380	8640	$\Sigma x_i y_i = 29660$
x_i^2	1600	2500	3600	4900	6400	8100	10000	12100	14400	$\Sigma x_i^2 = 63600$
y_i^2	64	144	324	576	1024	1600	2304	3364	5184	$\Sigma y_i^2 = 14584$

$\bar{x} = \frac{1}{9} \times \sum x_i = 80$; $\bar{y} = \frac{1}{9} \times \sum y_i = 34{,}66$; $\sigma_{xy} = \frac{1}{8} \times \sum x_i y_i - \bar{x} \times \bar{y} = 522{,}22$

$$V(x) = \frac{1}{8} \times \sum x_i^2 - \bar{x}^2 = 666{,}667 \Rightarrow \sigma_x \approx 25{,}8199$$

$$V(y) = \frac{1}{9} \times \sum y_i^2 - \bar{y}^2 = 418{,}66 \Rightarrow \sigma_y \approx 20{,}4613$$

2) <u>Déterminons l'équation de la droite de régression de Y en X</u>

$D_{y/x}$ a pour équation : $y - \bar{y} = a(x - \bar{x})$ avec $a = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} \approx 0{,}7833$.

CE $\Sigma\pi\int$

Après calculs, on trouve qu'une équation de $D_{y/x}$ est $y = 0{,}7833x - 28$.

3) Déterminons le coefficient de corrélation linéaire r

Le coefficient de corrélation linéaire vaut alors : $r = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \times \sigma_y} \approx 0{,}988$

r étant très proche de 1 (supérieur à 0,9), on peut estimer qu'on a une bonne corrélation.

4) Si $x = 150$, on obtient en remplaçant dans l'équation de $D_{y/x}$ précédente, $y = 89{,}45$.

Cette distance étant supérieure à 85 m, l'automobiliste percutera bien l'obstacle.

EXERCICE 11

1) Calcul du coefficient de corrélation linéaire de y et x

Pour avoir les paramètres de la série statistique (x_i, y_i), nous présentons les calculs dans un tableau :

x_i	60	80	100	120	140	160	180	200
y_i	952	805	630	522	510	324	205	84
$x_i y_i$	57120	64400	63000	62640	71400	51840	36900	16800
x_i^2	3600	64000	10000	14400	19600	25600	32400	40000
y_i^2	906304	648025	396900	272484	260100	104976	42025	7056

$\Sigma x_i = 1040$; $\Sigma y_i = 4032$; $\Sigma x_i y_i = 424100$; $\Sigma x_i^2 = 152000$; $\Sigma y_i^2 = 2637870$.

$$\bar{x} = \frac{1}{8}\sum x_i = 130 \qquad \bar{y} = \frac{1}{8}\sum y_i = 504 \qquad \sigma_{xy} = \frac{1}{8}\sum x_i y_i - \bar{x} \times \bar{y} = -12507{,}5$$

$$V(x) = \frac{1}{8}\sum x_i^2 - \bar{x}^2 = 2100 \Rightarrow \sigma_x \approx 45{,}825$$

$$V(y) = \frac{1}{8} \times \sum y_i^2 - \bar{y}^2 = 75717{,}55 \Rightarrow \sigma_y \approx 275{,}17$$

Le coefficient de corrélation linéaire vaut alors : $r = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \times \sigma_y} \approx -{,}99$.

Cette valeur de r justifie bel et bien la recherche d'un ajustement linéaire, car la corrélation est très forte (r très proche de -1).

2) Déterminons l'équation de la droite de régression de y en x

$D_{y/x}$ a pour équation : $y - \bar{y} = a(x - \bar{x})$ avec $a = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} \approx -5{,}95$.

Après calculs, on trouve qu'une équation de $D_{y/x}$ est $y = -5{,}95x + 1277{,}5$.

3) a) Le prix de vente est : yx (nombre d'exemplaires × prix de vente d'un exemplaire).

Le prix de revient est : $25y + 28000$ (nombre d'exemplaires × prix de fabrication d'un exemplaire + frais de conception). Le bénéfice z est donc :

$z =$ Prix de vente − Prix de revient $= yx - (25y + 28000)$.

Soit : $z = (-5{,}95x + 1277{,}5)x - 25(-5{,}95x + 1277{,}5) - 28000$.

Après réduction, on trouve : $z = -5{,}95x^2 + 1426{,}25x - 59937{,}5$.

b) Le bénéfice $z(x)$ est maximal si $z'(x) = 0 \Leftrightarrow -11{,}9x + 1426{,}25 = 0 \Leftrightarrow x = 119{,}85$.

En reportant cette valeur de x dans $z(x)$, on trouve que le bénéfice maximal est : $z_{max} = 25532{,}65$.

EXERCICE 12

1) z_1 est la moyenne des notes de Mathématiques de ceux qui ont obtenu $x_1 = 6$ en Sciences Physiques. Ainsi

$$z_1 = \frac{(4 \times 2) + (2 \times 6) + (1 \times 10) + (0 \times 14) + (0 \times 18)}{7} \Rightarrow z_1 = \frac{30}{7}.$$

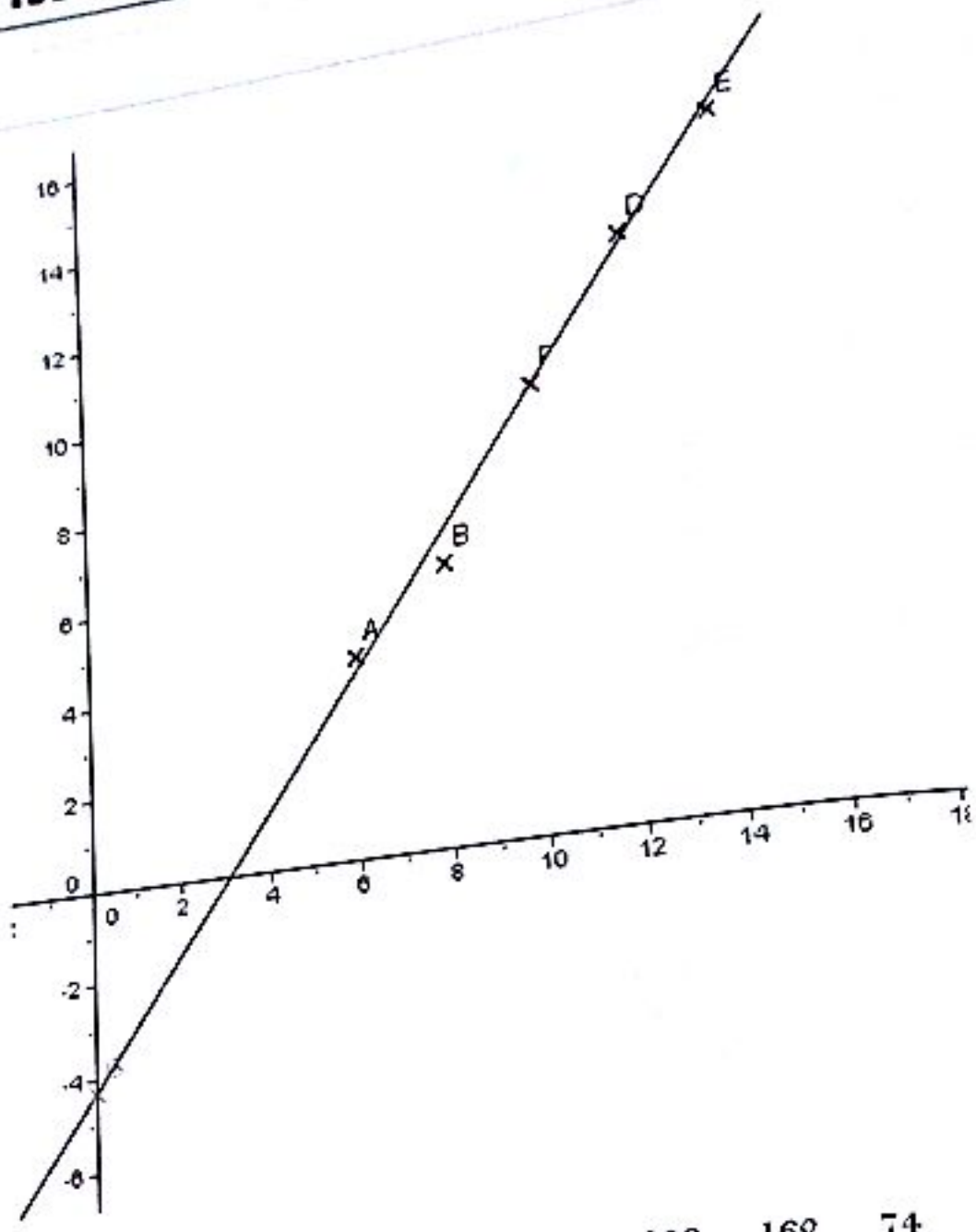
De manière analogue, on obtient : $z_2 = 6$; $z_3 = \frac{286}{29}$; $z_4 = \frac{162}{13}$; $z_5 = \frac{74}{5}$.

2) On obtient d'après les valeurs de z_i trouvées au 1) le tableau de la série statistique (x_i, z_i)

x_i	6	8	10	12	14
z_i	$\frac{30}{7}$	6	$\frac{286}{29}$	$\frac{162}{13}$	$\frac{74}{5}$

a)

CE $\Sigma\pi\int$



b) $\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{5} = \dfrac{6+8+10+12+14}{5} = 10$; $\overline{z} = \dfrac{\frac{30}{7} + 6 + \frac{286}{29} + \frac{162}{13} + \frac{74}{5}}{5} = 9{,}51$

$V(x) = \dfrac{\sum_{i=1}^{5} x_i^2}{5} - \overline{x}^2 = 8 \Rightarrow \sigma_x = 2\sqrt{2}$; $V(z) = \dfrac{\sum_{i=1}^{5} z_i^2}{5} - \overline{z}^2 = 15{,}3 \Rightarrow \sigma_z = \sqrt{15{,}3} \simeq 3{,}91$;

$\sigma_{xz} = \text{cov}(x, z) = \dfrac{\sum_{i=1}^{5} x_i z_i}{5} - \overline{x} \times \overline{z}$

$= \dfrac{(6 \times \frac{30}{7}) + (8 \times 6) + (10 \times \frac{286}{29}) + (12 \times \frac{162}{13}) + (14 \times \frac{74}{5})}{5} - (10 \times 9{,}51) \simeq 11{,}02$

D'après ces calculs, le coefficient de corrélation linéaire est égal à : $r = \dfrac{\sigma_{xz}}{\sigma_x \times \sigma_z} = \dfrac{11{,}02}{2\sqrt{2} \times 3{,}91}$ soit $r \simeq$ 0,99.

c) Une équation de $D_{z/x}$ est $z - \overline{z} = a(x - \overline{x})$ avec $a = \dfrac{\sigma_{xz}}{\sigma_x^2} \simeq \dfrac{11{,}02}{2\sqrt{2}} \simeq 1.35$.

Après remplacement des expressions par leurs valeurs numériques, on obtient : $D_{Z/X} : z = 1{,}25x - 4{,}29$.

EXERCICE 14

1) $r = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \approx 0{,}69$

2) a) $\left(D_{\frac{x}{Y}}\right) : y(x) = 92{,}59x - 4{,}35$

b) Il faut investir 3,29 milliards de F CFA si l'on désire un chiffre d'affaire de 300 milliards.

EXERCICE 15

1) a) $r = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = -0{,}973$. Il y a une forte corrélation.

b) La droite de régression de Y en X est : $y(x) = \frac{Cov(X,Y)}{V(X)}x + (\overline{Y} - a\overline{X}) = -0{,}874x + 4{,}12$

c) Si $x = 6$ alors $y = -1{,}124$.

Cette équation ne permet pas d'estimer le degré de salinité car au 6e mois de pluie le degré de salinité ne peut être négatif.

2) a) On obtient le tableau suivant :

X_i	0	1	2	3	4
Z_i	1,182	0,875	0,010	-1,83	-4,61

b) On a : $r = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = -0{,}944$.

c) La droite de régression de Z en X est : $z(x) = \frac{Cov(X,Z)}{V(X)}x + (\overline{Z} - a\overline{X}) = -1{,}428x + 1{,}982$

On a : $Z = \ln(Y - 1) = -1{,}428x + 1{,}982 \implies Y = 1 + e^{-1{,}428x + 1{,}982}$

d) Si $x = 6$ alors $y = 1{,}001$. Le degré de salinité estimé au 6e est positif, il est très proche de celui du quatrième mois et lui est inférieur. Donc l'équation $Y = 1 + e^{-1{,}428x + 1{,}982}$ nous permet de faire cette estimation.

AG1

Nombres complexes

EXERCICE 1

1) $z_1 = \frac{3+6i}{3-4i} = \frac{(3+6i)(3+4i)}{3^2+4^2} = -\frac{3}{5} + \frac{6}{5}i$. Donc $\underline{z_1 = -\frac{3}{5} + \frac{6}{5}i}$

2) $z_2 = \left(\frac{(1+i)(2+i)}{2^2+1^2}\right)^2 + \frac{(1-7i)(4-3i)}{3^2+4^2} = \frac{-25-25i}{25} = -1 - i$. Donc $\underline{z_2 = -1 - i}$

3) $z_3 = \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i} = 2\mathrm{Re}\left(\frac{2+5i}{1-i}\right) = 2 \times -\frac{3}{2} = -3$. Donc $\underline{z_3 = -3}$

4) $z_4 = e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$. Donc $\underline{z_4 = -1}$

5) $z_5 = e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$. Donc $\underline{z_5 = i}$

6) $z_6 = e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Donc $\underline{z_6 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$

7) $z_7 = e^{-i\frac{\pi}{4}} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$. Donc $\underline{z_7 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}}$

8) $z_8 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$. Donc $\underline{z_8 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}}$

EXERCICE 3

Première partie

1) On a :

(i) $|a| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1 \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{\mathrm{Re}(a)}{|a|} = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\mathrm{Im}(a)}{|a|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \arg(a) = \frac{\pi}{3}(2\pi)$

Donc $\underline{|a| = 1}$ et $\underline{\arg(a) = \frac{\pi}{3}(2\pi)}$

(ii) $|b| = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = 2 \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{\mathrm{Re}(b)}{|b|} = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\mathrm{Im}(b)}{|b|} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \arg(b) = \frac{4\pi}{3}(2\pi)$

Donc $|b| = 2$ et $\arg(b) = \frac{4\pi}{3}(2\pi)$

(iii) $|c| = \sqrt{(0)^2 + (-3)^2} = 3 \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{\mathrm{Re}(c)}{|c|} = 0 \\ \sin\theta = \frac{\mathrm{Im}(b)}{|b|} = -1 \end{cases} \Rightarrow \theta = \arg(c) = -\frac{\pi}{2}(2\pi)$

Donc $|c| = 3$ et $\arg(c) = -\frac{\pi}{2}(2\pi)$

(iv) $|d| = \sqrt{(4)^2 + (0)^2} = 4 \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{\mathrm{Re}(d)}{|d|} = 4 \\ \sin\theta = \frac{\mathrm{Im}(d)}{|d|} = 0 \end{cases} \Rightarrow \theta = \arg(d) = 0(2\pi)$

Donc $|d| = 4$ et $\arg(d) = 0(2\pi)$

2) a) On a : $-1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$ donc :

$$z_1 = (-1-i)^{15} = \left[\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)\right]^{15} = (\sqrt{2})^{15}\left(\cos\left(15\times\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(15\times\frac{5\pi}{4}\right)\right)$$
$$= 2^{\frac{15}{2}}\left(\cos\left(\frac{75\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{75\pi}{4}\right)\right) = 2^{\frac{15}{2}}\left(\cos\left(18\pi + \frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(18\pi + \frac{3\pi}{4}\right)\right)$$
$$= 2^{\frac{15}{2}}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = 2^{\frac{15}{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -128 + 128i$$

Donc $\mathrm{Re}(z_1) = -128$ et $\mathrm{Im}(z_1) = 128$

b) On a : $1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ donc :

$$z_2 = (1+i\sqrt{3})^{245} = \left[2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\right]^{245} = 2^{245}\left[\cos\left(245\times\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(245\times\frac{\pi}{3}\right)\right]$$
$$= 2^{245}\left(\cos\left(82\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(82\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right) = 2^{245}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$
$$= 2^{245}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2^{244} - 2^{244}\sqrt{3}i$$

Donc $\mathrm{Re}(z_2) = 2^{244}$ et $\mathrm{Im}(z_2) = -2^{244}\sqrt{3}$

3) On a :

$$z_1 = \sin\alpha - i\cos\alpha = -i(\cos\alpha + i\sin\alpha) = e^{-i\frac{\pi}{2}} \times e^{i\alpha} = e^{i\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)} = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$$

Ainsi : $z_1 = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$

$$z_2 = \frac{1 + i\tan\alpha}{1 - i\tan\alpha} = \frac{1 + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}i}{1 - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}i} = \frac{\frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\cos\alpha - i\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\alpha - i\sin\alpha} = \frac{e^{i\alpha}}{e^{-i\alpha}} = e^{2i\alpha} = \cos 2\alpha + i\sin 2\alpha$$

Ainsi : $z_2 = \cos(2\alpha) + i\sin(2\alpha)$

Deuxième partie

4) On a :

(i) $1 + \cos\alpha = 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ et $\sin\alpha = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. Ainsi :

$$1 + \cos\alpha + i\sin\alpha = 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + i2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\frac{\alpha}{2}}$$

(ii) $1 + \cos\alpha = 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. Ainsi :

$$1 - \cos\alpha - i\sin\alpha = 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 2i\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -2i\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) = -2i\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot e^{i\frac{\alpha}{2}}$$

(iii) Ainsi :

$$\frac{1 + \cos\alpha + i\sin\alpha}{1 - \cos\alpha - i\sin\alpha} = \frac{2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\frac{\alpha}{2}}}{-2i\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot e^{i\frac{\alpha}{2}}} = \frac{i}{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

Ainsi (en supposant $\alpha > 0$) :

$$\left|\frac{1 + \cos\alpha + i\sin\alpha}{1 - \cos\alpha - i\sin\alpha}\right| = \left|\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right| = \frac{\left|e^{i\frac{\pi}{2}}\right|}{\left|\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right|} = \frac{1}{\left|\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right|} = \frac{1}{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}, \quad \arg\left(\frac{1 + \cos\alpha + i\sin\alpha}{1 - \cos\alpha - i\sin\alpha}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Ainsi : $\left|\frac{1+\cos\alpha+i\sin\alpha}{1-\cos\alpha-i\sin\alpha}\right|$ et $\arg\left(\frac{1+\cos\alpha+i\sin\alpha}{1-\cos\alpha-i\sin\alpha}\right) = \frac{\pi}{2}$

Troisième partie

a) On a : $|z_1| = |1 - i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$; $\begin{cases} \cos\theta = \frac{\mathrm{Re}(z_1)}{|z_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \frac{\mathrm{Im}(z_1)}{|z_1|} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4}$

Ainsi : $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

b) Cherchons d'abord la forme trigonométrique de $z_2' = 1 - i\sqrt{3}$.

On a : $|z_2'| = |1 - i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$; $\begin{cases} \cos\theta = \frac{\mathrm{Re}(z_2')}{|z_2'|} = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\mathrm{Im}(z_2')}{|z_2'|} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{3}$

Ainsi : $z_2' = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

CE $\Sigma\pi\int$

Ainsi : $z_2 = \cos(2\alpha) + i\sin(2\alpha)$

Deuxième partie

+) On a :

(i) $1+\cos\alpha = 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ et $\sin\alpha = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. Ainsi :

$$1+\cos\alpha + i\sin\alpha = 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + i2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\frac{\alpha}{2}}$$

(ii) $1+\cos\alpha = 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. Ainsi :

$$1-\cos\alpha - i\sin\alpha = 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 2i\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -2i\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) = -2i\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot e^{i\frac{\alpha}{2}}$$

(iii) Ainsi :

$$\frac{1+\cos\alpha + i\sin\alpha}{1-\cos\alpha - i\sin\alpha} = \frac{2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\frac{\alpha}{2}}}{-2i\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot e^{i\frac{\alpha}{2}}} = \frac{i}{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

Ainsi (en supposant $\alpha > 0$) :

$$\left|\frac{1+\cos\alpha + i\sin\alpha}{1-\cos\alpha - i\sin\alpha}\right| = \left|\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right| = \frac{\left|e^{i\frac{\pi}{2}}\right|}{\left|\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right|} = \frac{1}{\left|\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right|} = \frac{1}{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}, \quad \arg\left(\frac{1+\cos\alpha + i\sin\alpha}{1-\cos\alpha - i\sin\alpha}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Ainsi : $\left|\frac{1+\cos\alpha+i\sin\alpha}{1-\cos\alpha-i\sin\alpha}\right|$ et $\arg\left(\frac{1+\cos\alpha+i\sin\alpha}{1-\cos\alpha-i\sin\alpha}\right) = \frac{\pi}{2}$

Troisième partie

a) On a : $|z_1| = |1-i| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$; $\begin{cases}\cos\theta = \frac{\mathrm{Re}(z_1)}{|z_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \frac{\mathrm{Im}(z_1)}{|z_1|} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4}$

Ainsi : $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

b) Cherchons d'abord la forme trigonométrique de $z_2' = 1 - i\sqrt{3}$.

On a : $|z_2'| = |1-i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2} = 2$; $\begin{cases}\cos\theta = \frac{\mathrm{Re}(z_2')}{|z_2'|} = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\mathrm{Im}(z_2')}{|z_2'|} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{3}$

Ainsi : $z_2' = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

En utilisant la formule de Moivre, on obtient :

$$(z_2')^5 = 2^5\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)^5 = 32\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)\right)$$

Ainsi : $z_2 = 32\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)\right)$

Quatrième partie

1) On a : $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

D'après la formule de Moivre, on a :

$$z_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^6 = \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^6 = \cos\left(6 \times \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(6 \times \frac{\pi}{6}\right) = \cos\pi + i\sin\pi = -1$$

Donc $z_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^6 = -1$

2) On a : $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

D'après la formule de Moivre, on a :

$$z_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^5 = \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^5 = \cos\left(5 \times \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(5 \times \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

Donc $z_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^5 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

3) On a : $1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ et $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

D'après la formule de Moivre, on a :

$$z_3 = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i}\right)^{30} = \frac{(1 + i\sqrt{3})^{30}}{(1 + i)^{30}} = \frac{\left[2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\right]^{30}}{\left[\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\right]^{30}} = 2^{15}\frac{\left(\cos\left(30 \times \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(30 \times \frac{\pi}{3}\right)\right)}{\left(\cos\left(30 \times \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(30 \times \frac{\pi}{4}\right)\right)}$$

$$= 2^{15}\frac{\cos(10\pi) + i\sin(10\pi)}{\cos\left(\frac{15\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{15\pi}{2}\right)} = 2^{15}\frac{1}{-i} = 2^{15}i$$

Donc $z_3 = 2^{15}i$

EXERCICE 4

Première partie

En utilisant la formule de Moivre, on obtient :

$$(z_2')^5 = 2^5\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)^5 = 32\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)\right)$$

Ainsi : $z_2 = 32\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)\right)$

Quatrième partie

1) On a : $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

D'après la formule de Moivre, on a :

$$z_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^6 = \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^6 = \cos\left(6\times\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(6\times\frac{\pi}{6}\right) = \cos\pi + i\sin\pi = -1$$

Donc $z_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^6 = -1$

On a : $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

D'après la formule de Moivre, on a :

$$z_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^5 = \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^5 = \cos\left(5\times\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(5\times\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

Donc $z_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^5 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

On a : $1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ et $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

D'après la formule de Moivre, on a :

$$z_3 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{30} = \frac{(1+i\sqrt{3})^{30}}{(1+i)^{30}} = \frac{\left[2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\right]^{30}}{\left[\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\right]^{30}} = 2^{15}\frac{\left(\cos\left(30\times\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(30\times\frac{\pi}{3}\right)\right)}{\left(\cos\left(30\times\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(30\times\frac{\pi}{4}\right)\right)}$$

$$= 2^{15}\frac{\cos(10\pi) + i\sin(10\pi)}{\cos\left(\frac{15\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{15\pi}{2}\right)} = 2^{15}\frac{1}{-i} = 2^{15}i$$

Donc $z_3 = 2^{15}i$

EXERCICE 4

CE $\Sigma\pi\int$

1) Module de z : $|z| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$

Argument de z : $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \arg z = \frac{\pi}{6}$ et donc : $\underline{z = \exp\left(i\frac{\pi}{6}\right)}$

2) Module de z : $|z| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = 1$

Argument de z : $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \arg z = -\frac{\pi}{6}$ et donc : $\underline{z = \exp\left(-i\frac{\pi}{6}\right)}$

3) Module de z : $|z| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$

Argument de z : $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \arg z = \frac{5\pi}{6}$ et donc : $\underline{z = \exp\left(i\frac{5\pi}{6}\right)}$

4) Module de z : $|z| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = 1$

Argument de z : $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \arg z = \frac{7\pi}{6}$ et donc : $\underline{z = \exp\left(i\frac{7\pi}{6}\right)}$

5) Module de z : $|z| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$

Argument de z : $\cos x = 1$ et $\sin x = 0 \Rightarrow \arg z = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ et donc : $\underline{z = \exp(i2k\pi)}$

6) Module de z : $|z| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1$

Argument de z : $\cos x = -1$ et $\sin x = 0 \Rightarrow \arg z = (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ et donc : $\underline{z = \exp(i(2k+1)\pi)}$

7) Module de z : $|z| = \sqrt{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} = 1$

Argument de z : $\cos x = \sin\alpha$ et $\sin x = \cos\alpha \Rightarrow \arg z = \frac{\pi}{2} - x$ et donc : $\underline{z = \exp\left(i\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)}$

8) Module de z : $|z| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$

Argument de z : $\cos x = 0$ et $\sin x = 1 \Rightarrow \arg z = \frac{\pi}{2}$ et donc : $\underline{z = \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)}$

Deuxième partie

1) $z_1 = \frac{3}{1-i} = \frac{3}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \frac{3}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}$. Donc $\underline{z_1 = \frac{3}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}}$

2) $z_2 = \frac{(1+i)^3 + (1-i)^3}{1-i} = \frac{2^{\frac{3}{2}}\left(e^{i\frac{3\pi}{4}} + e^{-i\frac{3\pi}{4}}\right)}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = 2e^{i\frac{5\pi}{4}}$. Donc $\underline{z_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{4}}}$

3) $z_3 = \frac{(\sqrt{6}-i\sqrt{2})(1+i)}{1-i} = \frac{2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)\cdot\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$. Donc $\underline{z_3 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}}$

4) $z_4 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} = \frac{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}}{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}} = \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{-i\frac{\pi}{3}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)} = e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$. Donc $\underline{z_4 = e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}}$

5) $z_5 = \frac{1-i}{1+i\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{7\pi}{12}}$. Donc $\underline{z_5 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{7\pi}{12}}}$

EXERCICE 5

1) $\begin{cases} iz - 2\omega = -4+3i \\ 2\overline{\omega} + \overline{z} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} iz - 2\omega = -4+3i \\ 2\omega + z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} iz - 2\omega = -4+3i \\ (1+i)z = -1+3i \end{cases}$

L'unique solution est $\underline{z = \frac{1}{2}(-1+3i)(1-i) = 1+2i}$ et $\underline{\omega = \frac{1}{2}(3-z) = 1-i}$

EXERCICE 6

Première partie

1) On pose $z = x+iy$. Donc : $(z-1)(\overline{z}-2) = [(x-1)+iy][(x-2)-iy] = x^2-3x+2+y^2-iy$

$(z-1)(\overline{z}-2)$ est un nombre réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle.

Autrement dit, $-y = 0$ ou encore $\underline{y = 0}$

Donc l'ensemble des points M(z) tel que $(z-1)(\overline{z}-2)$ soit un nombre réel est l'axe des abscisses.

2) $(z-1)(\overline{z}-2)$ est un nombre imaginaire pur si et seulement si sa partie réelle est nulle.

Autrement dit, $x^2-3x+2+y^2 = 0$. Cherchons la forme canonique de x^2-3x+2.

On a : $x^2-3x+2 = \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 2 = \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$

Donc : $x^2-3x+2+y^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$

Donc l'ensemble des points M(z) tel que $(z-1)(\overline{z}-2)$ soit un nombre imaginaire pur est le cercle de centre $A\left(\frac{3}{2};0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

Deuxième partie

Nous vous laissons le soin de faire les figures.

1) Z existe si et seulement si $z-1 \neq 0 \Leftrightarrow z \neq 1 \Rightarrow D_v = \mathbb{C} - \{1\}$.

On pose $z = x+iy$. Donc :

$$Z = \frac{z+1}{z-1} = Z = \frac{x+iy+1}{x+iy-1} = \frac{x+1+iy}{x-1+iy} = \frac{(x+1+iy)(x-1-iy)}{(x-1)^2+y^2} = \frac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2} - \frac{2xy}{(x-1)^2+y^2}$$

Ainsi : $X = \frac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2}$ et $Y = -\frac{2xy}{(x-1)^2+y^2}$

2) Z est réel si et seulement si sa partie imaginaire Y est nulle. Ainsi $Y = 0$.

On a : $Y = 0 \Leftrightarrow -\frac{2xy}{(x-1)^2+y^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2xy = 0 \\ (x-1)^2+y^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ou } y = 0 \\ x \neq 1 \text{ et } y \neq 0 \end{cases}$

Donc l'ensemble des points M d'affixe z tels que Z soit un réel est l'axe des ordonnées ou l'axe des abscisses privé du point A d'affixe $z = 1$.

3) Z est imaginaire pur si et seulement si sa partie réelle X est nulle. Ainsi $X = 0$.

On a : $X = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-1 = 0 \\ (x-1)^2+y^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ x \neq 1 \text{ et } y \neq 0 \end{cases}$

Donc l'ensemble des points M d'affixe z tels que Z soit un nombre imaginaire pur est le cercle trigonométrique privé du point A d'affixe $z = 1$.

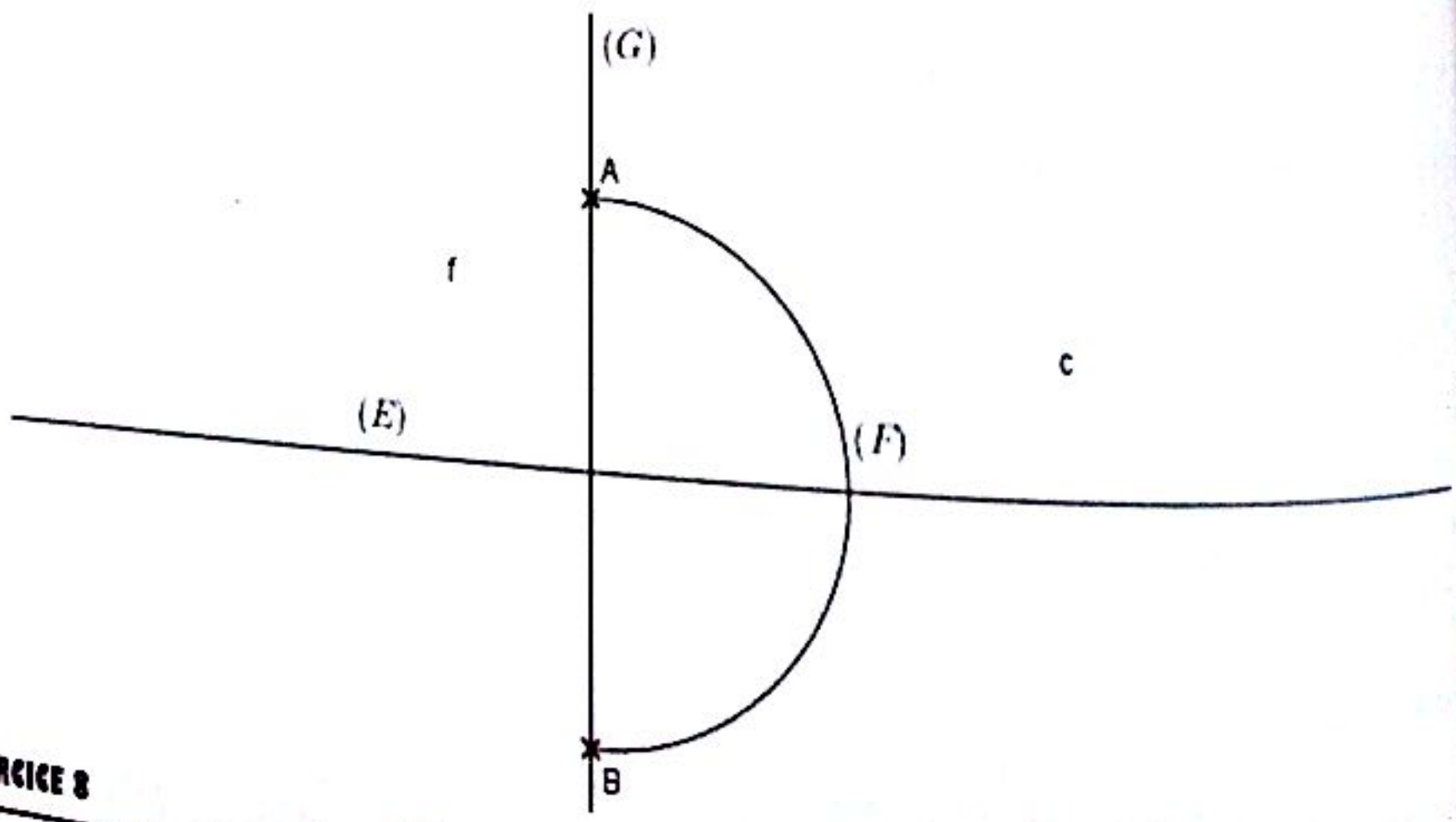
EXERCICE 7

1) (E) est la médiatrice du segment [AB].

2) (F) est le demi-cercle de diamètre [AB].

3) (G) est la droite (AB) privée du segment [AB].

4) On obtient la figure suivante :



EXERCICE 8

CE $\sum\pi$

1) On a : $\cos^2 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(e^{i2x}+e^{-2ix}+2)$

De même :

$$\sin^4 x = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^4 = \frac{1}{16}\left[(e^{ix}-e^{-ix})^2\right]^2 = \frac{1}{16}\left[\left((e^{i2x}+e^{-2ix})-2\right)\right]^2$$

$$= \frac{1}{16}\left[(e^{i2x}+e^{-2ix})^2 - 4(e^{i2x}+e^{-2ix}) + 4\right]$$

$$= \frac{1}{16}\left[(e^{i4x}+e^{-4ix}+2) - 4e^{i2x} - 4e^{-i2x} + 4\right] = \frac{1}{16}(e^{i4x}+e^{-4ix}-4e^{i2x}-4e^{-i2x}+6)$$

Ainsi :

$$\cos^2 x \cdot \sin^4 x = \frac{1}{4}(e^{i2x}+e^{-2ix}+2)\cdot\frac{1}{16}(e^{i4x}+e^{-4ix}-4e^{i2x}-4e^{-i2x}+6)$$

$$= \frac{1}{64}(e^{6ix}+e^{-2ix}-4e^{4ix}-4e^{i0}+6e^{2ix}+e^{2ix}+e^{-6ix}-4e^{i0}-4e^{-4ix}+6e^{-2ix}$$

$$+2e^{i4x}+2e^{-4ix}-8e^{i2x}-8e^{-i2x}+12)$$

$$= \frac{1}{64}\left[(e^{6ix}+e^{-6ix}) - 2(e^{4ix}+e^{-4ix}) - (e^{i2x}+e^{-i2x}) + 4\right]$$

$$= \frac{1}{64}(2\cos 6x - 4\cos 4x - 2\cos 2x + 4) = \frac{1}{32}(\cos 6x - 2\cos 4x - \cos 2x + 2)$$

Donc : $\cos^2 x \cdot \sin^4 x = \frac{1}{32}(\cos 6x - 2\cos 4x - \cos 2x + 2)$

2) On a :

$$\cos^3 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}(e^{i3x}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-i3x}) = \frac{1}{8}\left[(e^{i3x}+e^{-i3x})+3(e^{ix}+e^{-ix})\right]$$

$$= \frac{1}{8}(2\cos 3x + 6\cos x) = \frac{\cos 3x}{4} + \frac{3\cos x}{4}$$

$$\sin^3 x = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3 = -\frac{1}{8i}(e^{i3x}-3e^{ix}+3e^{-ix}-e^{-i3x}) = -\frac{1}{8i}\left[(e^{i3x}-e^{-i3x})-3(e^{ix}-e^{-ix})\right]$$

$$= -\frac{1}{8i}(2i\sin 3x - 6i\sin x) = -\frac{\sin 3x}{4} + \frac{3\sin x}{4}$$

Ainsi : $\cos^3 x + \sin^3 x = \frac{\cos 3x}{4} + \frac{3\cos x}{4} - \frac{\sin 3x}{4} + \frac{3\sin x}{4}$

3) On a :

CE $\sum\pi\int$

$$\cos^6 x = (\cos^3 x)^2 = \left[\frac{1}{8}\left[(e^{i3x}+e^{-i3x})+3(e^{ix}+e^{-ix})\right]\right]^2$$
$$= \frac{1}{64}\left[(e^{i3x}+e^{-i3x})^2+6(e^{i3x}+e^{-i3x})(e^{ix}+e^{-ix})+9(e^{ix}+e^{-ix})^2\right]$$
$$= \frac{1}{64}\left[\left((e^{i6x}+e^{-i6x})+2\right)+6\left((e^{i4x}+e^{-i4x})+(e^{i2x}+e^{-i2x})+\right)\right.$$
$$\left.+9\left((e^{i2x}+e^{-i2x})+2\right)\right]$$
$$= \frac{1}{64}[(2\cos 6x+2)+6(2\cos 4x+2\cos 2x)+9(2\cos 2x+2)]$$
$$= \frac{1}{64}(2\cos 6x+12\cos 4x+30\cos 2x+20) = \frac{\cos 6x}{32}+\frac{3}{16}\cos 4x+\frac{15}{32}\cos 2x+\frac{5}{16}$$

Ainsi : $\cos^6 x = \frac{\cos 6x}{32}+\frac{3}{16}\cos 4x+\frac{15}{32}\cos 2x+\frac{5}{16}$

+) $\cos x\cdot\sin^3 x$

On a :

$$\cos x\cdot\sin^3 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)\cdot\left[-\frac{1}{8i}\left[(e^{i3x}-e^{-i3x})-3(e^{ix}-e^{-ix})\right]\right]$$
$$= -\frac{1}{16i}\left[(e^{i4x}-e^{-i2x})-3(e^{i2x}-e^{-i0})+(e^{i2x}-e^{-i4x})-3(e^{i0}-e^{-i2x})\right]$$
$$= -\frac{1}{16i}\left[(e^{i4x}-e^{-i4x})-2(e^{i2x}-e^{-i2x})\right] = -\frac{1}{16i}(2i\sin 4x-4i\sin 2x)$$
$$= -\frac{\sin 4x}{8}+\frac{\sin 2x}{4}$$

Ainsi : $\cos x\cdot\sin^3 x = -\frac{\sin 4x}{8}+\frac{\sin 2x}{4}$

5) $\cos^5 x = \frac{1}{32}\left(e^{i5x}+5e^{i3x}+10e^{ix}+10e^{-ix}+5e^{-i3x}+e^{-i5x}\right) = \frac{1}{16}(\cos 5x+5\cos 3x+10\cos x)$

Ainsi : $\cos^5 x = \frac{\cos 5x}{16}+\frac{5}{16}\cos 3x+\frac{5}{8}\cos x$

6) On trouve : $\sin^5 x = \frac{\sin 5x}{16}-\frac{5}{16}\sin 3x+\frac{5}{8}\sin x$

7) On a :

$$\cos^2 x\sin^3 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2\times\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3 = \frac{e^{i2x}+e^{-i2x}+2}{4}\times\frac{e^{i3x}-e^{-i3x}-3}{4}$$
$$\cos^2 x\sin^3 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2\times\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3 = \frac{e^{i2x}+e^{-i2x}+2}{4}\times\frac{e^{i3x}-e^{-i3x}-3e^{ix}+3e^{-ix}}{4}$$

Ainsi $\cos^2 x\cdot\sin^3 x = -\frac{\sin 5x}{16}+\frac{\sin 3x}{16}+\frac{\sin x}{8}$

EXERCICE 9

1) On a : $|z_1| = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$; $\begin{cases} \cos\theta = \frac{\mathrm{Re}(z_1)}{|z_1|} = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\mathrm{Im}(z_1)}{|z_1|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$

Ainsi : $\underline{z_1 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)}$

On a : $|z_2| = |1 - i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$; $\begin{cases} \cos\theta = \frac{\mathrm{Re}(z_2)}{|z_2|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \frac{\mathrm{Im}(z_2)}{|z_2|} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4}$

Ainsi : $\underline{z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)}$

2) Forme algébrique de $z_1 z_2$:

$$z_1 z_2 = (1 + i\sqrt{3})(1 - i) = 1 - i + i\sqrt{3} + \sqrt{3} = (\sqrt{3} + 1) + i(\sqrt{3} - 1)$$

Forme trigonométrique de $z_1 z_2$: On a : $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

Donc $\underline{z_1 z_2 = 2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)} = 2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{12}\right)} = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)}$

3) On a : $z_1 z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) = (\sqrt{3} + 1) + i(\sqrt{3} - 1)$

Par identification, on obtient : $\underline{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \ ; \ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}}$

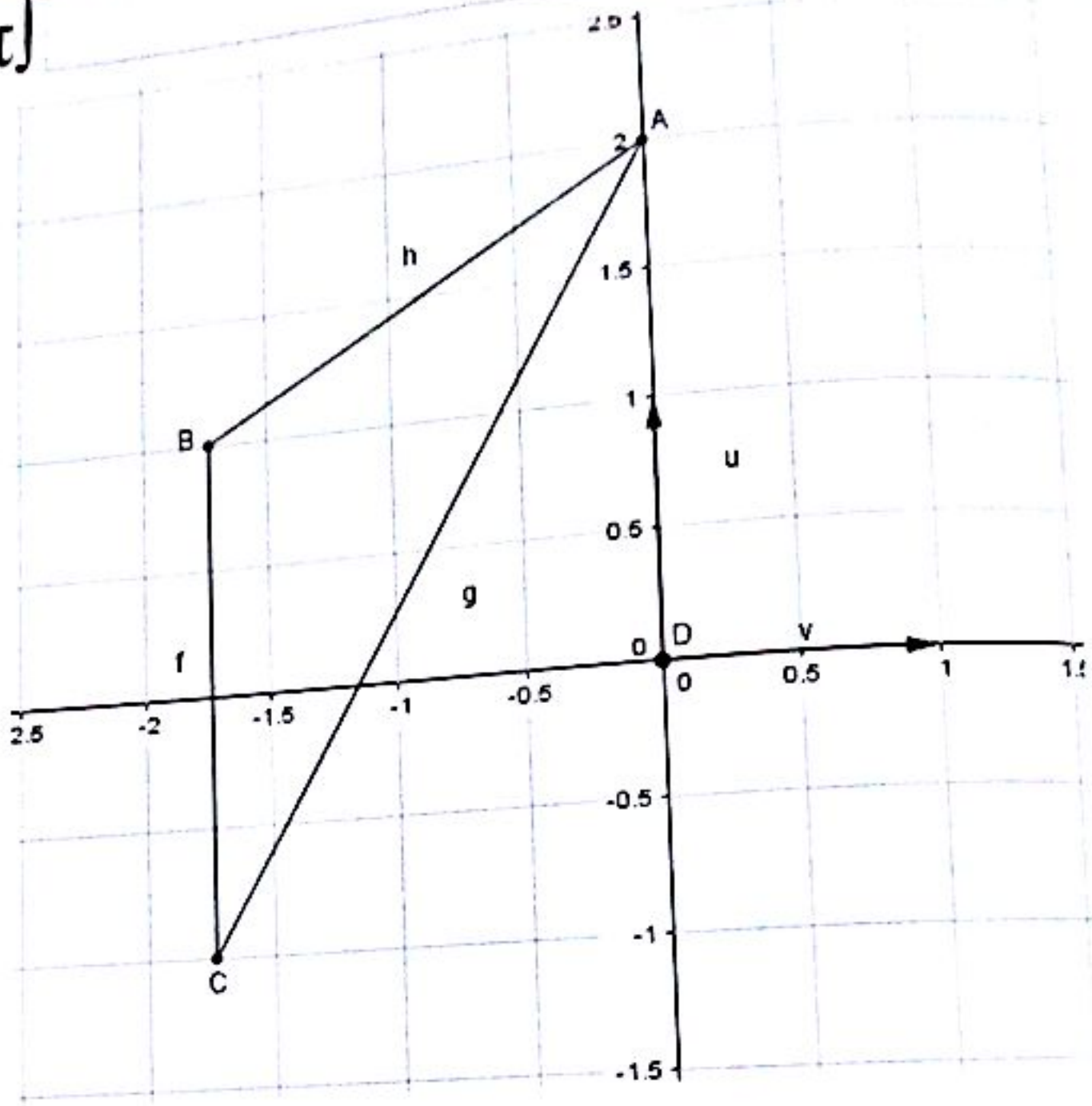
EXERCICE 10

1) On a : $A\binom{0}{2}$ et $|b| = 2 \Rightarrow OB = 2$ et donc le point B est sur le cercle de centre O et de rayon 2.

$$\arg(b) = \arg(-\sqrt{3} + i) = \frac{5\pi}{6}[2\pi] \Rightarrow (\vec{i}, \overrightarrow{OB}) = \frac{5\pi}{6}[2\pi]$$

D'où une construction du point B.

On a : $c = \bar{b}$ donc C est le symétrique de B par rapport à l'axe des abscisses.



2) a) On a :

$$|Z| = \left|\frac{a-b}{c-b}\right| = \frac{|a-b|}{|c-b|} = \frac{BA}{BC}$$

$$\arg(Z) \equiv \arg\left(\frac{a-b}{c-b}\right)[2\pi] \equiv \arg(a-b)\,[2\pi] - \arg(c-b)\,[2\pi] \equiv (\vec{\imath}, \overrightarrow{BA}) - (\vec{\imath}, \overrightarrow{BC})[2\pi]$$

Donc : $\underline{\arg(Z) \equiv (\overrightarrow{BC}, \vec{\imath}) + (\vec{\imath}, \overrightarrow{BA})[2\pi] \equiv (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})[2\pi]}$

b) Forme algébrique de Z :

$$Z = \frac{2i - (-\sqrt{3} + i)}{(-\sqrt{3} - i) - (-\sqrt{3} + i)} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ainsi : $\underline{Z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$

Forme trigonométrique de Z :

$$\arg(Z) \equiv \arg\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)[2\pi] \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$$

Ainsi : $\arg(Z) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$

c) On a $|Z| = \frac{BA}{BC} = 1 \implies BA = BC$ et donc le triangle ABC est isocèle en B.

$\arg(Z) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$ implique $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})[2\pi] \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$

EXERCICE 11

Première partie

a) $Z = 8 - 6i$. On pose $r = x + iy$ tel que $r^2 = 8 - 6i$.

$$r^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = 8 - 6i \implies x^2 - y^2 = 8, \quad xy = -3$$

Comme $xy = -3 \implies y = -\frac{3}{x} \implies x^2 - \left(\frac{-3}{x}\right)^2 = 8 \implies x^4 - 8x^2 - 9 = 0 \quad (1)$

En posant $X = x^2$, (1) devient : $X^2 - 8X - 9 = 0$ qui est trinôme du second degré admettant pour solutions : $X_1 = 9 = X = x^2 \iff x = \pm 3$ et donc $y = \mu 1$.

On déduit les deux solutions : $S = \{z_1 = 3 - i\ ;\ z_2 = -3 + i\}$

b) Même méthode, on trouve $S = \{2 + i\ ;\ -2 - i\}$

c) Même méthode, on trouve $S = \{3 + 4i\ ;\ -3 - 4i\}$

Troisième partie

1) On a :

$$(2+i)z + 3 - 2i = 1 + i \implies z = \frac{1 + i - 3 + 2i}{2 + i} = \frac{-2 + 3i}{2 + i} = \frac{(-2+3i)(2-i)}{2^2 + 1^2} = \frac{-4 + 2i + 6i + 3}{5}$$

$$= \frac{-1 + 8i}{5} = -\frac{1}{8} + \frac{8}{5}i$$

Conclusion : $S = \left\{-\frac{1}{8} + \frac{8}{5}i\right\}$

2) On pose $z = x + iy$. Donc $|z|^2 = x^2 + y^2$.

$$|z|^2 = 2z - 5 + 2i \iff x^2 + y^2 = 2(x + iy) - 5 + 2i \iff x^2 + y^2 - 2x + 5 - i(2y + 2) = 0$$

Ainsi : $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 5 = 0 & (1) \\ 2y + 2 = 0 & (2) \end{cases}$

(2) devient : $y = -1$ et (1) donne $x^2 + (-1)^2 - 2x + 5 = 0$

Ou encore : $x^2 - 2x + 6 = 0$; $\Delta' = (-1)^2 - 6 = -5 < 0$ donc $S = \emptyset$

3) On pose $z = x + iy$. Donc :

$$2z - 3\bar{z} = 5 - 4i \iff 2(x + iy) - 3(x - iy) = 5 - 4i \iff -x - 5 + i(5y + 4) = 0$$

Ainsi : $\begin{cases} -x-5=0 \\ 5y+4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-5 \\ y=-\frac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow z=-5-\frac{4}{5}i$

Conclusion : $S=\left\{z=-5-\frac{4}{5}i\right\}$

Quatrième partie

1) L'équation $z^2+pz+q=0$ admet pour solutions $1+2i$ et $3-5i$ si et seulement si :

$$z^2+pz+q=(z-(1+2i))(z-(3-5i))$$

On a : $(z-(1+2i))(z-(3-5i))=z^2-(3-5i+1+2i)z+(1+2i)(3-5i)$

Donc : $(z-(1+2i))(z-(3-5i))=z^2+(-4+3i)z+13+i.$

Par identification, on obtient : $p=-4+3i \;;\; q=13+i$

2) a) On calcule le discriminant réduit : $\Delta'=(-3)^2-2\times 5=9-10=-1=i^2.$

Ainsi : $z_1=\frac{3-i}{2} \;;\; z_2=\frac{3+i}{2}$ et donc $S=\left\{\frac{3-i}{2}\;;\;\frac{3+i}{2}\right\}$

b) On pose $z=x+iy$. Donc :

$$3\bar{z}-2+6i-z=0 \Leftrightarrow 3(x-iy)-2+6i-(x+iy)=0 \Leftrightarrow (2x-2)+i(-4y+6)=0$$

Ainsi : $\begin{cases} 2x-2=0 \\ -4y+6=0 \end{cases}$ et donc $\begin{cases} x=1 \\ y=\frac{3}{2} \end{cases}$ et donc $z=1+\frac{3}{2}i$ d'où $S=\left\{1+\frac{3}{2}i\right\}$

c) On calcule le discriminant : $\Delta=(-5)^2-4\times 9=-11=\left(i\sqrt{11}\right)^2.$

Ainsi : $z_1=\frac{5-i\sqrt{11}}{2} \;;\; z_2=\frac{5+i\sqrt{11}}{2}$ et donc $S=\left\{\frac{5-i\sqrt{11}}{2}\;;\;\frac{5+i\sqrt{11}}{2}\right\}$

d) On fait un changement de variable $Z=z^2,\ Z\in\mathbb{C}.$

L'équation devient : $Z^2+Z-20=0$

On calcule le discriminant : $\Delta=1^2-4\times(-20)=81=9^2.$

Ainsi : $Z_1=\frac{-1-9}{2}=-5 \;;\; Z_2=\frac{-1+9}{2}=4.$

(i) Pour $Z_1=-5 \Rightarrow z^2=-5=\left(i\sqrt{5}\right)^2 \Rightarrow z=\pm i\sqrt{5}$

(ii) Pour $Z_2=4 \Rightarrow z^2=4=2^2 \Rightarrow z=\pm 2$

Donc : $S=\left\{-i\sqrt{5}\,;\,+i\sqrt{5}\,;\,+2\,;\,-2\right\}$

Cinquième partie

On obtient les solutions :

1) $S=\left\{e^{i\frac{2k\pi}{5}},\ 0\le k\le 4\right\}$

2) $S=\left\{\sqrt[7]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{21}+\frac{2k\pi}{7}\right)},\ 0\le k\le 6\right\}$

3) $S_1=\left\{\sqrt[6]{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)},\ 0\le k\le 2\right\}$ et $S_2=\left\{\sqrt[3]{3}e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right)},\ 0\le k\le 2\right\}$ et $S=S_1\cup S_2$.

4) $S=\left\{e^{i\frac{2k\pi}{5}},\ 0\le k\le 4\right\}$

5) $S=\left\{1-\sqrt{2}i,1+\sqrt{2}i\right\}$

6) $S=\left\{\frac{-1-i}{\sqrt{2}},\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right\}$

7) $S=\left\{2e^{ik\pi},\ 0\le k\le 1\right\}$

8) $S=\left\{\frac{-1-\sqrt{3}i}{2},\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right\}$

Sixième partie

1) On trouve : $S=\{-1-2i\ ;\ -1+2i\}$

2) On trouve : $S=\{i\}$

3) On trouve : $S=\{2+2i\ ;\ 2-4i\}$

4) On trouve : $S=\{i;\ -i;\ 2\}$

5) On trouve : $S=\{-i\ ;\ -3i\ ;\ 1-i\}$.

EXERCICE 12

Première partie

Soit $z_0=ib$ la solution imaginaire. Alors $(ib)^3-2(1+2i)(ib)^2+7i(ib)+3(1-3i)=0$

Ou encore : $-ib^3+2b^2+4ib^2-7b+3-9i=0$

Ou encore : $2b^2-7b+3+i(-b^3+4b^2-9)=0$

Ainsi : $\begin{cases}2b^2-7b+3=0 & (1)\\ -b^3+4b^2-9=0 & (2)\end{cases}$

En effet, $2b^2-7b+3=0 \implies b_1=3\ ;\ b_2=\frac{1}{2}$.

(i) Vérifions si $b_1=3$ vérifie la deuxième condition (2) : $-3^3+4\times 3^2-9=36-36=0$.

Donc $b_1=3$ vérifie bien les deux conditions (1) et (2).

(ii) Vérifions si $b_2=\frac{1}{2}$ vérifie la deuxième condition (2) : $-\left(\frac{1}{2}\right)^3+4\times\left(\frac{1}{2}\right)^2-9=-\frac{65}{8}\neq 0$.

Donc $b_2=\frac{1}{2}$ ne vérifie pas les deux conditions (1) et (2).

On conclut que $b = 3$. Ainsi $z_0 = 3i$.

On utilise la méthode de Hörner pour déterminer les autres solutions.

$$P(z) = z^3 - 2(1+2i)z^2 + 7iz + 3(1-3i).$$

	1	$-2-4i$	$7i$	$3-9i$
$3i$		$3i$	$3-6i$	$-3+9i$
	1	$-2-i$	$3+i$	0

On est donc amené à résoudre l'équation suivante : $z^2 + (-2-i)z + 3 + i = 0$.

On calcule le discriminant : $\Delta = (-2-i)^2 - 4(3+i) = -9 = (3i)^2$.

Ainsi : $z_1 = \frac{2+i-3i}{2} = 1 - i$; $z_2 = \frac{2+i+3i}{2} = 1 + 2i$

Conclusion : $S = \{3i\,;1-i\,;1+2i\}$

Deuxième partie

Soit $z_1 = ib \in i\mathbb{R}$ la solution imaginaire. Alors $(ib)^3 - (3+2i)(ib)^2 + (1+5i)(ib) + 2 - 2i = 0$

Ou encore : $-ib^3 + 3b^2 + 2ib^2 + ib - 5b + 2 - 2i = 0$

Ou encore : $3b^2 - 5b + 2 + i(-b^3 + 2b^2 + b - 2) = 0$

Ainsi : $\begin{cases} 3b^2 - 5b + 2 = 0 & (1) \\ -b^3 + 2b^2 + b - 2 = 0 & (2) \end{cases}$

En effet, $3b^2 - 5b + 2 = 0 \implies b_1 = 1\,;\ b_2 = \frac{2}{3}$.

(i) Vérifions si $b_1 = 1$ vérifie la deuxième condition (2) : $-1^3 + 2 \times 1^2 + 1 - 2 = 3 - 3 = 0$.

Donc $b_1 = 1$ vérifie bien les deux conditions (1) et (2).

(ii) Vérifions si $b_2 = \frac{2}{3}$ vérifie la deuxième condition (2) : $-\left(\frac{2}{3}\right)^3 + 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right) - 2 = -\frac{20}{27} \neq 0$.

Donc $b_2 = \frac{2}{3}$ ne vérifie pas les deux conditions (1) et (2).

On conclut que $b = 3$. Ainsi $z_1 = i$.

Déterminons maintenant $z_2 = a \in \mathbb{R}$

On utilise la méthode de Hörner pour déterminer les autres solutions.

$$z^3 - (3+2i)z^2 + (1+5i)z + 2 - 2i = 0$$

	1	$-3-2i$	$1+5i$	$2-2i$
i		i	$1-3i$	$-2+2i$
	1	$-3-i$	$2+2i$	0

On pose $z^2+(-3-i)z+2+2i=0$ et comme $z_2=a\in\mathbb{R}$ est solution de cette équation, on obtient : $a^2+(-3-i)a+2+2i=0$

On encore : $a^2-3a+2+i(2-a)=0$ et donc : $\begin{cases} a^2-3a+2=0 & (1) \\ 2-a=0 & (2) \end{cases}$

(2) donne $a=2$ et (1) devient : $2^2-3\times 2+2=6-6=0$.

Donc $z_2=2\in\mathbb{R}$ et comme $P=z_2z_3=2 \implies z_3=\frac{2}{2}=1$.

Conclusion : $S=\{i\,;2\,;1\}$

troisième partie

1/ Soit $z_1=ib\in i\mathbb{R}$ la solution imaginaire. Alors $(ib)^3+(2+i)(ib)^2+2(1+i)(ib)+2i=0$

On encore : $-ib^3-2b^2-ib^2+2ib-2b+2i=0$

On encore : $-2b^2-2b+i(-b^3-b^2+2b+2)=0$

Ainsi : $\begin{cases} -2b^2-2b=0 & (1) \\ -b^3-b^2+2b+2=0 & (2) \end{cases}$

(1) Donne $-2b^2-2b=0 \implies b_1=-1;\ \ b_2=0$.

(i) Vérifions si $b_1=-1$ vérifie la deuxième condition (2) : $-(-1)^3-(-1)^2+2\times(-1)+2=3-3=0$.

Donc $b_1=-1$ vérifie bien les deux conditions (1) et (2).

(ii) Vérifions si $b_2=0$ vérifie la deuxième condition (2) : $-(0)^3-(0)^2+2\times(0)+2=2\neq 0$.

Donc $b_2=0$ ne vérifie pas les deux conditions (1) et (2).

On conclut que $b=-1$. Ainsi $z_1=-i$.

2) On utilise la méthode de Hörner pour déterminer les autres solutions.

	1	$2+i$	$2+2i$	$2i$
$-i$		$-i$	$-2i$	$-2i$
	1	2	2	0

On pose : $z^2+2z+2=0$

On calcule le discriminant : $\Delta'=1^2-2=-1=i^2$.

Ainsi : $z_2=-1-i\ ;\ \ z_3=-1+i$

Conclusion : $S=\{-i\,;-1+i\,;-1-i\}$

EXERCICE 13

Les solutions de l'équation (1) sont les racines douzièmes de l'unité, c'est à dire $z_k = e^{i\frac{k\pi}{6}}$ avec $0 \leq k \leq 11$.

On a :

$$z_0 = 1 \; ; \; z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} = -z_7 = \overline{z_{11}} \; ; \; z_2 = e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = -z_8 = \overline{z_{10}} = -j^2$$

$$z_3 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i = \overline{z_9} \; ; \; z_4 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \overline{z_8} = -z_{10} = j \; ; \; z_5 = e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} = \overline{z_7} = -z_{11}$$

$1 + z^4 + z^8$ est la somme des premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison z^4.
La valeur $z^4 = 1$ ne vérifie pas l'équation (2) donc les racines quatrièmes de l'unité à savoir 1, −1, i et −i ne sont pas solutions de (2). On en déduit que $z^4 \neq 1$.

$$(2) \Leftrightarrow 1 + z^4 + (z^4)^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{(z^4)^3 - 1}{z^4 - 1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z^{12} = 1 \\ z^4 \neq 1 \end{cases}$$

Donc les solutions de l'équation (2) sont : $z_k = e^{i\frac{k\pi}{6}},\ k \in \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11\}$

EXERCICE 14

1) Les solutions sont les racines cubiques de l'unité soit les $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{3}}$ avec $0 \leqslant k \leqslant 2$.

$$z_0 = 1,\ \ z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2};\quad z_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Donc : $S = \left\{1,\ e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}}\right\}$

2) On trouve facilement : $\left(\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)^3 = -4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i$

3) L'équation (E) équivaut à : $u^3 = 1$, d'où d'après 1), $u = z_0$ ou $u = z_1$ ou $u = z_2$ .on en déduit que :

$z = z_0\left(\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)$ ou $z = z_1\left(\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)$ ou $z = z_2\left(\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)$

Les solutions de (E) sous forme exponentielle : $z'_0 = 2e^{-i\frac{\pi}{4}},\quad z'_1 = 2e^{i\frac{5\pi}{12}},\ \ z'_1 = 2e^{i\frac{13\pi}{12}}$

Solutions de (E) sous forme trigonométrique :

$z'_0 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right),\quad z'_1 = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right),\quad z'_2 = 2\left(\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)\right)$

Sous forme algébrique, on obtient : $z'_0 = \sqrt{2} - i\sqrt{2},\ z'_1 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2},\ z'_2 = \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

4) Ecriture trigonométrique de z_1' : $z_1' = \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

Ecriture algébrique de z_1' : $z_1' = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.

Par identification : $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$, $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

EXERCICE 15

1) a) $|Z| = 1$ donne : $\left|\frac{z-2}{z-i}\right| = 1 \Rightarrow |z-2| = |z-i| \Rightarrow |(x-2)+iy| = |x+i(y-1)|$

Donc : $|(x-2)+iy| = |x+i(y-1)| \Rightarrow (x-2)^2 + y^2 = x^2 + (y-1)^2$

En développant, on obtient : $-4x + 2y + 3 = 0$.

L'ensemble des points M tels que : $|Z| = 1$ est la droite d'équation $-4x + 2y + 3 = 0$

b) $|Z| = 2$ donne : $\left|\frac{z-2}{z-i}\right| = 2 \Rightarrow |z-2| = 2|z-i| \Rightarrow |(x-2)+iy| = 2|x+i(y-1)|$

Donc : $|(x-2)+iy| = 4|x+i(y-1)| \Rightarrow (x-2)^2 + y^2 = 4x^2 + 4(y-1)^2$

En développant, on obtient : $\left(x+\frac{2}{3}\right)^2 + \left(y-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{20}{9}$.

L'ensemble des points M tels que : $|Z| = 2$ est un cercle de centre $A\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\ \frac{4}{3}\end{pmatrix}$ et de rayon $\frac{2\sqrt{5}}{3}$.

2) $|z-1-i| = |z-3-2i|$ donne :

$|(x-1)+i(y-1)| = |(x-3)+i(y-2)| \Rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = (x-3)^2 + (y-2)^2$

En développant, on obtient : $4x + 2y - 11 = 0$

L'ensemble des points M tels que : $|z-1-i| = |z-3-2i|$ est la droite d'équation $4x + 2y - 11 = 0$

3) Déterminons l'ensemble des points M d'affixe z tels que : $|\bar{z}+5-i| = |z-4i|$. On a :

$|\bar{z}+5-i| = |z-4i| \Rightarrow |(x+5)+i(-y-1)| = |x+i(y-4)| \Rightarrow (x+5)^2 + (-y-1)^2$
$= x^2 + (y-4)^2$

En développant et en simplifiant, on obtient : $x + y + 1 = 0$.

L'ensemble des points M tels que : $|\bar{z}+5-i| = |z-4i|$ est droite d'équation $x + y + 1 = 0$

4) On a :

$$f(\theta) = \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{1 - i\tan\theta} = \frac{e^{i\theta}}{\dfrac{\cos\theta - i\sin\theta}{\cos\theta}} = \frac{e^{i\theta}}{\dfrac{e^{-i\theta}}{\cos\theta}} = e^{2i\theta}\cos\theta \Rightarrow |f(\theta)| = |e^{2i\theta}\cos\theta| = |e^{2i\theta}| \times |\cos\theta|$$

Ainsi : $|f(\theta)| = |\cos\theta|$

5) On pose $z = x + iy$

$$|z| = \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} \Rightarrow |z|^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1 \quad (1)$$

$$|z| = |z - 1| \Rightarrow x^2 + y^2 = (x-1)^2 + y^2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

En remplaçant la valeur de x dans (1), on obtient : $y = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

On trouve alors deux complexes : $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2 = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

EXERCICE 16

1) $\theta \neq 2k\pi$ si et seulement si $u \neq 1$.

$$C + iS = \sum_{k=0}^{n}\cos k\theta + i\sum_{k=0}^{n}\sin k\theta = \sum_{k=0}^{n}(\cos k\theta + i\sin k\theta) = \sum_{k=0}^{n}(e^{i\theta})^k = \sum_{k=0}^{n}u^k \quad (1)$$

2) (1) est la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $u \neq$

1. Donc :

$$C + iS = 1 + \cdots + u^n = \frac{u^{n+1} - 1}{u - 1} = \frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} = \frac{e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}}\left(e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}} - e^{-i\frac{(n+1)\theta}{2}}\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)} = e^{i\frac{n\theta}{2}}\frac{\sin\left[\frac{(n+1)\theta}{2}\right]}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sin\left[\frac{(n+1)\theta}{2}\right]}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\cdot\cos\frac{n\theta}{2} + i\frac{\sin\left[\frac{(n+1)\theta}{2}\right]}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\cdot\sin\frac{n\theta}{2}$$

3) On a :

$$C + iS = \frac{\sin\left[\frac{(n+1)\theta}{2}\right]}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\cdot\cos\frac{n\theta}{2} + i\frac{\sin\left[\frac{(n+1)\theta}{2}\right]}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\cdot\sin\frac{n\theta}{2}$$

Par identification, on obtient :

$$C = \frac{\sin\left[\frac{(n+1)\theta}{2}\right]\cdot\cos\frac{n\theta}{2}}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \quad ; \quad S = \frac{\sin\left[\frac{(n+1)\theta}{2}\right]\cdot\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

EXERCICE 18

1) En effet, $z_1 = (1+i)z_0 + 2i = -1+3i$ et $z_2 = (1+i)z_1 + 2i = -4+4i$

2) a) Comme $U_{n+1} = z_{n+1} + 2$ donc : $U_{n+1} = (1+i)z_n + 2i = (1+i)(z_n+2)$

Comme $U_{n+1} = (1+i)U_n$ donc (U_n) est une suite géométrique de raison $(1+i)$.

Ainsi : $U_n = (1+i)^n U_0 = (1+i)^n(z_0+2) = (1+i)^n(2+i)$. Donc $U_n = (1+i)^n(2+i)$

b) En effet : $z_n = U_n - 2 = (1+i)(2+i)^n - 2$

On a :

$$Z = \frac{z_{n+1}-i}{z_n+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i} = \frac{(1+i)z_n+i}{z_n+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i} = \frac{(1+i)\left(z_n+\frac{i}{1+i}\right)}{z_n+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i} = \frac{(1+i)\left(z_n+z_n+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)}{z_n+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i} = 1+i$$

D'où : $Z = 1+i$. Par conséquent :

$$|Z| = \frac{AM_{n+1}}{BM_n} = \left|\frac{z_{n+1}-i}{z_n+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i}\right| = |1+i| = \sqrt{2}$$

et $\left(\widehat{\overrightarrow{BM_n}, \overrightarrow{AM_{n+1}}}\right) = \arg Z = \arg(1+i) = \frac{\pi}{4}(2\pi)$. Ainsi : $|Z| = \sqrt{2}$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{BM_n}, \overrightarrow{AM_{n+1}}}\right) = \frac{\pi}{4}(2\pi)$

EXERCICE 20

1) On a :

$$\frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{\left(\frac{1}{2}i\right)^{n+1}(1+i\sqrt{3})}{\left(\frac{1}{2}i\right)^{n}(1+i\sqrt{3})} = \frac{1}{2}i \Rightarrow z_{n+1} = \frac{1}{2}iz_n \ ; \ z_0 = \left(\frac{1}{2}i\right)^0(1+i\sqrt{3}) = 1+i\sqrt{3}$$

Donc (z_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}i$ et de premier terme $z_0 = 1+i\sqrt{3}$.

Ainsi : $z_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n(1+i\sqrt{3})$

On a :

$$|z_0| = |1+i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} = 2 \Rightarrow z_0 = 2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

Forme algébrique de z_1 : $z_1 = \frac{1}{2}iz_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

Forme trigonométrique de z_1 : $z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

CE $\Sigma\pi\int$

Ainsi : $z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

Forme algébrique de z_2 : $z_2 = \frac{1}{2}iz_1 = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i = \frac{1}{2}e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)}$

Forme trigonométrique de z_2 : $z_2 = \frac{1}{2}e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)} = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$

Ainsi : $z_2 = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$

Forme algébrique de z_3 : $z_3 = \frac{1}{2}iz_2 = \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{8}i = \frac{1}{4}e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$

Forme trigonométrique de z_3 : $z_3 = \frac{1}{4}e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{4}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

Ainsi : $z_3 = \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{8}i = \frac{1}{4}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

Forme algébrique de z_4 : $z_4 = \frac{1}{2}iz_3 = \frac{1}{16} + \frac{\sqrt{3}}{16}i = \frac{1}{8}e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}$

Forme trigonométrique de z_4 : $z_4 = \frac{1}{8}e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{8}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

Ainsi : $z_4 = \frac{1}{16} + \frac{\sqrt{3}}{16}i = \frac{1}{8}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

3) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad OM_n = |z_n| = \left|\left(\frac{1}{2}i\right)^n(1 + i\sqrt{3})\right| = \left|\left(\frac{1}{2}i\right)^n\right| \times |1 + i\sqrt{3}| = \left|\frac{1}{2}\right|^n \times 1 = \left|\frac{1}{2}\right|^n = \frac{1}{2^n}$$

En unité de longueur, on a : $OM_n = \frac{1}{2^{n-1}}$

Donc $OM_n = 4 \times \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-3}}$ (cm)

4) a) On a (en unité de longueur) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M_nM_{n+1} = |z_{n+1} - z_n| = \left|\frac{1}{2}iz_n - z_n\right| = |z_n| \times \left|\frac{1}{2}i - 1\right| = \frac{1}{2^{n-1}} \times \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2^n}$$

Ainsi : $M_nM_{n+1} = \frac{\sqrt{5}}{2^n}$

b) L_n est donc la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ de premier terme $M_0M_1 = L_0 = \sqrt{5}$ et de dernier terme $M_nM_{n+1} = \frac{\sqrt{5}}{2^n}$. Donc :

$$L_n = \sqrt{5} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2\sqrt{5} - \frac{\sqrt{5}}{2^n} \; ; \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{5}}{2^n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} L_n = 2\sqrt{5}$$

Ainsi : $L_n = 2\sqrt{5} - \frac{\sqrt{5}}{2^n}$ et $\lim_{n\to+\infty} L_n = 2\sqrt{5}$

5) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (\overrightarrow{OM_0} ; \overrightarrow{OM_n}) = \arg\left(\frac{z_n - 0}{z_0 - 0}\right)(2\pi) = \arg\left(\left(\frac{1}{2}i\right)^n\right)(2\pi) = n\arg\left(\frac{1}{2}i\right)(2\pi) = n \times \frac{\pi}{2}(2\pi)$$

Ainsi : $(\overrightarrow{OM_0} ; \overrightarrow{OM_n}) = n \times \frac{\pi}{2}(2\pi)$

O, M_0 et M_n sont alignés si et seulement si $(\overrightarrow{OM_0} ; \overrightarrow{OM_n}) = 0(\pi)$

Ou encore si : $n \times \frac{\pi}{2}(2\pi) = 0(\pi)$ et donc $n = 2k$.

Ainsi O, M_0 et M_n sont alignés si et seulement si n est un entier impair.

EXERCICE 14

1) S est l'homothétie de centre $A(2 ; -1)$ et de rapport -4.

2) S est la rotation de centre $A(0 ; -2-\sqrt{2})$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

6) C'est une similitude directe f de rapport $|1+i| = \sqrt{2}$ et d'angle $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$.

Le centre de f est le point dont l'affixe ω vérifie $\omega = (1+i)\omega + 2 - i$.

On trouve $\omega = 1 + 2i$. f est donc la composée de l'homothétie de centre Ω (1, 2) de rapport $\sqrt{2}$, et de la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

7) C'est une similitude indirecte f, de rapport $|-3+4i| = 5$.

Comme le rapport est différent de 1, il y a un point fixe unique Ω, d'affixe ω.

$$\omega = (-3+4i)\overline{(-3+4i)\bar{z} + 12 + 6i} + 12 + 6i = 25z + 72i$$

Le point fixe est donc donné par : $\omega = -3i$.

L'égalité $Z = (-3+4i)\bar{z} + 12 + 6i$ devient $\begin{cases} Z = (-3+4i)\bar{z} + 12 + 6i \\ \omega = (-3+4i)\bar{\omega} + 12 + 6i \end{cases}$

Autrement dit, Z est donné par $Z - \omega = (-3+4i)(\overline{z-\omega})$.

L'application f est la composée de l'homothétie h de centre Ω (0 ; −3) de rapport 5, et de la symétrie orthogonale par rapport à une droite Δ passant par Ω.

CE $\Sigma\pi\int$

Pour trouver Δ, on cherche les points qui ne sont affectés que par l'homothétie.

On résout $Z - \omega = 5(z - \omega)$, c'est-à-dire $(-3 + 4i)(\bar{z} - 3i) = 5(z - 3i)$

En posant $z = x + iy$, il vient $(-3 + 4i)(x - i(y + 3)) = 5x + 5(y + 3)i$.

Par identification, on trouve $y = 2x - 3$.

Ainsi f est la composée de l'homothétie h et de la symétrie orthogonale par rapport à la droite Δ d'équation $y = 2x - 3$ (on vérifie que Δ passe par le point Ω).

s) C'est une similitude indirecte f de rapport $|i| = 1$, donc un antidéplacement.

L'application f est la composée commutative de la symétrie orthogonale s par rapport à une droite Δ et d'une translation t de vecteur u parallèle à Δ.

On trouve u en notant que fof est la translation de vecteur $2u$.

Or $f(f(z)) = i(\overline{iz + 1}) + 1 = z + 1 + i$: la translation t est de vecteur $\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$.

Pour trouver Δ, on cherche les points qui ne sont affectés que par la translation t.

On résout donc $f(z) = z + \frac{1+i}{2}$ c'est-à-dire $i\bar{z} + 1 = z + \frac{1+i}{2}$.

En posant $z = x - iy$, on trouve $2(y + 1 + ix) = 2x + 1 + i(2y + 1)$ donc $y = x - \frac{1}{2}$.

L'application f est la composée commutative de la symétrie orthogonale s par rapport à la droite (Δ) d'équation $y = x - \frac{1}{2}$, et de la translation t de vecteur $u = \left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$.

EXERCICE 25

1) Il existe un couple unique $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que la transformation de $\mathbb{C}$ associée à S soit définie par :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad z' = az + b$$

Le centre de S est le point d'affixe $\dfrac{b}{1-a}$, le rapport est égal à $|a|$ et l'angle à $\arg a$.

D'où :

$$a = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 1 + i$$

$$\frac{b}{1-(1+i)} = 1 + i \quad \Rightarrow \quad b = 1 - i$$

Donc : $\underline{z' = (1 + i)z + 1 - i}$

2) R est la similitude de centre le point d'affixe $\frac{2}{1-i}$ de rapport $|i|$ et d'angle $\arg i$.

R est la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

g) Soit m un point d'affixe z, m' son transformé par S, m'' le transformé de m' par R :

$$z' = (1+i)z + 1 - i \ , \ z'' = iz' + 2 \implies z'' = (-1+i)z + i + 3$$

Soit est donc la similitude de centre le point d'affixe $\dfrac{3+i}{1-(-1+i)}$ de rapport $|-1+i|$ et d'angle $\arg(-1+i)$.

Soit est la similitude de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{3\pi}{4}$.

EXERCICE 26

1) a) z_1 est solution réelle de (E) si et seulement si : $\begin{cases} z_1^3 - 5z_1^2 + 6z_1 = 0 \\ -3z_1^2 + 11z_1 - 10 = 0 \end{cases}$ d'où $z_1 = 2$.

b) (E) est équivalent à : $(z-2)[z^2 - (3+3i)z + 5i] = 0$.

Discriminant : $\Delta = -2i = (1-i)^2 \implies \underline{S = \{z_1 = 2 \ ; \ z_2 = 2+i \ ; \ z_3 = 1+2i\}}$

2) a) L'affixe du barycentre est $Z = 2z_1 - 2z_2 + z_3$ donc $Z = 1$. Le barycentre est donc le point d'affixe 1.

b) On a : $k = \frac{BC}{BA} = \frac{|z_3 - z_2|}{|z_2 - z_1|} = |1+i| = \sqrt{2}$ et $\theta = \text{mes}(\overrightarrow{AB} \ ; \ \overrightarrow{BC}) = \arg\left(\frac{z_3 - z_2}{z_2 - z_1}\right) = \arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$.

S étant le centre de la similitude directe on doit donc avoir SAB isocèle rectangle et le triplet (S, A, B) direct

on vérifie que $\underline{\text{mes}(\overrightarrow{IA} \ ; \ \overrightarrow{IB}) = \frac{\pi}{4}}$ et que $\underline{\frac{IB}{IA} = \sqrt{2}}$

c) On a : $Z_{C'} = (1+i)z_3 - i = -1 + 2i = -1 + 2i$. Donc C'(—1 ; 2).

d) S étant une application affine conserve le barycentre. I est barycentre de (A ; 2), (B ; —2), (C ; 1) donc S(I) = I est barycentre de (B ; 2), (C ; —2), (C' ; 1).

EXERCICE 28

1) Soit z l'affixe de point M de z' l'affixe du point M' dans le plan complexe.

On a : $z' = az + b$ avec $|a| = 2$ et $\arg(\alpha) = \frac{\pi}{2}$.

Donc : $z' = 2e^{i\frac{\pi}{2}}z + b$ et $\dfrac{b}{1-2i} = 2 - 2i$ ou encore $b = -2 - 6i$.

On obtient alors : $z' = 2iz - 2 - 6i$.

Par ailleurs, $x' + iy' = 2i(x+iy) - 2 - 6i$ d'où $\underline{x' = -2y - 2, \ y = 2x - 6}$

CE $\Sigma\pi\int$

2) H est l'homothétie de centre I(0, 2) et de rapport $\frac{1}{2}$. D'où : $\begin{cases} x_1' = \frac{1}{2}x_1 \\ y_1' = 2 + \frac{1}{2}(y_1 - 2) \end{cases}$ et $\begin{cases} x_1' = \frac{1}{2}x_1 \\ y_1' = \frac{1}{2}y_1 + 1 \end{cases}$

$$z_1' = x_1' + iy_1' = \frac{1}{2}x_1 + i\left(\frac{1}{2}y_1 + 1\right) = \frac{1}{2}(x_1 + y_1) + i = \frac{1}{2}z_1 + i$$

Ainsi : $\underline{z_1' = \frac{1}{2}z_1 + i}$

3) Transformation HoS

Cherchons le transformé M'' d'un point M(x, y) par HoS.

Soit M' le transformé de M par S. On a alors, si z est l'affixe de M et z' l'affixe de M' : $z' = 2iz - 2 - 6i$

Soit z'' l'affixe de M'' transformé de M' par H : $z'' = \frac{1}{2}z' + i$

D'où : $z'' = \frac{1}{2}z' + i = \frac{1}{2}(2iz - 2 - 6i) + i = iz - 1 - 3i$

La transformation HoS est donc une similitude de rapport $|i| = 1$, d'angle $\frac{\pi}{2}$, de centre le point d'affixe $\frac{-1-3i}{1-i}$, c'est-à-dire le point d'affixe $1 - 2i$.

La transformation HoS est donc la rotation de centre le point de coordonnées $(1, -2)$, d'angle $\frac{\pi}{2}$.

EXERCICE 29

1) Le vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM_1}$ ont respectivement pour affixes z et z_1.

$OM = OM_1$, donc $|z| = |z_1|$. De plus, $\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM_1}}\right) = \text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}}\right) + \frac{\pi}{4}$, c'est-à-dire , $\arg z_1 = \arg z + \frac{\pi}{4}$.
Le nombre complexe z apparait comme le produit de z par le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{4}$; ce nombre complexe est alors : $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ donc $\underline{z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)z}$

2) Les vecteurs $\overrightarrow{\Omega M}$ et $\overrightarrow{\Omega M_2}$ ont respectivement pour affixes $z - 2(1+i)$ et $z_2 - 2(1+i)$. $\Omega M = \Omega M_2$ donc $|z - 2(1+i)| = |z_2 - 2(1+i)|$. De plus, l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M_2}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{\Omega M_2}}\right) - \left(\widehat{\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{\Omega M}}\right)$ a pour mesure $-\frac{\pi}{4}$; $\left(\widehat{\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{\Omega M_2}}\right)$ représente $\arg(z_2 - 2(1+i))$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{\Omega M}}\right)$ représente $\arg(z - 2(1+i))$; on a alors :

$$\arg(z_2 - 2(1+i)) = \arg(z - 2(1+i)) - \frac{\pi}{4}$$

L'affixe de $\overrightarrow{\Omega M_2}$ est le produit de celle de $\overrightarrow{\Omega M}$ par le nombre complexe de module 1 et d'argument $-\frac{\pi}{4}$; ce nombre complexe est $\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$.

$$z_2 - 2(1+i) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)(z-2(1+i))$$

Soit : $\underline{z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)z + 2(1-\sqrt{2}+i)}$

5) $R_2 o R_1(M)$ a pour affixe :

$$z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)z_1 + 2(1-\sqrt{2}+i)$$

Soit

$$z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)z + 2(1-\sqrt{2}+i)$$

On trouve finalement : $\underline{z_3 = z + 2(1-\sqrt{2}+i)}$

$R_2 o R_1(M)$ est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $2(1-\sqrt{2}+i)$.

EXERCICE 30

1) En posant $z = x + iy$, avec x et y réels, on a :

$$\bar{z} - 3iz - 3 + 6i = 0 \Leftrightarrow x - iy - 3ix + 3y - 3 + 6i = 0 \Leftrightarrow (x+3y-3) + i(-3x-y+6) = 0$$

Ainsi : $\begin{cases} x+3y-3=0 \\ -3x-y+6=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{15}{8} \\ y = \frac{3}{8} \end{cases} \Rightarrow \underline{S = \left\{\frac{15}{8} + \frac{3}{8}i\right\}}$

2) OAB est équilatéral direct, donc B est l'image de A dans la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. L'écriture complexe de cette rotation est $\underline{z' = ze^{i\frac{\pi}{3}}}$

Donc : $z_B = z_A e^{i\frac{\pi}{3}} = (4-2i)\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 + \sqrt{3} + i(2\sqrt{3}-1)$. Ainsi $\underline{z_B = 2 + \sqrt{3} + i(2\sqrt{3}-1)}$

3) L'égalité $\arg(z-2i) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ signifie que $(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{DM}) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$: c'est donc la droite privée du point D contenant D et ayant une pente de 1.

b) On a : $z = 2i + 2e^{i\theta} \Leftrightarrow z - 2i = 2e^{i\theta} \Leftrightarrow |z-2i| = |2e^{i\theta}| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} DM = 2 \\ (\vec{u}\,;\,\overrightarrow{DM}) = \theta + 2k\pi \end{cases}$

L'ensemble de ces points M est donc le cercle de centre D et de rayon 2.

CE $\sum\pi\int$

+) On a : $|z'| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z-1}{\bar{z}+2}\right| = 1 \Leftrightarrow |z-1| = |\bar{z}+2|$

Or $\bar{z}$ et z sont les affixes de points symétriques autour de $(O, \vec{u})$ et le point B d'affixe -2 appartient à cet axe $(O, \vec{u})$ donc $|\bar{z}+2| = |z+2|$.

L'équation devient $|z-1| = |z+2|$, qui signifie si on appelle C le point d'affixe 1, BM = CM ou encore M appartient à la médiatrice de [BC].

EXERCICE 32

1) a) M_1 est l'image de M par la rotation de centre O d'angle $\frac{\pi}{3}$, on a alors $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}z$ de plus M' est l'image de M_1 par la translation de vecteur $-\vec{u}$ d'affixe -1, d'où $z' = z_1 - 1$.

On a alors $\underline{z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z - 1}$

b) B a pour affixe $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ l'affixe de l'image de B par T est notée b'.

On obtient : $b' = e^{i\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 1 = 0$. Donc l'image de B par T est le point O.

c) On résout $z = e^{i\frac{\pi}{3}}z - 1 \Leftrightarrow \underline{z = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}$

2) On pose $z = x + iy$, avec x et y réels

a) On a :

$$z \neq 0, \quad \frac{z'}{z} = \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}z - 1}{z} = e^{i\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{z} = e^{i\frac{\pi}{3}} - \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

D'où

$$\frac{z'}{z} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 + y^2 - 2x}{2(x^2 + y^2)} + i\frac{\sqrt{3}(x^2 + y^2) + 2y}{2(x^2 + y^2)}$$

Donc $\underline{\mathrm{Re}\left(\frac{z'}{z}\right) = \frac{x^2+y^2-2x}{2(x^2+y^2)}}$

b) Pour que OMM' soit un triangle, il faut que :

(i) $M \neq O$, c'est-à-dire $z \neq 0$.

(ii) $M \neq M'$, c'est-à-dire $z \neq -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(iii) $M' \neq O$, on résout alors $z' = 0 \Leftrightarrow e^{i\frac{\pi}{3}}z - 1 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Il faut donc $z \neq \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, c'est-à-dire M ≠ B.

De plus, lorsque M ≠ O, M ≠ M' et M ≠ B, OMM' est un triangle rectangle si et seulement si $\arg\left(\frac{z'}{z}\right) = \frac{\pi}{2}$ modπ ce qui équivaut à $\frac{z'}{z}$ est un imaginaire pur.

Ainsi $\mathrm{Re}\left(\frac{z'}{z}\right) = 0 \iff x^2 + y^2 - 2x = 0 \iff (x-1)^2 + y^2 = 0$

On obtient l'équation d'un cercle de centre le point A d'affixe 1 et de rayon 1.

O appartient à ce cercle : $\left|-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right| = 3 \neq 1$

Donc le point d'affixe $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ n'est pas sur ce cercle.

$\left|\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right| = 1$ et le point B est sur ce cercle.

Donc l'ensemble cherché est le cercle de centre A et de rayon 1 privé des points O et B.

3) On pose $z = 1 + i$.

a) M ≠ O et M ≠ B, de plus $AM = |z - 1| = |i| = 1$ qui est le rayon du cercle. Donc M appartient bien à (E).

De plus $z' = e^{i\frac{\pi}{4}}(1+i) - 1 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}(-1+i)$. On peut alors placer le point M'.

b) On a : $|z'| = \frac{1+\sqrt{3}}{2}|-1+i| = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. Ainsi $\underline{|z'| = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}$

c) On a alors :

$$\text{Aire}(OMM') = \frac{OM \times OM'}{2} \times 4^2 = \sqrt{2} \times \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \times 8 = 8(1+\sqrt{3})$$

Donc l'aire en cm² du triangle est de $8(1+\sqrt{3})$.

EXERCICE 33

1) On calcule le discriminant : $\Delta = -4 = (2i)^2$ d'où les deux racines conjuguées $a = \sqrt{3} + i$ et $b = \sqrt{3} - i$.

On a : $|a| = |b| = 2$ et $\arg a = -\arg b = \frac{\pi}{6}$. On en déduit $\underline{a = 2e^{i\frac{\pi}{6}}}$ et $\underline{b = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}}$

2) La rotation r est caractérisée par : $z' = e^{i\frac{\pi}{6}}z$ d'où $a' = e^{i\frac{\pi}{6}} \times 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i$.

Donc $\underline{a' = 2i}$

3) L'homothétie h est caractérisée par : $z' = -\frac{3}{2}z$ d'où $b' = -\frac{3}{2} \times 2e^{-i\frac{\pi}{6}} = -3e^{-i\frac{\pi}{6}}$. Donc $\underline{b' = -3e^{-i\frac{\pi}{6}}}$

4) a) Le cercle a pour rayon $R^2 = OC = |c| = c\bar{c}^2$. Ainsi $\underline{c\bar{c} = R^2}$

CE $\Sigma\pi\int$

A' a pour affixe $2i$ et A'C est un rayon du cercle donc $A'C = |c - 2i|$.

Par suite, $|c - 2i|^2 = (c - 2i)\overline{(c - 2i)} = R^2$. Or $\overline{c - 2i} = \bar{c} + 2i$. Soit $(c - 2i)(\bar{c} + 2i) = R^2$.

La troisième égalité s'écrit $(c - b')(\bar{c} - \bar{b'}) = R^2$. Elle exprime de façon analogue à la deuxième que le cercle a pour rayon $CB' = |c - b'|$ et par suite $|c - b'|^2 = (c - b')\overline{(c - b')} = R^2$. Ainsi $\underline{(c - 2i)(\bar{c} + 2i) = R^2}$

b) Le développement de la deuxième égalité et l'utilisation de la première conduit à $2i(c - \bar{c}) + 4 = 0$. Donc $c - \bar{c} = 2i$.

Le développement de la troisième égalité et l'utilisation de la première et de l'égalité $c - \bar{c} = 2i$ conduit à $c + \bar{c} = -\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

c) Des égalités $c + \bar{c} = -\frac{4\sqrt{3}}{3}$ et $c - \bar{c} = 2i$ on déduit par somme membre à membre $2c = -\frac{4\sqrt{3}}{3} + 2i$ d'où $c = -\frac{2\sqrt{3}}{3} + i$ et $R = \sqrt{c\bar{c}} = \sqrt{\frac{21}{9}} = \frac{\sqrt{21}}{3}$. Ainsi $\underline{\left(c + \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right) = R^2}$ et $\underline{\left(\bar{c} + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\right) = R^2}$

EXERCICE 34

1) Le point E est l'image du point D par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Donc :

$$z_E = z_A + e^{i\frac{\pi}{3}}(z_D - z_A) = i + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1 - i) = i + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1 + i)$$

Donc : $\underline{z_E = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1 + i)}$

2) On a :

$$z_{D'} = \frac{2z_D - i}{iz_D + 1} = \frac{2 - i}{1 + i} = \frac{(2 - i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{1 - 3i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$$

Ainsi : $\underline{z_{D'} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i}$

3) a) Soit z un nombre complexe différent de i. On a :

$$(z' + 2i)(z - i) = \left(\frac{2z - i}{iz + 1} + 2i\right)(z - i) = \left(\frac{2z - i - 2z + 2i}{iz + 1}\right)(z - i) = \frac{i(z - i)}{iz + 1} = \frac{iz + 1}{iz + 1} = 1$$

Ainsi : $\underline{(z' + 2i)(z - i) = 1}$

b) Soient z un nombre complexe différent de i puis M le point d'affixe z. On a :

$$BM' \times AM = |z' - z_B| \times |z - z_A| = |z' + 2i| \times |z - i| = |(z' + 2i)(z - i)| = |1| = 1$$

Par ailleurs,

$$(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{BM'}) = \arg(z_{\overrightarrow{BM'}}) + 2k\pi = \arg(z' + 2i) + 2k\pi = \arg\left(\frac{1}{z-i}\right) + 2k\pi = -\arg(-i) + 2k\pi$$
$$= -\arg(z_{\overrightarrow{AM}}) + 2k\pi = -(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{AM}) + 2k\pi$$

Ainsi : $\underline{(z' + 2i)(z - i) = 1}$ et $\underline{(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{BM'}) = -(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{AM}) + 2k\pi}$

4) a) Puisque le triangle ADE est équilatéral, on a :

$$AE = AD = |z_D - z_A| = |1 - i| = \sqrt{2}$$

Les points D et E sont sur le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.

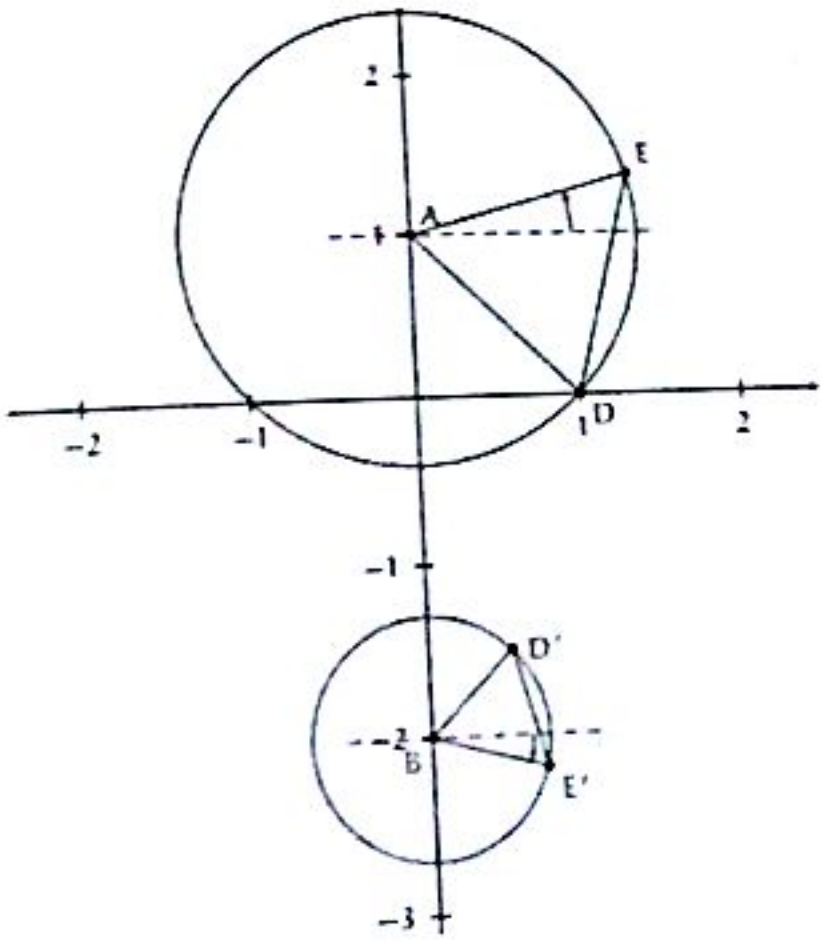
b) On a : $BE' \times AE = 1 \implies BE' = \frac{1}{AE} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Le point E' est sur le cercle de centre B et de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ensuite, $(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{BE'}) = -(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{AE}) + 2k\pi$. On en déduit une construction du point E'.

5) On a :

$$(\overrightarrow{BD}\,;\,\overrightarrow{BE'}) = (\vec{u}\,;\,\overrightarrow{BE'}) - (\vec{u}\,;\,\overrightarrow{BD'}) = -(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{AE}) + (\vec{u}\,;\,\overrightarrow{AD}) = -(\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AE}) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Par suite, le triangle BD'E' est équilatéral indirect.



EXERCICE 35

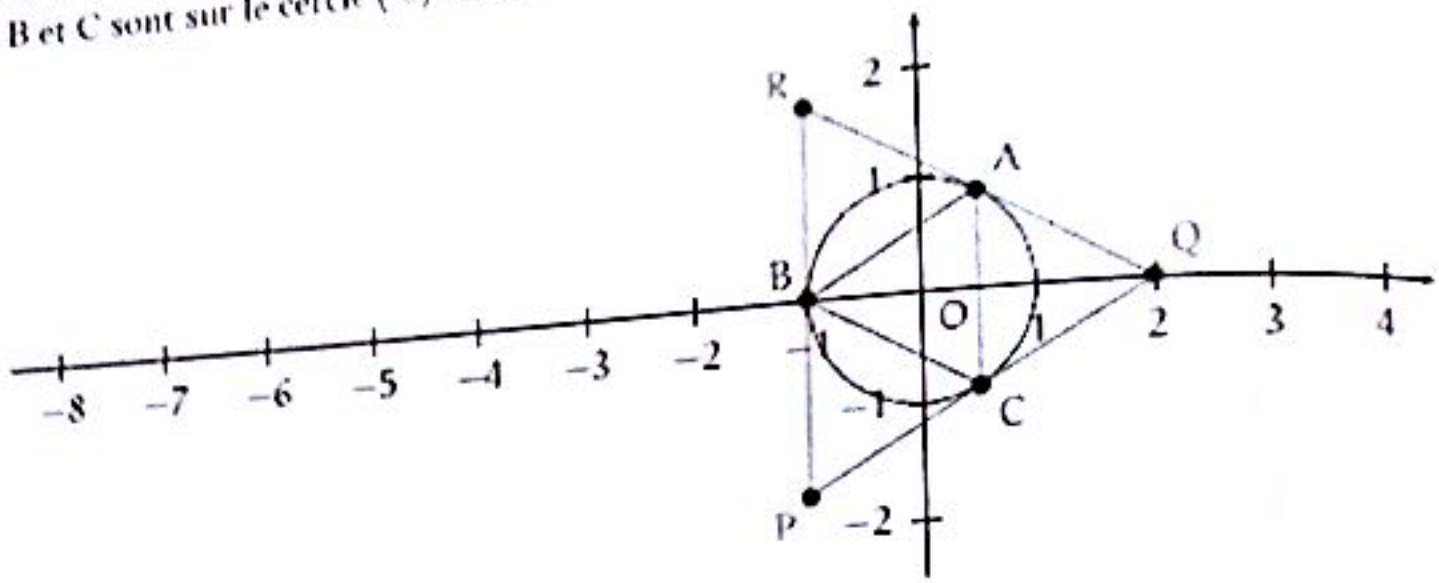
1) Soit θ un réel. L'expression complexe de la rotation de centre O et d'angle θ est $z' = e^{i\theta}$.

Donc : $z_B = e^{i\frac{2\pi}{3}} z_A = e^{i\frac{2\pi}{3}} \times e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$. Ainsi $\underline{z_B = -1}$

Et $z_C = e^{i\frac{2\pi}{3}} z_B = e^{i\frac{2\pi}{3}} \times e^{i\pi} = e^{i\frac{5\pi}{3}} = e^{-i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

CE $\Sigma\pi\int$

2) a) On sait que pour tout réel θ, $|e^{i\theta}| = 1$. Donc $|z_A| = |z_B| = |z_C| = 1$ ou encore $OA = OB = OC = 1$. Donc A, B et C sont sur le cercle $(\mathscr{C})$ ou encore $(\mathscr{C})$ est le cercle circonscrit au triangle ABC.



b) Puisque $B = r_{(O;\frac{2\pi}{3})}(A)$ et $C = r_{(O;\frac{2\pi}{3})}(B)$, les trois triangles OAB, OBC et OCA sont isocèles en O, d'angle au sommet $\frac{2\pi}{3}$. Donc les 6 angles $\widehat{BAO}, \widehat{ABO}, \widehat{CAO}, \widehat{ACO}, \widehat{BCO}$ et $\widehat{CBO}$ sont tous égaux à $\frac{\pi}{3}$. Mais alors, les trois angles $\widehat{BAC}, \widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ sont égaux à $\frac{\pi}{3}$ et par suite le triangle ABC est équilatéral.

3) a) Voir figure ci-dessus.
b) L'image d'un triangle équilatéral par une homothétie est un triangle équilatéral et donc le triangle PQR est équilatéral.

4) a) Soit $k \in \mathbb{R}$. L'écriture complexe de l'homothétie de centre O et de rapport k est $z' = kz$. Ici, $k = -2$ et donc l'écriture complexe de h est $\underline{z' = -2z}$.

b) Le triangle ABC est équilatéral de centre O. En particulier, O est le centre de gravité du triangle ABC. On en déduit que $\frac{z_A+z_B+z_C}{3} = 0$ et donc $\underline{z_A + z_B + z_C = 0}$.

Maintenant, d'après la question a), on a : $z_Q = -2z_B$ et $z_R = -2z_C$. Par suite,

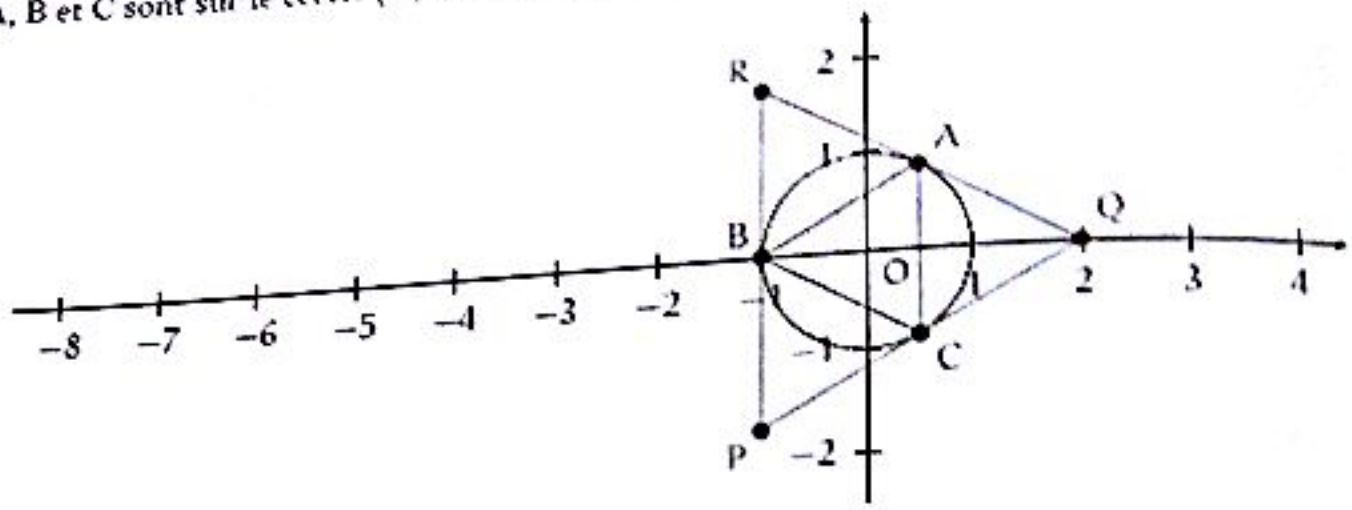
$$\frac{z_Q + z_R}{2} = \frac{-2z_B - 2z_C}{2} = -z_B - z_C = z_A$$

Donc A est le milieu du segment [QR].

c) Par suite, le droite (AP) est la médiane issue de P du triangle équilatéral PQR. On en déduit que la droite (AP) est aussi la médiatrice du segment [QR] et en particulier que la droite (AP) est perpendiculaire à la droite (QR). Maintenant, puisque $P = h(A)$, les points P, O et A sont alignés et donc la droite (AP) est encore la droite (OA).

En résumé, le rayon [OA] est perpendiculaire en A à la droite (QR) et on sait alors que la droite (QR) est tangente au cercle $(\mathscr{C})$ en A.

2) a) On sait que pour tout réel θ, $|e^{i\theta}| = 1$. Donc $|z_A| = |z_B| = |z_C| = 1$ ou encore $OA = OB = OC = 1$. Donc A, B et C sont sur le cercle $(\mathscr{C})$ ou encore $(\mathscr{C})$ est le cercle circonscrit au triangle ABC.



b) Puisque $B = r_{(O;\frac{2\pi}{3})}(A)$ et $C = r_{(O;\frac{2\pi}{3})}(B)$, les trois triangles OAB, OBC et OCA sont isocèles en O, d'angle au sommet $\frac{2\pi}{3}$. Donc les 6 angles $\widehat{BAO}, \widehat{ABO}, \widehat{CAO}, \widehat{ACO}, \widehat{BCO}$ et $\widehat{CBO}$ sont tous égaux à $\frac{\pi}{3}$. Mais alors, les trois angles $\widehat{BAC}, \widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ sont égaux à $\frac{\pi}{3}$ et par suite le triangle ABC est équilatéral.

3) a) Voir figure ci-dessus.
b) L'image d'un triangle équilatéral par une homothétie est un triangle équilatéral et donc le triangle PQR est équilatéral.

4) a) Soit $k \in \mathbb{R}$. L'écriture complexe de l'homothétie de centre O et de rapport k est $z' = kz$. Ici, $k = -2$ et donc l'écriture complexe de h est $\underline{z' = -2z}$.

b) Le triangle ABC est équilatéral de centre O. En particulier, O est le centre de gravité du triangle ABC. On en déduit que $\frac{z_A+z_B+z_C}{3} = 0$ et donc $\underline{z_A + z_B + z_C = 0}$.

Maintenant, d'après la question a), on a : $z_Q = -2z_B$ et $z_R = -2z_C$. Par suite,

$$\frac{z_Q + z_R}{2} = \frac{-2z_B - 2z_C}{2} = -z_B - z_C = z_A$$

Donc A est le milieu du segment [QR].

c) Par suite, le droite (AP) est la médiane issue de P du triangle équilatéral PQR. On en déduit que la droite (AP) est aussi la médiatrice du segment [QR] et en particulier que la droite (AP) est perpendiculaire à la droite (QR). Maintenant, puisque $P = h(A)$, les points P, O et A sont alignés et donc la droite (AP) est encore la droite (OA).

En résumé, le rayon [OA] est perpendiculaire en A à la droite (QR) et on sait alors que la droite (QR) est tangente au cercle $(\mathscr{C})$ en A.

Limite - Continuité

EXERCICE 1

1) On a : $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-1}+x = +\infty$

2) En effet : $\sqrt{x^2-1}+x = \frac{(\sqrt{x^2-1}+x)(\sqrt{x^2-1}-x)}{(\sqrt{x^2-1}-x)} = \frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}-x} = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}-x}$

On a :

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-1}+x = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{-x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}-x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{-x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+1\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+1\right)} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

Ainsi : $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-1}+x = 0$

3) On a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}+x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}+x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+1\right)}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+1 = 2$$

Ainsi : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}+x}{x} = 2$

4) On a : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}+3}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{3}{\sqrt{x^2-1}}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{3}{\sqrt{x^2-1}}\right) = 1$

Ainsi : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}+3}{\sqrt{x^2-1}} = 1$

5) On a : $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^5-3x^2}{1-5x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^5}{-5x^3} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{x^2}{5} = -\infty$

CE $\Sigma\pi\int$

Ainsi : $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5-3x^2}{1-5x^3}=-\infty$

6) $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\dfrac{x^2+7}{x^3-5x+1}=\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\dfrac{x^2}{x^3}=\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\dfrac{1}{x}=0$

Ainsi : $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+7}{x^3-5x+1}=0$

7) $\lim\limits_{x\longrightarrow1}\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}=\lim\limits_{x\longrightarrow1}\dfrac{1}{x-1}\left(\dfrac{2}{x+1}-1\right)=\lim\limits_{x\longrightarrow1}\dfrac{1}{x-1}\left(\dfrac{1-x}{x+1}\right)=\lim\limits_{x\longrightarrow1}-\dfrac{1}{x+1}=-\dfrac{1}{2}$

Ainsi : $\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}=-\frac{1}{2}$

8) On a : $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x(x+1)}=0$

9) On a : $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x(x+1)}-\frac{1}{x}=0$

10) On a : $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2+1}-x\right)=\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\dfrac{x^3-x^3-x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\dfrac{-x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\dfrac{-1}{x}=0$

Ainsi : $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}-x\right)=0$

11) On a : $\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1}=\frac{x^3(2x+1)-x^2(2x^2-1)}{(2x^2-1)(2x+1)}=\frac{2x^4+x^3-2x^4+x^2}{4x^4+2x^2-2x-1}=\frac{x^3+x^2}{4x^4+2x^2-2x-1}$

Donc : $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)=\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\dfrac{x^3+x^2}{4x^4+2x^2-2x-1}=\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\dfrac{x^3}{4x^4}=\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\dfrac{1}{4x}=0$

Ainsi : $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1}=0$

12) On a : $\frac{3-\sqrt{x}}{x^2-81}=\frac{3-\sqrt{x}}{(x-9)(x+9)}=\frac{3-\sqrt{x}}{-(3-\sqrt{x})(3+\sqrt{x})(x+9)}=\frac{1}{-(3+\sqrt{x})(x+9)}$

Donc : $\lim\limits_{x\longrightarrow9}\dfrac{3-\sqrt{x}}{x^2-81}=\lim\limits_{x\longrightarrow9}-\dfrac{1}{(3+\sqrt{x})(x+9)}=-\dfrac{1}{108}$

Ainsi : $\lim_{x\to9}\frac{3-\sqrt{x}}{x^2-81}=-\frac{1}{108}$

13) On a :

$$\frac{1}{x(x-2)^2}-\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{x(x-2)^2}-\frac{1}{(x-1)(x-2)}=\frac{1}{x-2}\left[\frac{1}{x(x-2)}-\frac{1}{x-1}\right]$$
$$=\frac{1}{x-2}\left[\frac{x-1-x^2+2x}{x(x-2)(x-1)}\right]=\frac{1}{x-2}\left[\frac{-x^2+3x-1}{x(x-2)(x-1)}\right]=\frac{-x^2+3x-1}{x(x-2)^2(x-1)}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x(x-2)^2}-\frac{1}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{-x^2+3x-1}{x(x-2)^2(x-1)}=+\infty$$

Alors $\lim_{x\to 2}\frac{1}{x(x-2)^2}-\frac{1}{x^2-3x+2}=+\infty$

f) On a $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}=\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=0$$

Alors $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=0$

g) On a

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2-5x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}{x\sqrt{1-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{\sqrt{1-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}}=2$$

Alors $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2-5x+1}}=2$

h) On a

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2-5x+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}{-x\sqrt{1-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{-\sqrt{1-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}}=0$$

Alors $\lim_{x\to-\infty}\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2-5x+1}}=0$

i) On a

$$\begin{aligned}\sqrt{x^4+2x+1}-(x^2-1)&=\frac{[\sqrt{x^4+2x+1}-(x^2-1)][\sqrt{x^4+2x+1}+(x^2-1)]}{\sqrt{x^4+2x+1}-(x^2-1)}\\&=\frac{[x^4+2x+1-(x^4-2x^2+1)]}{\sqrt{x^4+2x+1}+(x^2-1)}=\frac{(2x^2+2x)}{\sqrt{x^4+2x+1}+(x^2-1)}\\&=\frac{x^2\left(2+\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{x^4\left(1+\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^4}\right)}+(x^2-1)}=\frac{x^2\left(2+\frac{2}{x}\right)}{x^2\sqrt{1+\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^4}}+(x^2-1)}\\&=\frac{x^2\left(2+\frac{2}{x}\right)}{x^2\left(\sqrt{1+\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^4}}+1-\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{2+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^4}}+1-\frac{1}{x^2}}\end{aligned}$$

Alors

CE $\Sigma\pi\int$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^4+2x+1}-(x^2-1)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^4}}+1-\frac{1}{x^2}}=1$$

Donc : $\underline{\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^4+2x+1}-(x^2-1)=1}$

18) On a : $x-8=(\sqrt[3]{x})^3-2^3=(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)\Rightarrow\sqrt[3]{x}-2=\frac{x-8}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}$

De même :

$$\sqrt[3]{x+19}-3=\frac{(\sqrt[3]{x+19})^3-3^3}{(\sqrt[3]{x+19})^2+3\sqrt[3]{x+19}+9}=\frac{(x+19)-27}{(\sqrt[3]{x+19})^2+3\sqrt[3]{x+19}+9}$$
$$=\frac{x-8}{(\sqrt[3]{x+19})^2+3\sqrt[3]{x+19}+9}$$

Ainsi :

$$\frac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[3]{x+19}-3}=\frac{\frac{x-8}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}}{\frac{x-8}{(\sqrt[3]{x+19})^2+3\sqrt[3]{x+19}+9}}=\frac{(\sqrt[3]{x+19})^2+3\sqrt[3]{x+19}+9}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}$$

Et donc :

$$\lim_{x\to8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[3]{x+19}-3}=\lim_{x\to8}\frac{(\sqrt[3]{x+19})^2+3\sqrt[3]{x+19}+9}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}=\frac{9}{4}$$

Donc : $\underline{\lim_{x\to8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[3]{x+19}-3}=\frac{9}{4}}$

19) S'inspirer de 18)

20) On a :

$$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}-\sqrt{x}=\frac{\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}+\sqrt{x}\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}+\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x\left(1+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}\right)}}{\sqrt{x\left(1+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{x}\right)}+\sqrt{x}}$$

$$=\frac{\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{x}}+\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{1+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}}}{\sqrt{1+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{x}}+1}$$

Ainsi :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}-\sqrt{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}}}{\sqrt{1+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{x}}+1}=\frac{1}{2}$$

Donc : $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}-\sqrt{x}=\frac{1}{2}$

EXERCICE 2

1) $\lim_{x\to1}\frac{-x^2-x+2}{x^2-2x+1}=\text{"}\frac{-1-1+2}{2-2}\text{"}$ On a une forme indéterminée.

Levons l'indétermination.

En effet, $-x^2-x+2=-(x-1)(x+2)$ donc :

$$\lim_{x\to1}\frac{-x^2-x+2}{x^2-2x+1}=\lim_{x\to1}\frac{-(x-1)(x+2)}{(x-1)(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{x+2}{1-x}=?$$

On calcule les limites à gauche puis à droite :

CE $\Sigma\pi\int$

$\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x+2}{1-x}=\frac{1^-+2}{1-1^-}=\frac{3}{0^+}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x+2}{1-x}=\frac{1^++2}{1-1^+}=\frac{3}{0^-}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x+2}{1-x}\neq\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x+2}{1-x}$ donc $\underline{\lim_{x\to 1}\frac{-x^2-x+2}{x^2-2x+1}\text{ n'existe pas}}$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}-1}=\text{"}\frac{0}{1-1}\text{"}$ on a une forme indéterminée.

Levons l'indétermination.

En effet, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}{1+x^2-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{x}$

On calcule les limites à gauche puis à droite :

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{x}=\frac{2}{0^+}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{x}=\frac{2}{0^-}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{x}\neq\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{x}$ donc $\underline{\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}-1}\text{ n'existe pas}}$

3) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{\sqrt{1-x}-2}{\sqrt{6-x}-3}=\text{"}\frac{2-2}{3-3}\text{"}$ on a une forme indéterminée.

Levons l'indétermination. En effet :

$$\frac{\sqrt{1-x}-2}{\sqrt{6-x}-3}=\frac{\left(\sqrt{1-x}-2\right)\left(\sqrt{1-x}+2\right)\left(\sqrt{6-x}+3\right)}{\left(\sqrt{6-x}-3\right)\left(\sqrt{6-x}+3\right)\left(\sqrt{1-x}+2\right)}=\frac{(-3-x)\left(\sqrt{6-x}+3\right)}{(-3-x)\left(\sqrt{1-x}+2\right)}=\frac{\left(\sqrt{6-x}+3\right)}{\left(\sqrt{1-x}+2\right)}$$

$\lim\limits_{x\to -3}\frac{\sqrt{1-x}-2}{\sqrt{6-x}-3}=\lim\limits_{x\to -3}\frac{\sqrt{6-x}+3}{\sqrt{1-x}+2}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$ donc $\underline{\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{1-x}-2}{\sqrt{6-x}-3}=\frac{3}{2}}$

4) On a :

$$\lim_{x\to -3}\frac{x+3}{9-x^2}=\lim_{x\to -3}\frac{x+3}{(3-x)(3+x)}=\lim_{x\to -3}\frac{1}{3-x}=\frac{1}{6}$$

Donc $\underline{\lim_{x\to -3}\frac{x+3}{9-x^2}=\frac{1}{6}}$

5) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+x+2}-x-1}{1-\sqrt{x}}=\text{"}\frac{2-2}{1-1}\text{"}$ on a une forme indéterminée.

Levons l'indétermination.

En effet :

$$\frac{\sqrt{x^2+x+2}-x-1}{1-\sqrt{x}}=\frac{\left(\sqrt{x^2+x+2}-(x+1)\right)\left(\sqrt{x^2+x+2}+(x+1)\right)(1+\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})\left(\sqrt{x^2+x+2}+(x+1)\right)}$$

$$\frac{(1-x)(1+\sqrt{x})}{(1-x)\left(\sqrt{x^2+x+2}+(x+1)\right)}=\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+x+2}+x+1}$$

Donc $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+x+2}-x-1}{1-\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+x+2}+x+1}=\frac{1}{2}$

Finalement : $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+x+2}-x-1}{1-\sqrt{x}}=\frac{1}{2}$

* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x[E(x)-x]}{|x|}=$ "$\frac{0}{0}$" on a une forme indéterminée.

Levons l'indétermination en calculant les limites à gauche et à droite.

Si $x>0$:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x[E(x)-x]}{|x|}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x[E(x)-x]}{x}=\lim_{x\to 0^+}(E(x)-x)=0 \text{ car } x\to 0^+ \Rightarrow E(x)\to 0$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x[E(x)-x]}{|x|}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x[E(x)-x]}{-x}=\lim_{x\to 0^-}(-E(x)+x)=-(-1)=1 \text{ car } x\to 0^- \Rightarrow E(x)\to -1$$

Finalement $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x[E(x)-x]}{|x|}\neq\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x[E(x)-x]}{|x|}$ donc finalement : $\lim_{x\to 0}\frac{x[E(x)-x]}{|x|}$ n'existe pas

* $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sqrt{4-x^2}}{x+2}=$ "$\frac{\sqrt{4-4}}{-2+2}$" on a une forme indéterminée.

Levons l'indétermination.

$$\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{4-x^2}}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{2-x}\times\sqrt{2+x}}{\sqrt{2+x}\times\sqrt{2+x}}=\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}}=\text{"}\frac{2}{0}\text{"}$$

Donc $\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{4-x^2}}{x+2}$ n'existe pas

* On étudie la limite à gauche et à droite

$$\lim_{x\to -5^-}[x-E(x)]=-5-E(-5^-)=-5-(-6)=-5+6=1$$

$$\lim_{x\to -5^+}[x-E(x)]=-5-E(-5^+)=-5-(-4)=-5+4=-1$$

$\lim\limits_{x\to -5^+}[x-E(x)]\neq\lim\limits_{x\to -5^-}[x-E(x)]$ donc $\lim_{x\to -5}(x-E(x))$ n'existe pas

9) $\lim\limits_{x\to\frac{4}{3}}[3x+1-E(x)]=3\times\frac{4}{3}+1-E\left(\frac{4}{3}\right)=4$ donc $\underline{\lim_{x\to\frac{4}{3}}(3x+1-E(x))=4}$

10) $\lim\limits_{x\to4}\frac{x-\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2}=\text{"}\frac{4-4}{2-2}\text{"}$ on a une forme indéterminée.

Levons l'indétermination.

Il faut en effet, constater que : $x-\sqrt{x}-2=\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)$

Donc : $\lim\limits_{x\to4}\frac{x-\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2}=\lim\limits_{x\to4}\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}-2}=\lim\limits_{x\to4}\left(\sqrt{x}+1\right)=3$

Finalement : $\underline{\lim_{x\to4}\frac{x-\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2}=3}$

11) $\lim\limits_{x\to8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[3]{x+19}-3}=\text{"}\frac{2-2}{3-3}\text{"}$ on a une forme indéterminée.

Levons l'indétermination.

Il faut en effet, constater que :

$$x-8=\sqrt[3]{x}-2^3=\left(\sqrt[3]{x}-2\right)\left[\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+2\sqrt[3]{x}+4\right]$$

On tire : $\sqrt[3]{x}-2=\frac{x-8}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+2\sqrt[3]{x}+4}$ (1)

$$(x+19)-27=\left(\sqrt[3]{x+19}\right)^3-3^3=\left(\sqrt[3]{x+19}-3\right)\left[\left(\sqrt[3]{x+19}\right)^2+3\sqrt[3]{x+19}+9\right]$$

On tire : $\sqrt[3]{x+19}-3=\frac{x-8}{\left(\sqrt[3]{x+19}\right)^2+3\sqrt[3]{x+19}+9}$ (2)

En faisant le rapport (1) sur (2), on a :

$$\frac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[3]{x+19}-3}=\frac{\dfrac{x-8}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+2\sqrt[3]{x}+4}}{\dfrac{x-8}{\left(\sqrt[3]{x+19}\right)^2+3\sqrt[3]{x+19}+9}}=\frac{\left(\sqrt[3]{x+19}\right)^2+3\sqrt[3]{x+19}+9}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+2\sqrt[3]{x}+4}$$

Pour enfin avoir la limite :

$$\lim_{x\to8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[3]{x+19}-3}=\lim_{x\to8}\left[\frac{\left(\sqrt[3]{x+19}\right)^2+3\sqrt[3]{x+19}+9}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+2\sqrt[3]{x}+4}\right]=\frac{3^2+3\times3+9}{2^2+2\times2+4}=\frac{9}{4}$$

Finalement : $\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt{x+19}-3}=\frac{2}{3}$

12) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2}{2x^3-3x^2+1}=$ " $\dfrac{0}{3-3}$ " on a une forme indéterminée.

Levons l'indétermination.

En effet :

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{2x^3-3x^2+1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{(x-1)^2(2x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(2x+1)}=\frac{1}{3}.$$ Donc $\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{2x^3-3x^2+1}=\frac{1}{3}$

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}=$ " $\dfrac{1-1}{1-1}$ " on a une forme indéterminée.

Levons l'indétermination.

En effet :

$$\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^3-1^3=\left(\sqrt[3]{1+x}-1\right)\left(\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2+\sqrt[3]{1+x}+1\right)\Rightarrow\sqrt[3]{1+x}-1=\frac{x}{\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2+\sqrt[3]{1+x}+1}$$

Ainsi :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1+x}+1\right)\left[\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2+\sqrt[3]{1+x}+1\right]}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left[\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2+\sqrt[3]{1+x}+1\right]}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{3}{2}$$

Ainsi : $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}=\frac{3}{2}$

14) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x\sqrt{x}-8}{4-x}=$ " $\dfrac{8-8}{4-4}$ " on a une forme indéterminée.

Levons l'indétermination.

En effet,

$x\sqrt{x}-8=\left(\sqrt{x}\right)^3-2^3=\left(\sqrt{x}-2\right)\left(x+2\sqrt{x}+4\right)$ et $4-x=\left(2-\sqrt{x}\right)\left(2+\sqrt{x}\right)$ donc :

$$\lim_{x\to 4}\frac{x\sqrt{x}-8}{4-x}=\lim_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(x+2\sqrt{x}+4\right)}{\left(2-\sqrt{x}\right)\left(2+\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{-\left(x+2\sqrt{x}+4\right)}{\left(2+\sqrt{x}\right)}=-\frac{12}{4}=-3$$ donc : $\lim_{x\to 4}\frac{x\sqrt{x}-8}{4-x}=-3$

15) On étudie les limites à gauche puis à droite.

$$\lim_{x\to -2^-}\frac{(x+2)\sqrt{|x+2|}}{x^2+x-2-|x+2|}=\lim_{x\to -2^-}\frac{(x+2)\sqrt{-x-2}}{x(x+2)}=\lim_{x\to -2^-}\frac{\sqrt{-x-2}}{x}=0$$

Finalement $\lim_{x\to 0}\frac{x+2}{x+1}=\frac{2}{1}$

12) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{2x^3-3x^2+1}=$ " $\frac{0}{3-3}$ " on a une forme indéterminée.

Levons l'indétermination.

En effet :

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{2x^3-3x^2+1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{(x-1)^2(2x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(2x+1)}=\frac{1}{3}.$$ Donc $\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{2x^3-3x^2+1}=\frac{1}{3}$

13) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}=$ " $\frac{1-1}{1-1}$ " on a une forme indéterminée.

Levons l'indétermination.

En effet :

$$\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^3-1^3=\left(\sqrt[3]{1+x}-1\right)\left(\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2+\sqrt[3]{1+x}+1\right)\Rightarrow\sqrt[3]{1+x}-1=\frac{x}{\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2+\sqrt[3]{1+x}+1}$$

Ainsi :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1+x}+1\right)\left[\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2+\sqrt[3]{1+x}+1\right]}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left[\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2+\sqrt[3]{1+x}+1\right]}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{3}{2}$$

Ainsi : $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}=\frac{3}{2}$

14) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x\sqrt{x}-8}{4-x}=$ " $\frac{8-8}{4-4}$ " on a une forme indéterminée.

Levons l'indétermination.

En effet,

$x\sqrt{x}-8=\left(\sqrt{x}\right)^3-2^3=\left(\sqrt{x}-2\right)\left(x+2\sqrt{x}+4\right)$ et $4-x=\left(2-\sqrt{x}\right)\left(2+\sqrt{x}\right)$ donc :

$$\lim_{x\to 4}\frac{x\sqrt{x}-8}{4-x}=\lim_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(x+2\sqrt{x}+4\right)}{\left(2-\sqrt{x}\right)\left(2+\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{-\left(x+2\sqrt{x}+4\right)}{\left(2+\sqrt{x}\right)}=-\frac{12}{4}=-3$$ donc : $\lim_{x\to 4}\frac{x\sqrt{x}-8}{4-x}=-3$

15) On étudie les limites à gauche puis à droite.

$$\lim_{x\to -2^-}\frac{(x+2)\sqrt{|x+2|}}{x^2+x-2-|x+2|}=\lim_{x\to -2^-}\frac{(x+2)\sqrt{-x-2}}{x(x+2)}=\lim_{x\to -2^-}\frac{\sqrt{-x-2}}{x}=0$$

CE $\sum\pi\int$

$$\lim_{x\to -2^+}\frac{(x+2)\sqrt{|x+2|}}{x^2+x-2-|x+2|}=\lim_{x\to -2^+}\frac{(x+2)\sqrt{x+2}}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to -2^+}\frac{\sqrt{x+2}}{x-2}=0$$

Ainsi : $\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)\sqrt{|x+2|}}{x^2+x-2-|x+2|}=0$

16) $\lim_{x\to -\infty}\frac{3x-|x-4|}{x+5}=\lim_{x\to -\infty}\frac{3x-(-x+4)}{x+5}=\lim_{x\to -\infty}\frac{4x-4}{x+5}=4$. Donc $\lim_{x\to -\infty}\frac{3x-|x-4|}{x+5}=4$

17) $\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{|x^3|-1}}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x^3-1}}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(\sqrt{x-1})\times(\sqrt{x^2+x+1})}{(\sqrt{x-1})\times(\sqrt{x-1})}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{x-1}}=+\infty$.

Ainsi : $\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{|x^3|-1}}{x-1}=+\infty$

18) On trouve : $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2-3x+4}-\sqrt{x+4}}{x-3+\sqrt{9-x^2}}=-1$

EXERCICE 3

1) On a :

$$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\frac{1+x-1+x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$$

Ainsi :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=\frac{2}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}=\frac{2}{2}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=1$$

2) On a :

$$\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}=\frac{(\sqrt{1+x+x^2}-1)(\sqrt{1+x+x^2}+1)}{x(\sqrt{1+x+x^2}+1)}=\frac{1+x+x^2-1}{x(\sqrt{1+x+x^2}+1)}=\frac{x+x^2}{x(\sqrt{1+x+x^2}+1)}$$

$$=\frac{x(1+x)}{x(\sqrt{1+x+x^2}+1)}=\frac{1+x}{\sqrt{1+x+x^2}+1}$$

Ainsi :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x}{\sqrt{1+x+x^2}+1}=\frac{1+0}{\sqrt{1+0+0^2}+1}=\frac{1}{2}\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}=\frac{1}{2}$$

3) On a :

$$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}=\frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}}+1}$$

On a donc :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}}+1}=\frac{1}{2}\quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}=\frac{1}{2}$$

EXERCICE 4

1) a) $\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}x\cos\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim_{X\to\infty}\frac{\cos X}{X}=0$ donc $\lim_{x\to0}x\cos\left(\frac{1}{x}\right)=0$

b) $\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}+\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\left[1+\frac{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}}\right]=\lim_{X\to+\infty}X\left[1+\frac{\sin X}{X}\right]=+\infty$

Donc : $\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}+\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)=+\infty$

c) On a :

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(x^2)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin(x^2)}{x^2}\times x=1\times0=0\quad\Rightarrow\quad\lim_{x\to0}\frac{\sin(x^2)}{x}=0$$

d) On a : $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{\sqrt{x}\times\sqrt{x}}\sqrt{x}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}\sqrt{x}=1\times0=0$ Donc $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{\sqrt{x}}=0$

2) Limite de : $g:x\mapsto\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-4}}$ en 2^+.

$$\lim_{x\to2^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-4}}=\lim_{x\to2^+}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})}{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})}=\lim_{x\to2^+}\frac{x-2}{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})}$$

$$=\lim_{x\to2^+}\frac{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x-2})}{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})}=\lim_{x\to2^+}\frac{\sqrt{x-2}}{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})}=0$$

Donc : $\lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-4}} = 0$

EXERCICE 5

1) a) On a : $x^4 - 4x + 3 = (x-1)^2(x^2+2x+3)$ donc

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^4-4x+3}{2(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2(x^2+2x+3)}{2(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x+3}{2} = \frac{6}{2} = 3 \implies \lim_{x\to 1} \frac{x^4-4x+3}{2(x-1)^2} = 3$$

b) On pose $\sqrt[3]{x} = X$ donc :

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2} = \lim_{X\to 1} \frac{X^2-2X+1}{(X^3-1)^2} = \lim_{X\to 1} \frac{(X-1)^2}{[(X-1)(X^2+X+1)]^2} = \lim_{X\to 1} \frac{(X-1)^2}{(X-1)^2(X^2+X+1)^2}$$
$$= \lim_{X\to 1} \frac{1}{(X^2+X+1)^2} = \frac{1}{9}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2} = \frac{1}{9}$$

c) On a :

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^4-1-4x}{2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1+4x+6x^2+4x^3+x^4-1-4x}{2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{6x^2+4x^3+x^4}{2x^2}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2(x^2+4x+6)}{2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+4x+6}{2} = 3$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^4-1-4x}{2x^2} = 3$$

2) a) $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(1+2x)}{x^2(x^2-1)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{1+2x}{x^2-1} = \frac{1}{2} \times -1 = -\frac{1}{2}$. Donc $\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(1+2x)}{x^2(x^2-1)} = -\frac{1}{2}$

b) On pose : $X = \sqrt[6]{x+1}$ donc : $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{X\to 1} \frac{X^3-1}{X^2-1} = \lim_{X\to 1} \frac{(X-1)(X^2+X+1)}{(X-1)(X+1)} = \lim_{X\to 1} \frac{X^2+X+1}{X+1} = \frac{3}{2}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} = \frac{3}{2}$$

c) On a :

$$\lim_{x\to 0} k(x) = \lim_{x\to 0} \frac{(1-x)^4-1+4x-x^3}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-4x+6x^2-4x^3+x^4)-1+4x-x^3}{3x^2}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^4-5x^3+6x^2}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(x^2-5x+6)}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-5x+6}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-x)^4-1+4x-x^3}{3x^2} = 2$$

d) On a :

$$\lim_{x\to 0} l(x) = \lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\sqrt{\cos x})(1+\sqrt{\cos x})}{x^2(1+\sqrt{\cos x})} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2(1+\sqrt{\cos x})}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{\cos x}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2} = \frac{1}{4}$$

EXERCICE 6

1/ On a :

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan 2x}{\sqrt{1-\cos x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\tan 2x}{\sqrt{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\tan 2x}{\sqrt{2}\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\tan 2x}{\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\tan 2x}{x}}{\frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x}} = \frac{2}{\sqrt{2}\times\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

Donc : $\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan 2x}{\sqrt{1-\cos x}} = 2\sqrt{2}$

2/ On a : $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\tan^2 2x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{\tan 2x}\right)^2 = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{\tan 2x}{x}}\right)^2 = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$. Donc : $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\tan^2 2x} = \frac{1}{4}$

3/ On a :

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(\pi x)}{\tan x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\tan x} = \lim_{x\to 0} 2\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\tan x} = \lim_{x\to 0} 2\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\frac{\frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{x}}{\frac{\tan x}{x}} = 0$$

Donc $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(\pi x)}{\tan x} = 0$

EXERCICE 7

1/ $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\tan x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\sin x}\frac{2\sin x}{\left(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cos x}{\left(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}\right)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\tan x} = 1$$

2/ $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\times\frac{\sin x}{x}\times\frac{(1-\cos x)}{x^2} = 1\times 1\times\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3} = \frac{1}{2}$$

CE $\Sigma\pi\int$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x\left(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\times\frac{x^2}{\sin^2 x}\times\frac{1}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}\right)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}=\frac{1}{4\sqrt{2}}$$

4)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(1-\cos x)}{\sin 3x-3\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(1-\cos x)}{3\sin x-4\sin^3 x-3\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(1-\cos x)}{-4\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}-\frac{1}{4}\frac{x^2}{\sin^2 x}\frac{1-\cos x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(1-\cos x)}{\sin 3x-3\sin x}=-\frac{1}{8}$$

5)

<u>1er cas</u> : $p=q=0$ $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin px}{x-\sin qx}=1$

<u>2e cas</u> : $p\neq 0, q=0$ $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin px}{x-\sin qx}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin px}{x}=\lim_{x\to 0}1-\frac{\sin px}{x}=1-p$

<u>3e cas</u> : $p=0, q\neq 0$ $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin px}{x-\sin qx}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x-\sin qx}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-\frac{\sin qx}{x}}$

a) Si $q>1$, la limite est $\frac{1}{1-q}$. N'oublions pas que $-p$, q sont entiers.

b) Si $q=1$, la limite est $+\infty$.

<u>4e cas</u> : $p\neq 0, q\neq 0$ $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin px}{x-\sin qx}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{\sin px}{x}}{1-\frac{\sin qx}{x}}$

a) cas : Si $q>1$, la limite est $\frac{1-p}{1-q}$.

b) Si $q=1$ et $p>1$, la limite est $-\infty$.

c) Si $p=q=1$, la limite est 1.

En résumé

Valeurs de p et de q	Limite de la fraction
$q = 0$	$1 - p$
$q = 1, \quad p = 0$	$+\infty$
$p = q = 1$	1
$q = 1, \quad p > 1$	$-\infty$
$q > 1$	$\dfrac{1-p}{1-q}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}\cos x\right]}{\sin(\sin x)} = \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin\left[\frac{\pi}{2}(1+\cos x)\right]}{\sin(\sin x)} = \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin\left[\pi\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\right]}{\sin(\sin x)} = \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin\left[\pi\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right]}{\sin(\sin x)}$$

$$= \lim_{x\longrightarrow 0}\pi\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{x}{2}\right)}\times\frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left[2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]}\times\frac{\sin\left(\pi\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{\pi\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = 0$$

$$\underline{\lim_{x\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)}{\sin(\sin x)} = 0}$$

EXERCICE 8

1) On utilise la limite des fonctions composées.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 1$. Donc $\underline{\lim\limits_{x\to-\infty}\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0}$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. Donc $\underline{\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0}$

3) Soit à calculer $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$.

Cette limite est <u>très importante</u> et est à retenir par cœur.

On admettra ce résultat : $x - \frac{x^2}{2} \le \sin x \le x$ (On le prouvera plu tard)

$x - \frac{x^2}{2} \le \sin x \le x \Rightarrow 1 - \frac{x}{2} \le \frac{\sin x}{x} \le 1$ ce qui donne $\lim\limits_{x\to 0}\left(1 - \frac{x}{2}\right) = 1 \le \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \le 1$

Donc $\underline{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1}$

Démontrons

CE $\Sigma\pi\int$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}\times a=1\times a=a$$

Donc $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}=a$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin ax}{ax}}{\frac{\sin bx}{bx}}\times\frac{a}{b}=\frac{a}{b}$$

Donc $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\frac{a}{b}$

On utilisera ces résultats pour déterminer d'autres limites.

4) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi x-1}{2x^2+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi x}{2x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi}{2x}=0$ et $\lim_{x\to 0}\sin x=0$ donc $\underline{\lim_{x\to+\infty}\sin\left(\frac{\pi x-1}{2x^2+3}\right)=0}$

5) $\lim_{x\to-\infty}\frac{\pi x-1}{2x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\pi x}{2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$ et $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x=1$ donc $\underline{\lim_{x\to-\infty}\sin\left(\frac{\pi x-1}{2x+1}\right)=1}$

6) $\lim_{x\to-\infty}x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim_{X\to 0}\frac{\sin X}{X}=1$ donc $\underline{\lim_{x\to-\infty}x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=1}$

7) On pose $t=\pi-x$. $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\pi-x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(\pi-t)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$ donc $\underline{\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\pi-x}=1}$

8) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{4\times\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\times\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\times\left[\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right]^2=\frac{1}{2}$$

$$\underline{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}}$$

9) $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}}{\sin x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin x}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{2}\times\frac{\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}}{2\times\frac{\sin x}{x}}\sqrt{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\underline{\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x}=\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\tan x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin 3x}{\sin x}}{\dfrac{1}{\cos x}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x \times \sin 3x}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\cos x \times \dfrac{\sin 3x}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\cos x \times \dfrac{\dfrac{\sin 3x}{3x}}{\dfrac{\sin x}{3x}}$

$$= \cos x \times \frac{\dfrac{\sin 3x}{3x} \to 0}{\dfrac{1}{3} \times \dfrac{\sin x}{x} \to \dfrac{1}{3}} = 3$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan x} = 3$$

b) On trouve : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\cos x}{\sin x} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}} = \lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{\sin t}{t} = 0$. Donc $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos x - 2x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos x}{x} - 2 = -2$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos x - 2x}{x} = -2$

14) En effet, $-1 \le \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \le 1 \Rightarrow \dfrac{1}{3} \le \dfrac{1}{2+\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)} \le 1$ (1)

Si $x \ge 0$ (1) devient : $\dfrac{x\sqrt{4-x}}{3} \le \dfrac{x\sqrt{4-x}}{2+\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)} \le x\sqrt{4-x}$

Or : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sqrt{4-x}}{3} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} x\sqrt{4-x} = 0$. Donc $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sqrt{4-x}}{2+\sin\left(\frac{1}{x}\right)} = 0$

15) $-1 \le \cos x \le 1 \Rightarrow 2x-2 \le 2x-1+\cos x \le 2x$

Or : $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x-2 = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-1+\cos x) = -\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-1+\cos x) = -\infty$

16) En effet, $-1 \le \cos x \le 1 \Rightarrow \dfrac{1}{3} \le \dfrac{1}{2+\cos x} \le 1$ (1)

Et : $-1 \le \cos x \le 1 \Rightarrow x-1 \le x+\cos x \le x+1$ (2)

(1) et (2) donnent : $\dfrac{x-1}{3} \le \dfrac{x+\cos x}{2+\cos x} \le x+1$

Or : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{3}=\lim\limits_{x\to+\infty}x+1=+\infty$ donc $\underline{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+\cos x}{2+\cos x}\right)=+\infty}$

17) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}\times\dfrac{1}{\cos x}=1\times1=1$ donc $\underline{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}=1}$

18) En effet, $xE\left(\dfrac{1}{\sin x}\right)=x\left(\sin x\times\dfrac{1}{\sin x}\right)\times E\left(\dfrac{1}{\sin x}\right)=\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)\times\left[\dfrac{E\left(\dfrac{1}{\sin x}\right)}{\dfrac{1}{\sin x}}\right]$

En posant $X=\dfrac{1}{\sin x}$, on obtient :

$$\lim_{x\to0}xE\left(\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)\times\lim_{x\to0}\left[\frac{E\left(\frac{1}{\sin x}\right)}{\frac{1}{\sin x}}\right]=\lim_{x\to0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)\times\lim_{X\to\infty}\frac{E(X)}{X}=1\times1$$

$$\underline{\lim_{x\to0}\left[x\,E\left(\frac{1}{\sin x}\right)\right]=1}$$

19)

$$\frac{\sin[1-\cos x]}{\sin(x^2)}=\frac{\sin\left[2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right]}{\sin(x^2)}=\frac{\dfrac{\sin\left[2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right]}{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}}{\dfrac{\sin(x^2)}{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}}=2\times\frac{\dfrac{\sin\left[\underbrace{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}_{X}\right]}{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}}{\dfrac{\sin(x^2)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}}=2\times\frac{\sin X}{X}\times\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2}\frac{x^2}{\sin(x^2)}$$

$$\frac{\sin[1-\cos x]}{\sin(x^2)}=2\times\frac{\sin X}{X}\times\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2}\frac{x^2}{\sin(x^2)}=2\times\frac{\sin X}{X}\times\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x}\right)^2\times\frac{x^2}{\sin(x^2)}$$

Donc : $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin[1-\cos x]}{\sin(x^2)}=\lim\limits_{x\to0}2\times\dfrac{\sin X}{X}\times\left(\dfrac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x}\right)^2\times\dfrac{x^2}{\sin(x^2)}=2\times1\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\times1=\dfrac{1}{2}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(1-\cos x)}{\sin(x^2)}=\frac{1}{2}$$

20) En effet, $\dfrac{\sin[\sin(\sin x)]}{x}=\dfrac{\sin[\sin(\sin x)]}{\sin(\sin x)}\times\dfrac{\sin(\sin x)}{\sin x}\times\dfrac{\sin x}{x}$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin[\sin(\sin x)]}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin[\sin(\sin x)]}{\sin(\sin x)}\times\dfrac{\sin(\sin x)}{\sin x}\times\dfrac{\sin x}{x}=1\times 1\times 1=1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin[\sin(\sin x)]}{x}=1$$

21) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin[\tan(x^2)]}{1-\cos(x^2)}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t\sin[\tan(t)]}{1-\cos(t)}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin[\tan(t)]}{\tan t}\times\dfrac{\tan t}{t}\times\dfrac{t^2}{1-\cos(t)}=1\times 1\times\dfrac{1}{\frac{1}{2}}=2$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin[\tan(x^2)]}{1-\cos(x^2)}=2$$

22) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x-\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{2x-\sin x}{x}}{\frac{\sqrt{1-\cos x}}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{2x-\sin x}{x}}{\frac{\sqrt{1-\cos x}}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2-\frac{\sin x}{x}}{\sqrt{\frac{1-\cos x}{x^2}}}=\dfrac{2-1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}=\sqrt{2}$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{2x-\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}=\sqrt{2}$$

23) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1-\cos x+\sin x}{x}}{\frac{1-\cos x-\sin x}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1-\cos x}{x}+\frac{\sin x}{x}}{\frac{1-\cos x}{x}-\frac{\sin x}{x}}=\dfrac{0+1}{0-1}=-1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}=-1$$

24) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\tan x=\lim\limits_{t\to}t\times\dfrac{1}{\tan t}=\lim\limits_{t\to}=\dfrac{1}{\frac{\tan t}{t}}=1$. Donc $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\tan x=1$

25) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{2\cos 2x+1}{2\cos x-1}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{2\left(2\cos^2 x-1\right)+1}{2\cos x-1}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{(2\cos x-1)(2\cos x+1)}{2\cos x-1}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}(2\cos x+1)=2$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\cos 2x+1}{2\cos 2x-1}=2$$

26) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}{\tan x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1+\sin x - (1-\sin x)}{\left(\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x}\right)\tan x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\cos x}{\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x}} = 1$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}{\tan x} = 1$$

27) $\lim\limits_{n \to +\infty} \sin\left(\dfrac{n^2+2n+3}{n+1}\pi\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} \sin\left(\dfrac{n^2}{n}\pi\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} \sin(n\pi) = .0$

$$\lim_{n \to +\infty} \sin\left(\frac{n^2+2n+3}{n+1}\pi\right) = 0$$

EXERCICE 9

On a : $|\sin x| \leq 1 \Rightarrow \left|\frac{\sin x}{x^3}\right| \leq \frac{1}{x^3}$. Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^3} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin x}{x^3} = 0$ et donc $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$

EXERCICE 10

La fonction f est définie pour $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

On a : pour tout réel x, $|\sin(x^3 + x^2)| \leq |x^3 + x^2|$.

Pour tout x réel non nul : $\left|\frac{\sin(x^3+x^2)}{x^3+x}\right| \leq \left|\frac{x^3+x^2}{x^3+x}\right|$ ou encore $|f(x)| \leq \left|\frac{x^3+x^2}{x^3+x}\right| = \left|\frac{x^2+x}{1+x^2}\right|$

Or $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2+x}{1+x^2} = 0$ donc $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

EXERCICE 11

1) Transformation de l'expression de f :

$$f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

On sait que : $\forall x \geq 1,\ \sqrt{x+1} \geq \sqrt{x}$

Alors : $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+1} \geq \sqrt{x+1} + \sqrt{x}$

Ou encore : $2\sqrt{x+1} \geq \sqrt{x+1} + \sqrt{x}$

En inversant les termes : $\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

Ainsi : $\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq f(x)$ (1)

De même, $\forall x \geq 1,\ \sqrt{x+1} \geq \sqrt{x}$

Alors : $\sqrt{x+1} + \sqrt{x} \geq \sqrt{x} + \sqrt{x}$

Or encore : $\sqrt{x+1}+\sqrt{x} \geq 2\sqrt{x}$

En inversant les termes : $\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Ainsi : $f(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (2)

Les relations (1) et (2) nous permettent de conclure que : $\underline{\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq f(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}}$

2) On a : $\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq f(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = 0$

Donc $\underline{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$

EXERCICE 12

1) En effet, selon que x soit positif ou négatif, on a toujours : $\mp x \leq x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq \pm x$

Supposons $x > 0$.

En effet, $\sin\frac{1}{x} \leq 1 \Rightarrow x\sin\frac{1}{x} \leq x$. Or, $\lim\limits_{x\to0} x = 0$ Donc $\underline{\lim_{x\to0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0}$

En supposant $x < 0$, on aboutit au même résultat.

2) En effet, $\cos\frac{1}{x} \leq 1 \Rightarrow x^2\cos\frac{1}{x} \leq x^2$. Or, $\lim\limits_{x\to0} x^2 = 0$ Donc $\underline{\lim_{x\to0} x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0}$

3) On a :

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{x^2+1} \leq \frac{\cos x}{x^2+1} \leq \frac{1}{x^2+1} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2+1} = 0 \leq \lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x^2+1} \leq \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2+1} = 0$$

Donc $\underline{\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x^2+1} = 0}$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x+\sin x}$. On suppose $x > 1$.

En effet, $\sin x \leq -1 \Rightarrow x+\sin x \leq x-1 \Rightarrow \frac{1}{x+\sin x} \geq \frac{1}{x-1}$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x-1} = 0$ Donc $\underline{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+\sin x} = 0}$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\cos x}{3+\cos x}$. On suppose $x \phi 1$.

CE $\Sigma\pi\int$

En effet, $x-\cos x \geq x-1$ (1) et $\cos x \leq 1 \Rightarrow 3+\cos x \leq 4 \Rightarrow \dfrac{1}{3+\cos x} \geq \dfrac{1}{4}$ (2)

En faisant le produit de (1) et (2), on obtient : $\dfrac{x+\cos x}{3+\cos x} \geq \dfrac{x-1}{4}$.

Or : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1}{4} = +\infty$. Donc $\underline{\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\cos x}{3+\cos x} = +\infty}$

6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+\cos x}{3-\cos x}$. On suppose $x \phi 0$

On a: $x+\cos x \leq x+1$ (1) de la même manière, on prouve $\dfrac{1}{3-\cos x} \leq \dfrac{1}{2}$ (2)

En faisant le produit de (1) et (2), on obtient : $\dfrac{x+\cos x}{3-\cos x} \geq \dfrac{x+1}{2}$.

Or : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+1}{2} = -\infty$. Donc $\underline{\lim_{x\to-\infty} \frac{x+\cos x}{3+\cos x} = -\infty}$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x+1)\sin x}{x^2+2}$. On suppose $x \phi -1$.

En effet, $x \phi -1 \Rightarrow (x+1)\sin x \leq x+1$ et par suite $-\dfrac{x+1}{x^2+2} \leq \dfrac{(x+1)\sin x}{x^2+2} \leq \dfrac{x+1}{x^2+2}$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{x+1}{x^2+2}\right) = 0 \leq \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{(x+1)\sin x}{x^2+2}\right) \leq \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{x^2+2}\right) = 0$

Donc $\underline{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(x+1)\sin x}{x^2+2}\right) = 0}$

8) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\dfrac{1}{x}$. On suppose $x \geq 1$.

En effet, $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2x^2} \leq \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \leq 1 \leq \dfrac{1}{x} \Rightarrow 1-\dfrac{1}{2x} \leq x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \leq 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 1$

Donc $\underline{\lim_{x\to+\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1}$

EXERCICE 13

1) La fonction $f : x \alpha \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$ est définie sur $D =]-\infty ; -1] \cup [1 ; +\infty[$.

Pour tout x de D, on a : $f(x)=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}=\dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$ d'où on déduit : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

2) La fonction $g : x \mapsto \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$ est définie sur $D=]-\infty\,;-1]\cup[1\,;+\infty[$.

Pour tout x de D, on a : $g(x)=\dfrac{2\sin f(x)}{f(x)}$.

On utilise alors le théorème concernant la limite d'une fonction composée.

On sait que : $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ et d'après 1) : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ et donc $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{2\sin f(x)}{f(x)}=2$

La fonction $h : x \mapsto x\sin(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$ est définie sur $D=]-\infty\,;-1]\cup[1\,;+\infty[$.

Pour tout x de D, on a : $h(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}\,g(x)$.

On écrit pour $x>1$: $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$,

On constate que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\dfrac{1}{2}$

On peut conclure alors que : $\lim_{x\to+\infty} h(x)=1$

EXERCICE 14

1) Déterminons la limite de f en 0

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to\infty}\frac{\sin(\pi t)}{t}=0 \text{ donc } \lim_{x\to 0} f(x)=0$$

2) Déterminons la limite de f en $+\infty$ puis interprétons graphiquement ce résultat

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin(\pi t)}{t}=\pi \text{ donc } \lim_{x\to+\infty} f(x)=\pi$$

Interprétation : La courbe (C) de la fonction f admet une asymptote horizontale d'équation : $y=\pi$.

3) Montrons que f est une fonction paire puis interprétons graphiquement ce résultat

En effet,

$$f(-x) = -x\sin\left(\frac{\pi}{-x}\right) = -x\sin\left(-\frac{\pi}{x}\right) = -x \times -\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = x\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = f(x) \text{ donc } f(-x) = f(x)$$

Conclusion : f est une fonction paire

Interprétation : La courbe (C) de la fonction f admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie

EXERCICE 15

1) a) On a :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{5x^3+3\sqrt{x}}{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{5x^3+3\sqrt{x}}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\left(5x^2+\frac{3}{x\sqrt{x}}\right) = +\infty$$

On a une branche parabolique de direction (yy') en $+\infty$. On obtient le même résultat en $-\infty$.

b) On a : $\lim_{x\to+\infty}\frac{b(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3x+5}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{3+\frac{5}{x}}\right)}{\sqrt{x}\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3+\frac{5}{x}}}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}} = 0$

On a une branche parabolique de direction (xx'). On obtient le même résultat en $-\infty$.

c) On a : $\lim_{x\to+\infty}\frac{c(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x-\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty}1-\frac{1}{\sqrt{x}} = 1$; $\lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x})-x = \lim_{x\to+\infty}-\sqrt{x} = -\infty$

La courbe (C) admet une branche parabolique de direction celle de la droite $y = x$. On obtient le même résultat en $-\infty$.

d) On a : $\lim_{x\to+\infty}\frac{d(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin\pi x}{x} = \lim_{x\to+\infty}1+\frac{\sin\pi x}{x}$. Or $-\frac{1}{x} \leqslant \frac{\sin\pi x}{x} \leqslant \frac{1}{x} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\pi x}{x} = 0$

Ainsi : $\lim_{x\to+\infty}1+\frac{\sin\pi x}{x} = 1$. $\lim_{x\to+\infty}d(x)-x = \lim_{x\to+\infty}\sin\pi x$ n'existe pas.

Donc la courbe (C) admet une direction asymptotique, celle de la droite d'équation $y(x) = x$

e) On a : $\lim_{x\to+\infty}\frac{e(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+x^2\cos^2\pi x}{x} = \lim_{x\to+\infty}1+x\cos^2\pi x = +\infty$

On a une branche parabolique de direction (yy') en $+\infty$

f) f est définie pour $x \in [0\,;1[$. Donc on ne peut étudier sa direction asymptotique !

2) a) On se limitera à étudier la branche parabolique en $+\infty$.

On a : $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\alpha+\frac{\beta}{x}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \alpha-1$

Si $\alpha = 1$, (C) admet une branche parabolique de direction (xx')

Si $\alpha \neq 1$, alors :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(\alpha-1)x = \lim_{x\to+\infty} \alpha x+\beta-\sqrt{x^2+1}-\alpha x+x = \lim_{x\to+\infty} x+\beta-\sqrt{x^2+1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+\beta)^2-\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}{x+\beta+\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2\beta x+\beta^2-x^2-1}{x+\beta+\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\beta x+\beta^2-1}{x+\beta+\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(2\beta+\frac{\beta^2-1}{x}\right)}{x\left(1+\frac{\beta}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)} = \frac{2\beta}{2} = \beta$$

Si $\alpha \neq 1$ et $\beta = 0$, alors (C) admet une direction asymptotique, celle de la droite : $y(x) = (\alpha-1)x$

Si $\alpha \neq 1$ et $\beta \neq 0$, alors (C) admet une asymptote oblique d'équation : $y(x) = (\alpha-1)x+\beta$

b) On a : $(D) : y = 2x+2$ est asymptote oblique à (C) en $-\infty$ si : $\alpha-1 = 2$ et $\beta = 2$.

Donc $\alpha = 3$; $\beta = 2$

EXERCICE 16

f est définie en $-\pi$ et en π et est donc continue en ces points.

Vérifions si f est continue en 0. On pose $X = \frac{1}{x}$.

En effet,

$$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to0} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0} \frac{\sin X}{X}$$

Si $x>0$, alors $-1 \leqslant \sin X \leqslant 1 \Rightarrow -\frac{1}{X} \leqslant \frac{\sin X}{X} \leqslant \frac{1}{X} \Rightarrow \lim_{x\to0+}\left(-\frac{1}{X}\right) \leqslant \lim_{x\to0+}\frac{\sin X}{X} \leqslant \lim_{x\to0+}\frac{1}{X}$

Donc $\lim_{x\to0+}\frac{\sin X}{X} = 0$

Si $x<0$, alors $-1 \leqslant \sin X \leqslant 1 \Rightarrow \frac{1}{X} \leqslant \frac{\sin X}{X} \leqslant -\frac{1}{X} \Rightarrow \lim_{x\to0-}\frac{1}{X} \leqslant \lim_{x\to0-}\frac{\sin X}{X} \leqslant \lim_{x\to0-}\left(-\frac{1}{X}\right)$

Donc $\lim_{x\to0-}\frac{\sin X}{X} = 0$

Conclusion : f est continue en 0 et donc continue sur $[-\pi ; \pi]$

EXERCICE 17

1) En effet, $\lim_{x\to1^-} T(x) = \lim_{x\to1^-}\frac{ax}{x^2+1} = \frac{a}{2}$ et $\lim_{x\to1^+} T(x) = \lim_{x\to1^+} ax^2+x = a+1$.

$T(x)$ est continue en 1 si $\lim_{x\to1^-} T(x) = \lim_{x\to1^+} T(x) \Rightarrow \frac{a}{2} = a+1 = b$

CE $\Sigma\pi\int$

On obtient ainsi un système de deux équations à deux inconnues : $\begin{cases} \frac{a}{2} = a+1 \\ a+1 = b \end{cases}$ qui admet comme solution unique : $(a = -2,\ b = -1)$

EXERCICE 18

Etudions la continuité de f en 0.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x}\sqrt{|x|} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$$

Donc $\lim_{x\to 0+} \frac{|x|}{x}\sqrt{|x|} = 0$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x}\sqrt{|x|} = \lim_{x\to 0^+} -\sqrt{-x} = 0$$

Donc $\lim_{x\to 0-} \frac{|x|}{x}\sqrt{|x|} = 0$

Ainsi : $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 = f(0)$

Conclusion : f est continue en 0

EXERCICE 19

1) En effet, $f(x) = \frac{\sin(2x)}{3x}$ n'est pas définie en 0 et :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin(2x)}{2x}}{\frac{3x}{2x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin(2x)}{2x}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}.$$ Donc $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{2}{3}$

Donc f est prolongeable par continuité en 0. $\frac{3}{2}$ est la valeur du prolongement.

La fonction $g(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{3x} & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{3}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est le prolongement par continuité de f en 0

2) a) La fonction en définie sur $\mathbb{R}^*$. Et elle est continue sur $\mathbb{R}^*$. Il faut déterminer un éventuel prolongement par continuité en $x = 0$, c'est-à-dire savoir si f a une limite en 0.

$$|f(x)| = |\sin x|\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqslant |\sin x|$$

Donc f a une limite en 0 qui vaut 0. Donc en posant $f(0) = 0$, nous obtenons une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est continue

b) La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R} - \{-1\,;1\}$. On a :

$$f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{2}{1-x^2} = \frac{1+x-2}{(1-x)(1+x)} = \frac{-1+x}{(1-x)(1+x)} = -\frac{1}{1+x}$$

Donc f a pour limite $-\frac{1}{2}$ quand x tend vers 1. Et donc en posant $f(1) = -\frac{1}{2}$, nous définissons une fonction continue sur $\mathbb{R} - \{-1\}$. En -1 la fonction f ne peut être prolongée par continuité, car en -1, f n'admet de limite finie.

3) $f(x) = \sin x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$. f est non définie en 0 et donc :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \sin x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} \sin x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \times \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \times \lim_{X\to \infty} \frac{\sin X}{X} = 1 \times 0 = 0$$

Donc f est prolongement par continuité en 0 et 0 est la valeur du prolongement.

La fonction $g(x) = \begin{cases} \sin x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$ est le prolongement par continuité de f en 0

EXERCICE 21

1) On a : $D_f = \mathbb{R} - \{-1 ; 2\}$

On a : $\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to 2} f(x) = \infty$; $\lim_{x\to 3} f(x) = \frac{9}{2}$

De même, $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{x^2+2x+3}{x^2-x-2} = \frac{11}{0} = \infty$

f n'est pas définie en -1 et 2 et n'est donc pas continue en -1 et 2. Par contre, f est continue en 3

2) a) La fonction g est continue pour $x \neq 1$

b) On a :

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{1+3x^2}-2}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1+3x^2-4}{(x-1)(\sqrt{1+3x^2}+2)} = \lim_{x\to 1} \frac{3(x-1)(x+1)}{(x-1)(\sqrt{1+3x^2}+2)}$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{3(x+1)}{\sqrt{1+3x^2}+2} = \frac{3}{2}$$

On peut prolonger g par continuité sur $\mathbb{R}$: $\begin{cases} h(x) = g(x) & \text{si} \quad x \neq 1 \\ h(0) = \frac{3}{2} \end{cases}$

EXERCICE 22

1) a) La fonction x^2 est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $\mathbb{R}_+$; $\sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Donc f est continue sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

b) La fonction $x \longmapsto \pi \tan x$ est continue sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$. Donc g est continue sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) La fonction $x \longmapsto x^2 + 1 + \cos x$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions continues et de plus, $x^2 + 1 + \cos x \neq 0$ pour tout réel donc h est continue sur $\mathbb{R}$.

d) La fonction $x \longmapsto x + \sin x$ est continue sur $\mathbb{R}$; La fonction $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc h est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$.

e) La fonction $x \longmapsto 1 + \sin x$ est positive et continue sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $x \longmapsto \sqrt{1 + \sin x}$ est continue sur $\mathbb{R}$

f) La fonction $x \longmapsto \cos x$ est continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$; la fonction $x \longmapsto E(x)$ est continue sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$. Donc u est continue sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$

EXERCICE 26

1) Pour $x \in]1\,;\,+\infty[$, u et v sont dérivables et pour $x \in]1\,;\,+\infty[$ on a :

$$u'(x) = -1 - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = -\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right) < 0 \;;\; v'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} - 1 = \left(\frac{x - \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}\right) > 0$$

Donc les fonctions u et v sont respectivement décroissante et croissante sur $]1\,;\,+\infty[$

2) a) On a : $I_k = [v(k)\,;\,+\infty[$ et $I_{k+1} = [v(k+1)\,;\,+\infty[$.

Or v est croissante et comme $k+1 > k$ alors $v(k+1) > v(k)$.

Ainsi : $[v(k+1)\,;\,+\infty[\subset [v(k)\,;\,+\infty[$ ou encore $\underline{I_{k+1} \subset I_k}$ (1)

De même : $J_k = [u(k)\,;\,+\infty[$ et $J_{k+1} = [u(k+1)\,;\,+\infty[$.

Or u est décroissante et comme $k+1 > k$ alors $u(k+1) < u(k)$.

Ainsi : $]-\infty\,;\,u(k+1)] \subset]-\infty\,;\,u(k)]$ ou encore $\underline{J_{k+1} \subset J_k}$ (2)

b) Pour tout $k \leqslant n$, on a :

$$I_n \cup J_n =]-\infty\,;\,u(n)] \cup [v(n)\,;\,+\infty[\quad ; \quad I_k \cup J_k =]-\infty\,;\,u(k)] \cup [v(k)\,;\,+\infty[$$

On a : $(I_n \cup J_n) \cap (I_k \cup J_k) = [I_n \cap (I_k \cup J_k)] \cup [J_n \cap (I_k \cup J_k)]$

On a : $I_n \cap (I_k \cup J_k) = (I_n \cap I_k) \cup (I_n \cap J_k) = I_n \cup \emptyset = I_n$

De même, $J_n \cap (I_k \cup J_k) = (J_n \cap I_k) \cup (J_n \cap J_k) = \emptyset \cup J_n = J_n$

Ainsi : $(I_n \cup J_n) \cap (I_k \cup J_k) = I_n \cup J_n$ et donc $\underline{I_n \cup J_n \subseteq I_k \cup J_k}$

3) a) f_k existe si et seulement si $x^2 + 2kx + 1 \geqslant 0$. $\Delta' = k^2 - 1 \geqslant 0$ car $k \geqslant 1$.

Donc $x_1 = -k - \sqrt{k^2-1}$ et $x_2 = -k + \sqrt{k^2-1}$

Ainsi f_k existe si et seulement si : $x \in]-\infty\,;\,-k-\sqrt{k^2-1}] \cup [-k+\sqrt{k^2-1}\,;\,+\infty[\Rightarrow \underline{D_{f_k} = I_k \cup J_k}$

b) f existe si et seulement si $x^2 + 2kx + 1 \geqslant 0 \;\forall k \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Donc $\underline{D_f = \prod_{k=1}^{n}(I_k \cup J_k) = I_n \cup J_n}$

4) Posons $A(x) = \sqrt{x^2 + 2kx + 1} - \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$. Alors :

$$\lim_{x\to+\infty} A(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2kx+1} - \sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2kx+1-x^2-\frac{1}{n^2}}{\sqrt{x^2+2kx+1}+\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2kx+1-\frac{1}{n^2}}{\sqrt{x^2+2kx+1}+\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(2k+\frac{1-\frac{1}{n^2}}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{2k}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2x^2}}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2k+\frac{1-\frac{1}{n^2}}{x}}{\sqrt{1+\frac{2k}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2x^2}}} = k$$

On a donc : $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2kx+1} - \sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}} = k$

On a :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{x^2+2kx+1} - \sqrt{n^2x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{x^2+2kx+1} - n\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{x^2+2kx+1} - \sum_{k=1}^{n} \sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}} = \lim_{x\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{x^2+2kx+1} - \sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Ainsi : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{n(n+1)}{2}$

EXERCICE 27

La fonction f présente une discontinuité en 0.

1) On ne peut pas trouver $\alpha \in I$ tel que $f(\alpha) = 6$ car 6 n'est pas une valeur prise par f.

2) Sur l'intervalle $[-2\,;0[$, f est continue et strictement croissante. Puisque $\frac{1}{10} \in [f(-2)\,;\lim_{x\to0^+} f(x)[$, il existe un unique nombre $\beta \in I$ tel que $f(\beta) = \frac{1}{10}$.

3) Sur l'intervalle $[0\,;2]$, f est continue et strictement croissante. Puisque $\frac{1}{10} \in [f(-2)\,;\lim_{x\to0^+} f(x)[$, il existe un unique nombre $\gamma \in [0\,;2]$ tel que $f(\gamma) = 2{,}5$.

EXERCICE 1

$$\lim_{x\to a}\frac{\tan x-\tan a}{a-x}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\sin a}{\cos a}}{a-x}=\lim_{x\to a}\frac{\sin x\cos a-\sin a\cos x}{(a-x)\cos x\cos a}=\frac{1}{\cos^2 a}\lim_{x\to a}\frac{\sin(x-a)}{(a-x)}=-\frac{1}{\cos^2 a}$$

$$\underline{\lim_{x\to a}\frac{\tan x-\tan a}{a-x}=-\frac{1}{\cos^2 a}}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{\cos x-\cos a}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{\sin x-\sin a}{x-a}}{\frac{\cos x-\cos a}{x-a}}=\frac{\sin'(a)}{\cos'(a)}=-\frac{\cos a}{\sin a}=-\cot ana$$

$$\underline{\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{\cos x-\cos a}=-\frac{1}{\tan a}}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin(x-a)}{a-x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{-t}=-\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=-1$$

$$\underline{\lim_{x\to a}\frac{\sin(x-a)}{a-x}=-1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}=\frac{\frac{\sin 3x}{3x}\times 3x}{\frac{\sin 2x}{2x}\times 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 3x}{3x}}{\frac{\sin 2x}{2x}}\times\frac{3x}{2x}=\frac{3}{2}$$

$$\underline{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}=\frac{3}{2}}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{xf(a)-af(x)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\overbrace{xf(a)-af(a)+af(a)-af(x)}^{\text{terme ajout}}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)f(a)-a(f(x)-f(a))}{x-a}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{(x-a)f(a)-a(f(x)-f(a))}{x-a}=f(a)-a\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f(a)-af'(a)$$

Thierno Korka DIALLO – Directeur Technique de SENESAC
Ingénieur électromécanicien, diplômé de l'Ecole Polytechnique de Thiès

$$\lim_{x\to a}\frac{xf(a)-af(x)}{x-a}=f(a)-af'(a)$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin(x^2)-\sin(a^2)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{\sin(x^2)-\sin(a^2)}{x^2-a^2}}{\dfrac{x-a}{x^2-a^2}}=2a\cos(a^2)$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin(x^2)-\sin(a^2)}{x-a}=2a\cos(a^2)$$

EXERCICE 1

1) Etudions la dérivabilité de f en 0

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\sqrt{x}=0$ $\qquad \left(\dfrac{d(x^2\sqrt{x})}{dx}\right)_{x=0}=0$

b) $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}x=0\\ \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}(-x)=0\end{cases}\Rightarrow \left(\dfrac{d(x|x|)}{dx}\right)_{x=0}=0$

c) On a

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{x^2+|x|}{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{x^2+x}{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x+1}{x^2+1}=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\dfrac{x^2+|x|}{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\dfrac{x^2-x}{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-1}{x^2+1}=-1$$

Donc f n'est pas dérivable au point $x_0=0$.

2) Etudions la dérivabilité de f au point a indiqué

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x^2+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2-2x-2)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x^2-2x-2)=-3$

$$\left(\frac{d(x^3-3x^2+2)}{dx}\right)_{x=1}=-3$$

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\dfrac{x+3}{x-1}-5}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4(x-2)}{(1-x)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4}{1-x}=-4$

$$\left(\frac{d\left(\frac{x+3}{x-1}\right)}{dx}\right)_{x=2}=-4$$

EXERCICE 3

1) a) On commence d'abord par écrire f sans symboles de valeur absolue.

(i) Si $x < -1$ alors $x + 1 < 0$ et donc $|x+1| = -x - 1$.

Ainsi : $f(x) = \dfrac{3x - 7(-x-1)}{x^2+2x} = \dfrac{10x+7}{x^2+2x}$ et donc :

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x\to -1^-} \frac{\dfrac{10x+7}{x^2+2x} - 3}{x+1} = \lim_{x\to -1^-} \frac{-3x^2+4x+7}{(x+1)(x^2+2x)} = \lim_{x\to -1^-} \frac{-3\left(x-\frac{7}{3}\right)(x+1)}{(x+1)(x^2+2x)}$$

$$= \lim_{x\to -1^-} \frac{-3\left(x-\frac{7}{3}\right)}{(x^2+2x)} = -10$$

(ii) Si $x > -1$ alors $x + 1 > 0$ et donc $|x+1| = x + 1$.

Ainsi : $f(x) = \dfrac{3x - 7(x+1)}{x^2+2x} = \dfrac{-4x-7}{x^2+2x}$ et donc :

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x\to -1^+} \frac{\dfrac{-4x-7}{x^2+2x} - 3}{x+1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{-3x^2-10x-7}{(x+1)(x^2+2x)} = \lim_{x\to -1^+} \frac{-3\left(x+\frac{7}{3}\right)(x+1)}{(x+1)(x^2+2x)}$$

$$= \lim_{x\to -1^+} \frac{-3\left(x+\frac{7}{3}\right)}{(x^2+2x)} = 4$$

On a : $f'_g(-1) \neq f'_d(-1)$ et on conclut que f n'est pas dérivable au point $x_0 = -1$.

b) On commence d'abord par écrire f sans symboles de valeur absolue.

(i) Si $x < 0$ alors $|x| = -x$. Ainsi : $f(x) = -x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ et donc :

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}}{x} = \lim_{x\to 0^-} -\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = -1$$

(ii) Si $x > 0$ alors $|x| = x$.

Ainsi : $f(x) = +x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ et donc :

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{+x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}}{x} = \lim_{x\to 0^-} +\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = +1$$

On a : $f'_g(0) \neq f'_d(0)$ et on conclut que f n'est pas dérivable au point $x_0 = 0$

c) On fait un changement de variable $t = x - 1$. On a :

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x\sin(\pi x)}{x-1}+\lim_{x\to 1}\frac{\frac{\sin(\pi x)}{x}}{x-1}=\lim_{t\to 0}\frac{(t+1)\sin(\pi(t+1))}{t}+\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\sin(\pi(t+1))}{t+1}}{t}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{t\to 0}-(t+1)\frac{\sin(\pi t)}{t}+\lim_{t\to 0}-\frac{\frac{\sin(\pi t)}{t}}{t+1}=-\pi-\pi=-2\pi$$

Donc f n'est pas dérivable au point $x_0=1$

d) $f(x)=xE(x)$; $x_0=0$.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{xE(x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}E(x)=0$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{xE(x)}{x}=\lim_{x\to 0^-}E(x)=-1$$

On a : $f_g'(0)\neq f_d'(0)$ et on conclut que f n'est pas dérivable au point $x_0=0$

e) $f(x)=\begin{cases}3-2x & si \quad x\,\pi\,0\\ 2x+3+\sqrt{x} & si \quad x\geq 0\end{cases}$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2x+3+\sqrt{x}-3}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2x+\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2x}{x}+\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{x}=+\infty$$

On conclut directement que f n'est pas dérivable au point $x_0=0$

f) $f(x)=\begin{cases}x\sqrt{3-x} & si \quad x\leq 3\\ (x-3)\sqrt{x-3} & si \quad x\,\phi\,3\end{cases}$

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{(x-3)\sqrt{x-3}}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\sqrt{x-3}=0$$

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{x\sqrt{3-x}}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{x\sqrt{3-x}}{-\sqrt{3-x}\sqrt{3-x}}=\lim_{x\to 3^-}\frac{x}{-\sqrt{3-x}}=-\infty$$

On conclut que f n'est pas dérivable au point $x_0=3$.

g) On commence d'abord par écrire g sans symboles de valeur absolue.

En effet, $2x^2+3x-5=0 \iff x=1$ ou $x=-\frac{5}{2}$.

x	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$		1	$+\infty$
$2x^2+3x-5$	$+$	0	$-$	0	$+$
$\lvert 2x^2+3x-5\rvert$	$2x^2+3x-5$	0	$-2x^2-3x+5$	0	$2x^2+3x-5$
$\sqrt{\lvert 2x^2+3x-5\rvert}$	$\sqrt{2x^2+3x-5}$	0	$\sqrt{-2x^2-3x+5}$	0	$\sqrt{2x^2+3x-5}$

Dérivabilité à droite

Thierno Korka DIALLO – Directeur Technique de SENESAC
Ingénieur électromécanicien, diplômé de l'Ecole Polytechnique de Thiès

CE $\Sigma\pi\int$

$$\lim_{x\to-\frac{5}{2}^+}\frac{f(x)-f\left(-\frac{5}{2}\right)}{x-\left(-\frac{5}{2}\right)}=\lim_{x\to-\frac{5}{2}^+}\frac{\sqrt{-2x^2-3x+5}}{x+\frac{5}{2}}=\lim_{x\to-\frac{5}{2}^+}\frac{\sqrt{-2\left(x+\frac{5}{2}\right)(x-1)}}{\sqrt{x+\frac{5}{2}}\sqrt{x+\frac{5}{2}}}=\lim_{x\to-\frac{5}{2}^+}\frac{\sqrt{-2(x-1)}}{\sqrt{x+\frac{5}{2}}}=$$

$$+\infty$$

On conclut que f n'est pas dérivable au point $x_0=-\frac{5}{2}$ car sa dérivée à droite est infinie

EXERCICE 4

1) Domaine de définition

La fonction f existe si et seulement si : x^2-1 existe et $x<1$ ou $\frac{x-1}{x+1}$ existe et $x\geqslant 1$.

Si et seulement si : $x\in\mathbb{R}$ et $x<1$ ou $x\neq-1$ et $x\geqslant 1$.

Si et seulement si : $x\in(\mathbb{R}\cap]-\infty;1[)\cup(\mathbb{R}-\{-1\}\cap[1;+\infty[)=\mathbb{R}$. Donc $D_f=\mathbb{R}$

Continuité de f en 1

Continuité à droite

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{x-1}{x+1}=0$$

Continuité à gauche

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}x^2-1=0 \qquad \lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^-}=0=f(0)$$

On conclut que f est continue en 1.

Dérivabilité de f en 1

Dérivabilité à droite

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\frac{x-1}{x+1}}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$$

Dérivabilité à gauche

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}x+1=2$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\neq\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

On conclut que f n'est pas dérivable en 1.

Interprétation

La courbe (C) de la fonction f admet au point $x_0 = 1$ deux demi-tangentes de coefficients directeur 2 et $\frac{1}{2}$

2) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2+6}{x+1} & si \quad x \pi 1 \\ \sqrt{x^2-1}+4 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$

La fonction f existe si et seulement si : $x+1 \neq 0$ et $x \pi 1$ ou $x^2-1 \geq 0$ et $x \geq 1$

Domaine de définition : $\mathbb{R}$

Continuité en 1

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \sqrt{x^2-1}+4 = 4 \qquad ; \qquad \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{2x^2+6}{x+1} = \frac{8}{2} = 4$$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x)$ donc f est continue en 1 et $f(1) = 4$

Dérivabilité en 1

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\sqrt{x^2-1}+4-4}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{\frac{2x^2+6}{x+1}-4}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{2x^2-4x+2}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \to 1^-} \lim_{x \to 1^-} \frac{2(x-1)}{x+1} = 0$$

Interprétation : f n'est pas dérivable en 1 et admet une demi-tangente verticale à droite et une demi-tangente horizontale à gauche au point $x_0 = 1$

3) $f(x) = \begin{cases} -2\sqrt{1-x|x|} & si \quad x \leq 1 \\ \dfrac{1-x}{\sqrt{x^2-2x+5}} & si \quad x \phi 1 \end{cases}$

La fonction f existe si et seulement si : $1-x|x| \geq 0$ et $x \leq 1$ ou x^2-2x+5 et $x \phi 1$

Domaine de définition : $\mathbb{R}$

Continuité en 1

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{1-x}{\sqrt{x^2-2x+5}} = 0 \qquad ; \qquad \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} -2\sqrt{1-x^2} = 0$$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x)$ donc f est continue en 1 et $f(1) = 0$

Dérivabilité en 1

CE $\Sigma\pi\int$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1-x}{\sqrt{x^2-2x+5}}}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{-(x-1)}{(x-1)\sqrt{x^2-2x+5}}=\lim_{x\to 1^+}\frac{-1}{\sqrt{x^2-2x+5}}=-\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-2\sqrt{1-x^2}}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-2\sqrt{(1-x)(1+x)}}{-\sqrt{(1-x)}\sqrt{(1-x)}}=\lim_{x\to 1^-}2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=+\infty$$

Interprétation : f n'est pas dérivable en 1 et admet une demi-tangente oblique à droite de coefficient directeur $-\frac{1}{2}$ et une demi-tangente verticale à gauche au point $x_0 = 1$.

EXERCICE 5

1) L'équation $x^3 + 3x = 5$ étant équivalente à $x^3 + 3x - 5 = 0$, on note $f(x) = x^3 + 3x - 5$, qui est définie, continue sur $\mathbb{R}$.

On dérive : pour tout réel x, $f'(x) = 3(x^2+1) > 0$, f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Puisque $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $0 \in]-\infty\,;\,+\infty[$ donc $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}$

En utilisant la calculatrice, on peut dresser un tableau de valeurs de $f(x)$ qui nous permet d'affirmer que $1{,}15 < \alpha < 1{,}16$.

Une valeur approchée de α à 0,01 près est donc 1,15.

EXERCICE 6

1) f est une fonction polynôme, donc définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $f'(x) = 6x^2 + 8x + 2$.

La dérivée $f'(x)$ s'annule aux points -1 et $-\frac{1}{3}$. On obtient alors le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{3}$		$-\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	19/27	↗	$-\infty$

La fonction f est continue et strictement croissante sur $]-\infty\,;\,-1]$. Donc f est bijective et réalise une bijection de $]-\infty\,;\,-1]$ vers $]-\infty\,;\,1]$. Comme $0 \in]-\infty\,;\,1]$, alors il existe un unique réel x_0 de $]-\infty\,;\,-1]$ tel que $f(x_0) = 0$

2) On a : $f(-1{,}55) = 0{,}06225 > 0$ et $f(-1{,}56) = -0{,}102832 < 0$ donc $x_0 \in]-1{,}56\,;\,-1{,}55[$ et $x_0 \approx \frac{-1{,}56+(-1{,}55)}{2} = -1{,}55$. Donc $-1{,}55$ est une valeur approchée de x_0 à 10^{-2} près

EXERCICE 7

Première partie

1) $F(x) = \frac{x^2}{2} + k$

2) $F(x) = \frac{x^4}{4} + k$

3) $F(x) = \frac{x^6}{2} + x + k$

4) $F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + k$

5) $F(x) = 7\sin x + 2\cos x + k$ 6) $F(x) = -\frac{1}{x} + k$ 7) $F(x) = 2\sqrt{x} + k$ 8) $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$

Deuxième partie

1) $f(x) = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{(x-1)^3} = \frac{a(x-1)+b}{(x-1)^3} = \frac{ax+b-a}{(x-1)^3} = \frac{2x-3}{(x-1)^3}$

Par identification : $a = 2$; $b - a = -3 \Rightarrow b = a - 3 = 2 - 3 = -1$

Donc : $a = 2$; $b - a = -3 \Rightarrow b = a - 3 = 2 - 3 = -1$

Finalement : $f(x) = \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-1)^3}$

2) Une primitive de $x \alpha \frac{1}{(x-1)^2}$ est une fonction de la forme : $x \alpha \frac{-1}{x-1} + k$

Une primitive de $x \alpha \frac{1}{(x-1)^3}$ est une fonction de la forme : $x \alpha \frac{-1}{2(x-1)^2} + k$

Donc une primitive de $f(x) = \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-1)^3}$ est une fonction de la forme : $F(x) = -\frac{2}{x-1} + \frac{1}{2(x-1)^2} + k$

EXERCICE 8

Première partie

1) On a : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$. Donc : $F(x) = \sqrt{x^2+1} + k$

2) On a : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{3x^2+1}} = \frac{1}{6}\frac{6x}{\sqrt{3x^2+1}}$. Donc : $F(x) = \frac{\sqrt{3x^2+1}}{3} + k$

3) $f(x) = \frac{x^3}{(x^4+1)^2} = \frac{1}{4} \times \frac{4x^3}{(x^4+1)^2}$. Donc : $F(x) = -\frac{1}{4(x^4+1)} + k$

4) On a : $f(x) = \sin x \cos^3 x = -1 \times -\sin x \cos^3 x$. Donc : $F(x) = -\frac{\cos^4 x}{4} + k$

5) On a : $f(x) = x\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}}$. Donc : $F(x) = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + k$

6) On a : $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = -\frac{-\sin x}{\cos^2 x}$. Donc : $F(x) = \frac{1}{\cos x} + k$

CE $\Sigma\pi\int$

7) On pose $u = \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)'$ implique donc $u' = \cos 2x$ et $v = x$ implique $v' = 1$. Sachant que $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ on obtient : $f(x) = x\cos 2x = u'v = x\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)$. Donc $\underline{F(x) = \frac{x\sin 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} + k}$

8) $f(x) = \cos 2x \cos^2 x = \cos 2x \cdot \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{1}{2}\left(\cos 2x + \cos^2 2x\right) = \frac{1}{2}\left(\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right)$

Donc $\underline{F(x) = \frac{\sin 4x}{16} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{4} + k}$

9) $f(x) = \cos 3x \cos 5x = \frac{1}{2}\left[\cos(3x+5x) + \cos(3x-5x)\right] = \frac{\cos 8x}{2} + \frac{\cos 2x}{2}$

Donc : $\underline{F(x) = \frac{\sin 8x}{16} + \frac{\sin 2x}{4} + k}$

10) $f(x) = \sin 3x \sin 4x = -\frac{1}{2}\left[\cos(3x+4x) - \cos(3x-4x)\right] = -\frac{\cos 7x}{2} + \frac{\cos x}{2}$

Donc : $\underline{F(x) = -\frac{\sin 7x}{14} + \frac{\sin x}{2} + k}$

11) $\sin x \sin 3x = -\frac{1}{2}\left[\cos(3x+x) - \cos(3x-x)\right] = -\frac{\cos 4x}{2} + \frac{\cos 2x}{2}$

Donc : $f(x) = \sin x \sin 3x \cos 5x = \left(-\frac{\cos 4x}{2} + \frac{\cos 2x}{2}\right)\cos 5x = -\frac{\cos 4x \cos 5x}{2} + \frac{\cos 2x \cos 5x}{2}$

Finalement : $f(x) = -\frac{\cos 9x}{4} - \frac{\cos x}{4} + \frac{\cos 7x}{4} + \frac{\cos 3x}{4}$

Donc : $\underline{F(x) = -\frac{\sin 9x}{36} - \frac{\sin x}{4} + \frac{\sin 7x}{28} + \frac{\sin 3x}{12} + k}$

EXERCICE 10

1) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a : $g'(x) = 1 + \sin x > 0$. Donc g est croissante sur $\mathbb{R}$.

La fonction g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc g est bijective et réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Comme $0 \in \mathbb{R}$, il existe alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$. De plus, $g\left(\frac{\pi}{6}\right) = -0{,}34 < 0$ et $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0{,}078 > 0$ donc $\underline{\alpha \in \left]\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{4}\right[}$

2) Puisque g est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc elle est continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $\left]\alpha ; \frac{\pi}{4}\right[$ et donc d'après le théorème des accroissements finis, il existe un réel $c \in \left]\alpha ; \frac{\pi}{4}\right[$ tel que $g'(c) = \frac{g\left(\frac{\pi}{4}\right) - g(\alpha)}{\frac{\pi}{4} - \alpha}$.

Or $g(\alpha) = 0$ donc $g'(c) = \frac{g\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\pi}{4} - \alpha} \Rightarrow \underline{g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)g'(c)}$

a) La fonction g' est dérivable et $g''(x) = \cos x > 0 \ \forall x \in \left]\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{4}\right[$.

La fonction g' est croissante d'où : $g'\left(\frac{\pi}{6}\right) < g'(\alpha) < g'(c)$.

Or $g'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}$ donc $\frac{3}{2} < g'(\alpha) < g'(c)$ ou encore $\underline{g'(c) > \frac{3}{2}}$

On a : $g'(c) = \frac{g\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\pi}{4}-\alpha} \Rightarrow \frac{g\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\pi}{4}-\alpha} > \frac{3}{2} \Leftrightarrow \underline{\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}g\left(\frac{\pi}{4}\right) < \alpha < \frac{\pi}{4}}$

EXERCICE 11

1) Le point $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2} ; 2\sqrt{2} - 1\right)$ appartient à la courbe (C) si se coordonnées vérifient l'équation :

$$y_A = ax_A + b + \frac{1}{x_A} \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{2} - 1 = a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + b + \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + b + \sqrt{2} \quad (1)$$

La courbe (C) admet au point $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2} ; 2\sqrt{2} - 1\right)$ une tangente parallèle à l'axe des abscisses (tangente horizontale) si la dérivée $f'(x_A) = 0$. Donc :

$$f'(x) = a - \frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = a - \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = a - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 2$$

(1) donne : $2\sqrt{2} - 1 = 2\sqrt{2} + b \quad \Rightarrow \quad b = -1$

<u>Conclusion</u> : $\underline{(a ; b) = (2 ; -1)}$

2) Soit $\Omega(x_\Omega, y_\Omega)$ le point d'intersection.

Commençons d'abord par chercher les asymptotes à (C).

On a : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} 2x - 1 + \frac{1}{x} = \infty$ donc la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à (C).

On a : $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} 2x - 1 + \frac{1}{x} = \infty$. Donc (C) admet une branche parabolique. Cherchons la nature de la branche parabolique.

On a $f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad f(x) - (2x - 1) = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x \to \infty} f(x) - (2x - 1) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$

Donc la droite d'équation $y(x) = 2x - 1$ est asymptote oblique à (C).

On a ainsi deux asymptotes $x = 0$ et $y(x) = 2x - 1$.

$x_\Omega = 0$ implique $y_\Omega = 2x_\Omega - 1 = -1$. Donc $\Omega\ (0 ; -1)$.

Montrons à présent que Ω est centre de symétrie de (C). Il suffit de vérifier que :

$$f(x_\Omega + x) + f(x_\Omega - x) = 2y_\Omega$$

On a: $f(x_\Omega + x) + f(x_\Omega - x) = f(x) + f(-x) = \left(2x - 1 + \frac{1}{x}\right) + \left(-2x - 1 - \frac{1}{x}\right) = -2$

On conclut que $\Omega(0\,;-1)$ est centre de symétrie de (C)

EXERCICE 12

1) Domaine de définition : $\mathbb{R}$

Pour tout réel x, on a :

$$f'(x) = (x^3 - 6x^2 + 9x - 1)' = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-3)(x-1)$$

Si $x \in]-1\,;3[$, $f'(x) < 0$ et donc f est strictement décroissante.

Si $x \in]-\infty\,;1[\,\cup\,]3\,;+\infty[$, $f'(x) > 0$ et donc f est strictement croissante.

2) (T) : $y(x) = f'(2)(x-2) + f(2) = -3(x-2) + 1 = -3x + 7$. Ainsi (T): $y(x) = -3x + 7$

3) Soit A le point d'intersection de (C) avec l'axe des ordonnées donc $A\begin{pmatrix}0\\f(0)\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$.

Soit $B\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\omega\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$. Donc $\overrightarrow{A\omega}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x\\y+1\end{pmatrix}$ sont colinéaires.

On a : $\overrightarrow{A\omega}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = k\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x\\y+1\end{pmatrix}$ implique : $\begin{cases}2 = kx\\2 = k(y+1)\end{cases}$ donne $kx = k(y+1)$ ou encore $y = x - 1$. On est amené à résoudre l'équation :

$$x^3 - 6x^2 + 9x - 1 = x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad x(x-2)(x-4) = 0$$

Si $x = 0$, alors $y = x - 1 = -1$ et on a le point $A\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$

Si $x = 2$, alors $y = x - 1 = 2$ et on a le point $\omega\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

Si $x = 4$, alors $y = x - 1 = 3$ et on a le point $B\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$

EXERCICE 13

1) $f(x) = 2x^2 + x$; $I = [-2\,;2]$

La fonction f est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier $I = [-2\,;2]$ et pour tout $x \in [-2\,;2]$, $f'(x) = (2x^2 + x)' = 4x + 1$.

Etudions le signe de $f'(x) = 4x + 1$

(i) Si $x \in \left]-\frac{1}{4}\,;2\right]$, $f'(x) > 0$. Donc f est strictement croissante sur $\left]-\frac{1}{4}\,;2\right]$

(ii) Si $x \in \left]-2\,;-\frac{1}{4}\right[$, $f'(x) < 0$. Donc f est strictement décroissante sur $\left]-2\,;-\frac{1}{4}\right[$

CE $\sum\pi\int$

2) $f(x)=\dfrac{1-\sin x}{\cos x}$; $I=\left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right]$

$x\alpha\ 1-\sin x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $I=\left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right]$;

$x\alpha\ \cos x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $I=\left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right]$;

Donc $x\alpha\ \dfrac{1-\sin x}{\cos x}$ est dérivable sur $I=\left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right]$ comme rapport de deux fonctions dérivables sur $I=\left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right]$ et, pour tout $x\in I$, on a : $f'(x)=\dfrac{\sin x-1}{\cos^2 x}$.

On peut facilement remarquer que : $\forall x\in I,\quad -1\ \pi\ \sin x\ \pi\ 1 \quad\Rightarrow\quad -2\ \pi\ \sin x-1\ \pi\ 0$

Donc $f'(x)=\dfrac{\sin x-1}{\cos^2 x}\ \pi\ 0 \quad \forall x\in I$ et on conclut que la fonction f est strictement décroissante

3) $f(x)=\dfrac{x^2+3|x|-1}{x+2}$; $I=D_f$

Domaine de définition : $\mathbb{R}-\{-2\}$.

(i) Si $x>0$, alors $f(x)=\dfrac{x^2+3x-1}{x+2}$ qui est dérivable $\forall x>0$, on a :

$$f'(x)=\left(\frac{x^2+3x-1}{x+2}\right)'=\frac{x^2+4x+7}{(x+2)^2}$$

$f'(x)$ est du signe de x^2+4x+7 qui est un trinome du second degré admettant un discriminant $\Delta=-12$ négatif donc $x^2+4x+7>0,\ \forall x>0$ donc f est strictement croissante pour tout $x>0$.

(ii) Si $x<0$, alors $f(x)=\dfrac{x^2-3x-1}{x+2}$ qui est dérivable pour tout $x<0$, on a :

$$f'(x)=\left(\frac{x^2-3x-1}{x+2}\right)'=\frac{x^2+4x-5}{(x+2)^2}$$

$f'(x)$ est du signe de x^2+4x-5 qui est un trinome du second degré admettant deux racines distinctes $x_1=-5$ et $x_2=1$

Si $x\in\,]-\infty;-5[$, $f'(x)>0$ et f est strictement croissante sur $]-\infty;-5[$

Si $x\in\,]-5;0[$, $f'(x)<0$ et f est strictement décroissante sur $]-5;0[$

EXERCICE 14

1) On obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$		-3		-1		2		$+\infty$
x^2-x-2		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\dfrac{x^2-x-2}{x^2+6x+9}$		$\dfrac{x^2-x-2}{x^2+6x+9}$		$\dfrac{-x^2+x+2}{x^2+6x+9}$		$\dfrac{x^2-x-2}{x^2+6x+9}$	

2) <u>*Dérivabilité à gauche en −1*</u>

$$\lim_{x\to-1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1^-}\frac{\frac{x^2-x-2}{(x+3)^2}}{x+1}=\lim_{x\to-1^-}\frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x+3)^2}=\lim_{x\to-1^-}\frac{x-2}{(x+3)^2}=-\frac{3}{4}$$

<u>*Dérivabilité à droite en −1*</u>

$$\lim_{x\to-1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1^+}\frac{\frac{-x^2+x+2}{(x+3)^2}}{x+1}=\lim_{x\to-1^+}\frac{(x+1)(2-x)}{(x+1)(x+3)^2}=\lim_{x\to-1^+}\frac{2-x}{(x+3)^2}=\frac{3}{4}$$

$$\lim_{x\to-1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}\neq\lim_{x\to-1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$$

Donc <u>f n'est pas dérivable en −1</u>

On établit de manière analogue que <u>f n'est pas dérivable en 2</u>

3) Domaine de définition de la fonction f: $\mathbb{R}-\{-3\}$.

Comme f n'est pas dérivable en −1 et en 2 donc le domaine de dérivabilité est : $\underline{\mathbf{D}_f=\mathbb{R}-\{-3\,;-1\,;2\}}$

Calcul de $f'(x)$

(i) Si $\underline{x\in\,]-1\,;2[}$ alors : $f(x)=\dfrac{-x^2+x+2}{x^2+6x+9}$ et $\underline{f'(x)=-\frac{7x+1}{(x+3)^2}}$

(ii) Si $\underline{x\in\,]-\infty\,;-1[\,\cup\,]2\,;\,+\infty[}$ alors : $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x^2+6x+9}$ et $\underline{f'(x)=\frac{7x+1}{(x+3)^2}}$

EXERCICE 15

On utilise le théorème sur limite des fonctions composées.

a) On a : $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}f(x)=-\infty$ donc $\underline{\lim_{x\to+\infty}f(\sqrt{x})=-\infty}$

b) On a : $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\left(-1+\dfrac{1}{x}\right)=-1$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow-1}f(x)=-5$ donc $\underline{\lim_{x\to+\infty}f\left(-1+\frac{1}{x}\right)=-5}$

c) On a : $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\dfrac{-5}{3+f(x)}=\dfrac{-5}{3-\infty}=0$ donc $\underline{\lim_{x\to+\infty}\frac{-5}{f(x)+3}=0}$

d) On a : $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow0}f(x)=\pm\infty$ donc $\underline{\lim_{x\to+\infty}\left(5-f\left(\frac{1}{x}\right)\right)}$ <u>n'existe pas.</u>

c) Sur $]0\,;+\infty[$, la fonction f est continue et strictement décroissante donc f est bijective et réalise une bijection de $]0\,;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$. Comme $3 \in \mathbb{R}$, il existe un unique β dans $]0\,;+\infty[$ tel que $f(\beta) = 3$.

d) Sur $]0\,;+\infty[$, la fonction f est continue et strictement décroissante donc f est bijective et réalise une bijection de $]0\,;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$. Comme $0 \in \mathbb{R}$, il existe un unique α dans $]0\,;+\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

Signe de $f(x)$

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	

4) a) Sur $]-\infty\,;0[$, f est croissante puis décroissante donc f admet un maximum égal à -5 au point $x_0 = -1$.
Donc la dérivée f' de la fonction f s'annule au point $x_0 = -1$: $\underline{f'(-1) = 0}$

b) On obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

5) a) D'après le tableau de variation de f' on déduit : $\underline{f'_g(-1) > 0}$ et $\underline{f'_d(-1) < 0}$

b) Comme on a un point anguleux en $x_0 = -1$ donc on peut bien avoir $f'_g(-1) = 0$ et $f'_d(-1) \neq 0$ ou $f'_g(-1) \neq 0$ et $f'_d(-1) = 0$.

6) On obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-2		0		α		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f(x)$		$-$		$-$	‖	$+$	0	$-$	
x^3		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	

EXERCICE 18

1) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout réel x de $\mathbb{R}_+$: $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+16}} \geqslant 0 \; \forall\, x \in \mathbb{R}_+$.

La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

La fonction étant strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}_+$, elle est bijective et réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers $f(\mathbb{R}_+) = [f(0)\,;\lim_{x\to+\infty} f(x)[= [4\,;+\infty[$.

2) Soit $y \in [4\,;+\infty[$ tel que $f(x) = y$. Alors $y = \sqrt{x^2+16} \Rightarrow x = \pm\sqrt{y^2-16}$. Comme $x \in \mathbb{R}_+$, alors $x = \sqrt{y^2-16}$ et donc $\underline{f^{-1}(x) = \sqrt{x^2-16}}$

EXERCICE 19

1) Il est évident que f est dérivable sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ et $f'(x) = 2\cos x \sin x = \sin 2x$.

$$x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \leqslant 2x \leqslant \pi \Rightarrow \sin 2x \geqslant 0 \Rightarrow f'(x) \geqslant 0$$

2) sur $]0\,;+\infty[$, la fonction f est continue et strictement décroissante donc f est bijective et réalise une bijection de $]0\,;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$. Comme $5 \in \mathbb{R}$, il existe un unique α dans $]0\,;+\infty[$ tel que $f(\alpha) = 5$.

3) sur $]0\,;+\infty[$, la fonction f est continue et strictement décroissante donc f est bijective et réalise une bijection de $]0\,;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$. Comme $0 \in \mathbb{R}$, il existe un unique α dans $]0\,;+\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

Signe de $f(x)$

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	

4) a) Sur $]-\infty\,;0[$, f est croissante puis décroissante donc f admet un maximum égal à -5 au point $x_0 = -1$. Donc la dérivée f' de la fonction f s'annule au point $x_0 = -1$: $\underline{f'(-1) = 0}$

b) On obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

5) a) D'après le tableau de variation de f' on déduit : $\underline{f'_g(-1) > 0}$ et $\underline{f'_d(-1) < 0}$

b) Comme on a un point anguleux en $x_0 = -1$ donc on peut bien avoir $f'_g(-1) = 0$ et $f'_d(-1) \neq 0$ ou $f'_g(-1) \neq 0$ et $f'_d(-1) = 0$.

6) On obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-2		0		α		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$	‖	$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	‖	$-$	‖	$+$	0	$-$	
x^2		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	

EXERCICE 18

1) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout réel x de $\mathbb{R}_+$: $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+16}} \geqslant 0 \; \forall x \in \mathbb{R}_+$.

La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

La fonction étant strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}_+$, elle est bijective et réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers $f(\mathbb{R}_+) = [f(0)\,;\lim_{x\to+\infty} f(x)[= [4\,;+\infty[$.

2) Soit $y \in [4\,;+\infty[$ tel que $f(x) = y$. Alors $y = \sqrt{x^2+16} \Rightarrow x = \pm\sqrt{y^2-16}$. Comme $x \in \mathbb{R}_+$, alors $x = \sqrt{y^2-16}$ et donc $\underline{f^{-1}(x) = \sqrt{x^2-16}}$

EXERCICE 19

1) Il est évident que f est dérivable sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ et $f'(x) = 2\cos x \sin x = \sin 2x$.

$$x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \leqslant 2x \leqslant \pi \Rightarrow \sin 2x \geqslant 0 \Rightarrow f'(x) \geqslant 0$$

Thierno Korka DIALLO – Directeur Technique de SENESAC
Ingénieur électromécanicien, diplômé de l'Ecole Polytechnique de Thiès

CE $\Sigma\pi\int$

Donc f est strictement croissante sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$. La fonction f étant continue et strictement croissante sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, f est donc bijective et admet par conséquent une bijection réciproque notée f^{-1}.

2) $f'(x)$ s'annule aux points 0 et $\frac{\pi}{2}$ donc f^{-1} n'est pas dérivable aux points $f(0) = 0$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Ainsi f^{-1} dérivable sur $]0\,;1[$ et : $(f^{-1})' = \frac{1}{f'of^{-1}}$.

Soit $y \in]0\,;1[$ tel que $f(x) = \sin^2 x = y$. Donc

On a : $f(x) = \sin^2 x = y \iff \sin x = \sqrt{y} \iff x = \arcsin\sqrt{y}$ donc $f^{-1}(x) = \arcsin\sqrt{x}$.

Ainsi : $F(x) = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}\cos(\arcsin\sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-\sin^2(\arcsin\sqrt{x})}} = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$. Donc $f^{-1}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$

EXERCICE 10

1) Pour $x \in]0\,;2[$, $\frac{\pi}{2}(x-1) \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ et donc $\tan\left[\frac{\pi}{2}(x-1)\right]$ est continue et strictement croissante sur $]0\,;\,2[$ (la dérivée étant strictement positive). Ainsi f est une bijection de $]0\,;2[$ sur $f(]0\,;\,2[)$.

On a : $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{X\to -\frac{\pi}{2}} \tan X = -\infty$ et $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{X\to\frac{\pi}{2}} \tan X = +\infty$

Donc f réalise une bijection de $]0\,;2[$ sur $\mathbb{R}$

2) Soit $h = f^{-1}$

La fonction f est continue et dérivable sur $]0\,;2[$ et : $\forall\, x \in]0\,;\,2[$, $f'(x) = \frac{\pi}{2}\left(1 + \tan^2\left[\frac{\pi}{2}(x-1)\right]\right) \neq 0$.

Ainsi $h = f^{-1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$.

Posons $f^{-1}(x) = y$ avec $x \in \mathbb{R}$, $y \in]0\,;2[$. Donc

$$x = f(y) = \tan\left[\frac{\pi}{2}(y-1)\right] \Rightarrow f'[f^{-1}(x)] = f'(y) = \frac{\pi}{2}\left(1 + \tan^2\left[\frac{\pi}{2}(x-1)\right]\right) = \frac{\pi}{2}(1+x^2)$$

Ainsi : $h'(x) = \frac{2}{\pi(1+x^2)}$

3) Pour tout réel x non nul, on a :

$$c'(x) = h'(x) - \frac{1}{x^2}h'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2}{\pi(1+x^2)} - \frac{1}{x^2}\times\frac{2}{\pi\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{2}{\pi(1+x^2)} - \frac{2}{\pi(1+x^2)} = 0$$

Donc c est une constante pour tout réel x non nul.

Pour $x \in \mathbb{R}_-^*$, $c(x) = h(x) + h\left(\frac{1}{x}\right) = c(-\infty) = h(-\infty) + h(0)$

On a : $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to -\infty} h(x) = 0$;

Calculons $h(0)$. Pour cela, on résout l'équation $f(x) = 0$.

$$f(x) = 0 \iff \tan\left|\frac{\pi}{2}(x-1)\right| = 0 \iff x = 1$$

On a donc $f(1) = 0 \implies 1 = f^{-1}(0) = h(0) \implies \underline{c(x) = 1,\ x \in \mathbb{R}_+^*}$

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $c(x) = h(x) + h\left(\frac{1}{x}\right) = c(+\infty) = h(+\infty) + h(0)$

On a $h(0) = 1$ donc $\underline{c(x) = 2 + 1 = 3,\ x \in \mathbb{R}_+^*}$

EXERCICE 24

1) a) Par hypothèse $f(x)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, donc $f(-x)$ (en fait, si $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$) est aussi est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$g'(x) = f'(x) - f'(-x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+(-x)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

Donc $\underline{g'(x) = 0}$

b) On a : $g(x) = f(x) + f(-x) \implies g(0) = f(0) + f(0) = 2f(0) = 2 \times 0 = 0$

Or $g'(x) = 0$ donc g est une fonction constante et par conséquent $\underline{g(x) = g(0) = 0}$. Donc g est la fonction nulle et comme $g(x) = f(x) + f(-x)$, il vient $f(x) + f(-x) = 0$ ou encore $f(-x) = -f(x)$.

Donc $\underline{f \text{ est impaire}}$.

2) a) Il est clair que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction $x \mapsto f(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $\mathbb{R}_+^*$;

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et en particulier sur $\mathbb{R}_+^*$

Donc $x \mapsto f\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi $x \mapsto f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.

On a :

$$\forall x \in]0\,;+\infty[, \qquad h'(x) = f'(x) - \frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

Donc $\underline{h'(x) = 0}$

b) $h'(x) = 0$ donc h est une fonction constante. Ainsi, il existe une constante c telle que, pour tout $x > 0$, on ait $h(x) = c$. Autrement dit, $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = c$ ou encore $\underline{f(x) = c - f\left(\frac{1}{x}\right)}$

c) On a : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(c - f\left(\frac{1}{x}\right)\right) = c - \lim_{x\to+\infty} f\left(\frac{1}{x}\right)$.

Or $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$ donc $\lim_{x\to+\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

CE $\sum\pi\int$

Ainsi : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = c$

3) a) La fonction $x \longmapsto f(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$;

La fonction $x \longmapsto -x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$;

Donc $x \longmapsto T(x) = f(x) - x$ est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$

On a : $T'(x) = (1+\tan^2 x)f'(\tan x) - 1 = (1+\tan^2 x) \times \frac{1}{1+\tan^2 x} - 1 = 1 - 1 = 0$. Ainsi $\underline{T'(x) = 0}$

b) On a : $T(0) = f(0) - 0 = 0 - 0 = 0$ et comme $T'(x) = 0$ donc T est une fonction constante et par conséquent $T(x) = T(0) = 0$. Ainsi $\underline{T(0) = 0}$

c) On a : $T(x) = 0 \implies f(\tan x) - x = 0 \implies \underline{f(\tan x) = x,\ \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[}$

d) On a : $f(\tan x) = x,\ \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ et donc :

$\underline{f(1) = f\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{4}}$ $\quad$ $\underline{f(\sqrt{3}) = f\left(\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{3}}$ $\quad$ $\underline{f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = f\left(\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{\pi}{6}}$

On a :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty \ ; \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = c \quad \implies \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(\tan x) = c$$

Et comme $f(\tan x) = x$ et $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} x = \frac{\pi}{2}$, on conclut que $\underline{c = \frac{\pi}{2}}$

4) a) On a : $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0,\ \forall x \in [0\,;+\infty[$ donc f est strictement croissante.

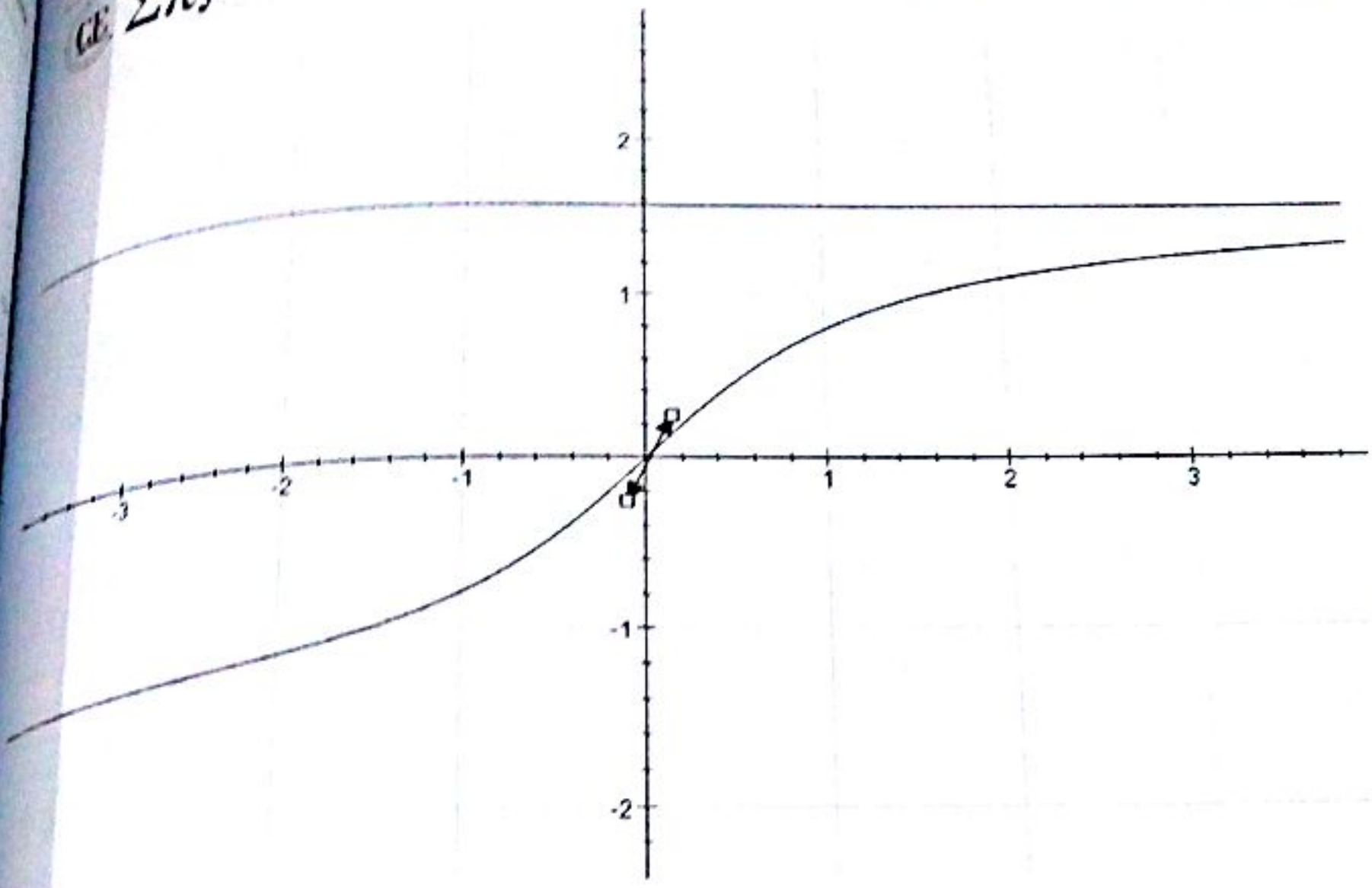
On obtient le tableau suivant :

x	0		$-\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

b) La droite d'équation $y = \frac{\pi}{2}$ est une asymptote verticale à (C_f) en $+\infty$.

Tangente à l'origine : (T) : $f'(0)(x-0) + f(0) = 1 \times (x-0) + 0 = x$.

On obtient la courbe suivante :



EXERCICE 25

1) a) La fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ car $1 + x^2 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ et : $g'(x) = \sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} > 0$.

Donc g est croissante sur $\mathbb{R}$. On obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$-\infty$
$g'(x)$		+	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$-\infty$

b) La fonction g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc g est bijective et réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Or 0 appartient à $\mathbb{R}$, il existe alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires un réel α tel que $g(\alpha) = 0$. De plus, $g(0,7) = -0,145 < 0$ et $g(0,8) = 0,02449 > 0$ donc $\alpha \in [0,7\ ;0,8]$

c) On obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$		α		$-\infty$
$g(x)$		−	0	+	

2) a) La fonction h existe pour tout réel car $1 + x^2 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$. On a :

i) $\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{3} - \sqrt{1+x^2} = -\infty$. Donc $\lim_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$

(ii) On a :

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{3} - \sqrt{1+x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^6}{9} - x^2 - 1}{\frac{x^3}{3} + \sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\left(\frac{x^3}{9} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(\frac{1}{3} + \sqrt{\frac{1}{x^6} + \frac{1}{x^4}}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^3}{9} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}}{\frac{1}{3} + \sqrt{\frac{1}{x^6} + \frac{1}{x^4}}} = +\infty$$

Donc $\underline{\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty}$

b) Pour tout réel x, on a :

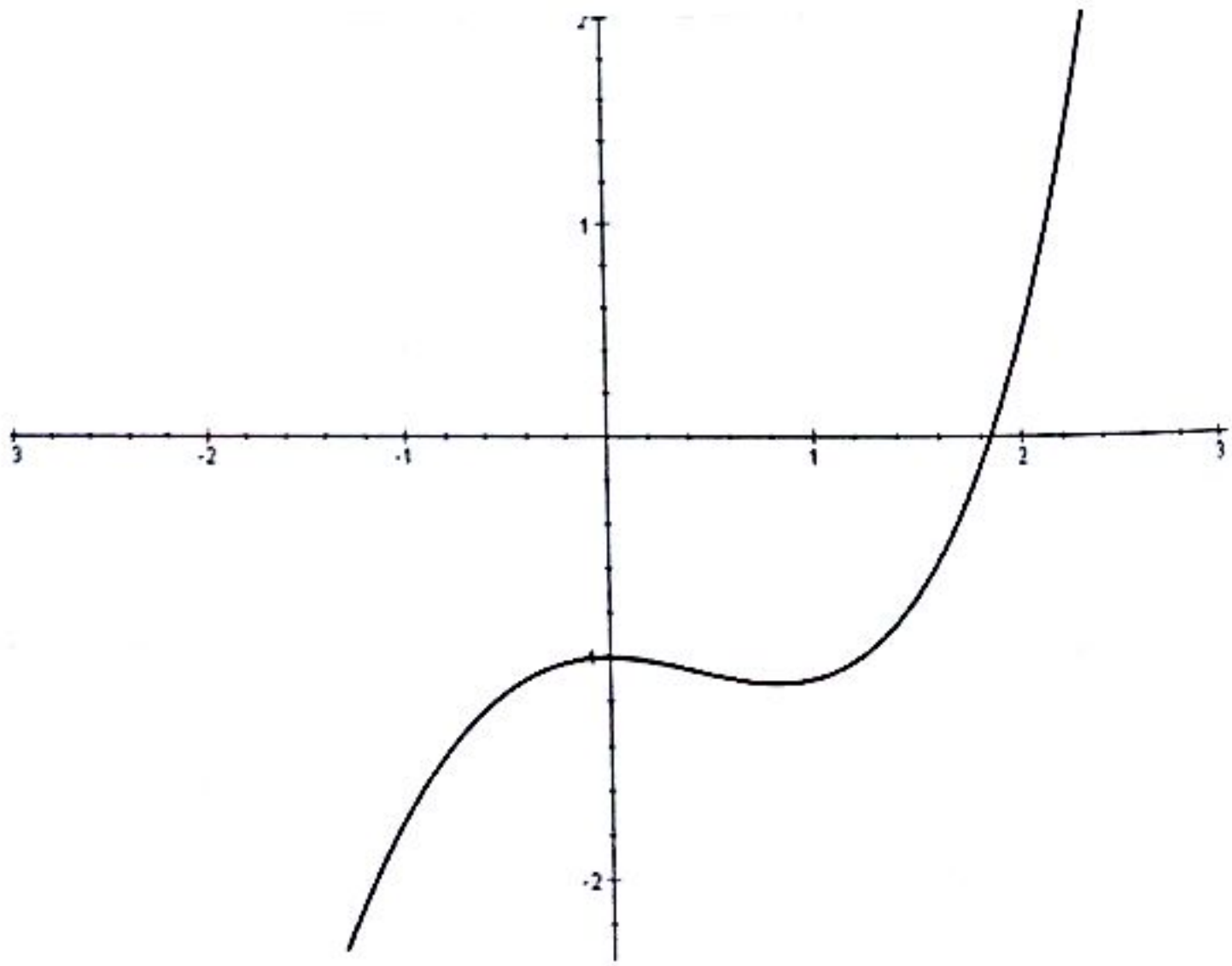
$$h'(x) = \left(\frac{x^3}{3} - \sqrt{1+x^2}\right)' = x^2 - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x^2\sqrt{1+x^2} - x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x\left(x\sqrt{1+x^2} - 1\right)}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{xg(x)}{\sqrt{1+x^2}}$$

Ainsi : $\underline{h'(x) = \frac{xg(x)}{\sqrt{1+x^2}}}$

c) $h'(x)$ est du signe de $xg(x)$ puisque $\sqrt{1+x^2} > 0$. On obtient alors :

x	$-\infty$		0		α		$-\infty$
$g(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
x		$-$	0	$+$		$+$	
$h'(x)$		$+$		$-$		$+$	
h	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$h(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

3) On obtient la courbe suivante :



Exercice 14

1) Continuité en 0

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{x}{x^2+1} = 0 - 0 = 0$; $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \sqrt{x^2+2x} + x = 0 + 0 = 0$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 0$ donc f est continue en 0 et $f(0) = 0$

2) Dérivabilité en 0

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\frac{x}{x^2+1} - x}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2+1} - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x^2+2x} + x}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2+2x-x^2}{x\left(\sqrt{x^2+2x} - x\right)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2}{\sqrt{x^2+2x} - x} = +\infty$$

$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \neq \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ donc f n'est pas dérivable en 0

3) Si $x < 0$ alors $f(x) = \frac{x}{x^2+1} - x$ et $f'(x) = \frac{-x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$

4) Si $x > 0$ alors $f(x) = \sqrt{x^2+2x} + x$ et $f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+2x} + x + 1}{\sqrt{x^2+2x}}$

5) Etudions le signe de f' suivant les valeurs de x. En effet,

i) Si $x < 0$, alors $f'(x) = \frac{-x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2} \leq 0$ car $(x^2+1)^2 \phi 0$ et $-x^2(x^2+3) \leq 0$;

ii) Si $x > 0$, alors $f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+2x} + x + 1}{\sqrt{x^2+2x}} \phi 0$ car $\sqrt{x^2+2x} \phi 0$ et $x + 1 \phi 1 \phi 0$;

Nous en déduisons le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

6) Branches infinies

Branche infinie en $-\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{x}{x^2+1} - x}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2+1} - 1 = -1$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-(-x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2+1} - x + x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$$

Donc la droite d'équation $y(x) = -x$ (la deuxième bissectrice) est une asymptote oblique à (C) en $-\infty$

Branche infinie en $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x}+x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x} + 1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{2}{x}}}{x} + 1 = 1+1 = 2$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(2x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x}+x-2x = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x}-x = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1} = \frac{2}{1+1} = 1$$

Donc la droite d'équation $y(x) = 2x+1$ est une asymptote oblique à (C) en $+\infty$

5) *Position de (C) par rapport à son asymptote oblique d'équation $y(x) = -x$ en $-\infty$ $(x \leqslant 0)$*

On a : $f(x) - y(x) = \frac{x}{x^2+1} - x - (-x) = \frac{x}{x^2+1} \leqslant 0 \quad \forall x \leqslant 0$

Donc (C) est en dessous de son asymptote d'équation $y(x) = -x$ en $-\infty$.

Position de (C) par rapport à son asymptote oblique d'équation $y(x) = -x$ en $+\infty$ $(x > 0)$

On a :

$$f(x) - y(x) = \sqrt{x^2+2x}+x-(2x+1) = \sqrt{x^2+2x}-(x+1) = \frac{x^2+2x-x^2-2x-1}{\sqrt{x^2+2x}+x+1}$$
$$= \frac{-1}{\sqrt{x^2+2x}+x+1} < 0 \quad \forall x > 0$$

Donc (C) est en dessous de son asymptote d'équation $y(x) = 2x+1$ en $+\infty$

6) Si $x \leqslant 0$, alors $f'(x) = \frac{-x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$ et $f''(x) = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$ étudions le signe de $f''(x)$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0
$2x$		$-$		$-$	
x^2-3		$+$	0	$-$	
$f''(x)$		$-$		$+$	

f'' s'annule en $-\sqrt{3}$ en changeant de signe donc on a un point d'inflexion en $x_0 = -\sqrt{3}$

Notez bien : Vous pourrez en faire de même si $x > 0$ mais vous verrez qu'on n'a pas de point d'inflexion si $x > 0$.

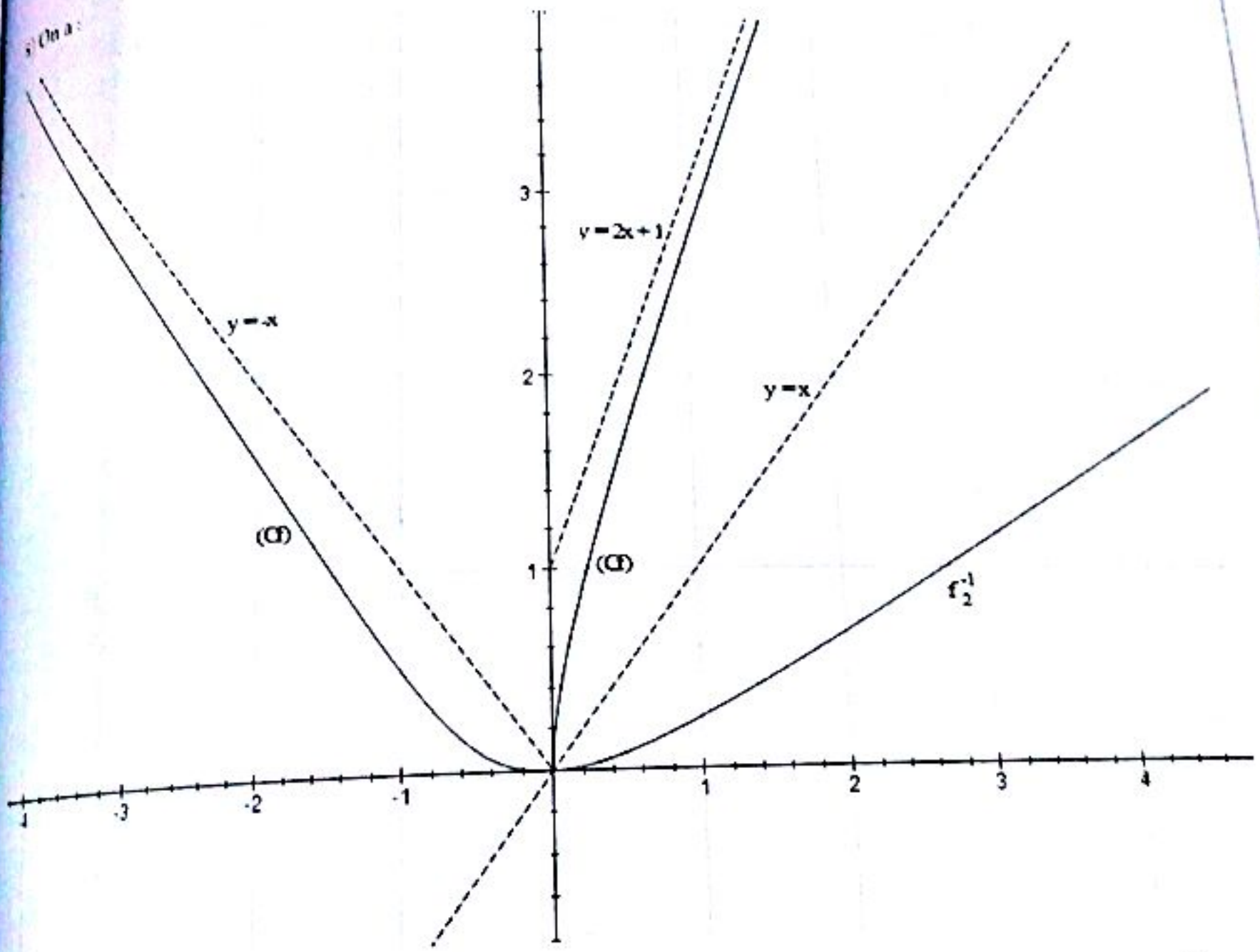
7) Il suffit résoudre dans $]-\infty\,;0]$ l'équation $f'(x_1) = -1$. Donc $x_1 \leqslant 0$ et,

$$f'(x_1) = -1 \iff \frac{-x_1^4 - 3x_1^2}{(x_1^2+1)^2} = -1 \iff -x_1^4 - 3x_1^2 = -(x_1^2+1)^2 = -x_1^4 - 2x_1^2 - 1$$

Ainsi : $-x_1^4 - 3x_1^2 + x_1^4 + 2x_1^2 = -1$ ou encore $x_1^2 = 1$ c'est-à-dire $x_1 = -1$

On obtient le point $A\begin{pmatrix}-1\\ f(-1)\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}-1\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

8) On a :



9) Sur $]-\infty\,;0]$ la fonction f est continue et strictement décroissante donc f est bijective et réalise une bijection de $]-\infty\,;0]$ sur $f(]-\infty\,;0]) = [0\,;\,+\infty[$. f étant bijective, elle admet nécessairement une bijection réciproque notée f^{-1}.

Comme f_1 est la restriction de f à $]-\infty\,;0]$ donc $f_1 = f$ sur $]-\infty\,;0]$. f_1 existe alors.

10) Même démarche qu'au 9).

Soit f_2 la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ dans lui-même par $f_2(x) = f(x) = \sqrt{x^2+2x} + x$.

Soit $y \in]0\,;\,+\infty[$ par $f_2(x) = y$.

$$f_2(x) = y \iff \sqrt{x^2+2x} + x = y \iff \sqrt{x^2+2x} = y - x \quad (1)$$

Cette équation existe si et seulement si : x^2+2x (ce qui est toujours vrai car $x \in]0\,;\,+\infty[$) et $y-x \geqslant 0$ ou encore $y \geqslant x$. Ainsi (1) devient :

$$x^2+2x=(y-x)^2=x^2-2xy+y^2 \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{y^2}{2y+2}$$

On a ainsi : $f_2^{-1}(x)=\frac{x^2}{2x+2}$

EXERCICE 29

1) $f(x)$ existe si et seulement si $x \geqslant 0$ et $x \geqslant 1$ ou $x^2-3x+3 \geqslant 0$ et $x<1$.

(i) $x \geqslant 0$ et $x \geqslant 1 \quad \Rightarrow \quad x \in [1\,;\,+\infty[$

(ii) $x^2-3x+3 \geqslant 0$ toujours vrai et $x<1 \quad \Rightarrow \quad x \in]-\infty\,;1[$

Domaine de définition : $D_f=]-\infty\,;1[\,\cup\,[1\,;\,+\infty[\,=\mathbb{R}$

2) a) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1-\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}1+\frac{1}{x}-\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}1+\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)-x=\lim_{x\to+\infty}x+1-\sqrt{x}-x=\lim_{x\to+\infty}1-\sqrt{x}=-\infty$$

Donc (C) admet une direction asymptotique en $+\infty$, celle de la droite $y(x)=x$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-3x+3}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}}=-1$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)+x=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-3x+3}+x=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x+3}{-x\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}}-x}=\frac{3}{2}$$

Donc la droite (T) : $y=-x+\frac{3}{2}$ est une asymptote oblique à (C) en $-\infty$

b) On a :

$$f(x)-y=\sqrt{x^2-3x+3}-\left(-x+\frac{3}{2}\right)=\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{x^2-3x+3}-x+\frac{3}{2}}\ \phi\ 0 \quad \text{car} \quad \sqrt{x^2-3x+3}-x+\frac{3}{2}\ \phi\ 0$$

au voisinage de $-\infty$. Donc (C) est au-dessus de (T)

3) *Continuité*

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to1+}x+1-\sqrt{x}=1 \text{ et } \lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}\sqrt{x^2-3x+3}=1$$

Donc f est continue en 1 et $f(1) = 1$

Dérivabilité

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x-\sqrt{x}}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{\sqrt{x^2-3x+3}-1}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2-3x+2}{(x-1)\left(\sqrt{x^2-3x+3}+1\right)}$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2-3x+2}{(x-1)\left(\sqrt{x^2-3x+3}+1\right)} = \lim_{x \to 1^-} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2-3x+3}+1\right)} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x-2}{\sqrt{x^2-3x+3}+1} = -\frac{1}{2}$$

4) a) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et est non dérivable en 1. Donc son domaine de dérivabilité est $D = \mathbb{R} - \{1\}$

b) Si $x \in]-\infty ; 1[$, $f(x) = \sqrt{x^2-3x+3}$ alors $f'(x) = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+3}}$

Si $x \in]1 ; +\infty[$, $f(x) = 1 + x - \sqrt{x}$ alors $f'(x) = \frac{2\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}$

c) Il est facile de montrer que $f'(x) \neq 0$ pour tout réel x. Il suffit de résoudre $f'(x) = 0$ sur chacun des intervalles $]-\infty ; 1[$ et $]1 ; +\infty[$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	
f	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

5) a) g la restriction de f à l'intervalle $]-\infty ; 1]$ donc $g(x) = f(x)$ si $x \in]-\infty ; 1]$.

Sur $]-\infty ; 1]$, g est continue et strictement décroissante donc g est bijective et réalise une bijection de $]-\infty ; 1]$ sur $f(]-\infty ; 1]) = [1 ; +\infty[= J$. Ainsi $J = [1 ; +\infty[$

b) g est définie de $]-\infty ; 1] \to [1 ; +\infty[$ donc g^{-1} est définie de $[1 ; +\infty[\to]-\infty ; 1]$.

Rappelons également que g et g^{-1} ont même sens de variation. C'est-à-dire comme g est continue et strictement décroissante sur $]-\infty ; 1]$ donc g^{-1} est continue et strictement décroissante sur $[1 ; +\infty[$. On définit le tableau de variation de g^{-1}.

x	$-\infty$		0
$[g^{-1}(x)]'$		$-$	
g^{-1}	1	↘	$-\infty$

c) Soit $y \in [1 ; +\infty[$ tel que $g(x) = y$.

On a $\sqrt{x^2-3x+3} = y \iff x^2-3x+3-y^2 = 0$

On calcule le discriminant : $\Delta = 9 - 4(3-y^2) = 4y^2 - 3$

Or $y \in [1 ; +\infty[\Rightarrow y \geqslant 1 \Rightarrow y^2 \geqslant 1 \Rightarrow 4y^2 - 3 \geqslant 1 > 0 \Rightarrow \Delta > 0$

On obtient ainsi deux solutions distinctes : $x_1 = \frac{3-\sqrt{4y^2-3}}{2}$ et $x_2 = \frac{3+\sqrt{4y^2-3}}{2}$

Donc f est continue en 1 et $f(1) = 1$

Dérivabilité

$$\lim_{x \to 1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1+} \frac{x-\sqrt{x}}{x-1} = \lim_{x \to 1+} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \to 1+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1-} \frac{\sqrt{x^2-3x+3}-1}{x-1} = \lim_{x \to 1-} \frac{x^2-3x+2}{(x-1)(\sqrt{x^2-3x+3}+1)}$$

$$= \lim_{x \to 1-} \frac{x^2-3x+2}{(x-1)(\sqrt{x^2-3x+3}+1)} = \lim_{x \to 1-} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(\sqrt{x^2-3x+3}+1)} = \lim_{x \to 1-} \frac{x-2}{\sqrt{x^2-3x+3}+1} = -\frac{1}{2}$$ 4) a)

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et est non dérivable en 1. Donc son domaine de dérivabilité est $D = \mathbb{R} - \{1\}$

b) (i) Si $x \in]-\infty ; 1[$, $f(x) = \sqrt{x^2-3x+3}$ alors $f'(x) = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+3}}$

(ii) Si $x \in]1 ; +\infty[$, $f(x) = 1 + x - \sqrt{x}$ alors $f'(x) = \frac{2\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}$

c) Il est facile de montrer que $f'(x) \neq 0$ pour tout réel x. Il suffit de résoudre $f'(x) = 0$ sur chacun des intervalles $]-\infty ; 1[$ et $]1 ; +\infty[$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	
f	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

5) a) g la restriction de f à l'intervalle $]-\infty ; 1]$ donc $g(x) = f(x)$ si $x \in]-\infty ; 1]$.

Sur $]-\infty ; 1]$, g est continue et strictement décroissante donc g est bijective et réalise une bijection de $]-\infty ; 1]$ sur $f(]-\infty ; 1]) = [1 ; +\infty[= J$. Ainsi $J = [1 ; +\infty[$

b) g est définie de $]-\infty ; 1] \to [1 ; +\infty[$ donc g^{-1} est définie de $[1 ; +\infty[\to]-\infty ; 1]$.

Rappelons également que g et g^{-1} ont même sens de variation. C'est-à-dire comme g est continue et strictement décroissante sur $]-\infty ; 1]$ donc g^{-1} est continue et strictement décroissante sur $[1 ; +\infty[$. On déduit le tableau de variation de g^{-1}.

x	$-\infty$		0
$[g^{-1}(x)]'$	‖	$-$	
g^{-1}	1	↘	$-\infty$

c) Soit $y \in [1 ; +\infty[$ tel que $g(x) = y$.

On a : $\sqrt{x^2-3x+3} = y \iff x^2-3x+3-y^2 = 0$

On calcule le discriminant : $\Delta = 9 - 4(3-y^2) = 4y^2 - 3$

Or $y \in [1 ; +\infty[\Rightarrow y \geqslant 1 \Rightarrow y^2 \geqslant 1 \Rightarrow 4y^2 - 3 \geqslant 1 > 0 \Rightarrow \Delta > 0$

On obtient ainsi deux solutions distinctes : $x_1 = \frac{3-\sqrt{4y^2-3}}{2}$ et $x_2 = \frac{3+\sqrt{4y^2-3}}{2}$

Vérifions si $x_1 = \dfrac{3-\sqrt{4y^2-3}}{2} \in D_g =]-\infty\,;1]$?

On a : $4y^2-3 \geq 1 \Rightarrow \dfrac{3-\sqrt{4y^2-3}}{2} \leq \dfrac{3-1}{2} = 1 \Rightarrow x_1 \leq 1 \Rightarrow x_1 = \dfrac{3-\sqrt{4y^2-3}}{2} \in D_g$

$4y^2-3 \geq 1 \Rightarrow \dfrac{3+\sqrt{4y^2-3}}{2} \geq \dfrac{3+1}{2} = 2 \Rightarrow x_2 \geq 2 \Rightarrow x_2 = \dfrac{3+\sqrt{4y^2-3}}{2} \notin D_g$

Ainsi l'équation $g(x) = y$ admet une unique solution $x_1 = \dfrac{3-\sqrt{4y^2-3}}{2}$ et donc $\underline{g^{-1}(x) = \frac{3-\sqrt{4x^2-3}}{2}}$

d) On pose $y = \sqrt{3}$ et trouvons x ?

$y = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{x^2-3x+3} = \sqrt{3} \Leftrightarrow x^2-3x+3 = 3 \Leftrightarrow x^2-3x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 3$

Comme $3 \notin D_g$ et $0 \in D_g$ donc $y = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = 0$

Ainsi : $\left[g^{-1}(\sqrt{3})\right] = \dfrac{1}{g'(0)} = \dfrac{1}{-\dfrac{3}{2\sqrt{3}}} = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3} = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Donc $\underline{(g^{-1})'(\sqrt{3}) = -\frac{2}{\sqrt{3}}}$

6) La fonction h la restriction de f à l'intervalle $[1\,;4]$ donc $h(x) = f(x)$ si $x \in [1\,;4]$.

On a : $h'(x) = 1 - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ et $h''(x) = \dfrac{1}{4x\sqrt{x}}$.

$$x \in [1\,;4] \Rightarrow 1 \leqslant x \leqslant 4 \quad (1) \Rightarrow 4 \leqslant 4\sqrt{x} \leqslant 8 \quad (2)$$

En faisant le produit de (1) et (2), on obtient : $4 \leqslant 4x\sqrt{x} \leqslant 32$

En inversant les termes : $\dfrac{1}{32} \leq \dfrac{1}{4x\sqrt{x}} \leq \dfrac{1}{4}$ ou encore $\underline{\frac{1}{32} \leqslant h''(x) \leqslant \frac{1}{4},\ \forall x \in [1\,;4]}$

Appliquons l'inégalité des accroissements finis sur $[x\,;4]$:

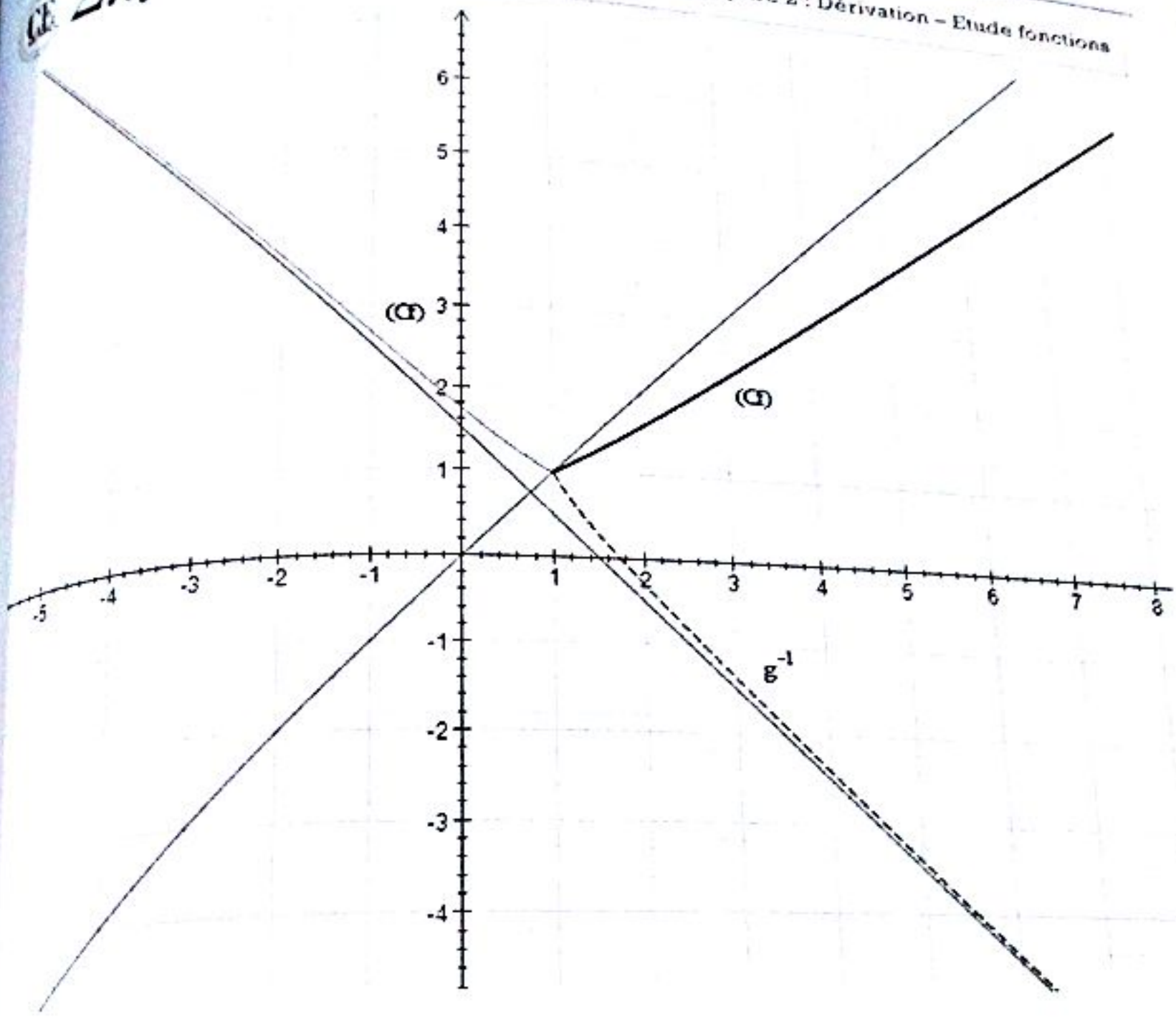
$$\frac{1}{32} \leqslant h''(x) \leqslant \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{(4-x)}{32} \leqslant h'(4) - h'(x) \leqslant \frac{(4-x)}{4}$$

Donc :

$$\frac{(x-4)}{4} + h'(4) = \frac{x-1}{4} \leqslant h'(x) \leqslant \frac{(x-4)}{32} + h'(4) = \frac{x+20}{32} \quad ; \quad h'(4) = \frac{3}{4}$$

Ainsi : $\underline{\frac{x-1}{4} \leqslant h'(x) \leqslant \frac{x+20}{32},\ \forall x \in [1\,;4]}$

7) On obtient la courbe suivante :



EXERCICE 33

1) On a :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x^2}{4}-\frac{x^2}{4}+1}{\frac{x}{2}-\sqrt{\frac{x^2}{4}-1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\frac{x}{2}-\left|\frac{x}{2}\right|\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}} = 0 \Rightarrow \underline{\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0}$$

2) On a : $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x^2}{4}-1 \geqslant 0\right\} =]-\infty\,;\,-2] \cup [2\,;+\infty[$. Ainsi $\underline{D_f =]-\infty\,;\,-2] \cup [2\,;+\infty[}$

Or $x \mapsto \frac{x}{2}$ est continue sur D_f, $x \longmapsto \frac{x^2}{4}-1$ est continue et positive sur D_f, donc $x \longmapsto \sqrt{\frac{x^2}{4}-1}$ est continue sur D_f. D'où <u>f est continue sur D_f comme étant la somme de fonctions continues.</u>

3) a) On a :

$$\lim_{x\to-2^-} \frac{f(x)-f(-2)}{x+2} = \lim_{x\to-2^-} \frac{\frac{x}{2}+\sqrt{\frac{x^2}{4}-1}+1}{x+2} = \lim_{x\to-2^-}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{\frac{x^2}{4}-1}}{x+2}\right) = -\infty$$

Donc f n'est pas dérivable à gauche en -2. Ainsi (C_f) admet au point d'abscisse -2 une demi tangente verticale

b) $x \longmapsto \frac{x}{2}$ est dérivable sur $]-\infty\,;\,-2[$, $x \longmapsto \frac{x^2}{4}-1$ est dérivable et strictement positive sur $]-\infty\,;\,-2[$, donc $x \longmapsto \sqrt{\frac{x^2}{4}-1}$ est dérivable sur $]-\infty\,;\,-2[$. D'où f est dérivable sur $]-\infty\,;\,-2[$ comme étant la somme de fonctions dérivables

c) On a :

$$f'(x)=\frac{1}{2}+\frac{\frac{2x}{4}}{2\sqrt{\frac{x^2}{4}-1}}=\frac{\sqrt{\frac{x^2}{4}-1}+\frac{x}{2}}{2\sqrt{\frac{x^2}{4}-1}}=\frac{-1}{2\sqrt{\frac{x^2}{4}-1}\left(\sqrt{\frac{x^2}{4}-1}-\frac{x}{2}\right)}=\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{4}-1}}\frac{-1}{2\sqrt{\frac{x^2}{4}-1}-x}$$

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{4}-1}}\frac{-1}{2\sqrt{\frac{x^2}{4}-1}-x}$$

d) Il est facile de voir que : $\forall\, x \in\,]-\infty\,;\,-2[,\ 2\sqrt{\frac{x^2}{4}-1}-x \geqslant 0 \quad\Rightarrow\quad f'(x)\leqslant 0.$

x	$-\infty$		-2
f'		$-$	‖
f	0	↘	-1

4) f continue strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,-2[$ donc réalise une bijection de $]-\infty\,;\,-2[$ sur $J = f(]-\infty\,;\,-2[) = [-1\,;\,0[$. Ainsi $J = [-1\,;\,0[$

5) a) On a : $f(-2)=-1 \quad\Leftrightarrow\quad -2=f^{-1}(-1)$.

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(-1)}{x+1}=\lim_{y\to -2^-}\frac{y-(-2)}{f(y)-f(-2)}=\lim_{y\to -2^-}\frac{1}{\frac{f(y)-f(-2)}{y-(-2)}}=0$$

D'où f^{-1} est dérivable à droite en -1. Par suite f^{-1} admet au point d'abscisse -1 une demie tangente horizontale.

b) f est dérivable sur $]-\infty\,;\,-2[$ et f' non nulle sur $]-\infty\,;\,-2[$ est dérivable sur $]-1\,;\,0[$ et comme f^{-1} est dérivable à droite en -1 alors f^{-1} est dérivable sur $[-1\,;\,0[$.

c) Pour tout $y \in\,]-\infty\,;\,-2]$ et $x \in [-1\,;\,0[$, $f(y)=x \quad\Leftrightarrow\quad y=f^{-1}(x)$.

Résolvons l'équation $f(y)=x$ d'inconnue y.

$$f(y)=x \quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{1}{2}y+\sqrt{\frac{y^2}{4}-1} \quad\Leftrightarrow\quad x-\frac{1}{2}y=\sqrt{\frac{y^2}{4}-1} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\left(x-\frac{1}{2}y\right)^2=\frac{y^2}{4}-1\\ x-\frac{1}{2}y\geqslant 0\end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+1 = xy \\ x-\frac{1}{2}y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x^2+1}{x} \\ x-\frac{1}{2}y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \underline{f^{-1}(x) = \frac{x^2+1}{x}, \quad \forall x \in I}$$

EXERCICE 36

1) a) *Domaine de définition* : $\underline{D_f = \mathbb{R}^*}$

b) Limite aux bornes du domaine de définition :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(1-x+\frac{1}{x}\right) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(1-x+\frac{1}{x}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-}\left(1-x+\frac{1}{x}\right) = -\infty \quad ; \quad \lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}\left(1-x+\frac{1}{x}\right) = +\infty$$

En résumé : $\begin{cases} \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \\ \lim_{x\to0^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty \end{cases}$

c) Dérivée et sens de variation

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \ f'(x) = -1-\frac{1}{x^2} = -\frac{x^2+1}{x^2} < 0$$

Donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*$.

d) Tableau de variation :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
f	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$

2) On a :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-x+\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}-1+\frac{1}{x^2}\right) = -1 \ ; \ \lim_{x\to\infty} f(x)-(-x) = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$$

Donc $\underline{(D) : y(x) = -x+1}$ est asymptote oblique à (C_f) à l'infini ($+$ ou $-\infty$).

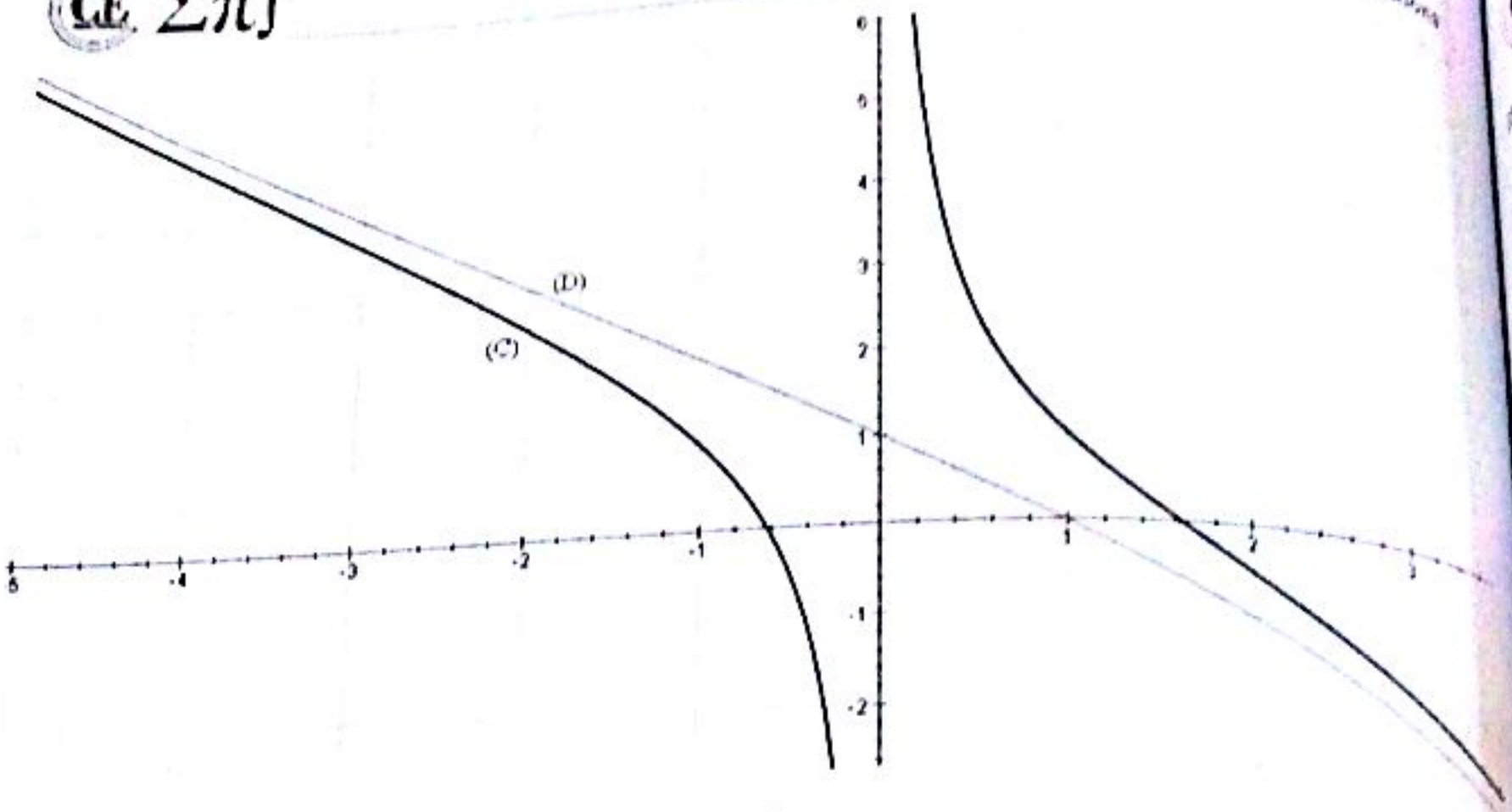
Etudions la position de (C_f) par rapport à (D).

On a : $f(x)-(x-1) = 1-x+\frac{1}{x}+x-1 = \frac{1}{x}$.

Si $x>0$, alors $\frac{1}{x}>0$ et $f(x)-(x-1)>0$ et donc $f(x)>-x+1$ et $\underline{(C_f) \text{ est au-dessus de } (D)}$

Si $x<0$, alors $\frac{1}{x}<0$ et $f(x)-(x-1)<0$ et donc $f(x)<-x+1$ et $\underline{(C_f) \text{ est en dessous de } (D)}$

3) On obtient la courbe suivante :



4) On a : $f(x) = m \quad \Leftrightarrow \quad 1 - x + \frac{1}{x} = m \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - (1-m)x - 1 = 0$

Calculons le discriminant de cette équation : $\Delta_m = (1-m)^2 + 4 = m^2 - 2m + 5$.

Posons $g(m) = m^2 - 2m + 5$. Calculons le discriminant réduit de l'équation « $g(m) = 0$ ».

On a : $\Delta' = (-1)^2 - 5 = -4 < 0$ donc $m^2 - 2m + 5$ est du signe de $a = 1 > 0$ et donc $m^2 - 2m + 5 > 0$ pour tout réel m et donc $g(m) > 0$ d'où donc $\Delta_m > 0$. Ce qui nous permet de dire que l'équation $f(x) = m$ admet deux solutions $x_1 = \frac{1}{2}\left(1 - m - \sqrt{m^2 - 2m + 5}\right)$ et $x_2 = \frac{1}{2}\left(1 - m + \sqrt{m^2 - 2m + 5}\right)$

Conclusion : $S = \left\{x_1 = \frac{1}{2}\left(1 - m - \sqrt{m^2 - 2m + 5}\right) ; x_2 = \frac{1}{2}\left(1 - m + \sqrt{m^2 - 2m + 5}\right)\right\}$

5) a) Evident car $x^2 - (1-m)x - 1 = (x - x_1)(x - x_2)$

b) On a :

$$\overrightarrow{H_1H_2}\begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad H_1H_2^2 = \left(\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + 0^2}\right)^2 = (x_2 - x_1)^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2$$

Or $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2) - 4x_1x_2 = (x_2 + x_1)^2 - 4x_1x_2$

Donc : $H_1H_2^2 = (x_2 - x_1)^2 = (x_2 + x_1)^2 - 4x_1x_2$

c) On a : $H_1H_2^2 = (x_2 + x_1)^2 - 4x_1x_2 = S^2(f(x) = m) - 4P(f(x) = m)$ avec $S(f(x) = m) = 1 - m$ et $P(f(x) = m) = -1$. Donc $H_1H_2^2 = (1-m)^2 + 4 = m^2 - 2m + 5$

6) a) Soit I le milieu de $[H_1H_2]$. Alors I est bel et bien centre du cercle (C_m) car étant milieu $[H_1H_2]$.

Nous avons : $I\begin{pmatrix} \frac{x_{H_1} + x_{H_2}}{2} \\ \frac{y_{H_1} + y_{H_2}}{2} \end{pmatrix} = I\begin{pmatrix} \frac{x_1 + x_2}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = I\begin{pmatrix} \frac{S}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = I\begin{pmatrix} \frac{1-m}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

M_1 est un rayon du cercle (C_m). Alors $\overrightarrow{M_1I_1}\begin{pmatrix} x_{I_1} - x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Nous avons :

$$r^2 = \left(\frac{1}{2}\left(1 - m - \sqrt{m^2 - 2m + 5}\right) - \frac{1-m}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(m^2 - 2m + 5) = \frac{1}{4}[(m-1)^2 - 1 + 5]$$
$$= 1 + \frac{(1-m)^2}{4}$$

Donc $r^2 = 1 + \frac{(1-m)^2}{4}$

b) Connaissant le centre I de (C_m) et le rayon r de (C_m), on déduit $(C_m) : (x - x_I)^2 + (y - y_I)^2 = r^2$

Alors (C_m) $\left(x - \frac{1-m}{2}\right)^2 + y^2 = 1 + \frac{(1-m)^2}{4}$.

En développant cette expression, on obtient : $\underline{(C_m) \ : \ x^2 + y^2 - (1-m)x - 1 = 0}$

EXERCICE 37

a) La fonction $x \longmapsto 1 + x^2$ est dérivable, strictement positive sur $\mathbb{R}$ implique $x \longmapsto \sqrt{1+x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et non nulle implique $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ implique $x \longmapsto 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) On a :

$$f'(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - x \times \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{1 + x^2 - x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3} \quad \Rightarrow \quad \underline{f'(x) = \frac{1}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3}}$$

c) Calculons les limites de f aux bornes du domaine de définition.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{x}{x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = 2$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x \to -\infty} 1 + \frac{x}{-x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \to -\infty} 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = 1 - 1 = 0$$

On obtient les variations suivantes :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	0	$\nearrow$	2

d) D'après les variations de f on a : $\underline{f(x) > 0 \text{ pour tout réel } x}$

e) On a : (T) : $y(x) = f'(x)(x - 0) + f(0) = x + 1$. Donc $\underline{(T) : \ y(x) = x + 1}$

f) On a :

IH_1 est un rayon du cercle (C_m). Alors $\overrightarrow{IH_1}\begin{pmatrix} x_{H_1} - x_I \\ 0 \end{pmatrix}$. Nous avons :

$$r^2 = \left(\frac{1}{2}\left(1 - m - \sqrt{m^2 - 2m + 5}\right) - \frac{1-m}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(m^2 - 2m + 5) = \frac{1}{4}[(m-1)^2 - 1 + 5]$$
$$= 1 + \frac{(1-m)^2}{4}$$

Donc : $r^2 = 1 + \frac{(1-m)^2}{4}$

b) Connaissant le centre I de (C_m) et le rayon r de (C_m), on déduit (C_m) : $(x - x_I)^2 + (y - y_I)^2 = r^2$

Ainsi (C_m) : $\left(x - \frac{1-m}{2}\right)^2 + y^2 = 1 + \frac{(1-m)^2}{4}$.

En développant cette expression, on obtient : $(C_m)\ :\ x^2 + y^2 - (1-m)x - 1 = 0$

EXERCICE 37

1) La fonction $x \longmapsto 1 + x^2$ est dérivable, strictement positive sur $\mathbb{R}$ implique $x \longmapsto \sqrt{1+x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et non nulle implique $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ implique $x \longmapsto 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2) On a :

$$f'(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - x \times \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{1 + x^2 - x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3}$$

3) Calculons les limites de f aux bornes du domaine de définition.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 2$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to-\infty} 1 + \frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} 1 - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1 - 1 = 0$$

On obtient les variations suivantes :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	0	$\nearrow$	2

4) D'après les variations de f on a : $f(x) > 0$ pour tout réel x

5) On a : (T) : $y(x) = f'(x)(x - 0) + f(0) = x + 1$. Donc (T) : $y(x) = x + 1$

6) On a :

CE $\Sigma\pi\int$

$$f(x)-(x+1)=1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-x-1=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-x=\frac{x(1-\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{x(-x^2)}{\sqrt{1+x^2}(1+\sqrt{1+x^2})}$$

$$=-\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}(1+\sqrt{1+x^2})}$$

Si $x<0$, alors $x^3<0$ et donc $-\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}(1+\sqrt{1+x^2})}>0$ et $(\mathcal{C})$ est au-dessus de (T)

Si $x>0$, alors $x^3>0$ et donc $-\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}(1+\sqrt{1+x^2})}<0$ et $(\mathcal{C})$ est en dessous de (T)

7) D'après 5), le point de $(\mathcal{C})$ d'abscisse 0 est un point d'inflexion de $(\mathcal{C})$ donc $W\binom{0}{1}$ est un point d'inflexion de $(\mathcal{C})$

8) Si $x\in\mathbb{R}, -x\in\mathbb{R}$ et : $f(-x)=1-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=2-f(x)$ donc le point W est un centre de symétrie de $(\mathcal{C})$

9) On a $\lim_{x\to+\infty}f(x)=2$ donc $(\mathcal{D}): y=2$ est une asymptote horizontale de $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$

De même, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$ donc l'axe des abscisses est une asymptote horizontale de $(\mathcal{C})$ au voisinage de $-\infty$

10) On a ; $f(x)>0$ pour tout réel x donc $(\mathcal{C})$ est au-dessus de l'axe des abscisses

On a : $f(x)-2=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-1=\frac{x-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$

On a : $x<0 \Rightarrow x-\sqrt{1+x^2}<0 \Rightarrow f(x)-2<0$. Donc $(\mathcal{C})$ en dessous de $(\mathcal{D})$

On a : $x\geqslant 0 \Rightarrow x^2<1+x^2 \Rightarrow x-\sqrt{1+x^2}<0 \Rightarrow f(x)-2<0$. Donc $(\mathcal{C})$ en dessous de $(\mathcal{D})$

12) f continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $J=f(\mathbb{R})=]0;2[$

14) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et f non nulle sur $\mathbb{R}$ alors f^{-1} est dérivable sur J

15) On a :

$$\forall x\in]0;2[,\quad f\left(\frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}\right)=1+\frac{\frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}}{\sqrt{1+\left(\frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}\right)^2}}=1+\frac{\frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}}{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}}}=1+x-1=x$$

$$x\in]0;2[,\quad f\left(\frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}\right)=x$$

16) En effet, $\forall x\in]0;2[, f\left(\frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}\right)=x \Rightarrow \frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}=f^{-1}(x)$. Ainsi $x\in]0;2[, \frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}=f^{-1}(x)$

17) En effet,

$$\forall x\in]0;2[, (f^{-1})'(x)=\frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}=\frac{1}{(2x-x^2)\sqrt{2x-x^2}} \Rightarrow (f^{-1})'(x)=\frac{1}{(2x-x^2)\sqrt{2x-x^2}}$$

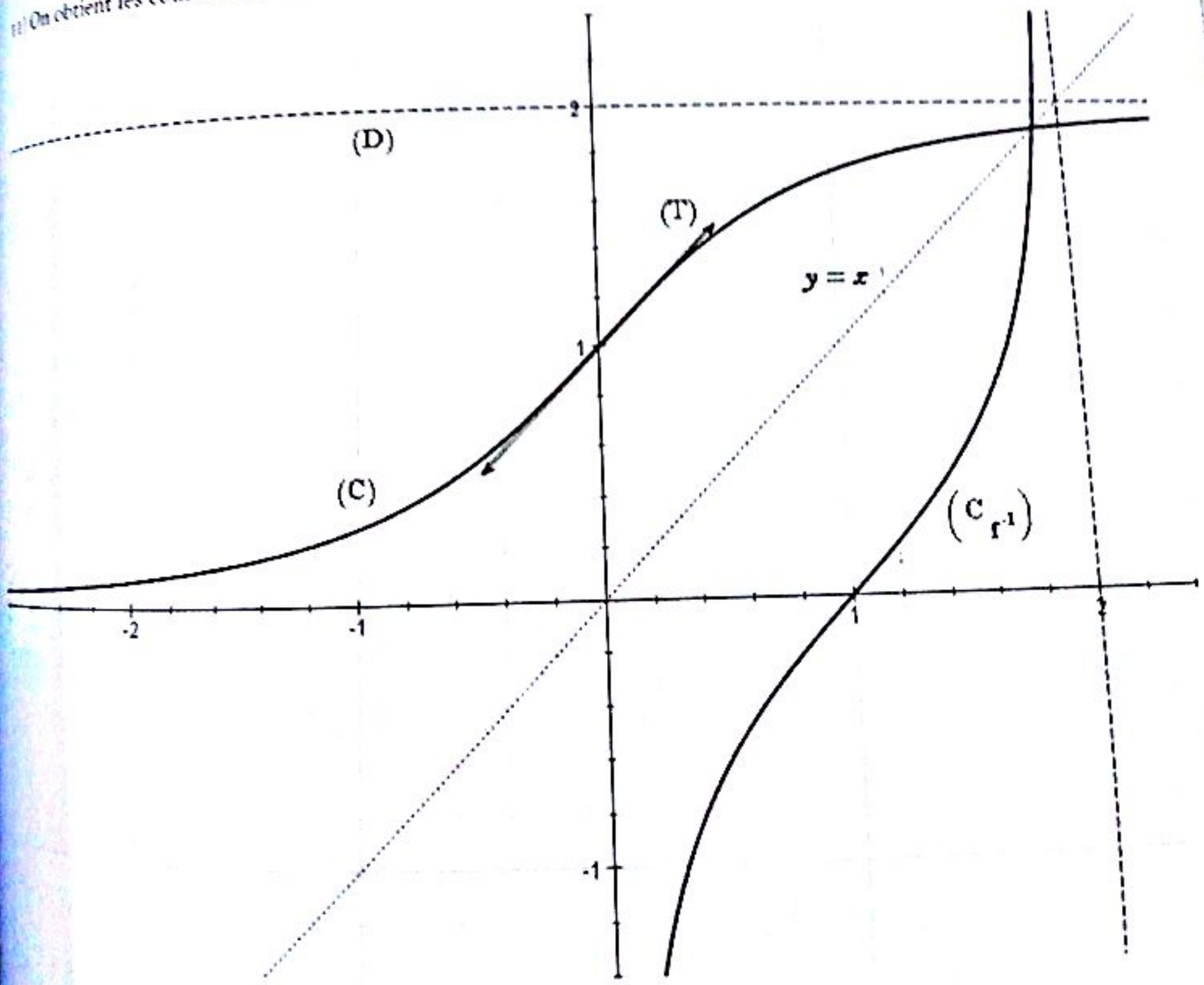
i) Pour tout réel x, $g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{1}{(\sqrt{1+x^2})^3} - 1$

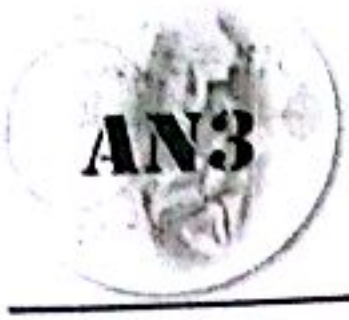
ii) pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, $(\sqrt{1+x^2})^3 > 1 \implies g'(x) < 0$ et donc g est strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

i) La fonction g est continue et strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$ donc g est bijective et réalise une bijection de $[0\,;+\infty[$ sur $g([0\,;+\infty[) =]-\infty\,;1]$. Comme $0 \in]-\infty\,;1]$ alors il possède un seul antécédent par g donc $g(x) = 0$ admet une unique α solution dans $[0\,;+\infty[$.

ii) $g(1) \times g(2) < 0$ alors $\alpha \in]1\,;2[$. Par suite $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \in]1\,;2[$

iii) On obtient les courbes suivantes :





Primitives - Fonction logarithme népérien

EXERCICE 1

Première partie

1) $F(x) = \frac{x^2}{2} + k$ 2) $F(x) = \frac{x^4}{4} + k$ 3) $F(x) = \frac{x^6}{2} + x + k$ 4) $F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + k$

5) $F(x) = -\frac{1}{x} + k$ 6) $F(x) = 2\sqrt{x} + k$ 7) $F(x) = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + k$ 8) $F(x) = x + \ln|x-1| + k$

Deuxième partie

1) $F(x) = \frac{4}{5}x^5 + \frac{4}{3}x^3 + x + k$ 2) $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x + k$

3) $F(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + k$ 4) $F(x) = 4\sqrt{x} - x + k$

5) $F(x) = -\frac{(2-3x)^4}{4} + k$ 6) $F(x) = \frac{(x^2+x+1)^2}{2} + k$

7) $F(x) = \frac{(x^2-1)^4}{2} + k$ 8) $F(x) = \frac{(x^4-5)^4}{16} + k$

Troisième partie

5) On a : $f(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$

En mettant tout au même dénominateur dans le membre de droite, on trouve :

$$f(x) = \frac{ax^2 + (-2a+b)x + (a-b+c)}{(x-1)^2}$$

Par identification, on trouve $a = 2,\ b = 1$ et $c = 3$.

Ainsi, les primitives de f sur l'intervalle $]1\,;\ +\infty[$ sont les fonctions : $F(x) = 2x + \ln(x-1) - \frac{3}{x-1} + k$

Où d est une constante.

6) On sait que la fraction rationnelle peut s'écrire :

$$\frac{2x-1}{(x+1)^2} = \frac{2}{x+1} - \frac{3}{(x+1)^2}$$

Une primitive sur $]-1\,;+\infty[$ de la fonction est donc $F(x) = 2\ln(x+1) + \frac{3}{x+1} + k$

7) On trouve : $F(x) = \frac{-1}{2(x^2-1)} + k$

8) On écrit :

$$\frac{24x^3+18x^2+10x-9}{(2x+1)^2(3x-1)} = a + \frac{b}{3x-1} + \frac{c}{2x+1} + \frac{d}{(2x+1)^2}$$

En mettant tout au même dénominateur dans le membre de droite, on trouve par identification le système : $a = 2\,; b = -1\,;\ c = 1\ ;\ d = 5$. On déduit : $F(x) = 2x - \frac{1}{3}\ln|3x-1| + \frac{1}{2}\ln(2x+1) - \frac{5}{2(2x+1)}$

11) On trouve : $F(x) = -\frac{1}{2(3x^2-2x-1)} + k$

12) On trouve : $F(x) = -\frac{2}{\sqrt{x+1}} + k$

13) On trouve : $F(x) = -\frac{1}{8(x^3+2x)^4} + k$

Quatrième partie

1) $F(x) = 1 - \frac{\cos^2 x}{2}$

2) $F(x) = \frac{\sin^6 x}{2} + 3$

3) $F(x) = -\cos(x^2) + 2$

4) $F(x) = \ln\sqrt{\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|} + 3$

Cinquième partie

1) $f(x) = \frac{2x}{x^2+1} = \frac{(x^2+1)'}{x^2+1}$. Donc $F(x) = \ln(x^2+1) + k$

2) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$. Donc $F(x) = \sqrt{x^2+1} + k$

3) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{3x^2+1}} = \frac{1}{6}\frac{6x}{\sqrt{3x^2+1}}$. Donc $F(x) = \frac{\sqrt{3x^2+1}}{3} + k$

4) $f(x) = \frac{x^3}{(x^4+1)^2} = \frac{1}{4}\times\frac{4x^3}{(x^4+1)^2}$. Donc $F(x) = -\frac{1}{4(x^4+1)} + k$

Sixième partie

6) On a $f(x) = \sin x\cos^3 x = -1\times -\sin x\cos^3 x$. Donc $F(x) = -\frac{\cos^4 x}{4} + k$

7) On a :

Une primitive sur $]-1\,;+\infty[$ de la fonction est donc $F(x) = 2\ln(x+1) + \frac{3}{x+1} + k$

7) On trouve : $F(x) = \frac{-1}{2(x^2-1)} + k$

8) On écrit :

$$\frac{24x^3 + 18x^2 + 10x - 9}{(2x+1)^2(3x-1)} = a + \frac{b}{3x-1} + \frac{c}{2x+1} + \frac{d}{(2x+1)^2}$$

En mettant tout au même dénominateur dans le membre de droite, on trouve par identification le système : $a = 2\,; b = -1\ ;\ c = 1\ ;\ d = 5$. On déduit : $F(x) = 2x - \frac{1}{3}\ln|3x-1| + \frac{1}{2}\ln(2x+1) - \frac{5}{2(2x+1)}$

11) On trouve : $F(x) = -\frac{1}{2(3x^2-2x-1)} + k$

12) On trouve : $F(x) = -\frac{2}{\sqrt{x}+1} + k$

13) On trouve : $F(x) = -\frac{1}{8(x^3+2x)^4} + k$

Quatrième partie

1) $F(x) = 1 - \frac{\cos^2 x}{2}$

2) $F(x) = \frac{\sin^6 x}{2} + 3$

3) $F(x) = -\cos(x^2) + 2$

4) $F(x) = \ln\sqrt{\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|} + 3$

Cinquième partie

1) $f(x) = \frac{2x}{x^2+1} = \frac{(x^2+1)'}{x^2+1}$. Donc $F(x) = \ln(x^2+1) + k$

2) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$. Donc $F(x) = \sqrt{x^2+1} + k$

3) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{3x^2+1}} = \frac{1}{6}\frac{6x}{\sqrt{3x^2+1}}$. Donc $F(x) = \frac{\sqrt{3x^2+1}}{3} + k$

4) $f(x) = \frac{x^3}{(x^4+1)^2} = \frac{1}{4} \times \frac{4x^3}{(x^4+1)^2}$. Donc $F(x) = -\frac{1}{4(x^4+1)} + k$

Sixième partie

6) On a : $f(x) = \sin x \cos^3 x = -1 \times -\sin x \cos^3 x$. Donc $F(x) = -\frac{\cos^4 x}{4} + k$

7) On a :

Pour tout réel x, on a : $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}=\dfrac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1}$. Donc $\underline{F(x)=\ln(x^2+x+1)+k}$

3) $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$ existe si et seulement si $\begin{cases} x\neq 0 \\ \ln x\neq 0 \\ x \text{ ϕ } 0 \end{cases} \Rightarrow \quad D=]0\,;+\infty[-\{1\}$.

Pour tout réel x, on a : $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}=\dfrac{\frac{1}{x}}{\ln x}=\dfrac{(\ln x)'}{\ln x}$. Donc $\underline{F(x)=\ln|\ln x|+k}$

4) $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x\ln(\ln x)}$ existe si et seulement si $\begin{cases} x\neq 0 \\ x \text{ ϕ } 0 \\ \ln x \text{ ϕ } 0 \end{cases}$ donc $D=]1\,;+\infty[$.

Pour tout $x\in D$, on a : $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x\ln(\ln x)}=\dfrac{\frac{1}{x\ln x}}{\ln(\ln x)}$. Donc $\underline{F(x)=\ln|\ln|\ln x||+k}$

5) $f(x)=\dfrac{1}{x\ln^n x}$ existe si et seulement si $\begin{cases} x\neq 0 \\ x \text{ ϕ } 0 \\ \ln x\neq 0 \end{cases}$ donc $D=]0\,;+\infty[-\{1\}$.

Pour tout $x\in D$, on a : $f(x)=\dfrac{1}{x\ln^n x}=\dfrac{\frac{1}{x}}{\ln^n x}$. Donc $\underline{F(x)=\frac{1}{(1-n)\ln^{n-1}x}+k}$

6) $f(x)=\dfrac{x-1}{(x+1)^2}$ existe si et seulement si $x+1\neq 0$ donc $D=\mathbb{R}-\{-1\}$.

Pour tout $x\in D$, on a : $f(x)=\dfrac{x-1}{(x+1)^2}=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{(x+1)^2}$. Donc $\underline{F(x)=\ln|x+1|+\frac{2}{x+1}+k}$

7) On a :

$$f(x)=\frac{1}{x\ln(x^2)}=\frac{1}{2x\ln x}=\frac{1}{2}\times\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}=\frac{1}{2}\times\frac{(\ln x)'}{\ln x}$$

Donc $\underline{F(x)=\frac{\ln(\ln x)}{2}+k}$

8) On trouve : $\underline{F(x)=x(\ln x)-x}$

EXERCICE 4

1) On a : $f(x)=\dfrac{a}{(x-1)^2}+\dfrac{b}{(x-1)^3}=\dfrac{a(x-1)+b}{(x-1)^3}=\dfrac{ax+b-a}{(x-1)^3}=\dfrac{2x-3}{(x-1)^3}$

Par identification : $a=2$; $b-a=-3 \Rightarrow b=a-3=2-3=-1$

Donc : $a=2$; $b-a=-3 \Rightarrow b=a-3=2-3=-1$

Finalement : $f(x) = \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-1)^3}$

2) Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{(x-1)^2}$ est une fonction de la forme : $x \mapsto \frac{-1}{x-1} + k$

Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{(x-1)^3}$ est une fonction de la forme : $x \mapsto \frac{-1}{2(x-1)^2} + k$

Donc une primitive de $f(x) = \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-1)^3}$ est une fonction de la forme : $x \longmapsto -\frac{2}{x-1} + \frac{1}{2(x-1)^2} + k$

EXERCICE 5

1) On a : $\frac{1}{\sin x} = \frac{a\sin x}{1-\cos x} + \frac{b\sin x}{1+\cos x} = \frac{a(1+\cos x) + b(1-\cos x)}{\sin x} = \frac{(a-b)\cos x + a + b}{\sin x}$

Par identification : $a-b=0$ et $a+b=1$ donc : $a=b=\frac{1}{2}$

Finalement : $\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin x}{1-\cos x} + \frac{\sin x}{1+\cos x}\right] \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}\left(\ln|1-\cos x| - \ln|1+\cos x|\right) + k$

On peut transformer l'expression de F. On a :

$$F(x) = \frac{1}{2}(\ln|1-\cos x| - \ln|1+\cos x|) + k = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{|1-\cos x|}{|1+\cos x|}\right) + k = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + k$$

Or :

$$\frac{1-\cos x}{1+\cos x} = \frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2 = \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

Donc :

$$F(x) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + k = \frac{1}{2}\ln\left|\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right| + k = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + k$$

Conclusion : $F(x) = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + k$

2) $\frac{1}{\cos x} = \frac{a\cos x}{1-\sin x} + \frac{b\cos x}{1+\sin x} = \frac{a+b+(a-b)\sin x}{\cos x}$

Par identification : $a-b=0$ et $a+b=1$ donc : $a=b=\frac{1}{2}$

Finalement : $\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{2}\left[\frac{\cos x}{1-\sin x} + \frac{\cos x}{1+\sin x}\right] \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}\left(-\ln|1-\sin x| + \ln|1+\sin x|\right) + k$

On peut transformer l'expression de F. On a :

$$F(x) = \frac{1}{2}(-\ln|1-\sin x| + \ln|1+\sin x|) = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{|1+\sin x|}{|1-\sin x|}\right) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|$$

Or

$$\frac{1+\sin x}{1-\sin x} = \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}{\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)-\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2} = \left(\frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)-\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2$$

Et

$$\frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)-\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$$

Donc

$$F(x) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\tan^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right| = \ln\left|\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right| + k$$

Conclusion : $\underline{F(x) = \ln\left|\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right| + k}$

EXERCICE 6

1) On a :

$$A = \ln(\sqrt{3}+1) + \ln(\sqrt{3}-1) = \ln(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1) = \ln\left((\sqrt{3})^2-1\right) = \ln 2$$

Donc $\underline{A = \ln 2}$

2) On a :

$$B = \ln(2+\sqrt{3}) + \ln(2-\sqrt{3}) = \ln(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = \ln\left((\sqrt{2})^2-1\right) = \ln 1 = 0$$

Donc $\underline{B = 0}$

3) On a :

$$C = \ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = \ln\left[\frac{(\sqrt{5})^2-1}{4}\right] = \ln 1 = 0$$

Donc $\underline{C = 0}$

EXERCICE 7

1) On a $y = \ln 2 + \ln 3 = \ln 2 \times 3 = \ln 6$ et comme $5 < 6$ et tenant compte de la croissante de la fonction ln, on déduit $\ln 5 < \ln 6$ ou encore $\underline{x < y}$

2) On a : $x = 3\ln 2 = \ln 2^3 = \ln 8$ et $y = 2\ln 3 = \ln 3^2 = \ln 9$ et comme $8 < 9$ et tenant compte de la croissante de la fonction ln, on déduit $\ln 8 < \ln 9$ ou encore $\underline{x < y}$

3) On a : $x = 4\ln 3 = \ln 3^4 = \ln 81$ et $y = 4\ln 2 + \ln 5 = \ln 2^4 + \ln 5 = \ln 2^4 \times 5 = \ln 80$ et comme $80 < 81$ et tenant compte de la croissante de la fonction ln, on déduit $\ln 80 < \ln 81$ ou encore $\underline{y < x}$

4) On a : $x = \ln\sqrt{e} = \frac{1}{2}\ln e = \frac{1}{2}$ et $y = \frac{1}{3}$ et comme $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ et tenant compte de la croissante de la fonction ln, on déduit $\ln\frac{1}{3} < \ln\frac{1}{2}$ ou encore $\underline{x > y}$

EXERCICE 8

1) $f(x) = |\ln x|$ se déduit de ce la courbe de ln par la réunion des parties des courbes d'équations $y = f(x)$ et $y = -f(x)$ situées au-dessus de (xx').

2) $f(x) = \ln(-x)$ se deduit de ce la courbe de ln par la symétrie orthogonale d'axe (Oy).

3) $f(x) = \ln(1 + x)$ se déduit de ce la courbe de ln par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$.

4) $f(x) = \ln|x|$ se deduit de ce la courbe de ln par la symétrie orthogonale d'axe (Oy).

5) $f(x) = \frac{1}{2}\ln(1 + x)$ se deduit de ce la courbe de ln par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$.

6) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{2}x + 1\right) = \ln(x + 2) - \ln 2$ se déduit de ce la courbe de ln par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-\ln 2\end{pmatrix}$.

EXERCICE 9

1) a) $f_1(x) = \ln(\cos x)$ existe si et seulement si : $\cos x > 0$ donc $\underline{D_{f_1} = \left]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\,;\,\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right[}$

$f_2(x) = \ln^3 x$ existe si et seulement si : $x > 0$ donc $\underline{D_{f_2} = \mathbb{R}_+^*}$

$f_3(x) = \cos(\ln x)$ existe si et seulement si : $x > 0$ donc $\underline{D_{f_3} = \mathbb{R}_+^*}$

b) On a :

$$f_1'(x) = [\ln(\cos x)]' = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x\ ;\quad f_2'(x) = (\ln^3 x)' = \frac{3\ln^2 x}{x}\ ;\quad f_3'(x) = (\cos(\ln x))' = -\frac{\sin(\ln x)}{x}$$

Donc $\underline{f_1'(x) = -\tan x}$ et $\underline{f_2'(x) = \frac{3\ln^2 x}{x}}$ et $\underline{f_3'(x) = -\frac{\sin(\ln x)}{x}}$

2) On a :

$$f(x) = \ln(x^2 + x - 2) \quad\Rightarrow\quad \underline{f'(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + x - 2}}$$

$$g(x) = \ln|x^2 + x - 2| \quad\Rightarrow\quad \underline{g'(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + x - 2}}$$

3) La fonction $f(x) = \log_2(\sin x + 2) = \frac{\ln(\sin x + 2)}{\ln 2}$ existe si et seulement si : $2 + \sin x > 0$ toujours vrai donc $D_f = \mathbb{R}$. Pour tout réel x, $\underline{f'(x) = \frac{1}{\ln 2}\frac{\cos x}{\sin x + 2}}$

EXERCICE 10

Première partie

1) On a : $\lim_{x\to 0} x - \ln x = +\infty$

2) On a : $\lim_{x\to 0} \sin x \ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \times x \ln x = 1 \times 0$. Ainsi : $\underline{\lim_{x\to 0} \sin x \ln x = 0}$

3) On a

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0} \sqrt{x} \times \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \sqrt{x} \times \frac{\ln(1+x) - \ln(1+0)}{x-0} = \sqrt{0} \times 1$$

Ainsi $\underline{\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} = 0}$

4) On a : $x\ln^2 x = (\sqrt{x}\ln x)^2 = (2\sqrt{x}\ln\sqrt{x})^2 = 4(\sqrt{x}\ln\sqrt{x})^2$ et on pose $t = \sqrt{x}$.

Donc : $\lim_{x\to 0} x\ln^2 x = \lim_{t\to 0} 4(t\ln t)^2 = 4 \times 0 = 0$. Ainsi : $\underline{\lim_{x\to 0} x\ln^2 x = 0}$

5) On a :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} \times \frac{\ln(1+3x) - \ln(1+3\times 0)}{x-0} = \frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}$$

Ainsi $\underline{\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)}{2x} = \frac{3}{2}}$

6) On a : $\lim_{x\to+\infty} (x^2 + 2x - \ln x) = \lim_{x\to+\infty} x^2\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{\ln x}{x^2}\right) = +\infty$. Ainsi : $\underline{\lim_{x\to+\infty} x^2 + 2x - \ln x = +\infty}$

7) On pose $t = \frac{1}{x}$ et donc :

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t) - \ln(1+0)}{t-0} = 1$$

Ainsi $\underline{\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1}$

8) On a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(2x+3)}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left[x\left(2+\frac{3}{x}\right)\right]}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x + \ln\left(2+\frac{3}{x}\right)}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{\ln\left(2+\frac{3}{x}\right)}{\ln x} = 1$$

Ainsi $\underline{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(2x+3)}{\ln x} = 1}$

9) On a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} \times \frac{1}{1+\frac{2}{x^2}} = 0 \times 1 = 0$$

EXERCICE 10

Première partie

1) On a : $\lim_{x\to 0} x - \ln x = +\infty$

2) On a : $\lim_{x\to 0} \sin x \ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \times x \ln x = 1 \times 0$. Ainsi : $\lim_{x\to 0} \sin x \ln x = 0$

3) On a :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0} \sqrt{x} \times \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \sqrt{x} \times \frac{\ln(1+x) - \ln(1+0)}{x-0} = \sqrt{0} \times 1$$

Ainsi : $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} = 0$

4) On a : $x\ln^2 x = (\sqrt{x}\ln x)^2 = (2\sqrt{x}\ln\sqrt{x})^2 = 4(\sqrt{x}\ln\sqrt{x})^2$ et on pose $t = \sqrt{x}$.

Donc : $\lim_{x\to 0} x\ln^2 x = \lim_{t\to 0} 4(t\ln t)^2 = 4 \times 0 = 0$. Ainsi : $\lim_{x\to 0} x\ln^2 x = 0$

5) On a :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} \times \frac{\ln(1+3x) - \ln(1+3\times 0)}{x-0} = \frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}$$

Ainsi : $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)}{2x} = \frac{3}{2}$

6) On a : $\lim_{x\to+\infty} (x^2 + 2x - \ln x) = \lim_{x\to+\infty} x^2\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{\ln x}{x^2}\right) = +\infty$. Ainsi : $\lim_{x\to+\infty} x^2 + 2x - \ln x = +\infty$

7) On pose $t = \frac{1}{x}$ et donc :

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t) - \ln(1+0)}{t-0} = 1$$

Ainsi : $\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$

8) On a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(2x+3)}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left[x\left(2+\frac{3}{x}\right)\right]}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x + \ln\left(2+\frac{3}{x}\right)}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{\ln\left(2+\frac{3}{x}\right)}{\ln x} = 1$$

Ainsi : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(2x+3)}{\ln x} = 1$

9) On a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} \times \frac{1}{1+\frac{2}{x^2}} = 0 \times 1 = 0$$

CE $\Sigma\pi\int$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2+2}=0$

10) On pose $t=x-2$. On a :

$$\lim_{x\to2}\frac{x}{x-2}\ln(x-1)=\lim_{t\to2}\frac{t+2}{t}\ln(t+1)=\lim_{t\to0}(t+2)\times\frac{\ln(t+1)}{t}=\lim_{t\to0}(t+2)\times\frac{\ln(t+1)-\ln(0+1)}{t-0}$$
$$=(0+2)\times1=2$$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to2}\frac{x}{x-2}\ln(x-1)=2$

11) On pose $t=x-3$. On a :

$$\lim_{x\to3}\frac{2x}{x-3}\ln\left(\frac{x}{3}\right)=\lim_{t\to0}\frac{2(t+3)}{t}\ln\left(\frac{t+3}{3}\right)=\lim_{t\to0}2(t+3)\times\frac{\ln\left(\frac{t+3}{3}\right)}{t}$$
$$=\lim_{t\to0}2(t+3)\times\frac{\ln\left(\frac{t}{3}+1\right)-\ln\left(\frac{0}{3}+1\right)}{t-0}=2(0+3)\times\frac{1}{3}=2$$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to3}\frac{2x}{x-3}\ln\left(\frac{x}{3}\right)=2$

12) On a :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\ln x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{2\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)=0$$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\ln x}{\sqrt{x}}=0$

13) On a :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-2\ln x}{x+\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(3-\frac{2\ln x}{x}\right)}{x\left(1+\frac{\ln x}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3-\frac{2\ln x}{x}}{1+\frac{\ln x}{x}}=\frac{3-0}{1+0}=3$$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x-2\ln x}{x+\ln x}=3$

14) On a :

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+4x)}{4x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{4}\times\frac{\ln(1+4x)-\ln(1+4\times0)}{x-0}=\frac{1}{4}\times\frac{4}{1+4\times0}=1$$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+4x)}{4x}=1$

15) On a :

$$\lim_{x\to0}\ln(\cos x)\ln x=\lim_{x\to0}\left[\frac{\ln(\cos x)}{x}\right]\times[x\ln x]=\lim_{x\to0}\left[\frac{\ln(\cos x)-\ln(\cos 0)}{x-0}\right]\times[x\ln x]=0\times0=0$$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to0}\ln(\cos x)\ln x=0$

6) On a :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{\ln(1+2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\tan x}{x}}{\frac{\ln(1+2x)}{x}}=\lim_{x\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\tan x-\tan 0}{x-0}}{\frac{\ln(1+2x)-\ln(1+2\times 0)}{x-0}}=\frac{1}{2}$$

Ainsi : $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{\ln(1+2x)}=\frac{1}{2}$

7) On a :

$$\lim_{x\to 0} x-\sqrt{x}\ln x=\lim_{x\to 0} x-2\sqrt{x}\ln\sqrt{x}=0-2\times 0=0$$

Ainsi : $\lim_{x\to 0} x-\sqrt{x}\ln x=0$

8) On a :

$$\lim_{x\to+\infty} x-\sqrt{x}\ln x=\lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)=\lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{2\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)=+\infty$$

Ainsi : $\lim_{x\to+\infty} x-\sqrt{x}\ln x=+\infty$

Deuxième partie

1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1+\sin x)}{x}}{\frac{\sin 2x}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1+\sin x)-\ln(1+\sin 0)}{x-0}}{\frac{\sin 2x-\sin 2\times 0}{x-0}}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin 2x}=\frac{1}{2}$$

2) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(x^2-\frac{5}{2}x+1\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(x^2-\frac{5}{2}x+1\right)-\ln\left(0^2-\frac{5}{2}\times 0+1\right)}{x-0}=-\frac{5}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(x^2-\frac{5}{2}x+1\right)}{x}=-\frac{5}{2}$$

3) On a : $\lim_{x\to+\infty} x\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty} x+1=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} x(x+1)=+\infty$$

4) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^4}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{16}\frac{(\ln x^2)^4}{x^2}=\lim_{X\to+\infty}\frac{1}{16}\frac{\ln^4 X}{X}=\frac{1}{16}\times 0=0$$

5) On trouve : $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(3x-2)}{\sqrt[3]{x}}=0$

6) $\lim\limits_{x\to 0} x^4 \ln x = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x^4}} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-\ln X}{X^4} = 0$

$$\lim_{x\to 0} x^4 \ln x = 0$$

7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+3x)}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x}\ln(1+3x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x} \times \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+3x)}{x} = 0\times 3 = 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)}{\sqrt{x}} = 0$$

8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+3x-x^2)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+3x-x^2)-\ln 1}{x-0} = \left(\dfrac{-2x+3}{1+3x-x^2}\right)_{x_0=0} = 3$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x-x^2)}{x} = 3$$

9) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2(\ln x)^3}{\ln(1+ax)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\ln^3 x}{\frac{\ln(1+ax)}{x-0}} = 0\times\dfrac{1}{a} = 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\ln^3 x}{\ln(1+ax)} = 0$$

10) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(2x-1)}{x^2+x-2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\frac{\ln(2x-1)-\ln 1}{x-1}}{\frac{x^2+x-2}{x-1}} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\frac{\ln(2x-1)-\ln 1}{x-1}}{x+2} = \left(\dfrac{2}{2x-1}\right)_{x_0=1} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(2x-1)}{x^2+x-2} = \frac{2}{3}$$

11) $\lim\limits_{x\to 1} (x-1)\ln\sqrt{x^2+2x-3} = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 1} (x-1)\ln(x-1) + (x-1)\ln(x+3) = 0+0 = 0$

$$\lim_{x\to 1} (x-1)\ln\sqrt{x^2+2x-3} = 0$$

Quatrième partie

1) On a : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} \times \dfrac{x}{\sin x} = 1$. Donc $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin x} = 1$

2) On a : $\lim_{x\to 2} \frac{\ln x - \ln 2}{x-2} = \ln' 2 = \frac{1}{2}$. Ainsi : $\lim_{x\to 2} \frac{\ln x - \ln 2}{x-2} = \frac{1}{2}$

3) On a : $\frac{\ln\cos x}{x^2} = \frac{\ln\cos x}{1-\cos x} \times \frac{1-\cos x}{x^2}$. Donc $\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{1-\cos x} \times \frac{1-\cos x}{x^2} = -1 \times \frac{1}{2}$.

Ainsi : $\lim_{x \to 0} \frac{\ln \cos x}{x^2} = -\frac{1}{2}$

EXERCICE 11

Première partie

1) L'équation $\ln(3x-5) = 0$ existe si et seulement si $3x - 5 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{5}{3}$.

Ainsi : $D = \left]\frac{5}{3} ; +\infty\right[$.

$\forall x \in D, \quad \ln(3x-5) = 0 \Leftrightarrow \ln(3x-5) = \ln 1 \Leftrightarrow 3x - 5 = 1 \Leftrightarrow x = 2 \in D$

Conclusion : $S = \{2\}$

2) L'équation $\ln(6-x) = 1$ existe si et seulement si $6 - x > 0 \Leftrightarrow x < 6$.

Ainsi : $D =]-\infty ; 6[$.

$\forall x \in D, \quad \ln(6-x) = 1 \Leftrightarrow \ln(6-x) = \ln e \Leftrightarrow 6 - x = e \Leftrightarrow x = (6+e) \notin D$

Conclusion : $S = \{0\}$

3) L'équation $\ln|3x+7| = 2\ln 2$ existe si et seulement si $3x + 7 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{7}{3}$.

Ainsi : $D = \mathbb{R} - \left\{-\frac{7}{3}\right\}$.

$\forall x \in D, \quad \ln|3x+7| = 2\ln 2 \Leftrightarrow \ln|3x+7| = \ln 4 \Leftrightarrow 3x + 7 = 4$ ou $3x + 7 = -4$

Ainsi : $x = -1 \in D$ ou $x = -\frac{11}{3} \in D$

Conclusion : $S = \left\{-1 ; -\frac{11}{3}\right\}$

4) L'équation $\ln(x-2) + \ln(x+2) = \ln 45$ existe si et seulement si : $\begin{cases} x - 2 > 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in]2 ; +\infty[$

Ainsi : $D =]2 ; +\infty[$.

$\forall x \in D, \quad \ln(x-2) + \ln(x+2) = \ln 45 \Leftrightarrow \ln(x-2)(x+2) = \ln 45 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 45$

Ainsi $x = 7 \in D$ ou $x = -7 \notin D$

Conclusion : $S = \{7\}$

5) L'équation $2\ln(x-4) = \ln x - 2\ln 2$ existe si et seulement si : $\begin{cases} x - 4 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in]4 ; +\infty[$

Ainsi : $D =]4 ; +\infty[$.

$\forall x \in D, \quad 2\ln(x-4) = \ln x - 2\ln 2 \Leftrightarrow \ln(x-4)^2 - \ln x = \ln 2^{-2} \Leftrightarrow \frac{(x-4)^2}{x} = \frac{1}{4}$

Ainsi : $4(x-4)^2 = x \Leftrightarrow 4x^2 - 32x + 64 = x \Leftrightarrow 4x^2 - 33x + 64 = 0$.

Ainsi : $\lim_{x \to 0} \frac{\ln \cos x}{x^2} = -\frac{1}{2}$

EXERCICE 11

Première partie

1) L'équation $\ln(3x-5) = 0$ existe si et seulement si $3x - 5 > 0 \iff x > \frac{5}{3}$.

Ainsi : $D = \left]\frac{5}{3} ; +\infty\right[$.

$$\forall x \in D, \quad \ln(3x-5) = 0 \iff \ln(3x-5) = \ln 1 \iff 3x - 5 = 1 \iff x = 2 \in D$$

Conclusion : $S = \{2\}$

2) L'équation $\ln(6-x) = 1$ existe si et seulement si $6 - x > 0 \iff x < 6$.

Ainsi : $D =]-\infty ; 6[$.

$$\forall x \in D, \quad \ln(6-x) = 1 \iff \ln(6-x) = \ln e \iff 6 - x = e \iff x = (6+e) \notin D$$

Conclusion : $S = \{\emptyset\}$

3) L'équation $\ln|3x+7| = 2\ln 2$ existe si et seulement si $3x + 7 \neq 0 \iff x \neq -\frac{7}{3}$.

Ainsi : $D = \mathbb{R} - \left\{-\frac{7}{3}\right\}$.

$$\forall x \in D, \quad \ln|3x+7| = 2\ln 2 \iff \ln|3x+7| = \ln 4 \iff 3x + 7 = 4 \text{ ou } 3x + 7 = -4$$

Ainsi : $x = -1 \in D$ ou $x = -\frac{11}{3} \in D$

Conclusion : $S = \left\{-1 ; -\frac{11}{3}\right\}$

4) L'équation $\ln(x-2) + \ln(x+2) = \ln 45$ existe si et seulement si : $\begin{cases} x - 2 > 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases} \iff x \in]2 ; +\infty[$

Ainsi : $D =]2 ; +\infty[$.

$$\forall x \in D, \quad \ln(x-2) + \ln(x+2) = \ln 45 \iff \ln(x-2)(x+2) = \ln 45 \iff x^2 - 4 = 45$$

Ainsi $x = 7 \in D$ ou $x = -7 \notin D$

Conclusion : $S = \{7\}$

5) L'équation $2\ln(x-4) = \ln x - 2\ln 2$ existe si et seulement si : $\begin{cases} x - 4 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \iff x \in]4 ; +\infty[$

Ainsi : $D =]4 ; +\infty[$.

$$\forall x \in D, \quad 2\ln(x-4) = \ln x - 2\ln 2 \iff \ln(x-4)^2 - \ln x = \ln 2^{-2} \iff \frac{(x-4)^2}{x} = \frac{1}{4}$$

Ainsi : $4(x-4)^2 = x \iff 4x^2 - 32x + 64 = x \iff 4x^2 - 33x + 64 = 0$.

On calcule le discriminant : $\Delta = 65 \implies x_1 = \frac{11-\sqrt{65}}{8} \approx 3{,}11 \notin D$; $x_2 = \frac{11+\sqrt{65}}{8} \approx 5{,}13 \in D$

Conclusion : $S = \left\{\frac{11+\sqrt{65}}{8}\right\}$

6) L'équation $\ln(4x+1) + \ln(x+2) = 2\ln 3x$ existe si et seulement si : $\begin{cases} 4x+1>0 \\ x+2>0 \\ 3x>0 \end{cases}$

Ainsi : $D =]0\,;+\infty[$.

$$\forall x \in D, \quad \ln(4x+1) + \ln(x+2) = 2\ln 3x \iff \ln(4x+1)(x+2) - \ln(3x)^2 = 0$$

Ainsi : $\frac{(4x+1)(x+2)}{9x^2} = 1 \iff 4x^2 + 9x + 2 = 9x^2 \iff 5x^2 - 9x - 2 = 0.$

On calcule le discriminant : $\Delta = 121 = 11^2 \implies x_1 = \frac{9-11}{10} = -\frac{1}{5} \notin D$; $x_2 = \frac{9+11}{10} = 2 \in D$

Conclusion : $S = \{2\}$

7) L'équation $\ln|x+3| + \ln(x+2) = \ln(x+11)$ existe si et seulement si : $\begin{cases} x+3 \neq 0 \\ x+2>0 \\ x+11>0 \end{cases}$

Ainsi : $D =]-2\,;+\infty[$.

$$\forall x \in D, \quad \ln|x+3| + \ln(x+2) = \ln(x+11) \iff \ln|x+3| = \ln(x+11) - \ln(x+2)$$

Or : $\ln(x+11) - \ln(x+2) = \ln\left(\frac{x+11}{x+2}\right)$

Donc : $\ln|x+3| = \ln(x+11) - \ln(x+2) \iff \ln|x+3| = \ln\left(\frac{x+11}{x+2}\right)$

Ainsi : $x+3 = \frac{x+11}{x+2}$ ou $x+3 = -\frac{x+11}{x+2}$

Ou encore : $(x+3)(x+2) = x+11$ ou $(x+3)(x+2) = -(x+11)$

Ou encore : $x^2 + 5x + 6 = x + 11$ ou $x^2 + 5x + 6 = -x - 11$

Ou encore : $x^2 + 4x - 5 = 0$ ou $x^2 + 6x + 17 = 0$

L'équation $x^2 + 4x - 5 = 0$ a pour solutions $x_1 = -5 \notin D$ et $x_2 = 1 \in D$.

L'équation $x^2 + 6x + 17 = 0$ n'admet pas de racines car son discriminant est négatif.

Conclusion : $S = \{1\}$

8) L'équation $\ln\sqrt{x+4} + \ln\sqrt{x-1} = \ln\sqrt{6}$ existe si et seulement si : $\begin{cases} x+4>0 \\ x-1>0 \end{cases}$

Ainsi : $D =]1\,;+\infty[$.

$$\forall x \in D, \quad \ln\sqrt{x+4} + \ln\sqrt{x-1} = \ln\sqrt{6} \iff \ln\sqrt{(x+4)(x-1)} = \ln\sqrt{6}$$

Ainsi : $(x+4)(x-1) = 6 \iff x^2 + 3x - 10 = 0 \iff x_1 = -5 \notin D$ ou $x_2 = 2 \in D$

Conclusion : $S = \{2\}$

c/ L'équation $\ln|x+3| + \ln|x+2| = \ln|x+11|$ existe si et seulement si : $\begin{cases} x+3 \neq 0 \\ x+2 \neq 0 \\ x+11 \neq 0 \end{cases}$

Ainsi : $D = \mathbb{R} - \{-11\,;\,-3\,;\,-2\}$.

$\forall x \in D,\quad \ln|x+3| + \ln|x+2| = \ln|x+11| \iff \ln|(x+3)(x+2)| = \ln|x+11|$

Ainsi : $\ln|x^2+5x+6| = \ln|x+11| \iff x^2+5x+6 = x+11$ ou $x^2+5x+6 = -x-11$

On trouve : $x^2+4x-5 = 0$ ou $x^2+6x+17 = 0$

L'équation $x^2+4x-5 = 0$ a pour solutions $x_1 = -5 \notin D$ et $x_2 = 1 \in D$.

L'équation $x^2+6x+17 = 0$ n'admet pas de racines car son discriminant est négatif.

Conclusion : $S = \{1\}$

d/ L'équation existe si et seulement si : $x^2+5x+5 > 0$ et $x+11 > 0$.

On définit le domaine de validité de l'équation : $D = \left]-11\,;\,\frac{-5-\sqrt{5}}{2}\right[\cup \left]\frac{-5+\sqrt{5}}{2}\,;\,+\infty\right[$.

Pour tout $x \in D$, on a :

$\ln(x^2+5x+5) = \ln(x+11) \iff x^2+5x+5 = x+11 \iff x^2+4x-6 = 0$

Solutions : $x_1 = -2-\sqrt{10} \in D$ et $x_2 = -2+\sqrt{10} \in D$ donc $S = \{-2-\sqrt{10}\,;\,-2+\sqrt{10}\}$

Deuxième partie

1/ $\ln(x+3) + \ln(x+2) = \ln(x+11)$

Cette équation existe si et seulement si : $x+2 > 0$ et donc $D =]-2\,;\,+\infty[$.

Pour tout $x \in D$, on a :

$\ln(x+3) + \ln(x+2) = \ln(x+11) \iff (x+3)(x+2) = x+11 \iff x^2+4x-5 = 0$

Solutions : $x_1 = -5 \notin D$ et $x_2 = 1 \in D$ donc $S = \{1\}$

2/ $(\ln x)^2 + 5\ln x + 6 = 0$

Cette équation existe si et seulement si : $x > 0$ et donc $D = \mathbb{R}_+^*$.

Pour tout $x \in D$, on pose $X = \ln x$ et donc l'équation devient :

$$X^2+5X+6 = 0 \iff X_1 = -3,\quad X_2 = -2 \iff x_1 = e^{-3}, x_2 = e^{-2}$$

Donc $S = \{e^{-3}\,;\,e^{-2}\}$

3/ On a : $(2-x)\ln(x+5) = 0$

Cette équation existe si et seulement si : $x+5 > 0$ et donc $D =]-5\,;\,+\infty[$.

Pour tout $x \in D$: $(2-x)\ln(x+5) = 0 \iff x = 2$ ou $x+5 = 1$

On pose $X = \ln x$ et donc l'équation devient : $2X^3 - 15X^2 + 6X + 7 = 0$

On déduit l'ensemble solution : $S = \{2\,;\,-4\}$

4/ Cette équation existe si et seulement si : $x > 0$ et donc $D = \mathbb{R}_+^*$.

Pour tout $x \in D$, on pose $X = \ln x$ et donc l'équation devient : $2X^3 - 15X^2 + 6X + 7 = 0$

On remarque facilement que $X_0 = 1$ est une racine évidente.

On déduit les deux autres racines de $2X^3 - 15X^2 + 6X + 7 = 0$ soit : $X_1 = -\frac{1}{2}$ et $X_2 = 7$.

Sachant que $X = \ln x$, on déduit les solutions et l'ensemble solution : $S = \left\{\frac{1}{\sqrt{e}} ; e^7 ; e\right\}$

EXERCICE 12

Première partie

7) On pose : $X = \ln x$. Donc :

$$\ln^2 x - 5\ln x + 6 = X^2 - 5X + 6 = 0 \iff X_1 = 2, \quad X_2 = 3 \iff x \in]0 ; e^2[\cup]e^3 ; +\infty[$$

Solutions : $S = \left\{\frac{1}{\sqrt{e}} ; e^7 ; e\right\}$

Troisième partie

1) On a : $7^{x+\frac{4}{3}} - 5^{3x} = 2\left(7^{x+\frac{1}{3}} + 5^{3x-1}\right) \implies 7^{x+1+\frac{1}{3}} - 2 \times 7^{x+\frac{1}{3}} = 2 \times 5^{3x-1} + 5 \times 5^{3x-1}$

Ainsi : $7^{x+\frac{1}{3}}(7-2) = 5^{3x-1}(2+5)$ ou encore $5 \times 7^{x+\frac{1}{3}} = 7 \times 5^{3x-1}$.

Donc : $7^{x-\frac{2}{3}} = 5^{3x-2}$ et en passant aux logarithmes, on obtient : $\left(x - \frac{2}{3}\right)\ln 7 = (3x-2)\ln 5$.

On tire donc : $x = \frac{2}{3}$

2) Le domaine de validité de cette équation est : $\mathbb{R}^{+*}$

$$\log_3 x = \frac{\ln x}{\ln 3} \text{ et } \log_9 x = \frac{\ln x}{\ln 9} = \frac{\ln x}{2\ln 3}$$

$$\log_3 x \cdot \log_9 x = \frac{\ln x}{\ln 3} \cdot \frac{\ln x}{2\ln 3} = \frac{\ln^2 x}{2\ln^2 3} = 3^2 \iff \ln^2 x = 18\ln^2 3 \iff \ln x = \pm 3\sqrt{2}\ln 3$$

Pour $\ln x = 3\sqrt{2}\ln 3 \iff x = e^{3\sqrt{2}\ln 3}$ et pour $\ln x = 3\sqrt{2}\ln 3 \iff x = e^{-3\sqrt{2}\ln 3}$

On trouve l'ensemble solution : $S = \left\{e^{3\sqrt{2}\ln 3} ; e^{-3\sqrt{2}\ln 3}\right\}$

3) Le domaine de validité de cette équation est : $\mathbb{R}^{+*}$

$$\log_3 x = \frac{\ln x}{\ln 3} \text{ et } \log_9 = \frac{\ln(4x+5)}{\ln 9} = \frac{\ln(4x+5)}{2\ln 3}$$

$$\frac{\ln x}{\ln 3} = \frac{\ln(4x+5)}{4\ln 3} \iff x^4 = 4x+5 \iff x^4 - 4x - 5 = 0$$

On remarque que -1 est une racine évidente mais n'appartient pas à $\mathbb{R}^{+*}$. Cette racine nous permet tout de même de trouver le reste de(s) solution(s).

Apres division euclidienne, on a : $x^4 - 4x - 5 = (x+1)(x^3 - x^2 + x - 5)$

Déterminons la (ou les) racine(s) de $x^3 - x^2 + x - 5$.

La recherche des solutions de cette équation n'est pas facile, j'ai fait une programmation pour déterminer la

On trouve la solution : $S = \left\{\sqrt[3]{\frac{2\sqrt{114}}{9} + \frac{64}{27}} + \sqrt[3]{-\frac{2\sqrt{114}}{9} + \frac{64}{27}} + \frac{1}{3}\right\}$

4) $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ et $\log_{a^2}(3x-2) = \frac{\ln(3x-2)}{2\ln a}$

On déduit les deux autres racines de $2X^3 - 15X^2 + 6X + 7 = 0$ soit : $X_1 = -\frac{1}{2}$ et $X_2 = 7$.

Sachant que $X = \ln x$, on déduit les solutions et l'ensemble solution : $S = \left\{\frac{1}{\sqrt{e}} ; e^7 ; e\right\}$

EXERCICE 12

Première partie

7) On pose : $X = \ln x$. Donc :
$\ln^2 x - 5\ln x + 6 = X^2 - 5X + 6 = 0 \Leftrightarrow X_1 = 2, \quad X_2 = 3 \Leftrightarrow x \in]0 ; e^2[\cup]e^3 ; +\infty[$

Solutions : $S = \left\{\frac{1}{\sqrt{e}} ; e^7 ; e\right\}$

Troisième partie

1) On a : $7^{x+\frac{4}{3}} - 5^{3x} = 2\left(7^{x+\frac{1}{3}} + 5^{3x-1}\right) \Rightarrow 7^{x+1+\frac{1}{3}} - 2 \times 7^{x+\frac{1}{3}} = 2 \times 5^{3x-1} + 5 \times 5^{3x-1}$

Ainsi : $7^{x+\frac{1}{3}}(7-2) = 5^{3x-1}(2+5)$ ou encore $5 \times 7^{x+\frac{1}{3}} = 7 \times 5^{3x-1}$.

Donc : $7^{x-\frac{2}{3}} = 5^{3x-2}$ et en passant aux logarithmes, on obtient : $\left(x - \frac{2}{3}\right)\ln 7 = (3x-2)\ln 5$.

On tire donc : $x = \frac{2}{3}$

2) Le domaine de validité de cette équation est : $\mathbb{R}^{+*}$

$\log_3 x = \frac{\ln x}{\ln 3}$ et $\log_9 x = \frac{\ln x}{\ln 9} = \frac{\ln x}{2\ln 3}$

$\log_3 x \cdot \log_9 x = \frac{\ln x}{\ln 3} \cdot \frac{\ln x}{2\ln 3} = \frac{\ln^2 x}{2\ln^2 3} = 3^2 \Leftrightarrow \ln^2 x = 18\ln^2 3 \Leftrightarrow \ln x = \pm 3\sqrt{2}\ln 3$

Pour $\ln x = 3\sqrt{2}\ln 3 \Leftrightarrow x = e^{3\sqrt{2}\ln 3}$ et pour $\ln x = 3\sqrt{2}\ln 3 \Leftrightarrow x = e^{-3\sqrt{2}\ln 3}$

On trouve l'ensemble solution : $S = \left\{e^{3\sqrt{2}\ln 3} ; e^{-3\sqrt{2}\ln 3}\right\}$

3) Le domaine de validité de cette équation est : $\mathbb{R}^{+*}$

$\log_3 x = \frac{\ln x}{\ln 3}$ et $\log_9 = \frac{\ln(4x+5)}{\ln 9} = \frac{\ln(4x+5)}{2\ln 3}$

$\frac{\ln x}{\ln 3} = \frac{\ln(4x+5)}{4\ln 3} \Leftrightarrow x^4 = 4x+5 \Leftrightarrow x^4 - 4x - 5 = 0$

On remarque que -1 est une racine évidente mais n'appartient pas à $\mathbb{R}^{+*}$. Cette racine nous permet tout de même de trouver le reste de(s) solution(s).

Apres division euclidienne, on a : $x^4 - 4x - 5 = (x+1)(x^3 - x^2 + x - 5)$

Déterminons la (ou les) racine(s) de $x^3 - x^2 + x - 5$.

La recherche des solutions de cette équation n'est pas facile, j'ai fait une programmation pour déterminer la

On trouve la solution : $S = \left\{\sqrt[3]{\frac{2\sqrt{114}}{9} + \frac{64}{27}} + \sqrt[3]{-\frac{2\sqrt{114}}{9} + \frac{64}{27}} + \frac{1}{3}\right\}$

4) $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ et $\log_{a^2}(3x-2) = \frac{\ln(3x-2)}{2\ln a}$

Ainsi $\log_a x \ \phi \ \log_{a^2}(3x-2) \iff \dfrac{\ln x}{\ln a} \ \phi \ \dfrac{\ln(3x-2)}{2\ln a}$

Si $a \in]0;1[$, $\ln a < 0$ et donc :

$\dfrac{\ln x}{\ln a} > \dfrac{\ln(3x-2)}{2\ln a} \iff 2\ln x < \ln(3x-2) \iff x^2-3x+2<0 \iff x \in]1;2[$

Si $a > 1$, $\ln a > 0$ et donc :

$\dfrac{\ln x}{\ln a} > \dfrac{\ln(3x-2)}{2\ln a} \iff 2\ln x > \ln(3x-2) \iff x^2-3x+2>0 \iff x \in \mathbb{R} -]1;2[$

Donc $S = \{x \in \mathbb{R} -]1;2[\}$

5) On a : $3^x + 4^x = 5^x \iff \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1 \iff x = 2$ car $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$.

Donc $S = \{2\}$

EXERCICE 13

1) Il est clair que le système n'existe que si $x > 0$; $y > 0$

On a : $\ln x + \ln y = \ln 1000 \iff \ln xy = \ln 1000 \iff xy = 1000$.

Ainsi le système devient : $\begin{cases} x+y=65 \\ xy=1000 \end{cases}$

Les réels x et y sont alors solutions de l'équation $X^2 - 65X + 1000 = 0$.

On calcule le discriminant : $\Delta = 225 = 15^2 \implies X_1 = 25$; $X_2 = 40$

Conclusion : $S = \{25;40\}$

2) Il est clair que le système n'existe que si $x > 0$; $y > 0$

On a : $\ln x + \ln y = \ln 60 \iff \ln xy = \ln 60 \iff xy = 60$.

Ainsi le système devient : $\begin{cases} x^2+y^2=169 \\ xy=60 \end{cases}$ (1)

On a : $(x+y)^2 = x^2+y^2+2xy = 169 + 2\times 60 = 289 = 17^2 \implies x+y=17$

Ainsi le système (1) devient : $\begin{cases} x+y=17 \\ xy=60 \end{cases}$

Les réels x et y sont alors solutions de l'équation $X^2 - 17X + 60 = 0$.

On calcule le discriminant : $\Delta = 49 = 7^2 \implies X_1 = 12$; $X_2 = 5$

Conclusion : $S = \{12;5\}$

3) Il est clair que le système n'existe que si $x \leqslant 0$; $y \leqslant 0$

On a : $\ln x^2 + \ln y^2 = -\ln 4 \iff \ln(xy)^2 = -\ln 4 = \ln\left(\frac{1}{4}\right) \iff (xy)^2 = \frac{1}{4} \iff xy = \pm\frac{1}{2}$

(i) Pour $xy = \frac{1}{2}$, le système devient : $\begin{cases} x+y=\frac{3}{2} \\ xy=\frac{1}{2} \end{cases}$

Les réels x et y sont alors solutions de l'équation $X^2 - \frac{3}{2}X + \frac{1}{2} = 0$.

On calcule le discriminant : $\Delta = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow X_1 = \frac{1}{2}$; $X_2 = 1$

(ii) Pour $xy = -\frac{1}{2}$, le système devient : $\begin{cases} x + y = \frac{3}{2} \\ xy = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Les réels x et y sont alors solutions de l'équation $X^2 - \frac{3}{2}X - \frac{1}{2} = 0$.

On calcule le discriminant : $\Delta = \frac{17}{4} = \left(\frac{\sqrt{17}}{2}\right)^2 \Rightarrow X_1 = \frac{3-\sqrt{17}}{4}$; $X_2 = \frac{3+\sqrt{17}}{4}$

Conclusion : $S = \left\{\left(\frac{1}{2} ; 1\right) ; \left(\frac{3-\sqrt{17}}{4} ; \frac{3+\sqrt{17}}{4}\right)\right\}$

4) Il est clair que le système n'existe que si $x > 0$; $y > 0$

On a : $2\ln 2 + \ln 3 = \ln 4 + \ln 3 = \ln(4 \times 3) = \ln 12$

On a : $\ln x + \ln y = 2\ln 2 + \ln 3 \Leftrightarrow \ln xy = \ln 12 \Leftrightarrow xy = 12$.

Ainsi le système devient : $\begin{cases} x + y = 7 \\ xy = 12 \end{cases}$

Les réels x et y sont alors solutions de l'équation $X^2 - 7X + 12 = 0$.

On calcule le discriminant : $\Delta = 1 \Rightarrow X_1 = 3$; $X_2 = 4$

Conclusion : $S = \{3 ; 4\}$

5) Le système existe si et seulement si $\begin{cases} \frac{x^2}{y^3} > 0 & (1) \\ y^3 \neq 0 & (2) \\ xy^5 > 0 & (3) \end{cases}$

(1) $\frac{x^2}{y^3} = \frac{x^2}{y^2} \times \frac{1}{y}$ donc $\frac{x^2}{y^3} > 0 \Rightarrow \frac{x^2}{y^2} \times \frac{1}{y} > 0 \Rightarrow \frac{1}{y} > 0 \Rightarrow y > 0$

(2) $y^3 \neq 0 \Rightarrow y \neq 0$

(3) $xy^5 > 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y^5 > 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x < 0 \\ y^5 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases}$

Donc pour que le système existe, il faut que les réels x et y soient strictement positifs.

On a : $\begin{cases} \ln\left(\frac{x^2}{y^3}\right) = 9 \\ \ln(xy^5) = -\frac{17}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln x^2 - \ln y^3 = 9 \\ \ln x + \ln y^5 = -\frac{17}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\ln x - \ln y^3 = 9 & (1) \\ \ln x + \ln y^5 = -\frac{17}{2} & (2) \end{cases}$

(2) donne : $\ln x = -\frac{17}{2} - \ln y^5$ (3)

(1) devient : $2\left(-\frac{17}{2} - \ln y^5\right) - \ln y^3 = 9$

Ou encore : $-2\ln y^5 - \ln y^3 = 26$ ou encore $\ln y^{10} + \ln y^3 = -26$

Et donc : $\ln(y^{10} \times y^3) = \ln e^{-26} \implies y^{13} = e^{-26} \implies y = e^{-2}$

(3) donne : $\ln x = -\frac{17}{2} - \ln y^5 = -\ln e^{\frac{17}{2}} - \ln e^{-10} = -\left[\ln\left(e^{\frac{17}{2}} \times e^{-10}\right)\right] = -\ln\left(e^{-\frac{3}{2}}\right) = \ln\left(e^{\frac{3}{2}}\right)$

Donc : $x = e^{\frac{3}{2}}$

Conclusion : $S = \left\{x = e^{\frac{3}{2}} \; ; \; y = e^{-2}\right\}$

6) Soit à résoudre le système : $\begin{cases} x^2 - y^2 = 700 & (1) \\ \ln x - \ln y = 2\ln\frac{4}{3} & (1) \end{cases}$

(2) On a : $\ln x - \ln y = 2\ln\frac{4}{3} \iff \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \ln\left(\frac{16}{9}\right) \iff \frac{x}{y} = \frac{16}{9}$ (3)

(1) devient (en utilisant (3)) : $x^2 - y^2 = 700 \iff y^2\left[\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 1\right] = 700 \iff y^2\left[\left(\frac{16}{9}\right)^2 - 1\right] = 700$

Ainsi : $y^2\left(\frac{175}{81}\right) = 700$ ou encore $y^2 = \frac{81 \times 700}{175} = 324 = 18^2 \implies y = 18$

(3) donne : $x = \frac{16}{9}y = \frac{16}{9} \times 18 = 32$

Conclusion : $S = \{x = 32 \; ; \; y = 18\}$

7) On utilise la méthode de substitution.

8) Soit à résoudre le système : $\begin{cases} (\ln x)(\ln y) = -4 & (1) \\ \ln(xy) = -2 & (2) \end{cases}$

(2) devient : $\ln x + \ln y = -2$. On pose $\ln x = X$; $Y = \ln y$.

Ainsi le système devient : $\begin{cases} XY = -4 \\ X + Y = -2 \end{cases}$

Donc les réels X et Y sont solutions de l'équation : $t^2 + 2t - 4 = 0$.

On calcule le discriminant réduit : $\Delta' = 5 \implies t_1 = X = -1 - \sqrt{5}$; $t_2 = Y = -1 + \sqrt{5}$

Pour $X = -1 - \sqrt{5} \implies \ln x = -1 - \sqrt{5} = \ln e^{-1-\sqrt{5}} \implies x = e^{-1-\sqrt{5}}$

Pour $Y = -1 + \sqrt{5} \implies \ln y = -1 + \sqrt{5} = \ln e^{-1+\sqrt{5}} \implies y = e^{-1+\sqrt{5}}$

Conclusion : $S = \left\{x = e^{-1-\sqrt{5}} \; ; \; y = e^{-1+\sqrt{5}}\right\}$

9) Inspirez-vous de 5).

10) Inspirez-vous de 2).

11) On a : $\ln x + \ln y = \ln 3 \implies \ln xy = \ln 3 \implies xy = 3 \implies x^3y^3 = 3^3 = 27 \implies x^3 = \frac{27}{y^3}$.

On en tire : $-2\ln y^5 - \ln y^3 = 26$ ou encore $\ln y^{10} + \ln y^3 = -26$

Et donc : $\ln(y^{10} \times y^3) = \ln e^{-26} \Rightarrow y^{13} = e^{-26} \Rightarrow y = e^{-2}$

(3) donne : $\ln x = -\frac{17}{2} - \ln y^5 = -\ln e^{\frac{17}{2}} - \ln e^{-10} = -\left[\ln\left(e^{\frac{17}{2}} \times e^{-10}\right)\right] = -\ln\left(e^{-\frac{3}{2}}\right) = \ln\left(e^{\frac{3}{2}}\right)$

Donc : $x = e^{\frac{3}{2}}$

Conclusion : $S = \left\{x = e^{\frac{3}{2}} \; ; \; y = e^{-2}\right\}$

6) Soit à résoudre le système : $\begin{cases} x^2 - y^2 = 700 & (1) \\ \ln x - \ln y = 2\ln\frac{4}{3} & (1) \end{cases}$

(2) On a : $\ln x - \ln y = 2\ln\frac{4}{3} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \ln\left(\frac{16}{9}\right) \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{16}{9}$ (3)

(1) devient (en utilisant (3)) : $x^2 - y^2 = 700 \Leftrightarrow y^2\left[\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 1\right] = 700 \Leftrightarrow y^2\left[\left(\frac{16}{9}\right)^2 - 1\right] = 700$

Ainsi : $y^2\left(\frac{175}{81}\right) = 700$ ou encore $y^2 = \frac{81 \times 700}{175} = 324 = 18^2 \Rightarrow y = 18$

(3) donne : $x = \frac{16}{9}y = \frac{16}{9} \times 18 = 32$

Conclusion : $S = \{x = 32 \; ; \; y = 18\}$

7) On utilise la méthode de substitution.

8) Soit à résoudre le système : $\begin{cases} (\ln x)(\ln y) = -4 & (1) \\ \ln(xy) = -2 & (2) \end{cases}$

(2) devient : $\ln x + \ln y = -2$. On pose $\ln x = X$; $Y = \ln y$.

Ainsi le système devient : $\begin{cases} XY = -4 \\ X + Y = -2 \end{cases}$

Donc les réels X et Y sont solutions de l'équation : $t^2 + 2t - 4 = 0$.

On calcule le discriminant réduit : $\Delta' = 5 \Rightarrow t_1 = X = -1 - \sqrt{5}$; $t_2 = Y = -1 + \sqrt{5}$

Pour $X = -1 - \sqrt{5} \Rightarrow \ln x = -1 - \sqrt{5} = \ln e^{-1-\sqrt{5}} \Rightarrow x = e^{-1-\sqrt{5}}$

Pour $Y = -1 + \sqrt{5} \Rightarrow \ln y = -1 + \sqrt{5} = \ln e^{-1+\sqrt{5}} \Rightarrow y = e^{-1+\sqrt{5}}$

Conclusion : $S = \left\{x = e^{-1-\sqrt{5}} \; ; \; y = e^{-1+\sqrt{5}}\right\}$

9) Inspirez-vous de 5).

10) Inspirez-vous de 2).

11) On a : $\ln x + \ln y = \ln 3 \Rightarrow \ln xy = \ln 3 \Rightarrow xy = 3 \Rightarrow x^3y^3 = 3^3 = 27 \Rightarrow x^3 = \frac{27}{y^3}$.

Donc : $x^3 + y^3 = 12 \Rightarrow \frac{27}{y^3} + y^3 = 12$. On pose $y^3 = Y > 0$

Ainsi l'équation $\frac{27}{y^3} + y^3 = 12$ devient : $\frac{27}{Y} + Y = 12$ ou encore $Y^2 - 12Y + 27 = 0$.

On calcule le discriminant réduit : $\Delta' = 9 \Rightarrow Y_1 = 3$; $Y_2 = 9$

Pour $Y_1 = 3 \Rightarrow y^3 = 3 \Rightarrow y = \sqrt[3]{3}$ et pour $Y_1 = 9 \Rightarrow y^3 = 9 \Rightarrow y = \sqrt[3]{9}$

On a : $x^3 = \frac{27}{y^3}$ et donc :

Pour $y^3 = 3 \Rightarrow x^3 = \frac{27}{3} = 9 \Rightarrow x = \sqrt[3]{9}$ et pour $y^3 = 9 \Rightarrow x^3 = \frac{27}{9} = 3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{3}$

Conclusion : $S = \{(x = \sqrt[3]{9} ; y = \sqrt[3]{3})(x = \sqrt[3]{3} ; y = \sqrt[3]{9})\}$

12) Inspirez-vous de 11).

EXERCICE 14

1) La fonction $f(x) = \ln 3x$ existe si et seulement si $3x > 0$ ou encore si $x > 0$. $D_f = \mathbb{R}_+^*$

$f'(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et : $f'(x) = \frac{(3x)'}{3x} = \frac{3}{3x} = \frac{1}{x}$. Ainsi : $f'(x) = \frac{1}{x}$, $D_{f'} = \mathbb{R}^*$

2) La fonction $f(x) = \ln|5 - 2x|$ existe si et seulement si $5 - 2x \neq 0$ ou encore si $x \neq \frac{5}{2}$. $D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{5}{2}\right\}$

$f'(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{5}{2}\right\}$ et : $f'(x) = \frac{(5-2x)'}{5-2x} = \frac{-2}{5-2x} = \frac{2}{2x-5}$. Ainsi : $f'(x) = \frac{2}{2x-5}$, $D_{f'} = \mathbb{R} - \left\{\frac{5}{2}\right\}$

3) La fonction $f(x) = \ln\left(\frac{2x-3}{5x+4}\right)$ existe si et seulement si $\begin{cases} \frac{2x-3}{5x+4} > 0 \\ 5x + 4 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow D_f = \left]-\infty ; -\frac{4}{5}\right[\cup \left]\frac{3}{2} ; +\infty\right[$

$f'(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R} - \left\{-\frac{4}{5} ; \frac{3}{2}\right\}$ et : $f'(x) = \frac{\left(\frac{2x-3}{5x+4}\right)'}{\left(\frac{2x-3}{5x+4}\right)} = \frac{23}{(2x-3)(5x+4)}$. Ainsi : $f'(x) = \frac{2}{2x-5}$, $D_{f'} = \mathbb{R} - \left\{\frac{5}{2}\right\}$

4) La fonction f existe si et seulement si $\begin{cases} \frac{x^2+x-1}{x+2} \neq 0 \\ x + 2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2} ; \frac{\sqrt{5}-1}{2} ; -2\right\}$

$f'(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R} - \left\{-\frac{4}{5} ; \frac{3}{2}\right\}$ et : $f'(x) = \frac{\left(\frac{x^2+x-1}{x+2}\right)'}{\left(\frac{x^2+x-1}{x+2}\right)} = \frac{x^2+4x+3}{(x+2)(x^2+x-1)}$.

Ainsi : $f'(x) = \frac{x^2+4x+3}{(x+2)(x^2+x-1)}$, $D_{f'} = \mathbb{R} - \left\{-\frac{4}{5} ; \frac{3}{2}\right\}$

5) La fonction $f(x) = \ln|\ln|x||$ existe si et seulement si $\begin{cases} \ln|x| \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-1 ; 0 ; 1\}$

$f'(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R} - \{-1 ; 0 ; 1\}$ et : $f'(x) = \frac{(\ln|x|)'}{\ln|x|} = \frac{1}{x\ln|x|}$.

Ainsi : $f'(x) = \frac{1}{x\ln|x|}$, $D_{f'} = \mathbb{R} - \{-1\,;\,0\,;\,1\}$

6) Inspirez-vous de 4).

7) Inspirez-vous de 1).

8) La fonction $f(x) = \sqrt{x\ln x}$ existe si et seulement si $\begin{cases} x\ln x \geq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow D_f = [1\,;+\infty[$

$f(x)$ est dérivable sur $]1\,;+\infty[$ et : $f'(x) = \frac{(x\ln x)'}{2\sqrt{x\ln x}} = \frac{1+\ln x}{2\sqrt{x\ln x}}$.

Ainsi : $f'(x) = \frac{1+\ln x}{2\sqrt{x\ln x}}$, $D_{f'} =]1\,;+\infty[$

9) Inspirez-vous de 5).

10) Inspirez-vous de 7).

11) Inspirez-vous de 9).

12) Inspirez-vous de 9).

13) Inspirez-vous de 7).

14) La fonction $f(x) = -x^2 + x^2\ln x$ existe si et seulement si $x > 0 \Rightarrow D_f =]0\,;+\infty[$

$f(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et : $f'(x) = 2x\ln x - x$. Ainsi : $f'(x) = 2x\ln x - x$, $D_{f'} = \mathbb{R}^*$

15) Inspirez-vous de 2) et 14).

16) La fonction $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$ existe si et seulement si $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow D_f =]0\,;+\infty[$

$f(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et : $f'(x) = \frac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2}$. Ainsi : $f'(x) = \frac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2}$, $D_{f'} = \mathbb{R}^*$

17) Inspirez-vous de 16).

18) Inspirez-vous de 8).

EXERCICE 15

$f(x)$ existe si et seulement si : $\ln|x| \neq 0 \Leftrightarrow \ln|x| \neq \ln 1 \Leftrightarrow |x| \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$

Donc $D_f = \mathbb{R} - \{-1\,;1\}$

Pour tout x du domaine de définition, on a :

$$f'(x) = \frac{(\ln|x|)'}{\ln|x|} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln|x|} = \frac{1}{x\ln|x|} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{(\ln|x|)'}{\ln|x|} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln|x|} = \frac{1}{x\ln|x|}$$

$f(x)$ existe si et seulement si : $x \neq 0$ et $\ln|x| \neq 0 \Leftrightarrow D_{f'} = \mathbb{R} - \{0\,;-1\,;1\}$

EXERCICE 16

1) La fonction ψ existe si et seulement si $x > 0$ donc le domaine de définition de ψ est $\mathbb{R}^{+*}$.

Limites aux bornes du domaine de définition :

Ainsi : $f'(x) = \frac{1}{x\ln|x|}$, $D_{f'} = \mathbb{R} - \{-1 ; 0 ; 1\}$

6) Inspirez-vous de 4).

7) Inspirez-vous de 1).

8) La fonction $f(x) = \sqrt{x \ln x}$ existe si et seulement si $\begin{cases} x \ln x \geq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow D_f =]1 ; +\infty[$

$f'(x)$ est dérivable sur $]1 ; +\infty[$ et : $f'(x) = \frac{(x\ln x)'}{2\sqrt{x\ln x}} = \frac{1+\ln x}{2\sqrt{x\ln x}}$

Ainsi : $f'(x) = \frac{1+\ln x}{2\sqrt{x\ln x}}$, $D_{f'} =]1 ; +\infty[$

9) Inspirez-vous de 5).

10) Inspirez-vous de 7).

11) Inspirez-vous de 9).

12) Inspirez-vous de 9).

13) Inspirez-vous de 7).

14) La fonction $f(x) = -x^2 + x^2 \ln x$ existe si et seulement si $x > 0 \Rightarrow D_f =]0 ; +\infty[$

$f'(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et : $f'(x) = 2x\ln x - x$. Ainsi : $f'(x) = 2x\ln x - x$, $D_{f'} = \mathbb{R}^*$

15) Inspirez-vous de 2) et 14).

16) La fonction $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$ existe si et seulement si $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow D_f =]0 ; +\infty[$

$f'(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et : $f'(x) = \frac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2}$. Ainsi : $f'(x) = \frac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2}$, $D_{f'} = \mathbb{R}^*$

17) Inspirez-vous de 16).

18) Inspirez-vous de 8).

EXERCICE 15

$f(x)$ existe si et seulement si : $\ln|x| \neq 0 \Leftrightarrow \ln|x| \neq \ln 1 \Leftrightarrow |x| \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$

Donc $D_f = \mathbb{R} - \{-1 ; 1\}$

Pour tout x du domaine de définition, on a :

$$f'(x) = \frac{(\ln|x|)'}{\ln|x|} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln|x|} = \frac{1}{x\ln|x|} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{(\ln|x|)'}{\ln|x|} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln|x|} = \frac{1}{x\ln|x|}$$

$f'(x)$ existe si et seulement si : $x \neq 0$ et $\ln|x| \neq 0 \Leftrightarrow D_{f'} = \mathbb{R} - \{0 ; -1 ; 1\}$

EXERCICE 16

1) La fonction ψ existe si et seulement si $x > 0$ donc le domaine de définition de ψ est $\mathbb{R}^{+*}$.

Limites aux bornes du domaine de définition :

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \psi(x) = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x-1}{x} - \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0+} \psi(x) = \lim_{x \longrightarrow 0+} \frac{1}{x}(x - 1 - x\ln x) = -\infty$$

Dérivabilité de ψ :

ψ est dérivable sur son domaine de définition et : $\psi'(x) = \frac{1-x}{x^2}$.

Donc ψ est croissant sur $]0\,;\,1[$ et décroissante sur $]1\,;+\infty[$.

2) ψ est décroissante sur $]1\,;\,+\infty[$ implique $\psi(x) < \psi(1) = -1$ ou encore $\psi(x) < -1 < 0$.

Ainsi, $\psi(x) < 0$ pour tout $x > 1$.

EXERCICE 17

Première partie

$f(x)$ existe si et seulement si $\begin{cases} x \phi 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$ donc $D = \mathbb{R}^{+*}$.

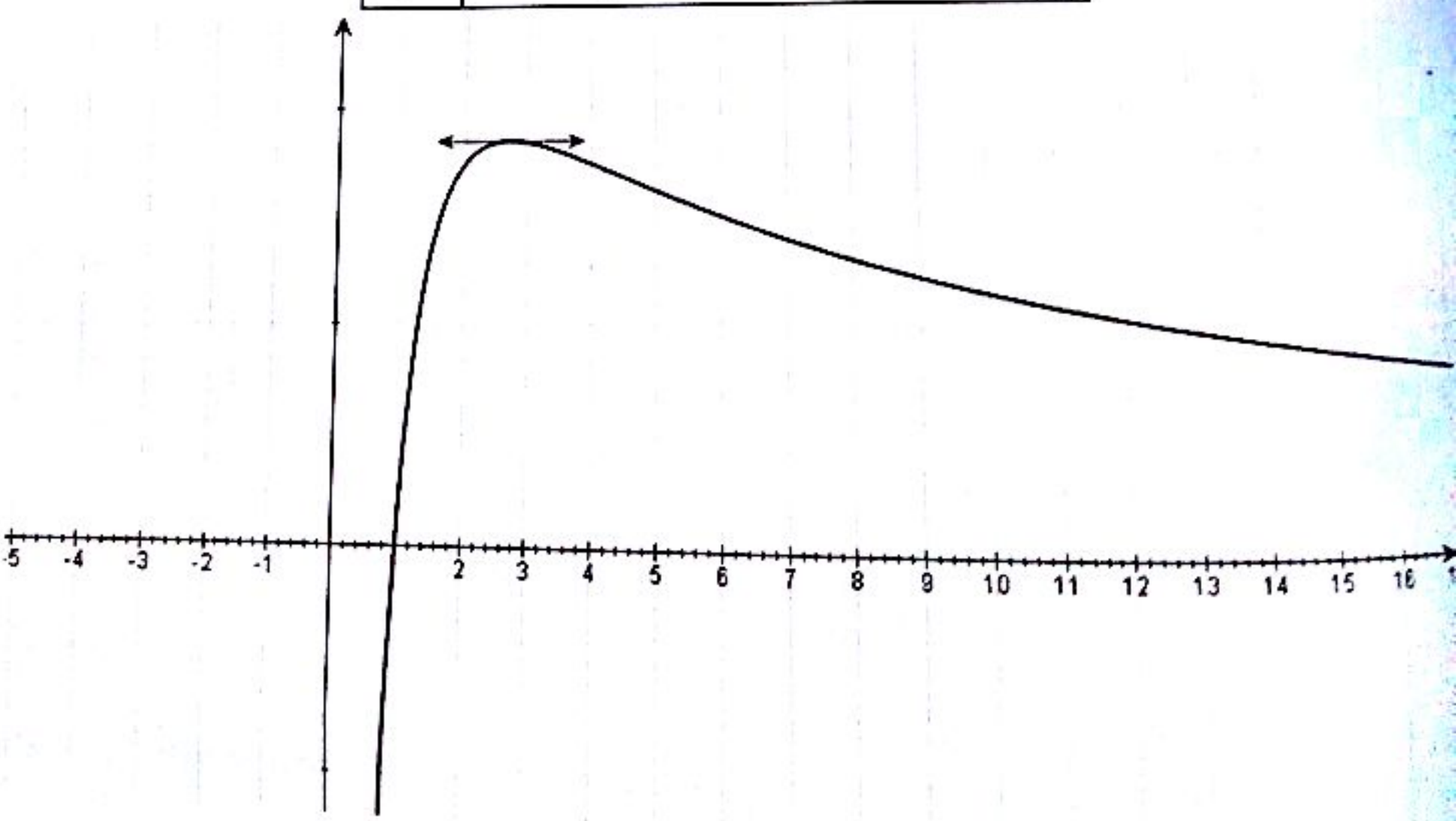
$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \longrightarrow 0} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\ln x}{x} = \lim_{X \longrightarrow +\infty} -X\ln X = -\infty$$

Pour tout x de D, $f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1-\ln x}{x^2}$. f' est du signe de $1 - \ln x$.

On a : $1 - \ln x > 0 \implies \ln x < 1 \implies x < e$ donc f est croissante sur $]0\,;\,e[$

On a : $1 - \ln x < 0 \implies \ln x > 1 \implies x > e$ donc f est décroissante sur $]e\,;+\infty[$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
f	$-\infty$	↗	e^{-1}	↘	0



2) On a : $f(x) = \frac{\ln x}{x} = \frac{1}{x}\ln x \implies \underline{F(x) = \frac{\ln^2 x}{2} + k}$

Deuxième partie

On a : $g(x) = \ln\left|\ln\left|\ln|x|\right|\right|$ existe si et seulement si : $\begin{cases} x \neq 0 \\ \ln|x| \neq 0 \\ \ln\left|\ln|x|\right| \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ |x| \neq 1 \\ \ln|x| \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \pm 1 \\ x \neq \pm e \end{cases}$

Donc $\underline{D_g = \mathbb{R} - \{0\,;\,-1\,;\,-e\,;\,1\,;\,e\}}$

Pour tout $x \in D_g$, $\underline{g'(x) = \frac{1}{x\ln|x|\cdot\ln\left|\ln|x|\right|}}$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \ln\left|\ln\left|\ln|x|\right|\right| = 0 \Leftrightarrow \ln\left|\ln|x|\right| = 1 \Leftrightarrow \ln|x| = e \Leftrightarrow x = \pm e^e$$

Troisième partie

1) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} x\ln\left(\left|\frac{1}{x}\right|\right) = \lim_{x\to 0+} x\ln\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0+} x(-\ln x) = \lim_{x\to 0+} -(x\ln x) = 0$$

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} x\ln\left(\left|\frac{1}{x}\right|\right) = \lim_{x\to 0-} x\ln\left(-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0-} x[-\ln(-x)] = \lim_{x\to 0-} -x\ln(-x) = \lim_{t\to 0+} t\ln t = 0$$

Donc : $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0-} f(x) = 0 = f(0)$ donc f est continue au point $x = 0$.

2) Limites aux bornes du domaine de définition :

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} x\ln\left(\left|\frac{1}{x}\right|\right) = \lim_{x\to -\infty} x\ln\left(-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to -\infty} x[-\ln(-x)] = \lim_{x\to -\infty} -x\ln(-x) = \lim_{t\to +\infty} t\ln t = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} x\ln\left(\left|\frac{1}{x}\right|\right) = \lim_{x\to +\infty} x\ln\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to +\infty} x(-\ln x) = \lim_{x\to +\infty} -(x\ln x) = -\infty$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $f'(x) = \left[x\ln\left(\left|\frac{1}{x}\right|\right)\right]' = \ln\left(\left|\frac{1}{x}\right|\right) + x \times \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \ln\left(\left|\frac{1}{x}\right|\right) - 1$

On a :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\left|\frac{1}{x}\right|\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\left|\frac{1}{x}\right|\right) = 1 = \ln e \Leftrightarrow \left|\frac{1}{x}\right| = e \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \pm e \Leftrightarrow x = \pm e^{-1}$$

(i) On a : $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln\left(\left|\frac{1}{x}\right|\right) > 1 = \ln e \Leftrightarrow \left|\frac{1}{x}\right| > e \Leftrightarrow |x| < e^{-1} \Leftrightarrow -e^{-1} < x < e^{-1}$

Donc f est décroissante sur $]-e^{-1}\,;\,e^{-1}[$

(ii) On a : $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \ln\left(\left|\frac{1}{x}\right|\right) < 1 = \ln e \Leftrightarrow \left|\frac{1}{x}\right| < e \Leftrightarrow |x| > e^{-1} \Leftrightarrow x > e^{-1}$ ou $x < -e^{-1}$

Donc f est décroissante sur $]-\infty\,;\,-e^{-1}[\,\cup\,]e^{-1}\,;\,+\infty[$

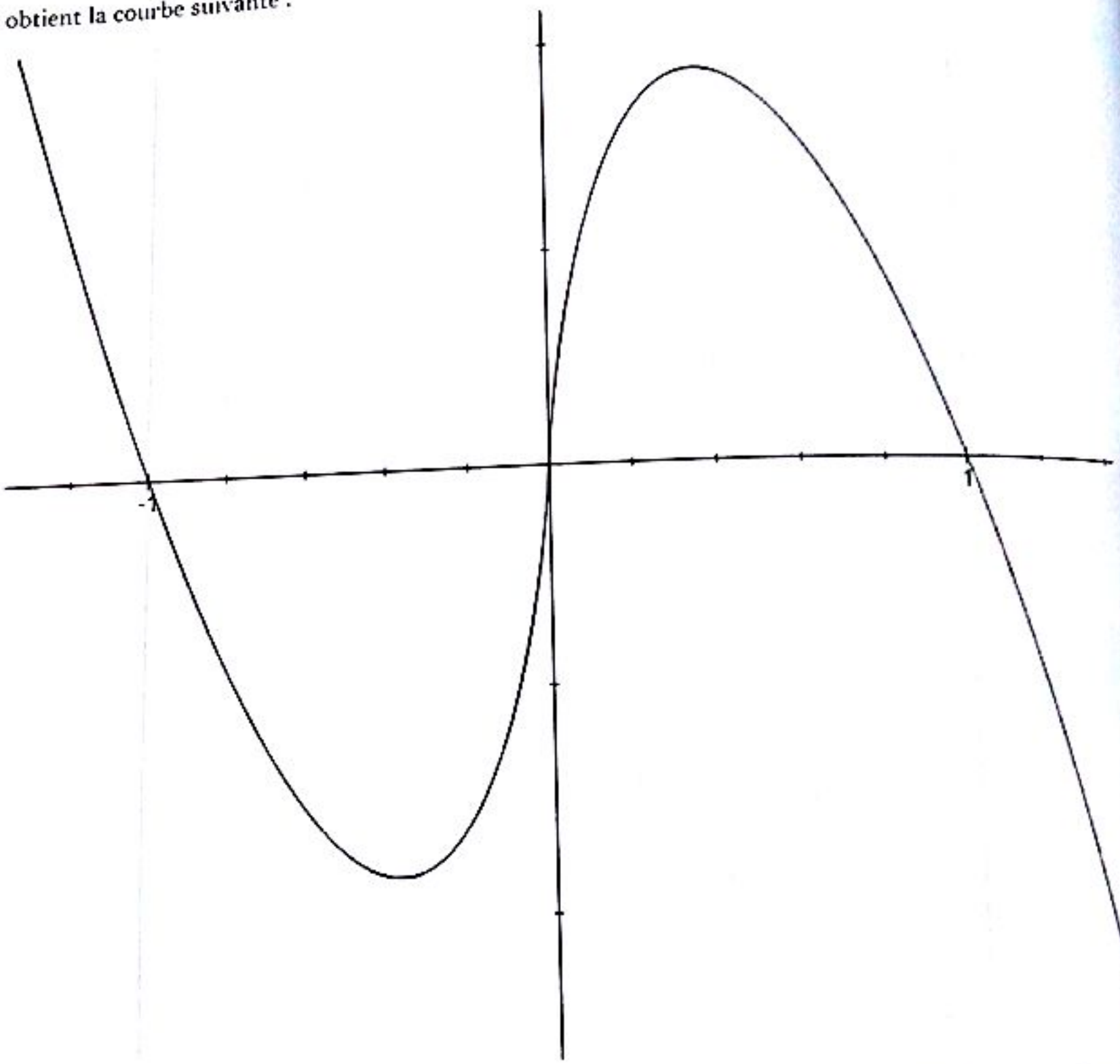
CE $\Sigma\pi\int$

(iii) On a : $f(-e^{-1}) = -e^{-1}\ln\left(\left|\frac{1}{-e^{-1}}\right|\right) = -\frac{1}{e}$; $f(e^{-1}) = e^{-1}\ln\left(\left|\frac{1}{e^{-1}}\right|\right) = \frac{1}{e}$

On obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$		$-e^{-1}$		e^{-1}		$-\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	$-\infty$

On obtient la courbe suivante :



3) On a : $(T)_{x_0=1} : y(x) = f'(1)(x-1) + f(1) = -(x-1) + 0 = 1 - x$. Ainsi : $(T)_{x_0=1} : y(x) = 1 - x$

EXERCICE 18

1) $f(x)$ existe si et seulement si $\begin{cases} 1 + x > 0 \\ x > 0 \\ \ln x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow D_f =]0\,;\,+\infty[- \{1\}$

2) On trouve : $\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty$

3) On a :

$$\ln f(x) = \frac{1}{x}\ln\left[1 - \frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right] = \frac{1}{x}\ln\left[1 + \frac{\ln(1+x)}{-\ln x}\right] = \frac{1}{x}\ln\left[1 + \frac{\ln(1+x)}{\ln\frac{1}{x}}\right] = \frac{1}{x}\ln(1+h(x))$$

Ainsi $\underline{\ln f(x) = \frac{1}{x}[\ln(1+h(x))]}$

4) On a :

$$\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\ln\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1+x)}{x}}{\frac{\ln\frac{1}{x}}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1+x)}{x}}{\frac{\ln\frac{1}{x}}{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}}{\lim\limits_{x\to +\infty} X\ln X} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\underline{\lim_{x\to 0} h(x) = 0}$$

On a : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{h(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1+x)}{x}}{\ln\frac{1}{x}} = \frac{1}{-\infty} = 0$. Ainsi $\underline{\lim_{x\to 0}\left(\frac{h(x)}{x}\right) = 0}$

$$\lim_{x\to 0}\ln f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+h(x))}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+h(x)) - \ln 1}{x-0} = \frac{h'(0)}{1+h(0)} = 0$$

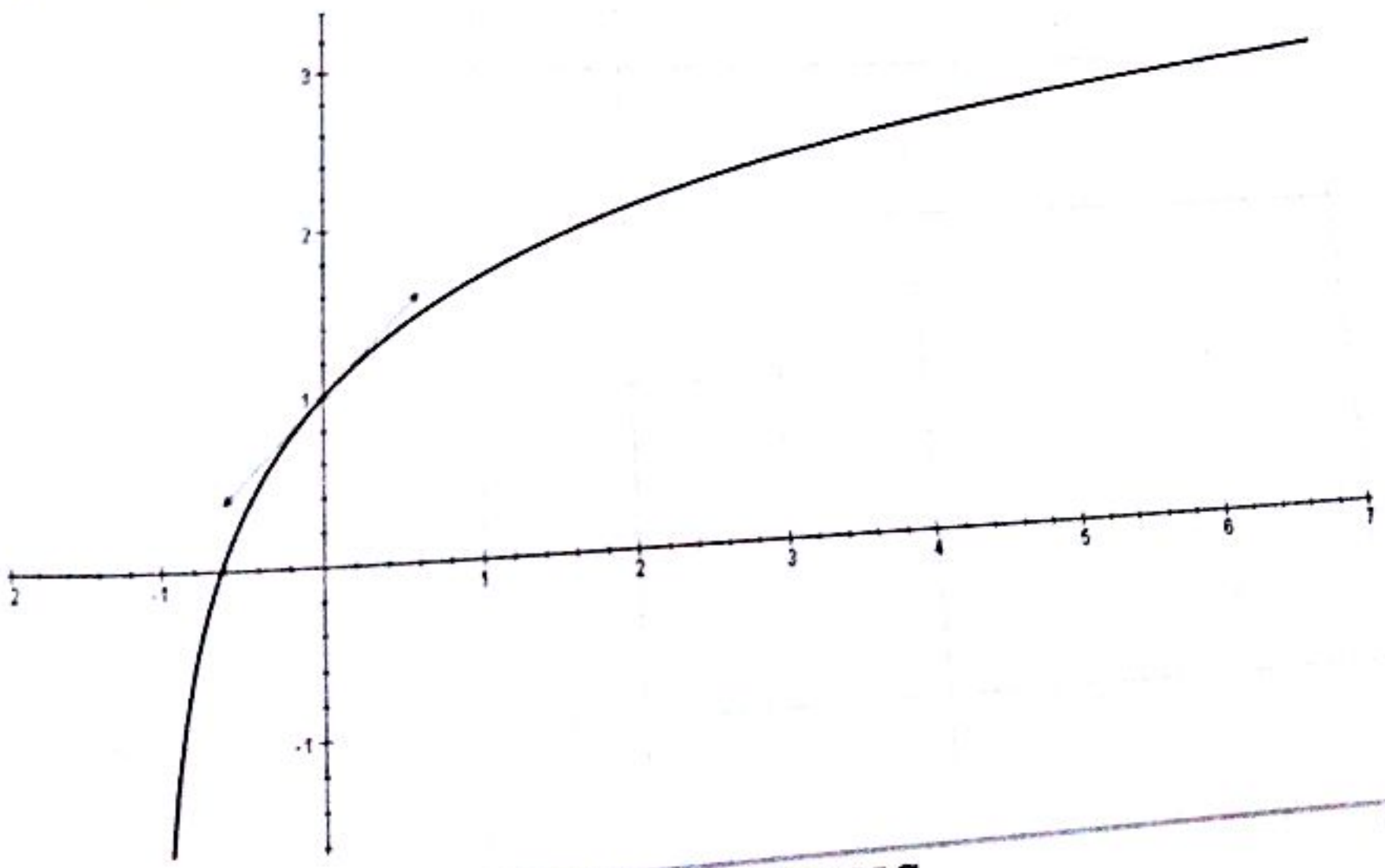
On en déduit que : $\underline{\lim_{x\to 0} f(x) = 1}$

EXERCICE 20

1) f est définie, continue et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et on a : $f'(x) = \frac{1}{x+1} > 0,\ \forall\, x \geqslant 0$ donc f est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

2) On trouve : $\underline{(T) : y(x) = x + 1}$

3) On obtient la courbe suivante :



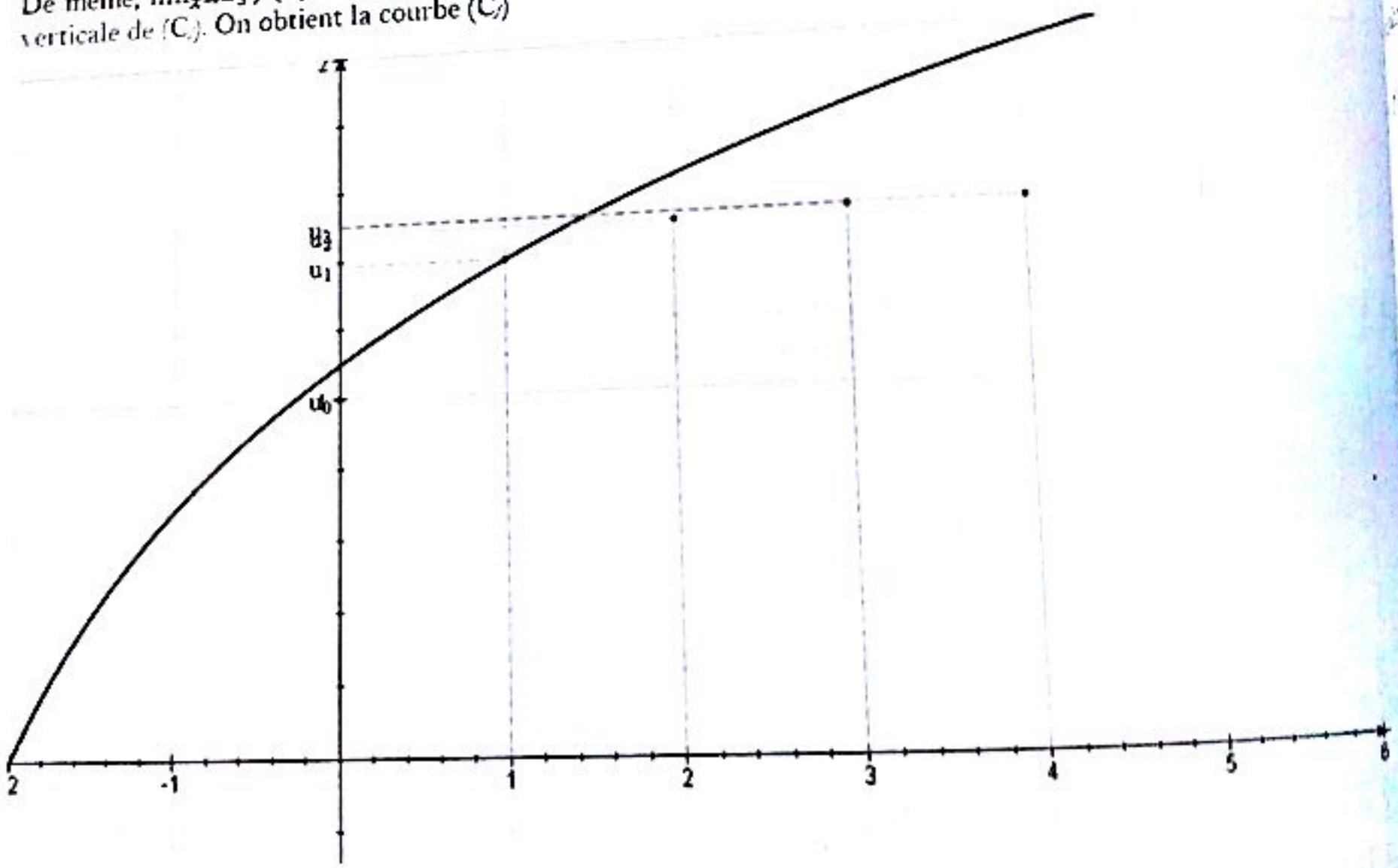
4) g est définie, continue et dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et $g'(x)=\frac{x}{x+1}>0,\ \forall x>0$ donc g est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$. Ainsi g réalise une bijection de $[0\,;+\infty[$ dans $g([0\,;+\infty[)=[-1\,;+\infty[$ et comme $0\in[-1\,;+\infty[$, alors l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique dans $[0\,;+\infty[$. De plus, $g(1)=-\ln 2<0$ et $g(3)=2-\ln 3>0$ donc $a\in[1\,;3]$. Et comme $g(x)=f(x)-x$, on déduit que l'équation $f(x)=x$ admet une solution unique $\underline{a\in[1\,;3]}$

EXERCICE 21

1) a) f est définie, continue et dérivable sur $]-3\,;+\infty[$ et on a : $f'(x)=\frac{1}{x+3}>0,\ \forall x\in]-3\,;+\infty[$ donc f est strictement croissante sur $]-3\,;+\infty[$. Par ailleurs : $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+3)}{x}=0$

(C_f) admet une branche parabolique de direction (xx') en $+\infty$.

De même, $\lim_{x\to-3}f(x)=\lim_{x\to-3}\ln(x+3)=-\infty$, donc la droite d'équation $x=-3$ est une asymptote verticale de (C_f). On obtient la courbe (C_f)



b) Soit $g(x)=x-f(x),\ x>-3,\ g'(x)=1-f'(x)=\frac{2}{x+3}>0$. La fonction g est continue et strictement croissante sur $]-3\,;+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ donc $g(x)$ admet une solution unique α.

On a : $g(1)=1-\ln 4<0$ et $g(2)=2-\ln 5>0$ donc $\alpha\in]1\,;2[$.

Ainsi $f(x)=x$ admet une solution unique $\alpha\in]1\,;2[$.

2) b) f étant strictement croissante alors : $1\leqslant x\leqslant 2\ \Rightarrow\ f(1)\leqslant f(x)\leqslant f(2)$

On a : $f(1)=\ln 4>1$ et $f(2)=\ln 5<2$

Donc : $1<f(1)<f(2)<2$

Ainsi : $\forall x \in [1\,;2],\ f([1\,;2]) \subset [1\,;2]$

c) On a : $\forall x \in [1\,;2],\ f'(x) = \frac{1}{x+3}$

On a : $\forall x \in [1\,;2],\ 1 \leqslant x \leqslant 2$

Donc : $4 \leqslant x+3 \leqslant 5$

En passant aux inverses : $\frac{1}{5} \leqslant \frac{1}{x+3} \leqslant \frac{1}{4}$

Ainsi : $\frac{1}{5} \leqslant f'(x) \leqslant \frac{1}{4}$

d) On montre d'abord par une récurrence simple que $U_n \in [1\,;2]$.

Ainsi, l'inégalité $\frac{1}{5} \leqslant f'(x) \leqslant \frac{1}{4}$ est alors vérifiée pour tout x du segment $[U_n\,;\,\alpha]$.

L'inégalité des accroissements finis nous permet d'écrire : $\frac{1}{5} \leqslant \frac{f(U_n)-f(\alpha)}{U_n-\alpha} \leqslant \frac{1}{4}$.

On a : $f(U_n) = U_{n+1}$ et $f(\alpha) = \alpha$ et donc :

$$\frac{1}{5} \leqslant \frac{f(U_n)-f(\alpha)}{U_n-\alpha} \leqslant \frac{1}{4} \implies \frac{1}{5} \leqslant \frac{U_{n+1}-\alpha}{U_n-\alpha} \leqslant \frac{1}{4}$$

5) a) Au premier rang, $|U_0-\alpha| \leqslant |U_0-\alpha| = \left(\frac{1}{4}\right)^0 |U_0-\alpha|$ donc l'inégalité est vérifiée au premier rang.

Supposons $|U_n-\alpha| \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n |U_0-\alpha|$ et montrons que $|U_{n+1}-\alpha| \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} |U_0-\alpha|$

En effet,

$$\frac{U_{n+1}-\alpha}{U_n-\alpha} \leqslant \frac{1}{4} \implies |U_{n+1}-\alpha| \leqslant \frac{1}{4}|U_n-\alpha| \leqslant \frac{1}{4}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^n |U_0-\alpha|\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} |U_0-\alpha|$$

Donc $|U_{n+1}-\alpha| \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} |U_0-\alpha|$. Ce qui achève la récurrence.

b) On a : $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0 \implies \lim_{n\to+\infty} U_n = \alpha$. Donc (u_n) converge vers α.

c) On trouve : $\alpha \approx 1,505$

EXERCICE 22

1) *Continuité de f_n en 0* :

La fonction $t \mapsto t^n$ est une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur lui-même. Il existe, pour un réel $x > 0$ donné un seul $t > 0$ tel que $x = t^n$. Posons donc $x = t^n$.

Alors $\lim_{x\to0^+} x(\ln x)^n = \lim_{t\to0^+}(t\ln t^n)^n = \lim_{t\to0^+}(nt\ln t)^n = 0$. Donc f_n est continue en 0.

Dérivabilité de f_n en 0 :

Pour tout $n \geqslant 1$, $\lim_{x\to 0^+} \frac{f_n(x)-f_n(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}(\ln x)^n$. On trouve $+\infty$ si n est pair et $-\infty$ si n est impair.

2) Pour tout $n \geqslant 1$, f_n est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ car c'est un produit de fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$
Pour tout $x > 0$, $f_1'(x) = 1 + \ln x$ et si $n \geqslant 2$, $f_n'(x) = (\ln x)^{n-1}(n + \ln x)$.

Note : Lorsque $n = 1$, l'expression $(\ln x)^{n-1} = (\ln x)^0$ n'a pas de sens pour $x = 1$; c'est pour cela que nous avons mis ce cas à part.

Tableau de variation de f_1 :

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f_1'(x)$	‖	$-$		$+$	
f_1	0	↘	$-e^{-1}$	↗	$+\infty$

Variations de f_n pour $n \geqslant 2$:

Pour n pair : on a : $(\ln x)^{n-1} < 0$ si $0 < x < 1$, $(\ln x)^{n-1} > 0$ si $x > 1$.

Pour n impair : on a : $(\ln x)^{n-1} > 0$ si $x > 1$, $x \neq 1$.

Dans tous les cas, $(\ln x)^{n-1} = 0$ si $x = 1$.

$n + \ln x > 0$ si $x > e^{-n}$; $n + \ln x < 0$ si $x < e^{-n}$; $n + \ln x = 0$ si $x = e^{-n}$.

On en déduit les tableaux de variations :

n pair

x	0		e^{-n}		1		$+\infty$
$f_n'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
f_n	0	↗	$n^n e^{-n}$	↘	0	↗	$+\infty$

n impair

x	0		e^{-n}		1		$+\infty$
$f_n'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$+$	
f_n	0	↘	$-n^n e^{-n}$	↗	0	↗	$+\infty$

3) Les courbes $(\mathcal{C}_n)$ passent toutes par les trois points de coordonnées suivantes : $(0\,;\,0)$, $(1\,;\,0)$ et $(e\,;\,0)$.

EXERCICE 23

1) Une récurrence nous permet d'établir le résultat.

2) En effet,

$$\cos 3x = \cos(x + 2x) = \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x = \cos x \cos 2x - 2\sin^2 x \cos x$$
$$= \cos x\,(\cos 2x - 2\sin^2 x) = \cos x\,\big(\cos 2x - (1 - \cos 2x)\big) = \cos x\,(2\cos 2x - 1)$$

Ainsi : $\underline{\cos 3x = (2\cos 2x - 1)\cos x}$

3) En effet, $\cos 3x = \cos x\,(2\cos 2x - 1) \implies \frac{\cos 3x}{\cos x} = 2\cos 2x - 1$.

On pose $2x = \frac{\theta}{3^k}$ donc $x = \frac{\theta}{2\times 3^k}$. Ainsi :

$$S_n(\theta) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\cos\left(\frac{\theta}{3^k}\right) - 1\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2\times 3^{k-1}}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2\times 3^k}\right)}\right) = \ln\left[\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2\times 3^{k-1}}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2\times 3^k}\right)}\right)\right]$$

$$= \ln\left|\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\theta}{2\times 3}\right)\cdot\cos\left(\frac{\theta}{2\times 3^2}\right)\cdots\cos\left(\frac{\theta}{2\times 3^{n-2}}\right)\cdot\cos\left(\frac{\theta}{2\times 3^{n-1}}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2\times 3}\right)\cdot\cos\left(\frac{\theta}{2\times 3^2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\theta}{2\times 3^3}\right)\cdots\cos\left(\frac{\theta}{2\times 3^{n-1}}\right)}\right|$$

$$= \ln\left|\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\left|\cos\left(\frac{\theta}{2\times 3}\right)\cdot\cos\left(\frac{\theta}{2\times 3^2}\right)\cdots\cos\left(\frac{\theta}{2\times 3^{n-2}}\right)\cdot\cos\left(\frac{\theta}{2\times 3^{n-1}}\right)\right|}{\left|\cos\left(\frac{\theta}{2\times 3}\right)\cdot\cos\left(\frac{\theta}{2\times 3^2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\theta}{2\times 3^3}\right)\cdots\cos\left(\frac{\theta}{2\times 3^{n-1}}\right)\right|\cdot\cos\left(\frac{\theta}{2\times 3^n}\right)}\right|$$

$$= \ln\left(\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2\times 3^n}\right)}\right) = \ln\left(\cos\frac{\theta}{2}\right) - \ln\left(\frac{\theta}{2\times 3^n}\right)$$

Ainsi : $S_n(\theta) = \ln\left(\cos\frac{\theta}{2}\right) - \ln\left(\frac{\theta}{2\times 3^n}\right)$

On a :

$$\lim_{n\to\infty} S_n(\theta) = \lim_{n\to\infty}\left[\ln\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) - \ln\left(\cos\left(\frac{\theta}{2\times 3^n}\right)\right)\right] = \ln\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \implies \lim_{n\to\infty} S_n(\theta) = \ln\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

EXERCICE 14

1) L_1 est définie sur $]0\,;+\infty[$.

$L_2(x)$ existe si et seulement si $\ln x > 0$, donc L_2 est définie sur $]1\,;+\infty[$.

$L_3(x)$ existe si et seulement si $L_2(x) > 0$, donc si et seulement si $\ln x > 1$. Donc L_3 est définie sur $]e\,;+\infty[$.

$L_4(x)$ existe si et seulement si $L_3(x) > 0$, donc si et seulement si $L_2(x) > 1$, donc si et seulement si $\ln x > e$. Donc L_4 est définie sur $]e^e\,;+\infty[$.

2) La fonction dérivée de L_1 est la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$. En appliquant la formule de dérivation des fonctions composées, on obtient :

$$L_2'(x) = \ln'(\ln x) \times \ln'(x) = \frac{1}{\ln x} \times \frac{1}{x}$$

Montrons par récurrence que :

$$\forall\, n \geqslant 2,\ \ L_n'(x) = \frac{1}{L_{n-1}(x)} \times \cdots \times \frac{1}{L_1(x)} \times \frac{1}{x}$$

Initialisation : Comme on vient de le voir, ce résultat est vrai pour $n = 2$.

Hérédité : Supposons le vrai pour un enter $n \geqslant 2$ et montrons qu'il est vrai pour $n + 1$.

$L_{n+1}(x) = \ln \circ L_n(x)$ donc :

CE $\sum\pi\int$

$$L'_{n+1}(x) = \ln'(L_n(x)) \times L'_n(x) = \frac{1}{L_n(x)} \times \frac{1}{L_{n-1}(x)} \times \cdots \times \frac{1}{L_1(x)} \times \frac{1}{x}$$

D'après l'hypothèse de récurrence.

Conclusion : $L'_1(x) = \frac{1}{x}$ et $\forall\, n \geqslant 2,\ L'_n(x) = \frac{1}{L_{n-1}(x)} \times \cdots \times \frac{1}{L_1(x)} \times \frac{1}{x}$

EXERCICE 25

1) On pose $y = \sqrt{x}$. Alors :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^2 x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^2 y^2}{y^2} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln y^2}{y}\right)^2 = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2\ln y}{y}\right)^2 = 0 \implies \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^2 x}{x} = 0$$

2) On a : $-\ln^2 x + 2\ln x - 1 = -(\ln x - 1)^2$.

Donc : $-\ln^2 x + 2\ln x - 1 \leqslant 0,\ \forall x > 0$

3) f est continue et dérivable pour tout $x > 0$ et on a : $f'(x) = \frac{-\ln^2 x + 2\ln x - 1 - x^2}{x^2} < 0$.

Donc f est strictement décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

Tableau de variations :

x	0		$-\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↘	$-\infty$

4) a) On a : $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - (-x+2)] = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\ln^2 x}{x} = 0$ donc (C_f) admet une asymptote oblique (D) d'équation $y = -x + 2$.

b) On a : $f(x) - (-x+2) = \frac{1+\ln^2 x}{x} > 0,\ \forall x > 0$ donc (D) est en dessous de (C_f).

c) On a : $x + y = 0 \implies y = -x$.

(T) est parallèle à la droite d'équation $y = -x$ si $f'(x_0) = -1$ (même coefficient directeur)

On a : $f'(x_0) = -1 \implies \frac{-\ln^2 x_0 + 2\ln x_0 - 1 - x_0^2}{x_0^2} = -1 \implies -\ln^2 x_0 + 2\ln x_0 - 1 - x_0^2 = -x_0^2$

Ainsi : $-\ln^2 x_0 + 2\ln x_0 - 1 = 0$ ou encore $-(\ln x_0 - 1)^2 = 0 \implies \ln x_0 = 1 \implies x_0 = e$

On a : (T) : $y(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = -(x - e) + \frac{1+\ln^2 e}{e} + 2 - e = -x + \frac{2}{e} + 2$

Ou encore : (T) : $y(x) = -x + \frac{2+2e}{e}$

d) La fonction f réalise une bijection dans $\mathbb{R}_+^*$ et en particulier dans $[2\,;3]$. On a :

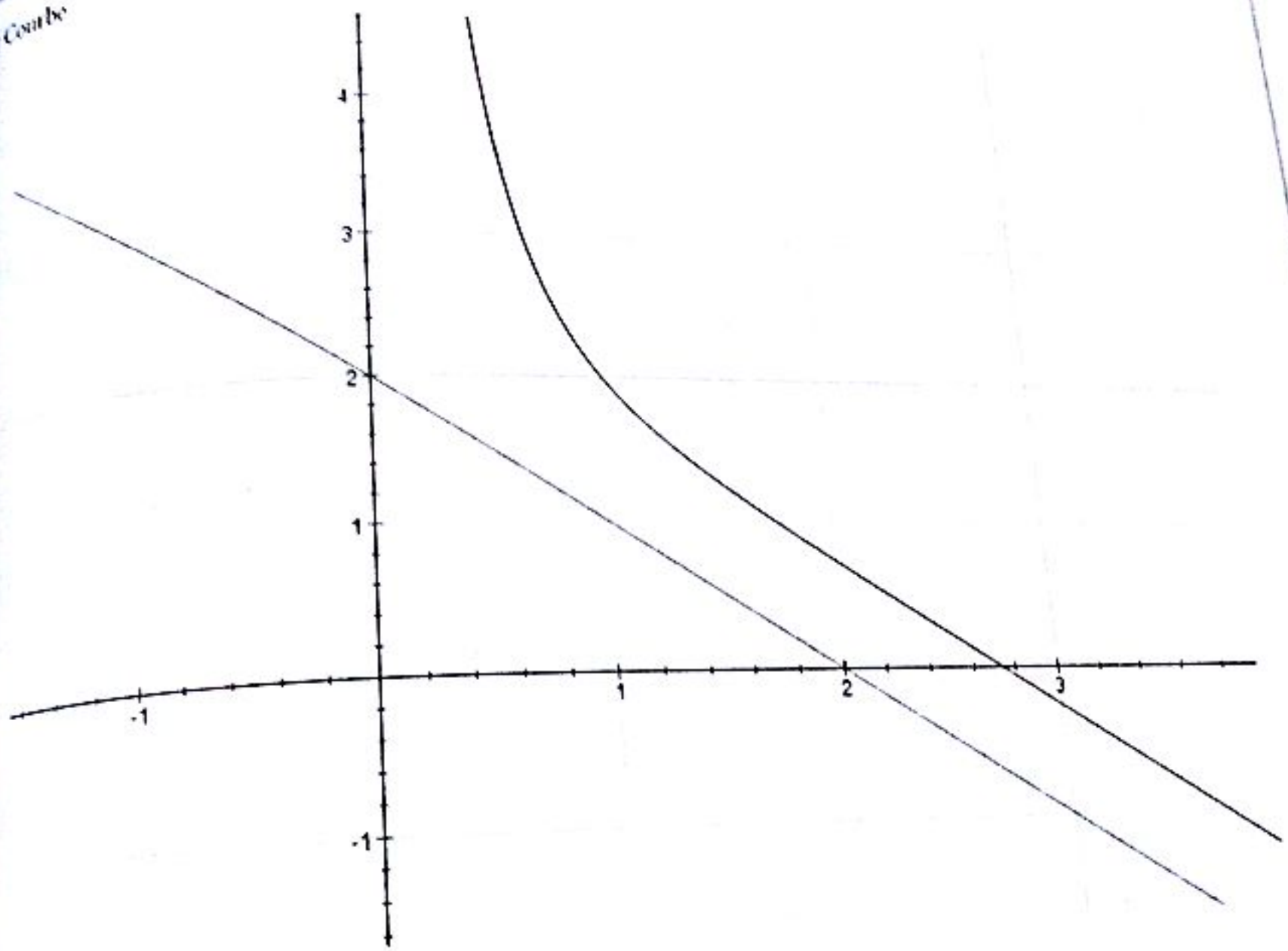
$$f(2) = \frac{1+\ln^2 2}{2} > 0\ ;\quad f(3) = \frac{1+\ln^2 3}{3} - 1 < 0\ ;\quad 0 \in [f(3)\,;\,f(2)]$$

Ainsi l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in [2\,;3]$

On a : $f(2,7) = 0,035$; $f(2,8) = -0,064$ $\Rightarrow$ $2,7 < \alpha < 2,8$.

D'autre part : $e - 10^{-1} = 2,6$ et $e + 10^{-1} = 2,8$ donc $|\alpha - e| < 10^{-1}$ et donc c'est une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

L'Courbe



EXERCICE 28

1) f est définie, continue et dérivable pour tout $x \in]-1\,;\,+\infty[$ et on a : $f'(x) = \frac{(x-1)(x+2)}{x+1}$

Sur $]-1\,;1]$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f \downarrow$

Sur $]-1\,;+\infty[$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f \uparrow$

Tableau de variations

x	-1		1		$+\infty$
f'		$-$		$+$	
f		$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	

2) a) On a : $(T) : y(x) = f'(0)(x-0) + f(0) = -2x - 1$. Donc $(T) : y(x) = -2x - 1$

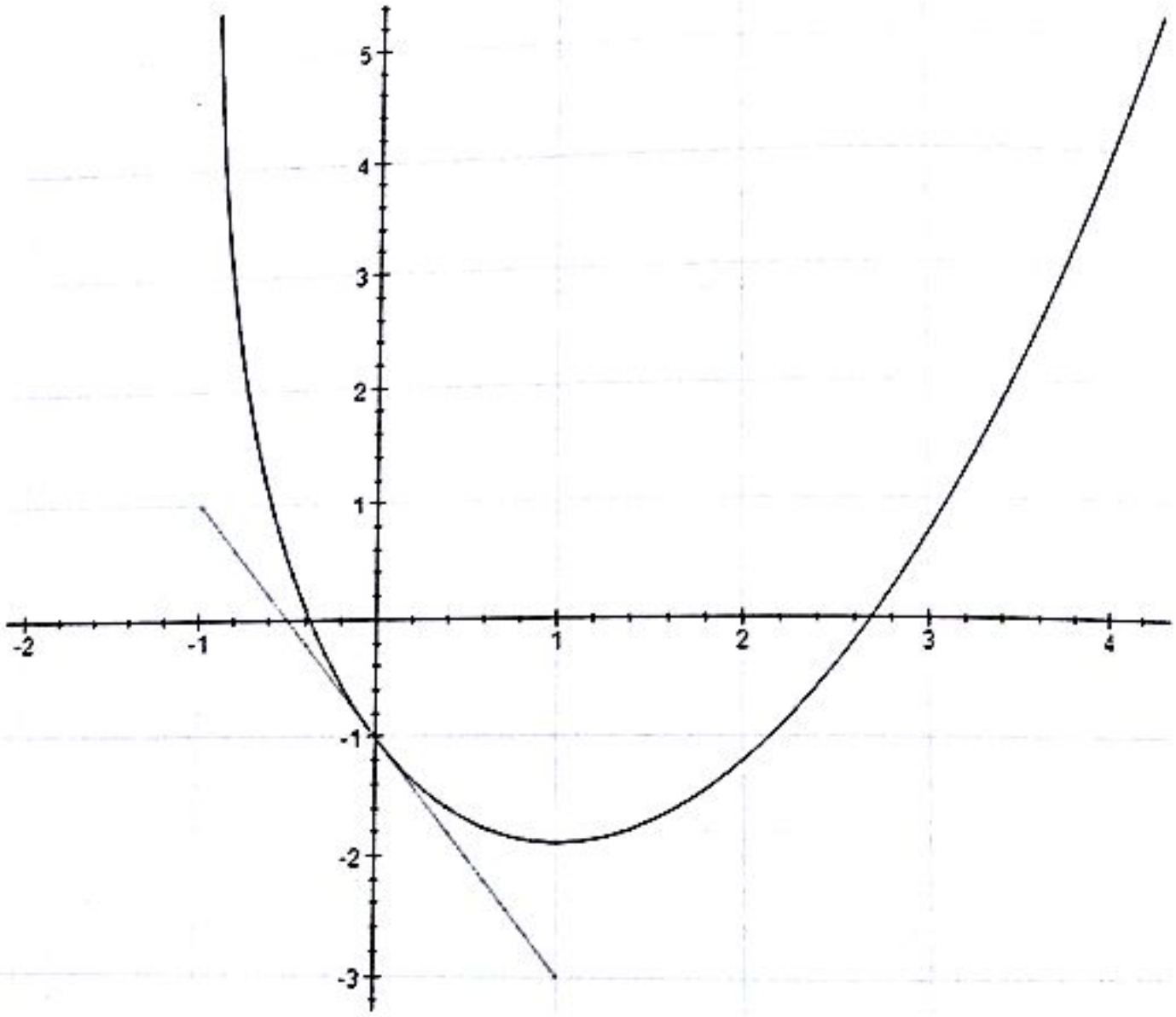
b) On a : $\lim_{x\to -1} \frac{x^2}{2} - 1 - 2\ln(x+1) = +\infty$ $\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

De même, $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

c) (i) Au point d'abscisse $x = -1$, la courbe de f admet une asymptote verticale orientée vers le haut.

(ii) En $+\infty$, la courbe de f admet une branche parabolique.

d) Courbe :



3) a) Sur $]-1\,;1[$, f est continue et strictement décroissante à valeurs dans $\left]-\frac{1}{2} - 2\ln 2\,;+\infty\right[$.

Or $0 \in \left]-\frac{1}{2} - 2\ln 2\,;+\infty\right[$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique (f est bijective) dans $]-1;1[$.

De même, sur $]1\,;+\infty[$, f est continue et strictement croissante à valeurs dans $\left]-\frac{1}{2} - 2\ln 2\,;+\infty\right[$.

Or $0 \in \left]-\frac{1}{2} - 2\ln 2\,;+\infty\right[$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique (f est bijective) notée α dans $]1\,;+\infty[$. On a : $f(2) = 1 - 2\ln 3 < 0$ et $f(3) = \frac{7}{2} - 2\ln 4 > 0$ donc $\alpha \in]2\,;3[$.

On a : $f(x) = 0 \iff \frac{x^2}{2} - 1 - 2\ln(x+1) = 0 \iff \frac{x^2}{2} - 1 = 2\ln(x+1)$

Ainsi l'équation $\frac{x^2}{2} - 1 = 2\ln(x+1)$ admet exactement deux solutions dont l'une, $\alpha \in]2\,;3[$

b) On a : $\frac{\alpha^2}{2} - 1 = 2\ln(\alpha+1) \implies \alpha^2 = 2 + 4\ln(\alpha+1)$ et comme $\alpha > 0$ on a : $\alpha = \sqrt{2 + 4\ln(1+\alpha)}$

a) g est continue et strictement croissante et à valeurs dans $\left]-\frac{1}{2}-2\ln 2\,;+\infty\right[$ donc g réalise une bijection de $]1\,;+\infty[$ vers $J=\left]-\frac{1}{2}-2\ln 2\,;+\infty\right[$

b) g est continue et dérivable sur $]1\,;+\infty[$ et on a : $g'(x)=\frac{(x-1)(x+2)}{x+1}\neq 0,\ \forall x\in]1\,;+\infty[$.

Alors g^{-1} est dérivable sur J et comme g et g^{-1} ont même sens de variation, on déduit que g^{-1} est strictement croissante.

c) (C) et $(\mathcal{C})$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice $(y=x)$.

Deuxième partie

1) a) On a : $\forall x>2,\ 1+x>3, \ln(1+x)>\ln 3>1$.

Ainsi : $4\ln(1+x)>4 \Rightarrow 2+4\ln(1+x)>6>4 \Rightarrow \underline{h(x)>2}$

b) On a : $h'(x)=\frac{2}{(1+x)h(x)}>0,\ \forall x>2$ (1)

Par ailleurs, $\forall x>2,\ (1+x)h(x)>6 \Rightarrow \frac{2}{(1+x)h(x)}<\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ (2)

(1) et (2) nous donnent : $\underline{0\leqslant h'(x)\leqslant\frac{1}{3}}$

2) a) On a : $U_0=2 \Rightarrow U_0>2$ donc la propriété est vraie au premier rang.

Supposons que $u_k>2,\ k=0,1,2,3,\dots,n$ et montrons que $U_{n+1}>2$.

En effet, on avait montré que $h(x)>2,\ \forall x>2$ donc $h(U_n)>2$ ou encore $\underline{U_{n+1}>2}$

Ce qui achève la récurrence. Donc $\underline{\forall n\in\mathbb{N},\ U_n>2}$

b) On sait que $\forall x>2,\ |h'(x)|\leqslant\frac{1}{3}$ en particulier $h'(x)\leqslant\frac{1}{3}$ sur le segment $[U_n\,;\alpha]$.

D'après l'inégalité des accroissements finis, on a : $\left|\frac{h(U_n)-h(\alpha)}{U_n-\alpha}\right|\leqslant\frac{1}{3}$ et comme $h(U_n)=U_{n+1}$ et $h(\alpha)=\alpha$, on obtient : $\underline{|U_{n+1}-\alpha|\leqslant\frac{1}{3}|U_n-\alpha|}$

c) On a : $|U_n-\alpha|\leqslant\frac{1}{3}|U_{n-1}-\alpha|\leqslant\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}|U_{n-2}-\alpha|\leqslant\cdots\leqslant\frac{1}{3^n}|U_0-\alpha|=\frac{1}{3^n}|2-\alpha|$

Or $\alpha\in[2;3] \Rightarrow |2-\alpha|\leqslant 1 \Rightarrow \underline{|U_n-\alpha|\leqslant\frac{1}{3^n}}$

d) $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{3^n}=0$ donc $\lim_{n\to+\infty}|U_n-\alpha|=0$ ou encore $\underline{\lim_{n\to+\infty}U_n=\alpha}$

3) On trouve $\underline{\alpha\approx 2,68}$

CE $\Sigma\pi\int$

AN4

Fonction exponentielle

EXERCICE 1

Première partie

1) On pose $X = e^{2x+1}$; $X > 0$. Donc $e^{2x+1} - \frac{e}{e^{2x+1}} = e - 1 \Leftrightarrow X - \frac{e}{X} = e - 1 \Leftrightarrow X^2 + (1-e)X - e = 0$

On calcule le discriminant : $\Delta = (1-e)^2 + 4e = 1 - 2e + e^2 + 4e = (e+1)^2$

Donc : $X_1 = \frac{e-1-e-1}{2} = -1 < 0$; $X_2 = \frac{e-1+e+1}{2} = e > 0 \Rightarrow X = X_2 = e.$

On a : $X = e^{2x+1} \Leftrightarrow e = e^{2x+1} \Leftrightarrow e^1 = e^{2x+1} \Leftrightarrow 1 = 2x + 1 \Leftrightarrow x = 0.$

Donc : $\underline{S = \{0\}}$

2) On pose $X = e^x$; $X > 0$. Donc $e^{2x} + e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow X^2 + X - 2 = 0.$

On calcule le discriminant : $\Delta = 9 \Rightarrow X_1 = -2 < 0$; $X_2 = 1 > 0 \Rightarrow X = X_2 = 1.$

On a : $X = e^x \Rightarrow 1 = e^x \Rightarrow x = 0$

Donc : $\underline{S = \{0\}}$

3) On a : $e^{2x} = 3e^x \Leftrightarrow e^{2x} - 3e^x = 0 \Leftrightarrow e^x(e^x - 3) = 0 \Leftrightarrow e^x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \ln 3$

Donc : $\underline{S = \{\ln 3\}}$

4) On pose $X = e^{2x}$; $X > 0$. Donc $e^{2x} - 3 = 4e^{-2x} \Leftrightarrow X - 3 = \frac{4}{X} \Leftrightarrow X^2 - 3X - 4 = 0.$

On calcule le discriminant : $\Delta = 25 \Rightarrow X_1 = -1 < 0$; $X_2 = 4 > 0 \Rightarrow X = X_2 = 4.$

On a : $X = e^{2x} \Rightarrow 4 = e^{2x} \Rightarrow x = \ln 2$

Donc : $\underline{S = \{\ln 2\}}$

5) L'équation existe si et seulement si : $1 - 3e^x \neq 0 \Rightarrow e^x \neq \frac{1}{3} \Rightarrow x \neq -\ln 3 \Rightarrow D_v = \mathbb{R} - \{-\ln 3\}$

On a : $\frac{e^x+2}{1-3e^x} = 1 \Leftrightarrow e^x + 2 = 1 - 3e^x \Leftrightarrow 4e^x = -1$ impossible

Donc $\underline{S = \{\emptyset\}}$

6) L'équation existe si et seulement si : $3e^x - 2 \neq 0 \Rightarrow e^x \neq \frac{2}{3} \Rightarrow x \neq \ln\left(\frac{2}{3}\right) \Rightarrow D_v = \mathbb{R} - \left\{\ln\left(\frac{2}{3}\right)\right\}$

On a : $\frac{e^{2x}+e^x-4}{3e^x-2} = 1 \Leftrightarrow e^{2x} + e^x - 4 = 3e^x - 2 \Leftrightarrow e^{2x} - 2e^x - 2 = 0.$

On pose $X = e^x$; $X > 0$. Donc $e^{2x} + e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow X^2 - 2X - 2 = 0.$

On calcule le discriminant : $\Delta' = 3 \Rightarrow X_1 = 1 - \sqrt{3} < 0$; $X_2 = 1 + \sqrt{3} > 0 \Rightarrow X = X_2 = 1 + \sqrt{3}$

On a : $X = e^x \Rightarrow 1 + \sqrt{3} = e^x \Rightarrow x = \ln(1 + \sqrt{3})$

Donc : $\underline{S = \{\ln(1 + \sqrt{3})\}}$

Deuxième partie

1) Transformons l'expression de $(e^{-x} - 1)(e^{2x} - 3)$.

On a : $(e^{-x} - 1)(e^{2x} - 3) = e^{-x}(1 - e^x)(e^{2x} - 3)$

Donc $(e^x-1)(e^{2x}-4)<0 \iff e^x(1-e^x)(e^{2x}-3)<0 \iff (e^x-1)(e^{2x}-3)>0$

Or $(e^x-1)(e^{2x}-4)>0 \iff \begin{cases} e^x-1>0 \\ e^{2x}-3>0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} e^x-1<0 \\ e^{2x}-3<0 \end{cases} \iff \begin{cases} x>0 \\ x>\frac{\ln 3}{2} \end{cases}$ ou $\begin{cases} x<0 \\ x<\frac{\ln 3}{2} \end{cases}$

Donc $S=]-\infty;0[\cup\left]\frac{\ln 3}{2};+\infty\right[$

f) La fonction exponentielle étant croissante, on a $e^{-3x}<e^{x-7} \iff -3x<x-7 \iff x>\frac{7}{4}$

Donc $S=\left]\frac{7}{4};+\infty\right[$

Troisième partie

1) Soit à résoudre $\begin{cases} e^x+e^y=7 & (1) \\ 3e^x-2e^y=4 & (2) \end{cases}$

(1) donne $e^x=7-e^y$ et (2) devient alors $3(7-e^y)-2e^y=4$

On trouve $e^y=\frac{7}{5}$ et donc $y=\ln\left(\frac{7}{5}\right)$ (1) donne $x=\ln(7-e^y)=\ln\left(\frac{8}{3}\right)$

Et par conséquent $S=\left\{x=\ln\left(\frac{8}{3}\right);\ y=\ln\left(\frac{7}{5}\right)\right\}$

2) On pose $e^x=X>0$; $e^y=Y>0$ et donc $\begin{cases} e^x+e^y=7 \\ e^{x+y}=10 \end{cases} \iff \begin{cases} X+Y=7 \\ XY=10 \end{cases}$

$(X;Y)$ sont solutions de l'équation $X^2-7X+10=0$.

On calcule le discriminant $\Delta=9=3^2 \implies X=2$; $Y=5 \implies \begin{cases} e^x=2 \\ e^y=5 \end{cases} \implies \begin{cases} x=\ln 2 \\ y=\ln 5 \end{cases}$

Donc $S=\{x=\ln 2;\ y=\ln 5\}$

3) Même méthode qu'au 2), on trouve $S=\left\{\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right\}$

4) On a

$$8^x\cdot(\sqrt{2})^y=2^{2x+1} \iff \frac{8^x\cdot(\sqrt{2})^y}{2^{2x+1}}=1 \iff \frac{2^{3x}\cdot 2^{\frac{y}{2}}}{2^{2x+1}}=1 \iff 2^{3x-2x-1+\frac{y}{2}}=1$$

Ainsi $2^{x-1+\frac{y}{2}}=1$ ou encore $2^{x-1+\frac{y}{2}}=2^0$ ou encore $x-1+\frac{y}{2}=0$ (1)

De même,

$$3^x\cdot 27^y=9^{x-1} \iff \frac{3^x\cdot 9^y}{9^{x-1}}=1 \iff \frac{3^x\cdot 3^{3y}}{3^{2x-2}}=1 \iff 3^{x-2x+2+3y}=3^0$$

Ainsi $-x+2+3y=0$ (2)

(1) et (2) nous donnent le système : $\begin{cases} x-1+\frac{y}{2}=0 \\ -x+2+3y=0 \end{cases}$

Donc $S=\left\{x=\frac{8}{7};\ y=-\frac{2}{7}\right\}$

EXERCICE 3

Première partie

1) On a $f(x)=\frac{1}{x^2}e^{\frac{3}{x}}=-\frac{1}{3}\times-\frac{3}{x^2}e^{\frac{3}{x}}=-\frac{1}{3}\left(\frac{3}{x}\right)'\cdot e^{\frac{3}{x}}$. Donc $F(x)=-\frac{e^{\frac{3}{x}}}{3}+k$

2) On a : $f(x) = x^2e^{-x^3} = -\frac{1}{3} \times -3x^2e^{-x^3}$. Donc $F(x) = -\frac{e^{-x^3}}{3} + k$

3) On trouve : $F(x) = \ln(e^x + e^{-x}) + k$

Deuxième partie

1) On trouve : $f'(x) = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$ 2) On trouve : $f'(x) = -\frac{e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$ 3) On trouve : $f'(x) = \pm \sin x\, e^{|\cos x|}$

EXERCICE 3

Première partie : voir cours

Deuxième partie

1) On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - e^x) = +\infty - (+\infty) =$ Forme Indéterminée. Levons l'indétermination.

En effet, $x - e^x = x\left(1 - \frac{e^x}{x}\right)$. Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x - e^x = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(1 - \frac{e^x}{x}\right) = -\infty$

Ainsi : $\lim_{x \to +\infty}(x - e^x) = -\infty$

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} (x - e^x) = -\infty$

Ainsi : $\lim_{x \to -\infty}(x - e^x) = -\infty$

3) On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x-1} = \frac{+\infty}{+\infty} =$ Forme indéterminée. Levons l'indétermination.

En effet, $\frac{e^x}{x-1} = \frac{e^x}{x\left(1 - \frac{1}{x}\right)} = \frac{e^x}{x} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}$.

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = 1$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x-1} = +\infty$

Ainsi : $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x-1} = +\infty$

4) On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x - 1 = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x-1} = 0$

Ainsi : $\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x-1} = 0$

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3e^x - 1}{5e^x - 2} = \frac{+\infty}{+\infty} =$ Forme indéterminée. Levons l'indétermination.

En effet, $\frac{3e^x - 1}{5e^x - 2} = \frac{e^x(3 - e^{-x})}{e^x(5 - 2e^{-x})} = \frac{3 - e^{-x}}{5 - 2e^{-x}}$. Or $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ donc $\lim_{x \to +\infty} \frac{3e^x - 1}{5e^x - 2} = \frac{3}{5}$

6) On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{2x} + 5e^x - 12}{-2e^{-3x} + 5e^{2x} - 2} = \frac{+\infty}{+\infty} =$ Forme Indéterminée. Levons l'indétermination.

On pose $X = e^x$. Donc :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}+5e^{x}-12}{-2e^{-3x}+5e^{2x}-2}=\lim_{X\to+\infty}\frac{X^2+5X-12}{-2X^{-3}+5X^2-2}=\lim_{X\to+\infty}\frac{X^2+5X-12}{X^{-3}(-2+5X^5-2X^3)}$$

$$=\lim_{X\to+\infty}\frac{X^3(X^2+5X-12)}{5X^5-2X^3-2}=\lim_{X\to+\infty}\frac{X^5+5X^4-12X^3}{5X^5-2X^3-2}=\lim_{X\to+\infty}\frac{X^5}{5X^5}=\frac{1}{5}$$

Ainsi $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}+5e^{x}-12}{-2e^{-3x}+5e^{2x}-2}=\frac{1}{5}$

7) On trouve directement : $\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}+5e^{x}-12}{-2e^{-3x}+5e^{2x}-2}=0$

8) $\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{e^x+1}{e^x-2}\right)=\ln\left[\frac{+\infty}{+\infty}\right]=$ Forme Indéterminée. Levons l'indétermination.

En effet, $\frac{e^x+1}{e^x-2}=\frac{e^x(1+e^{-x})}{e^x(1-2e^{-x})}=\frac{1+e^{-x}}{1-2e^{-x}}$; donc $\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{e^x+1}{e^x-2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{1+e^{-x}}{1-2e^{-x}}\right)=0$

Ainsi : $\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{e^x+1}{e^x-2}\right)=0$

9) On trouve directement : $\lim_{x\to0^+}2^x\ln x=-\infty$

10) $\lim_{x\to0^+}\frac{e^x-1}{\sqrt{x}}=\frac{0}{0}=$ Forme indéterminée. Levons l'indétermination.

On a : $\frac{e^x-1}{\sqrt{x}}=\frac{e^x-1}{x}\times\sqrt{x}$ et donc $\lim_{x\to0^+}\frac{e^x-1}{x}\times\sqrt{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^x-e^0}{x-0}\times\sqrt{x}=1\times0=0$

Ainsi : $\lim_{x\to0^+}\frac{e^x-1}{\sqrt{x}}=0$

11) $\lim_{x\to0^+}\frac{e^{3x}-e^{2x}}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{2x}(e^x-1)}{x}=\lim_{x\to0^+}e^{2x}\times\frac{e^x-1}{x}=e^0\times e^0=1$

Ainsi : $\lim_{x\to0^+}\frac{e^{3x}-e^{2x}}{x}=1$

12) Pas besoin de réfléchir, on a directement : $\lim_{x\to0^+}x\times3^{-x}e^x=0$

13) On pose $X=\frac{1}{x}$. Donc $\lim_{x\to0^+}xe^{1/x}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{1/x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{X\to+\infty}\frac{e^X}{X}=+\infty$

Ainsi : $\lim_{x\to0^+}xe^{\frac{1}{x}}=+\infty$

14) Pas besoin de réfléchir, on a directement : $\lim_{x\to+\infty}e^{x^2}=+\infty$

15) Pas besoin de réfléchir, on a directement : $\lim_{x\to-\infty}e^{x^2}=+\infty$

Troisième partie

1) On pose $g(x)=x-\frac{x}{1+e^{-x}}=\frac{x}{1+e^x}=\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{e^x}{x}}$

On a : $\lim_{x\to+\infty}\left(x-\frac{x}{1+e^{-x}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{e^x}{x}}=\frac{1}{0+\infty}=0$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-\frac{x}{1+e^{-x}}\right)=0$$

b) On pose $h(x)=\dfrac{5^x-2^x}{x}=\dfrac{5^x}{x}-\dfrac{2^x}{x}=\dfrac{e^{x\ln5}}{x}-\dfrac{e^{x\ln2}}{x}=\ln5\times\dfrac{e^{x\ln5}}{x\ln5}-\ln2\times\dfrac{e^{x\ln2}}{x\ln2}$

On a : $\lim\limits_{x\longrightarrow0}\dfrac{5^x-2^x}{x}=\lim\limits_{x\longrightarrow0}\ln5\times\dfrac{e^{x\ln5}}{x\ln5}-\ln2\times\dfrac{e^{x\ln2}}{x\ln2}=\ln5-\ln2=\ln\left(\dfrac{5}{2}\right)$

$$\lim_{x\to0}\frac{5^x-2^x}{x}=\ln\left(\frac{5}{2}\right)$$

c) On pose $f(x)=\dfrac{2^{2x}-2}{2x-1}=2\left(\dfrac{2^{2x-1}-1}{2x-1}\right)$ et on pose $X=2x-1$.

Ainsi : $f(x)=2\left(\dfrac{2^{2x-1}-1}{2x-1}\right)=2\times\dfrac{2^X-1}{X}=2\times\dfrac{e^{X\ln2}-1}{X}=2\ln2\times\dfrac{e^{X\ln2}-1}{X\ln2}$

$\lim\limits_{x\longrightarrow0}\dfrac{2^{2x}-2}{2x-1}=\lim\limits_{x\longrightarrow0}2\ln2\times\dfrac{e^{X\ln2}-1}{X\ln2}=2\ln2$

$$\lim_{x\to0}\frac{2^{2x}-2}{2x-1}=2\ln2$$

Quatrième partie

a) On trouve : $\lim_{x\to0+}(\sin x)^{\tan x}=1$

b) On trouve : $\lim_{x\to0+}(\cos x)^{\ln|x|}=1$

c) On trouve : $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{2x}=e^2$

e) On a $\ln f(x)=\dfrac{\sin x}{x-\sin x}\ln\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)=\dfrac{\ln|x|-\ln|\sin x|}{x-\sin x}\sin x$

On applique l'égalité des accroissements finis à l'application $t\longmapsto\varphi(t)=\ln|t|$ entre $\sin x$ et x. Pour tout x, il existe donc un réel θ_x dans $]\sin x\ ;x[$ tel que $\dfrac{\ln|x|-\ln|\sin x|}{x-\sin x}=\varphi'(\theta_x)=\dfrac{1}{\theta_x}$.

On en déduit que $\ln f(x)=\dfrac{\sin x}{\theta_x}$ est compris entre 1 et $\dfrac{\sin x}{x}$.

Il en découle $\lim\limits_{x\longrightarrow0}\ln f(x)=1$ donc $\lim_{x\to0}f(x)=e$

f) $\lim\limits_{x\longrightarrow0}(1+\tan^2x)^{\frac{1}{x\sin x}}$

$\ln f(x) = \dfrac{\ln(1+\tan^2 x)}{x\sin x} = \dfrac{\ln(1+\tan^2 x)-\ln 0}{x\sin x - 0} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ donc $\lim_{x\to 0}(1+\tan^2 x)^{\frac{1}{x\sin x}} = e$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ avec $f(x) = x^{g(x)}$ et $g(x) = \dfrac{x}{x^x - 1}$

$\ln f(x) = \dfrac{x\ln x}{x^x - 1} = \dfrac{x\ln x}{e^{x\ln x} - 1} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = e$

b) On trouve : $\lim_{x\to+\infty}\left|\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}\right|^{x\ln x} = e$

Cinquième partie

a) On trouve : $\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{2x+1}\right)^{x^2} = 0$

b) On trouve : $\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{x} = e^{-2}$

c) On trouve : $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x} = a-b$

d) On trouve : $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$

e) On trouve : $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-e^{-x}}{\sin x} = 1$

f) On trouve : $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}} = 1$

g) On trouve : $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$

h) On trouve : $\lim_{x\to+\infty} n(\sqrt[n]{a}-1) = \ln a$

Sixième partie

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)} = +\infty$. Donc $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = +\infty$

2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x - x^a}{x-a} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{e^{x\ln a}-e^{a\ln x}}{x-a} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{e^{x\ln a}-e^{a\ln a}-(e^{a\ln x}-e^{a\ln a})}{x-a} = a^a\ln a - a^a$

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{a^x - x^a}{x-a}\right) = a^a\ln a - a^a$$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x - x^2}{e^x + x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x\left(1-x^2e^{-x}\right)}{e^x\left(1+x^2e^{-x}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-x^2e^{-x}}{1+x^2e^{-x}} = 1$. Donc $\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x-x^2}{e^x+x^2}\right) = 1$

4)

$$\lim_{x\to+\infty} e^x+1-\sqrt{e^{2x}+e^x+1} = \lim_{x\to+\infty} e^x\left(1+e^{-x}-\sqrt{e^{-2x}+e^{-x}+1}\right) = \lim_{x\to+\infty} e^x \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}+\sqrt{e^{-2x}+e^{-x}+1}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+e^{-x}+\sqrt{e^{-2x}+e^{-x}+1}} = \frac{1}{2}$$

$$\underline{\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+e^{-x}+\sqrt{e^{-2x}+e^{-x}+1}} = \frac{1}{2}}$$

5) $\lim_{x\to0} \frac{e^{x^3}-1}{\sin^3 x} = \lim_{x\to0} \frac{\frac{e^{x^3}-1}{x^3}}{\frac{\sin^3 x}{x^3}} = \frac{\lim_{x\to0} \frac{e^{x^3}-1}{x^3}}{\lim_{x\to0} \frac{\sin^3 x}{x^3}} = \frac{\lim_{t\to0} \frac{e^t-1}{t}}{\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3} = 1$. Donc $\underline{\lim_{x\to0} \frac{e^{x^3}-1}{\sin^3 x} = 1}$

6) On pose $X = \frac{1}{x+2}$

$\lim_{x\to-2} (x+2)e^{\frac{x+1}{x+2}} = \lim_{X\to+\infty} \frac{e^{1-X}}{X} = e \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{Xe^X} = 0$. Donc $\underline{\lim_{x\to0}(x+2)e^{\frac{x+1}{x+2}} = 0}$

EXERCICE 4

1) On a : $\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2} = \frac{e^{x^2}-1}{x^2} + \frac{1-\cos x}{x^2}$. Donc $\lim_{x\to0} \frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to0} \frac{e^{x^2}-1}{x^2} + \frac{1-\cos x}{x^2} = 1+\frac{1}{2}$.

Ainsi : $\underline{\lim_{x\to0} \frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2} = \frac{3}{2}}$

2) On a : $(\cos x+\sin x)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{1}{x}(\cos x+\sin x)\right)$.

Comme $x \to 0$, $\cos(x) \to 1$. On est en droit de supposer $\cos x \neq 0$.

$$\ln(\cos x+\sin x) = \ln\big(\cos x\,(1+\tan x)\big) = \ln(\cos x)+\ln(1+\tan x)$$

Soit : $\frac{\ln(\cos x+\sin x)}{x} = \frac{\ln(\cos x)}{x} + \frac{\ln(1+\tan x)}{x} = \frac{\ln(\cos x)}{x^2}\times x + \frac{\ln(1+\tan x)}{\tan x}\times\frac{\tan x}{x}$

Posons $u = \tan x$.

$$\lim_{x\to0} \frac{\ln(1+\tan x)}{\tan x} = \lim_{u\to0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to0} \frac{\tan x}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}\times x = 0$$

Nous avons : $\lim_{x\to0} \frac{1}{x}\ln(\cos x+\sin x) = 1$ donc $\underline{\lim_{x\to0}(\cos x+\sin x)^{\frac{1}{x}} = e}$

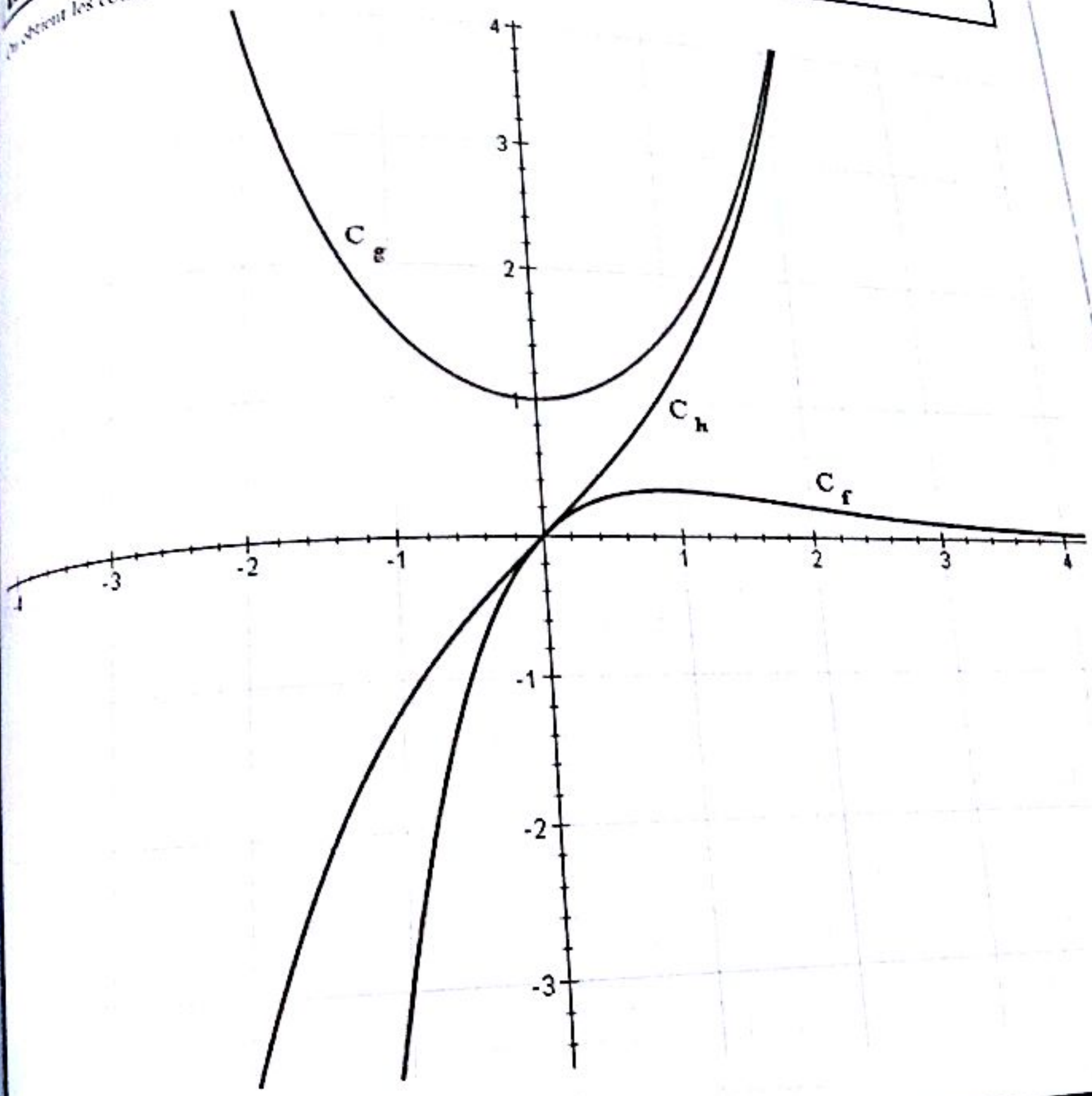
3) On a : $\lim_{x\to1} \frac{2^x-2}{x-1} = \lim_{x\to1} \frac{(\ln 2)e^{x\ln 2}-2}{x-1} = \left((\ln 2)e^{x\ln 2}\right)'_{x=1} = (\ln 2)e^{\ln 2} = 2\ln 2$.

Ainsi : $\underline{\lim_{x\to1} \frac{2^x-2}{x-1} = 2\ln 2}$

Par conséquent : $\lim_{x \to 0}(\ln(1+x))^2 = 1$

EXERCICE 5

Observer les courbes suivantes.



EXERCICE 6

Cinquième partie

1) h est définie sur $[0\,;+\infty[$ et donc elle est définie en 0.

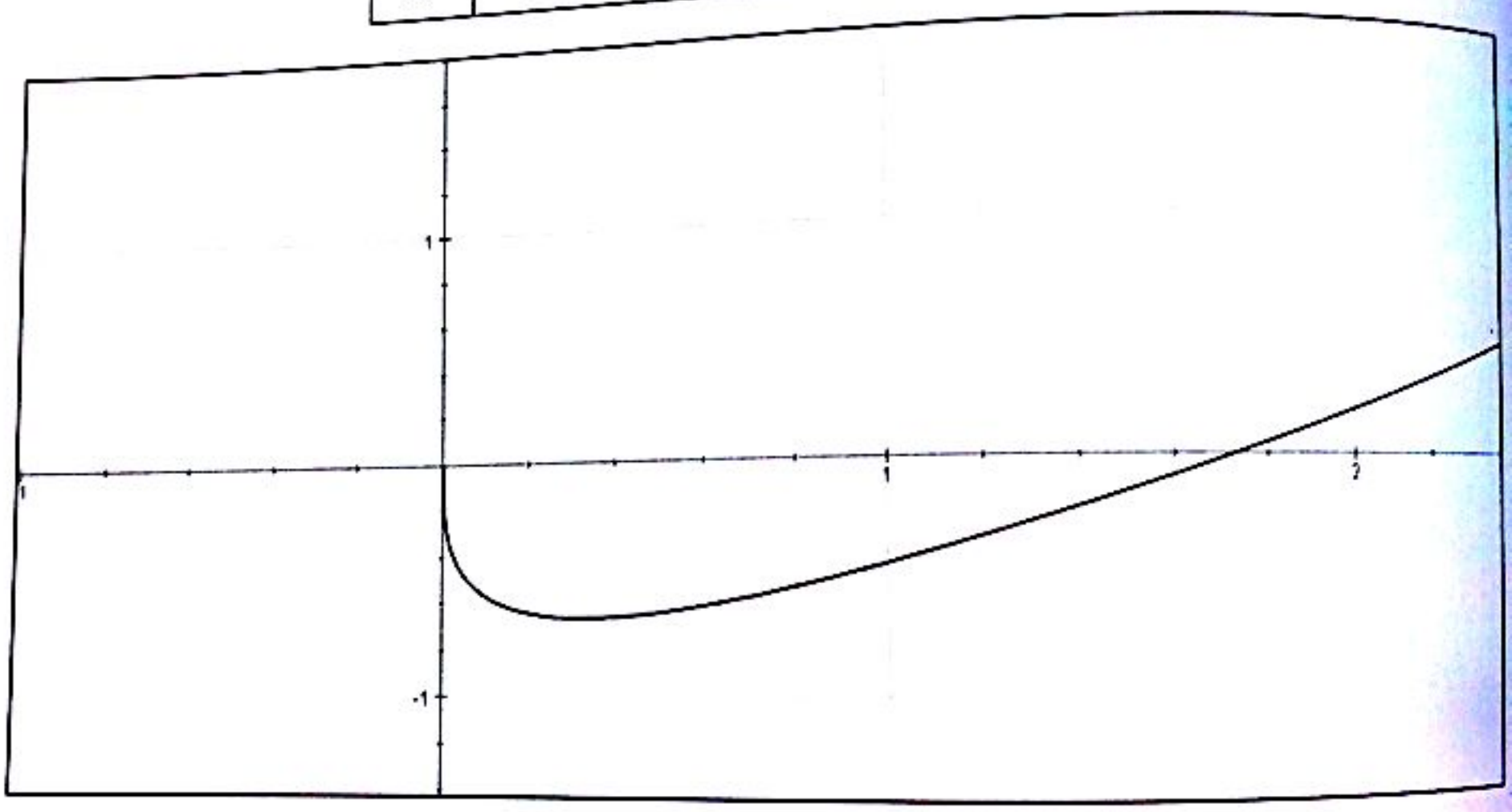
2) $\lim_{x \to 0^+} h(x) = \lim_{x \to 0^+} x-(3x)^{\frac{1}{3}} = 0-0 = 0 = h(0)$

CE $\Sigma\pi\int$

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} h(x) = \lim_{x\longrightarrow+\infty} x-(3x)^{\frac{1}{3}} = \lim_{x\longrightarrow+\infty} x\left(1-\frac{\sqrt[3]{3x}}{x}\right) = +\infty$$

h est définie, continue et dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et donc : $h'(x) = 1-\sqrt[3]{\frac{1}{9x^2}}$.

x	0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	
f	0	$\searrow$	$-\frac{2}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

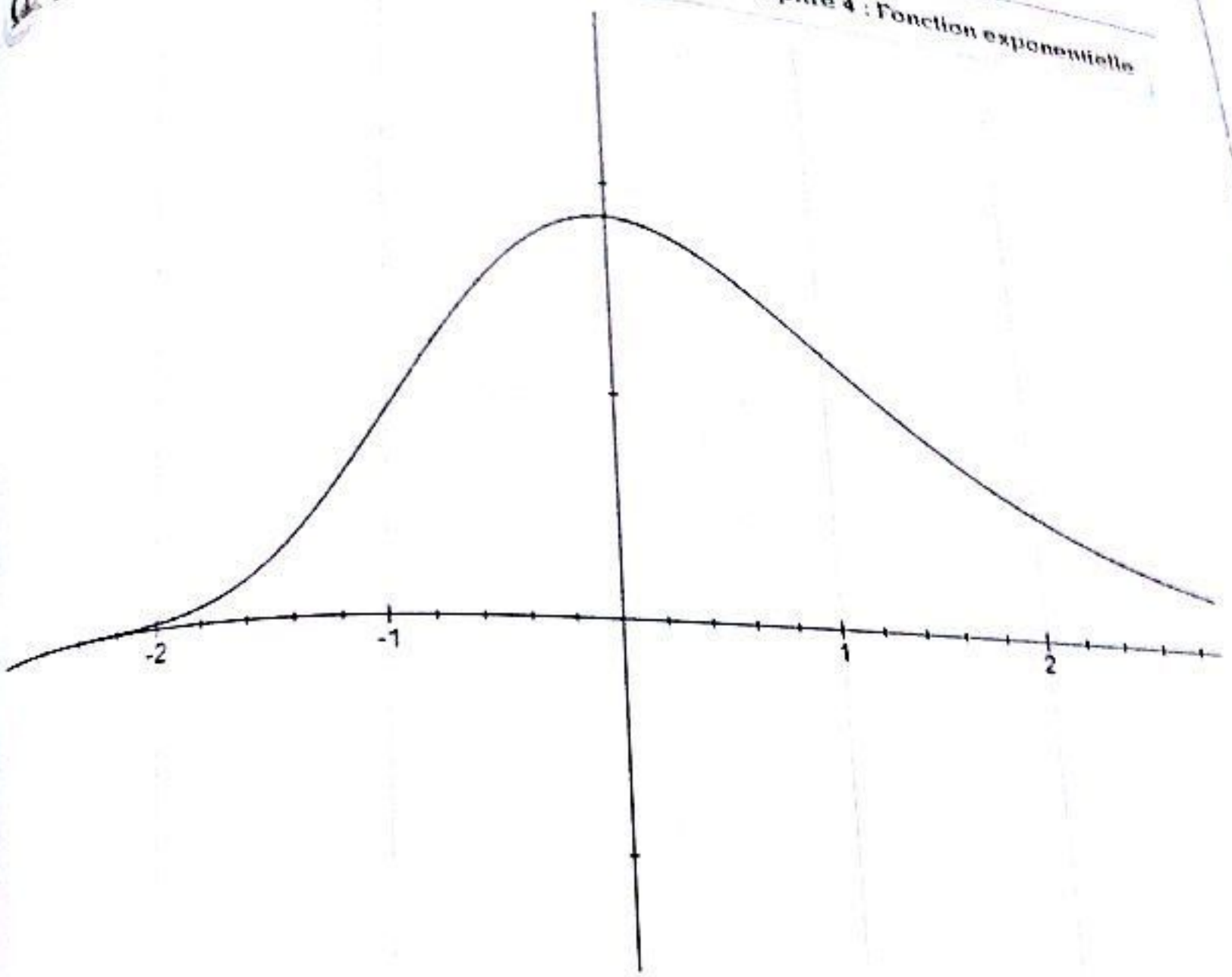


Sixième partie

1) $D_f = \mathbb{R}$. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow\infty} e^{-x-e^{-x}} = \lim\limits_{x\longrightarrow\infty} e^{x\left(-1-\frac{e^{-x}}{x}\right)} = 0$

2) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a : $f'(x) = (e^{-x}-1)e^{-x-e^{-x}}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	
f	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0



Septième partie

f est définie pour $x \in \mathbb{R}^*$.

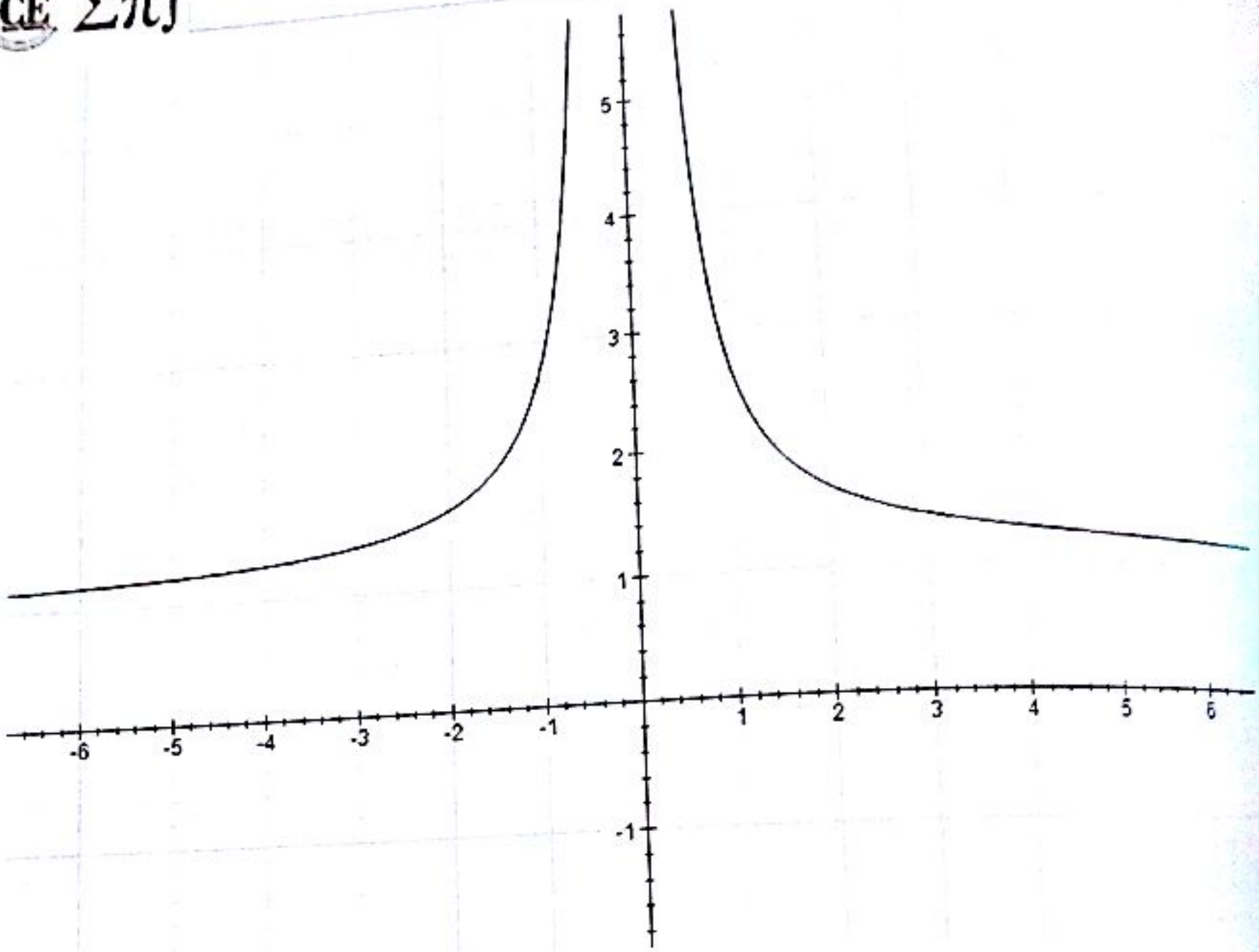
$$\lim_{x \to \infty} e^{\frac{1}{|x|}} = \lim_{x \to \infty} e^{\frac{\pm 1}{x}} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} e^{\frac{1}{|x|}} = \lim_{x \to 0} e^{\frac{\pm 1}{x}} = +\infty$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = e^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \frac{df(x)}{dx} = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ f(x) = e^{-\frac{1}{x}} \Rightarrow \frac{df(x)}{dx} = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	|	$-$	
f	1	$\nearrow$	$+\infty$ |	$\searrow$	1

CE ∑π



EXERCICE 7

1) **Domaine de définition**

f est définie pour $e^{2x} - 4e^{x} + 3 \neq 0$. On pose X = e^x et $X^2 - 4X + 3 = 0$

$X^2 - 4X + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X = 1 \; ou \; X = 3$ on en déduit que : $D_f = \mathbb{R} - \{0 ; \ln 3\}$

Limites aux bornes de D_f

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \ln\left|e^{2x} - 4e^{x} + 3\right| = \lim_{x \longrightarrow +\infty} 2x + \ln\left|1 - 4e^{-x} + 3e^{-2x}\right| = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \ln\left|e^{2x} - 4e^{x} + 3\right| = \ln|3| = \ln 3$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0} f(x) = \lim_{x \longrightarrow \ln 3} f(x) = -\infty$$

Asymptotes

La droite d'équation $x = 0$ est asymptote à (C).

La droite d'équation $y = \ln 3$ est asymptote à (C) en $-\infty$.

Branche parabolique

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left|e^{2x}-4e^{x}+3\right|}{x}=\lim_{x\to+\infty}2+\frac{\ln\left|1-4e^{-x}+3e^{-2x}\right|}{x}=2$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)-2x=\lim_{x\to+\infty}\ln\left|1-4e^{-x}+3e^{-2x}\right|=0$$

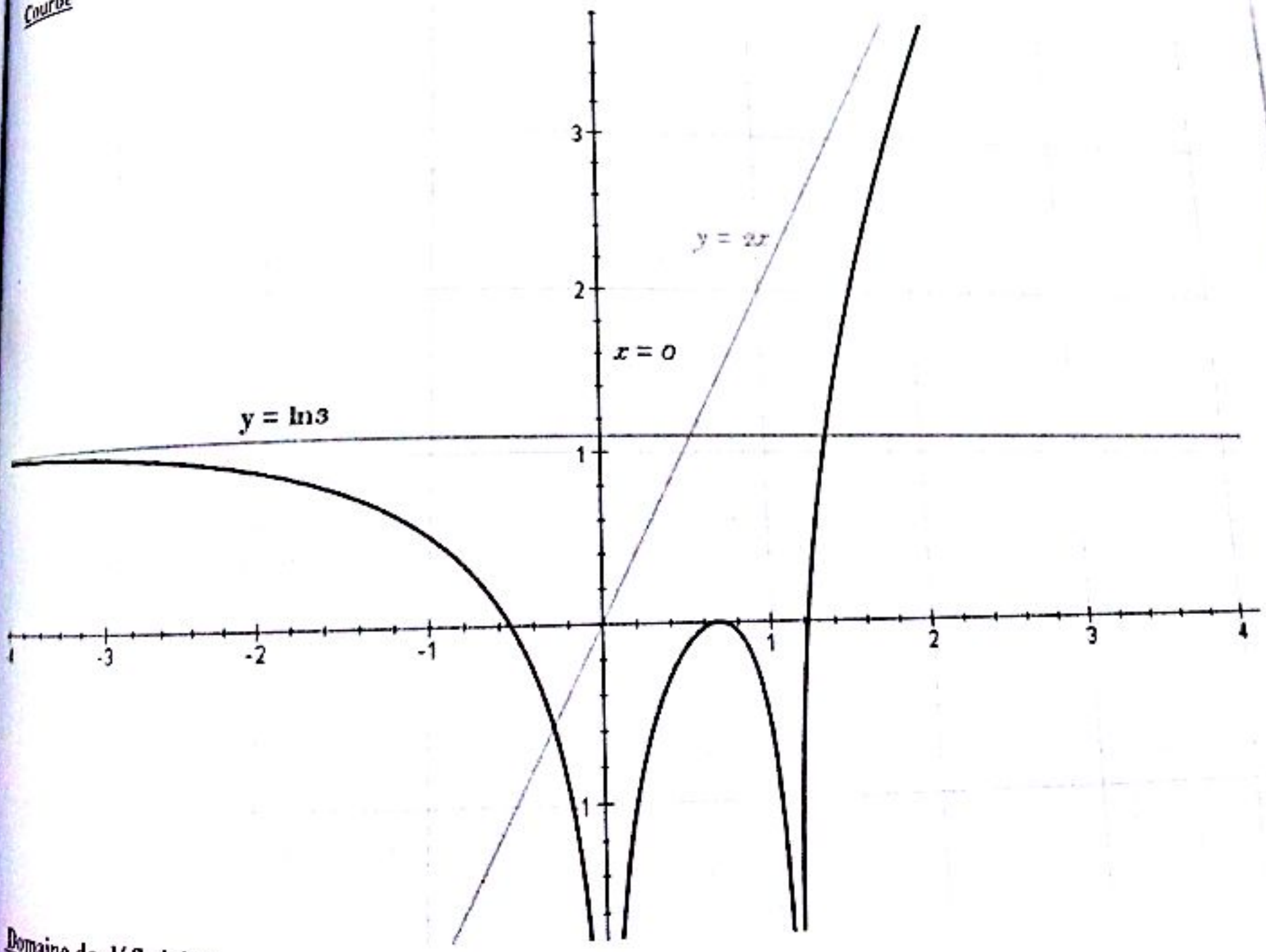
Donc la droite d'équation $y=2x$ est asymptote a (C) en $+\infty$.

Dérivée et variations

Pour tout x du domaine de définition, on a : $\dfrac{df(x)}{dx}=\dfrac{2e^{x}(e^{x}-2)}{e^{2x}-4e^{x}+3}$.

x	$-\infty$		0		$\ln(2)$		$\ln(3)$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	$\ln(3)$	↘ $-\infty$	‖ $-\infty$	↗	0	↘ $-\infty$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

Courbe



Domaine de définition

f est définie pour $e^{2x}-4e^{x}+3\neq 0$. On pose $X=e^{x}$ et $X^{2}-4X+3=0$

$X^{2}-4X+3=0 \Leftrightarrow X=1$ *ou* $X=3$ on en déduit que : $D_f=\mathbb{R}-\{0\,;\ln 3\}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left|e^{2x}-4e^{x}+3\right|}{x}=\lim_{x\to+\infty}2+\frac{\ln\left|1-4e^{-x}+3e^{-2x}\right|}{x}=2$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)-2x=\lim_{x\to+\infty}\ln\left|1-4e^{-x}+3e^{-2x}\right|=0$$

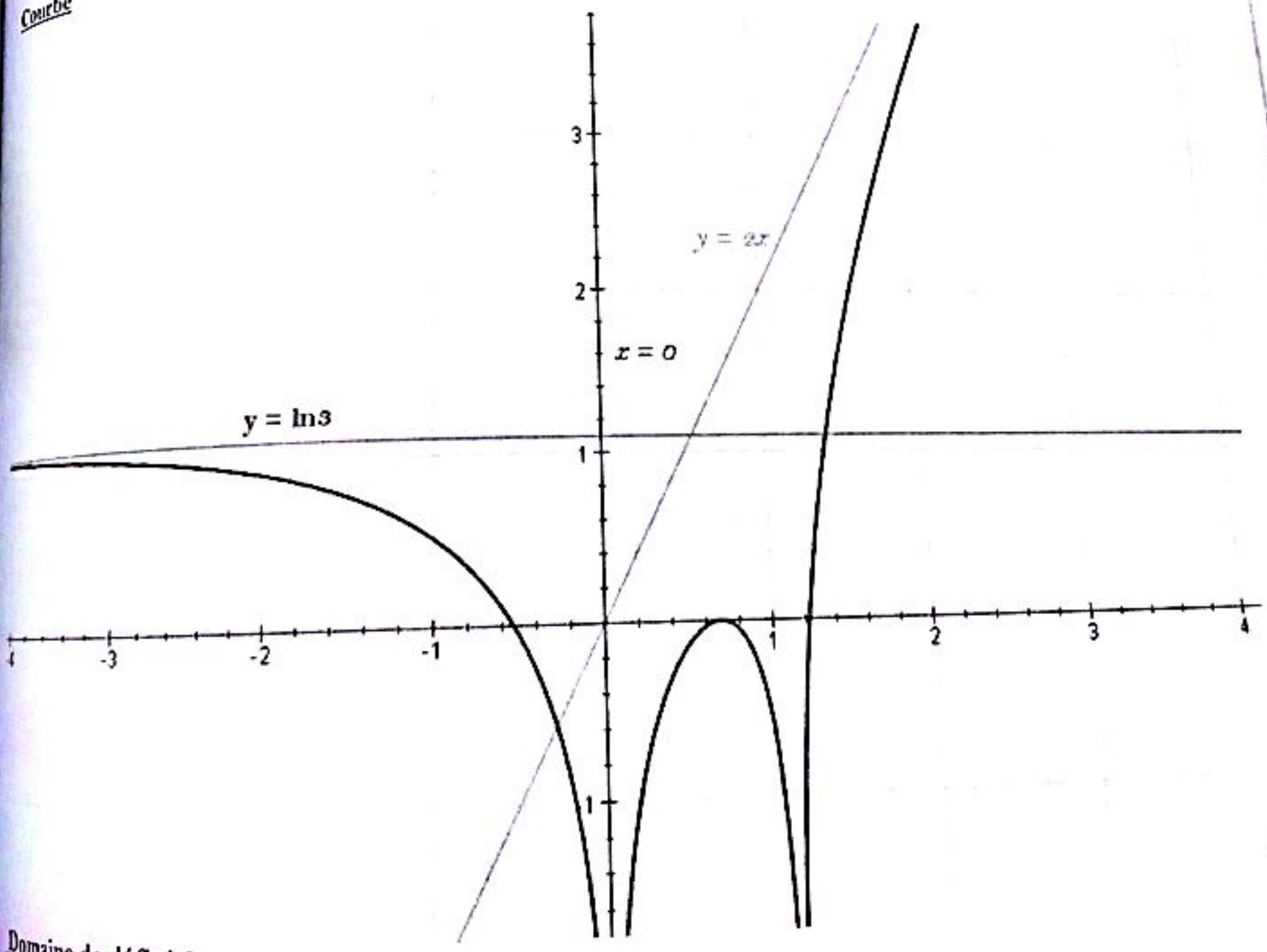
Donc la droite d'équation $y=2x$ est asymptote a (C) en $+\infty$.

Dérivée et variations

Pour tout x du domaine de définition, on a : $\dfrac{df(x)}{dx}=\dfrac{2e^{x}(e^{x}-2)}{e^{2x}-4e^{x}+3}$.

x	$-\infty$		0		$\ln(2)$		$\ln(3)$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	$\ln(3)$	↘ $-\infty$	‖ $-\infty$	↗	0	↘ $-\infty$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

Courbe



Domaine de définition

f est définie pour $e^{2x}-4e^{x}+3\neq 0$. On pose $X=e^{x}$ et $X^{2}-4X+3=0$

$X^{2}-4X+3=0 \Leftrightarrow X=1 \text{ ou } X=3$ on en déduit que : $D_f=\mathbb{R}-\{0\,;\ln 3\}$

Limites aux bornes de D_f

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln\left|e^{2x} - 4e^{x} + 3\right| = \lim_{x \to +\infty} 2x + \ln\left|1 - 4e^{-x} + 3e^{-2x}\right| = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \ln\left|e^{2x} - 4e^{x} + 3\right| = \ln|3| = \ln 3$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to \ln 3} f(x) = -\infty$$

Asymptotes

La droite d'équation $x = 0$ est asymptote à (C).

La droite d'équation $y = \ln 3$ est asymptote à (C) en $-\infty$.

Branche parabolique

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left|e^{2x} - 4e^{x} + 3\right|}{x} = \lim_{x \to +\infty} 2 + \frac{\ln\left|1 - 4e^{-x} + 3e^{-2x}\right|}{x} = 2$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - 2x = \lim_{x \to +\infty} \ln\left|1 - 4e^{-x} + 3e^{-2x}\right| = 0$$

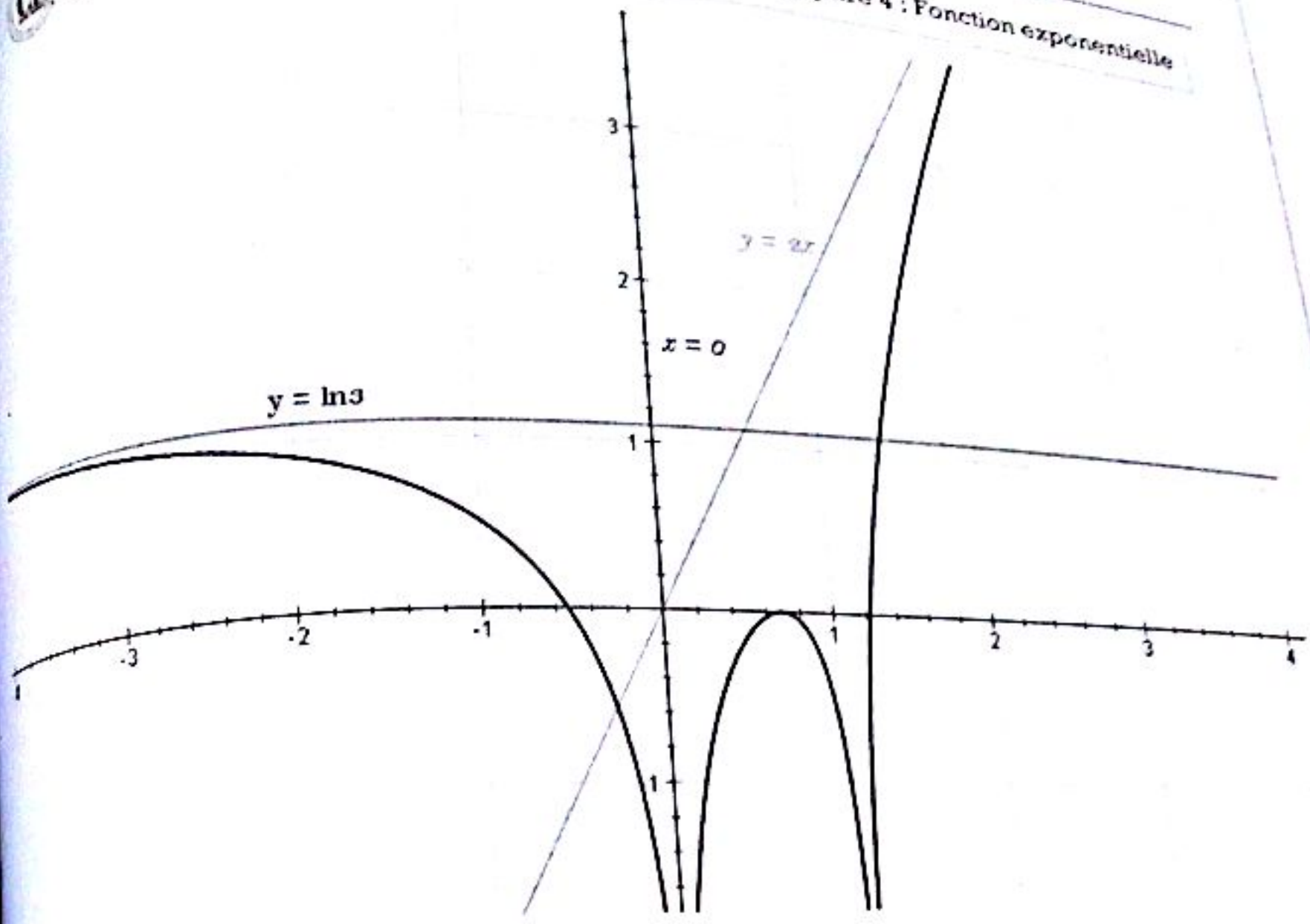
Donc la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote a (C) en $+\infty$.

Dérivée et variations

Pour tout x du domaine de définition, on a : $\dfrac{df(x)}{dx} = \dfrac{2e^{x}(e^{x} - 2)}{e^{2x} - 4e^{x} + 3}$.

x	$-\infty$		0		$\ln(2)$		$\ln(3)$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	$\ln(3)$	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

Courbe



2) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. Soit $f_1(x) = \frac{1}{x^2}$; $f_2(x) = e^x$ et $f_3(x) = -\frac{1}{x}$.

La fonction f_3 est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$; f_2 est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, donc par composition $f_2 \circ f_3$ est continue, dérivable sur $\mathbb{R}^*$. D'autre part, f_1 est aussi continue, dérivable sur $\mathbb{R}^*$, par suite $f_1 \times f_2 \circ f_3$ - c'est-à-dire f est continue, dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

<u>Continuité en 0</u> :

$$\lim_{x\to 0^-}\left(-\frac{1}{x}\right) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x^2}\right) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$$

Pour $x > 0$, posons $-\frac{1}{x} = 2u$, $f(x)$ devient $(2u)^2 e^{2u} = 4(ue^u)^2$.

$$\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{1}{x}\right) = -\infty = \lim_{x\to 0^+} u \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to -\infty} 4(ue^u)^2 = 0$$

La fonction f est continue en 0 à droite, discontinue à gauche. L'axe des ordonnées est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de f.

<u>Dérivabilité en 0 à droite</u> :

Calculons $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^3}\exp\left(-\frac{1}{x}\right)$.

Posons $-\frac{1}{x} = 3t$. On a $\lim_{x\to 0^+} t = -\infty$, donc

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x} = \lim_{t\to-\infty}(-27t^3e^{3t}) = \lim_{t\to-\infty}(-27(te^t)^3) = 0$$

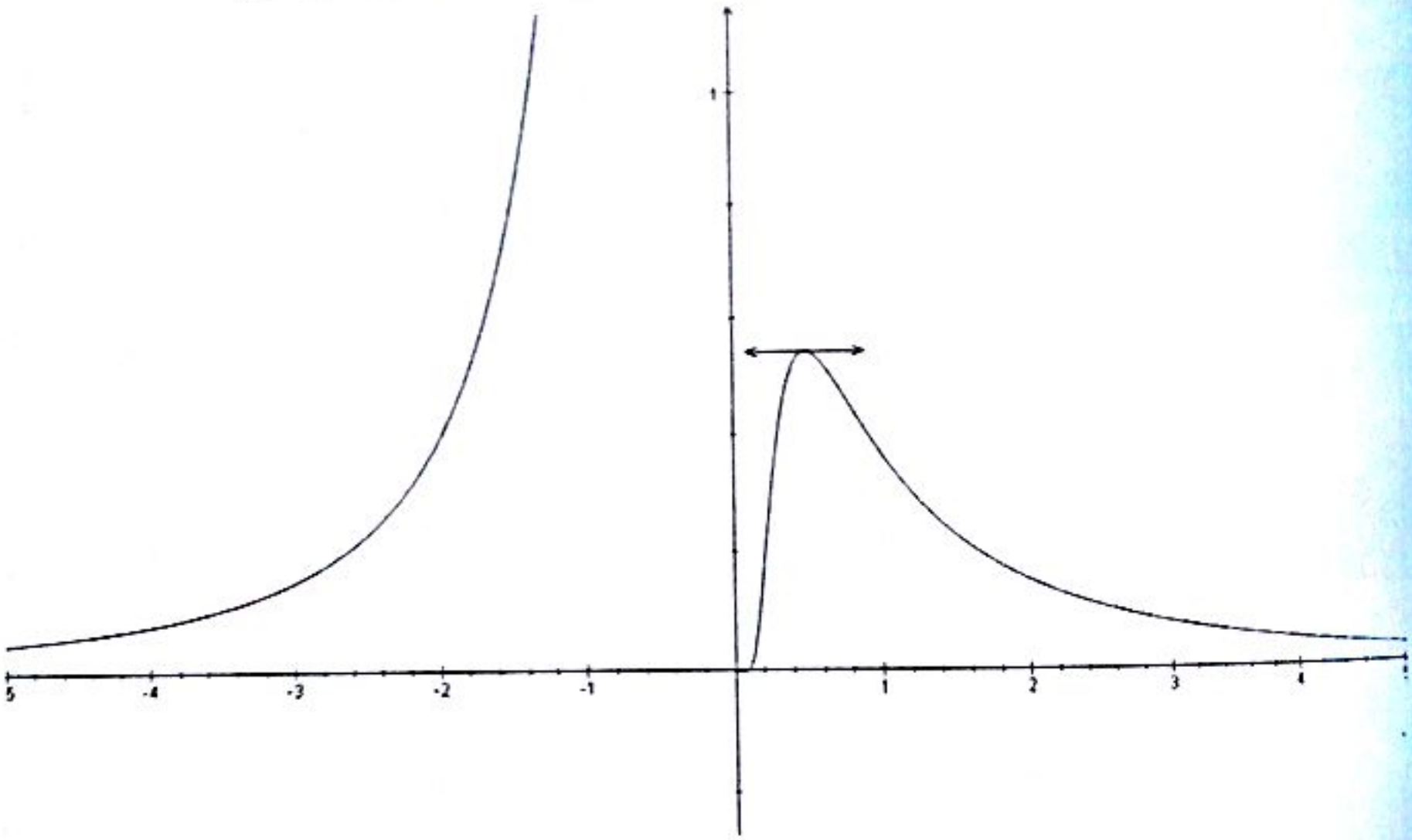
Conclusion : f est dérivable en 0 à droite et $f'_d(0) = 0$.

Variations de f :

Pour $x \neq 0$, $f'(x) = -\frac{2x-1}{x^4}\exp\left(-\frac{1}{x}\right)$. Les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de $-\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{x^2}$ valent 0, donc les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$ valent 0.

On peut dresser le tableau de variations :

x	$-\infty$			0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		+		‖	+	0	−	
f	0	↗	$+\infty$	0	↗	$\frac{4}{e^2}$	↘	0



3) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}_+$, continue, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (composée de fonctions).

Pour $x > 0$, $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}\exp\left(\frac{\ln x}{x}\right)$.

On a : $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x} = -\infty$ donc $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$. La fonction f est continue en 0.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\exp\left(\frac{\ln x}{x}\right)}{x}$$

Or

$$\lim_{x\to 0^+} \ln\left(\frac{\exp\left(\frac{\ln x}{x}\right)}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln x}{x} - \ln x\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x}(1-x) = -\infty$$

Donc : $\lim_{x\to 0^+} \frac{\exp\left(\frac{\ln x}{x}\right)}{x} = 0$.

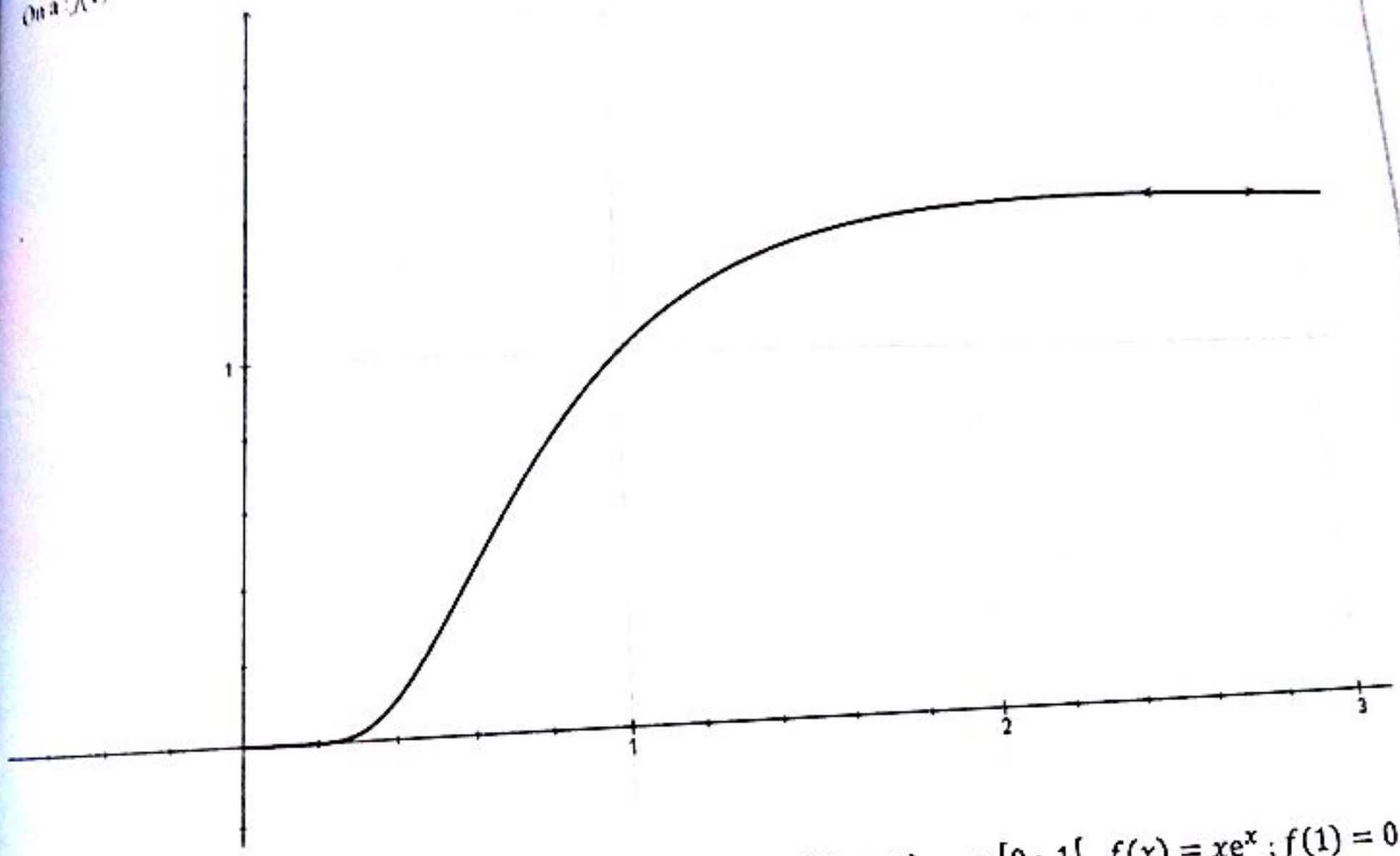
Conclusion : f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$

La limite de f en $+\infty$ est 1.

Tableau de variations et courbe de f :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	0	+	0	—	
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{e^{\frac{1}{e}}}$	↘	1

On a : $f(1) = 1$; $f'(1) = 1$; la tangente au point de coordonnées $(1, 1)$ est la droite $y = x$.



4) Sur $[-2\,;\,-1[$, $f(x) = e^x(x+2)$; sur $[-1\,;\,0[$, $f(x) = e^x(x+1)$; sur $[0\,;\,1[$, $f(x) = xe^x$; $f(1) = 0$.

On établit que f est continue, dérivable sur $[-2\,;\,1[- \{-1\,;\,0\,;\,1\}$, dérivable à droite (donc continue à droite) en -1 et 0 :

Sur $[-2\,;\,-1[$, $f'(x) = e^x(x+3) > 0$ et $f'(-2) = \frac{1}{e^2}$.

Sur $]-1\,;\,0[$, $f'(x) = e^x(x+2) > 0$ et $f'_d(-1) = \frac{1}{e}$.

Sur $]0\,;\,1[$, $f'(x) = e^x(x+1) > 0$ et $f'_d(0) = 1$.

Tableau de variations et courbe :

x	$-\infty$		-1		0		1
$f'(x)$		$+$		$+$	‖	$+$	
f	0	↗	$\frac{1}{e}$	0 ↗ 1	‖	0 ↗	e

5) a) Domaine de définition : $D_f = \mathbb{R}^*$.

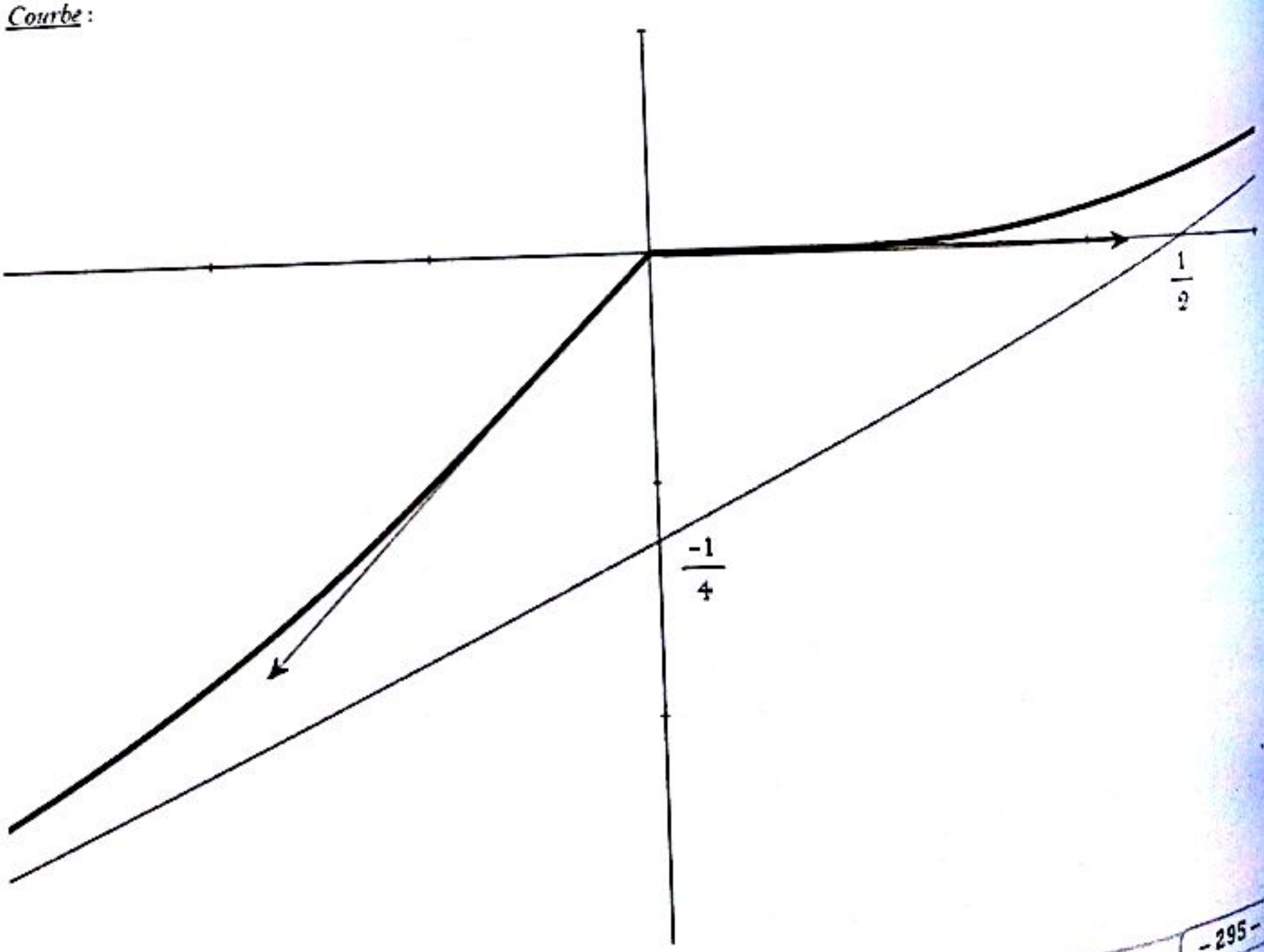
b) Dérivée et tableau de variation de f : $f'(x) = \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\exp\left(\frac{1}{x}\right)+1}{\left(1+\exp\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2}$. Son signe dépend de celui de $g(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)\exp\left(\frac{1}{x}\right)+1$. Il faut étudier les variations de la fonction g pour déduire celles de f.

c) Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	1 ‖ 0	$+$	
f	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

On établit que la droite d'équation $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$ est asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

<u>*Courbe*</u> :



e) Il faut transformer l'expression de f.

On pose : $f(x) = \exp\left(x \ln\left|1 + \frac{1}{x}\right|\right)$

a) Domaine de définition : $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$.

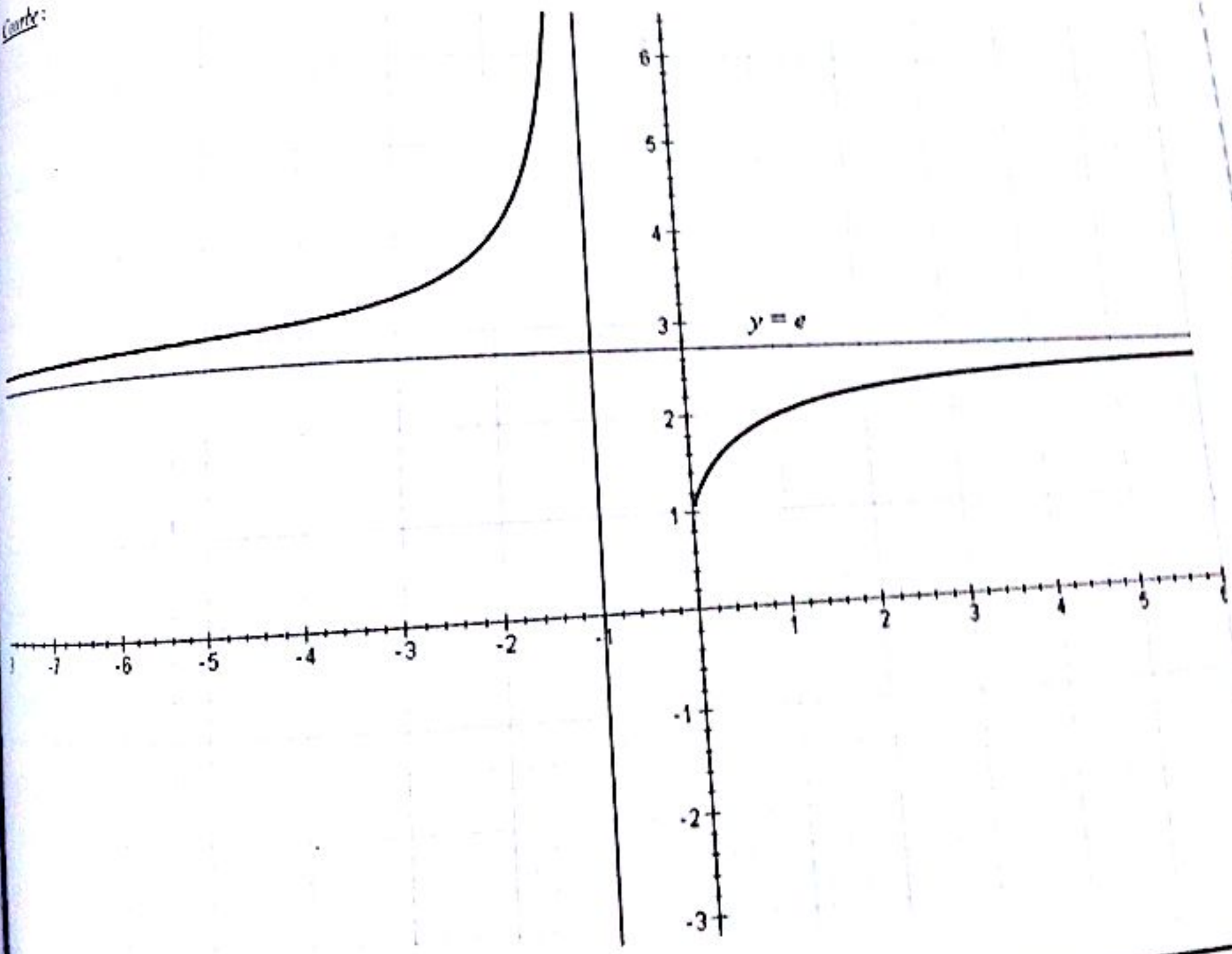
b) Dérivée et tableau de variation de f : $f'(x) = f(x)\left(\ln\left|1 + \frac{1}{x}\right| - \frac{1}{x+1}\right)$. Son signe dépend de celui de $g(x) = \ln\left|1 + \frac{1}{x}\right| - \frac{1}{x+1}$. Il faut étudier les variations de la fonction g pour déduire celles de f. On établit que g s'annule au point $x_0 \in]-0{,}3\ ;\ -0{,}2[$.

c) Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		-1			x_0		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+\infty$	$-$	0	$+$	$\|$	$+$	
f	e	$\nearrow$	$+\infty$	$+\infty$	$\searrow$	$f(x_0)$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

On établit que la droite d'équation $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$ est asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

Courbe :



EXERCICE 8

1) f est définie, continue, dérivable sur $\mathbb{R}^*$, $f'(x) = \frac{e^x}{x^2}(x - 1)$.

Les variations de f sont indiquées dans le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$		$+$	
f	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	e	↗	$+\infty$

Les limites ne présentent aucune difficulté.

(ii) g est égale à la composée de la fonction cosinus par f, soit $g = f \circ \cos$, sur l'intervalle $[0\,;\,2\pi[$.
L'ensemble de définition de g est l'union : $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{3\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2}\,;\,2\pi\right[$.

La fonction cosinus est strictement croissante sur $\left[\pi\,;\,\frac{3\pi}{2}\right[$ et sur $\left]\frac{3\pi}{2}\,;\,2\pi\right[$, elle est strictement décroissante sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ et sur $\left]\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\right]$.

Sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$:

cos prend ses valeurs dans $]0\,;\,1]$, où f décroît. g est la composée d'une fonction décroissante par une fonction décroissante : g est croissante.

Sur $\left]\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\right]$:

cos prend ses valeurs dans $[-1\,;\,0[$, où f décroît. g est la composée d'une fonction décroissante par une fonction décroissante : g est croissante.

Sur $\left[\pi\,;\,\frac{3\pi}{2}\right[$:

cos prend ses valeurs dans $[-1\,;\,0[$, où f décroît. g est la composée d'une fonction croissante par une fonction décroissante : g est décroissante.

Sur $\left]\frac{3\pi}{2}\,;\,2\pi\right[$:

cos prend ses valeurs dans $]0\,;\,1[$, où f décroît : g est décroissante.

On peut dresser le tableau de variations de g :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
g	e	↗ $+\infty$ ‖	$-\infty$	↗	$-e$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	e

EXERCICE 10

1) $f(x)$ existe si et seulement si $5^{2x} - 1 \neq 0$ donc $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$.

$$\forall x \in D_f, -x \in D_f, \quad f(-x) = \frac{5^{-x}}{5^{-2x} - 1} = \frac{5^{2x} \cdot 5^{-x}}{5^{2x} \cdot (5^{-2x} - 1)} = -\frac{5^{x}}{5^{2x} - 1} = -f(x)$$

Donc <u>f est impaire</u>

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5^x}{5^{2x} - 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{5^x - 5^{-x}} = 0 \qquad \lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{5^x}{5^{2x} - 1} = +\infty$

$\frac{df(x)}{dx} = \frac{-5^x \ln 5(5^{2x}+1)}{(5^{2x}+1)^2} \pi 0$ donc f est décroissante sur $\mathbb{R}^*$.

Comme f est impaire, alors elle est croissante sur $\mathbb{R}^*$.

3) a) On pose $X = 5^x$. Donc :

$$f(x) = \frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 3X^2 - 2X - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X = \frac{1+\sqrt{10}}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\ln\left(\frac{1+\sqrt{10}}{3}\right)}{\ln 5}$$

Conclusion : $S = \left\{\frac{\ln\left(\frac{1+\sqrt{10}}{3}\right)}{\ln 5}\right\}$

b) Comme f est impaire, alors elle admet des solutions symétriques c'est à dire :

$$f(x) = \frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad f(-x) = -\frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{\ln\left(\frac{1+\sqrt{10}}{3}\right)}{\ln 5}$$

Conclusion : $S = \left\{-\frac{\ln\left(\frac{1+\sqrt{10}}{3}\right)}{\ln 5}\right\}$

EXERCICE 11

1) On a :

$$u_n = \frac{2^{\frac{1}{n}} + 2^{\frac{2}{n}} + \cdots + 2^{\frac{n}{n}}}{n} = \frac{\sum_{k=1}^{n}\left(2^{\frac{1}{n}}\right)^k}{n} = \frac{1}{n} \times 2^{\frac{1}{n}} \times \frac{1-\left(2^{\frac{1}{n}}\right)^n}{1-2^{\frac{1}{n}}} = \frac{2^{\frac{1}{n}}}{n\left(2^{\frac{1}{n}}-1\right)} = \frac{\sqrt[n]{2}}{n(\sqrt[n]{2}-1)}$$

$$U_n = \frac{\sqrt[n]{2}}{n(\sqrt[n]{2}-1)}$$

2) a) On a : $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2} = \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\ln 2}{n}} = e^0 = 1$. Ainsi $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2} = 1$

b) On a : $\lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^h-e^0}{h-0} = \left(e^h\right)'_{h=0} = 1$. Ainsi $\lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = 1$

c) On pose $\frac{1}{n} = h$

$$\lim_{n\to+\infty} n(\sqrt[n]{2}-1) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{n}-0}\left(e^{\frac{\ln 2}{n}} - e^0\right) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{h\ln 2} - e^0}{h-0} = \left(e^{h\ln 2}\right)'_{h=0} = \ln 2$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2}}{n(\sqrt[n]{2}-1)} = \frac{1}{\ln 2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} n(\sqrt[n]{2}-1) = \ln 2 \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{1}{\ln 2}$$

3) On a : $\int_0^1 2^x dx = \int_0^1 e^{x\ln 2}dx = \left[\frac{e^{x\ln 2}}{\ln 2}\right]_0^1 = \frac{e^{\ln 2}}{\ln 2} - \frac{e^0}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}$. Ainsi $\int_0^1 2^x dx = \frac{1}{\ln 2}$

On conclut que :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(2^{\frac{1}{n}}\right)^k\right) = \int_0^1 2^x dx = \frac{1}{\ln 2}$$

EXERCICE 12

Pour simplifier nous supposons $x > 0$. Nous allons obtenir l'inégalité par application du théorème de Rolle.

Soit maintenant $f(t) = e^t - 1 - t - k\frac{t^2}{2}$. Nous avons $f(0) = 0$, $x > 0$ étant fixé, nous choisissons k tel que $f(x) = 0$, (un tel k existe car $e^x - 1 - x > 0$ et $x^2 > 0$). Comme $f(0) = 0 = f(x)$ alors par Rolle il existe $c \in]0\,;x[$ tel que $f(c) = 0$. Mais $f'(t) = e^t - 1 - kt$, donc $f'(0) = 0$. Maintenant $f'(0) = 0 = f'(c)$ donc il existe (par Rolle toujours!) $d \in]0\,;c[$ tel que $f''(d) = 0$.

Or $f''(t) = e^t - k$, donc $f''(d) = 0$ donne $k = e^d$. Ainsi $f(x) = 0$ devient $e^x - 1 - x = \frac{x^2}{2}e^d$ Comme $d \leqslant x$ alors $e^x - 1 - x \leqslant \frac{x^2}{2}e^x$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |e^x - 1 - x| \leqslant \frac{x^2}{2}e^{|x|}$$

EXERCICE 13

1) Remarquons que $\sqrt{4x^2+1} > \sqrt{4x^2} = |2x|$. De plus, pour tout réel $2x + |2x| \geqslant 0$. Donc pour tout réel x, $2x + \sqrt{4x^2+1} > 0$, f est donc définie sur $\mathbb{R}$; on établit qu'elle y est continue, dérivable, en appliquant les théorèmes concernant la continuité ou la dérivabilité d'une somme, puis d'une composée de fonctions.

Pour tout réel x, on a : $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x^2+1}}$

On obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

La limite en $+\infty$ est évidente ; détaillons la limite en $-\infty$. Posons $u = 2x + \sqrt{4x^2+1}$. On a :

$$u = \frac{(\sqrt{4x^2+1}+2x)(\sqrt{4x^2+1}-2x)}{(\sqrt{4x^2+1}-2x)} = \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}-2x}$$

Il en résulte que $\lim_{u\to 0^+} u = 0$, et par suite $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{u\to 0^+} \ln u = -\infty$

Remarque : on vient de voir que : $(\sqrt{4x^2+1}+2x)(\sqrt{4x^2+1}-2x) = 1$. Alors

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{4x^2+1}+2x}\right) = -\ln\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right) = -f(x)$$

La fonction f est donc impaire

Pour construire la courbe, précisons que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 2$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(\sqrt{4x^2+1}+2x)}{\sqrt{4x^2+1}+2x} \times \frac{\sqrt{4x^2+1}+2x}{x}\right)$$

Or $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(\sqrt{4x^2+1}+2x)}{\sqrt{4x^2+1}+2x}\right) = \lim_{u\to+\infty}\frac{\ln u}{u} = 0$. On a :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+\sqrt{4x^2+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x+2x\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} 2\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}\right) = 4$$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(\sqrt{4x^2+1}+2x)}{\sqrt{4x^2+1}+2x} \times \frac{\sqrt{4x^2+1}+2x}{x}\right) = 0 \times 4 = 0$$

La courbe représentative de f admet l'axe des abscisses pour direction asymptotique en $+\infty$ et aussi en $-\infty$, puisque la fonction f est impaire.

Pour la courbe, voir la fin de l'exercice

2) La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (elle est injective). La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et a pour limite $-\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$; elle est donc surjective sur $\mathbb{R}$. Et par suite f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Calculons f^{-1} : soit $x \in \mathbb{R}$ (ensemble d'arrivée de f et de départ de f^{-1}), cherchons y dans $\mathbb{R}$ (ensemble de départ de f et d'arrivée pour f^{-1}) tel que $f^{-1}(x) = y$. On a :

$$f^{-1}(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad x = f(y) = \ln\left(2y+\sqrt{4y^2+1}\right) \quad \Leftrightarrow \quad 2y+\sqrt{4y^2+1} = e^x$$

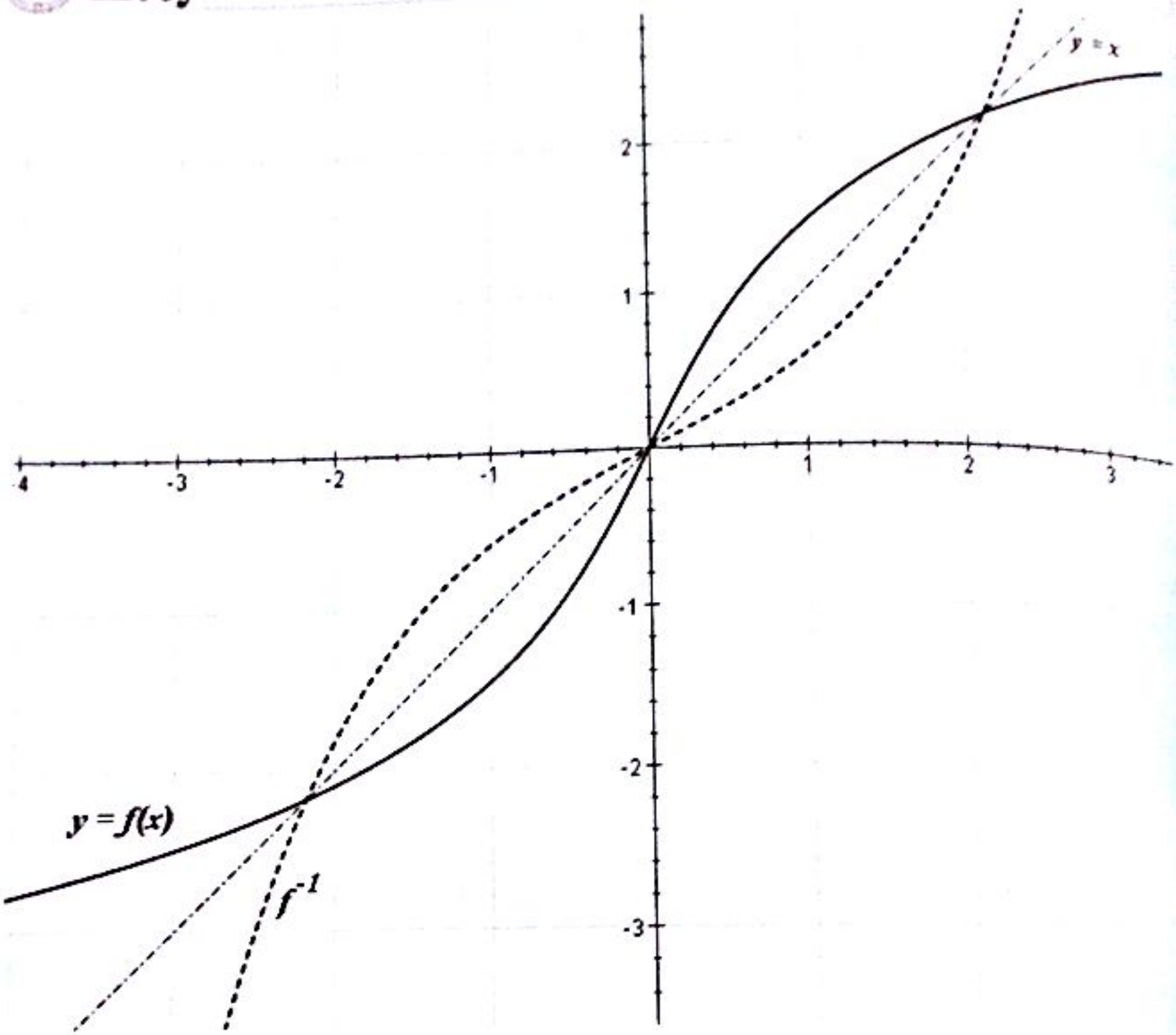
Cette équation équivaut à : $\sqrt{4y^2+1} = e^x - 2y$, puis à : $\begin{cases} 4y^2+1 = (e^x-2y)^2 \\ e^x > 2y \end{cases}$

On tire : $\underline{y = \frac{e^x - e^{-x}}{4}}$

Cette solution convient forcément puisque c'est la seule possible et que son existence a été montrée plus haut.

Le repère étant orthonormé, la courbe de f^{-1} est symétrique de celle de f dans la symétrique orthogonale, dont l'axe est la première bissectrice (droite d'équation $y = x$).

Courbe :



EXERCICE 14

1) a-b) On a : $f(x) = 1 + x - \ln|e^x(1 - e^{1-x})| = 1 + x - x - \ln|1 - e^{1-x}| = 1 - \ln|1 - e^{1-x}|$

$f(x) = 1 + x - \ln|e(e^{x-1} - 1)| = 1 + x - 1 - \ln|e^{x-1} - 1| = x - \ln|e^{x-1} - 1|$

Ainsi $\underline{f(x) = 1 - \ln|1 - e^{1-x}| = x - \ln|e^{x-1} - 1|}$

2) f est définie pour tout $x \neq 1$ et pour tout $x \neq 1$, on a : $f'(x) = -\dfrac{1}{e^{x-1} - 1}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	
f	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

3) Sur $]1 ; +\infty[$, f est continue et strictement décroissante donc $\underline{f \text{ est bijective et réalise une bijection de }]1 ; +\infty[\text{ dans } \mathbb{R}}$.

Soit $y \in]0, +\infty[$ tel que $f(x) = y$

$f(x) = y \iff 1 - \ln|1 - e^{1-x}| = y \iff 1 - e^{1-x} = e^{1-y} \iff x = 1 - \ln|1 - e^{1-y}|$

On a ainsi : $f^{-1}(y) = 1 - \ln|1 - e^{1-y}| = f(y)$ donc $\underline{f^{-1} = f}$

EXERCICE 18

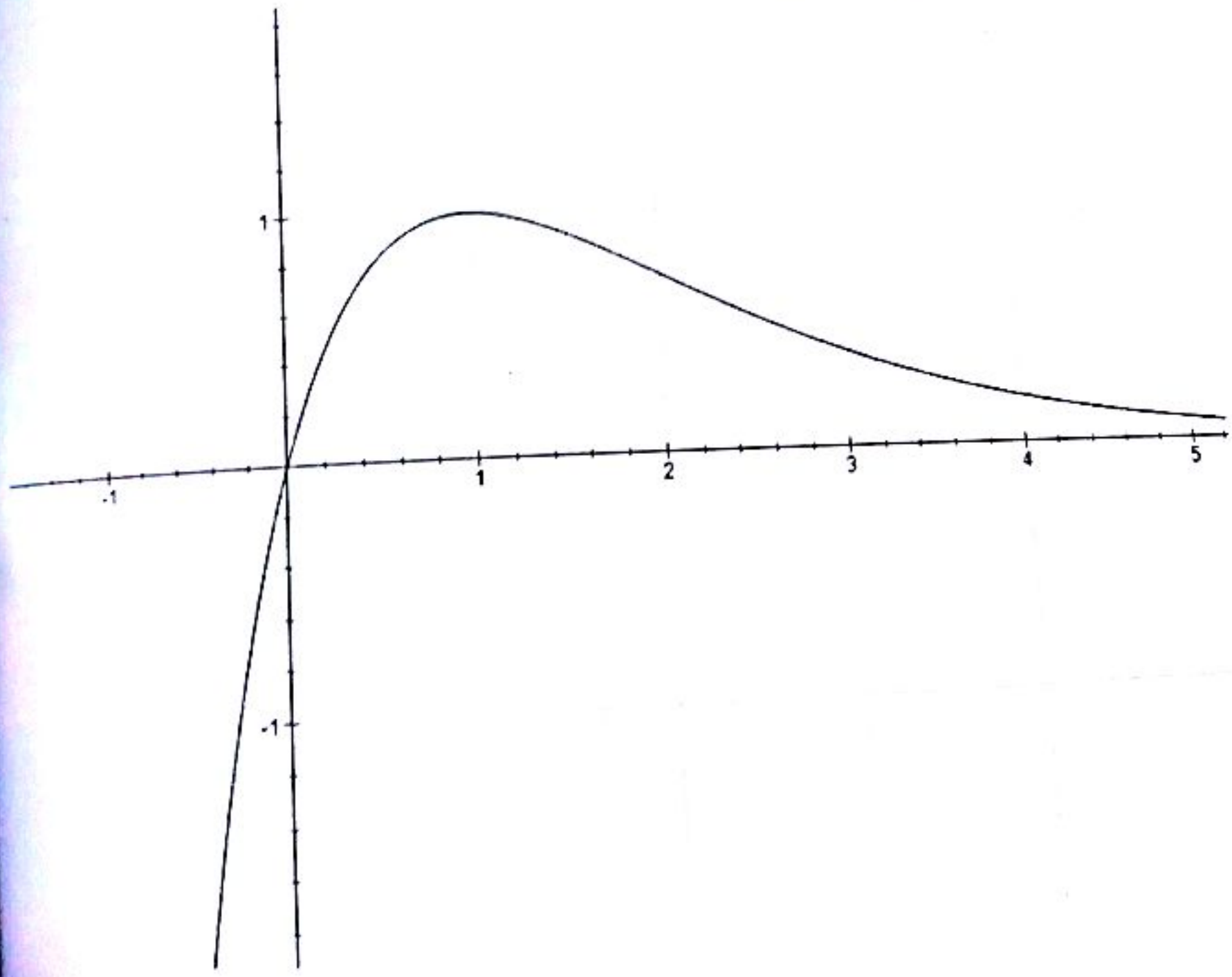
1) Etude et représentation graphique de f

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} xe^{1-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e}{\frac{e^x}{x}} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} xe^{1-x} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} e^{1-x} = +\infty$$

Pour tout $x \in D_f$ on a : $\dfrac{df(x)}{dx} = (1-x)e^{1-x}$ et on en déduit les variations de f.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0



2) a) On a :

$$\forall x \neq 1,\ g(x) = 1 + x + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

b) On a :

$$S_n(x) = g'(x) = \frac{dg(x)}{dx} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$$

c) On a :

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{e}\right)^{k-1} = \frac{n\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1} - (n+1)\left(\frac{1}{e}\right)^{n} + 1}{\left(1-\frac{1}{e}\right)^2}$$

d) On a :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{e}\right)^2}$$

EXERCICE 10

1) $g(x) = e^x - e^{2x}$.

Domaine de définition : $\mathbb{R}$

Limites aux bornes du domaine de définition :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} e^x - e^{2x} = \lim_{x\to+\infty} e^x(1-e^x) = -\infty \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} e^x - e^{2x} = 0$$

Dérivée et variations : Pour tout réel x, on a : $g'(x) = e^x - 2e^{2x} = e^x(1-2e^x)$

Il est clair que g est du signe de $1 - 2e^x$.

$1-2e^x \phi 0 \iff x \pi -\ln 2$ et donc $g'(x) \phi 0$ sur $]-\infty, -\ln 2[$

$1-2e^x \pi 0 \iff x \phi -\ln 2$ et donc $g'(x) \pi 0$ sur $]-\ln 2, +\infty[$

x	$-\infty$		$-\ln(2)$		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	
$g(x)$	0	↗	0,25	↘	$-\infty$

2) a) $\lim_{u\to 0} \frac{e^u - 1}{u} = \lim_{u\to 0} \frac{e^u - e^0}{u - 0} = e^0 = 1$. Ainsi $\lim_{u\to 0} \frac{e^u-1}{u} = 1$

b) $h(x) = |e^x - e^{2x}|$

Dérivabilité de h à droite en 0 :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} e^x \times \frac{e^x - 1}{x} = 1\times 1 = 1$$

Dérivabilité de h à gauche en 0 : $\lim_{x\to 0^-} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} e^x \times \frac{1-e^x}{x} = 1\times -1 = -1$

La fonction h n'est pas dérivable en 0 et admet en ce point deux demi-tangentes de coefficients directeurs 1 et -1

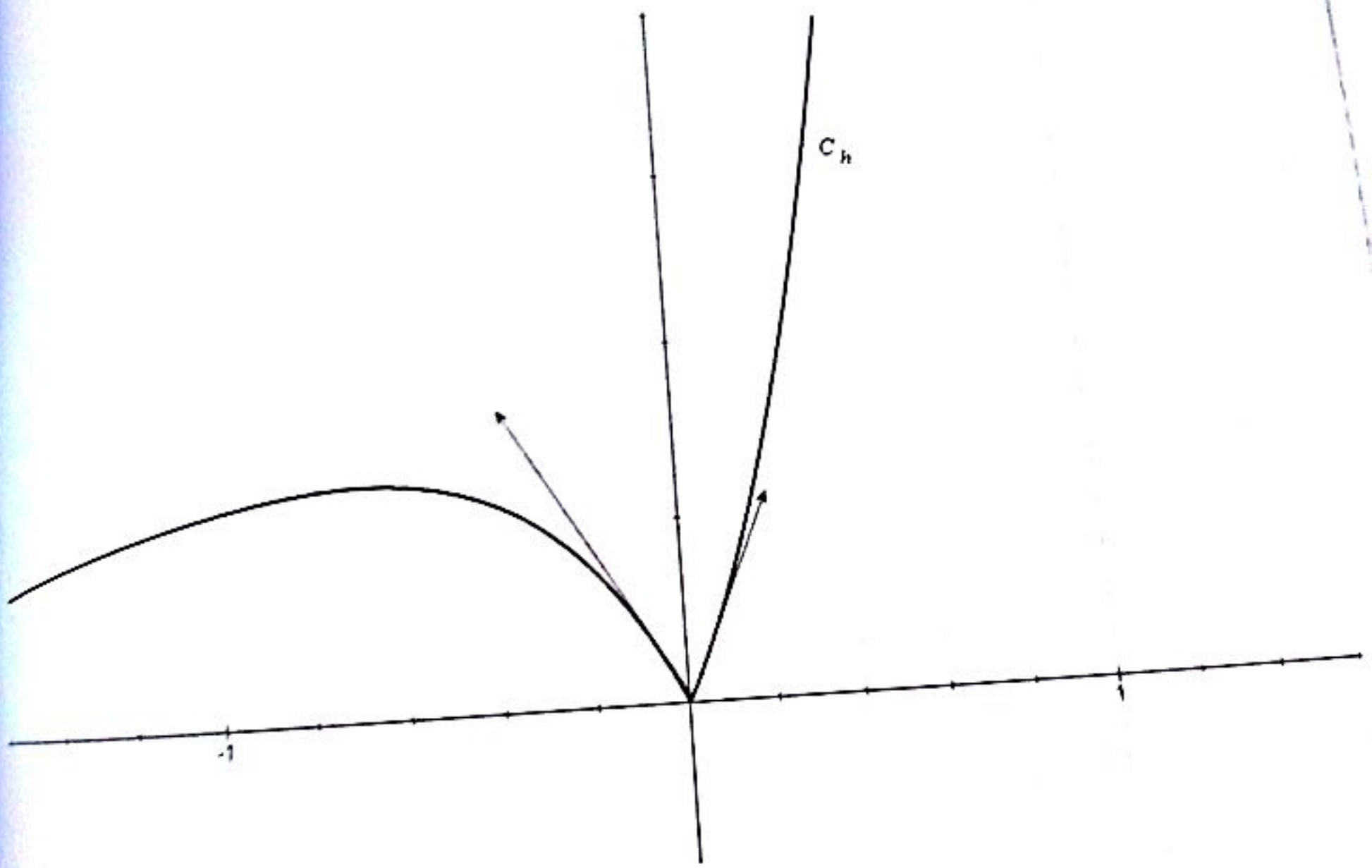
c) Etude des branches infinies de h : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} \times (e^x - 1) = +\infty$

(C_h) admet une branche parabolique de direction (yy').

Dérivée : h est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et : $h'(x) = \begin{cases} e^x - 2e^{2x} & si \ x \pi 0 \\ -e^x + 2e^{2x} & si \ x \phi 0 \end{cases}$

On établit facilement, après étude de signe de $h'(x)$ le tableau de variation de h.

x	$-\infty$		$-\ln 2$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$		$-$	‖	$-$	
$h(x)$	0	↗	$0{,}25$	↘	0	↗	$+\infty$



5) $n(x) = \ln|e^x - e^{2x}|$

a) Domaine de définition :

La fonction $n(x)$ existe si et et seulement si $e^x - e^{2x} \neq 0$ donc : $D_n = \mathbb{R}^*$.

Limites aux bornes du domaine de définition :

CE $\Sigma\pi\int$

$\lim_{x\to-\infty} n(x) = \lim_{x\to-\infty} \ln(e^x - e^{2x}) = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} n(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln(e^{2x} - e^x) = -\infty$

$\lim_{x\to0^-} n(x) = \lim_{x\to0^-} \ln(e^{2x} - e^x) = -\infty$

$\lim_{x\to0^+} n(x) = \lim_{x\to0^+} \ln(e^x - e^{2x}) = -\infty$

b) Si $x < 0$ alors,

$$n(x) = \ln(e^x - e^{2x}) = \ln(e^x(1 - e^x)) = \ln(e^x) + \ln(1 - e^x) = x + \ln(1 - e^x)$$

Donc : $n(x) - x = \ln(1 - e^x)$, $\forall x \in]-\infty ; 0[$

Si $x > 0$ alors,

$$n(x) = \ln(e^{2x} - e^x) = \ln(e^{2x}(1 - e^{-x})) = \ln(e^{2x}) + \ln(1 - e^{-x}) = 2x + \ln(1 - e^{-x})$$

Donc : $n(x) - 2x = \ln(1 - e^{-x})$, $\forall x \in]0 ; +\infty[$

c) Si $x < 0$ alors $n(x) - x = \ln(1 - e^x)$ et $\lim_{x\to-\infty} n(x) - x = \lim_{x\to-\infty} \ln(1 - e^x) = 0$

Donc la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe C_n en $-\infty$

Si $x > 0$ alors $n(x) - 2x = \ln(1 - e^{-x})$ et $\lim_{x\to+\infty} n(x) - 2x = \lim_{x\to+\infty} \ln(1 - e^{-x}) = 0$

Donc la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote oblique à la courbe C_n en $-\infty$

d) (i) On sait que pour tout réel positif x, on a :

$$-e^{-x} < 0 \Rightarrow 1 - e^{-x} < 1 \Rightarrow \ln(1 - e^{-x}) < \ln 1 = 0 \Rightarrow n(x) - 2x < 0 \Rightarrow n(x) < 2x$$

Donc C_n est en dessous de la droite $y = 2x$ en $-\infty$

(ii) On sait que pour tout réel négatif x, on a :

$$-e^x < 0 \Rightarrow 1 - e^x < 1 \Rightarrow \ln(1 - e^x) < \ln 1 = 0 \Rightarrow n(x) - x < 0 \Rightarrow n(x) < x$$

Donc C_n est en dessous de la droite $y = x$ en $-\infty$

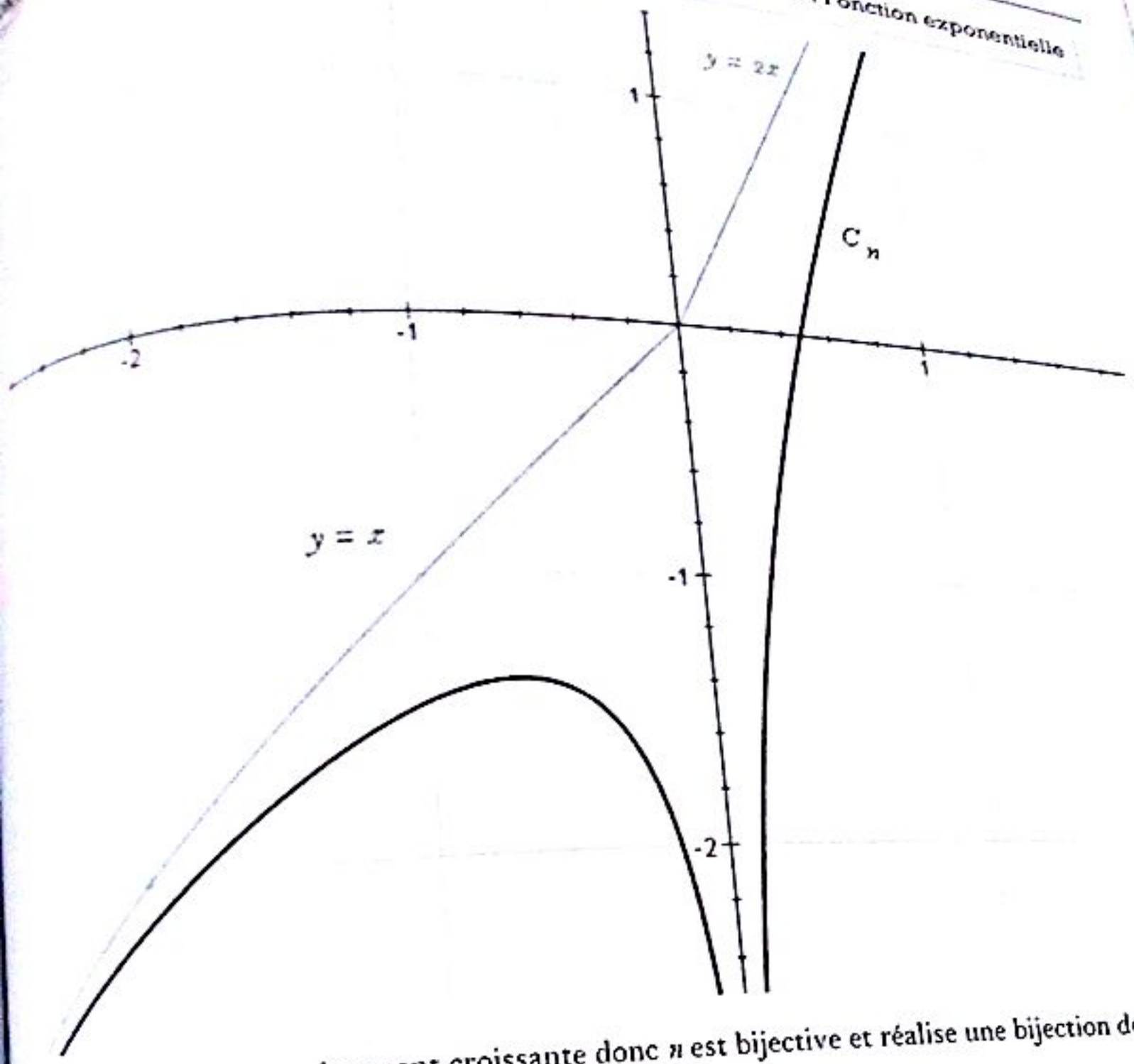
e) La fonction $n(x)$ est dérivable dans son domaine de définition est : $n'(x) = \dfrac{2e^x - 1}{e^x - 1}$

On obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$-\ln 2$		0		$+\infty$
$n'(x)$		$-$		$-$	‖	$-$	
$n(x)$	$-\infty$	↗	$-2\ln 2$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↗	$+\infty$

On remarque facilement que $n(x)$ s'annule sur $\mathbb{R}^{+*}$ au point $x = 0{,}48$.

On obtient la courbe suivante :



Sur $\mathbb{R}_+^*$, u est continue et strictement croissante donc u est bijective et réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.

Donc u admet une bijection réciproque φ.

EXERCICE 11

Domaine de définition : $\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1+e^{-x}) = 0$;

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \ln(1+e^{-x}) = \lim\limits_{x \to -\infty} \ln(e^{-x}(1+e^{x})) = \lim\limits_{x \to -\infty} -x + \ln(1+e^{x}) = +\infty$

Pour tout réel x, on a : $f'(x) = \dfrac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} \pi 0$ pour tout réel x. Donc f est strictement décroissante

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0

2) a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(1+e^{-x})}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x+\ln(1+e^{x})}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}-1+\dfrac{\ln(1+e^{x})}{x}=-1$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)+x=\lim\limits_{x\to-\infty}-x+\ln(1+e^{x})+x=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(1+e^{x})=0$

Donc (D) : $y(x)=-x$ est une asymptote oblique à (C) en $-\infty$.

b) On étudie le signe de $f(x)-(-x)$

En effet, $f(x)-(-x)=\ln(1+e^{-x})+x=\ln(1+e^{x})-x+x=\ln(1+e^{x})>0$ pour tout réel.

Donc (C) est au-dessus de (D)

c) $(T_1): y(x)=f'(0)(x-0)+f(0)=-\frac{1}{2}x+\ln 2$ donc $(T_1):\ y(x)=-\frac{1}{2}x+\ln 2$

3) a) Sur $\mathbb{R}$, f est strictement croissante et continue, donc f est bijective et réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

b) On a $(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(x)}$. Pour $y=f(x)=\ln(1+e^{-x})=\ln 2 \implies x=0$.

Donc $(f^{-1})'(\ln 2)=\frac{1}{f'(0)}=-2$

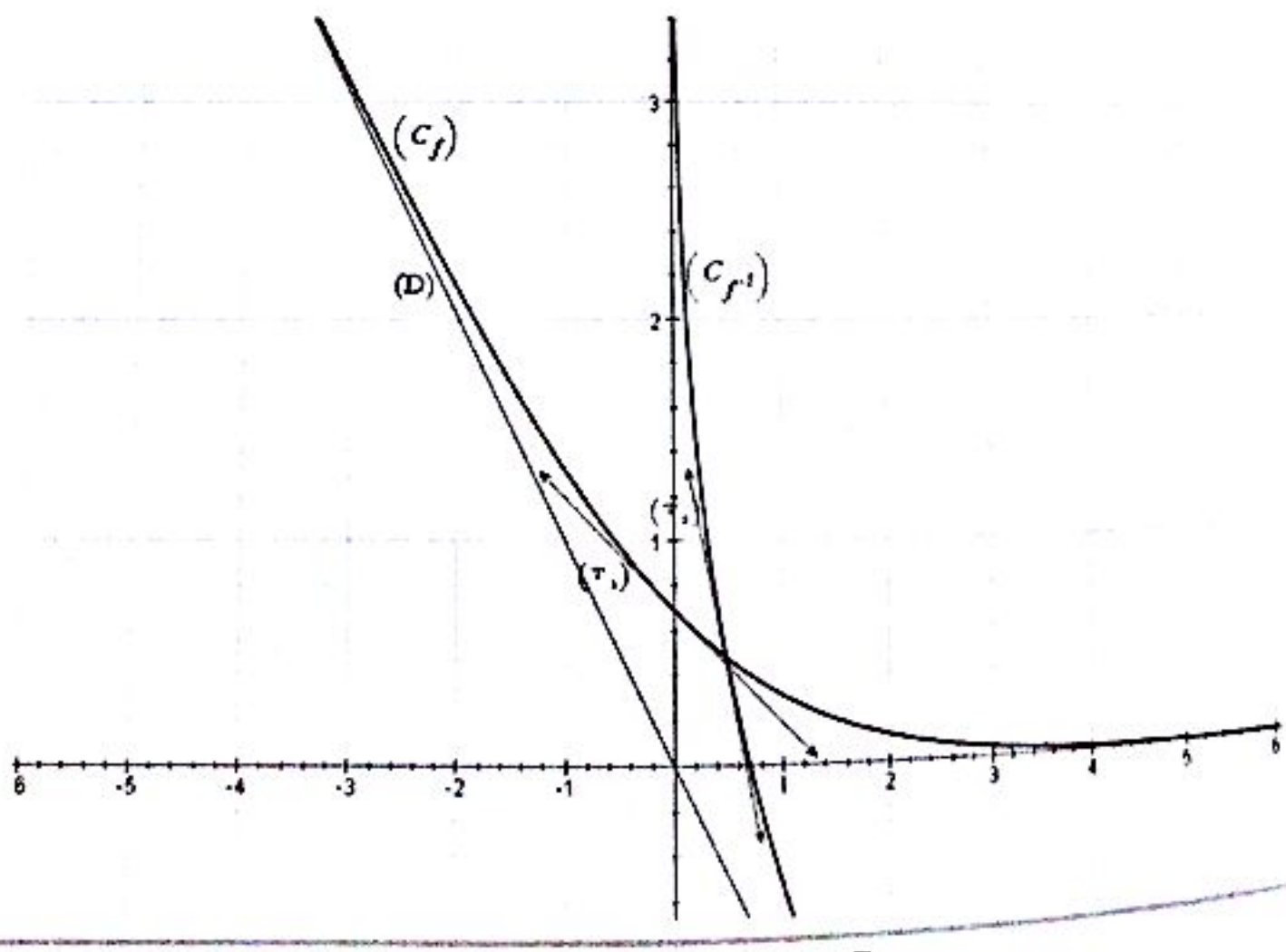
D'autre part, $f^{-1}(f(x))=x \implies f^{-1}(\ln 2)=f^{-1}(f(0))=0$ donc $(T_2):\ y(x)=-2x+\ln 2$

c) Soit y un élément de J tel que $f(x)=y$.

$$f(x)=y \iff \ln(1+e^{-x})=y=\ln(e^{y}) \iff 1+e^{-x}=e^{y} \iff x=\ln\left(\frac{1}{e^{y}-1}\right)$$

Donc $f^{-1}(x)=\ln\left(\frac{1}{e^{x}-1}\right)=-\ln(e^{x}-1)$

4) On obtient les courbes suivantes :



Deuxième partie

1) a) On a : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $u'(t) = -\frac{t}{1+t}$; $v'(t) = \frac{t^2}{1+t}$

On dresse les tableaux de variations suivantes :

t	0		$+\infty$
$u'(t)$		$-$	
$u(t)$	0	$\searrow$	$-\infty$

t	0		$+\infty$
$v'(t)$		$+$	
$v(t)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$$\max_{\mathbb{R}_+^*} u(t) = 0 \implies \underline{u(t) \leq 0} \quad ; \quad \min_{\mathbb{R}_+^*} v(t) = 0 \implies \underline{v(t) \geq 0}$$

b) $u(t) \leq 0$ et $v(t) > 0$ impliquent $\underline{t - \frac{t^2}{2} < \ln(1+t) < t}$ (*)

2) On pose $t = e^{-x} > 0$ et (*) devient : $\underline{e^{-x} - \frac{e^{-2x}}{2} < f(x) < e^{-x}}$ (**)

3) a) On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{1}{e^{n+1}} = 1 + e^{-(n+1)} > 1 \implies u_{n+1} > u_n$$

Donc (u_n) est strictement croissante

b) On a :

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = 1 + \frac{1}{e^n} = 1 + e^{-n} \implies \frac{u_k}{u_{k-1}} = 1 + e^{-k} \implies \prod_{k=2}^{n} \frac{u_k}{u_{k-1}} = \prod_{k=2}^{n} (1 + e^{-k})$$

Comme

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{u_k}{u_{k-1}} = \frac{u_2}{u_1} \times \frac{u_3}{u_2} \times \cdots \times \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \times \frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{u_n}{u_1} \implies \frac{u_n}{u_1} = \prod_{k=2}^{n} (1 + e^{-k})$$

Ainsi

$$u_n = u_1 \prod_{k=2}^{n} (1 + e^{-k}) = (1 + e^{-1}) \prod_{k=2}^{n} (1 + e^{-k}) = \prod_{k=1}^{n} (1 + e^{-k})$$

Ou encore

$$\ln u_n = \ln \prod_{k=1}^{n} (1 + e^{-k}) = \sum_{k=1}^{n} \ln(1 + e^{-k}) = \sum_{k=1}^{n} f(k) = f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$$

Ainsi : $\underline{\ln U_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n)}$

4) a) Dans (**), en posant $x = k$, on obtient :

$$e^{-k}-\frac{e^{-2k}}{2}<\ln(1+e^{-k})<e^{-k} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\left(e^{-k}-\frac{e^{-2k}}{2}\right)<\sum_{k=1}^{n}f(k)<\sum_{k=1}^{n}e^{-k}$$

Or

$$\sum_{k=1}^{n}\left(e^{-k}-\frac{e^{-2k}}{2}\right)=\sum_{k=1}^{n}e^{-k}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}e^{-2k}=S_1-\frac{S_2}{2}\ ;\ \sum_{k=1}^{n}\ln(1+e^{-k})=\ln u_n$$

Donc $\underline{S_1-\frac{S_2}{2}<\ln U_n<S_1}$ (•••)

b) On a (•••) : $S_1-\frac{S_2}{2}<\ln u_n<S_1 \Rightarrow e^{S_1-\frac{S_2}{2}}<u_n<e^{S_1}$

Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} S_1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_2$?

On a :

$$S_1=\sum_{k=1}^{n}e^{-k}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{e}\right)^k=\frac{1}{e}\times\frac{1-\frac{1}{e^n}}{1-\frac{1}{e}} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}S_1=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{e}\times\frac{1-\frac{1}{e^n}}{1-\frac{1}{e}}=\frac{1}{e-1}$$

$$S_2=\sum_{k=1}^{n}e^{-2k}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{e^2}\right)^k=\frac{1}{e^2}\times\frac{1-\frac{1}{e^{2n}}}{1-\frac{1}{e^2}} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}S_2=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{e^2}\times\frac{1-\frac{1}{e^{2n}}}{1-\frac{1}{e^2}}=\frac{1}{e^2-1}$$

Comme

$$e^{S_1-\frac{S_2}{2}}<u_n<e^{S_1} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}e^{S_1-\frac{S_2}{2}}=e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(S_1-\frac{S_2}{2}\right)}<\lim_{n\to+\infty}u_n<e^{\lim\limits_{n\to+\infty}S_1}$$

Ainsi : $\underline{e^{\frac{1}{e-1}-\frac{1}{2(e^2-1)}}<\lim\limits_{n\to+\infty}U_n<e^{\frac{1}{e-1}}}$

EXERCICE 23

Première partie

1) Domaine de définition : $\mathbb{R}$

Limites aux bornes du domaine de définition

Limite en $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}1-xe^{1-x}=\lim_{x\to+\infty}1-e\cdot\frac{x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}1-e\cdot\frac{1}{\frac{e^x}{x}}=1-\frac{e}{+\infty}=1$$

Limite en $-\infty$: $\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}1-xe^{1-x}=+\infty$

Dérivée et tableau de variation : La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et $g'(x)=(x-1)e^{1-x}$. La fonction $g'(x)$ s'annule au point $x_0=1$.

Tableau de variations

On obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$		1		$-\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↘	0	↗	1

La fonction g admet un minimum au point $x_0 = 1$ égale à 0 donc $g(x) \geqslant 0$

2) On a :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

3) On a :

Branche parabolique en $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(1+x)(1+e^{1-x})}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x}+1\right)(1+e^{1-x}) = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim_{x \to +\infty} (1+x)(1+e^{1-x}) - x = \lim_{x \to +\infty} [1 + e^{1-x} + xe^{1-x}] = 1$$

Donc la droite d'équation $y(x) = x + 1$ est une asymptote oblique à (C) en $+\infty$

Branche parabolique en $-\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{(1+x)(1+e^{1-x})}{x} = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{x}+1\right)(1+e^{1-x}) = +\infty$$

Donc (C) admet une branche parabolique de direction (yy') en $-\infty$.

4) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $f'(x) = 1 - xe^{1-x} = g(x)$. Comme g est positive sur $\mathbb{R}$ (d'après 1)), on déduit que $f'(x) \geqslant 0$ ou encore f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	1	$-\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-\infty$

La fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc elle est bijective et admet donc une bijection réciproque notée f^{-1}. Or $f'(x) = 0 \iff x = 1$ donc f^{-1} n'est pas dérivable en $f(1) = 4$. Ainsi f^{-1} n'est pas dérivable en 4

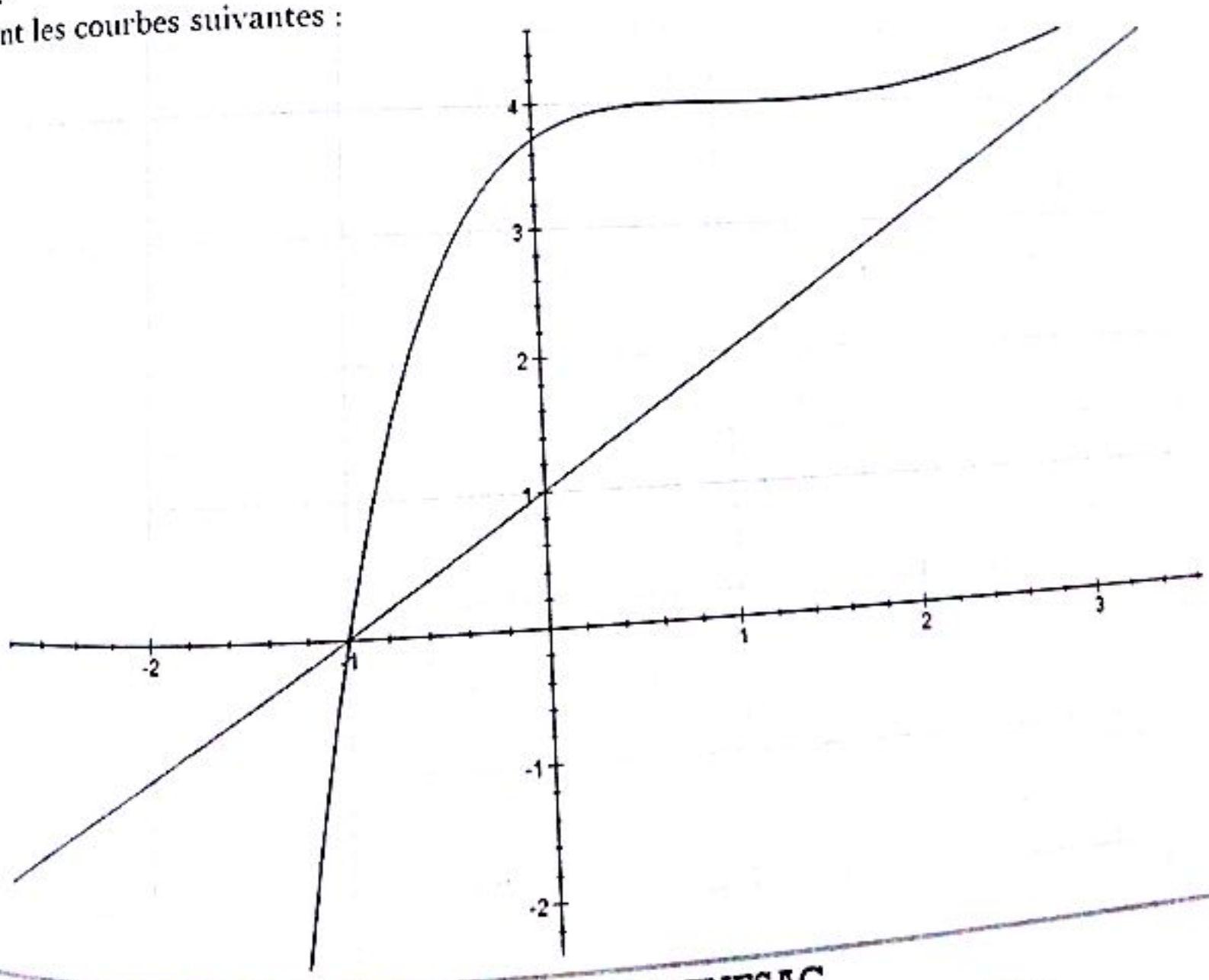
5) La tangente à (C) au point d'abscisse 1 a pour équation : $y(x) = f'(1)(x-1) + f(1) = 4$.

Et comme f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle l'est également sur $[1\,;\,+\infty[$.

On a : $x > 1 \Rightarrow f(x) > f(1) = 4$ et donc f est au-dessus de la tangente au point d'abscisse 1 sur $]-1\,;\,+\infty[$.

De même, $x < 1 \Rightarrow f(x) < f(1) = 4$ et donc f est en-dessous de la tangente au point d'abscisse 1 sur $]-\infty\,;\,-1[$.

6) On obtient les courbes suivantes :



Deuxième partie

1) On a : $f(x) = (1+x)(1+e^{1-x}) = 1 + e^{1-x} + x + xe^{1-x}$

$$f(x) = x \iff 1 + e^{1-x} + x + xe^{1-x} = x \iff (x+1)e^{1-x} = -1 \iff e^{1-x} = -\frac{1}{x+1} \quad (1)$$

Cette dernière équation existe si et seulement si : $x + 1 < 0$ ou encore $x < -1$.
Si cette condition est vérifiée, alors (1) devient (en passant au logarithme) :

$$\ln(e^{1-x}) = \ln\left(-\frac{1}{x+1}\right) \iff 1 - x = -\ln(-x-1) \iff \ln(-x-1) - x + 1 = 0$$

Ainsi :

$$f(x) = x \iff \begin{cases} x < -1 \\ \ln(-x-1) - x + 1 = 0 \end{cases}$$

2) La fonction h est définie sur $]-\infty\,;\,-1[$.
Limites aux bornes du domaine de définition, dérivée, variations

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \ln(-x-1) - x + 1 = +\infty \;\; ; \;\; \lim_{x\to-1^{-}} f(x) = \lim_{x\to-1} \ln(-x-1) - x + 1 = -\infty$$

La fonction h est dérivable sur $]-\infty\,;\,-1[$ et $h'(x) = -\frac{x}{x+1} < 0$. Donc h est strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,-1[$. On obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$		-1
$h'(x)$		$-$	
$h(x)$	$-\infty$	$\searrow$	$-\infty$

La fonction h est continue et décroissante sur $]-\infty\,;\,-1[$. Elle est donc bijective et réalise une bijection de $]-\infty\,;\,-1[$ vers $\mathbb{R}$. Or $0 \in \mathbb{R}$, donc il existe un réel $\alpha \in\,]-\infty\,;\,-1[$ tel que $h(\alpha) = 0$.

Et comme $f(x) = x \iff \begin{cases} x < -1 \\ h(x) = 0 \end{cases}$ donc l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique dans un intervalle que l'on précisera. On a : $f(-1{,}2) = 0{,}59 >$; $f(-1{,}1) = -0{,}2 < 0 \implies -1{,}2 < \alpha < -1{,}1$.

3) On a : $f(-2) = -21{,}08 < -2 \implies f(-2) < -2$; $f(-1) = 0 > -1 \implies f(-1) > -1$

4) En effet, $\forall\, x \in [-2\,;-1], -2 \leqslant x \leqslant -1 \implies f(-2) < -2 \leqslant x \leqslant -1 < f(-1)$

Ainsi : $f(-2) \leqslant x \leqslant f(-1)$ et comme f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $[-2\,;-1]$ et sachant que f et f^{-1} ont même sens de variation, on obtient : $f^{-1}[f(-2)] \leqslant f^{-1}(x) \leqslant f^{-1}[f(-1)]$.

Rappelons que $f[f^{-1}(x)] = f^{-1}[f(x)] = x$; $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Ainsi : $f^{-1}[f(-2)] \leqslant f^{-1}(x) \leqslant f^{-1}[f(-1)] \implies -2 \leqslant f^{-1}(x) \leqslant -1 \;\; (2)$

5) Rappelons (pour nos amis de TS_2) $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$.

Montrons que f' est décroissante sur $[-2\,;-1]$.

C'est bien évident car $f'(x) = g(x)$ donc $f''(x) = g'(x)$ et comme $g'(x) \leqslant 0$ sur $]-\infty\,;\,1]$ en particulier sur $[-2\,;-1]$ donc $f''(x) \leqslant 0$ et par conséquent f' est décroissante sur $[-2\,;-1]$.

(2) devient : $-2 \leqslant f^{-1}(x) \leqslant -1 \implies f'(-1) \leqslant f'[f^{-1}(x)] \leqslant f'(-2)$

Et comme $f'(-1) = 1 + e^2$ et $f'(-2) = 1 + 2e^3$ donc $1 + e^2 \leqslant f'[f^{-1}(x)] \leqslant 1 + 2e^3$

En passant aux inverses, on obtient : $\frac{1}{1+2e^3} \leqslant \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]} \leqslant \frac{1}{1+e^2}$ et comme $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$ (rappel)

Donc $\frac{1}{1+2e^3} \leqslant (f^{-1})'(x) \leqslant \frac{1}{1+e^2}$; $\forall\, x \in [-2\,;-1]$

6) On a : $\forall\, x \in [-2\,;-1]$, $\frac{1}{1+2e^3} \leqslant (f^{-1})'(x) \leqslant \frac{1}{1+e^2} \implies |(f^{-1})'(x)| \leqslant \frac{1}{1+e^2}$

En appliquant l'inégalité des accroissements finis sur $[\alpha\,;x]$, on obtient : $\left|\frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(\alpha)}{x-\alpha}\right| \leqslant \frac{1}{1+e^2}$

Ou encore : $|f^{-1}(x) - f^{-1}(\alpha)| \leqslant \frac{1}{1+e^2}|x - \alpha|$

Or $f^{-1}(\alpha) = \alpha$ car α est la solution de l'équation $f(x) = x$ donc $|f^{-1}(x) - \alpha| \leqslant \frac{1}{1+e^2}|x - \alpha|$

7) a) On procède par récurrence.

Au premier rang, on a $u_0 = -1 \in [-1\,;\,-2]$ donc la propriété est vraie au premier rang.

Supposons qu'elle soit vraie au rang n, c'est-à-dire : $\forall n \geq 0, u_n \in [-1 ; -2]$ et vérifions que $u_{n+1} \in [-1 ; -2]$.

Rappelons que d'après la question de la deuxième partie : $\forall x \in [-2 ; -1]$, $-2 \leq f^{-1}(x) \leq -1$

Comme $u_n \in [-2 ; -1]$, alors u_n vérifie cette inégalité.

Ainsi : $u_n \in [-2 ; -1] \longrightarrow -2 \leq f^{-1}(u_n) \leq -1$ et comme $f^{-1}(u_n) = u_{n+1}$, on obtient le résultat voulu.

La propriété est donc toujours vraie : $\forall n \geq 0$, $U_n \in [-2 ; -1]$

b) D'après la question a) de la deuxième partie, on a :

$$\forall x \in [-2 ; -1], \qquad |f^{-1}(x) - \alpha| \leq \frac{1}{1+e^2}|x - \alpha|$$

Comme $u_{n-1} \in [-2 ; -1]$, alors u_{n-1} vérifie également cette inégalité.

On a alors : $|f^{-1}(u_{n-1}) - \alpha| \leq \frac{1}{1+e^2}|u_{n-1} - \alpha|$ ou encore $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{1+e^2}|u_{n-1} - \alpha|$.

Ainsi :

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{1+e^2}|u_{n-1} - \alpha| \leq |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{1+e^2} \times \left|\frac{1}{1+e^2}|u_{n-2} - \alpha|\right| = \frac{1}{(1+e^2)^2}|u_{n-2} - \alpha| \leq \cdots$$
$$\leq \frac{1}{(1+e^2)^n}|u_0 - \alpha|$$

Donc : $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{(1+e^2)^n}|U_0 - \alpha|$

c) On a :

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{(1+e^2)^n}|u_0 - \alpha| \implies -\frac{1}{(1+e^2)^n}|u_0 - \alpha| \leq u_n - \alpha \leq +\frac{1}{(1+e^2)^n}|u_0 - \alpha|$$

Ou encore :

$$-\frac{1}{(1+e^2)^n}|u_0 - \alpha| + \alpha \leq u_n \leq +\frac{1}{(1+e^2)^n}|u_0 - \alpha| + \alpha$$

En passant aux limites, on obtient :

$$\lim_{n \to +\infty} -\frac{1}{(1+e^2)^n}|u_0 - \alpha| + \alpha \leq u_n \leq \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{(1+e^2)^n}|u_0 - \alpha| + \alpha$$

Or : $\lim_{n \to +\infty} -\frac{1}{(1+e^2)^n}|u_0 - \alpha| + \alpha = \alpha$ et $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{(1+e^2)^n}|u_0 - \alpha| + \alpha = \alpha$

Donc, d'après le théorème des gendarmes, on a : $\lim_{n \to +\infty} U_n = \alpha$

EXERCICE 14

Première partie

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln^n x}{n!x^2} = 0$

b) On a : $f'(x) = \dfrac{\ln^{n-1} x}{n!x^3}(n - 2\ln x)$

c) $f'(x) = 0$ si et seulement si $x = 1$ ou $x = e^{\frac{n}{2}}$.

d) La fonction f_n est positive.

e) La fonction f_n est maximale pour $x = e^{\frac{n}{2}}$; y_n est égal à $\dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{n}{2e}\right)^n$.

Deuxième partie

a) On trouve $\dfrac{\ln x}{n+1}$

b) Evident en écrivant

c) Evident car y_n est le maximum de f_n

d) Démonstration par récurrence.

e) La limite est nulle.

Troisième partie

a) En utilisant le fait que y_n est le maximum de f_n, on montre le résultat souhaité.

b) La limite de $I_n(x)$ quand n tend vers $+\infty$ est nulle.

c) On intègre $I_{n+1}(x)$ par parties (en posant $u(t) = \ln t$ et $v'(t) = f_n(t)$).

d) Démonstration par récurrence.

e) $Z_n(x) = x - xI_n(x)$.

f) La limite de $Z_n(\beta)$ quand n tend vers $+\infty$ est β.

g) $L = e$.

EXERCICE 25

Première partie

1) On a : $\lim_{x\to 0^+} f_n(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^n \ln x - \frac{x^n-1}{n} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x^n \ln x^n}{n} - \frac{x^n}{n} + \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$

Donc f_n est continue en 0

2) On a :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^n \ln x - \frac{x^n - 1}{n} - \frac{1}{n}}{x} = \lim_{x\to 0^+} x^{n-1} \ln x - \frac{x^{n-1}}{n}$$

Si $n = 1$, alors on a :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f_1(x) - f_1(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \ln x - \frac{1}{n} = -\infty$$

Interprétation géométrique : f_1 n'est pas dérivable à droite en 0 et (C_1) admet au point $x_0 = 0$ une demi-tangente horizontale

Si $n > 1$, alors on a :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{n-1} \ln x^{n-1}}{n-1} - \frac{x^{n-1}}{n} = 0$$

Interprétation géométrique : (C_n) admet au point $x_0 = 0$ une demi-tangente verticale

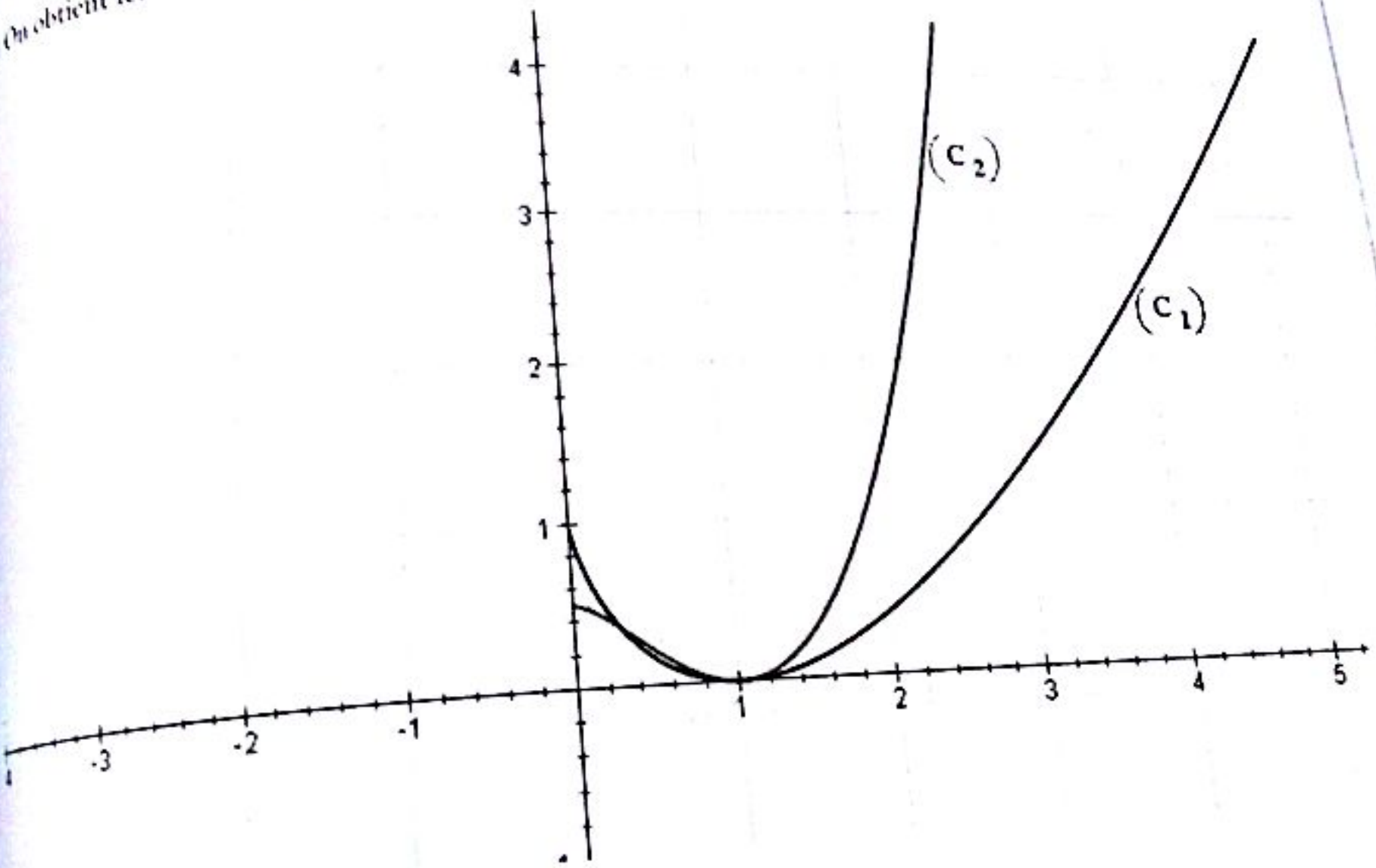
3) La fonction $x \longmapsto x^n \ln x - \frac{x^n-1}{n}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout réel $x > 0$, $f_n'(x) = nx^{n-1} \ln x$.

x	0		1		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	1 n	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f_n(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}x^{n-1}\ln x-\frac{x^{n-1}}{n}+\frac{1}{nx}=\lim_{x\to+\infty}x^{n-1}\left(\ln x-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{nx}=+\infty$$

(C_n) admet une branche parabolique de direction (yy')

b) On obtient les courbes suivantes :



Deuxième partie

1) On pose $g(x)=f_2(x)-x=x^2\ln x-\frac{x^2}{2}-x+\frac{1}{2}$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et en particulier sur $]0\,;1[$ et $g'(x)=2x\ln x-1$; $g''(x)=2(\ln x+1)$

x	0		$1/e$		1
$g''(x)$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$	-1	$\searrow$	$-1,\overline{7}4$	$\nearrow$	-1

Donc g' est négative sur $]0\,;1[$.

x	0		1
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	1 2	$\searrow$	$-1,74$

Sur $]0\,;1[$, g est continue et strictement décroissante donc g est bijective et réalise une bijection de $]0\,;1[$ sur $]-1\,;\frac{1}{2}[$. Comme $0 \in \left]-1\,;\frac{1}{2}\right[$, il existe un unique $\alpha \in]0\,;1[$ tel que $g(\alpha) = 0$, c'est-à-dire il existe un unique $\alpha \in]0\,;1[$ tel que $f_2(\alpha) = \alpha$.

2) a) On a : $f_2'(x) = 2x\ln x$; $f_2''(x) = 2(\ln x + 1) = 0 \iff x = \frac{1}{e}$

$f_2''(x) > 0 \iff x > \frac{1}{e}$ et donc f_2' est strictement croissante sur $\left]\frac{1}{e}\,;1\right[$.

$f_2''(x) < 0 \iff x < \frac{1}{e}$ et donc f_2' est strictement décroissante sur $\left]0\,;\frac{1}{e}\right[$.

x	0		1 e		1
$f_2''(x)$		$-$	0	$-$	
$f_2'(x)$	0	$\searrow$	$-0,755$	$\nearrow$	0

b) D'après le tableau de variation de $f_2'(x)$, $\frac{2}{e} \leqslant f_2'(x) \leqslant 0$ donc $\underline{|f_2'(x)| \leqslant \frac{2}{e}}$

3) a) Pour $n = 0$, $u_0 = 1 \in [0\,;1]$

Supposons que $u_n \in [0\,;1]$ et vérifions si $u_{n+1} = f_2(u_n) \in [0\,;1]$.

En effet $f_2(x) \geqslant 0$ pour tout réel x donc $f_2(x) \geqslant 0$ sur $[0\,;1]$ et donc $f_2(u_n) = u_{n+1} \geqslant 0$.

$$u_n \in [0\,;1] \Rightarrow 0 \leqslant \frac{1-u_n^2}{2} \leqslant \frac{1}{2} \Rightarrow u_n^2 \ln u_n + \frac{1-u_n^2}{2} = f_2(u_n) \leqslant \frac{1}{2} + u_n^2 \ln u_n \leqslant \frac{1}{2} \leqslant 1$$

Donc $f_2(u_n) \leqslant 1$. On a donc prouvé que $f_2(u_n) \in [0\,;1]$ ou encore $u_{n+1} \in [0\,;1]$.

Ce qui achève la récurrence. Donc $\underline{u_n \in [0\,;1]}$

b) On a : $|f_2'(x)| \leqslant \frac{2}{e}$ et on applique l'inégalité des accroissements finis sur $[\alpha\,;\,u_n]$.

$$\left|\frac{f_2(u_n) - f_2(\alpha)}{u_n - \alpha}\right| \leqslant \frac{2}{e} \Rightarrow \left|\frac{u_{n+1} - \alpha}{u_n - \alpha}\right| \leqslant \frac{2}{e} \Rightarrow \frac{|u_{n+1} - \alpha|}{|u_n - \alpha|} \leqslant \frac{2}{e}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{2}{e}|u_n - \alpha|}$$

c) On a : $|u_n - \alpha| \leqslant \frac{2}{e}|u_{n-1} - \alpha|$ cette relation est vérifiée pour tout entier naturel n.

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leqslant k \leqslant n$. On a $|u_k - \alpha| \leqslant \frac{2}{e}|u_{k-1} - \alpha|$ et donc :

$$\prod_{k=1}^{n} |u_k - \alpha| \leqslant \prod_{k=1}^{n} \frac{2}{e}|u_{k-1} - \alpha|$$

Ou encore

$$|u_n - \alpha| \times |u_{n-1} - \alpha| \times \cdots \times |u_1 - \alpha| \leqslant \left(\frac{2}{e}\right)^n |u_{n-1} - \alpha| \times \cdots \times |u_1 - \alpha| \times |u_0 - \alpha|$$

En simplifiant $|u_{n-1} - \alpha| \times \cdots \times |u_1 - \alpha|$ de part et d'autre, on obtient :

$$|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{2}{e}\right)^n |u_0 - \alpha| = \left(\frac{2}{e}\right)^n |1 - \alpha| \quad \Rightarrow \quad \underline{\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{2}{e}\right)^n |1 - \alpha|}$$

d) On a : $u_{n+1} - u_n = f_2(u_n) - u_n$; comme $f_2(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in [0\,;1]$.

Or $u_n \in [0\,;1]$ donc $f_2(u_n) - u_n \leqslant -u_n \leqslant 0$ et par conséquent $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ ou encore la suite (u_n) est strictement décroissante. De plus, (u_n) est minorée par 0.

(u_n) décroissante et minorée donc (u_n) est convergente et,

$$\lim_{n\to+\infty} |u_n - \alpha| \leqslant \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{e}\right)^n |1 - \alpha| = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} |u_n - \alpha| = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha}$$

(u_n) est convergente et converge vers α

AN5 Suites numériques

EXERCICE 1

1) Vrai. Toute suite décroissante est majorée par son premier terme. En effet, (u_n) décroissante signifie que $u_0 \geqslant u_1 \geqslant u_2 \geqslant \cdots \geqslant u_n \implies u_n \leqslant u_0$. Ainsi (u_n) est majorée par son premier terme.

2) Faux. On pose $u_n = \frac{1}{n}$. On a $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)} < 0$ et donc (u_n) est décroissante. Par ailleurs, $u_n = \frac{1}{n} \geqslant 0$ et donc (u_n) est minorée par 0. Et pourtant, (u_n) est divergente (sa limite est infinie). Je vous laisse le soin de prouver que la suite $u_n = \frac{1}{n}$ est divergente.

3) Vrai. (u_n) croissante implique $u_n \geqslant u_0$ donc (u_n) est minorée par u_0.

(u_n) majorée implique $u_n \leqslant M$ où M est un réel. Ainsi $u_0 \leqslant u_n \leqslant M$. On conclut que la suite est bornée.

4) Vrai. En effet, si $\lim_{n\to+\infty} u_n$ alors $u_n > M \in \mathbb{N}$ pour tout entier naturel n.

5) Faux. Cas des suites adjacentes.

EXERCICE 2

1) Calculons les trois premiers termes de la suite

$$u_1 = \left(1 + \frac{1}{0+1}\right)u_0 = 2 \ ; \quad u_2 = \left(1 + \frac{1}{1+1}\right)u_1 = 3 \ ; \ u_3 = \left(1 + \frac{1}{2+1}\right)u_2 = 4 \ldots$$

Ainsi $\underline{u_1 = 2,\ u_2 = 3,\ u_3 = 4}$

2) On pose : $u_n = n + 1 \quad (1)$.

Au premier rang, $n = 0$: (1) donne : $u_0 = 0 + 1 = 1$ et d'après l'énoncé, $u_0 = 1$ donc (1) est vrai au premier rang.

Supposons que $u_n = n + 1$ et verifions si $u_{n+1} = n + 2$.

En effet, (1) donne : $u_n = n + 1$ donc $u_{n+1} = (n+1) + 1 = n + 2$ donc (1) est toujours vraie.

Ainsi $\underline{u_n = n + 1}$

EXERCICE 3

a) (i) Pour $n = 0$, on a : $u_0 = 5 \times 0 - 3 = -3$

(ii) Pour $n = 1$, on a : $u_1 = 5 \times 1 - 3 = 2$

(iii) Pour $n = 2$, on a : $u_2 = 5 \times 2 - 3 = 7$

Ainsi $u_1 = -3,\ u_2 = 2,\ u_3 = 7$

b) (i) Pour $n = 0$, on a : $u_1 = \frac{u_0}{2} = \frac{4}{2} = 2$

(ii) Pour $n = 1$, on a : $u_2 = \frac{u_1}{2} = \frac{2}{2} = 1$

(iii) Pour $n = 2$, on a : $u_3 = \frac{u_2}{2} = \frac{1}{2}$

Ainsi $u_1 = 2,\ u_2 = 1,\ u_3 = \frac{1}{2}$

c) (i) Pour $n = 0$, on a : $u_1 = \sqrt{3u_0 + 4} = \sqrt{3 \times 0 + 4} = \sqrt{4} = 2$

(ii) Pour $n = 1$, on a : $u_2 = \sqrt{3u_1 + 4} = \sqrt{3 \times 2 + 4} = \sqrt{10} \approx 3{,}16$

(iii) Pour $n = 2$, on a : $u_2 = \sqrt{3u_2 + 4} = \sqrt{3 \times \sqrt{10} + 4} \approx 3{,}67$

Ainsi $u_1 = 2,\ u_2 = 3{,}16,\ u_3 = 3{,}67$

d) (i) Pour $n = 0$, on a : $u_2 = 2u_1 - u_0 = 2 \times 4 - 1 = 7$

(ii) Pour $n = 1$, on a : $u_3 = 2u_2 - u_1 = 2 \times 7 - 4 = 10$

(iii) Pour $n = 2$, on a : $u_4 = 2u_3 - u_2 = 2 \times 10 - 7 = 13$

Ainsi $u_1 = 7,\ u_2 = 10,\ u_3 = 13$

e) Remarquons que $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k}$

(i) Pour $n = 1$, on a : $u_1 = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{1^2+k} = \frac{1}{1^2+1} = \frac{1}{2}$

(ii) Pour $n = 2$, on a : $u_2 = \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{2^2+k} = \frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{2^2+2} = \frac{11}{30}$

(iii) Pour $n = 3$, on a : $u_3 = \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{3^2+k} = \frac{1}{3^2+1} + \frac{1}{3^2+2} + \frac{1}{3^2+3} = \frac{181}{660}$

Ainsi $u_1 = \frac{1}{2},\ u_2 = \frac{11}{30},\ u_3 = \frac{181}{660}$

f) (i) Pour $n = 0$, on a : $u_0 = \frac{3\times0-1}{2\times0+2} = -\frac{1}{2}$

(ii) Pour $n = 1$, on a : $u_1 = \frac{3\times1-1}{2\times1+2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

(iii) Pour $n = 2$, on a : $u_2 = \frac{3\times2-1}{2\times2+2} = \frac{5}{6}$

Ainsi $u_0 = -\frac{1}{2},\ u_1 = \frac{1}{2},\ u_2 = \frac{5}{6}$

EXERCICE 4

a) En effet, $a_{n+1} = a_n + 2 \implies a_{n+1} - a_n = 2 > 0$ donc la suite (a_n) est croissante.

b) En effet, $b_{n+1} = \frac{5}{6} b_n \implies \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{5}{6} < 1$ donc la suite (b_n) est décroissante.

c) En effet, $c_{n+1} = -c_n^2 - c_n - 1 \implies c_{n+1} - c_n = -c_n^2 - 2c_n - 1 = -(c_n+1)^2 \leqslant 0$ donc la suite (c_n) est décroissante

d) En effet, $d_{n+1} = (1+n)d_n \implies \frac{d_{n+1}}{d_n} = n + 1 > 1$ donc la suite (d_n) est croissante.

EXERCICE 5

a) On a :

$$a_{n+1} - a_n = [(n+1) - (n+1)^2] - [n - n^2] = n + 1 - n^2 - 2n - 1 - n + n^2 = -2n \leqslant 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Donc la suite (a_n) est décroissante.

b) On a :

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\sqrt{n-4}}{\sqrt{n-3}} = \sqrt{\frac{n+4}{n+3}} = \sqrt{\frac{n+3+1}{n+3}} = \sqrt{\frac{n+3}{n+3} + \frac{1}{n+3}} = \sqrt{1 + \frac{1}{n+3}} \geqslant 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Donc la suite (b_n) est croissante.

c) On a :

$$c_{n+1} - c_n = \frac{4(n+1)-1}{(n+1)+3} - \frac{4n-1}{n+3} = \frac{4n+3}{n+4} - \frac{4n-1}{n+3} = \frac{(4n+3)(n+3) - (4n-1)(n+4)}{(n+3)(n+4)}$$
$$= \frac{4n^2 + 12n + 3n + 9 - 4n^2 - 16n + n + 4}{(n+3)(n+4)} = \frac{13}{(n+3)(n+4)} \geqslant 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Donc la suite (c_n) est croissante.

d) On a :

$$\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1} \leqslant 2$$

Pour $n \geqslant 1, n+1 \geqslant 2 \implies \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{2} \implies \frac{2}{n+1} \leqslant \frac{2}{2} = 1$ donc $\frac{d_{n+1}}{d_n} \leqslant 1, \ \forall n \geqslant 1$ donc la suite (d_n) est décroissante pour $n \geqslant 1$

e) On a :

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{\frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}}}{\frac{\sqrt{n}}{2^n}} = \frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{1}{n}}$$

Pour $n > 1$, $\frac{1}{n} < 1 \Rightarrow 1 + \frac{1}{n} < 2 \Rightarrow \sqrt{1+\frac{1}{n}} < \sqrt{2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{1}{n}} < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$.

Donc $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, $\forall n > 1$ donc la suite (a_n) est décroissante pour $n \geq 1$

f/ On peut facilement remarquer que $f_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} = f_n + \frac{1}{(n+1)^2}$ et alors :

$$f_{n+1} - f_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Donc la suite (f_n) est croissante.

g/ On a tout d'abord : $g_n = 4^n \times 5^{-n+1} = 5 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n$ On a :

$$\frac{g_{n+1}}{g_n} = \frac{5 \times \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}}{5 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n} = \frac{4}{5} < 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Donc $\frac{g_{n+1}}{g_n} < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ donc la suite (g_n) est décroissante $\forall n \in \mathbb{N}$

EXERCICE 6

1/ On a :

$$u_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}} = \sqrt{\frac{n}{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}} = \sqrt{\frac{n}{n\left(1+\frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}}{n}\right)}} = \sqrt{\frac{1}{1+\frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}}{n}}} = \sqrt{\frac{1}{1+\sqrt{\frac{n+\sqrt{n}}{n^2}}}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{1+\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n\sqrt{n}}}}}$$

Ainsi $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{1}{1+\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n\sqrt{n}}}}} = 1$

b/ On a :

$$u_n = \frac{3n+\sin n}{5n+2\cos 3n} = \frac{n\left(3+\frac{\sin n}{n}\right)}{n\left(5+\frac{2\cos 3n}{n}\right)} = \frac{3+\frac{\sin n}{n}}{5+\frac{2\cos 3n}{n}}$$

Or $-1 \leq \sin n \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{n}\right) = 0 \leq \lim_{n\to+\infty}\frac{\sin n}{n} \leq \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$

Ainsi $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin n}{n} = 0$

De même, $-1 \leq \cos 3n \leq 1 \Rightarrow -\frac{2}{n} \leq \frac{2\cos 3n}{n} \leq \frac{2}{n} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{2}{n}\right) = 0 \leq \lim_{n\to+\infty}\frac{2\cos 3n}{n} \leq \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{n}\right) = 0$

Ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2\cos 3n}{n} = 0$

Donc : $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3+\frac{\sin n}{n}}{5+\frac{2\cos 3n}{n}} = \frac{3}{5}$

c) On a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(n+1)!}{(n+1)^n} - \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)\times n!}{(n+1)^n} - \frac{n!}{n^n} = \frac{n!}{n^n} \times \frac{(n+1)\times n!}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{n!}{n^n}\left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^n - 1\right]$$

Or $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n - 1 < 0$ donc $u_{n+1} - u_n = \frac{n!}{n^n}\left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^n - 1\right] \leqslant 0$ donc (u_n) est décroissante.

De plus, $u_n = \frac{n!}{n^n} \geqslant 0$ donc (u_n) est minorée par 0. Donc (u_n) est convergente et sa limite vaut 0

d) On a :

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

Alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\infty} = 0$

e) On a : $u_n = \sin\left(n\pi - \frac{1}{n}\right) = \sin(n\pi)\cos\left(\frac{1}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right)\cos(n\pi)$

Or $\sin(n\pi) = 0$ et $\cos(n\pi) = (-1)^n$ donc : $u_n = (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = \sin 0 = 0$, on conclut directement que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

f) Remarquons que pour n pair, on a : $u_n = \sqrt[n]{3}$ et pour n impair, $u_n = \sqrt[n]{1} = 1$ donc (u_n) n'a pas de limite.

g) On a : $u_n = \frac{1}{1\times2} + \frac{1}{2\times3} + \frac{1}{3\times4} + \frac{1}{n\times(n+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

Or : $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ donc $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$

h) On a :

$$u_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2} = \frac{1}{n^2}\left(1+2+\cdots+(n-1)\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{1}{n^2} \times \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2n^2}$$

Alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n(n-1)}{2n^2} = \frac{1}{2}$

EXERCICE 7

1) On a : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{4}{3}\right)^n} = \frac{4}{3} < 1$ donc la suite (u_n) est croissante. Remarquons que (u_n) est géométrique de raison $\frac{4}{3} > 1$ donc (u_n) est divergente.

a) On a $u_{n+1} - u_n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) - \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)} < 0$ donc (u_n) est décroissante.

De plus, pour $n \geqslant 1$, $1 + \frac{1}{n} \geqslant 1 \Rightarrow u_n \geqslant 1$ donc (u_n) est minorée par 1. On conclut que (u_n) est convergente car étant décroissante et minorée.

b) On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{2^n}{n^2}} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2} \times \frac{n^2}{2^n} = 2 \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^2$$

$$n \geqslant 3 \Rightarrow \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{3} \Rightarrow 1 + \frac{1}{n} \leqslant \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{n+1}{n} \leqslant \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{n}{n+1} \geqslant \frac{3}{4} \Rightarrow \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \geqslant \frac{9}{16} \Rightarrow 2 \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \geqslant \frac{18}{16} = \frac{9}{8} > 1$$

Ainsi $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ donc est croissante. Je n'ai pas trouvé de majorant pour la suite !

EXERCICE 8

a) On a :

$$u_{n+1} - u_n = \left(1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{25} - \frac{1}{125} + \cdots + \frac{(-1)^n}{5^n} + \frac{(-1)^{n+1}}{5^{n+1}}\right) - \left(1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{25} - \frac{1}{125} + \cdots + \frac{(-1)^n}{5^n}\right) = \frac{(-1)^{n+1}}{5^{n+1}}$$

Donc $u_{n+1} - u_n$ est du signe de $(-1)^{n+1}$.

Si n est pair, alors $(-1)^{n+1} = -1 < 0$ et donc $u_{n+1} - u_n < 0$ et alors (u_n) est décroissante. De plus, on peut remarquer que pour n pair, $u_n \geqslant 0$ et donc (u_n) est minorée par 0. On conclut que (u_n) est convergente car étant décroissante et minorée.

Si n est impair, alors $(-1)^{n+1} = 1 > 0$ et donc $u_{n+1} - u_n > 0$ et alors (u_n) est croissante. De plus, on peut remarquer que pour n impair, on a $u_n \leqslant 1$ et donc (u_n) est majorée par 1. On conclut que (u_n) est convergente car étant décroissante et minorée.

Calcul de la limite de la suite (u_n)

En effet, $u_n = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{25} - \frac{1}{125} + \cdots + \frac{(-1)^n}{5^n}$ est la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 de raison $-\frac{1}{5}$ donc :

$$u_n = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{25} - \frac{1}{125} + \cdots + \frac{(-1)^n}{5^n} = \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{5}\right)^k = \frac{1 - \left(-\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{5}} = \frac{5}{6}\left(1 - \left(-\frac{1}{5}\right)^{n+1}\right)$$

Or $\lim_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{5}\right)^{n+1} = 0$ donc $\underline{\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{5}{6}}$

b) On a :

$$v_{n+1}-v_n=\frac{7^{n+2}+6^{n+2}}{7^{n+1}+6^{n+1}}-\frac{7^{n+1}+6^{n+1}}{7^n+6^n}=\frac{(7^{n+2}+6^{n+2})(7^n+6^n)-(7^{n+1}+6^{n+1})^2}{(7^{n+1}+6^{n+1})(7^n+6^n)}$$
$$=\frac{7^{2n+2}+6^n\times 7^{n+2}+6^{n+2}\times 7^n+6^{2n+2}-7^{2n+2}-2\times 7^{n+1}\times 6^{n+1}-6^{2n+2}}{(7^{n+1}+6^{n+1})(7^n+6^n)}$$
$$=\frac{6^n\times 7^{n+2}+6^{n+2}\times 7^n-2\times 7^{n+1}\times 6^{n+1}}{(7^{n+1}+6^{n+1})(7^n+6^n)}=\frac{6^n\times 7^n(7^2+6^2-2\times 7\times 6)}{(7^{n+1}+6^{n+1})(7^n+6^n)}$$
$$=\frac{6^n\times 7^n}{(7^{n+1}+6^{n+1})(7^n+6^n)}>0$$

Donc la suite (v_n) est croissante. De plus, $v_n=\frac{7^{n+1}+6^{n+1}}{7^n+6^n}=\frac{7^{n+1}\left(1+\left(\frac{6}{7}\right)^{n+1}\right)}{7^n\left(1+\left(\frac{6}{7}\right)^{n}\right)}=7\times\frac{1+\left(\frac{6}{7}\right)^{n+1}}{1+\left(\frac{6}{7}\right)^{n}}<7$ donc (v_n) est majorée par 7. On conclut que (v_n) est convergente car étant croissante et majorée.

Calcul de la limite de la suite (v_n)

On a : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{6}{7}\right)^{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{6}{7}\right)^{n}=0$ donc $\underline{\lim_{n\to+\infty}v_n=7}$

EXERCICE 9

a) Soit à montrer par récurrence que $A_n=1+2+3+4+\cdots+n$.

Pour $n=1$, on a : $A_1=1$ et $\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1(1+1)}{2}=1$ donc la propriété est vraie au premier rang.

Supposons que $A_n=\frac{n(n+1)}{2}$ et vérifions si $A_{n+1}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

On a :

$$A_{n+1}=1+2+3+4+\cdots+n+(n+1)=A_n+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Donc la propriété est toujours vraie. Ainsi, $\underline{1+2+3+4+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}}$

b) Soit à montrer par récurrence que $B_n=1^2+2^2+\cdots+n^2$.

Pour $n=1$, on a : $B_1=1^2=1$ et $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{1(1+1)(2+1)}{6}=\frac{6}{6}=1$ donc la propriété est vraie au premier rang.

Supposons que $B_n=1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et vérifions si $B_{n+1}=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.

On a :

$$B_{n+1}=1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2=B_n+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2$$
$$=(n+1)\left[\frac{n(2n+1)}{6}+(n+1)\right]=(n+1)\left[\frac{2n^2+n+6n+6}{6}\right]$$
$$=(n+1)\left[\frac{2n^2+7n+6}{6}\right]$$

En factorisant $\frac{2n^2+7n+6}{6}$, on obtient : $\frac{2n^2+7n+6}{6}=\frac{(n+2)(2n+3)}{6}$ et donc : $B_{n+1}=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

Donc la propriété est toujours vraie. Ainsi, $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c) Essayez, vous trouverez !

EXERCICE 10

1) On a :

(i) $u_0 = -\frac{1}{0+1} = -1$ (ii) $u_1 = -\frac{1}{1+1} = -\frac{1}{2}$ (iii) $u_2 = -\frac{1}{2+1} = -\frac{1}{3}$

(iv) $u_3 = -\frac{1}{3+1} = -\frac{1}{4}$ (v) $u_4 = -\frac{1}{4+1} = -\frac{1}{5}$

Ainsi : $u_0 = -1,\ u_1 = -\frac{1}{2},\ u_2 = -\frac{1}{3},\ u_3 = -\frac{1}{4},\ u_4 = -\frac{1}{5}$

On a :

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{n+2-n-1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \geqslant 0$$

Donc la suite (u_n) est croissante.

2) La suite (u_n) est croissante donc elle est minorée par son premier terme $u_0 = -1$. Remarquons également que (u_n) est positive donc $u_n \geqslant 0$ et donc : $-1 \leqslant u_n \leqslant 0$

EXERCICE 11

1) Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1 \geqslant 1$.

Supposons que $u_n \geqslant 1$ et montrons que $u_{n+1} \geqslant 1$.

En effet, $u_n + \frac{1}{u_n} \geqslant 1 + \frac{1}{u_n} \geqslant 1$ car $\frac{1}{u_n} \geqslant 0$. Ainsi $u_n + \frac{1}{u_n} \geqslant 1$ et donc $u_{n+1} \geqslant 1$.

Ce qui achève la récurrence.

Par ailleurs, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} \geqslant 0$ car (u_n) est minorée par 1 donc la suite (u_n) est croissante.

2) Supposons que la suite (u_n) est majorée. Comme (u_n) est croissante et majorée, alors elle converge vers un réel a vérifiant : $a = a + \frac{1}{a}$ (utiliser $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$). Ainsi $\frac{1}{a} = 0$ et donc $a = \infty$. Ce qui signifie nettement que (u_n) diverge. Contradiction.

Ainsi (u_n) ne peut être majorée et sa limite est donc infinie.

EXERCICE 12

Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1$ et donc $0 \leqslant 1 = u_0 \leqslant 2$.

Supposons que $0 \leqslant u_n \leqslant 2$ et montrons que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.

En effet, $0 \leqslant u_n \leqslant 2 \implies \sqrt{0+1} \leqslant \sqrt{u_n+1} \leqslant \sqrt{2+1} \implies 1 \leqslant \sqrt{u_n+1} \leqslant \sqrt{3}$

Ainsi $0 < 1 \leqslant \sqrt{u_n+1} \leqslant \sqrt{3} < 2$ et par conséquent $0 \leqslant u_{n+1} = \sqrt{u_n+1} \leqslant 2$.

Ce qui achève la récurrence. Ainsi $\underline{0 \leqslant u_n \leqslant 2}$

EXERCICE 13

1) Au premier rang, $w_0 = 1$ et donc $0 \leqslant w_0 \leqslant 1$ donc la relation est vraie au premier rang.

Supposons que $0 \leqslant w_n \leqslant 1$ et vérifions si $0 \leqslant w_{n+1} \leqslant 1$.

$$0 \leqslant w_n \leqslant 1 \implies 1 \leqslant w_n + 1 \leqslant 2 \quad (1)$$

$$0 \leqslant w_n \leqslant 1 \implies 3 \leqslant w_n + 3 \leqslant 4 \implies \frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{w_n + 3} \leqslant \frac{1}{3} \quad (2)$$

Les inégalités (1) et (2) impliquent : $\frac{1}{4} \leqslant \frac{w_n+1}{w_n+3} \leqslant \frac{2}{3}$ et donc $0 \leqslant \frac{w_n+1}{w_n+3} \leqslant 1$ et par conséquent : $\underline{0 \leqslant w_{n+1} \leqslant 1}$

Donc la relation est toujours vraie. Ainsi $\underline{0 \leqslant w_n \leqslant 1}$

2) Au premier rang, $w_0 = 1$ et $w_1 = \frac{w_0+1}{w_0+3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Alors $w_1 < w_0$ donc la relation est vraie au premier rang.

Supposons que $w_n \leqslant w_{n-1}$ et montrons que $w_{n+1} \leqslant w_n$.

$$w_{n+1} - w_n = \frac{w_n + 1}{w_n + 3} - \frac{w_{n-1} + 1}{w_{n-1} + 3} = \frac{(w_n + 1)(w_{n-1} + 3) - (w_{n-1} + 1)(w_n + 3)}{(w_n + 3)(w_{n-1} + 3)}$$

$$w_{n+1} - w_n = \frac{w_n w_{n-1} + 3w_n + w_{n-1} + 3 - w_n w_{n-1} - 3w_{n-1} - w_n - 3}{(w_n + 3)(w_{n-1} + 3)} = \frac{2(w_n - w_{n-1})}{(w_n + 3)(w_{n-1} + 3)}$$

Or $w_n \leqslant w_{n-1} \implies w_n - w_{n-1} \leqslant 0$ et $(w_n + 3)(w_{n-1} + 3) > 0$ donc :

$$w_{n+1} - w_n = \frac{2(w_n - w_{n-1})}{(w_n + 3)(w_{n-1} + 3)} \leqslant 0$$

Ainsi $\underline{(w_n) \text{ est décroissante pour tout entier naturel } n}$.

EXERCICE 14

1) (i) Pour $n = 0$, on a : $u_1 = \sqrt{3u_0 + 4} = \sqrt{3 \times 0 + 4} = \sqrt{4} = 2$

(ii) Pour $n = 1$, on a : $u_2 = \sqrt{3u_1 + 4} = \sqrt{3 \times 2 + 4} = \sqrt{10}$

(iii) Pour $n = 2$, on a : $u_3 = \sqrt{3u_2 + 4} = \sqrt{3\sqrt{10} + 4}$

Ainsi $\underline{u_1 = 2,\ u_2 = 3,16,\ u_3 = 3,67}$

Montrons par récurrence que la suite est positive.

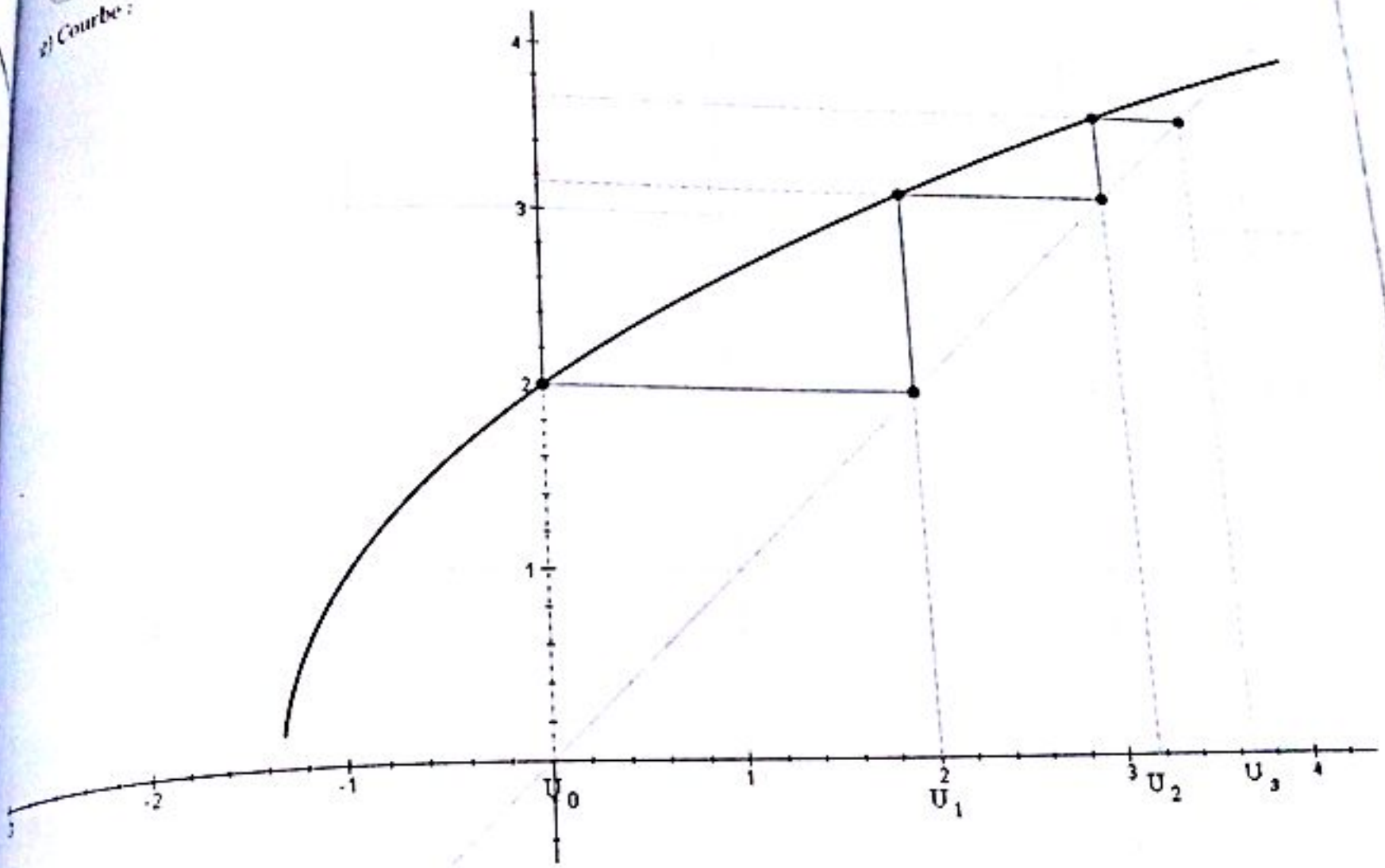
Pour $n = 0$, $u_0 = 0 \geqslant 0$ donc le résultat est vrai au premier rang.

Supposons que (u_n) est positive, c'est-à-dire $u_n \geqslant 0$ et montrons que $u_{n+1} \geqslant 0$.

En effet, $u_n \geqslant 0 \implies 3u_n \geqslant 3 \times 0 = 0 \implies 3u_n + 4 \geqslant 4 \implies \sqrt{3u_n + 4} \geqslant \sqrt{4} = 2 \geqslant 0$

Ainsi : $u_{n+1} \geqslant 0$ et par conséquent $\underline{(u_n) \text{ est positive pour tout entier naturel}}$.

2) Courbe :



3) Montrons par récurrence que (u_n) est majorée par 4.

Pour $n = 0$, $u_0 = 0 \leqslant 4$ donc le résultat est vrai au premier rang.

Supposons que (u_n) est majorée par 4, c'est-à-dire $u_n \leqslant 4$ et montrons que $u_{n+1} \leqslant 4$.

En effet, $u_n \leqslant 4 \implies 3u_n \leqslant 3 \times 4 = 12 \implies 3u_n + 4 \leqslant 12 + 4 = 16 \implies \sqrt{3u_n + 4} \leqslant \sqrt{16} = 4$

Ainsi : $u_{n+1} \leqslant 4$ et par conséquent (u_n) est majorée par 4 pour tout entier naturel.

4) En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$4 - u_{n+1} = 4 - \sqrt{3u_n + 4} = \frac{(4 - \sqrt{3u_n + 4})(4 + \sqrt{3u_n + 4})}{4 + \sqrt{3u_n + 4}} = \frac{16 - (3u_n + 4)}{4 + \sqrt{3u_n + 4}} = \frac{16 - 3u_n - 4}{4 + \sqrt{3u_n + 4}}$$

$$= \frac{12 - 3u_n}{4 + \sqrt{3u_n + 4}} = \frac{3(4 - u_n)}{4 + \sqrt{3u_n + 4}}$$

Majorons le quotient $\dfrac{3}{4 + \sqrt{3u_n + 4}}$. Pour ce faire, il suffit de minorer le dénominateur. Comme (u_n) est majorée par 4 et est minorée par 0 donc : $0 \leqslant u_n \leqslant 4$ ainsi minorer le dénominateur revient à remplacer u_n par 0 donc :

1) On a : $u_{n+1} - u_n = [15 - (n+1)] - [15 - n] = 15 - n - 1 - 15 + n = -1 \in \mathbb{R}$

Donc u_n est une suite arithmétique de raison -1 et de premier terme $u_0 = 15 - 0 = 15$.

Expression de u_n en fonction de n : $u_n = u_0 + nr = 15 - n$. Ainsi $\underline{u_n = 15 - n}$

2) On a : $u_{n+1} - u_n = [4 - 3n] - [4 - 3(n-1)] = 4 - 3n - 4 + 3n - 3 = -3 \in \mathbb{R}$

Donc u_n est une suite arithmétique de raison -3 et de premier terme $u_0 = 7$.

Expression de u_n en fonction de n : $u_n = 4 - 3(n-1)$. Ainsi $\underline{u_n = 7 - 3n}$

3) On a : $5u_{n+1} = 5u_n - 2 \implies 5(u_{n+1} - u_n) = -2 \implies u_{n+1} - u_n = -\frac{2}{5} \in \mathbb{R}$. Donc u_n est une suite arithmétique de raison $r = -\frac{2}{5}$. Déterminons le premier terme de u_n :

On a : $u_n = u_p + (n-p)r = u_p - \frac{2}{5}(n-p)\ \forall\,(n,p) \in \mathbb{N}$.

Pour $p = 5$ et $n = 0$, on obtient : $u_0 = u_5 - \frac{2}{5}(0-5) = -1 + 2 = 1$ donc $u_0 = 1$.

Expression de u_n en fonction de n : $u_n = u_0 + nr = 1 - \frac{2}{5}n$. Ainsi $\underline{u_n = 1 - \frac{2n}{5}}$

EXERCICE 17

1) En utilisant la formule de récurrence : $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$, on trouve successivement les termes de la suite : $u_0 = 1$, $u_1 = 4$, $u_2 = 7$, $u_3 = 10$, $u_4 = 13$ et $u_5 = 16$.

Ainsi $\underline{u_0 = 1,\ u_1 = 4,\ u_2 = 7,\ u_3 = 10,\ u_4 = 13,\ u_5 = 16}$

2) En effet,

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n \implies u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n = u_n - u_{n-1} = \cdots = u_1 - u_0 = 4 - 1 = 3$$

Donc (u_n) est une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 1$.

Ainsi : $\underline{u_n = nr + u_0 = 3n + 1}$

3) On a : $u_{100} = 3 \times 100 + 1 = 301$ et $u_{10} = 3 \times 10 + 1 = 31$ donc $\underline{u_{100} = 301,\ u_{10} = 31}$

$$S = u_{10} + \cdots + u_{100} = \frac{100 - 10 + 1}{2}(u_{10} + u_{100}) = 15106 \implies \underline{S = 15106}$$

4) On a :

$$S_n = u_0 + \cdots + u_n = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n) = \frac{1}{2}(n+1)(3n+2) \implies \underline{S_n = \frac{(n+1)(3n+2)}{2}}$$

Soit à résoudre : $S_n \geqslant 50$. Nous avons :

$$S_n = \frac{1}{2}(n+1)(3n+2) = \frac{3n^2 + 5n + 2}{2} \geqslant 50 \implies 3n^2 + 5n - 98 \geqslant 0$$

On a donc un trinôme du second degré à résoudre dans N :

$$\Delta = 1201 \quad \Rightarrow \quad n_1 = E\left(\frac{-5-\sqrt{1201}}{6}\right) = -6 < 0 \quad \text{et} \quad n_2 = E\left(\frac{-5+\sqrt{1201}}{6}\right) = 4 > 0$$

Donc : $n = n_2 + 1 = 5$ donc $\underline{n \geqslant 5}$

EXERCICE 20

a) On a : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+4}}{2^{n+3}} = 2$ donc (u_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 2^{0+3} = 8$

b) Remarquons d'abord que : $u_n = \frac{3^n}{24^n} = \left(\frac{3}{24}\right)^n = \left(\frac{1}{8}\right)^n = \frac{1}{8^n}$ donc : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{8^{n+1}}}{\frac{1}{8^n}} = \frac{1}{8^{n+1}} \times 8^n = \frac{1}{8}$

Donc (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{8}$ et de premier terme $u_0 = \frac{1}{8^0} = 1$.

c) On a : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4^n}{4^{n-1}} = 4$ donc (u_n) est une suite géométrique de raison 4 et de premier terme $u_0 = 4^{0-1} = \frac{1}{4}$

d) Remarquons d'abord que : $u_n = \frac{2^{n+2}}{5^n} = 4 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n$. On a : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{4 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n} = \frac{2}{5}$ donc (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$ et de premier terme $u_0 = 4 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^0 = 4$.

EXERCICE 21

On suppose que $0 < x_1 < x_2 < x_3$.

<u>NB</u> : On pouvait considérer le cas $x_1 > x_2 > x_3$

On pose $P(x) = x^3 - 14x^2 + 56x - 64$. Si x_1, x_2 et x_3 sont solutions de l'équation $P(x) = 0$,

Alors : $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)x - x_1x_2x_3$

Par identification : (I) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 14 & (1) \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 56 & (2) \\ x_1x_2x_3 = 64 & (3) \end{cases}$

Or, x_1, x_2 et x_3 sont en progression géométrique, donc : $x_1x_3 = x_2^2$.

Donc (3) donne : $x_2^3 = 64 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 4$. Ainsi en considérant $x_2 = 4$, le système (I) devient :

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 10 \\ x_1x_3 = 16 \end{cases}$$

Alors x_1 et x_3 sont solutions de l'équation : $X^2 - 10X + 16 = 0$ qui admet comme solution $x_1 = 2$ et $x_3 = 8$.

Ainsi $\underline{S = \{x_1 = 2,\ x_2 = 4,\ x_3 = 8\}}$

EXERCICE 22

Soit $u_n = 192$ le terme et $u_1 = 3$ celui du premier terme.

On a : $u_n = q^{n-1}u_1 \quad \Rightarrow \quad q^{n-1} = \frac{u_n}{u_1} = \frac{192}{3} = 64 \quad \Rightarrow \quad q^n = 64q$.

La somme des termes est alors :

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_1 \times \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{3(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{1(0 + q - 1)}{q - 1} = \frac{1 + q - 1}{q - 1}$$

Donc $\frac{1+q-1}{q-1} = 381 \Rightarrow 381q - 381 = 1 + q - 1 \Rightarrow 380q = 380 \Rightarrow q = 2$

La relation $q^n = 2^n$ implique $2^n = 128 \Rightarrow n \ln 2 = \ln 128 \Rightarrow n = \frac{\ln 128}{\ln 2} = 7$

Donc $\underline{n = 7 \quad q = 2}$

EXERCICE 13

a) On a

$$S_1 = 1 + 10 + 20 + 30 + \cdots + 10n = 1 + 10(1 + 2 + 3 + \cdots + n) = 1 + 10\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 10\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$= 5n(n+1) + 1 = 5n^2 + 5n + 1$$

Donc $\underline{S_1 = 5n^2 + 5n + 1}$

b) On a

$$S_2 = 1 + 10 + 100 + 1\,000 + \cdots + 10^n = \sum_{k=0}^{n} 10^k = \frac{1 - 10^{n+1}}{1 - 10} = \frac{10^{n+1} - 1}{9}$$

Donc $\underline{S_2 = \frac{10^{n+1} - 1}{9}}$

c) On a

$$S_3 = 1 - 10 + 100 - 1\,000 + \cdots + (-1)^n 10^n = \sum_{k=0}^{n} (-10)^k = \frac{1 - (-10)^{n+1}}{1 + 10} = \frac{1 - (-10)^{n+1}}{11}$$

Donc $\underline{S_3 = \frac{1 - (-10)^{n+1}}{11}}$

d) On a

$$S_4(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right)' = \left(\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}\right)'$$

$$= \frac{-(n+1)x^n(1-x) + (1 - x^{n+1})}{(1-x)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$$

Donc $\underline{S_4(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}}$

EXERCICE 14

On a : $u_{n+1} = 2 \cdot 3^n = 2 \cdot 3^{n-1} \times 3 = 3(2 \cdot 3^{n-1}) = 3u_n$ donc (u_n) est une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 2 \cdot 3^{0-1} = \frac{2}{3}$.

EXERCICE 25

1) On a :

$$u_0 = 1 \quad ; \quad u_1 = \frac{1}{2}(u_0 - 1) = 0 \quad ; \quad u_2 = \frac{1}{2}(u_1 - 1) = -\frac{1}{2} \quad ; \quad u_3 = \frac{1}{2}(u_2 - 1) = -\frac{3}{4}$$

Ainsi : $\underline{u_0 = 1 \ ; \ u_1 = 0 \ ; \ u_2 = -\frac{1}{2} \ ; \ u_3 = -\frac{3}{4}}$

2) On pose : $f(x) = \frac{1}{2}(x - 1)$.

Pour étudier la convergence de la suite (u_n), on résout : $f(x) = x$.

$$f(x) = x \iff \frac{1}{2}(x-1) = x \iff x = -1 \iff \underline{\lim_{n \to +\infty} u_n = -1}$$

3) a) On a :

$$v_n = 1 + u_n \implies v_{n+1} = 1 + u_{n+1} = 1 + \frac{1}{2}(u_n - 1) = \frac{1}{2}(u_n + 1) = \frac{1}{2}v_n \implies \underline{v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = 1 + u_0 = 2$.

b) On a :

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n \implies v_n = \frac{1}{2^n}v_0 = \frac{1}{2^{n-1}} \quad ; \quad \underline{v_n = \frac{1}{2^{n-1}}}$$

Or, $v_n = 1 + u_n \implies \underline{u_n = v_n - 1 = -1 + \frac{1}{2^{n-1}}}$

EXERCICE 26

1) Soit $f(x) = 1 + \frac{2}{5}x$ donc $f(u_n) = 1 + \frac{2}{5}u_n = u_{n+1}$.

$$f(x) = x \iff 1 + \frac{2}{5}x = x \iff x = \frac{5}{3} \iff \lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = \frac{5}{3}$$

Ainsi <u>si (u_n) est convergente alors sa limite est $\frac{5}{3}$</u>

2) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{2}{5}$.

$$v_n = u_n - \frac{5}{3} \implies v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{5}u_n - \frac{5}{3} = \frac{2}{5}\left(u_n - \frac{5}{3}\right) = \frac{2}{5}v_n \text{ donc } v_{n+1} = \frac{2}{5}v_n$$

C'est dire que <u>(v_n) est géométrique de raison $\frac{2}{5}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - \frac{5}{3} = 2 - \frac{5}{3} = \frac{1}{3}$</u>

Thierno Korka DIALLO – Directeur Technique de SENESAC
Ingénieur électromécanicien, diplômé de l'IT... de Polytechnique de Thiès

Expression de v_n puis de u_n en fonction de n

On a : $v_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n v_0 = \left(\frac{2}{5}\right)^n \times \frac{1}{3}$. Ainsi $v_n = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n$

Or,

$$v_n = u_n - \frac{5}{3} \quad \Rightarrow \quad u_n = v_n + \frac{5}{3} = \frac{5}{3} + \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

Ainsi : $u_n = \frac{5}{3} + \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n$

3) Conclure quant à la convergence de (u_n)

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{5}{3} + \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n\right] = \frac{5}{3} + \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n\right) = \frac{5}{3} + 0 = \frac{5}{3}$$

Ainsi : $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{5}{3}$

EXERCICE 27

1) a) Formule générale : $v_n = q^n v_0 = 3 \times 2^n$. Ainsi $v_n = 3 \times 2^n$

b) S_n est la somme des $n + 1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison 2. Donc :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = 3 \times \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = 3(2^{n+1} - 1) \quad \Rightarrow \quad S_n = 3(2^{n+1} - 1)$$

2) a) Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$. On a : $u_n = u_p \times q^{n-p}$ (1) où q est la raison de la suite.

Ainsi pour $n = 8$ et $p = 3$, on a : $u_8 = u_3 \times q^5 \Rightarrow q = \left(\frac{u_8}{u_3}\right)^{\frac{1}{5}} = \left(\frac{-324}{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{5}} = -3$.

De même, pour $n = 0$ et $p = 3$, on a d'après (1) : $u_0 = u_3 \times q^{-3} = \frac{4}{3} \times (-3)^{-3} = -\frac{4}{81}$.

Ainsi $u_0 = -\frac{4}{81}$, $q = -3$

b) On a : $u_n = u_0 \times q^n = -\frac{4}{81} \times (-3)^n \Rightarrow -\frac{4\times3^n}{81} \leqslant u_n \leqslant \frac{4\times3^n}{81}$. La suite (u_n) "oscille" entre des valeurs positives et négatives. Donc (u_n) n'est ni croissante, ni décroissante.

EXERCICE 28

1) Il existe un réel q tel que $v_{n+1} = q v_n$

$$\begin{aligned} v_{n+1} = u_{n+1} + a(n+1)^2 + b(n+1) + c &= 2u_n + 2n^2 - n + an^2 + 2an + a + bn + b + c \\ &= 2u_n + (2+a)n^2 + (2a+b-1)n + a + b + c \\ &= 2\left[u_n + \frac{2+a}{2}n^2 + \frac{2a+b-1}{2}n + \frac{a+b+c}{2}\right] \end{aligned}$$

Ainsi $q = 2$ et $v_n = u_n + \frac{2+a}{2}n^2 + \frac{2a+b-1}{2}n + \frac{a+b+c}{2}$. Par ailleurs, $v_n = u_n + an^2 + bn + c$ et par identification : $\begin{cases} \frac{2+a}{2} = a \\ \frac{2a+b-1}{2} = b \\ \frac{a+b+c}{2} = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2a - 1 = 3 \\ c = a + b = 5 \end{cases} \Rightarrow \underline{a = 2, b = 3, c = 5}$

2) On a : $v_n = u_n + 2n^2 + 3n + 5 \Rightarrow v_0 = u_0 + 5 = 2 + 5 = 7 \Rightarrow \underline{v_n = 7 \times 2^n}$

3) On a : $v_n = u_n + 2n^2 + 3n + 5 = 7 \times 2^n \Rightarrow \underline{u_n = 7 \times 2^n - 2n^2 - 3n - 5}$

EXERCICE 19

1) On a :

$$u_1 = \frac{1}{3}u_0 + 0 - 2 = -\frac{5}{3} \quad ; \quad u_2 = \frac{1}{3}u_1 + 1 - 2 = \frac{1}{3} \times -\frac{5}{3} + 1 - 2 = -\frac{14}{9}$$

$$u_3 = \frac{1}{3}u_2 + 2 - 2 = \frac{1}{3} \times -\frac{14}{9} = -\frac{14}{27}$$

Ainsi : $\underline{u_1 = -\frac{5}{3} \ ; \ u_2 = -\frac{14}{9} \ ; \ u_3 = -\frac{14}{27}}$

2) a) On a :

Pour $n = 4$, on a : $u_4 = \frac{1}{3}u_3 + 3 - 2 = \frac{67}{81} \geqslant 0$.

Supposons que $u_n \geqslant 0$ et montrons que $u_{n+1} \geqslant 0$.

Dire que $u_n \geqslant 0$ revient à dire que $\frac{1}{3}u_n + n - 2 \geqslant \frac{1}{3} \times 0 + n - 2 = n - 2 \geqslant 2 > 0$

Donc $\frac{1}{3}u_n + n - 2 \geqslant 0$ autrement dit $u_{n+1} \geqslant 0$.

Ainsi par principe de récurrence, on conclut que $\underline{u_n \geqslant 0}$ pour tout entier naturel n.

b) Comme $u_n \geqslant 0$ pour tout entier naturel n on peut écrire $u_{n-1} \geqslant 0$.

Ou encore $\frac{1}{3}u_{n-1} + (n-1) - 2 \geqslant \frac{1}{3} \times 0 + (n-1) - 2 = n - 3$

Comme $\frac{1}{3}u_{n-1} + (n-1) - 2 = u_n$ donc l'inégalité précédente équivaut à $\underline{u_n \geqslant n - 3, \ \forall n \geqslant 5}$

c) On a $\lim_{n \to +\infty} n - 3 = +\infty$ donc $\underline{\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$

3) On a :

$$v_{n+1} = -2u_{n+1} + 3(n+1) - \frac{21}{2} = -2\left(\frac{1}{3}u_n + n - 2\right) + 3n + 3 - \frac{21}{2} = -\frac{2}{3}u_n + n - \frac{7}{2}$$
$$= \frac{1}{3}\left(-u_n + 3n - \frac{21}{2}\right) = \frac{1}{3}v_n$$

Ainsi (v_n) est suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = \frac{1}{3}u_0 + 0 - \frac{21}{2} = -\frac{25}{2}$

b) On a : $v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n v_0 = -\frac{25}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$ et donc $-\frac{25}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$ et par conséquent $u_n = \frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3n}{2} - \frac{21}{4}$

c) On a

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^k + \sum_{k=0}^{n} \frac{3k}{2} + \sum_{k=0}^{n} -\frac{21}{4} = \frac{25}{4}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k + \frac{3}{2}\sum_{k=0}^{n} k - \sum_{k=0}^{n}\frac{21}{4}$$

$$= \frac{25}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^0 \times \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} + \frac{3}{2} \times \frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{21}{4}(n+1)$$

$$= \frac{75}{8}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{3(n+1)(n+2)}{4} - \frac{21(n+1)}{4}$$

$$S_n = \frac{75}{8}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{3(n+1)(n+2)}{4} - \frac{21(n+1)}{4}$$

EXERCICE 30

1) Calculons V_0, V_1 et V_2

$u_1 = \frac{1}{3}u_0 - 0 - \frac{4}{3} = -\frac{11}{12}$; $u_2 = \frac{1}{3}u_1 - 1 - \frac{4}{3} = -\frac{95}{36}$ donc :

$v_0 = u_0 + \frac{3}{2}\times 0 - \frac{1}{4} = 1$ $\quad v_1 = u_1 + \frac{3}{2}\times 1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$ $\quad v_2 = u_2 + \frac{3}{2}\times 2 - \frac{1}{4} = \frac{1}{9}$

Ainsi : $v_0 = 1,\ v_1 = \frac{1}{3},\ v_2 = \frac{1}{9}$

2) Montrons que (V_n) est une suite géométrique dont on exprimera le terme général V_n en fonction de n

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{3}{2}(n+1) - \frac{1}{4} = \frac{1}{3}u_n - n - \frac{4}{3} + \frac{3}{2}n + \frac{3}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3}\left(u_n + \frac{3}{2}n - \frac{1}{4}\right)$$

Ainsi : $v_{n+1} = \frac{1}{3}\left(u_n + \frac{3}{2}n - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3}v_n$ donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = 1$

Ainsi : $v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n v_0 = \frac{1}{3^n}$

3) Calculons $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} V_k$ et $S'_n = \sum_{K=0}^{n-1} U_k$.

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1} = v_0 \times \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) \Rightarrow S_n = \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k = \sum_{k=0}^{n-1}\left(u_k + \frac{3}{2}k - \frac{1}{4}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} u_k + \frac{3}{2}\sum_{k=0}^{n-1} k - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{4} = S'_n + \frac{3}{2}\frac{n(n-1)}{2} - \frac{n-1}{4}$$

On tire :

$$S'(n) = \frac{n-1}{4} - \frac{3n(n-1)}{4} + \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) \Rightarrow \underline{S'_n = \frac{n-1}{4} - \frac{3n(n-1)}{4} + \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}$$

4) On a :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = \frac{3}{2} \Rightarrow \underline{\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{3}{2}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} S'_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n-1}{4} - \frac{3n(n-1)}{4} + \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)\right) = -\infty \Rightarrow \underline{\lim_{n\to+\infty} S'_n = -\infty}$$

EXERCICE 34

1) On a :

$$u_1 = \sqrt{2+u_0} = \sqrt{2+2\cos\theta} = \sqrt{2(1+\cos\theta)} = \sqrt{2\left(2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)} = \sqrt{4\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \left|2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|$$
$$= 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$u_2 = \sqrt{2+u_1} = \sqrt{2+2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \sqrt{2\left(1+\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)} = \sqrt{2\left(2\cos^2\left(\frac{\theta}{4}\right)\right)} = \sqrt{4\cos^2\left(\frac{\theta}{4}\right)} = \left|2\cos\left(\frac{\theta}{4}\right)\right|$$
$$= 2\cos\left(\frac{\theta}{4}\right)$$

Conclusion : $\underline{u_1 = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right),\ u_2 = 2\cos\left(\frac{\theta}{4}\right)}$

Remarque : $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \leqslant \frac{\theta}{2} \leqslant \frac{\pi}{4}$ et donc $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \geqslant 0$; de même, $\cos\left(\frac{\theta}{4}\right) \geqslant 0$.

2) Au premier rang, on a : $U_0 = 2\cos\theta$ par hypothèse et $U_0 = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^0}\right) = 2\cos\theta$ donc la propriété est vérifiée au premier rang.

Supposons que $U_n = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$ et vérifions que $U_{n+1} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)$. En effet,

$$U_{n+1} = \sqrt{2+U_n} = \sqrt{2+2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)} = \sqrt{2\left(1+\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\right)} = \sqrt{2\left(2\cos^2\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)\right)} = \sqrt{4\cos^2\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)}$$
$$= \left|2\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)\right| = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)$$

Donc la propriété $\underline{U_n = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}$ est vérifiée pour tout entier naturel n.

3) a) On a : $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{\theta}{2^{n+1}}}{\frac{\theta}{2^n}} = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{\theta}{2^n}}{\frac{\theta}{2^n}} = \frac{1}{2}$ donc v_n est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = \frac{0}{2^0} = \theta$.

b) On a : $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \leqslant \frac{\theta}{2^n} \leqslant \frac{\pi}{2^{n+1}}$ et comme $\lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{2^{n+1}} = 0$, on conclut, d'après le théorème des gendarmes que $\lim_{n\to+\infty}\frac{\theta}{2^n} = 0$ et par conséquent, $\underline{(v_n) \text{ converge vers } 0}$.

c) La suite (w_n) converge vers 0, (u_n) converge vers 2

EXERCICE 35

1) a) On a :

$$w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + 4v_n}{5} - \frac{2u_n + 3v_n}{5} = \frac{u_n + 4v_n - 2u_n - 3v_n}{5} = \frac{v_n - u_n}{5} = \frac{w_n}{5}$$

Donc (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme $w_1 = v_1 - u_1 = 5$.

b) On a : $w_n = q^{n-1}w_1 = \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \times 5 = \frac{1}{5^{n-2}}$. Donc $w_n = \frac{1}{5^{n-2}}$ et $\lim_{n\to+\infty} w_n = 0$

2) a) On a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n + 3v_n}{5} - u_n = \frac{2u_n + 3v_n - 5u_n}{5} = \frac{3v_n - 3u_n}{5} = \frac{3(v_n - u_n)}{5} = \frac{3w_n}{5}$$

Comme $w_n = \frac{1}{5^{n-2}} \phi\ 0$ donc $u_{n+1} - u_n = \frac{3w_n}{5} \phi\ 0$ donc la suite (u_n) est strictement croissante.

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 4v_n}{5} - v_n = \frac{u_n + 4v_n - 5v_n}{5} = \frac{u_n - v_n}{5} = -\frac{w_n}{5} < 0$$

Donc (v_n) est strictement décroissante.

b) (u_n) est strictement croissante donc $u_n \geqslant u_{n-1} \geqslant u_{n-2} \geqslant \cdots \geqslant u_1$

(v_n) est strictement décroissante donc $v_1 \geqslant v_2 \geqslant v_3 \geqslant \cdots \geqslant v_n$

Comme $u_n \leqslant v_n$ donc :

$$v_1 \geqslant v_2 \geqslant v_3 \geqslant \cdots \geqslant v_n \geqslant u_n \geqslant u_{n-1} \geqslant u_{n-2} \geqslant \cdots \geqslant u_1$$

Ainsi : $v_1 \geqslant v_n \geqslant u_n \geqslant u_1$ et donc $v_n \geqslant u_1 = 2$ et $u_n \leqslant v_1 = 5$

On conclut que (u_n) est majorée par 5 et (v_n) est minorée 2.

c) (u_n) est strictement croissante et est majorée par 5 donc (u_n) est convergente.

(v_n) est strictement décroissante et est minorée 2 donc (v_n) est convergente.

Conclusion : Les suites (u_n) et (v_n) sont dites *adjacentes* et convergent vers la même limite.

3) On a :

$$t_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{3} + v_{n+1} = \frac{\left(\frac{2u_n + 3v_n}{5}\right)}{3} + \frac{u_n + 4v_n}{5} = \frac{5u_n + 15v_n}{15} = \frac{u_n}{3} + w_n = t_n$$

Donc (t_n) est une suite constante car $t_{n+1} = t_n$. Ainsi $t_{n+1} = t_1 = \frac{1}{3}u_1 + v_1 = \frac{1}{3} \times 2 + 7 = \frac{23}{3}$.

Comme $t_n = \frac{23}{3} = \frac{1}{3}u_n + v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{3}u_n + \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

Ainsi : $\frac{23}{3} = \frac{1}{3}\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{3}\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \frac{4}{3}\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{23}{4}$

EXERCICE 36

1) On a :

$$w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \left(\frac{3u_n}{4} + \frac{v_n}{4}\right) - \left(\frac{3v_n}{4} + \frac{u_n}{4}\right) = \frac{u_n - v_n}{2} = \frac{w_n}{2}$$

Donc (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $w_0 = u_0 - v_0 = 1 - 3 = -2$.

Ainsi : $w_n = w_0 \times q^n = -2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = -\frac{1}{2^{n-1}}$.

Montrons que (w_n) est convergente. En effet, $w_n = -\frac{1}{2^{n-1}} < 0$ donc (w_n) est majorée.

De plus, $\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{1}{2} < 1$ donc (w_n) est décroissante. On a :

$$w_n = \frac{1}{2^n} \times w_0 = \frac{1}{2^{n-1}} \times (-2) = -\frac{1}{2^n} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} w_n = 0$$

Or $w_n = -\frac{1}{2^n} = u_n - v_n \quad \Rightarrow \quad u_n - v_n \leqslant 0 \quad \Rightarrow \quad u_n \leqslant v_n$

2) Etudions les sens de variation de U_n et V_n

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3}{4} + \frac{v_n}{4u_n} \text{ or, } u_n \le v_n \text{ donc } \frac{v_n}{4u_n} \ge \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{3}{4} + \frac{v_n}{4u_n} \ge \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \ge 1$$

Donc la suite (u_n) est croissante.

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{3}{4} + \frac{u_n}{4v_n} \text{ or, } u_n \le v_n \text{ donc } \frac{u_n}{4v_n} \le \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{3}{4} + \frac{u_n}{4v_n} \le \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} \le 1$$

Donc la suite (v_n) est décroissante.

3) Montrons que (U_n) est majorée et que (V_n) est minorée

(i) $u_n \leqslant v_n$ pour tout entier naturel,

(ii) (v_n) décroissante.

(i) et (ii) impliquent $u_n \leqslant v_n \leqslant v_{n-1} \leqslant \cdots \leqslant v_1 \leqslant v_0 = 3$ donc $u_n \leqslant 3$

(j) $u_n \leqslant v_n$ pour tout entier naturel,

(U_n) croissante

(1) et (3) impliquent $u_0 \leqslant \cdots \leqslant u_{n-1} \leqslant u_n \leqslant v_n$ donc $\underline{v_n \geqslant 1}$

4) Déduisons-en que (U_n) et (V_n) convergent vers une même limite !

(u_n) croissante et majorée donc converge et (v_n) décroissante et minorée donc converge.

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = \lim_{n\to+\infty} w_{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{2^{n+1}}\right) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0 \Rightarrow \underline{\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n}$$

5) Montrons que (D_n) est constante puis en déduisons-en !

En effet,

$$D_{n+1} - D_n = (u_{n+1} - u_n) - (v_{n+1} - v_n) = \frac{3}{4}u_n - u_n + \frac{1}{4}u_n + \frac{3}{4}v_n - v_n + \frac{1}{4}v_n = 0 \Rightarrow \underline{D_{n+1} = D_n}$$

Donc (D_n) est une suite constante pour tout entier naturel n.

Ainsi $D_{n+1} = D_n = \cdots = D_0 = 4$ donc :

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = \lim_{n\to+\infty} 2u_n = 4 \Rightarrow \underline{\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n = 2}$$

EXERCICE 38

1) Raisonnons par récurrence pour montrer que tout élément u_n est dans l'intervalle $[u_0 ; u_1]$.

Pour $n = 0$ et $n = 1$, la propriété est vraie.

u_2 étant le milieu de $[u_0 ; u_1]$ il se trouve bien dans l'intervalle $[u_0 ; u_1]$.

Supposons qu'il existe un entier $n \geqslant 2$ tel que $u_0, u_1, \cdots, u_n$ se trouvent tous dans l'intervalle $[u_0 ; u_1]$; montrons qu'alors cette propriété est vraie au rang $n + 1$, c'est-à-dire que $u_0, u_1, \cdots, u_n, u_{n+1}$ se trouvent tous dans l'intervalle $[u_0 ; u_1]$.

Compte tenu de l'hypothèse de récurrence, il s'agit de montrer que u_{n+1} est dans l'intervalle $[u_0 ; u_1]$; cette propriété est vraie car u_{n+1} est le milieu de $[u_{n-1} ; u_n]$ ou de $[u_n ; u_{n-1}]$ et u_n ainsi que u_{n-1} sont dans $[u_0 ; u_1]$.

Remarque : Nous avons utilisé ce que l'on appelle le principe de récurrence forte.

La conclusion de cette démonstration est que la suite (u_n) est bornée.

2) Soit $n \geqslant 2$.

$$u_n + \frac{1}{2}u_{n-1} = \frac{u_{n-1} + u_{n-2}}{2} + \frac{u_{n-1}}{2} = u_{n-1} + \frac{1}{2}u_{n-2} = w_n$$

La suite (w_n) est donc constante, elle vaut donc son premier terme :

$$\underline{\forall\, n \geqslant 2,\ u_n + \frac{1}{2}u_{n-1} = u_1 + \frac{1}{2}u_0}$$

3) En effet,

$$\forall n \geqslant 2, \quad u_n + \frac{1}{2}u_{n-1} = u_{n-1} + \frac{1}{2}u_{n-2} \iff u_n - u_{n-1} = -\frac{1}{2}(u_{n-1} - u_{n-2})$$

La suite $(v_n) = (u_n - u_{n-1})$ est géométrique de premier terme $v_1 = u_1 - u_0$ et de raison $-\frac{1}{2}$.

Donc $\forall n \geqslant 1, \ v_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} v_1$.

La somme $v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ vaut $u_n - u_0$ ce qui permet d'écrire :

$$u_n = u_0 + v_1 \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{-1}{2}} = u_0 + \frac{2}{3}v_1\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

Puisque $\left|-\frac{1}{2}\right| \pi 1$, on a $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) = 1$ et donc :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = u_0 + \frac{2}{3}v_1 = u_0 + \frac{2}{3}(u_1 - u_0) = \frac{2}{3}u_1 + \frac{1}{3}u_0 \implies \underline{\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{2}{3}u_1 + \frac{1}{3}u_0}$$

EXERCICE 39

1) a) Etude de la fonction f

Domaine de définition : $]0\,;\,+\infty[$

Limites aux bornes du domaine de définition :

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) = +\infty \ ; \ \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) = +\infty$$

Dérivée et sens de variation :

La fonction f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et pour tout réel $x \in]0\,;\,+\infty[$, on a : $f'(x) = \frac{x^2-2}{2x^2}$.

Ainsi f est du signe de $x^2 - 2$. On a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$-\infty$
$x^2 - 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

N'oublions pas que f est définie sur $]0\,;\,+\infty[$. Ainsi :

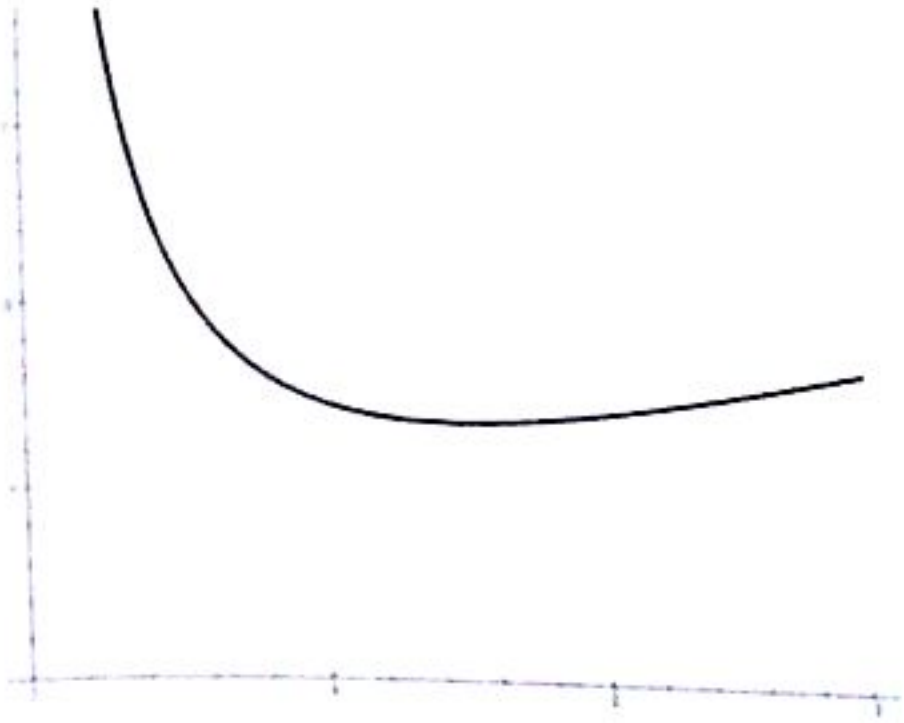
Sur $]\sqrt{2}\,;\,+\infty[$, $x^2 - 2 > 0$ donc $f'(x) > 0$ et par conséquent f est croissante sur $]\sqrt{2}\,;\,+\infty[$.

Sur $]0\,;\,\sqrt{2}[$, $x^2 - 2 < 0$ donc $f'(x) < 0$ et par conséquent f est décroissante sur $]0\,;\,\sqrt{2}[$.

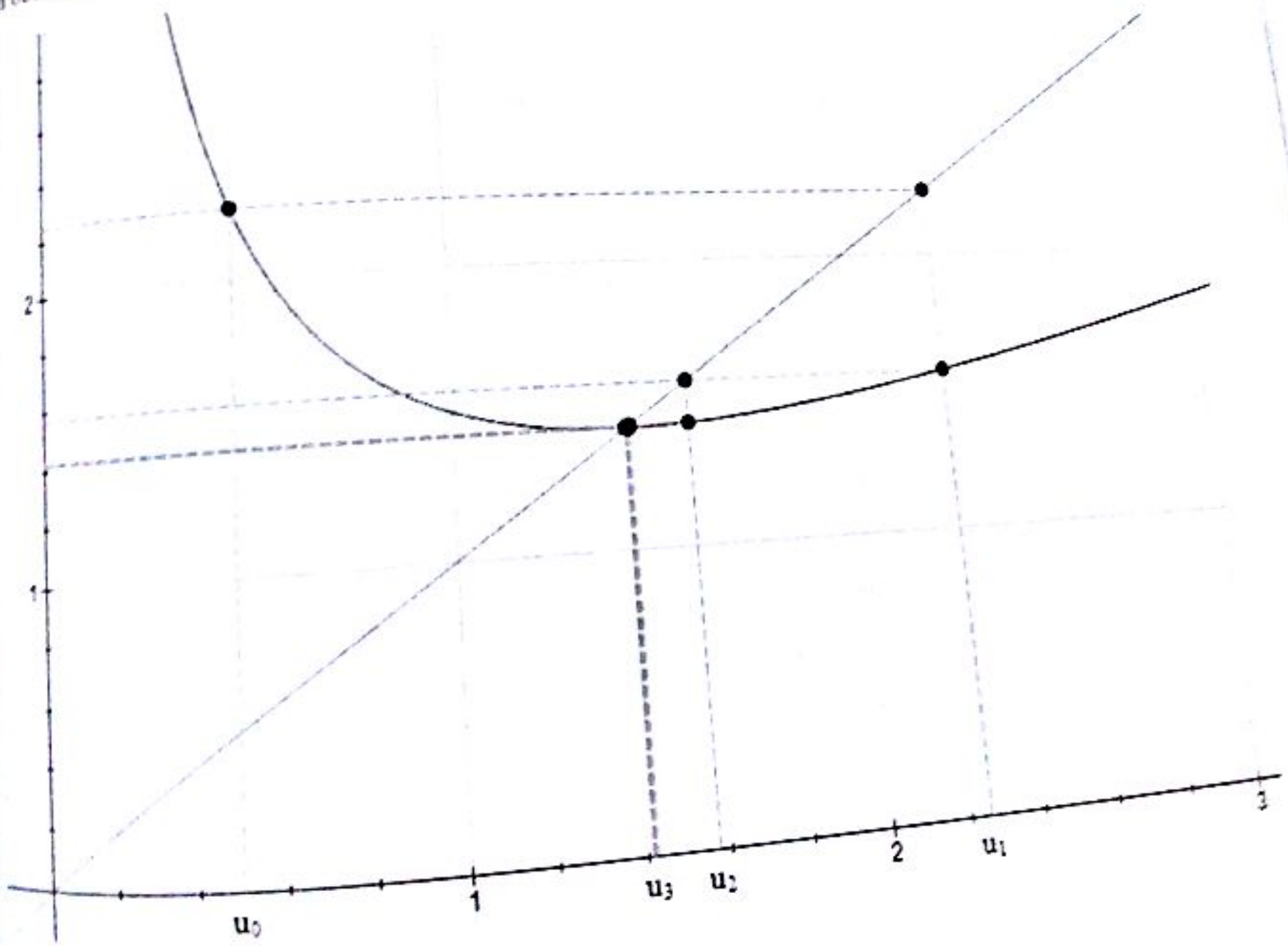
On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

On obtient la courbe suivante :



b) On obtient :



2 a) On procède par récurrence :

On a : $u_1 = \frac{1}{2}\left(u_0 + \frac{2}{u_0}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\frac{1}{2}}\right) = \frac{9}{4} \geqslant \sqrt{2}.$

Supposons que $u_n \geqslant \sqrt{2}$ et montrons que $u_{n+1} \geqslant \sqrt{2}$.

En effet,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) \geqslant \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \sqrt{2}) = \sqrt{2}$$

Donc $u_{n+1} \geqslant \sqrt{2}$ ce qui achève la récurrence. Ainsi pour tout entier naturel non nul n, $u_n \geqslant \sqrt{2}$

b) On pose, pour tout $x \geqslant \sqrt{2}$, $g(x) = x - f(x)$.

On a : $g'(x) = 1 - f'(x) = 1 - \frac{x^2-2}{2x^2} = \frac{2x^2-x^2+2}{2x^2} = \frac{x^2+2}{2x^2} > 0$, $x \geqslant \sqrt{2}$.

Donc g est strictement croissante sur $]\sqrt{2}\,;\,+\infty[$.

On a donc : $\forall\, x \in\,]\sqrt{2}\,;\,+\infty[$, $g(x) \geqslant g(\sqrt{2}) = \sqrt{2} - f(\sqrt{2}) = \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$.

Ainsi : $g(x) \geqslant 0\ \forall\, x \in\,]\sqrt{2}\,;\,+\infty[$ ou encore $x - f(x) \geqslant 0$, $\forall\, x \in\,]\sqrt{2}\,;\,+\infty[$ et par conséquent $f(x) \leqslant x$, $\forall\, x \in\,]\sqrt{2}\,;\,+\infty[$.

c) On avait montré que pour tout entier naturel non nul n, $u_n \geqslant \sqrt{2}$.

Ainsi, pour tout $u_n \geqslant \sqrt{2}$, $f(u_n) \leqslant u_n$ et comme $f(u_n) = u_{n+1}$, on écrit : $u_{n+1} \leqslant u_n$ et par conséquent (u_n) est décroissante à partir du rang 1.

d) La suite (u_n) est décroissante et est minorée par $\sqrt{2}$ (car $u_n \geqslant \sqrt{2}$), elle est donc convergente. Elle converge vers l'unique réel vérifiant l'équation : $f(x) = x$ dans l'intervalle $]\sqrt{2}\,;\,+\infty[$.

Résolvons l'équation $f(x) = x$. On a :

$$f(x) = x \iff \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) = x \iff x + \frac{2}{x} = 2x \iff x^2 - 2 = 0 \iff x = \sqrt{2}$$

Ainsi : $\lim_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{2}$

EXERCICE 40

1) La fonction P_n est une somme de fonctions continues, strictement croissantes sur $\mathbb{R}_+$ et de la constante -1, c'est donc une fonction continue strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

De plus, $P_n(0) = -1$ et $\lim_{n\to+\infty} P_n(x) = +\infty$. Donc P_n réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur son image $[-1\,;\,+\infty[$. Le nombre 0 est dans cet intervalle donc $\exists\,!\ \varepsilon_n > 0 \mid P_n(\varepsilon_n) = 0$

2) Montrons que $\forall\, n \geqslant 1$, $\varepsilon_{n+1} < \varepsilon_n$.

ε_{n+1} est défini par $P_{n+1}(\varepsilon_{n+1}) = 0$, soit $\varepsilon_{n+1}^{n+1} + \underbrace{\varepsilon_{n+1}^{n} + \cdots + \varepsilon_{n+1} - 1}_{P_n(\varepsilon_{n+1})} = 0$.

Ce qui donne $P_n(\varepsilon_{n+1}) = -\varepsilon_{n+1}^{n+1}$. Comme $\varepsilon_{n+1} > 0$, on en déduit que $P_n(\varepsilon_{n+1}) < 0$, soit $P_n(\varepsilon_{n+1}) < P_n(\varepsilon_n)$. Or la fonction P_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc $\varepsilon_{n+1} < \varepsilon_n$.

La suite $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement décroissante, minorée par 0, donc elle est convergente.

Supposons que $u_n \geqslant \sqrt{2}$ et montrons que $u_{n+1} \geqslant \sqrt{2}$.

En effet,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) \geqslant \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \sqrt{2}) = \sqrt{2}$$

Donc $u_{n+1} \geqslant \sqrt{2}$ ce qui achève la récurrence. Ainsi pour tout entier naturel non nul n, $u_n \geqslant \sqrt{2}$

b) On pose, pour tout $x \geqslant \sqrt{2}$, $g(x) = x - f(x)$.

On a : $g'(x) = 1 - f'(x) = 1 - \frac{x^2-2}{2x^2} = \frac{2x^2-x^2+2}{2x^2} = \frac{x^2+2}{2x^2} > 0$, $x \geqslant \sqrt{2}$.

Donc g est strictement croissante sur $]\sqrt{2}\,;\,+\infty[$.

On a donc : $\forall\, x \in]\sqrt{2}\,;\,+\infty[$, $g(x) > g(\sqrt{2}) = \sqrt{2} - f(\sqrt{2}) = \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$.

Ainsi : $g(x) > 0\ \forall\, x \in]\sqrt{2}\,;\,+\infty[$ ou encore $x - f(x) > 0$, $\forall\, x \in]\sqrt{2}\,;\,+\infty[$ et par conséquent $f(x) < x$, $\forall\, x \in]\sqrt{2}\,;\,+\infty[$.

c) On avait montré que pour tout entier naturel non nul n, $u_n \geqslant \sqrt{2}$.

Ainsi, pour tout $u_n \geqslant \sqrt{2}$, $f(u_n) \leqslant u_n$ et comme $f(u_n) = u_{n+1}$, on écrit : $u_{n+1} \leqslant u_n$ et par conséquent (u_n) est décroissante à partir du rang 1.

d) La suite (u_n) est décroissante et est minorée par $\sqrt{2}$ (car $u_n \geqslant \sqrt{2}$), elle est donc convergente. Elle converge vers l'unique réel vérifiant l'équation : $f(x) = x$ dans l'intervalle $]\sqrt{2}\,;\,+\infty[$.

Résolvons l'équation $f(x) = x$. On a :

$$f(x) = x \iff \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) = x \iff x + \frac{2}{x} = 2x \iff x^2 - 2 = 0 \iff x = \sqrt{2}$$

Ainsi : $\lim_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{2}$

EXERCICE 40

1) La fonction P_n est une somme de fonctions continues, strictement croissantes sur $\mathbb{R}_+$ et de la constante -1, c'est donc une fonction continue strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

De plus, $P_n(0) = -1$ et $\lim_{n\to+\infty} P_n(x) = +\infty$. Donc P_n réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur son image $[-1\,;\,+\infty[$. Le nombre 0 est dans cet intervalle donc $\exists\,!\ \varepsilon_n > 0 \mid P_n(\varepsilon_n) = 0$

2) Montrons que $\forall\, n \geqslant 1$, $\varepsilon_{n+1} < \varepsilon_n$.

ε_{n+1} est défini par $P_{n+1}(\varepsilon_{n+1}) = 0$, soit $\varepsilon_{n+1}^{n+1} + \underbrace{\varepsilon_{n+1}^{n} + \cdots + \varepsilon_{n+1} - 1}_{P_n(\varepsilon_{n+1})} = 0$.

Ce qui donne $P_n(\varepsilon_{n+1}) = -\varepsilon_{n+1}^{n+1}$. Comme $\varepsilon_{n+1} > 0$, on en déduit que $P_n(\varepsilon_{n+1}) < 0$, soit $P_n(\varepsilon_{n+1}) < P_n(\varepsilon_n)$.
Or la fonction P_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc $\varepsilon_{n+1} < \varepsilon_n$.

La suite $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement décroissante, minorée par 0, donc elle est convergente.

Remarquons que $\varepsilon_1 = 1$ et $\varepsilon_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. À partir de $n = 2$, on a : $0 < \varepsilon_n < \varepsilon_2 < 1$ (1)

Ainsi, $\varepsilon_n^n + \cdots + \varepsilon_n - 1 = 0 \iff \frac{\varepsilon_n(1-\varepsilon_n^n)}{1-\varepsilon_n} - 1 = 0.$

Soit $\varepsilon_n^2 + \cdots + \varepsilon_n - 1 = 0 \iff \varepsilon_n - \varepsilon_n^{n+1} = 1 - \varepsilon_n.$

Ce qui donne finalement : $\underline{2\varepsilon_n = 1 + \varepsilon_n^{n+1}}$

En désigne par $\ell = \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n$, l'égalité précédente implique : $2\ell = \lim_{n\to+\infty}(1 + \varepsilon_n^{n+1})$ (2)

Levons l'encadrement (1) à la puissance $n + 1$, il vient $0 < \varepsilon_n^{n+1} < \varepsilon_2^{n+1} < 1$.

Mais $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_2^{n+1} = 0$ (suite géométrique dont la raison positive est strictement inférieure à 1), il s'ensuit par encadrement que $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n^{n+1} = 0$.

Passons à la limite dans l'égalité (2), il vient $2\ell = 1$, donc $\underline{\ell = \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = \frac{1}{2}}$

EXERCICE 41

1) $Z_1 = \frac{1}{2}(Z_0 + i) = \frac{1}{2}(1 + i)$; $r_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant 1$.

Supposons qu'il existe $n \geqslant 1 \mid r_n \leqslant 1$. Alors :

$$r_{n+1} = \left|\frac{1}{2}(Z_n + i)\right| \leqslant \frac{1}{2}(r_n + |i|) \leqslant \frac{1}{2}(1 + |i|) = 1 \implies r_{n+1} \leqslant 1$$

Par principe de récurrence, $\underline{\forall\, n \in \mathbb{N},\ r_n \leqslant 1}$

Pour tout entier n,

$$U_{n+1} = Z_{n+1} - i = \frac{1}{2}(Z_n + i) - i = \frac{1}{2}(Z_n - i) = \frac{1}{2}U_n \implies \underline{U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n}$$

La suite (U_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

On a donc pour tout entier n,

$$x_{n+1} + i(y_{n+1} - 1) = \frac{1}{2}(x_n + i(y_n - 1))$$

D'où l'on tire : $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n$ et $y_{n+1} - 1 = \frac{1}{2}(y_n - 1)$. Les deux suites réelles (x_n) et $(y_n - 1)$ sont géométriques, de raison $\frac{1}{2}$; elles convergent toutes les deux vers 0 ; donc $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} y_n = 1$.

De ce fait, $\underline{\lim_{n\to+\infty} r_n = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{x_n^2 + y_n^2} = 1}$ et $\underline{\lim_{n\to+\infty}(x_n + iy_n) = 0 + i = i}$

EXERCICE 42

La fonction f est continue, dérivable sur $\mathbb{R}$; $\forall\, t \in \mathbb{R},\ f'(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{5}$.

1) Considérons la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(t) = f(t) - t$ et étudions ses variations. ϕ est évidemment dérivable ; pour tout $t \in [0\,;\,1]$, $\varphi'(t) = \frac{e^t - e^{-t} - 5}{5} > 0$. ϕ' est elle-même dérivable et $\varphi''(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{5} > 0$ sur $[0\,;\,1]$. On peut dresser le tableau de variations :

t	0		1
$\varphi''(t)$		$+$	
$\varphi'(t)$	-1	$\nearrow$	$\frac{e-\frac{1}{e}-5}{5}$
φ'		$-$	
$\varphi(t)$	$\frac{2}{5}$	$\searrow$	$\frac{e+\frac{1}{e}-5}{5}$

<u>*Conclusion*</u> : ϕ est strictement décroissante, continue sur $[0\,;\,1]$, donc elle réalise une bijection de $[0\,;\,1]$ sur son image $[\varphi(1)\,;\,\varphi(0)]$. Or $\varphi(1) < 0$ et $\varphi(0) > 0$, donc il existe une unique valeur $t_0 \in]0\,;\,1[$ telle que $\varphi(t_0) = 0$.

En d'autres termes, $\underline{\exists!\, t_0 \in]0\,;\,1[\mid f(t_0) = t_0}$.

2) Etudions le signe de $f'(t)$ sur $[0\,;\,1]$. $f'(0) = 0$ et $e^t > e^{-t}$ pour tout $t > 0$, donc $f'(t) > 0$ sur $]0\,;\,1]$.

f est strictement croissante sur $[0\,;\,1]$; de plus $f(0) = \frac{2}{5} > 0$ et $f(1) = \frac{e+\frac{1}{e}}{5} < 1$.

Donc $\forall\, t \in]0\,;\,1[,\ f(t) \in]0\,;\,1[$.

D'autre part, $f''(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{5} > 0$ sur $[0\,;\,1]$, donc f' est strictement croissante sur cet intervalle. Ainsi, sur $[0\,;\,1]$, $f'(t) \leqslant f'(1)$ et comme $f'(0) = 0$, on en déduit $\forall\, t \in [0\,;\,1],\ 0 \leqslant f'(t) \leqslant f'(1)$.

Soit donc $\forall\, t \in [0\,;\,1],\ |f'(t)| \leqslant f'(1) \leqslant \frac{1}{2}$ car $f'(1) = \frac{e-\frac{1}{e}}{5}$ et $\frac{e-\frac{1}{e}}{5} < \frac{2{,}8-0{,}3}{5} = \frac{1}{2}$.

$$\underline{\forall\, t \in]0\,;\,1[,\quad f(t) \in]0\,;\,1[,\ t \in [0\,;\,1],\quad |f'(t)| \leqslant \frac{1}{2}}$$

3) a) Raisonnons par récurrence :

$U_0 \in]0\,;\,1[$ par hypothèse.

Supposons qu'il existe un entier n tel que $U_n \in]0\,;\,1[$; comme $U_{n+1} = f(U_n)$ on conclut d'après la deuxième question que $f(U_n) \in]0\,;\,1[$, soit $U_{n+1} \in]0\,;\,1[$.

D'après le principe du raisonnement par récurrence, $\underline{\forall\, n \in \mathbb{N},\ U_n \in]0\,;\,1[}$.

b) La fonction f est continue sur l'intervalle fermé d'extrémités U_n et t_0 (elle l'est sur $[0\,;\,1]$), dérivable sur l'intervalle ouvert d'extrémités U_n et t_0 et sur cet intervalle $|f'(t)| \leqslant \frac{1}{2}$; on peut appliquer l'inégalité des accroissements finis. $|f(U_n) - f(t_0)| \leqslant \frac{1}{2}|U_n - t_0|$ ce qui donne : $\underline{|U_{n+1} - t_0| \leqslant \frac{1}{2}|U_n - t_0|}$

c) On montre facilement par récurrence que : $|U_n - t_0| \leqslant \frac{1}{2^n}|U_0 - t_0|$

Or $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}=0$, par encadrement celle de $|U_n - t_0|$ aussi. $\underline{\lim_{n\to+\infty} U_n = t_0}$

EXERCICE 43

1) On a $0 \leqslant U_0 \leqslant 1$ la propriété est vraie pour $n=0$.

Supposons que $0 \leqslant U_n \leqslant 1$ et montrons que $0 \leqslant U_{n+1} \leqslant 1$.

On a :

$$0 \leqslant U_n \leqslant 1 \implies U_n^2 \leqslant 1 \implies U_n^2 - 1 \leqslant 0 \implies 2(U_n^2-1) \leqslant 0 \implies U_n^2 \leqslant 2 - U_n^2$$

Et donc $U_n \leqslant \sqrt{2-U_n^2} \implies \frac{U_n}{\sqrt{2-U_n^2}} \leqslant 1 \implies U_{n+1} \leqslant 1$ et $U_{n+1} \geqslant 0$.

Ainsi $0 \leqslant U_{n+1} \leqslant 1$ et donc $\underline{0 \leqslant U_n \leqslant 1}$ pour tout entier naturel n.

2) a) On a : $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{1}{\sqrt{2-U_n^2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2-(1)^2}} = 1$

<u>U décroissante et minorée par 0 alors U est convergente.</u>

b) On a : $U_{n+1} = f(U_n)$ avec $f(x) = \frac{x}{\sqrt{2-x^2}}$. U converge vers ℓ.

La fonction f continue en ℓ car f est continue sur $[0\,;1]$.

$$f(\ell)=\ell \iff \frac{\ell}{\sqrt{2-\ell^2}} = \ell \iff \ell\left(\sqrt{2-\ell^2}-1\right)=0 \iff \ell=0 \text{ ou } \ell=\pm 1$$

Comme $\ell \in [0\,;\,1]$ et U est décroissante alors $\underline{\ell = 0}$.

3) U est décroissante donc $U_n \leqslant U_0 = \frac{1}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$0 \leqslant U_n \leqslant \frac{1}{2} \iff U_n^2 \leqslant \frac{1}{4} = 2 - \frac{7}{4} \iff \sqrt{2-U_n^2} \geqslant \frac{\sqrt{7}}{2} \iff \frac{1}{\sqrt{2-U_n^2}} \leqslant \frac{2}{\sqrt{7}}$$

Or $U_n \geqslant 0$ donc

$$\frac{U_n}{\sqrt{2-U_n^2}} \leqslant \frac{2U_n}{\sqrt{7}} \iff U_{n+1} \leqslant \frac{2U_n}{\sqrt{7}},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Soit $\ell = \lim_{n\to+\infty} U_n$.

$$U_{n+1} \leqslant \frac{2U_n}{\sqrt{7}} \iff \ell \leqslant \frac{2\ell}{\sqrt{7}} \iff \ell\left(1-\frac{2}{\sqrt{7}}\right) \leqslant 0 \iff \ell \leqslant 0$$

Comme $U_n \geqslant 0 \implies \ell \geqslant 0$ et par suite, $\underline{\ell = 0}$.

4) a) On a :

$$U_0 = \frac{1}{2} \leqslant \left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)^0 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Supposons que $U_n \leqslant \left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)^n \times \frac{1}{2}$ et montrons que $U_{n+1} \leqslant \left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)^{n+1} \times \frac{1}{2}$.

On a :

$$U_{n+1} \leqslant \frac{2}{\sqrt{7}} \times U_n \quad \Rightarrow \quad U_{n+1} \leqslant \frac{2}{\sqrt{7}}\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)^n \times \frac{1}{2} = \left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)^{n+1} \times \frac{1}{2}$$

D'où la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi : $\underline{n \in \mathbb{N},\ U_n \leqslant \left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)^n \times \frac{1}{2}}$

b) On a :

$$S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_{n-1} \leqslant \left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)^0 \times \frac{1}{2} + \cdots + \left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)^{n-1} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)^k = \frac{1}{2} \times \frac{1-\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)^n}{1-\frac{2}{\sqrt{7}}}$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-\frac{2}{\sqrt{7}}}$$

Donc $\underline{S_n \leqslant \frac{1}{2\left(1-\frac{2}{\sqrt{7}}\right)}}$

On a : $S_{n+1} - S_n = U_n \geqslant 0 \Rightarrow$ <u>S est une suite croissante</u>. <u>S croissante et majorée donc convergente</u>.

5) a) On a : $V_0 = \frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{2} \Rightarrow$ La propriété est vraie pour $n = 0$.

Supposons que $V_n \geqslant \frac{1}{2}$ et montrons que $V_{n+1} \geqslant \frac{1}{2}$.

On a :

$$V_n \geqslant \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad V_n^2 \geqslant \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad U_n + V_n^2 \geqslant \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{U_n + V_n^2} \geqslant \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \underline{V_n \geqslant \frac{1}{2},\quad n \in \mathbb{N}}$$

b) On a : $U_n \geqslant 0 \Rightarrow U_n + V_n^2 \geqslant V_n^2$; $V_n \geqslant 0 \Rightarrow \sqrt{U_n + V_n^2} \geqslant V_n \Rightarrow V_{n+1} - V_n \geqslant 0$.

On a : $V_n \geqslant \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{N} \Rightarrow V_{n+1} - V_n \geqslant 1 \Rightarrow (V_{n+1} + V_n)(V_{n+1} - V_n) \geqslant V_{n+1} + V_n$.

Ainsi : $V_{n+1}^2 - V_n^2 \geqslant V_{n+1} + V_n \Rightarrow U_n \geqslant V_{n+1} + V_n$ et par suite $\underline{0 \leqslant V_{n+1} - V_n \leqslant U_n,\ n \in \mathbb{N}}$.

On a :

$$V_1 - V_0 \leqslant U_0$$

$$V_2 - V_1 \leqslant U_1$$

$$V_n - V_{n-1} \leqslant U_{n-1}$$

En faisant la somme membre à membre, on obtient :

$$V_n - V_0 \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} U_k = S_n \leqslant \frac{1}{2\left(1-\frac{2}{\sqrt{7}}\right)} \Rightarrow V_n \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2\left(1-\frac{2}{\sqrt{7}}\right)}, \quad n \in \mathbb{N}$$

V est majorée par $\frac{1}{2} + \frac{1}{2\left(1-\frac{2}{\sqrt{7}}\right)}$.

b) On a $V_{n+1} - V_n > 0$ donc V est croissante. V croissante, majorée donc convergente.

EXERCICE 44

1) On trouve $U_1 = \frac{5}{9}$ et $U_2 = \frac{8}{27}$.

2) On a : $U_0 = 1 = \frac{0+1}{3^0}$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Supposons que $U_n = \frac{n+1}{3^n}$ et montrons que $U_{n+1} = \frac{n+2}{3^{n+1}}$.

On a :

$$3U_{n+1} = 2U_n - \frac{n}{3^n} = 2\left(\frac{n+1}{3^n}\right) - \frac{n}{3^n} = \frac{2n+2-n}{3^n} = \frac{n+2}{3^n} \Rightarrow U_{n+1} = \frac{n+2}{3^{n+1}}$$

Donc la propriété $U_n = \frac{n+1}{3^n}$ est vraie pour tout entier naturel n.

3) On a :

$$U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n - \frac{n}{3^{n+1}} = \frac{2}{3}U_n - \frac{3^n U_n - 1}{3^{n+1}} = \frac{2}{3}U_n - \frac{1}{3}U_n + \frac{1}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}U_n + \frac{1}{3^{n+1}}$$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + \frac{1}{3^{n+1}}$

4) a) On a :

$$W_n = 9U_{n+1} - 3U_n = 9\frac{n+2}{3^{n+1}} - 3\frac{n+1}{3^n} = \frac{3n+6}{3^n} - \frac{3n+3}{3^n} = \frac{3}{3^n}$$

Donc W est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

b) On a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} W_k = W_0 \times \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} = \frac{9}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right) \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} W_k = \frac{9}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$$

5) a) On a : $S_1 = U_0 = 1 = \frac{9}{4} - \frac{2+3}{4\times 3^0}$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Supposons que $S_n = \frac{9}{4} - \frac{2n+3}{4\times 3^{n-1}}$ et montrons que $S_{n+1} = \frac{9}{4} - \frac{2n+5}{4\times 3^n}$.

On a :

$$S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} U_k = \sum_{k=0}^{n-1} U_k + U_n = \frac{9}{4} - \frac{2n+3}{4\times 3^{n-1}} + \frac{n+1}{3^n} = \frac{9}{4} - \frac{2n+5}{4\times 3^n}$$

Donc la propriété $S_n = \frac{9}{4} - \frac{2n+3}{4\times 3^{n-1}}$ est vraie pour tout entier naturel non nul n.

b) On a :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{3^{k-1}} = \frac{1}{3^0} + \frac{2}{3} + \cdots + \frac{n-1}{3^{n-2}} = U_0 + U_1 + \cdots + U_{n-2} = \sum_{k=0}^{n-2} U_k = \sum_{k=0}^{n-1} U_k - U_{n-1} = S_n - \frac{n-1}{3^{n-2}}$$

Ainsi :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{3^{k-1}} = S_n - \frac{n-1}{3^{n-2}} = \frac{9}{4} - \frac{2n+3}{4\times 3^{n-1}} - \frac{n-1}{3^{n-2}} = \frac{9}{4} - \frac{6n+3}{4\times 3^{n-1}} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{3^{k-1}} = \frac{9}{4} - \frac{6n+3}{4\times 3^{n-1}}$$

EXERCICE 45

Première partie

1) Cherchons un point $A(x_0, y_0)$ tel que pour toute valeur du paramètre a, A appartient à $(\mathcal{C}_a)$ c'est-à-dire $x_0 \in D_{f_a}$ et $y_0 = f_a(x_0)$.

On doit avoir : $\forall\, a \in \mathbb{R}^* - \{1\},\ y_0 = \frac{x_0}{ax_0 - a + 1}$

Soit $\forall\, a \in \mathbb{R}^* - \{1\},\ (x_0y_0 - y_0)a + y_0 - x_0 = 0$.

Pour cela, il faut et il suffit que : $\begin{cases} y_0 - x_0 = 0 \\ x_0y_0 - y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = y_0 \\ x_0 = 0 \text{ ou } 1 \end{cases}$

Les courbes $(\mathcal{C}_a)$ passent toutes par les points $O(0\,;0)$ et $A_1(1\,;1)$.

2) Cherchons un point ℓ (dépendant éventuellement de a) fixé par f_a, c'est à dire tel $\ell \in D_{f_a}$ et $f_a(\ell) = \ell$.

On doit avoir : $\frac{\ell}{a\ell - a + 1} = \ell$ c'est-à-dire $\ell = 0$ ou 1 car a est non nul. Les points fixes de f_a sont 0 et 1.

3) $f_a(x)$ est une fraction rationnelle, D_{f_a} est l'ensemble des réels qui n'annulent pas son dénominateur : $D_{f_a} = \mathbb{R} - \left\{\frac{a-1}{a}\right\}$.

La fonction f_a est définie et continue dans D_{f_a} et $\lim_{x\to-\infty} f_a(x) = \lim_{x\to+\infty} f_a(x) = \frac{1}{a}$.

Lorsque x tend vers $x_0 = \frac{a-1}{a}$, le dénominateur de $f_a(x)$ tend vers 0 et son numérateur vers le réel $x_0 \neq 0$.

Pour calculer $\lim_{x\to x_0} f_a(x)$, il faut connaître le signe de $f_a(x)$ quand x tend vers x_0.

Le signe de $f_a(x)$ est celui du trinôme $T(x) = x(ax - a + 1)$ dont les racines sont 0 et x_0. Ce trinôme a le signe de a à « l'extérieur des racines » et le signe de $-a$ à « l'intérieur des racines »

le réel x_0 a même signe que le trinôme $(a-1)a$; donc il est < 0 si a appartient à $]0\,;1[$ et > 0 sinon ; ce qui scinde la discussion suivante.

i) Si $a > 1$, alors x_0 est > 0 et $T(x)$ a le signe de a (c'est à dire est > 0) dans $]x_0\,;+\infty[$ et le signe de $-a$ dans $]0\,;x_0[$.

Par conséquent : $\lim_{x\to x_0^+} f_a(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to x_0^-} f_a(x) = -\infty$.

ii) Si $a \in]0\,;1[$, alors x_0 est < 0 et $T(x)$ a le signe de a (c'est à dire est > 0) dans $]-\infty\,;x_0[$ et le signe de $-a$ dans $]x_0\,;0[$.

Par conséquent : $\lim_{x\to x_0^+} f_a(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to x_0^-} f_a(x) = +\infty$.

iii) Si $a < 1$, alors x_0 est > 0 et $T(x)$ a le signe de a (c'est à dire est < 0) dans $]x_0\,;+\infty[$ et le signe de $-a$ dans $]0\,;x_0[$.

Par conséquent : $\lim_{x\to x_0^+} f_a(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to x_0^-} f_a(x) = +\infty$.

La fonction f_a est dérivable dans D_{f_a} et :

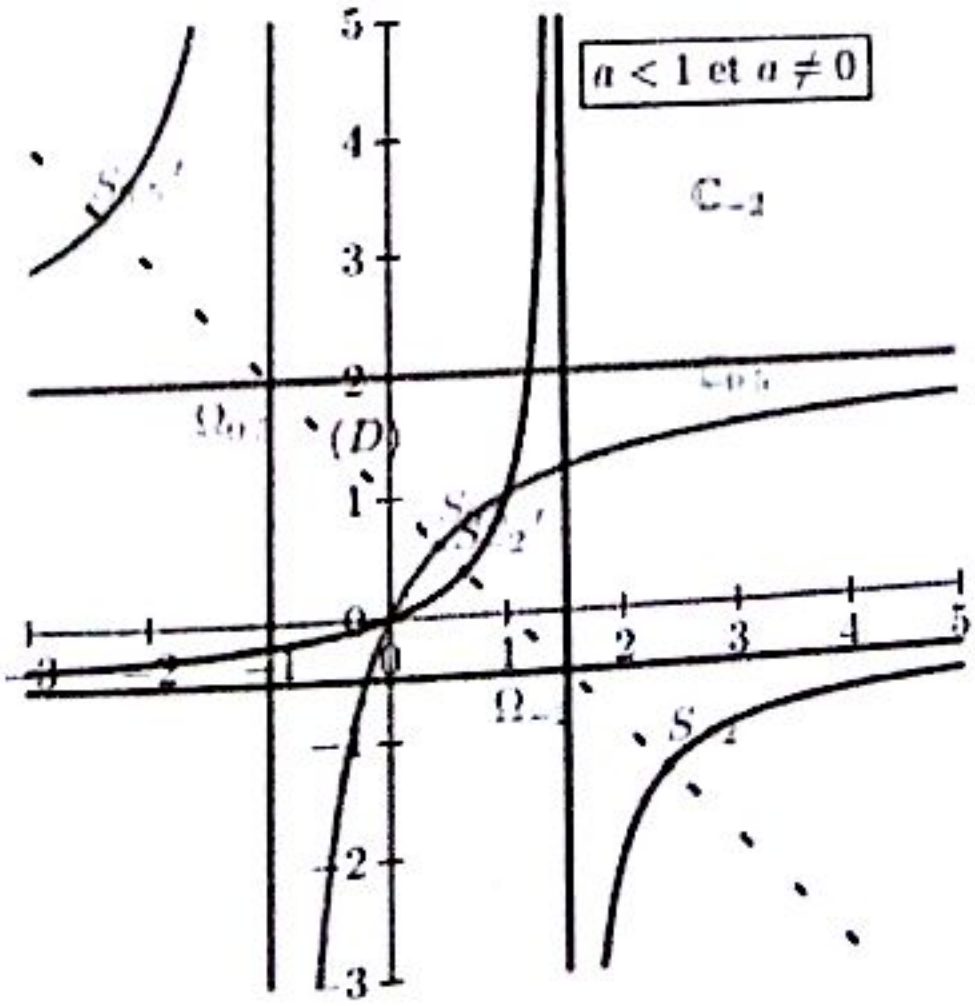
$$\forall\, x \in D_{f_a},\quad f_a'(x) = \frac{1-a}{(ax-a+1)^2}$$

La dérivée a donc le signe de $1-a$. Plus précisément :

Si $1-a>0$ c'est à dire $a<1$, alors $\forall\, x \in D_{f_a},\ f_a'(x) > 0$. Nous obtenons le tableau suivant :

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
f'		$+$	‖	$+$	
f	$\frac{1}{a}$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{a}$

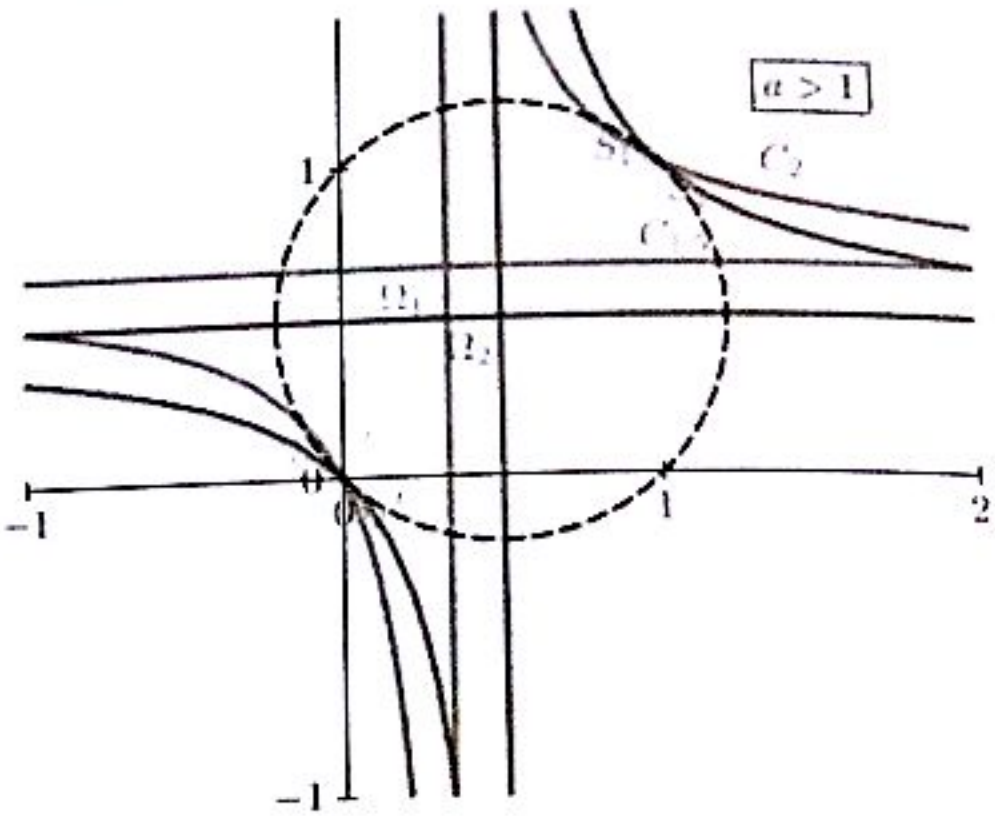
5) Et voici les courbes



Si $1 - a < 0$ c'est à dire $a > 1$, alors $\forall\, x \in D_{f_a}$, $f_a'(x) < 0$. Nous obtenons le tableau suivant :

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
f'		$-$	‖	$-$	
f	$\frac{1}{a}$	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$\frac{1}{a}$

Et voici les courbes demandées :



Deuxième partie

1) a) Déjà fait, voici le tableau de variation de f_a.

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
f'		$+$	‖	$+$	
f	$\frac{1}{a}$	↗ $-\infty$	‖	$-\infty$ ↗	$\frac{1}{a}$

Comme la fonction f_a est croissante sur $[0\,;\,1]$ est $[f_a(0)\,;\,f_a(1)] = [0\,;\,1]$.

b) Raisonnons par récurrence pour montrer la propriété :

P_n : « U_n est défini et U_n appartient à $[0\,;\,1]$ »

Initialisation : « U_0 est défini et U_0 appartient à $[0\,;\,1]$ » (données de l'énoncé). P_0 est donc vrai.

Héritage : Supposons la propriété vérifiée jusqu'à un rang n donnée ; en particulier que P_n soit vraie, c'est à dire « U_n est défini et U_n appartient à $[0\,;\,1]$ ».

Alors puisque $f_a([0\,;\,1]) = [0\,;\,1]$, $U_{n+1} = f_a(U_n)$ appartient à $[0\,;\,1]$. La propriété P_n est vérifiée.

Les points fixes de f_a étant 0 et 1 :

(i) Si $U_0 = 0$, alors pour tout entier n, $U_n = 0$; la suite (U_n) est constante.

(ii) Si $U_0 = 1$, alors pour tout entier n, $U_n = 1$; la suite (U_n) est constante.

5) a) Si U_0 est différent de 0 et 1, il en est de même de U_n pour tout n ; et alors pour tout entier naturel n, $f_a(U_n) \in]0\,;\,1[$.

Pour tout entier naturel n on a :

$$U_{n+1} - U_n = f_a(U_n) - U_n = a \times \frac{U_n^2 - U_n}{aU_n - a + 1} = a(U_n - 1)f_a(U_n)$$

$U_{n+1} - U_n < 0$ est donc strictement négatif car $U_n - 1 < 0$ et $f_a(U_n) > 0$.

La suite (U_n) est strictement décroissante.

b) La suite (U_n) étant bornée par 0 et 1 et monotone, converge vers un réel ℓ appartenant à $[0\,;\,1]$.

À partir de la relation $0 < U_{n+1} = f_a(U_n) < U_0 < 1$ on obtient par passage la limite :

$$0 \leqslant \ell = f_a(\ell) \leqslant U_0 < 1$$

ℓ est donc un point fixe de f_a différent de 1 : $\ell = 0$.

La suite (U_n) converge vers 0.

EXERCICE 1

Première partie

1) Une primitive de la fonction $t \longmapsto 2t^3$ est une fonction de la forme $t \longmapsto \frac{t^4}{2}$. Ainsi :

$$\int_{-1}^{2} 2t^3\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^4}{2}\right]_{-1}^{2} = \frac{2^4}{2} - \frac{(-1)^4}{2} = \frac{15}{2}$$

Conclusion : $\int_{-1}^{2} 2t^3\,\mathrm{d}t = \frac{15}{2}$

2) Une primitive de la fonction $t \longmapsto -t^4$ est une fonction de la forme $t \longmapsto -\frac{t^5}{5}$. Ainsi :

$$\int_{-1}^{\frac{3}{2}} -t^4\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{t^5}{5}\right]_{-1}^{\frac{3}{2}} = \left[-\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^5}{5}\right] - \left[-\frac{(-1)^5}{5}\right] = -\frac{55}{32}$$

Conclusion : $\int_{-1}^{\frac{3}{2}} -t^4\,\mathrm{d}t = -\frac{55}{32}$

3) Une primitive de la fonction $t \longmapsto \frac{1}{t^3}$ est une fonction de la forme $t \longmapsto -\frac{1}{2t^2}$. Ainsi :

$$\int_{-1}^{-2} \frac{\mathrm{d}t}{t^3} = \left[-\frac{1}{2t^2}\right]_{-1}^{-2} = \left(-\frac{1}{2(-2)^2}\right) - \left(-\frac{1}{2(-1)^2}\right) = \frac{3}{8}$$

Conclusion : $\int_{-1}^{-2} \frac{\mathrm{d}t}{t^3} = \frac{3}{8}$

4) Une primitive de la fonction $t \longmapsto \sqrt{t}$ est une fonction de la forme $t \longmapsto \frac{2}{3}t\sqrt{t}$. Ainsi :

$$\int_{0}^{9} \sqrt{t}\mathrm{d}t = \left[\frac{2}{3}t\sqrt{t}\right]_{0}^{9} = \left(\frac{2}{3} \times 9\sqrt{9}\right) - 0 = 18$$

Conclusion : $\int_{0}^{9} \sqrt{t}\mathrm{d}t = 18$

- Une primitive de la fonction $t \longmapsto \sin 2t$ est une fonction de la forme $t \longmapsto -\frac{\cos 2t}{2}$. Ainsi :

$$\int_{\pi}^{0} \sin 2t \, dt = \left[-\frac{\cos 2t}{2}\right]_{\pi}^{0} = \left(-\frac{\cos 0}{2}\right) - \left(-\frac{\cos 2\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

Conclusion : $\int_{\pi}^{0} \sin 2t \, dt = 0$

- Une primitive de la fonction $t \longmapsto 2 - 3\sin t$ est une fonction de la forme $t \longmapsto 2t + 3\cos t$. Ainsi :

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (2 - 3\sin t) \, dt = [2t + 3\cos t]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \left(2 \times \frac{\pi}{2} + 3\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - (2 \times 0 + 3\cos(0)) = \pi - 3$$

Conclusion : $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (2 - 3\sin t) \, dt = \pi - 3$

- Une primitive de la fonction $t \longmapsto \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$ est une fonction de la forme $t \longmapsto -\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$. Ainsi :

$$\int_{0}^{\pi} \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) dt = \left[-\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)\right]_{0}^{\pi} = \left(-\cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)\right) - \left(-\cos\left(0 + \frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

Conclusion : $\int_{0}^{\pi} \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) dt = \sqrt{2}$

- Une primitive de la fonction $t \longmapsto 3\cos t - \sin t$ est une fonction de la forme $t \longmapsto 3\sin t + \cos t$. Ainsi :

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (3\cos t - \sin t) \, dt = [3\sin t + \cos t]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \left(3\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) - \left(3\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 3\sqrt{2}$$

Conclusion : $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (3\cos t - \sin t) \, dt = 3\sqrt{2}$

- Soit F une primitive de x^3. Donc $F(x) = \frac{x^4}{4} + k$ et donc $A = F(3) - F(1) = 20$

Conclusion : $\int_{1}^{3} x^3 \, dx = 20$

- On a : $\tan^2 x = (\tan^2 x + 1) - 1 \implies F(x) = \tan x - x \implies A = F\left(\frac{\pi}{3}\right) - F(0) = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$

Conclusion : $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \tan^2 x \, dx = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$

- On écrit f sans symboles de valeur absolue : $f(x) = |x - 3| = \begin{cases} 3 - x & si\ x < 3 \\ x - 3 & si\ x > 3 \end{cases}$

$$\int_3^5 |x-3|\,dx = \int_2^3 |x-3|\,dx + \int_3^5 |x-3|\,dx$$
$$= \int_2^3 (3-x)dx + \int_3^5 (x-3)dx = \left[-\frac{x^2}{2}+3x\right]_2^3 + \left[\frac{x^2}{2}-3x\right]_3^5 = \frac{5}{2}$$

Conclusion : $\int_3^5 |x-3|\,dx = \frac{5}{2}$

12) Remarquons tout d'abord que la formule d'Euler nous permet d'écrire :

$$\cos(\ln(x)) + i\sin(\ln(x)) = e^{i\ln(x)} = x^i$$

On en déduit que $\sin(\ln(x))$ est la partie imaginaire du nombre complexe x^i :

$$\sin(\ln(x)) = \mathrm{Im}(x^i)$$

Sachant que la primitive d'une partie imaginaire est égale à la partie imaginaire de la primitive on a :

$$\int \sin(\ln(x))dx = \mathrm{Im}\int x^i\,dx = \mathrm{Im}\left(\frac{x^{i+1}}{i+1}\right)$$

La primitive de $\sin(\ln x)$ n'est autre que la partie imaginaire du nombre complexe $\frac{x^{i+1}}{i+1}$.

Nous devons maintenant décomposer le nombre complexe $\frac{x^{i+1}}{i+1}$ en partie réelle et partie imaginaire :

$$\frac{x^{i+1}}{i+1} = \frac{x\cdot x^i}{i+1} = \frac{x}{2}\cdot(1-i)\cdot e^{i\ln(x)} = \frac{x}{2}[\cos(\ln x) + \sin(\ln x) + i(\sin(\ln x) - \cos(\ln x))]$$

On en déduit la primitive de $\sin(\ln(x))$ qui est la partie imaginaire du nombre complexe ci-dessus :

$$\int \sin(\ln x)dx = \frac{x}{2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x))$$

Conclusion : $\int \sin(\ln x)dx = \frac{x}{2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x))$

Et pour le même prix nous venons d'obtenir en même temps la primitive de $\cos(\ln(x))$! En effet, sachant que :

$$\int \cos(\ln x)dx = \mathrm{Re}\int x^i\,dx = \mathrm{Re}\left(\frac{x^{i+1}}{i+1}\right)$$

La partie réelle du nombre complexe ci-dessus est la primitive de $\cos(\ln(x))$:

$$\int \cos(\ln x)dx = \frac{x}{2}(\sin(\ln x) + \cos(\ln x))$$

Deuxième partie

1) On a : $A = \int_0^1 x(x^2+1)^5\,dx = \int_0^1 \frac{1}{2} \times 2x(x^2+1)^5\,dx = \left[\frac{(x^2+1)^6}{12}\right]_0^1 = \frac{21}{4}$. Ainsi $\underline{A = \frac{21}{4}}$

2) On a : $B = \int_0^1 (4x+2)(x^2+2x-1)^2\,dx = \left[\frac{2(x^2+2x-1)^3}{3}\right]_0^1 = \frac{16}{3}$. Ainsi $\underline{B = \frac{16}{3}}$

3) On a : $C = \int_0^2 x^2(x^3-8)\,dx = \int_0^2 \frac{1}{3} \times 3x^2(x^3-8)\,dx = \left[\frac{(x^3-8)^2}{6}\right]_0^2 = -\frac{32}{3}$. Ainsi $\underline{C = -\frac{32}{3}}$

4) On a : $D = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+2x+1} = \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2} = \left[-\frac{1}{x+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$. Ainsi $\underline{D = \frac{1}{2}}$

5) On a : $E = \int_{-1}^0 \frac{2x+3}{(x^2+3x-1)^2}dx = \left[-\frac{1}{x^2+3x-1}\right]_{-1}^0 = \frac{2}{3}$. Ainsi $\underline{E = \frac{2}{3}}$

6) On a : $F = \int_{-1}^0 \sqrt{x+2}\,dx = \left[\frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^0 = \frac{4\sqrt{2}-2}{3}$. Ainsi $\underline{F = \frac{4\sqrt{2}-2}{3}}$

Troisième partie

1) On a : $f(x) = \frac{\ln x}{x} \Rightarrow F(x) = \frac{(\ln x)^2}{2} + k \Rightarrow \underline{A = F(e) - F1) = \frac{1}{2}}$

2) On a : $\sin^3 x = \sin^2 x.\sin x = (1-\cos^2 x)\sin x = \sin x - \sin x\cos^2 x \Rightarrow F(x) = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x$.

Donc : $\underline{A = F\left(\frac{\pi}{3}\right) - F(0) = \frac{5}{24}}$

3) $f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2x+2}{x^2+2x+7} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+7) \Rightarrow \underline{A = F(2) - F(1) = \ln\sqrt{\frac{3}{2}}}$

4 — 5) Soit $A = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}dx$ et $B = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}dx$.

$$A + B = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x + \sin x}{\cos x + \sin x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} dx = [x]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3}$$

$$A - B = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}dx = [\ln(\cos x + \sin x)]_0^{\frac{\pi}{3}} = \ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right) \\ B = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right) \end{cases}$$

6 — 7) On pose : $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx$ et $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx$

$$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{2}$$

Ainsi : $I+J=\frac{\pi}{2}$ (1)

On peut prouver que I = J.

En effet, en faisant un changement de variable : $t=\frac{\pi}{2}-x$, l'intégrale I devient :

$$\sqrt{\sin t}=\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=\sqrt{\cos x} \text{ et } \sqrt{\cos t}=\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=\sqrt{\sin x}$$

Pour $x=0\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$ et $x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=0$

Il vient :

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sqrt{\cos t}}{\sqrt{\cos t}+\sqrt{\sin t}}d(-t)=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sqrt{\cos t}}{\sqrt{\cos t}+\sqrt{\sin t}}d(t)$$

$$I=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sqrt{\cos t}}{\sqrt{\cos t}+\sqrt{\sin t}}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\cos t}}{\sqrt{\cos t}+\sqrt{\sin t}}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}dx=J$$

Ainsi : I = J (2)

Donc, (1) et (2) donnent un système de deux équations à deux inconnues : $\begin{cases} I+J=\frac{\pi}{2}\Rightarrow I=J=\frac{\pi}{4} \\ I-J=0 \end{cases}$

On en déduit : $\underline{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx=\frac{\pi}{4}}$

8) Soit à calculer : $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\tan^{\alpha}x}dx$.

On pose : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\tan^{\alpha} x} dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\text{cotan}^{\alpha} x} dx$ où $\text{cotan}^{\alpha} x = \frac{1}{\tan^{\alpha} x}$

Il est aisé de voir que :

$I+J = \frac{\pi}{2}$ et $I = J$ en utilisant la même démarche que précédemment.

$$\begin{cases} I+J = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = J = \frac{\pi}{4} \\ I-J = 0 \end{cases}$$

On en déduit : $\underline{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\tan^{\alpha} x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\text{cotan}^{\alpha} x} dx = \frac{\pi}{4}}$

: En effet cette primitive est simplement de la forme : $\int \frac{u'(x)}{u} dx \Rightarrow \int \frac{6x+7}{3x^2+7x-13} dx$

Ainsi : $\underline{\int \frac{6x+7}{3x^2+7x-13} dx = \ln|3x^2+7x-13|}$

) Il est inutile ici de partir dans une linéarisation. En effet cette primitive est simplement de la forme

$$\int u' \cdot u^n \, dx \quad \Rightarrow \quad \int \sin^6 x \cdot \cos x \, dx = \frac{\sin^7(x)}{7}$$

Ainsi : $\underline{\int \sin^6 x \cdot \cos x \, dx = \frac{\sin^7(x)}{7} + k}$

) Il suffit de remarquer que cette primitive est de la forme :

$$\int -\frac{u'}{u^2} dx \quad \Rightarrow \quad \underline{\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{3 \cdot \cos^3 x} + k}$$

) La fonction $f(x) = \sin^9 x$ est impaire donc : $\underline{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^9 x \, dx = 0}$

Quatrième partie

) On pose $u'(x) = e^{2x} \Rightarrow u(x) = \frac{e^{2x}}{2}$; $v(x) = x \Rightarrow v'(x) = x$. Donc :

$$\int_0^1 xe^{2x} dx = \left[\frac{xe^{2x}}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{2x}}{2} dx = \left[\frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4}\right]_0^1 = \frac{e^2+1}{4} \Rightarrow \underline{\int_0^1 xe^{2x} dx = \frac{e^2+1}{4}}$$

) On pose : $u'(x) = \sin x \Rightarrow u(x) = -\cos x$; $v(x) = x \Rightarrow v'(x) = 1$. Ainsi :

$$\int_0^{\pi} x\sin x\,dx = [-x\cos x]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos x\,dx = [-x\cos x + \sin x]_0^{\pi}$$
$$= (-\pi\cos\pi + \sin\pi) - (-0\times\cos 0 + \sin 0) = \pi$$

$$\underline{\int_0^{\pi} x\sin x\,dx = \pi}$$

3) On peut voir tout de suite que $\int_{-\pi}^{\pi} x\cos x\,dx = 0$ car la fonction $f(x) = x\cos x$ est impaire.

On pose : $u'(x) = \cos x \implies u(x) = \sin x$; $v(x) = x \implies v'(x) = 1$. Ainsi :

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\cos x\,dx = [x\sin x]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\sin x\,dx = [x\sin x + \cos x]_{-\pi}^{\pi}$$
$$= [\pi\sin\pi + \cos\pi] - [(-\pi)\sin(-\pi) + \cos(-\pi)] = 0$$

$$\underline{\int_{-\pi}^{\pi} x\cos x\,dx = 0}$$

4) On pose : $u'(x) = 1 \implies u(x) = x$; $v(x) = \ln x \implies v'(x) = \frac{1}{x}$. Ainsi :

$$\int_1^{e}\ln x\,dx = [x\ln x]_1^{e} - \int_1^{e} x\,dx = [x\ln x - x]_1^{e} = (e\ln e - e) - (\ln 1 - 1) = 1 \implies \underline{\int_1^{e}\ln x\,dx = 1}$$

5) On pose : $u'(x) = x \implies u(x) = \frac{x^2}{2}$; $v(x) = \ln x \implies v'(x) = \frac{1}{x}$. Ainsi :

$$\int_1^{e} x\ln x\,dx = \left[\frac{x^2\ln x}{2}\right]_1^{e} - \int_1^{e}\frac{x}{2}dx = \left[\frac{x^2\ln x}{2} - \frac{x^2}{4}\right]_1^{e} = \left(\frac{e^2\ln e}{2} - \frac{e^2}{4}\right) - \left(\frac{1^2\ln 1}{2} - \frac{1^2}{4}\right) = \frac{e^2+1}{4}$$

$$\underline{\int_1^{e} x\ln x\,dx = \frac{e^2+1}{4}}$$

Cinquième partie

a) Une intégration par parties donne pour primitive : $\underline{\frac{-1-\ln x}{x}}$

b) Deux intégration par parties successivement donnent pour primitives : $\underline{\frac{-\ln^2 x - 2\ln x - 2}{x}}$

c) De même, on obtient : $\underline{-\ln^2 x - 2\ln x - 2}$

d) Par intégration par parties :

$$\int \sin(\ln x)\,dx = x\cos(\ln x) + k - \int x\frac{1}{x}\cos(\ln x)\,dx$$

Par une seconde intégration par parties :

$$\int \cos(\ln x)\,\mathrm{d}x = x\cos(\ln x) + k + \int x\frac{1}{x}\sin(\ln x)\,\mathrm{d}x$$

En reportant, on obtient la relation :

$$2\int \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) + k$$

D'où une primitive de $\sin(\ln x)$ est donc : $\underline{\frac{x}{2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + k}$

e) De même, on obtient : $\underline{\frac{x}{2}(\sin(\ln x) + \cos(\ln x)) + k}$

Sixième partie

1) On pose $u'(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} \implies u(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$; $v(x) = x \implies v'(x) = 1$. Ainsi :

$$A = \int_0^1 x(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x = [x(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})]_0^1 - \int_0^1 (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x = [x(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})]_0^1 - [\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}]_0^1 = \frac{2}{\mathrm{e}} \quad \underline{A = \frac{2}{\mathrm{e}}}$$

2) En écrivant la fonction à intégrer sous la forme : $x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = x\ln(x+1) - x\ln x$

On obtient, en intégrant par parties,

$$\int_1^2 x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \int_1^2 (x\ln(x+1) - x\ln x)\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\ln 3 - 2\ln 2 + \frac{1}{2}$$

$$\underline{\int_1^2 x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\ln 3 - 2\ln 2 + \frac{1}{2}}$$

3) On a :

$$\int \frac{\cos x + 2x\sin x}{2x\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{2x\sqrt{x}}\mathrm{d}x + \int \frac{2\sin x}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Avec : $\begin{cases} u = -\cos x \implies u' = \sin x \\ v = \sqrt{x} \implies v' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}$

Et on en déduit instantanément la primitive recherchée :

$$C = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos x + 2x\sin x}{2x\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \left[-\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \left(-\frac{\cos\pi}{\sqrt{\pi}}\right) - \left(-\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

$$\underline{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos x + 2x\sin x}{2x\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}}$$

4) On fait une intégration par parties : $\begin{cases} u = 3x^2 + x \implies u' = 6x + 1 \\ v = x + 1 \implies v' = 1 \end{cases}$

On en déduit alors directement la primitive recherchée sans effectuer de décomposition en éléments simples :

$$D = \int_0^1 \frac{3x^2 + 6x + 1}{x^2 + 2x + 1}\,dx = \left[\frac{3x^2 + x}{x + 1}\right]_0^1 = 2 \quad \implies \quad \underline{\int_0^1 \frac{3x^2 + 6x + 1}{x^2 + 2x + 1}\,dx = 2}$$

5) Le réflexe naturel consiste à décomposer l'intégrale en deux :

$$\int \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\,dx = \int \frac{\cos x}{x}\,dx - \int \frac{\sin x}{x^2}\,dx = \int \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Avec : $\begin{cases} u = \sin(x) \to u' = \cos(x) \\ v = x \to v' = 1 \end{cases}$

On en déduit alors directement la primitive recherchée : $\underline{\int \frac{x\cdot\cos x - \sin x}{x^2}\,dx = \frac{\sin x}{x}}$

6) On pose : $u(x) = \ln x \implies u'(x) = \frac{1}{x}$; $v(x) = x \implies v'(x) = 1$. On a :

$$F = \int_1^2 \ln x\,dx = [x\ln x]_1^2 - \int_1^2 dx = [x\ln x - x]_1^2 = 2\ln 2 - 1 \quad \implies \quad \underline{\int_1^2 \ln x\,dx = 2\ln 2 - 1}$$

Septième partie

1) On pose $t = \sqrt{x+1} \implies dt = \frac{dx}{2\sqrt{x+1}} = \frac{dx}{2t} \implies dx = 2t\,dt$.

Pour $x = 0 \implies t = 1$ et pour $x = 1 \implies t = \sqrt{2}$. Ainsi :

$$\int_0^1 x\sqrt{x+1}\,dx = \int_1^{\sqrt{2}} (t^2 - 1) \times t \times 2t\,dt = \int_1^{\sqrt{2}} (2t^4 - 2t^2)\,dt = \left[\frac{2}{5}t^5 - \frac{2}{3}t^3\right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2} + 4}{15}$$

$$\underline{\int_0^1 x\sqrt{x+1}\,dx = \frac{4\sqrt{2} + 4}{15}}$$

2) On pose $t = \sqrt{1-x} \implies dt = -\frac{dx}{2\sqrt{1-x}} = -\frac{dx}{2t} \implies dx = -2t\,dt$.

Pour $x = -3 \implies t = \sqrt{1-(-3)} = 2$ et pour $x = -8 \implies t = \sqrt{1-(-8)} = 3$. Ainsi :

$$\int_{-8}^{-3} x\sqrt{1-x}\,dx = \int_3^2 (1 - t^2) \times t \times (-2t)\,dt = \int_2^3 (2t^2 - 2t^4)\,dt = \left[\frac{2}{3}t^3 - \frac{2}{5}t^5\right]_2^3 = -\frac{1076}{15}$$

$$\underline{\int_{-8}^{-3} x\sqrt{1-x}\,dx = -\frac{1076}{15}}$$

Thierno Korka DIALLO – Directeur Technique de SENESAC
Ingénieur électromécanicien, diplômé de l'Ecole Polytechnique de Thiès

3) On pose $t = \sqrt{2x+1} \Rightarrow dt = \frac{dx}{\sqrt{2x+1}} = \frac{dx}{t} \Rightarrow dx = tdt.$

Pour $x = 0 \Rightarrow t = 1$ et pour $x = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \sqrt{2}$. Ainsi :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^2\sqrt{2x+1}\,dx = \int_1^{\sqrt{2}} \left(\frac{t^2-1}{2}\right) t^2\,dt = \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{2}} (t^4 - t^2)\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{11\sqrt{2}-4}{210}$$

$$\underline{\int_0^{\frac{1}{2}} x^2\sqrt{2x+1}\,dx = \frac{11\sqrt{2}-4}{210}}$$

Huitième partie

1) $\int \sin^3 x\cos^4 x dx = \int (t^2-1)t^4 dt = \frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + a = \frac{\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^5 x}{5} + a.$

$$\underline{\int \sin^3 x\cos^4 x dx = \frac{\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^5 x}{5} + a}$$

2) $\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2} = \int \frac{dt}{t(t+1)^2} = \int \left(\frac{1}{2t} - \frac{1}{2(t+1)^2} - \frac{1}{2(t+1)}\right) dt = \ln t + \frac{1}{2(t+1)} - \frac{1}{2}\ln(t+1)$

Donc : $\underline{\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2} = 2\ln|x| + \frac{1}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)}$

3) On rappelle que : $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$. D'autre part :

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow dt = \frac{1}{2}\left(1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)dx = \frac{1}{2}(1+t^2)dx \Rightarrow dx = \frac{2tdt}{1+t^2}$$

Ainsi : $\int \frac{dx}{1+\sin x} = \int \frac{2dt}{1+t^2} \times \frac{1}{1+\frac{2dt}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{(1+t^2)^2} = -\frac{2}{1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)} + k$

$$\underline{\int \frac{dx}{1+\sin x} = \frac{2}{1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)} + k}$$

Neuvième partie

1) On pose $x = \sqrt{a+t} \Rightarrow x^2 = a + t \Rightarrow t = x^2 - a.$

On a : $x = \sqrt{a+t} \Rightarrow dx = \frac{1}{2\sqrt{a+t}}dt = \frac{1}{2x}dt \Rightarrow dt = 2xdx$

Pour $t = 2 \Rightarrow x = \sqrt{a+2}$; Pour $t = 1 \Rightarrow x = \sqrt{a+1}$

Alors :

$$\int_1^2 t^2\sqrt{a+t}\,dt = \int_{\sqrt{a+1}}^{\sqrt{a+2}} (x^2-a)^2 \times x \times 2x\,dx = \int_{\sqrt{a+1}}^{\sqrt{a+2}} (2x^6 - 4ax^4 + 2a^2x^2)\,dx$$

Vous savez faire la suite !

2) On pose $x = \sqrt{t+1} \Rightarrow x^2 = t+1 \Rightarrow t = x^2 - 1$.

On a : $x = \sqrt{t+1} \Rightarrow dx = \frac{1}{2\sqrt{t+1}}dt = \frac{1}{2x}dt \Rightarrow dt = 2xdx$

Pour $t = 3 \Rightarrow x = \sqrt{2+2} = 2$; Pour $t = 0 \Rightarrow x = \sqrt{0+1} = 1$

Alors :

$$\int_0^3 \frac{t}{\sqrt{1+t}}dt = \int_1^2 \frac{x^2-1}{x}2xdx = \int_1^2 (2x^2-2)\,dx = \left[\frac{2}{3}x^3 - 2x\right]_1^2 = \frac{8}{3} \Rightarrow \underline{\int_0^3 \frac{t}{\sqrt{1+t}}dt = \frac{8}{3}}$$

3) On trouve : $\int_0^{\sqrt{3}} t\sqrt{1+t^2}\,dt = \frac{7}{3}$

4) On pose $t = \sqrt{2x+3} \Rightarrow t^2 = 2x+3 \Rightarrow x = \frac{t^2-3}{2} \Rightarrow dx = tdt$ et donc :

$$\int_{-1}^0 \frac{x}{\sqrt{2x+3}}dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{t^2-3}{2}dt = \left[\frac{\frac{t^3}{3} - 3t}{2}\right]_1^{\sqrt{3}} = \frac{4}{3} - \sqrt{3} \Rightarrow \underline{\int_{-1}^0 \frac{x}{\sqrt{2x+3}}dx = \frac{4}{3} - \sqrt{3}}$$

Dixième partie

1) On effectue le changement de variable suivant : $1 - x^2 = u \Rightarrow du = -2xdx$

L'intégrale d'origine devient : $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\int \frac{du}{2\sqrt{u}} = -\sqrt{u} = -\sqrt{1-x^2}$. Ainsi $\underline{\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\sqrt{1-x^2}}$

2) On effectue le changement de variable suivant : $u = \ln x \Rightarrow dx = xdu$

L'intégrale d'origine devient : $\int \frac{dx}{x\cdot\ln^3 x} = \int \frac{du}{u^3} = -\frac{1}{2u^2} = -\frac{1}{2\ln^2 x}$. Ainsi $\underline{\int \frac{dx}{x\cdot\ln^3 x} = -\frac{1}{2\ln^2 x}}$

3) On effectue le changement de variable $u(x)$ suivant et on en déduit sa dérivée $u'(x)$ et sa différentielle du :

$$u = \sqrt{1+x^2} \Rightarrow u^2 = 1 + x^2 \Rightarrow u' = \frac{du}{dx} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

L'intégrale d'origine s'écrit :

$$\int x\sqrt{1+x^2}dx = \int x\cdot\sqrt{1+x^2}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int (1+x^2)\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int u^2du = \frac{u^3}{3} = \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$\underline{\int x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

4) On effectue le changement de variable $u(x)$ suivant et on en déduit sa réciproque $x(u)$, sa dérivée $u'(x)$ et une relation entre la différentielle dx et la différentielle du :

$$u = \frac{1}{x-1} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{u} + 1 \quad \Rightarrow \quad u' = \frac{du}{dx} = -\frac{1}{(x-1)^2} = -\frac{u}{x-1} \Rightarrow \frac{dx}{1-x} = \frac{du}{u}$$

Attention, u est forcément négatif puisque : $1 - x^2 \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad x \leqslant 1$

Il en résulte que : $u < 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{u^2} = -u$

La conséquence est le signe "moins" qui apparaît sur la seconde ligne de la démonstration ci-dessous.

L'intégrale d'origine devient :

$$\int \frac{dx}{(1-x)\cdot\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{du}{u\cdot\sqrt{1-\left(1+\frac{1}{u}\right)^2}} = -\int \frac{du}{\sqrt{-2u-1}} = \frac{1}{2}\int (-2)(-2u-1)^{-\frac{1}{2}}du$$

$$\int \frac{dx}{(1-x)\cdot\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{-2u-1} = \sqrt{\frac{-2}{x-1} - 1} = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\int \frac{dx}{(1-x)\cdot\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}$$

5) On effectue le changement de variable suivant : $u = \cos x \quad \Rightarrow \quad du = -\sin x dx$

L'intégrale d'origine devient : $\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{du}{u} = -\ln|\cos x|$. Ainsi $\underline{\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x|}$

6) On effectue un premier changement de variable : $u = \sin x \quad \Rightarrow \quad du = \cos x dx$

Il vient : $\int \sin x \cdot \cos x \cdot \sqrt{2+\sin x}\,dx = \int u\sqrt{2+u}du$

On effectue un second changement de variable : $t = \sqrt{2+u} \quad \Rightarrow \quad du = 2tdt$

Ce qui conduit à la primitive recherchée :

$$\int u\sqrt{2+u}du = \int (t^2-2)\cdot t\cdot 2\cdot tdt = 2\int t^2(t^2-2)dt = \int (t^4-2t^2)dt = \frac{2t^5}{5} - \frac{4t^3}{3}$$

$$= \frac{2}{5}\left(\sqrt{2+\sin x}\right)^5 - \frac{4}{3}\left(\sqrt{2+\sin x}\right)^3$$

$$\underline{\int u\sqrt{2+u}\,du = \frac{2}{5}\left(\sqrt{2+\sin x}\right)^5 - \frac{4}{3}\left(\sqrt{2+\sin x}\right)^3}$$

7) Soit à calculer : $I_3 = \int \frac{dx}{\sin x}$.

Première méthode :

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1}{\sin x}dx = \int \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}dx = \frac{1}{2}\int \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}dx + \frac{1}{2}\int \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}dx$$

$$I_3 = \frac{1}{2}\int \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}dx + \frac{1}{2}\int \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}dx = -\ln\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \ln\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) + k = \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + k$$

Finalement : $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + k$

Deuxième méthode :

On pose $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$ alors :

$$I = \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dt}{t^2 - 1} = \frac{1}{2}\left(\int \frac{dt}{1-t} - \int \frac{dt}{t+1}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-t}{1+t}\right) + k = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right) + k$$

Or : $1 - \cos x = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ et $1 + \cos x = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$ donc :

$$I = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right) + k = \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + k$$

Finalement : $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + k$

Troisième méthode :

En effet, $\frac{1}{\sin x} = \frac{\sin x}{\sin^2 x} = \frac{\sin x}{1-\cos^2 x} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin x}{1-\cos x} - \frac{\sin x}{1+\cos x}\right)$ donc :

$$I = \int \frac{dx}{\sin x} = \frac{1}{2}\int \left(\frac{\sin x}{1-\cos x} - \frac{\sin x}{1+\cos x}\right)dx = \frac{1}{2}(\ln(1-\cos x) + \ln(1+\cos x)) + k$$

$$I = \frac{1}{2}(\ln(1-\cos x) + \ln(1+\cos x)) + k = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right) + k = \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + k$$

Finalement : $I = \int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + k$

8) On obtient en utilisant l'une des trois méthodes $J = \int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right) + k$

Onzième partie

1/ On pose $t = \sqrt[3]{x}$. On trouve $\underline{A = -\frac{409}{420} + \frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi}{4}}$

2/ On pose $t = \frac{1}{x}$. On trouve $\underline{B = 6}$

3/ On pose $t = \frac{\pi}{4} - x$. On trouve $\underline{C = \frac{\pi}{8}\ln 2}$

Huitième partie

1/ Il suffit de remarquer que la fonction à intégrer est encore de la forme suivante :

$$A = \int \frac{\ln x - 1}{x^2}dx = \int \frac{x' \ln x - x \times \frac{1}{x}}{x^2}dx = \int \frac{u'v - uv'}{v^2}dx = -\frac{\ln x}{x} \Rightarrow \underline{\int \frac{\ln x - 1}{x^2}dx = -\frac{\ln x}{x}}$$

2/ On décompose la fraction : $\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)$ donc :

$$B = \int_2^4 \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\int_2^4 \frac{dx}{x-1} - \int_2^4 \frac{dx}{x+1}\right) = \frac{1}{2}[\ln(x-1) - \ln(x+1)]_2^4 = \ln 3 - \ln\sqrt{5}$$

$$\underline{\int_2^4 \frac{dx}{x^2-1} = \ln 3 - \ln\sqrt{5}}$$

3/ On décompose la fraction : $\frac{x^2+2x-1}{x+1} = x + 1 - \frac{2}{x+1}$ donc :

$$C = \int_0^1 \frac{x^2+2x-1}{x+1}dx = \int_0^1 \left(x + 1 - \frac{2}{x+1}\right)dx = \left[\frac{x^2}{2} + x - 2\ln(x+1)\right]_0^1 = \frac{3}{2} - 2\ln 2$$

$$\underline{\int_0^1 \frac{x^2+2x-1}{x+1}dx = \frac{3}{2} - 2\ln 2}$$

4/ On décompose : $\frac{x^2}{(1+x)(-1+x)(2+x)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}$

$a = \lim_{x \to 1} \frac{x^2}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{6}$ $\quad b = \lim_{x \to -1} \frac{x^2}{(x-1)(x+2)} = -\frac{1}{2}$ $\quad c = \lim_{x \to -2} \frac{x^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{4}{3}$

Donc : $\frac{x^2}{(1+x)(-1+x)(2+x)} = \frac{1}{6}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} + \frac{4}{3}\frac{1}{x+2}$

Ainsi :

$$\int_2^3 \frac{x^2}{(1+x)(-1+x)(2+x)}dx = \int_2^3\left(\frac{1}{6}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}+\frac{4}{3}\frac{1}{x+2}\right)dx = \left[\frac{1}{6}\ln(x-1)-\frac{1}{2}\ln(x+1)+\frac{4}{3}\ln x+2)\right]_2^3$$

$$\int_2^3 \frac{x^2}{(1+x)(-1+x)(2+x)}dx = \frac{\ln 3}{2}+\frac{4\ln 5}{3}-\frac{7\ln 2}{2}$$

$$\underline{\int_2^3 \frac{x^2}{(x+1)(x-1)(x+2)}dx = \frac{\ln 3}{2}+\frac{4\ln 5}{3}-\frac{7\ln 2}{2}}$$

EXERCICE 3

1) En effet,

$$\cos^4 x = \cos^2 x(\cos^2 x) = \cos^2 x(1-\sin^2 x) = \cos x\,(\cos x - \cos x\sin^2 x)$$

Donc : $\underline{I = \int_0^\pi \cos x\,(\cos x - \cos x\sin^2 x)dx}$

2) On pose $u'(x) = \cos x - \cos x\sin^2 x$ donc $u(x) = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3}$ et $v(x) = \cos x$ donc $v'(x) = -\sin x$.

Ainsi :

$$I = \int_0^\pi \cos^4 x dx = \underbrace{\left[\cos x\left(\sin x - \frac{\sin^3 x}{3}\right)\right]_0^\pi}_{0} + \int_0^\pi \sin x\left(\sin x - \frac{\sin^3 x}{3}\right)dx = \int_0^\pi \sin^2 x dx - \int_0^\pi \frac{\sin^4 x}{3}dx$$

$$= \int_0^\pi \sin^2 x dx - \frac{1}{3}J$$

Donc : $\underline{I = \int_0^\pi \sin^2 x dx - \frac{1}{3}J}$

3) En effet,

$$\sin^4 x = \sin^2 x(\sin^2 x) = \sin^2 x(1-\cos^2 x) = \sin x\,(\sin x - \sin x\cos^2 x)$$

On pose $u'(x) = \sin x - \sin x\cos^2 x$ donc $u(x) = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3}$ et $v(x) = \sin x$ donc $v'(x) = \cos x$.

Ainsi :

$$J = \int_0^\pi \sin^4 x dx = \underbrace{\left[\sin x\left(-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3}\right)\right]_0^\pi}_{0} + \int_0^\pi \cos x\left(\cos x - \frac{\cos^3 x}{3}\right)dx = \int_0^\pi \cos^2 x dx - \int_0^\pi \frac{\cos^4 x}{3}dx$$

$$= \int_0^\pi \cos^2 x dx + \frac{1}{3}I$$

Donc : $\underline{J = \int_0^\pi \cos^2 x dx - \frac{1}{3}I}$

4—5) On a :

$$I = \int_0^{\pi} \sin^2 x dx - \frac{1}{3}J \quad ; \quad J = \int_0^{\pi} \cos^2 x dx - \frac{1}{3}I$$

Donc :

$$I + J = \int_0^{\pi} (\cos^2 x + \sin^2 x) dx - \frac{1}{3}(I + J) = \pi - \frac{1}{3}(I + J) \Rightarrow I + J + \frac{3\pi}{4}$$

$$J - I = \int_0^{\pi} (\cos^2 x - \sin^2 x) dx + \frac{1}{3}(J - I) = \underbrace{\int_0^{\pi} \cos 2x \, dx}_{0} + \frac{1}{3}(J - I) \Rightarrow J - I = 0$$

On obtient un système d'équations à deux inconnues : $\begin{cases} I + J = \frac{3\pi}{4} \\ J - I = 0 \end{cases}$ ce qui nous permet de tirer : $I = J = \frac{3\pi}{8}$

EXERCICE 4

Première partie

L'aire cherchée est égale à : $\mathcal{A} = \int_{-2}^{2} |x^2 - 1| \, dx$. On étudie d'abord le signe de $x^2 - 1$.

x	$-\infty$	-1	1	$-\infty$
$x^2 - 1$	$+$	$-$	$+$	
$\lvert x^2 - 1 \rvert$	$x^2 - 1$	$1 - x^2$	$x^2 - 1$	

On a :

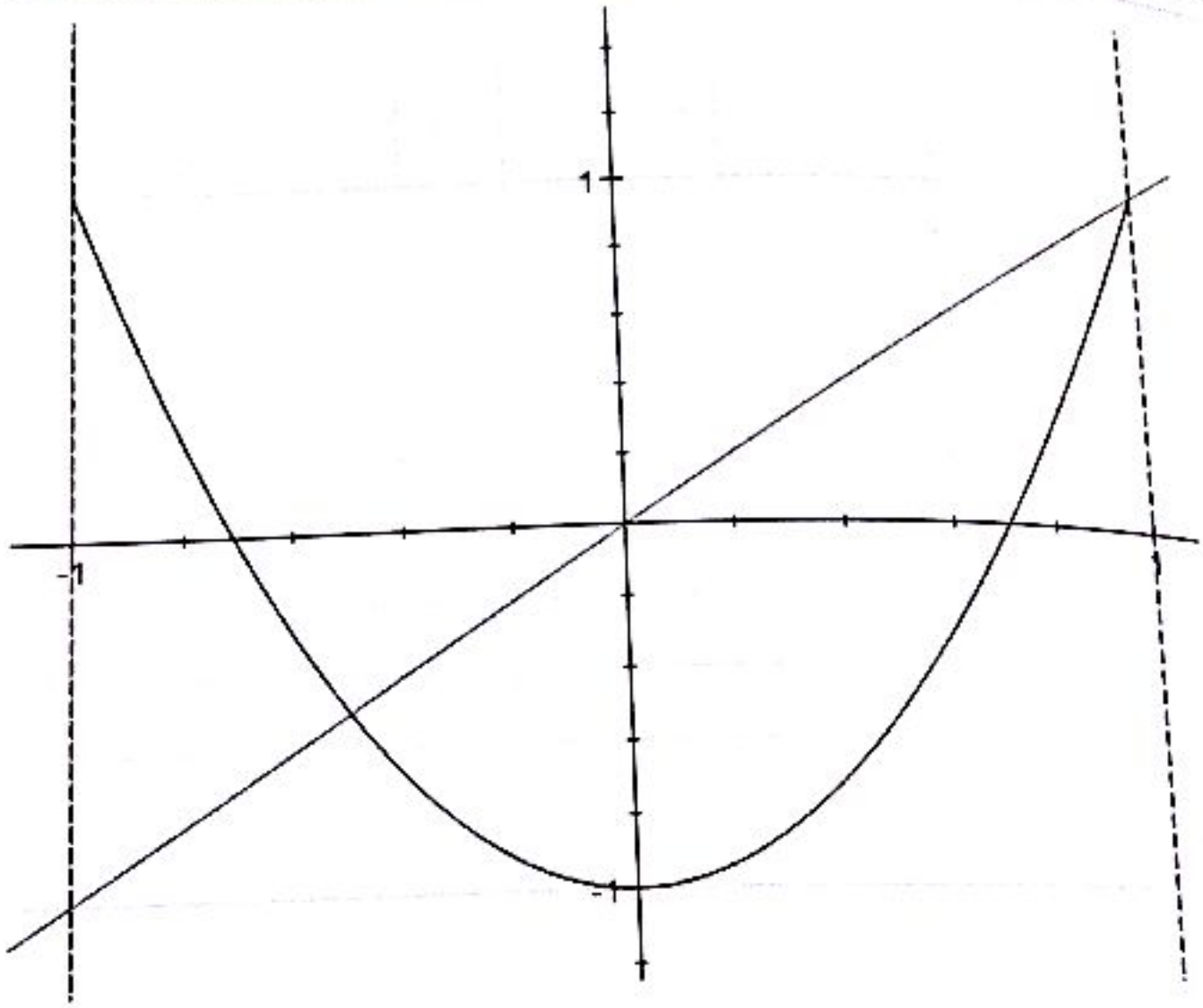
$$\mathcal{A} = \int_{-2}^{2} |x^2 - 1| \, dx = \int_{-2}^{-1} |x^2 - 1| \, dx + \int_{-1}^{1} |x^2 - 1| \, dx + \int_{1}^{2} |x^2 - 1| \, dx$$

$$= \int_{-2}^{-1} (x^2 - 1) \, dx + \int_{-1}^{1} (1 - x^2) \, dx + \int_{1}^{2} (x^2 - 1) \, dx$$

$$= \left[\frac{t^3}{3} - t\right]_{-2}^{-1} + \left[t - \frac{t^3}{3}\right]_{-\&}^{1} + \left[\frac{t^3}{3} - t\right]_{1}^{2} = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = 4\,u$$

L'unité d'aire u valant 4 cm², on a : $\mathcal{A} = 4 \times 4 \text{ cm}^2 = 16 \text{ cm}^2$

Deuxième partie



On pose $h(x) = |g(x) - f(x)|$. L'aire cherchée est égale à : $\mathcal{A} = \int_{-1}^{1} h(x)\,dx$. Donc :

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^{1} |x - (2x^2 - 1)|\,dx = \int_{-1}^{1} |-2x^2 + x + 1|\,dx = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} |-2x^2 + x + 1|\,dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{1} |-2x^2 + x + 1|\,dx$$

$$= \frac{38}{24}\,u = \frac{38}{24} \times \left(2\sqrt{2}\right)^2 = \frac{38}{3}\ \text{cm}^2$$

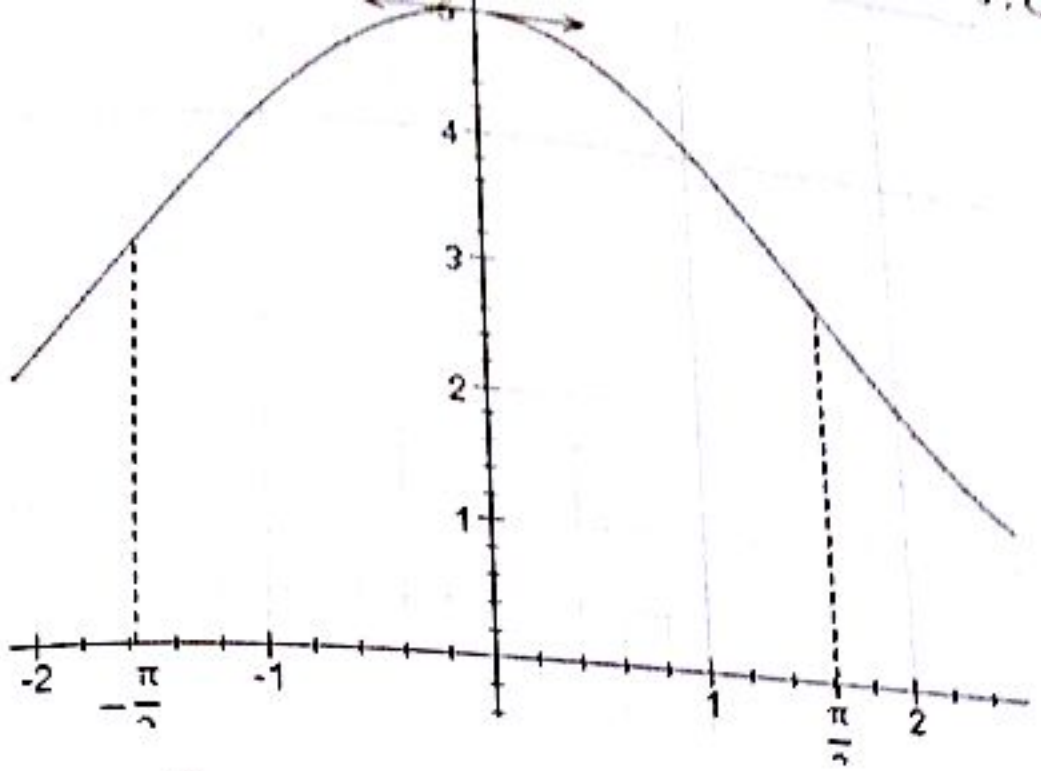
Ainsi : $\underline{\mathcal{A} = \frac{38}{3}\ \text{cm}^2}$

Troisième partie

1) La fonction $f(x) = 3 + 2\cos x$ est paire donc on peut restreindre son domaine d'étude à $\mathbb{R}_+$.

De plus, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $x \longmapsto -2\sin x$. On en déduit, ci-dessous, le tableau de variation de f.

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	$-$	
$f(x)$	5	$\searrow$	3



$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3 + 2\cos x)\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 + 2\cos x)\,dx = 2[3x + 2\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = (3\pi + 4)u = (3\pi + 4) \times 2 \times 3$$
$$= 80{,}52 \text{ cm}^2$$

Donc : $I = 80{,}52 \text{ cm}^2$

; On trouve : $I = \int_1^2 \frac{2}{x^2}\,dx = 1\,u = 6 \text{ cm}^2$

EXERCICE 5

1) On a : $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0 t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\,dt = 1$. Donc : $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$

2) En effet, $I(n+1) - I(n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t(\sin t - 1)dt \leq 0$ car $\sin t - 1 \leqslant 0$ et $\sin^n t \geqslant 0$ dans $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

On vient de prouver que (I_n) est décroissante. Par ailleurs, (I_n) est une suite positive sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ donc (I_n) est minorée par 0. (I_n) est donc convergente car étant décroissante et minorée par 0.

3) En effet,

$$I_n - I_{n-2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} t\,(\sin^2 t - 1)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos^2 t \sin^{n-2} t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos t\,(\cos t \sin^{n-2} t)\,dt$$
$$= \left[\frac{-\cos t \sin^{n-1} t}{n-1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t = -\frac{1}{n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t = -\frac{I_n}{n-1}$$

Donc $I_n - I_{n-2} = -\frac{I_n}{n-1}$ ou encore $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$

EXERCICE 6

1) On sait que pour tout $0 \leqslant t \leqslant 1$ on a : $t^n e^{-t} \geqslant 0$ et $-1 \leqslant t-1 \leqslant 0$ donc :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 t^n e^{-t}(t-1)dt \leqslant 0 \quad \Rightarrow \quad (I_n) \downarrow$$

De plus comme $e^{-t} > 0$ pour tout $0 \leqslant t \leqslant 1$, donc $t^n e^{-t} \geqslant 0$ car $t^n \geqslant 0$.

Comme (I_n) est décroissante et est minorée par 0 donc (I_n) converge.

2) En effet, pour tout $0 \leqslant t \leqslant 1$, on a $0 \leqslant e^{-t} \leqslant 1$ donc $0 \leqslant t^n e^{-t} \leqslant t^n$ ainsi :

$$0 \leqslant \int_0^1 t^n e^{-t} dt \leqslant \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1} \quad \Rightarrow \quad \underline{0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}}$$

En utilisant le théorème des gendarmes, on conclut que (I_n) converge vers 0.

EXERCICE 7

1) Sachant que $\sin(2n+1)t - \sin(2n-1)t = 2\sin t\cos(2n)t$, on a alors :

$$I_n - I_{n-1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin t\cos(2n)t}{\sin t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos(2n)t\, dt = \left[\frac{\sin(2n)t}{n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{I_n - I_{n-1} = 0}$$

2) On a : $I_n - I_{n-1} = 0$ donc I_n est indépendant de n. On a donc :

$$I_n = I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2dt = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \underline{I_n = \frac{\pi}{2}}$$

3) On a :

$$I_n - I_{n-1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nt - \sin^2(n-1)t}{\sin^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin t\cos(2n)t}{\sin t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos(2n)t\, dt = \left[\frac{\sin(2n)t}{n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

Or : $\begin{cases} \sin nt - \sin(n-1)t = 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{2n-1}{2}\right)t \\ \sin nt + \sin(n-1)t = 2\cos\left(\frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{2n-1}{2}\right)t \end{cases} \Rightarrow \sin^2 nt - \sin^2(n-1)t = \sin t \sin(2n-1)t$

Donc :

$$I_n - I_{n-1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n-1)t}{\sin t} dt = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \underline{I_n = \frac{n\pi}{2}}$$

EXERCICE 8

$\frac{1}{0!}\int_0^1 (1-x)^0 e^x dx = \int_0^1 e^x dx = e - 1$

$$I_1 = \frac{1}{1!}\int_0^1 (1-x)e^x\,dx = [(1-x)e^x]_0^1 + \int_0^1 e^x\,dx = e-2 \quad \Rightarrow \quad \underline{I_1 = e-2}$$

2) En posant $u'(x) = e^x$ et $v(x) = (1-x)^n$, on obtient :

$$I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n e^x dx = \frac{1}{n!}\left([(1-x)^n e^x]_0^1 + n\int_0^1 (1-x)^{n-1}e^x dx\right)$$
$$= \frac{[(1-x)^n e^x]_0^1}{n!} + \frac{n}{n!}\int_0^1 (1-x)^{n-1}e^x dx = -\frac{1}{n!} + I_{n-1}$$

Donc : $\underline{I_n - I_{n-1} = -\frac{1}{n!}}$

Cette relation est vérifiée pour tout entier naturel p :

$$I_p - I_{p-1} = -\frac{1}{p!} \quad \Rightarrow \quad \sum_{p=1}^{n}(I_p - I_{p-1}) = -\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p!}$$

Or, $\sum_{p=1}^{n}(I_p - I_{p-1}) = I_n - I_0$ donc,

$$I_n - I_0 = -\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p!} \quad \Rightarrow \quad I_n = I_0 - \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p!} = e - 1 - \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p!} = e - \sum_{p=0}^{n}\frac{1}{p!} \quad \Rightarrow \quad \underline{\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = e - \sum_{p=0}^{n}\frac{1}{p!}}$$

3) Pour tout x de $[0\,;\,1]$, on a : $0 \leqslant (1-x)^n \leqslant 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{0 \leqslant (1-x)^n e^x \leqslant e^x \leqslant e}$

Ainsi :

$$0 \leqslant \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n e^x dx \leqslant \frac{1}{n!}\int_0^1 e\,dx = \frac{e}{n!} \quad \Rightarrow \quad 0 \leqslant \lim_{n\to+\infty} I_n \leqslant \frac{e}{n!} = 0$$

Donc $\underline{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0}$ en vertu du théorème des gendarmes.

4) En effet,

$$I_n = e - \sum_{p=0}^{n}\frac{1}{p!} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty}\left(e - \sum_{p=0}^{n}\frac{1}{p!}\right) = e - \lim_{n\to+\infty}\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{p!} = 0$$

Donc,

$$e = \lim_{n\to+\infty}\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{p!} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) \quad \Rightarrow \quad \underline{e = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)}$$

EXERCICE 9

CE $\Sigma\pi\int$

1) On a :

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^n x \cos x \, dx = \left[\frac{\sin^{n+1} x}{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} \quad \Rightarrow \quad \underline{\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^n x \cos x \, dx = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}}$$

Par ailleurs,

$$I_{n+2} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^{n+2} x - \sin^n x}{\cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x(\sin^2 x - 1)}{\cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{-\cos x \sin^n x}{\cos x} dx$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^n x \cos x \, dx = -\frac{1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}$$

$$\underline{I_{n+2} - I_n = -\frac{1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}}$$

2) On a :

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = [-\ln(\cos x)]_0^{\frac{\pi}{3}} = \ln 2 \quad \Rightarrow \quad \underline{\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = \ln 2}$$

Pour $n = 1$, la relation précédente (question 1) devient :

$$I_3 - I_1 = -\frac{1}{1+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{1+1} = -\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = -\frac{3}{8} \quad \Rightarrow \quad \underline{I_3 = I_1 - \frac{3}{8} = \ln 2 - \frac{3}{8}}$$

Pour $n = 3$, la relation précédente (question 1) devient :

$$I_5 - I_3 = -\frac{1}{3+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3+1} = -\frac{1}{4} \times \frac{9}{16} = -\frac{9}{64} \quad \Rightarrow \quad \underline{I_5 = I_3 - \frac{9}{64} = \ln 2 - \frac{3}{8} - \frac{9}{64} = \ln 2 - \frac{33}{64}}$$

3) a) Il suffit de vérifier que $\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = \frac{1}{\cos x}$ ce qui est facile à vérifier. En effet,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}}{\cos^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{\cos x} = g(x)$$

Donc <u>f est une primitive de la fonction g</u>.

b) On a :

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x} = \left[\ln\left(\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \ln(\sqrt{3} + 2) \quad \Rightarrow \quad \underline{I_0 = \ln(\sqrt{3} + 2)}$$

$$I_2 - I_0 = -\frac{1}{0+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{0+1} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \underline{I_2 = I_0 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \ln(\sqrt{3}+2) - \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

EXERCICE 10

1) La fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur l'intervalle $[k\,;\,k+1]$. En particulier, pour tout $x \in [k\,;\,k+1]$, on a :

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{k}$$

On intègre cette inégalité pour x parcourant l'intervalle $[k\,;\,k+1]$. On en déduit que :

$$\frac{k+1-k}{k+1} = \frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leqslant \frac{k+1-k}{k} = \frac{1}{k} \Rightarrow \underline{\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leqslant \frac{1}{k}}$$

2) Sommons les inégalités précédentes pour k allant de 1 à $n-1$. Le membre le plus à droite de l'inégalité est :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} = u_n - \frac{1}{n}$$

Le membre au milieu est :

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} + \int_2^3 \frac{dx}{x} + \cdots + \int_{n-1}^n \frac{dx}{x} = \int_1^n \frac{dx}{x} = \ln n$$

Enfin, le membre le plus à gauche est :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} = u_n - 1$$

On a ainsi obtenu la première inégalité demandée. De $\underline{u_n - 1 \leqslant \ln n}$, on tire facilement $v_n = u_n - \ln n \leqslant 1$.

De l'autre inégalité, $\underline{\ln n \leqslant u_n - \frac{1}{n} \leqslant u_n}$, on tire $\underline{v_n = u_n - \ln n \geqslant 0}$

3) On a facilement :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln n) = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} \Rightarrow \underline{v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{dx}{x}}$$

4) On va prouver que la suite (v_n) est décroissante. C'est en effet une conséquence de la question précédente et de l'inégalité : $\frac{1}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{dx}{x}$.

Prouvée à la première question. Ainsi, la suite $\underline{(v_n)}$ est décroissante et minorée par 0 donc elle est convergente. En revanche, puisque $u_n \geqslant \ln n - \frac{1}{n}$, on en déduit que $\underline{(u_n)}$ tend vers $+\infty$.

EXERCICE 12

CE $\Sigma\pi\int$

Première partie

1) On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{x-\ln x} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)} = +\infty$. Ainsi $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

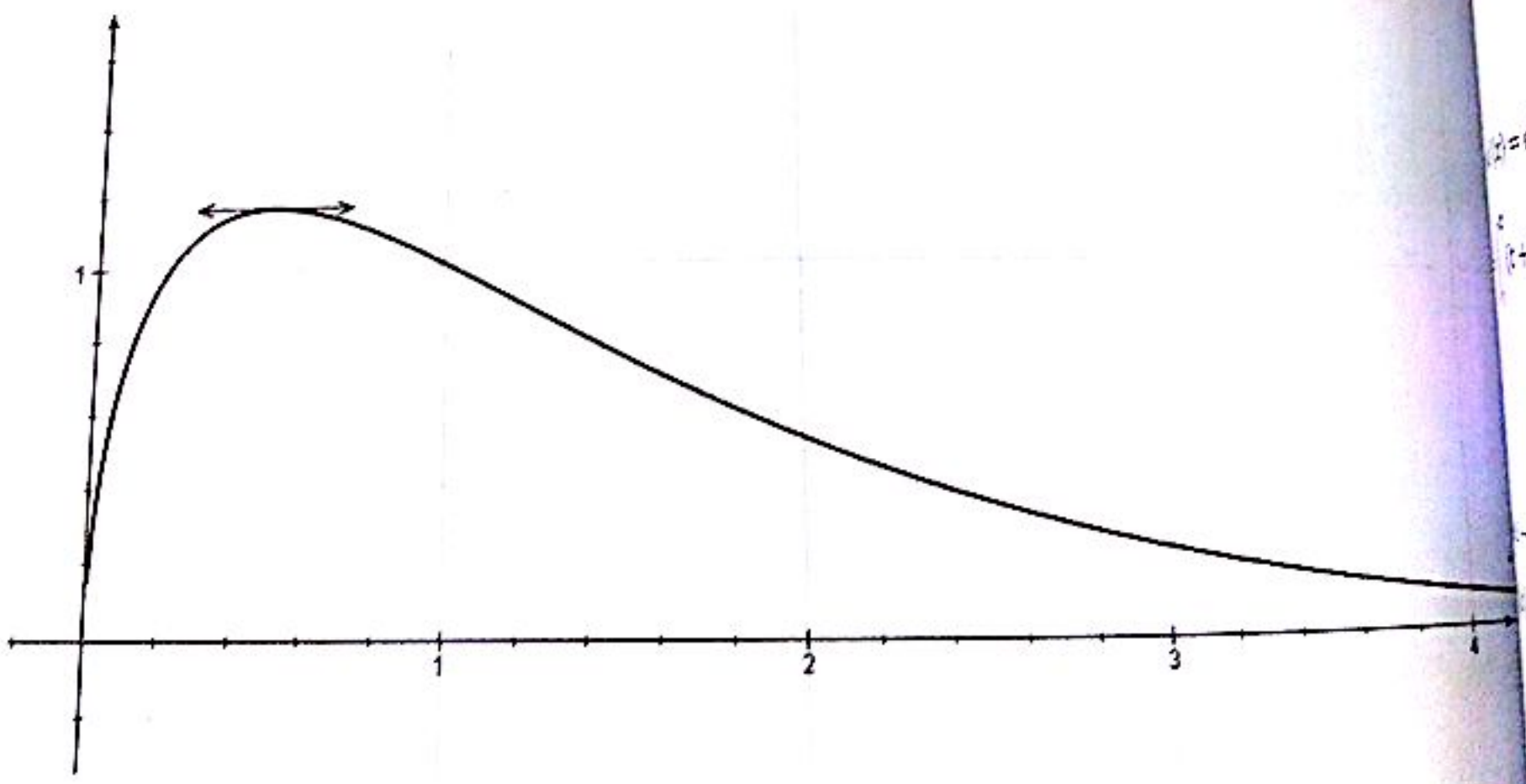
2) On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e}{\sqrt{x}} \times \frac{x}{e^x} = 0 \times 0 = 0$. Ainsi $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Interprétation géométrique : la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote verticale à (C_f) en $+\infty$.

3) On a : $\forall x \in [0\,;+\infty[,\ f'(x) = \frac{(1-2x)e^{1-x}}{2\sqrt{x}}$

4) On obtient :

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\sqrt{\frac{e}{2}}$	$\searrow$	0



Deuxième partie

1) u_n est l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = n$ et $x = n+1$.

2) On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [n, n+1],\quad 1 \leqslant n \leqslant t \leqslant n+1$

Or, f est décroissante sur $[1, +\infty[$ donc : $f(n+1) \leqslant f(t) \leqslant f(n)$

Donc $\int_n^{n+1} f(n+1)dt \leqslant \int_n^{n+1} f(t)dt \leqslant \int_n^{n+1} f(n)dt$ ou encore $\underline{f(n+1) \leqslant u_n \leqslant f(n)}$.

La relation précédente donne $u_n - u_{n-1} \leqslant f(n) - f(n) = 0$ donc $u_n \leqslant u_{n-1}$ c'est-à-dire que la suite (u_n) est décroissante.

On a : $u_n = \int_n^{n+1} f(t)dt$ comme $f(t) \geqslant 0$ pour tout réel t donc pour tout $t \in [n, n+1]$ alors $\int_n^{n+1} f(t)dt \geqslant 0$ ou encore $u_n \geqslant 0$.

Nous avons prouvé que la suite (u_n) est décroissante et est minorée par 0 donc elle converge vers 0.

Troisième partie

1) a) La fonction f est continue et dérivable sur $[1, +\infty[$ et : $\underline{F'(x) = \left(\int_1^x f(t)dt\right)' = f(x) \geqslant 0}$ pour tout $t \in [1, +\infty[$. Comme la dérivée $F'(x) \geqslant 0$ alors la fonction F est croissante sur $[1, +\infty[$.

2) a) Pour tout réel positif t, on a : $\left(\sqrt{t} - \sqrt{2}\right)^2 \geqslant 0$ donc $t - 2\sqrt{2}\sqrt{t} + 2 \geqslant 0$ ou encore $\underline{t + 2 \geqslant 2\sqrt{2}\sqrt{t}}$

b) En effet.

$$t+2 \geqslant 2\sqrt{2}\sqrt{t} \Rightarrow \frac{t+2}{2\sqrt{2}} \geqslant \sqrt{t} \Rightarrow \frac{t+2}{2\sqrt{2}} e^{1-t} \geqslant \sqrt{t} e^{1-t} \Rightarrow \int_1^x \frac{t+2}{2\sqrt{2}} e^{1-t} dt \leqslant \int_1^x \sqrt{t} e^{1-t} dt$$

$$\underline{F(x) \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_1^x (t+2)e^{1-t} dt}$$

c) On pose $u'(x) = e^{1-t} \Rightarrow u(x) = -e^{1-t}$ et $v(x) = t + 2 \Rightarrow v'(x) = 1$

$$I = \int_1^x (t+2)e^{1-t} dt = [-(t+2)e^{1-t}]_1^x + \int_1^x e^{1-t} dt = [-(t+3)e^{1-t}]_1^x = 4 - (x+3)e^{1-x}$$

$$\underline{\int_1^x (t+2)e^{1-t} dt = 4 - (x+3)e^{1-x}}$$

d) D'après 2 — b), $F(x) \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_1^x (t+2)e^{1-t} dt = \frac{4-(x+3)e^{1-x}}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - \frac{(x+3)e^{1-x}}{2\sqrt{2}} \leqslant \sqrt{2}$ et donc $F(x) \leqslant \sqrt{2}$. Et puisque $f(x) \geqslant 0$ pour tout réel alors $F(x) = \int_1^x f(t)dt \geqslant 0$. On conclut que : $\underline{0 \leqslant F(x) \leqslant \sqrt{2}}$

3) On a :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} u_k = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t)dt = \int_1^2 f(t)dt + \int_2^3 f(t)dt + \cdots + \int_{n-1}^n f(t)dt = \int_1^n f(t)dt \quad \underline{S_n = \int_1^n f(t)dt}$$

Donc,

$$S_n - S_{n-1} = \int_{n-1}^n f(t)dt \geqslant 0 \Rightarrow S_n \geqslant S_{n-1} \Rightarrow (S_n)\uparrow$$

De plus, (S_n) est une suite positive (minorée par 0) donc (S_n) est convergente.

On remarque que $S_n = F(n)$ donc $\underline{0 \leqslant S_n \leqslant \sqrt{2}}$

EXERCICE 13

Première partie

Pour tout réel x, on a : $q'(x) = (1-x)e^{-x}$. On déduit le tableau de variation de q.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$q'(x)$		+	0	−	
$q(x)$	$-\infty$	↗	e^{-1}	↘	0

2 — a) Soit $g(x) = x - e^x$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $g'(x) = 1 - e^x$.

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x - e^x = \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{e^x}{x}\right) = -\infty \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} x - e^x = -\infty$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	
$g(x)$	$-\infty$	↗	−1	↘	$-\infty$

La fonction g admet un maximum négatif donc $g(x) < 0$ pour tout réel x. Alors $x - e^x < 0$ ou encore $x < e^x$ (1) pour tout réel x.

En multipliant (1) par e^{-x}, on obtient $\underline{xe^{-x} = q(x) < 1}$.

L'inégalité (1) étant stricte, on a donc $x < e^x \implies \underline{x \neq e^x}$.

b) La fonction q admet un maximum au point $x_0 = 1$ donc $q(x) \leqslant q(1) = \frac{1}{e}$ (2).

Par ailleurs, pour tout réel positif x, on a : $xe^{-x} \geqslant 0$ (3).

Les relations (2) et (3) donnent $\underline{0 \leqslant xe^{-x} \leqslant e^{-1}}$

Deuxième partie

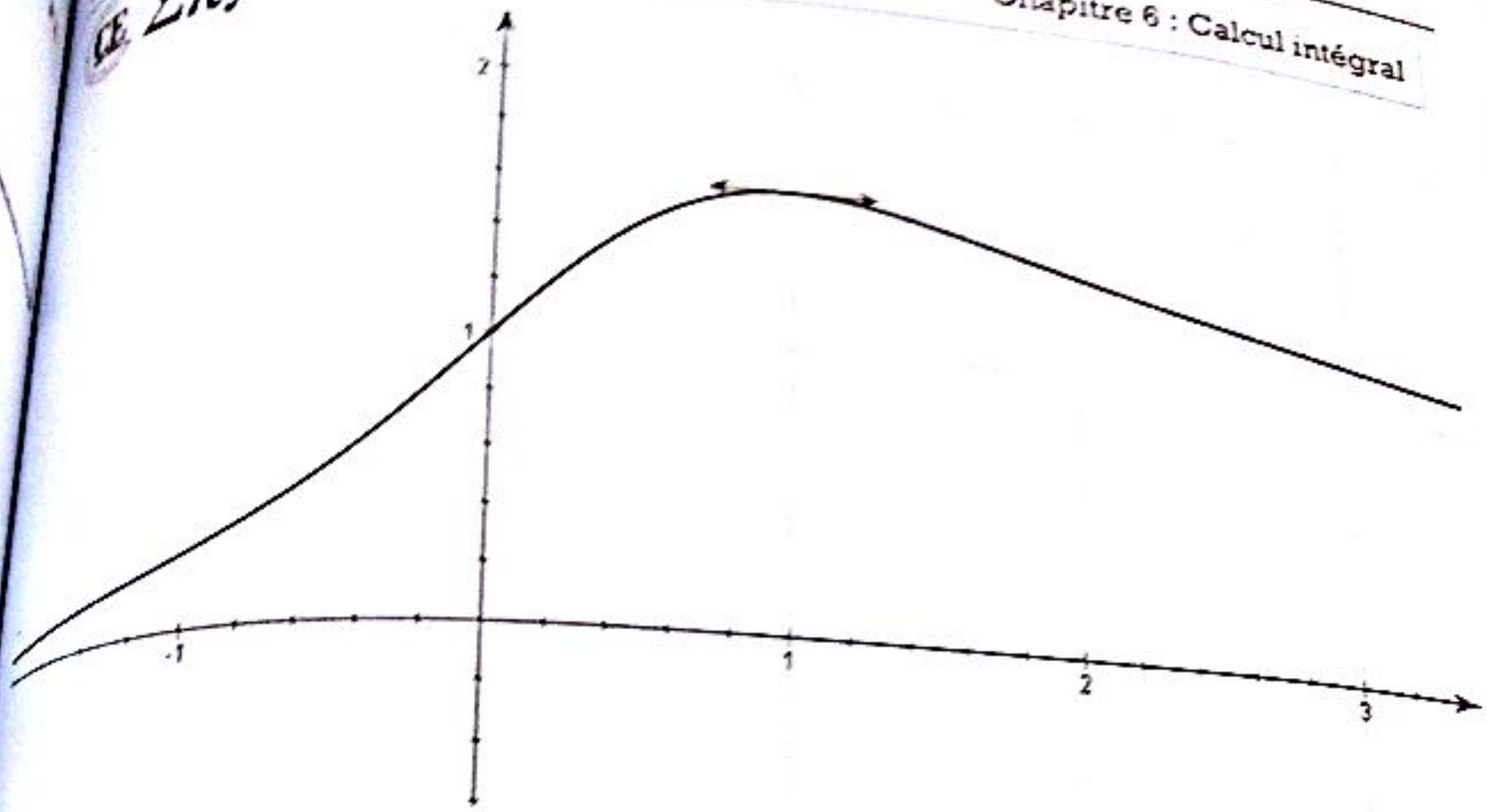
1) Domaine de définition de la fonction f: $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x - x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1 - \frac{x}{e^x}} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{e^x - x} = 0$$

Pour tout réel x, on a : $f'(x) = \dfrac{(1-x)e^x}{(e^x - x)^2}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
f	0	↗	1,58	↘	0

2) Courbe



c) La fonction f admet un maximum au point $x_0 = 1$ donc $f(x) \leq f(1) = \dfrac{e}{e-1}$ (4)

De plus, pour tout réel x positif, on a $\begin{cases} \dfrac{1}{e^x - x} \phi\ 0 \\ e^x \phi\ 0 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{e^x}{e^x - x} \phi\ 0$ (5)

Les relations (4) et (5) donnent : $\underline{0 < f(x) < \frac{e}{e-1}}$

Troisième partie

1) La fonction G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a :

$$G'(x) = \left(-x - \frac{1}{2}\right)e^{-2x} - 2e^{-2x}\left(-\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right) = xe^{-2x} = g(x)$$

Comme $G'(x) = g(x)$ donc La fonction <u>G est une primitive de g</u>.

2) On fait une intégration par parties : $u'(x) = e^{-x} \Rightarrow u(x) = -e^{-2x}$ et $v(x) = x \Rightarrow v'(x) = 1$

$$\int_0^1 xe^{-x}dx = [-xe^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx = [-(1+x)e^{-x}]_0^1 = 1 - \frac{2}{e} \qquad \underline{\int_0^1 xe^{-x}dx = 1 - \frac{2}{e}}$$

$$I_1 = \int_0^1 \left(1 + \frac{x}{e^x}\right)dx = \int_0^1 dx + \int_0^1 \frac{x}{e^x}dx = 1 + 1 - \frac{2}{e} = 2 - \frac{2}{e} \qquad \underline{\int_0^1 \left(1 + \frac{x}{e^x}\right)dx = 2 - \frac{2}{e}}$$

3) On a :

$$I_2 = \int_0^1 \left(1+\frac{x}{e^x}\right)^2 dx = \int_0^1 \left(1+2\frac{x}{e^x}+x^2e^{-2x}\right)dx = \int_0^1 dx + 2\int_0^1 \frac{x}{e^x}dx + \int_0^1 x^2e^{-2x}dx$$

$$\int_0^1 x^2e^{-2x}dx = \left[\left(-\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)e^{-2x}\right]_0^1 = -\frac{5}{4e^2}+\frac{1}{4}$$

Donc

$$I_2 = \int_0^1 dx + 2\int_0^1 \frac{x}{e^x}dx + \int_0^1 x^2e^{-2x}dx = 1+2\left(1-\frac{2}{e}\right)-\frac{5}{4e^2}+\frac{1}{4} = -\frac{5}{4e^2}-\frac{4}{e}+\frac{13}{4}$$

$$\underline{I_2 = \int_0^1 \left(1+\frac{x}{e^x}+\left(\frac{x}{e^x}\right)^2\right)dx = -\frac{5}{4e^2}-\frac{4}{e}+\frac{13}{4}}$$

Quatrième partie

1) $S_n(x)$ est la somme des termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{x}{e^x}$ donc :

$$S_n(x) = 1+\frac{x}{e^x}+\cdots+\left(\frac{x}{e^x}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{x}{e^x}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{x}{e^x}\right)^{n+1}}{1-\frac{x}{e^x}} = \frac{1-\left(\frac{x}{e^x}\right)^{n+1}}{\frac{e^x-x}{e^x}} = \frac{e^x}{e^x-x}\left(1-\left(\frac{x}{e^x}\right)^{n+1}\right)$$

$$= \left(1-\left(\frac{x}{e^x}\right)^{n+1}\right)f(x)$$

$$\underline{S_n(x) = \left(1-\left(\frac{x}{e^x}\right)^{n+1}\right)f(x)}$$

2) a) En effet : $0 \leqslant \frac{x}{e^x} \leqslant \frac{1}{e} \quad \Rightarrow \quad 0 \leqslant \left(\frac{x}{e^x}\right)^{n+1} \leqslant \frac{1}{e^{n+1}}$

Par ailleurs : $0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{e}{e-1}$

Ainsi : $0 \leqslant \left(\frac{x}{e^x}\right)^{n+1} f(x) \leqslant \frac{1}{e^{n+1}} \times \frac{e}{e-1} = \frac{1}{e^n}\cdot\frac{1}{e-1}$

Ou encore en ajoutant et retranchant $f(x)$

$$0 \leqslant \left(\frac{x}{e^x}\right)^{n+1} f(x) - f(x) + f(x) \leqslant \frac{1}{e^n}\cdot\frac{1}{e-1}$$

C'est-à-dire : $0 \leqslant f(x) - \left(1-\left(\frac{x}{e^x}\right)^{n+1}\right)f(x) \leqslant \frac{1}{e^n}\cdot\frac{1}{e-1}$

Ou encore : $\underline{0 \leqslant f(x) - S_n(x) \leqslant \frac{1}{e-1}\cdot\frac{1}{e^n} \quad (6)}$

b) En intégrant la relation (6) entre 0 et 1, on obtient :

$$0 \leqslant \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 S_n(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{1}{e^n}\cdot\frac{1}{e-1}\mathrm{d}x = \frac{1}{e^n}\cdot\frac{1}{e-1}$$

Ainsi

$$0 \leqslant J - I_n \leqslant \frac{1}{e^n}\cdot\frac{1}{e-1} \quad \Rightarrow \quad 0 \leqslant \lim_{n\to+\infty}(J - I_n) \leqslant \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{e^n}\cdot\frac{1}{e-1} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}(J - I_n) = 0$$

On conclut que : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = J$

EXERCICE 15

On pose $u'(x) = (1-x)^n$ donc $u(x) = -\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}$ et $v'(x) = (a+1)x^a$ donc $v(x) = x^{a+1}$.

Ainsi :

$$I(a+1,n) = -\frac{a+1}{n+1}x^a(1-x)^{n+1}\Big|_0^1 + \frac{a+1}{n+1}\int_0^1 x^a(1-x)^{n+1}\,\mathrm{d}x = \frac{a+1}{n+1}I(a,n+1)$$

$$\underline{I(a+1,n) = \frac{a+1}{n+1}I(a,n+1)}$$

On appellera (*) cette relation.

On a :

$$I(a,n+1) = \int_0^1 x^a(1-x)^{n+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^a(1-x)^n(1-x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^a(1-x)^n\,\mathrm{d}x - \int_0^1 x^{a+1}(1-x)^n\,\mathrm{d}x$$
$$= I(a,n) - I(a+1,n)$$

Ainsi $\underline{I(a,n) - I(a,n+1) = I(a+1,n) \quad (**)}$

D'après la relation (*), on a :

$$I(a+1,n) = \frac{a+1}{n+1}I(a,n+1)$$

La relation (**) donne :

$$I(a,n) - \frac{a+1}{n+1}I(a,n+1) = I(a+1,n)$$

Ou encore :

$$\frac{a+1}{n+1}I(a,n+1) + I(a+1,n) = I(a,n)$$

C'est-à-dire :

$$\underline{\mathrm{I}(a,n+1)=\frac{n+1}{n+a+2}\mathrm{I}(a,n)}$$

On appellera (***) cette relation.

+) On obtient facilement : $\mathrm{I}(a,0)=\int_0^1 x^a\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a+1}$.

Pour $n=1$, on a :

$$\mathrm{I}(a,1)=\frac{1}{(a+1)(a+2)}$$

Par ailleurs,

$$\mathrm{I}(a,1)=\int_0^1 x^a(1-x)^1\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x^a\,\mathrm{d}x-\int_0^1 x^{a+1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a+2}=\frac{1}{(a+1)(a+2)}$$

Donc la relation est vérifiée au premier rang.

Supposons qu'elle soit vraie au rang n et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.

En effet d'après la relation (***), on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{I}(a,n+1)&=\frac{n+1}{n+a+2}\mathrm{I}(a,n)=\frac{n+1}{n+a+2}\times\frac{1\times2\times3\times\cdots\times n}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n+1)}\\&=\frac{1\times2\times3\times\cdots\times n\times(n+1)}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n+1)(a+n+2)}\end{aligned}$$

Donc la relation est toujours vraie.

$$\underline{\mathrm{I}(a,n)=\frac{1\times2\times3\times\cdots(n-1)\times n}{(a+1)(a+2)(a+3)\cdots(a+n+1)}}$$

EXERCICE 18

Première partie

1) a) $\mathrm{D_g}=]0\,;+\infty[$

$$\lim_{x\to+\infty}\mathrm{g}(x)=\lim_{x\to+\infty}x^2\left(\frac{1}{x^2}+1-2\ln x\right)=-\infty\quad;\quad\lim_{x\to0+}\mathrm{g}(x)=1$$

Pour tout $x\in]0\,;+\infty[$, $\mathrm{g}'(x)=-4x\ln x$

x	0		1		λ		$+x$
$\mathrm{g}'(x)$	‖	+	0	—	0	—	
$\mathrm{g}(x)$	‖ 1	↗	2		↘		$-x$

b) Sur $]0\,;1]$ g est dérivable, strictement croissante, $\lim_{x\to 0+} g(x) = 1$ et $g(1) = 2$; l'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution sur $]0\,;1]$.

Sur $[1\,;+\infty[$. g est dérivable, strictement décroissante, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ et $g(1) = 2$; donc g est une bijection de $[1\,;+\infty[$ sur $]-\infty\,;2]$. L'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\lambda > 1$; $g(1{,}89) = 0{,}024$ et $g(1{,}90) = -0{,}024$ donc $\underline{1{,}89 < \lambda < 1{,}90}$

c) Pour $\underline{0 < x < \lambda,\ g(x) > 0}$ $\Rightarrow$ $\lambda < xg(x) < 0$ et $\underline{g(\lambda) = 0}$

2) a) $D_f =]0\,;+\infty[$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to 0+} f(x) = -\infty$$

$$\forall x > 0,\ f'(x) = \frac{1 + x^2 - 2x^2\ln x}{x(1+x^2)^2} = \frac{g(x)}{x(1+x^2)^2}$$

x	0		1		λ		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+		+	0	−	
$f(x)$	‖	$-\infty$ ↗	0	↗	$1/2\lambda^2$	↘	0

b) $g(\lambda) = 0 \Leftrightarrow 1 + \lambda^2 - 2\lambda^2\ln\lambda = 0 \Leftrightarrow \underline{\frac{\ln\lambda}{1+\lambda^2} = \frac{1}{2\lambda^2} = f(\lambda)}$

Comme $1{,}89 < \lambda < 1{,}90$ $\Rightarrow$ $\underline{0{,}138 < f(\lambda) < 0{,}140}$

Deuxième partie

1) La fonction f est dérivable donc continue sur $]0\,;+\infty[$ et la fonction F est la primitive de f sur $]0\,;+\infty[$ qui s'annule pour $x = 1$.

La fonction F est donc dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout $x > 0$, $\underline{F'(x) = f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}}$. Comme $1 + x^2 > 0$ le signe de $F'(x)$ est le signe de $\ln x$. On en déduit que :

Pour $\underline{0 < x < 1}$ on a $F'(x) > 0$ et <u>F est strictement décroissante</u> ;

Pour $\underline{x > 1}$ on a $F'(x) > 0$ et <u>F est strictement croissante</u>.

Comme $F(1) = 0$ pour tout $x > 0$ on a $\underline{F(x) > 0}$.

2) a) pour $t > 1$, on a $\ln t > 0$ et $t^2 \leqslant 1 + t^2 \leqslant (1+t)^2$ donc $\underline{\frac{\ln t}{(1+t)^2} \leqslant f(t) \leqslant \frac{\ln t}{t^2}}$

b) On a :

$$I(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t^2}\,dt = \left[-\frac{\ln t}{t}\right]_1^x - \int_1^x \left(-\frac{1}{t^2}\right)dt = \frac{\ln x}{x} - \left[\frac{1}{t}\right]_1^x = 1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$$

$$J(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{(1+t)^2}\,dt = \left[-\frac{\ln t}{t+1}\right]_1^x + \int_1^x \frac{dt}{t(t+1)} = -\frac{\ln x}{x+1} + \int_1^x \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$= -\frac{\ln x}{x+1} + [\ln t - \ln(t+1)]_1^x = -\frac{\ln x}{x+1} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \ln 2$$

$$\underline{I(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t^2}\,dt} \qquad \underline{J(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{(1+t)^2}\,dt}$$

c) D'après la deuxième partie — question 2) a) et puisque $x > 1$ on a :

$$\int_1^x \frac{\ln t}{(1+t)^2}\,dt \leqslant \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt \leqslant \int_1^x \frac{\ln t}{t^2}\,dt$$

C'est-à-dire $J(x) \leqslant F(x) \leqslant I(x)$ (1) d'où

$$\underline{\ln 2 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{\ln x}{x+1} \leqslant F(x) \leqslant 1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}}$$

d) On déduit de (1) que : $\lim_{x\to+\infty} J(x) \leqslant \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) \leqslant \lim\limits_{x\to+\infty} I(x)$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x+1} = 0$ on a $\underline{\ln 2 \leqslant \ell \leqslant 1}$

3) a) La fonction $x \longmapsto F\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ comme composée de deux fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$. G, différence de deux fonctions dérivables, est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.

$$\forall x > 0, \qquad G'(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)F'\left(\frac{1}{x}\right) - F'(x) = \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\frac{1}{x^2}} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) - \frac{\ln x}{1+x^2} = 0 \qquad \underline{G'(x) = 0}$$

Donc <u>G est une fonction constante</u> sur $]0\,;\,+\infty[$.

b) On a : $G(1) = F(1) - F(1) = 0$ pour tout $x > 0$ donc $\underline{G(x) = 0}$.

c) On a : $\lim\limits_{x\to0+} G(x) = \lim\limits_{x\to0+} F\left(\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to0+} F(x)$ d'où $\lim\limits_{x\to0+} G(x) = \lim\limits_{x\to0+} F\left(\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} F(u) = \ell$

Conclusion : $\underline{\lim\limits_{x\to0+} F(x) = \ell}$

Equations différentielles

EXERCICE 1

Première partie

- Si $f(x) = \frac{x^2}{2} - x + 1$ est solution de l'équation (E), alors :

$$2(y' + y) = 2(f'(x) + f(x)) = 2\left[\left(\frac{x^2}{2} - x + 1\right)' + \left(\frac{x^2}{2} - x + 1\right)\right] = 2\left[(x-1) + \frac{x^2}{2} - x + 1\right] = 2\left(\frac{x^2}{2}\right)$$
$$= x^2$$

La fonction $f(x) = \frac{x^2}{2} - x + 1$ est bien solution de l'équation différentielle.

- Si $f(x) = (2x-1)e^x$ est solution de l'équation (E), alors :

$$y' - y = f'(x) - f(x) = \left[\left((2x-1)e^x\right)' - (2x-1)e^x\right] = [(2e^x + (2x-1)e^x) - (2x-1)e^x] = 2e^x$$

- Si $f(x) = (x+1)^2$ est solution de l'équation (E), alors :

$$\frac{y'}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{[(x+1)^2]'}{(x+1)^2} = \frac{2(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{x+1}$$

- Si $f(x) = \sqrt{2x}$ est solution de l'équation (E), alors :

$$y'y = f'(x)f(x) = \left(\sqrt{2x}\right)'\left(\sqrt{2x}\right) = \left(2 \times \frac{1}{2\sqrt{2x}}\right)\left(\sqrt{2x}\right) = 1$$

- Si $f(x) = x\cos x$ est solution de l'équation (E), alors :

$$y - xy' = f(x) - xf'(x) = x\cos x - x(x\cos x)' = x\cos x - x(\cos x + x\sin x)$$
$$= x\cos x - x\cos x + x^2\sin x = x^2\sin x$$

Deuxième partie

Il est important de rappeler que $y' = \frac{dy}{dx}$ et que $\int dy = y(x)$.

- On a : $y'\sqrt{x} = 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow dy = \frac{dx}{\sqrt{x}} \Rightarrow \int dy = \int \frac{dx}{\sqrt{x}} \Rightarrow y(x) = 2\sqrt{x} + k,\ k \in \mathbb{R}$.

- Or $y(1) = 0 \Rightarrow 2\sqrt{1} + k = 0 \Rightarrow k = -2 \Rightarrow \underline{y(x) = 2\sqrt{x} - 2}$

b) On a : $y' = \sin\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sin\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow dy = \sin\left(\frac{x}{2}\right)dx \Rightarrow \int dy = \int \sin\left(\frac{x}{2}\right)dx$

Ainsi : $y(x) = -2\cos\left(\frac{x}{2}\right) + k,\ k \in \mathbb{R}$

Or $y(2\pi) = -1 \Rightarrow 2\cos\left(\frac{2\pi}{2}\right) + k = -1 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow \underline{y(x) = 1 - 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$

c) On a : $y' = x^2 + 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x^2 + 1 \Rightarrow dy = (x^2+1)dx$

Ainsi : $\int dy = \int (x^2+1)dx \Rightarrow y(x) = \frac{x^3}{3} + x + k$

Or $y(0) = 1 \Rightarrow \frac{1^3}{3} + 1 + k = 1 \Rightarrow k = -\frac{1}{3} \Rightarrow \underline{y(x) = \frac{x^3}{3} + x - \frac{1}{3}}$

Troisième partie

a) $y' - 2y = 0 \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = 2 \Leftrightarrow \ln|y| = 2x \Leftrightarrow y = ke^{2x}$

Comme $y(0) = 1$ donc $k = 1$ et donc : $\underline{y = e^{2x}}$

b) $3y' + 7y = 0$ avec $y(2) = 5$

$3y' + 7y = 0 \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = -\frac{7}{3} \Leftrightarrow \ln|y| = -\frac{7}{3}x \Leftrightarrow y = ke^{-\frac{7}{3}x}$

Comme $y(2) = ke^{-\frac{14}{3}} = 5 \Rightarrow k = 5e^{\frac{14}{3}}$ donc $\underline{y(x) = 5e^{-\frac{7}{3}x + \frac{14}{3}}}$

c) Equation caractéristique : $r^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow r = \pm 3$ donc $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-3x}$

$$y(0) = c_1 + c_2 = 1,\quad y'(0) = 3c_1 - 3c_2 = -1$$

On a ainsi un système d'équations à deux inconnues : $\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 - c_2 = -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{1}{3} \\ c_2 = \frac{2}{3} \end{cases}$

On en déduit : $\underline{y(x) = \frac{1}{3}e^{3x} + \frac{2}{3}e^{-3x}}$

d) $y'' + y = 0$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$

Equation caractéristique : $r^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow r = \pm i \Rightarrow y = c_1\cos x + c_2\sin x$

$$y(0) = c_1 = 0,\quad y'(0) = c_2 = 1 \Rightarrow \underline{y = \sin x}$$

e) $y'' - 2y' + y = 0$ avec $y(0) = y'(0) = 1$

Equation caractéristique : $r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2 = 0 \Rightarrow r = 1$

Donc : $y(x) = (c_1x + c_2)e^x$

$$y(0) = c_2 = 1, \quad y'(0) = c_1 + c_2 = 1 \implies c_1 = 0 \implies \underline{y(x) = e^x}$$

f) $y''-4y'+3y = 0$ avec $y(0) = 6$ et $y'(0) = 10$

Equation caractéristique : $r^2 - 4r + 3 = (r-1)(r-3) = 0 \implies y(x) = c_1e^x + c_2e^{3x}$

$$y(0) = c_1 + c_2 = 6, \quad y'(0) = c_1 + 3c_2 = 10$$

On a ainsi un système d'équations à deux inconnues : $\begin{cases} c_1+c_2=6 \\ c_1+3c_2=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_2=2 \\ c_1=4 \end{cases}$

On en déduit : $\underline{y(x) = 4e^x + 2e^{3x}}$

g) $y''+y'+y = 0$ avec $y(0) = y'(0) = 1$

Equation caractéristique : $r^2 + r + 1 = 0 \implies \Delta = (\sqrt{3}i)^2 \implies r = -1 \pm \sqrt{3}i$

Donc : $y = (c_1\cos(\sqrt{3}x) + c_2\sin(\sqrt{3}x))e^{-x}$

$$y(0) = c_1 = 1, \qquad y'(0) = \sqrt{3}c_2 = 1 \implies c_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \implies \underline{y(x) = \left(\cos(\sqrt{3}x) + \frac{\sin(\sqrt{3}x)}{\sqrt{3}}\right)e^{-x}}$$

h) $25y''-20y'+4y = 0$ avec $y(0) = y'(0) = 1$

Equation caractéristique : $25r^2 - 20r + 4 = 0 \implies \Delta' = 0 \implies r_0 = \frac{2}{5}$

Donc : $y(x) = (c_1x + c_2)e^{\frac{2}{5}x}$

$y(0) = 1 \Leftrightarrow c_2 = 1$ et $y'(0) = 1 \Leftrightarrow c_1 = \frac{3}{5}$

Donc $\underline{y(x) = \left(\frac{3}{5}x + 1\right)e^{\frac{2}{5}x}}$

EXERCICE 3

1) L'équation caractéristique est : $r^2 - r - 2 = 0$ qui a pour solutions $r_1 = -1$ et $r_2 = 2$.

Les solutions de l'équation différentielle sont donc les fonctions de la forme : $Ae^{-x} + 2Be^{2x}$

2) Les conditions imposées sont équivalentes à : $f(0) = 2$ et $f'(0) = 1$.

On a $f(x) = -Ae^{-x} + 2Be^{2x}$. Donc on doit avoir : $A + B = 2$ et $-A + 2B = 1$, d'où après des calculs faciles : $A = B = 1$.

La fonction f cherchée est donc définie par : $\underline{f(x) = e^{-x} + e^{2x}}$

EXERCICE 4

Troisième partie

1) On a :

$$(E) : y'' + 2ay' + a^2y = 0$$

Soit l'équation caractéristique associée à (E) : $r^2 + 2ar + a^2 = (r + a)^2 = 0 \Rightarrow r = -a$

Les fonctions solutions $x \longmapsto g(x) = (c_1x + c_2)e^{-ax}$

2) On a :

$$g(x) = (c_1x + c_2)e^{-ax} \Rightarrow g'(x) = c_1e^{-ax} - ag(x) ; \ g(0) = c_2 = 0 \ ; \ g'(0) = c_1 = e$$

Donc : $g(x) = xe^{1-ax}$

Quatrième partie

1) L'équation caractéristique est : $r^2 + 25 = 0$, d'où les racines : $r = 5i$ et $r = -5i$.

La forme générale des solutions est donc : $y = A\cos 5x + B\sin 5x$.

$f(0) = 1 \Rightarrow A = 1$ et $y' = -5A\sin 5x + 5B\cos 5x$. Donc : $f(0) = -5 \Rightarrow B = -1$.

La fonction cherchée est donc celle vérifiant : $f(x) = \cos 5x - \sin 5x$

2) Les abscisses x de ces points vérifient $g(x) = 0$, soit : $\cos 5x = \sin 5x \Leftrightarrow \cos 5x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right)$

Ainsi : $5x = \left(\frac{\pi}{2} - 5x\right) + 2k\pi$ ou $5x = -\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right) + 2k\pi$

La seconde alternative est manifestement impossible.

La première équivaut à : $x = \frac{\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5}$, $k \in \mathbb{Z}$. Dans $[0 ; 2\pi[$, on trouve cinq (05) solutions (pour les valeurs de $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ d'où cinq (05) points d'intersection :

$$A_1\left(\frac{\pi}{20} ; 0\right), \quad A_2\left(\frac{9\pi}{20} ; 0\right), \quad A_3\left(\frac{17\pi}{20} ; 0\right), \quad A_4\left(\frac{5\pi}{4} ; 0\right), \quad A_5\left(\frac{33\pi}{20} ; 0\right)$$

EXERCICE 5

L'équation caractéristique est : $-\frac{1}{2}r^2 + \frac{3}{2}r - 1 = 0$. Elle a pour solutions $r_1 = 2$ et $r_2 = 1$.

La forme générale des solutions de l'équation différentielle est donc : $y = Ae^{2x} + Be^{x}$.

Les conditions imposées à la solution g se traduisent par : $g(0) = -1$ et $g'(0) = 0$.

En posant $g(x) = Ae^{2x} + Be^{x}$, on obtient : $g'(x) = 2Ae^{2x} + Be^{x}$, d'où :

$A + B = -1$ et $2A + B = 0$. En résolvant ce système, on voit que : $A = 1$ et $B = -2$.

EXERCICE 7

1) L'équation caractéristique est : $r^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow r = i$ ou $r = -i$.

Les solutions sont donc les fonctions de la forme : $\underline{y(x) = A\cos x + B\sin x}$

2) On a $f(0) = 1 \Rightarrow A = 1$. $f'(x) = -A\sin x + B\cos x$. $f'(0) = \sqrt{3} \Rightarrow B = \sqrt{3}$.

La solution particulière est donc : $\underline{y(x) = f(x) = \cos x + \sqrt{3}\sin x}$

3) a) On a $f(x) = -\sqrt{2} \Leftrightarrow \cos x + \sqrt{3}\sin x = -\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Ainsi on est amené à résoudre l'équation : $\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} - x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$

On trouve : $\underline{S = \left\{-\frac{5\pi}{12} + 2k\pi\ ;\ \frac{13\pi}{12} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}}$

b) La résolution est la même qu'au a). Seul l'ensemble de solutions change. On retient, parmi les solutions précédentes, celles qui appartiennent à $[0\ ;\ 2\pi[$.

Ici $\underline{S' = \left\{\frac{19\pi}{12}\ ;\ \frac{13\pi}{12}\right\}}$

EXERCICE 8

1) L'équation caractéristique $r^2 - 4r + 4 = 0$ a une racine (double) $r = 2$ donc les solutions de l'équation homogène sont les fonctions : $\underline{y(x) = (c_1x + c_2)e^{2x},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$

2) Pour $d(x) = e^{2x}$ on peut chercher une solution particulière de la forme : $y_1(x) = ae^{-2x}$ car -2 n'est pas racine de l'équation caractéristique.

On a $y_1'(x) = -2ae^{-2x}$ et $y_1''(x) = 4ae^{-2x}$.

Par conséquent y_1 est solution si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad (4a - 4(-2a) + 4a)e^{-2x} = e^{-2x} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{a = \frac{1}{16}}$$

Pour $d(x) = e^{2x}$ on cherche une solution de la forme $y_2(x) = ax^2e^{2x}$, car 2 est racine double de l'équation caractéristique.

On a $y_2'(x) = (2ax + 2ax^2)e^{2x}$ et $y_2''(x) = (4ax^2 + 8ax + 2a)e^{2x}$

Alors y_2 est solution si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (4ax^2 + 8ax + 2a - 4(2ax + 2ax^2) + 4ax^2)e^{2x} = e^{2x} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{a = \frac{1}{2}}$$

3) On déduit la solution :

$$y_p(x) = \frac{1}{4}(y_1(x) + y_2(x)) = \frac{1}{64}\cdot e^{-2x} + \frac{1}{8}\cdot x^2e^{2x}$$

est solution de l'équation pour le second membre donné dans cette question, et la forme générale des solutions est alors : $y(x) = (c_1x + c_2)e^{2x} + \frac{1}{64} \cdot e^{-2x} + \frac{1}{8} \cdot x^2e^{2x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

EXERCICE 10

Première partie

D'après la loi d'additivité des tensions, on a : $u_C + u_R = 0$. (u_C et u_R désignent respectivement la tension aux bornes du condensateur et de la résistance)

Notons $i(t)$ l'intensité du courant électrique dans le circuit à l'instant t.

On sait que : $u_C = \frac{q(t)}{C}$ et $\frac{du_C}{dt} = \frac{1}{C}\frac{dq(t)}{dt} = \frac{1}{RC}u_R(t) = -\frac{1}{RC}u_C(t)$

On en déduit : $u_C(t) = Ke^{-\frac{t}{RC}}$

La condition initiale $u_C(0) = 3$ donne : $K = 3$

D'où : $u_C(t) = 3 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$

Deuxième partie

Par hypothèse, on a : $y' = ay$

Où a est le coefficient de proportionnalité.

Notons t le temps (en années). On sait que les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont de la forme : $y(t) = Ce^{at}$.

Où C est une constante (non nulle, sinon y serait nulle)

Comme la grandeur double tous les dix ans, on a : $y(t + 10) = 2\,y(t) \Leftrightarrow C \cdot e^{a(t+10)} = 2C \cdot e^{at}$

En simplifiant par Ce^{at} : $e^{10a} = 2$

D'où : $a = \frac{\ln 2}{10}$ et on a donc : $y(t) = Ce^{\frac{\ln 2}{10}t} = 2^{\frac{t}{10}}C$

Cherchons maintenant le temps T pour lequel, on a : $y(t + T) = 3y(t) \Leftrightarrow Ce^{a(t+T)} = 3Ce^{at}$

On tire : $T = \frac{\ln 3}{a} = 15{,}85$.

Il faut donc attendre 15 ans, 10 mois et 6 jours (au jour près) pour que cette quantité triple.

EXERCICE 11

1) On a : $2y' - 3y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y' = \frac{3}{2}y \quad \Rightarrow \quad f(x) = Ae^{\frac{3}{2}x}$

2) a) Supposons qu'il existe un polynôme P de degré 2 solution de (1)

$P(x) = ax^2 + bx + c$ est solution de (1) si et seulement si :

$2P'(x) + 3P(x) = 6x^2 - 7x + 2 \quad \Leftrightarrow 2(2ax + b) + 3(ax^2 + bx + c) = 6\,ax^2 - 7x + 2$

$\Leftrightarrow \quad a = 2\,;\, b = -5\,;\, c = 4$

$\Leftrightarrow \quad \underline{P(x) = 2x^2 + -5x + 4}$

Donc P existe.

b) Déterminons S'

$$2y' = -3y \Rightarrow y' = -\frac{3}{2}y \quad \Rightarrow \quad \underline{f(x) = A \cdot e^{-\frac{3}{2}x}}$$

S' est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et de la forme : $x \longmapsto Ae^{-\frac{3}{2}x}$

c) Si f est solution de (1) alors :

$$2(f - P)'(x) + 3(f - P)(x) = \big(2f'(x) + 3f(x)\big) - \big(2P'(x) + 3P(x)\big)$$
$$= (6x^2 - 7x + 2) - (6x^2 - 7x + 2) = 0$$

Donc $f - P$ est solution de (2).

Si $(f - P)$ est solution de (2), alors :

$$2(f - P)'(x) + 3(f - P)(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \big(2f'(x) + 3f(x)\big) - \big(2P'(x) + 3P(x)\big) = 0$$

P est solution de (1) implique : $\big(2f'(x) + 3f(x)\big) - (6x^2 - 7x + 2) = 0$ et donc :

$\big(2f'(x) + 3f(x)\big) = (6x^2 - 7x + 2)$ f est solution de (1) donc $(f - P) \in S'$.

d) S est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et de la forme $\underline{x \longmapsto P(x) + A \cdot e^{-\frac{3}{2}x}}$

EXERCICE 13

1) On a : $y' = u' + \alpha \cos x$ et $y'' = u'' - \alpha \sin x$

$y = u + \alpha \sin x$ est solution de l'équation différentielle $y'' + 4y = 3 \sin x$ si :

$$(u'' - \alpha \sin x) + 4(y = u + \alpha \sin x) = 3 \sin x \;\Rightarrow\; (u'' + 4u) - \alpha \sin x + 4\alpha \sin x = 3 \sin x$$

Or $u'' + 4u = 0$ donc $3\alpha \sin x = 3 \sin x \;\Rightarrow\; \underline{\alpha = 1}$

2) Equation caractéristique de l'équation différentielle $u'' + 4u = 0$: $r^2 + 4 = 0 \;\Rightarrow\; r = \pm 2i$.

Ainsi : $\underline{u = A \cos 2x + B \sin 2x}$

3) En remplaçant u par son expression, on obtient : $\underline{y = A \cos 2x + B \sin 2x + \alpha \sin x}$

4) Supposons qu'il existe deux solutions y_1 et y_2 telles que $\begin{cases} y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ y_1'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ y_2'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$

Soit $y_1 = A_1 \cos 2x + B_1 \sin 2x + \alpha \sin x \;\Rightarrow\; y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = -A_1 + \alpha = 0 \;\Rightarrow\; A_1 = \alpha$

Et $y_2 = A_2\cos 2x + B_2\sin 2x + \alpha\sin x \Rightarrow y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -A_2 + \alpha = 0 \Rightarrow A_2 = \alpha$

Ainsi $A_1 = A_2 = 0$. On montre de la même manière que $B_1 = B_2 = -\frac{1}{2}$ et donc $y_1 = y_2$. On vient de prouver l'unicité de la solution. Ainsi y_1 et y_2 existent car A et B existent et par conséquent $\underline{y = -\frac{1}{2}\sin 2x + \alpha\sin x}$

EXERCICE 17

1) L'équation caractéristique est donc $r = i$ ou $r = -i$.

Les solutions sont de la forme : $\underline{Y(x) = A\cos x + B\sin x}$

2) On a :

$$f'(x) = g\left(\frac{1}{x}\right) + x\left(-\frac{1}{x^2}\right)g'\left(\frac{1}{x}\right) = g\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}g'\left(\frac{1}{x}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{f''(x) = -\frac{1}{x^2}g\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2}g'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^3}g''\left(\frac{1}{x}\right)}$$

a) Si g vérifie (2) alors $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ g''(x) = -\frac{1}{x^4}g(x)$

f vérifie (1) $\Leftrightarrow f''(x) + f = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{1}{x^3}g''\left(\frac{1}{x}\right) + xg(x) = 0$

En posant $X = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \underline{X^4 g''(X) + g\left(\frac{1}{X}\right) = 0}$

b) On a : $g''(x) = -\frac{1}{x^4}g(x) \Leftrightarrow \left[xg\left(\frac{1}{x}\right)\right]'' + \left[xg\left(\frac{1}{x}\right)\right] = 0\ \forall x \in \mathbb{R}^*$

Donc $xg\left(\frac{1}{x}\right) = A\cos x + B\sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

D'où $\underline{g(X) = \frac{1}{X}\left[A\cos\left(\frac{1}{X}\right) + B\sin\left(\frac{1}{X}\right)\right]}$

c) Puisque $g''(x) = -\frac{1}{x^4}g(x)$, une primitive de $\frac{1}{x^4}g(x)$ sera la fonction $-g'(x)$.

Or $g'(x) = \frac{1}{x^2}\left[-\left(A + \frac{B}{X}\right)\cos\left(\frac{1}{X}\right) + \left(-B + \frac{A}{X}\right)\sin\left(\frac{1}{X}\right)\right]$

Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^4}g(x)$ est $\underline{x \longmapsto \frac{1}{x^2}\left[-\left(A + \frac{B}{X}\right)\cdot\cos\left(\frac{1}{X}\right) + \left(-B + \frac{A}{X}\right)\cdot\sin\left(\frac{1}{X}\right)\right]}$