

COLLECTION "LE REPÈRE"

MATHS

NOUVEAUX PROGRAMMES
APC

TLE^D

Collection le "repère"

Mathématiques

BENGALY KALIFA

T^{le} D

- **AÏKO Jean Claude**, Inspecteur Pédagogique Principal, Coordonnateur Régional Disciplinaire
- **N'DIAMOI N'Guessan Bernard**, Inspecteur Pédagogique Principal, Coordonnateur Régional Disciplinaire
- **OKAINGNI Okpo**, Professeur de Lycée
- **KONE Drissa**, Professeur de Lycée
- **OUATTARA Kiofagana**, Inspecteur Pédagogique Principal
- **SANOGO Souleymane**, Inspecteur Pédagogique Principal

Sous la supervision de

M. TUO PIENAN

Inspecteur de l'Enseignement Secondaire

Nous adressons nos remerciements à tous les enseignants qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce manuel.

Toute représentation, traduction, adaptation ou reproduction, même partielle, par tous procédés, en tous pays, faite sans autorisation préalable est illicite et exposerait le concerné à des poursuites judiciaires.

Ref: loi du 11 mai 1957, alinéas 2 et 3 de l'article 41.

Une représentation ou reproduction sans autorisation de l'éditeur ou des auteurs constituerait une contrefaçon par les articles 425 et suivant du Code pénal.

MAQUETTE & MISE EN PAGE :

SERVICE INFOGRAPHIE DES ÉDITIONS SUPERNOVA

N'DRI N'GUSSAN ALEXANDRE

FOFANA YENANTCHOMAN SÉBASTIEN

KOUASSI AMENAN VALÉRIE

© Éditions SUPERNOVA 2021

ISBN : 978-2-37967-013-8

Dépot légal n° 17263 du 1^{er} Trimestre 2021 (Côte d'Ivoire)



www.editionssupernova.com

E-mail : info@editionssupernova.com

Contact : +225 057 457 9999

AVANT-PROPOS

Vous voici en classe de T^{le} D.

Ce manuel vous aidera à assurer les bases nécessaires pour la suite de vos études de mathématiques et à acquérir les notions indispensables au raisonnement et à la compréhension.

Cet ouvrage, conforme au programme mathématique APC, a été conçu pour être un instrument de travail efficace et agréable à utiliser.

Il a été réalisé selon un double objectif :

- ◆ Être un outil adapté aux séquences d'enseignement en classe avec le professeur ;
- ◆ Permettre aux élèves de mener un travail autonome en dehors de la classe.

Le manuel est divisé en douze leçons, qu'il est souhaitable d'aborder selon une progression équilibrée en travaux numériques et géométriques. Chacune de ces leçons est présentée selon la structure suivante :

- ◆ Une ouverture de la leçon avec **les Notions essentielles et une Situation d'apprentissage** ;
- ◆ Des **Activités de découverte** qui vous permettront de réinvestir les notions étudiées dans les classes antérieures, paliers indispensables pour la compréhension de nouveaux outils ;
- ◆ Le **Résumé de cours** qui contient des définitions, des propriétés démontrées et illustrées d'exemples ;
- ◆ La **Méthode** qui permet à l'apprenant de mieux appréhender les chemins nécessaires pour élaborer efficacement une démonstration ;
- ◆ Les **Savoir-faire** qui vous aideront à résoudre les exercices d'application en vous guidant à l'aide de méthodes générales. Cette rubrique permet à l'apprenant d'avoir un exemple de rédaction attendue de lui ;
- ◆ Des **Exercices** variés et en très grand nombre dont le but est de donner une base de travail adaptée à tous les apprenants ;
- ◆ Le **Rendez-vous des curieux** propose des informations de la vie courante qui sont en rapport avec la leçon étudiée.

Nous souhaitons que ce manuel permette un enseignement des mathématiques fructueux, motivant et agréable pour les apprenants et leurs professeurs.

Les auteurs

PRÉSENTATION DU LIVRE

Cet ouvrage, conforme aux programmes de Mathématiques mis en place, propose de nouvelles orientations. Une approche nouvelle (A.P.C.), une plus grande variété des exercices, un accompagnement plus prégnant en font un outil plus efficace pour les enseignants et les élèves dans la mise en oeuvre de l'activité mathématique. Ce manuel se présente en douze (12) leçons subdivisées chacune en six rubriques :

Notions essentielles :

Apprendre avec les problèmes
Situations d'apprentissage
Situations d'évaluation

SITUATION D'APPRENTISSAGE

Notions essentielles

On présente ici, en titres, les notions importantes de la leçon.

Situation d'apprentissage

Cette rubrique donne du sens à la leçon à étudier à travers une activité de vie courante.

ACTIVITÉS DE DÉCOUVERTE

1. Signification des notions

2. Exercices

3. Exercices de consolidation

4. Exercices de synthèse

5. Exercices de réflexion

6. Exercices de synthèse

7. Exercices de synthèse

8. Exercices de synthèse

9. Exercices de synthèse

10. Exercices de synthèse

11. Exercices de synthèse

12. Exercices de synthèse

Activités de découvertes

Ce sont des activités qui permettent d'introduire les nouvelles notions abordées dans la leçon.

Je fais le point de l'activité

L'enseignant recapitule ici les notions qui viennent d'être mises en place.

l'évalue mes acquis

Des exercices d'applications sont proposés aux apprenants pour évaluer les acquis de la notion qui vient d'être mise en place.

MÉTHODE

• Pour simplifier un quotient, on utilise les critères de divisibilité.
• Pour déterminer le nombre manquant dans un tableau de proportionnalité, on utilise le produit en croix.

Méthode

On donne les stratégies pour :
• Mieux aborder les notions essentielles d'une leçon.
• Mieux comprendre certaines approches didactiques et pédagogiques.

SAVOIR-FAIRE

Exercices de consolidation

Exercices de synthèse

Exercices de réflexion

Exercices de synthèse

Exercices de synthèse

Exercices de synthèse

Exercices de synthèse

Exercices de synthèse

Exercices de synthèse

Exercices de synthèse

Exercices de synthèse

Exercices de synthèse

Exercices de synthèse

Exercices de synthèse

Exercices de synthèse

Exercices de synthèse

Exercices de synthèse

Exercices de synthèse

Exercices de synthèse

Exercices de synthèse

Exercices de synthèse

Exercices de synthèse

Exercices de synthèse

Exercices de synthèse

Exercices de synthèse

Exercices de synthèse

Savoir-faire

Ce sont des exercices réalisés pour mettre en place les méthodes relatives aux notions essentielles de la leçon.

JE M'EXERCE

Optimisation avec les dérivées

Optimiser un quotient

Optimiser un quotient

Optimiser un quotient

Optimiser un quotient

Optimiser un quotient

Optimiser un quotient

Optimiser un quotient

Optimiser un quotient

Optimiser un quotient

Optimiser un quotient

Optimiser un quotient

Optimiser un quotient

Optimiser un quotient

Optimiser un quotient

Optimiser un quotient

Optimiser un quotient

Optimiser un quotient

Optimiser un quotient

Optimiser un quotient

Optimiser un quotient

Optimiser un quotient

Optimiser un quotient

Optimiser un quotient

Optimiser un quotient

Optimiser un quotient

Optimiser un quotient

Optimiser un quotient

Je m'exerce

Cette rubrique est consacrée à l'évaluation. Elle permet la vérification des connaissances et des acquis de la leçon. Elle est subdivisée en :

- Exercices de fractions / applications
- Exercices de renforcement / approfondissement
- Situation d'évaluation

RENDEZ-VOUS DES CURIEUX

Exercices de réflexion

Exercices de synthèse

Exercices de réflexion

Exercices de synthèse

Exercices de réflexion

Exercices de synthèse

Exercices de réflexion

Exercices de synthèse

Exercices de réflexion

Rendez-vous des curieux

C'est une ouverture socioculturelle sur le monde pour situer les notions mathématiques étudiées.

Sommaire

1 LIMITES ET CONTINUITÉ

Activités de découverte	8
Résumé de cours	19
• Limites	20
• Branches paraboliques	22
• continuité	22
• Fonction continue et strictement monotone	24
• Fonction puissance d'exposant rationnel	26
Méthode	27
Savoir-faire	28
Je m'exerce	31

2 PROBABILITÉ CONDITIONNELLE ET VARIABLE ALÉATOIRE

Activités de découverte	38
Résumé de cours	45
• Probabilités conditionnelles	45
• Variables aléatoires	46
• Schéma de Bernoulli	47
Méthode	48
Savoir-faire	49
Je m'exerce	53

3 DÉRIVABILITÉ ET ÉTUDE DE FONCTIONS

Activité de découverte	
Résumé de cours	
• Dérivabilité à gauche, dérivabilité à droite en x_0	68
• Dérivabilité d'une fonction en un point d'abscisse x_0	69
• Interprétation du nombre dérivé	69
• Dérivabilité sur un intervalle	69
• Dérivées successives	70
• Dérivée d'une fonction composée	70
• Point d'inflexion	71
• Inégalité des accroissements finis	71
Méthode	72
Savoir-faire	73

Je m'exerce	75
-------------	----

4 PRIMITIVES

Activités de découverte	84
Résumé de cours	88
• Primitive d'une fonction continue sur un intervalle	88
• Ensemble des primitives d'une même fonction	88
• Primitive d'une fonction vérifiant une condition initiale	88
• Primitives des fonctions de référence	89
• Primitives de la composée de deux fonctions	89
• Primitives et opérations	89
Méthode	90
Savoir-faire	90
Je m'exerce	92

5 FONCTIONS LOGARITHMES

Activités de découverte	98
Résumé de cours	106
• Définition et propriétés algébriques	106
• Étude et représentation graphique de la fonction $\ln$	106
• Limites de référence de la fonction $\ln$	107
• Étude de fonction du type $\ln u$ et $\ln u $	108
• Logarithme décimale - Logarithme de base a , $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$	108
Méthode	109
Savoir-faire	110
Je m'exerce	115

6 NOMBRES COMPLEXES

Activités de découverte	122
Résumé de cours	129
• Étude algébrique d'un nombre complexe	129

• Etude trigonométrique d'un nombre complexe	132
• Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$	134
• Quelques caractérisations complexes	135
Méthode	136
Savoir-faire	137
Je m'exerce	140

7 FONCTIONS EXPONENTIELLES ET FONCTIONS PUISSANCES

Activités de découverte	146
Résumé de cours	154
• Définitions et propriétés algébriques de la fonction exponentielle népérienne	154
• Etude et représentation graphique de la fonction exponentielle népérienne	155
• Etude des fonctions du type $\exp(ax)$ (ou e^{ax})	156
• Fonctions exponentielles de base a , ($a \in \mathbb{R}^+$)	156
• Fonctions puissances	157
Méthode	159
Savoir-faire	160
Je m'exerce	167

8 NOMBRES COMPLEXES ET TRANSFORMATIONS DU PLAN

Activités de découverte	176
Résumé de cours	186
• Nombres complexes et configurations du plan	186
• Ecritures complexes des transformations usuelles du plan	188
• Similitude directe	190
Méthode	193
Savoir-faire	194
Je m'exerce	200

9 SUITES NUMÉRIQUES

Activités de découverte	208
Résumé de cours	216

• Etude globale d'une suite numérique	216
• Limite d'une suite numérique	217

Méthode	219
Savoir-faire	220
Je m'exerce	222

10 CALCUL INTÉGRAL

Activités de découverte	227
Résumé de cours	234
• Intégrale d'une fonction continue	234
• Propriétés algébriques	236
• Valeur moyenne d'une fonction	237
• Techniques de calcul intégrale	238
Méthode	241
Savoir-faire	241
Je m'exerce	244

11 STATISTIQUE

Activités de découverte	250
Résumé de cours	255
• Série statistique à deux caractères	255
• Nuage de points	256
• Ajustement linéaire par la méthode des moindres carrés	257
• Droite de régression par la méthode des moindres carrés	257
• Coefficient de corrélation linéaire	257
Méthode	260
Savoir-faire	261
Je m'exerce	263

12 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Activités de découverte	276
Résumé de cours	274
• Equations différentielles	274
• Résolution d'équations différentielles	275
Méthode	277
Savoir-faire	277
Je m'exerce	279

Notions essentielles :

- Limite de la composée de deux fonctions logarithme népérien ;
- Techniques de calcul de limite ;
- Fonctions continues et monotones ;
- Théorème des valeurs intermédiaires et conséquences ;
- Bijection et bijection réciproque ;
- Notion de branches paraboliques.

SITUATION D'APPRENTISSAGE

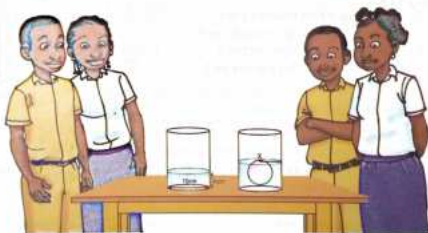
Le professeur de physique d'une classe de terminale D d'un lycée demande à ses élèves de déterminer le rayon d'une boule métallique. Les élèves disposent d'une boîte cylindrique de 10 cm de diamètre contenant de l'eau jusqu'à une hauteur de 4 centimètre.

Un élève de cette classe plonge une bille métallique de rayon x dans la boîte et constate que la bille affleure juste la surface de l'eau (c'est-à-dire que le plan de la surface de l'eau est tangent à la bille) comme l'indique la figure ci-contre.

Les élèves de la classe veulent déterminer le rayon de la bille métallique à 0,1 près et n'y arrivent pas. Ayant contacté le professeur de mathématiques de la classe, celui-ci leur dit que x est solution du système :

$$\begin{cases} 2x^3 - 75x + 150 = 0 \\ 0 < x \leq 5 \end{cases}$$

et que les élèves doivent s'informer sur le théorème des valeurs intermédiaires.





I- ACTIVITÉS DE DÉCOUVERTE

1- LIMITES

1.1- Connaître la propriété de la limite de la composée de deux fonctions

Activité 1

Soient f et g les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies respectivement par : $f(x) = 4x^2 - 3x + 3$ et $g(x) = \sqrt{x}$.

- 1- Justifie que : $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 25$ et calcule $\lim_{x \rightarrow 25} g(x)$.
- 2- a) Détermine l'ensemble de définition $D_{g \circ f}$ de la fonction $g \circ f$.
b) Détermine $g \circ f(x)$ pour tout nombre réel x appartenant à $D_{g \circ f}$.
c) On admet que $g \circ f$ est continue en -2 . Calcule la limite de $g \circ f$ en -2 .
- 3- Compare $\lim_{x \rightarrow -2} g \circ f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 25} g(x)$.

Je fais le point de l'activité

Soient f et g deux fonctions numériques, a , b et l des éléments de $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$.
Lorsque $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ et $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = l$, alors $\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = l$.

l'évalue mes acquis



f et g sont deux fonctions telles que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ et $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = -\infty$

Indique la bonne réponse.

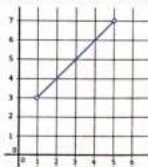
- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f \circ g)(x) = -\infty$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g \circ f)(x) = -\infty$; c) $\lim_{x \rightarrow 3} (g \circ f)(x) = -\infty$

1.2- Connaître la propriété relative à la limite d'une fonction monotone sur un intervalle ouvert

Activité 2

Soit f la fonction croissante sur l'intervalle ouvert $]1; 5[$ définie par : $f(x) = x + 2$.

- 1- a) Justifie que f est majorée par 7.
b) Calcule la limite de f à gauche en 5.
- 2- a) Justifie que f est minorée par 3.
b) Calcule la limite de f à droite en 1.



Je fais le point de l'activité

- Soit f une fonction croissante sur un intervalle ouvert $]a; b[$.
- Si f est majorée sur $]a; b[$, alors f admet une limite finie à gauche en b .
- Si f est minorée sur $]a; b[$, alors f admet une limite finie à droite en a .
De même on admet que :
- Soit f une fonction décroissante sur un intervalle ouvert $]a; b[$.
- Si f est majorée sur $]a; b[$, alors f admet une limite finie à droite en a .
- Si f est minorée sur $]a; b[$, alors f admet une limite finie à gauche en b .

J'évalue mes acquis



Complète les phrases suivantes par les mots qui conviennent : finie , minorée , majorée
 Soit f une fonction décroissante sur un intervalle ouvert $]a ; b[$.
 - Si f est sur $]a ; b[$, alors f admet une limite à droite en a .
 - Si f est sur $]a ; b[$, alors f admet une limite à gauche en b .

1.3- Déterminer la limite d'une fonction en utilisant les propriétés de comparaison (majoration, minoration, et encadrement)

Activité 3

Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty ; +\infty\}$

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq g(x)$.

- 1- En admettant que $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$, détermine : $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.
- 2- En admettant que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, détermine : $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$.

Je fais le point de l'activité

Soient f et g sont deux fonctions définies sur un intervalle K telles que $\forall x \in K, f(x) \leq g(x)$.
 a appartient à K ou a est une borne de K .

- Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$
- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$

J'évalue mes acquis



Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

- a) Si pour tout nombre réel positif $x, f(x) \geq -x^2$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$;
- b) Si pour tout nombre réel x strictement positif, $f(x) \leq x^3 - \frac{2}{3}x^2$ alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$;
- c) Si pour tout nombre réel non nul $x, -2x^3 + x^2 \leq f(x)$, alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

1.4- Théorème des gendarmes

Activité 4

Soit f une fonction vérifiant $\frac{1}{x^2+5} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$.

Calcule : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2+5}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}$ et déduis-en $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Je fais le point de l'activité

Soient f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle K telles que pour tout $x \in K$,
 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$. a désigne un élément de K ou une borne de K .

Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = l$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.

J'évalue mes acquis



Indique la bonne réponse.

On admet que : $\forall x \in]1 ; 0[$, $-x < x \sin(\frac{1}{x}) < x$. On a donc :

$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin(\frac{1}{x})$ est égale à :

- a) -1 ; b) 0 ; c) 1

2. BRANCHES PARABOLIQUES

2.1. Identifier la notion de branche parabolique de direction celle de (OI)

ACTIVITÉ 5

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J)

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{x}$ et (C_f) sa courbe représentative dans le repère donné.

Calcule : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.



Je fais le point de l'activité

- Lorsque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ est infinie et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, on dit que la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction celle de (OI) en $+\infty$.



- Lorsque $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ est infinie et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, on dit que la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction celle de (OI) en $-\infty$.



J'évalue mes acquis



f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et (C_f) est sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) .

A chaque affirmation, réponds par vrai si elle est correcte et réponds par faux si elle est incorrecte.

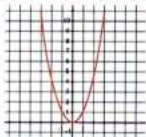
- 1- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 5$, alors (C_f) admet une branche parabolique de direction celle de (OI) en $+\infty$.
- 2- Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, alors (C_f) admet une branche parabolique de direction celle de (OI) en $-\infty$.
- 3- Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, alors (C_f) admet une branche parabolique de direction celle de (OI) en $-\infty$.

2.2- Identifier la notion de branche parabolique de direction celle de (Oj)

ACTIVITÉ 6

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3$.

Calcule : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$.



Je fais le point de l'activité

- Lorsque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ est infinie et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm \infty$,

on dit que la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction celle de (Oj) en $+\infty$,



- Lorsque $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ est infinie et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm \infty$,

on dit que la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction celle de (Oj) en $-\infty$.



J'évalue mes acquis



f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et (C_f) est sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) .

A chaque affirmation réponds par vrai si elle est correcte et réponds par faux si elle est incorrecte.

- 1- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$, alors (C_f) admet une branche parabolique de direction celle de (Oj) en $-\infty$.
- 2- Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, alors (C_f) admet une branche parabolique de direction celle de (Oj) en $-\infty$.
- 3- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$, alors (C_f) admet une branche parabolique de direction celle de (Oj) en $+\infty$.

3- CONTINUITÉ

3.1- Connaître les propriétés relatives aux opérations sur les fonctions continues sur un intervalle

Activité 7

Soient f et g les fonctions continues sur $[2; 6]$ définies par : $f(x) = x + 4$ et $g(x) = x - 1$.

1- Détermine explicitement les fonctions $f + g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$, $2f$, $|f|$ et $\sqrt{f}$.

2- Soit a un élément de $[2; 6]$, justifie que les fonctions f , $f + g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$, $2f$, $|f|$ et $\sqrt{f}$ sont continue en a .

Je fais le point de l'activité

- Une fonction f est dite continue sur un intervalle I lorsque sa restriction à I est continue en tout élément de I
- Si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I alors :
 - les fonctions $f + g$, $f \cdot g$, αf ($\alpha \in \mathbb{R}$) et $|f|$ sont continues sur I ;
 - si g ne s'annule pas sur I alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I ;
 - si f est positive sur I , alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue sur I .

l'évalue mes acquis



Réponds par vrai ou par faux aux affirmations suivantes :

1. Soit $f(x) = 3$ et $g(x) = -7$; $f + g$ est continue sur $]-17; 0[$

2. Soit $f(x) = x + 4$; $\sqrt{f}$ est continue sur $]-2; 0[$.

3. Soit
$$\begin{cases} f(x) = \frac{|x|}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = -1 \end{cases} \quad \text{et } g(x) = -x + 3 ; \frac{f}{g} \text{ est continue sur } \mathbb{R} \setminus \{3\}.$$

3.2- Connaître les propriétés relatives à l'image d'un intervalle par une fonction

Activité 8

On admet que l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle ou un singleton.

Soit f une fonction continue dont le tableau de variation est le suivant :

x	-2	1	4	15
$f(x)$	2	13	-6	1

Détermine en te servant du tableau de variation ci-dessus l'image de chacun des intervalles suivants par la fonction f : $[1; 15]$ et $[-2; 4]$.

Je fais le point de l'activité

- L'image d'un intervalle fermé par une fonction continue est un intervalle fermé ou un singleton
- Si f est continue et non monotone sur l'intervalle $[a; b]$ alors l'image de l'intervalle $[a; b]$ par f est $f([a; b]) = [m; M]$ où m et M désignent respectivement le minimum et le maximum de f sur $[a; b]$.

J'évalue mes acquis



Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	13	6	$+\infty$

Détermine l'image de chacun des intervalles suivants par la fonction f : $[-1; 3]$, $[3; +\infty[$ et $[-1; +\infty[$.

3.3- Déterminer le prolongement par continuité d'une fonction en un point.

Activité 9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ par : $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$.

1- Justifie que la fonction f n'est pas continue en -1 .

2- Justifie que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}, f(x) = \frac{1}{x-1}$ et calcule $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.

3- Soit g la fonction définie par :
$$\begin{cases} g(x) = f(x) & \text{si } x \in D_f \\ g(-1) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Étudie la continuité de g en -1 .

Je fais le point de l'activité

Si $a \notin D_f$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ avec $l \in \mathbb{R}$, alors la fonction g définie par :

$$\begin{cases} g(x) = f(x) & \text{si } x \in D_f \\ g(a) = l \end{cases} \quad \text{est continue en } a.$$

Cette fonction est appelée le prolongement par continuité de f en a .

3.4- Connaître la propriété relative à la composée de deux fonctions continues sur un intervalle

Activité 10

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.

Soit f une fonction continue sur I , telle que $f(I) \subset J$ et g une fonction continue sur J .

Démontre que la fonction $g \circ f$ est continue sur l'intervalle I .

Je fais le point de l'activité

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions.

Si f est continue sur I tel que $f(I) \subset J$ et g continue sur J alors la fonction $g \circ f$ est continue sur I .

J'évalue mes acquis



Exercice 1

Énonce la propriété qui permet de justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \sin(\pi x - 1)$$

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, démontre que la fonction f définie dans chaque cas est continue sur son ensemble de définition.

$$\text{a) } f(x) = \sqrt{2-x^2} \quad ; \quad \text{b) } f(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{|x|-1}$$

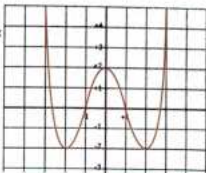
3.5- Connaître le théorème des valeurs intermédiaires

ACTIVITÉ 11

Soit f la fonction continue sur l'intervalle $[-4; 3]$ définie par :

$$f(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 2 \text{ dont une représentation graphique est}$$

donnée ci-contre,



- 1- Justifie que 1 est compris entre $f(-3)$ et $f(2)$
- 2- Détermine le nombre d'antécédents par f de 1
- 3- Justifie que tous les antécédents de 1 sont compris entre -3 et 2

Je fais le point de l'activité

Si f est une fonction continue sur un intervalle I , a et b deux éléments de I alors tout nombre compris entre $f(a)$ et $f(b)$ a au moins un antécédent par f compris entre a et b .

l'évalue mes acquis



Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

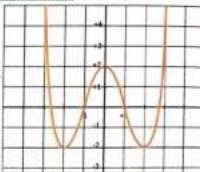
- a) Il suffit que f soit continue sur l'intervalle $[-1; 3]$ pour que f prenne n'importe quelle valeur réelle sur l'intervalle $[-1; 3]$.
- b) Pour que l'équation $f(x) = k$, où k est un nombre réel, admette au moins une solution appartenant à l'intervalle $[-1; 3]$, il faudrait que k soit compris entre $f(-1)$ et $f(3)$.
- c) Pour que l'équation $f(x) = 2$ admette une solution dans l'intervalle $[-1; 3]$, il suffit que f soit continue sur l'intervalle $[-1; 3]$, et que 2 appartienne à l'intervalle de bornes $f(-1)$ et $f(3)$.

3.6- Connaître les conséquences du théorème des valeurs intermédiaires

ACTIVITÉ 12

On utilise les données de l'activité 11.

- 1- a) Justifie que $f(-3) \times f(2) < 0$
- b) Détermine le nombre de solutions de l'équation : $x \in [-3; 2]$, $f(x) = 0$.
- 2- f est continue et strictement décroissante sur $[0; 2]$.
 - a) Justifie que le nombre 1 est compris entre $f(0)$ et $f(2)$ et que $f(0) \times f(2) < 0$.
 - b) Sur $[0; 2]$, Détermine le nombre d'antécédent du nombre réel 1 par f .



Je fais le point de l'activité

Soit f une fonction continue sur un intervalle K .

- Si l'existe deux éléments a et b ($a < b$) de K , tels que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a; b]$.
- Si f ne s'annule pas sur K alors, f garde un signe constant sur K .
- Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I , a et b deux éléments de I alors, tout nombre compris entre $f(a)$ et $f(b)$ a exactement un antécédent par f compris entre a et b .
- Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I , a et b deux éléments de I tels que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires alors, 0 a un antécédent unique par f compris entre a et b .

l'évalue mes acquis

1- Soit f une fonction continue dont le tableau de variation est le suivant :

x	-2	1	4	15
$f(x)$	2	13	-6	-1

A chaque affirmation réponds par Vrai si elle est correcte et réponds par Faux si elle est incorrecte

- L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[-2 ; 1]$.
- L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[1 ; 4]$.
- L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[4 ; 15]$.

2- Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	13	6	$+\infty$

Indique le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

4- FONCTIONS CONTINUES ET STRICTEMENT MONOTONES SUR UN INTERVALLE

4.1 Connaître la propriété relative à une bijection et à sa bijection réciproque

Activité 13

Soient f et g les fonctions définies par :

$$f: \mathbb{R}_+ \rightarrow [3; +\infty[\quad \text{et} \quad g: [3; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto x^2 + 3 \quad \text{et} \quad x \mapsto \sqrt{x-3}$$

On admet que f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

- Démontre que f est une bijection et que g est sa bijection réciproque.
- Détermine le sens de variation de la bijection réciproque g de f .

Je fais le point de l'activité

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I , alors f est une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$ et la bijection réciproque f^{-1} de f est continue sur $f(I)$ et de même sens de variation que f .

l'évalue mes acquis

Soit f une fonction continue définie de $[-2 ; 15]$ vers $\mathbb{R}$ dont le tableau de variation est le suivant :

x	-2	1	4	15
$f(x)$	2	13	-6	-1

A chaque affirmation réponds par Vrai si elle est correcte et réponds par Faux si elle est incorrecte

- f est une bijection ;
- f réalise une bijection de $[-2 ; 1]$ sur $\mathbb{R}$;
- f réalise une bijection de $[1 ; 4]$ sur $[-6 ; 13]$;
- f réalise une bijection de $[4 ; 15]$ sur $[-6 ; -1]$.

4.2- Connaître les propriétés relatives à l'image d'un intervalle par une fonction continue et monotone

Activité 14

On admet que l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle ou un singleton.
Soit f une fonction continue dont le tableau de variation est le suivant :

x	-2	1	4	15
$f(x)$	2	13	-6	1

Détermine en te servant du tableau de variation ci-dessus l'image de chacun des intervalles suivants par la fonction f : $[-2; 1]$, $[1; 4]$, $[1; 15]$ et $[-2; 4]$

Je fais le point de l'activité

- Si f est continue et strictement croissante sur $[a; b]$ alors l'image de l'intervalle $[a; b]$ par f est $f([a; b]) = [f(a); f(b)]$.
- Si f est continue et strictement décroissante sur $[a; b]$ alors l'image de l'intervalle $[a; b]$ par f est $f([a; b]) = [f(b); f(a)]$.

J'évalue mes acquis



Pour chaque cas, recopie le tableau et complète chaque case par l'intervalle qui convient.

On note : $l = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ et $L = \lim_{x \rightarrow b} f(x)$

a) Cas où f est continue et strictement croissante sur l'intervalle I

I	$f(I)$
$[a; \beta]$	
$]a; \beta]$	
$[a; \beta[$	

b) Cas où f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle I

I	$f(I)$
$[a; \beta]$	
$]a; \beta]$	
$[a; \beta[$	

4.3- Connaître la méthode de dichotomie

Activité 15

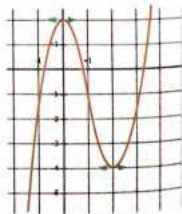
Soit f la fonction continue sur l'intervalle $[-2; 4]$ définie par :
 $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 2$ dont une représentation graphique est donnée ci-contre,

1) a) Donne le sens de variation de f sur $[2; 4]$.

b) Justifie qu'il existe un unique réel $\alpha \in [2; 4]$, tel que $f(\alpha) = 0$

2) a) Calcule $f(2)$ et $f\left(\frac{2+4}{2}\right)$ et justifie que $\alpha \in [3; 4]$

b) Calcule $f(3)$ et $f\left(\frac{3+4}{2}\right)$ et justifie que $\alpha \in [3; 3,5]$



Je fais le point de l'activité

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a; b]$ telle que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires et α l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$.

- Si $f(a)$ et $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ sont de même signe alors $\alpha \in \left[\frac{a+b}{2}; b\right]$

- Si $f(b)$ et $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ sont de signes contraires alors $\alpha \in \left[a; \frac{a+b}{2}\right]$

(Cette méthode est appelée la **méthode de dichotomie**)

J'évalue mes acquis



Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) - x$.

On suppose que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0; 1]$.

A l'aide de la méthode de dichotomie, détermine un encadrement de α d'amplitude 0,25

4.4- Connaître la méthode de balayage

Activité 16

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) - x$. On suppose que l'équation $f(x) = 0$

a une unique solution α dans l'intervalle $[0; 1]$.

Complète le tableau suivant et déduis-en un encadrement de α à 0,1 près.

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$f(x)$											

Je fais le point de l'activité

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a; b]$ d'amplitude 1 telle que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires et α l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$.

Pour appliquer la méthode de balayage à un tel intervalle, on calcule $f(a)$, $f(a+0,1)$, $f(a+0,2)$, ... et on s'arrête dès qu'on a deux résultats consécutifs de signes contraires. Ce qui permet de donner un encadrement de α .

(On adaptera le procédé à un intervalle d'amplitude 0,01; 0,001;).

J'évalue mes acquis



On sait que l'équation $x^3 + 5 = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[-2; -1]$.

Recopie et complète le tableau, puis donne un encadrement de α par deux décimaux consécutifs d'ordre 1.

x	-2	-1,9	-1,8	-1,7	-1,6	-1,5	-1,4	-1,3	-1,2	-1,1	-1
$f(x)$											

5- FONCTION PUISSANCE D'EXPOSANT RATIONNEL**5.1- Identifier une racine n-ième d'un nombre positif****Activité 17**

La fonction $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$,
 $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$ est une bijection

- 1- Détermine l'antécédent de chacun des nombres 16 et 81 par f .
- 2- L'antécédent de 16 par f se note $\sqrt[n]{16}$. Détermine $\sqrt[n]{625}$.

Je fais le point de l'activité

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 et pour tout nombre réel positif y , la racine n -ième de y est le nombre réel positif x qui vérifie $x^n = y$.

La racine n -ième de y se note $\sqrt[n]{y}$ ou $y^{\frac{1}{n}}$.

J'évalue mes acquis

- 1- Identifie la racine 5-ième de 32 dans la liste suivante : 3 ; 5 ; 2 ; $\sqrt{2}$
- 2- Identifie $\sqrt[3]{3375}$ dans la liste suivante : 25 ; 50 ; 12 ; 15.

4.2- Identifier une puissance d'exposant rationnel**Activité 18**

Écris sous forme d'une puissance chacun des nombres suivants : $(\sqrt[3]{75})^2$ et $\sqrt[4]{3^7}$.

Je fais le point de l'activité

Si p et q sont deux nombres entiers naturels non nuls et x un nombre positif, alors

$$(\sqrt[p]{x})^q = x^{\frac{q}{p}} \text{ et } \sqrt[q]{x^p} = x^{\frac{p}{q}}$$

(Ces nombres sont des puissances d'exposant rationnel).

J'évalue mes acquis

Écris les nombres suivants sous forme de puissance d'exposant rationnel :

$$(\sqrt{4})^3 ; \sqrt{15} ; \sqrt[3]{12^2} ; (\sqrt[4]{8})^2$$

II- RÉSUMÉ DE COURS



RAPPELS

Limites de référence

PROPRIÉTÉ

Soit a un nombre réel et n un nombre entier naturel non nul. On a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^a = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^a} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^a = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^a} = 0$$

$$\text{Si } n \text{ est pair, alors } \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x-a)^n} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x-a)^n} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x-a)^n} = +\infty$$

$$\text{Si } n \text{ est impair, alors } \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x-a)^n} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x-a)^n} = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$



Les fonctions sinus et cosinus n'ont pas de limite en l'infini.

Limites et opérations sur les fonctions

l et l' désignent des nombres réels et $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$

a) Limite de la somme de deux fonctions

PROPRIÉTÉ

f et g étant deux fonctions, on a le tableau suivant :

$\lim f(x) =$	l	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim g(x) =$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim (f(x) + g(x)) =$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Impossible de conclure	Impossible de conclure

b) Limite du produit de deux fonctions

PROPRIÉTÉ

f et g étant deux fonctions, on a le tableau suivant :

$\lim f(x) =$	l	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim g(x) =$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
$\lim (f(x) \times g(x)) =$	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	Impossible de conclure	

c) Limite de l'inverse d'une fonction

PROPRIÉTÉ

g étant une fonction, on a le tableau suivant :

$\lim_{x \rightarrow a} g(x) =$	$l \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	$0 \text{ et } g(x) > 0$	$0 \text{ et } g(x) < 0$
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} =$	$\frac{1}{l}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$

d) Limite du quotient de deux fonctions

PROPRIÉTÉ

g étant une fonction, on a le tableau suivant :

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$	$l \neq 0$	0	0	0	$+\infty \text{ ou } -\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x) =$	$l \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	0	$+\infty \text{ ou } -\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} =$	$\frac{l}{l}$	0	0	Impossible de conclure	Impossible de conclure

1. LIMITES

1.1. Limite de la composée de deux fonctions

PROPRIÉTÉ

Soient f et g deux fonctions numériques, a , b et l des éléments de $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$.

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ et $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = l$, alors $\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = l$.

Exemple

Soit $f(x) = 2 - x$ et $g(x) = \frac{\sin x}{x}$. Pour tout $x \neq 2$, $g \circ f(x) = \frac{\sin(2-x)}{2-x}$

On a : $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(2-x)}{2-x} = 1$



Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ et $l \geq 0$, alors $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{l}$

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f(x)} = +\infty$

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ et $l \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |l|$.

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = +\infty$

Exemple

1) On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^2 - 6x + 5) = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3x^2 - 6x + 5} = +\infty$

2) On a : $\lim_{x \rightarrow \frac{7}{2}} \left(\frac{1}{x-7} \right) = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow \frac{7}{2}} \left(\left| \frac{1}{x-7} \right| \right) = +\infty$

3) On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{9x+1}{7-x} \right) = -9$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left| \frac{9x+1}{7-x} \right| \right) = |-9| = 9$.

1.2- Limite d'une fonction monotone sur un intervalle ouvert

PROPRIÉTÉ 1

Soit f une fonction croissante sur un intervalle ouvert $]a; b[$.

- Si f est majorée sur $]a; b[$, alors f admet une limite finie à gauche en b .
- Si f est minorée sur $]a; b[$, alors f admet une limite finie à droite en a .

PROPRIÉTÉ 2

Soit f une fonction décroissante sur un intervalle ouvert $]a; b[$.

- Si f est majorée sur $]a; b[$, alors f admet une limite finie à droite en a .
- Si f est minorée sur $]a; b[$, alors f admet une limite finie à gauche en b .

PROPRIÉTÉ 3

Soit f une fonction croissante sur un intervalle ouvert $]a; b[$.

- Si f est non majorée sur $]a; b[$, alors $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty$.
- Si f est non minorée sur $]a; b[$, alors $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$.

PROPRIÉTÉ 4

Soit f une fonction décroissante sur un intervalle ouvert $]a; b[$.

- Si f est non majorée sur $]a; b[$, alors $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$.
- Si f est non minorée sur $]a; b[$, alors $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = -\infty$.

1.3- Propriétés de comparaison

PROPRIÉTÉ

Soient f et g deux fonctions numériques et a un élément de $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$.

Si $f \leq g$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$.

Si $f \leq g$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

Exemple

On sait que pour tout nombre réel x , $2x - 4 \leq 2x - 3 + \sin x$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 4) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 3 + \sin x) = +\infty$.

1.4- Théorème des gendarmes

PROPRIÉTÉ 1

Soient f, g et h deux fonctions numériques et a et l des éléments de $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$.

Si $f \leq g \leq h$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = l$ alors $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$.

PROPRIÉTÉ 2

Soient f et g deux fonctions numériques, a un élément de $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ et l un nombre réel.

Si $|f(x) - l| \leq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.

Exemple

$$\text{Calculons } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos x}{x}$$

On sait que la fonction $x \mapsto \cos x$ n'a pas de limite en $-\infty$.

Pour tout $x \in]-\infty; 0]$, $\frac{1}{x} \leq \frac{\cos x}{x} \leq \frac{-1}{x}$. Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$

2- BRANCHES PARABOLIQUES

Le plan est muni d'un repère orthogonale (O, I, J) et (C_f) désigne la courbe représentative d'une fonction.

2.1- Branche parabolique de direction celle de (OI)**DÉFINITION 1**

Lorsque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, on dit que la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction celle de (OI) en $+\infty$.

Lorsque $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \pm\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, on dit que la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction celle de (OI) en $-\infty$.

2.2- Branche parabolique de direction celle de (OJ)**DÉFINITION 2**

- Lorsque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$, on dit que la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction celle de (OJ) en $+\infty$.
- Lorsque $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \pm\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$, on dit que la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction celle de (OJ) en $-\infty$.

3- CONTINUITÉ**Rappel : Continuité en un point****DÉFINITION**

Soit f une fonction définie en a .

On dit que f est **continue en a** lorsque $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

(On dit aussi que f **admet une limite en a**)

PROPRIÉTÉ

f est continue en a si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$.

3.1- Opérations sur les fonctions continues

PROPRIÉTÉ

Si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I alors :

- les fonctions $f + g$, fg , af ($a \in \mathbb{R}$) et $|f|$ sont continues sur I .
- si g ne s'annule pas sur I , alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I .
- si f est positive sur I , alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue sur I .

Exemple

Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.

Toute fonction rationnelle est continue sur son ensemble de définition.

3.2- Image d'un intervalle par une fonction continue

PROPRIÉTÉ 1

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle ou un singleton.

PROPRIÉTÉ 2

L'image d'un intervalle fermé par une fonction continue est un intervalle fermé ou un singleton.



L'image d'un intervalle par une fonction constante est un singleton.

3.3- Prolongement par continuité

DÉFINITION

Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f , a un nombre réel n'appartenant pas à D_f et l un nombre réel.

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$, alors la fonction g définie par :
$$\begin{cases} g(x) = f(x) \text{ si } x \in D_f \\ g(a) = l \end{cases}$$
 est continue en a et est appelée le **prolongement par continuité de f en a** .

Exemple

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$x \mapsto \frac{\sin x}{x}$$

On a : $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$. Comme $0 \notin D_f$ et $1 \in \mathbb{R}$, alors la fonction g définie par :

$$\begin{cases} g(x) = \frac{\sin x}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ g(0) = 1 \end{cases} \quad \text{est le prolongement de } f \text{ en } 0.$$



Si g est le prolongement par continuité de f en a , alors l'ensemble de définition de g est

$$D_g = D_f \cup \{a\}$$

3.4 Composée de deux fonctions continues

PROPRIÉTÉ

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions.

Si f est continue sur I tel que $f(I) \subset J$ et g continue sur J , alors la fonction $g \circ f$ est continue sur I .



La composée de deux fonctions continues sur leurs ensembles de définition respectifs est continue sur son ensemble de définition.

Exemple

La fonction $x \mapsto x^2 + 1$ est continue et strictement positive sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, donc la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$ est continue sur son ensemble de définition qui est $\mathbb{R}$.

3.5 Théorème des valeurs intermédiaires

PROPRIÉTÉ 1

Soit f une fonction continue sur un intervalle I .

S'il existe deux éléments a et b ($a < b$) de I , tels que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]a; b[$.

3.6 Conséquences du théorème des valeurs intermédiaires

PROPRIÉTÉ 1

Soit f une fonction continue sur un intervalle K .

Si f ne s'annule pas sur K , alors f garde un signe constant sur K .

PROPRIÉTÉ 2

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I .

Pour tout nombre $m \in f(I)$ l'équation $f(x) = m$ admet une unique solution sur l'intervalle I .

PROPRIÉTÉ 3

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I .

S'il existe deux éléments a et b ($a < b$) de I , tels que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]a; b[$.

Exemple

La fonction f définie par $f(x) = \cos x - x$ est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

$f(0) = 1$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$ sont de signes contraires donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0; \frac{\pi}{2}[$.

4 FONCTION CONTINUE ET STRICTEMENT MONOTONE

4-1 Bijection et bijection réciproque

PROPRIÉTÉ

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I .

- f réalise une bijection de I vers $f(I)$.
- La bijection réciproque f^{-1} de f est continue sur l'intervalle $f(I)$ et a le même sens de variation que f .

Exemple

Soit f la fonction définie par :

$$f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^2 + 3$$

f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers $f(\mathbb{R}_+)$ où $f(\mathbb{R}_+) = [3; +\infty[$.



Dans l'exemple ci-dessus, on ne peut pas dire que f est une bijection car $f(\mathbb{R}_+)$ n'est pas l'ensemble d'arrivée de f .



Dans un repère orthonormé, la courbe représentative de f^{-1} est le symétrique de celle de f par rapport à la première bissectrice d'équation $y = x$.

4.2 Image d'un intervalle par une fonction continue et monotone

PROPRIÉTÉ 1

- Si f est une fonction continue et strictement croissante sur un intervalle $[a; b]$, alors l'image de l'intervalle $[a; b]$ par f est $f([a; b]) = [f(a); f(b)]$.
- Si f est une fonction continue et strictement décroissante sur un intervalle $[a; b]$, alors l'image de l'intervalle $[a; b]$ par f est $f([a; b]) = [f(b); f(a)]$.

PROPRIÉTÉ 2

Si f est une fonction continue et strictement croissante sur un intervalle $]a; b[$, alors l'image de l'intervalle $]a; b[$ par f est $f(]a; b[) = \left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$.

Si f est une fonction continue et strictement décroissante sur un intervalle $]a; b[$, alors l'image de l'intervalle $]a; b[$ par f est $f(]a; b[) = \left] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$.

Exemple

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

f est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$ donc $f([0; +\infty[) = \left] f(0); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[= [0; +\infty[$.

f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ donc $f(]-\infty; 0]) = \left] f(0); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[= [0; +\infty[$.



Lorsque f est une fonction continue et non monotone sur un intervalle $[a; b]$ alors l'image de l'intervalle $[a; b]$ par f est l'intervalle $[m; M]$ où m et M sont respectivement le minimum et le maximum de f sur l'intervalle $[a; b]$.

4.3 Méthode de dichotomie

f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a; b]$ telle que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires et α l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$:

- Si $f(a)$ et $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ sont de même signe, alors $\alpha \in \left] \frac{a+b}{2}; b \right[$
- Si $f(a)$ et $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ sont de signes contraires, alors $\alpha \in \left] a; \frac{a+b}{2} \right[$

4.4 Méthode de balayage

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a; b]$ d'amplitude 1 telle que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires et α l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$ dans $[a; b]$ alors on calcule $f(a)$, $f(a + 0,1)$, $f(a + 0,2)$, ... et on s'arrête dès qu'on a deux résultats consécutifs de signes contraires pour déduire un encadrement de α .

5- FONCTION PUISSANCE D'EXPOSANT RATIONNEL

5.1-Fonction racine n-ième

DÉFINITION

Soit n un nombre entier naturel supérieur ou égal à deux.

On appelle fonction racine n -ième la bijection réciproque de la fonction bijective f_n définie par :

$$f_n: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$$

$$x \mapsto x^n$$

La racine n -ième de x est notée : $\sqrt[n]{x}$ ou $x^{\frac{1}{n}}$.



- Pour tout nombre réel positif y , $\sqrt[n]{y}$ se lit « racine n -ième de y ».
- Pour tout nombre réel positif x , $x^n = y \Leftrightarrow \sqrt[n]{y} = x$ ou $x^n = y \Leftrightarrow y^{\frac{1}{n}} = x$



- La racine carrée de x est notée $\sqrt{x}$ ou $x^{\frac{1}{2}}$
- La racine troisième de x se lit racine cubique de x , on note : $\sqrt[3]{x}$ ou $x^{\frac{1}{3}}$

Exemples

La racine 4-ième de 1296 se note : $\sqrt[4]{1296}$.

On a : $\sqrt[4]{1296} = 6$ car $6^4 = 1296$.

On a : $125^{\frac{1}{3}} = 5$ car $5^3 = 125$

On a : $144^{\frac{1}{2}} = \sqrt{144} = 12$

5.2 Puissance d'exposant rationnel

NOTATION

Pour tout nombre réel strictement positif x , pour tout entier relatif non nul p et pour tout entier naturel non nul q , on a : $x^{\frac{p}{q}} = (x^{\frac{1}{q}})^p = (\sqrt[q]{x})^p$ ou $x^{\frac{p}{q}} = (x^p)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$

Exemple

$$25^{\frac{3}{2}} = (25^{\frac{1}{2}})^3 = (\sqrt{25})^3 = 5^3 = 125$$

DÉFINITION 1

Soit $x \in \mathbb{R}^*$, $p \in \mathbb{R}^*$ et $q \in \mathbb{R}^*$.

On appelle puissance de x d'exposant $\frac{p}{q}$ le nombre réel, noté $x^{\frac{p}{q}}$, défini par $\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p$.
 $x^{\frac{p}{q}}$ est une puissance d'exposant rationnel.

DÉFINITION 2

Soit α un nombre rationnel non nul.

On appelle fonction puissance d'exposant α la fonction f_α définie par :

$$f_\alpha: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$$

$$x \mapsto x^\alpha$$

Les fonctions de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}_+$ définies respectivement par $x \mapsto x^{\frac{4}{3}}$ et $x \mapsto x^{-\frac{2}{13}}$ sont des fonctions puissances d'exposant rationnel.



On étend aux puissances d'exposants rationnels toutes les propriétés de calculs établies pour les puissances d'exposants entiers d'où les propriétés suivantes :

PROPRIÉTÉ 2

Soient α et α' deux nombres rationnels non nuls, x et y deux nombres réels strictement positifs. On a :

$$1) x^\alpha \times x^{\alpha'} = x^{\alpha + \alpha'}$$

$$2) x^\alpha \times y^\alpha = (xy)^\alpha$$

$$3) (x^\alpha)^{\alpha'} = x^{\alpha \times \alpha'}$$

$$4) \frac{x^\alpha}{y^\alpha} = \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha$$

$$5) \frac{x^\alpha}{x^{\alpha'}} = x^{\alpha - \alpha'}$$



Pour tous entiers naturels m et n non nuls, on a :

$$\sqrt[m]{x} \times \sqrt[n]{x} = \sqrt[m \times n]{x^{n+m}} \text{ et } \sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m \times n]{x}$$

III-

MÉTHODE



- Pour calculer une limite présentant une forme indéterminée, on peut utiliser :
 - une expression conjuguée
 - le taux de variation d'une fonction dérivable
 - une factorisation
 - la limite d'une composée de deux fonctions
 - un changement de variable
 - une combinaison de plusieurs procédés ci-dessus.
- Pour déterminer l'image d'un intervalle fermé I par une fonction continue f , on peut utiliser :
 - la monotonie de f sur l'intervalle I
 - le tableau de variation de f sur l'intervalle I
 - le maximum et le minimum de f sur l'intervalle I
- Pour démontrer qu'une équation $f(x) = m$ admet une solution dans un intervalle I :
 - on démontre que f est continue sur l'intervalle I
 - on démontre que m appartient à l'image de l'intervalle I par f
- Pour déterminer une valeur approchée de la solution α de l'équation $f(x) = 0$ dans un intervalle $[a; b]$, où f est une fonction continue et monotone sur l'intervalle $[a; b]$, on peut utiliser :
 - la méthode de dichotomie.
 - la méthode de balayage.
 - combiner la méthode de dichotomie et la méthode de balayage.
- Pour démontrer qu'une fonction f est une bijection d'un intervalle I sur un intervalle J :
 - démontre que f est continue et strictement monotone sur I
 - on démontre que $f(I) = J$

IV- SAVOIR-FAIRE



Savoir-faire 1-

Savoir calculer une limite en utilisant la propriété relative à la limite d'une fonction composée

Énoncé

En utilisant la propriété relative à la limite d'une fonction composée, calcule : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos \left(\frac{2\pi x - 6}{17 - 3x} \right)$

Solution commentée

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos \left(\frac{2\pi x - 6}{17 - 3x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos \left(\frac{2\pi x}{-3x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos \left(\frac{2\pi}{-3} \right) = \frac{-1}{2} \quad \text{car } \lim_{x \rightarrow \frac{-2\pi}{3}} \cos x = \cos \left(\frac{-2\pi}{3} \right) = \frac{-1}{2}.$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos \left(\frac{2\pi x - 6}{17 - 3x} \right) = -\frac{1}{2}.$$

Savoir-faire 2-

Savoir calculer une limite en utilisant un changement de variable

Énoncé

À l'aide d'un changement de variable, calcule :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin \left(x - \frac{\pi}{2} \right)}{x - \frac{\pi}{2}}$$

Solution commentée

$$\text{Posons } X = x - \frac{\pi}{2}$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) = 0 \text{ donc lorsque } x \rightarrow \frac{\pi}{2}, \text{ on a } X \rightarrow 0 \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin \left(x - \frac{\pi}{2} \right)}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\sin X}{X} = 1$$

Savoir-faire 3-

Savoir calculer une limite en utilisant le taux de variation d'une fonction dérivable

Énoncé

À l'aide du taux de variation d'une fonction, calcule : $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x} - 4}{x - 16}$

Solution commentée

$$\text{Posons } f(x) = \sqrt{x}.$$

On sait que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\forall x > 0, f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Comme $f(16) = 4$ et que f est dérivable

$$\text{en 16 alors on a : } \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x} - 4}{x - 16} = \lim_{x \rightarrow 16} \frac{f(x) - f(16)}{x - 16} = f'(16) = \frac{1}{2\sqrt{16}} = \frac{1}{8}$$

Savoir-faire 4-

Savoir calculer une limite en utilisant une expression conjuguée

Énoncé 1

À l'aide d'une expression conjuguée, calcule : $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x} - 4}{x - 16}$

SOLUTION COMMENTÉE

On a :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x} - 4}{x - 16} &= \lim_{x \rightarrow 16} \frac{(\sqrt{x} - 4)(\sqrt{x} + 4)}{(x - 16)(\sqrt{x} + 4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 16} \frac{(\sqrt{x})^2 - 4^2}{(x - 16)(\sqrt{x} + 4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 16} \frac{x - 16}{(x - 16)(\sqrt{x} + 4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 16} \frac{1}{\sqrt{x} + 4} \\ &= \frac{1}{8}\end{aligned}$$

ÉNONCÉ 2

À l'aide d'une expression conjuguée, calcule : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 5})$

SOLUTION COMMENTÉE

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 5}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 + 5})(x + \sqrt{x^2 + 5})}{(x + \sqrt{x^2 + 5})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - (x^2 + 5)}{x + \sqrt{x^2 + 5}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5}{x + \sqrt{x^2 + 5}} = 0 \text{ car} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 5}) &= +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} (-5) = -5.\end{aligned}$$

Savoir-faire 5 : Savoir calculer une limite en utilisant une factorisation**ÉNONCÉ 1**

À l'aide d'une factorisation, calcule : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)}{x^3 - 1}$

SOLUTION COMMENTÉE

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{x^2 + x + 1} = \frac{2}{3}$$

ÉNONCÉ 2

Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + \sqrt{5x^2 + 3x + 1})$ à l'aide d'une factorisation

SOLUTION COMMENTÉE

$$\begin{aligned}\text{On a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + \sqrt{5x^2 + 3x + 1}) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2x + \sqrt{x^2 \left(5 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} \right)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2x + |x| \sqrt{5 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2x - x \sqrt{5 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} \right) \text{ car si } x \in]-\infty; 0[\text{ alors } |x| = -x \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(2 - \sqrt{5 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} \right) \\ &= +\infty\end{aligned}$$

car $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 - \sqrt{5 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} \right) = 2 - \sqrt{5}$, où $2 - \sqrt{5}$ est un nombre négatif

Savoir-faire 6-

Savoir démontrer qu'une fonction est une bijection et définir sa bijection réciproque

ÉNONCÉ

 Soit f la fonction définie par : $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow [3; +\infty[$

$$x \mapsto x^2 + 3$$

 Démonstre que f est une bijection et détermine sa bijection réciproque f^{-1}
SOLUTION COMMENTÉE
 f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et sa dérivée est $f'(x) = 2x$. $f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}_+$, donc f est croissante sur $\mathbb{R}_+$. De plus

$$f(\mathbb{R}_+) = [f(0); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)] = [3; +\infty[$$

 f est continue (car f est dérivable) et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc f est une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $f(\mathbb{R}_+) = [3; +\infty[$.

 Détermination de f^{-1}

 Soit $y \in [3; +\infty[$. Déterminons x dans $\mathbb{R}_+$ telle que $f(x) = y$

On a :

$$f(x) = y \Leftrightarrow x^2 + 3 = y$$

$$\Leftrightarrow x^2 = y - 3$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{y - 3} \text{ ou } x = -\sqrt{y - 3} \text{ car } y - 3 \geq 0 \text{ sur } [3; +\infty[.$$

 Comme $x \in \mathbb{R}_+$, alors $x = \sqrt{y - 3}$.

 La bijection réciproque de f est alors définie de la manière suivante :

$$f^{-1}: [3; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$$

$$: x \mapsto \sqrt{x - 3}.$$

Savoir-faire 7-

 Savoir déterminer le nombre de solution d'une équation du type $f(x)=m$
ÉNONCÉ

 Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	13	6	$+\infty$

A chaque affirmation réponds par Vrai si elle est correcte et réponds par Faux si elle est incorrecte.

- 1) L'équation $f(x) = 10$ admet 3 solutions dans $\mathbb{R}$.
- 2) L'équation $f(x) = 5$ n'a pas de solution dans $[3; +\infty[$.
- 3) L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.
- 4) L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[-1; 3]$.

SOLUTION COMMENTÉE

1) Vrai

2) Vrai

3) Vrai

4) Faux

Savoir-faire 8-

 Savoir déterminer une valeur approchée d'une équation du type $f(x)=0$
ÉNONCÉ

 Soit f la fonction dérivable définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - x + \sin x$.

- 1) Démonstre que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]1; 2]$.
- 2) Détermine une valeur approchée de α à 0,01 près

SOLUTION COMMENTÉE

1) Pour tout nombre réel x , on a $f'(x) = -1 + \cos x$ et $f'(x) \leq 0$. f est continue et strictement décroissante sur $]1; 2]$. $f(1) = 0,8$ et $f(2) = -0,09$ sont de signes contraires donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]1; 2]$.

2) À l'aide de la méthode de dichotomie ou la méthode de balayage, on établit que $1,93 < \alpha < 1,94$ donc tout nombre de l'intervalle $]1,93; 1,94]$ est une valeur approchée de α à 0,01 près.

V- JE M'EXERCE



1- Exercices de fixation/ Application

Déterminer une limite en utilisant les limite de référence

1) Calcule les limites suivantes :

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^4) & \text{b)} \lim_{x \rightarrow -\infty} (8x^5) \\ \text{c)} \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^4) & \text{d)} \lim_{x \rightarrow +\infty} (8x^5) \end{array}$$

2) Calcule les limites suivantes :

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow 6} \left(\frac{4-2x}{x-6} \right) & \text{b)} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} \right) \\ \text{c)} \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x+1}{x+2} \right) & \text{d)} \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x+1}{x+2} \right) \end{array}$$

Connaître la propriété relative à la limite d'une fonction composée

3) Soient f et g deux fonctions.

À chaque affirmation réponds par Vrai si elle est correcte et réponds par Faux si elle est incorrecte.

- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$, alors $\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = l$
- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ et $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = l$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f \circ g(x) = l$
- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ et $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = l$, alors $\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = l$

4) Calcule les limites suivantes :

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow -5} |2x-3| & \text{b)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{16x+5}{4+9x}} \\ \text{c)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \cos \left(\frac{6x-8}{2x^2+5x+7} \right) \end{array}$$

Déterminer la limite d'une fonction en utilisant les

propriétés de comparaison

5) f est une fonction telle que : $\forall x \in]0; +\infty[$,

$$|f(x) - 5| \leq \frac{1}{x}$$

Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

6) Calcule les limites suivantes en utilisant les propriétés de comparaison

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 5 + \cos x) & \text{b)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x \cos x}{x^2 + 1} \right) \\ \text{c)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cos \left(\frac{1}{x} \right) \right) \end{array}$$

Connaître la propriété relative à la limite d'une fonction monotone sur un intervalle ouvert.

7) Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert $]a; b[$.

À chaque affirmation réponds par Vrai si elle est correcte et réponds par Faux si elle est incorrecte.

- Si f est strictement croissante et majorée sur $]a; b[$, alors $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = +\infty$
- Si f est strictement croissante et non majorée sur $]a; b[$, alors $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = +\infty$
- Si f est strictement croissante et majorée sur $]a; b[$, alors $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$ est un nombre réel
- Si f est strictement croissante et minorée sur $]a; b[$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$

8) Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert $]a; b[$.

À chaque affirmation réponds par Vrai si elle est correcte et réponds par Faux si elle est incorrecte.

- Si f est strictement décroissante et majorée sur $]a; b[$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ est un nombre réel

- 2- Si f est strictement décroissante et non minorée sur $]a; b[$, alors $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = -\infty$
- 3- Si f est strictement décroissante et minorée sur $]a; b[$, alors $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ est un nombre réel
- 4) Si f est strictement décroissante et non majorée sur $]a; b[$, alors $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$.

Déterminer la limite d'une fonction en utilisant une expression conjuguée

11 Calcule les limites suivantes en utilisant une expression conjuguée

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} & \text{b)} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2+3}) \\ \text{c)} \lim_{x \rightarrow 25} \frac{\sqrt{x}-5}{x-25} & \text{d)} \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2}-3}{x-7} \end{array}$$

Déterminer la limite d'une fonction en utilisant la définition d'un nombre dérivé

12 Calcule les limites suivantes en utilisant la définition d'un nombre dérivé

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi} & \text{b)} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3} \\ \text{c)} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x + 1}{x - \pi} & \text{d)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{2}} \end{array}$$

Déterminer la limite d'une fonction en utilisant une égalité remarquable

13 Calcule les limites suivantes en utilisant une égalité remarquable

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{1 - x^2} & \text{b)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2\cos x + \cos^2 x}{x} \end{array}$$

Déterminer un prolongement par continuité d'une fonction en un point.

14 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par

$$f(x) = \frac{\sqrt{5+x^2}-3}{x-2}.$$

- Justifie que la fonction f admet un prolongement par continuité en 2.
- Définit la fonction g , prolongement par continuité de f en 2.

Déterminer l'image d'un intervalle par une fonction continue en utilisant son tableau de variation

15 Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$	-5	2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	3	-4	12

Détermine l'image de chacun des intervalles suivants : $]-\infty; -5[$; $[-5; +\infty[$; $[-5; 2]$; $]-\infty; 2]$.

16 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{2x-2}{x^2+3}$$

Détermine les images par f des intervalles : $[-4; 4]$; $[-1; 3]$; $[0; +\infty[$

Déterminer le nombre de solutions d'une équation du type $f(x) = m$

17 Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 6x - 6.$$

- Démontre que l'équation $f(x) = -8$ admet une unique solution dans $[0; 2]$
- Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[2; 3]$

18 Démontre que les équations suivantes ont au moins une solution dans l'intervalle $[0; 1]$.

$$\text{a)} x^3 + 3x = 1; \text{ b)} x^3 = \frac{1}{x-1}; \text{ c)} x - 2\cos x = 1$$

Déterminer la formule explicite de la bijection réciproque

19 Soit f la fonction définie par :

$$f: \left] \frac{5}{2}; +\infty \right[\rightarrow]-\infty; -\frac{3}{2}[$$

$$x \mapsto \frac{3x-2}{-2x+5}$$

On admet que f est une bijection. Définis sa bijection réciproque f^{-1}

Interpréter graphiquement $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

20 Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, i, j) et (C_f) est la courbe représentative d'une fonction f .

A chaque affirmation réponds par Vrai si elle est correcte et réponds par Faux si elle est incorrecte.

- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, alors (C_f) admet une branche parabolique de direction celle de (Oj) $+\infty$.
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, alors (C_f) admet une branche parabolique de direction celle de (Oj) $+\infty$.
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, alors (C_f) admet une branche parabolique de direction celle de

Noter la racine n -ième d'un nombre ou une puissance d'exposant rationnel

- 1- Note la racine 5-ème de 80
 2- Ecris le nombre $\sqrt[6]{81}$ sous forme d'une puissance de 3

Représenter graphiquement une fonction du type

$$x \mapsto \sqrt[n]{x}$$

- 3- Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 1cm, construis la courbe de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$, par $g(x) = \sqrt[3]{x}$.

2. Exercices de renforcement / approfondissement

1- A chaque affirmation, réponds par Vrai si elle est correcte sinon réponds par Faux.

- 1- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ (où $l \in \mathbb{R}$) et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$ alors

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$$

$$2- \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x} = +\infty,$$

- 3- Si f est une fonction continue et strictement croissante sur un intervalle I alors f détermine une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$.

- 4- La racine 7-ème d'un nombre réel positif x se note $\sqrt[7]{x}$

2- Calcule les limites suivantes :

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5-4x}{x-2} \quad b) \lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{(6-x)^5}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x}{(x+4)(x-2)}$$

3- Calcule les limites suivantes :

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{5}{x^2} + \frac{9}{x}} + 25 \quad b) \lim_{x \rightarrow 4} \left| \frac{2x+5}{x+4} \right|$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \sqrt{4x^2 + 8x + 1})$$

4- Calcule les limites suivantes :

$$a) \lim_{x \rightarrow 3} \cos\left(\frac{\pi x}{x+1}\right) \quad b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}+2}{x+4}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} (4x - \sqrt{3x^2 + 5x - 7})$$

5- Calcule les limites suivantes :

$$a) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\cos x)}{\cos x} \quad b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3 + \sin x}{x+1}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} (4x + 5x^2 + \cos 3x)$$

6- Calcule les limites suivantes :

$$a) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2 - \sqrt{x+1}}{x-3} \quad b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \sqrt{x^2+1}}{x+1}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + \sqrt{x^2+1}}{x+1}$$

7- Calcule les limites suivantes :

$$a) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x} \quad b) \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x+2}{x-3} \right)^2$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^2 - 1}$$

8- Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J) . Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par :

$$f(x) = \frac{5x+8}{2-x}$$

- 1- Calcule $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ puis interprète graphiquement le résultat

- 2- Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis interprète graphiquement le résultat

9- Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J) . Soit f la fonction définie sur $[4; +\infty[$ par :

$$f(x) = 2 + \sqrt{x+4}$$

- 1- Calcule : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

- 2- Interprète graphiquement les résultats de la question précédente

10- Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J) . Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 2x^3 - 5x + 1$$

- 1- Calcule : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

- 2- Interprète graphiquement les résultats de la question précédente.

- 11 Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J) . Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 + 3}$$

Démontre que la droite (D) d'équation $y = 2x$ est une asymptote à la courbe de f en $+\infty$.

- 12 Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9}$$

- Détermine l'ensemble de définition de f .
- Démontre qu'on peut prolonger f par continuité en 3.
- a) Définis la fonction g prolongement par continuité de f en 3.
b) Détermine l'ensemble de définition de la fonction g .

- 13 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{2x+5}-3}{x-2} \\ f(2) = \alpha \end{cases} \quad \text{si } x \neq 2$$

Détermine le nombre réel α pour que la fonction f soit continue en 2.

- 14 Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{\cos x - 1}{x^2}$$

- Démontre qu'on peut prolonger f par continuité en 0.
- Définis la fonction g prolongement par continuité de f en 0.

- 15 Soit l'application définie par :

$$f:]+\infty; 0] \rightarrow [8; +\infty[$$

$$x \mapsto 2x^2 - 8.$$

- Démontre que f est une bijection.
- Représente (C_f) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 1 cm.
- Soit f^{-1} la bijection réciproque de f .
a) Détermine le sens de variation de f^{-1} et dresse son tableau de variation.
b) Représente $(C_{f^{-1}})$ la courbe représentative de f^{-1} dans le même repère que (C_f) .
c) Définis la formule explicite de la fonction f^{-1} .

- 16 Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x - 4.$$

- Détermine l'image de l'intervalle $[2; 3]$ par f .
- a) Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[2; 3]$.
b) Détermine une valeur approchée de α à 10^{-1} .

- 17 Ecris sous forme de produit de puissances de 2 et de 3

$$a) \frac{\sqrt[3]{36}}{6^{\frac{1}{2}}}$$

$$b) \sqrt[3]{127} \times \sqrt[4]{512}$$

$$c) \frac{(2^6)^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{7}{3}}}{8^{\frac{4}{3}} \times \sqrt{27}}$$

- 18 Simplifie les expressions suivantes

$$a) \frac{\sqrt[3]{25} \times 2}{\sqrt[3]{400}}$$

$$b) \frac{\sqrt{5} \times \sqrt[3]{625}}{\sqrt[3]{400}}$$

- 19 Résous dans $\mathbb{R}$ chaque équation.

- $x^3 = 3$; 2) $\sqrt[3]{x} = 3$; 3) $x^5 - 243 = 0$
- $3x^{\frac{1}{4}} = 5\sqrt{2}$; 5) $\sqrt[6]{x} = 2 \times 5^{\frac{1}{4}}$; 6) $x^{-5} = 10^{-2}$

- 20 On pose : $a = \sqrt[3]{11}$ et $b = \sqrt{5}$

- Calcule : a^6 et b^6
- Compare alors a et b .

- 21 Compare les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt[3]{x}$; $g(x) = \sqrt{x}$

- Calcule : $(\sqrt[3]{5} - 3)^3$
- Simplifie alors $\sqrt[3]{17\sqrt{5} - 38}$

- 22 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité 1 cm.

Soit la fonction définie par :

$$f:]-5; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{2x+3}{x+5}.$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f .

- Justifie que la droite (D) d'équation $x = -5$ est une asymptote verticale à la courbe (C) .
- Justifie que la droite (Δ) d'équation $y = 2$ est une asymptote horizontale à la courbe (C) en $+\infty$.
- a) Démontre que f est une bijection de $]-5; +\infty[$ sur un intervalle K que tu préciseras.
b) Détermine le sens de variation de f^{-1} la bijection réciproque de f .
c) Détermine la formule explicite de f^{-1} .
- Construis (D) , (Δ) , (C) et la courbe (C') de la fonction f^{-1} .

11 Soit la fonction f :

$$f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{-4x^2 + 8x - 3}{4(x-1)}$$

1- Détermine les a, b, c tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}, f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$$

2- Étudie la variation de f .

3- Calcule

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (1-x)] \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (1-x)].$$

Interprète graphiquement ces résultats.

4- Trace la courbe représentative de la fonction f .

12 On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{2x-3}{3x^2-4x}$$

1- Calcule les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Donne une interprétation graphique lorsque cela est possible.

2- Étudie les variations de la fonction f puis dresse le tableau de variation.

3- Détermine les équations de tangentes à $(\mathcal{C})$ aux points d'abscisses $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$.

4- Déterminer deux réels a et b tels que :

$$f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{3x-4}$$

13 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 5x + 5}{(x+1)^2}$$

1- Calcule les limites de f aux bornes de son

ensemble de définition. Donne une interprétation graphique lorsque cela est possible.

2- Démontre que la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est une asymptote oblique à la courbe $(\mathcal{C})$ de f .

3- Étudie la position relative de $(\mathcal{C})$ et (D) .

4- Calcule la dérivée de f .

5- Étudie le signe de $f'(x)$ après avoir factorisé le numérateur à l'aide de racines évidentes.

6- Dresse le tableau de variations de f .

7- Construis la courbe représentative $(\mathcal{C})$ de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

14 Soit f la fonction numérique de la variable réelle x distincte de -2 et 12 telle que :

$$f(x) = \frac{3x^3 - x^2 + 4}{3(x^2 - 4)}$$

1- Détermine les nombres réels a, b, c et d tels que, si $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$, désigne l'ensemble des réels distincts de -2 et 2 ,

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}, f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2} + \frac{d}{x-2}$$

2- Étudie la variation de la fonction f .

3- Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthogonal d'axes (Ox, Oy) . (On prendra comme unité de longueur : 1,5 cm sur Ox et 1 cm sur Oy).

a) Démontre que c admet la droite d'équation

$$y = x - \frac{1}{3}$$

b) Démontre que c admet le point I de coordonnées

$$(0, -\frac{1}{3}) \text{ comme centre de symétrie.}$$

c) Construis la courbe $(\mathcal{C})$.

3- Situation complexe

15 Les étudiants de première année de médecine d'une université de la Côte d'Ivoire mènent une étude sur l'évolution d'un phénomène. Ils établissent que l'évolution du phénomène en fonction du temps t ($t \geq 1$) est définie par la fonction f telle que

$$f(x) = \frac{100t}{2t+3}$$

Ils présentent leur résultat à leur professeur qui

leur dit qu'en réalité c 'est la bijection réciproque de f qui donne l'évolution du phénomène. Ils désirent connaître cette fonction.

Définis la fonction qui décrit le phénomène étudié par les étudiants.



VI- RENDEZ-VOUS DES CURIEUX

On peut rattacher l'origine du concept de la continuité au mathématicien Leibniz (1646 – 1716) mais à cette époque les fonctions, souvent d'origine géométrique ou cinématique, ne nécessitent pas une analyse approfondie de la continuité. L'approche leibnizienne est alors ignorée au profit de celle d'Euler (1707- 1783) qui dit qu'une fonction est continue si elle est définie à l'aide d'une seule expression. Il faudra attendre 1816 pour une première définition rigoureuse de la continuité énoncée par un prêtre de Bohême, Bernhard Bolzano (1781 – 1848) ou 1821 pour une formule

Notions essentielles :

- Probabilité conditionnelle ;
- Variable aléatoire ;
- Loi binomiale.

SITUATION D'APPRENTISSAGE

KOUAKOU, un élève de terminale D du Lycée Moderne de Bouaflé projette partager un repas avec ses camarades de classe à la date anniversaire de sa naissance. Malgré les apports financiers de ses parents, il a un déficit budgétaire de 8 000 FCFA. À la recherche du complément financier il désire participer au jeu suivant « Le joueur mise 1 000 FCFA puis on lance deux fois de suite un dé cubique parfait dont 4 faces sont numérotées 0 et deux faces sont numérotées 1 et 5. Le joueur remporte une somme équivalente au produit de sa mise par les chiffres apparus lors des deux lancers du dé ». KOUAKOU discute de son projet avec ses amis de classe, qui décident d'étudier les probabilités de gagner au moins les 8 000 FCFA.





I- ACTIVITÉS DE DÉCOUVERTE

1- PROBABILITÉ CONDITIONNELLE

1.1- Connaître la définition d'une probabilité conditionnelle

ACTIVITÉ 1

Un centre de dépistage de la maladie à coronavirus (covid-19) reçoit 50 volontaires au test de dépistage dont 30 hommes et 20 femmes. Parmi les femmes 15 ont plus de 60 ans et parmi les hommes 20 ont plus de 60 ans.

1- On choisit au hasard un volontaire au test de dépistage de la covid-19.

Calcule la probabilité des événements suivants :

- A « Le volontaire choisi est une femme » ;
- B « Le volontaire choisi a plus de 60 ans » ;
- Traduis en langage courant l'événement $A \cap B$;
- Calcule $P(A \cap B)$.

2-

- Parmi les femmes, détermine la probabilité de choisir une femme de plus de 60 ans
- Compare les quotients $\frac{15}{20}$ et $\frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

Je fais le point de l'activité

Soit A un événement de l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire tel que : $P(A) \neq 0$. La probabilité conditionnelle de l'événement B sachant que l'événement A est réalisé

est $\frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

On la note : $P_A(B)$ ou $P(A/B)$ et on lit « probabilité de B sachant A »

J'évalue mes acquis



Reprends les données de l'activité ci-dessus. Sachant que le volontaire choisi a plus de 60 ans. Calcule la probabilité pour qu'il soit une femme.

1.2- Connaître la propriété relative à deux événements indépendants

ACTIVITÉ 2

Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On en tire une au hasard et on considère les événements suivants :

A : « tirage d'un nombre pair »

B : « tirage d'un multiple de 3 »

- Calcule $P(A)$, $P(B)$ et $P(A \cap B)$
 - Justifie que : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
 - Déduis-en que $P_B(A) = P(A)$ et $P_A(B) = P(B)$
- Reprendre la question avec une urne contenant 13 boules.
 - Calcule $P(A)$, $P(B)$ et $P(A \cap B)$
 - Justifie que : $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$.

Je fais le point de l'activité

Soit P une probabilité sur un univers E .

- On dit que les deux événements sont indépendants si :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

- si $P(A) \neq 0$, on a : A et B sont indépendants si et seulement si, $P_B(A) = P(A)$.

l'évalue mes acquis



Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes, puis justifie chaque réponse :

- Si A et B sont deux événements indépendants, alors $P(A \cup B) = P(A) \times P(B)$
- Si $P(A) = 0,7$; $P(B) = 0,2$; $P(A \cap B) = 0,14$, alors les événements A et B sont indépendants.

1.3-Connaitre la formule des probabilités totales

Activité 3

Un centre de composition du baccalauréat reçoit pour une même session des candidats repartis dans les séries A , C et D comme suit :

- 60 % des candidats sont en série A dont 80 % sont des filles ;
- 10 % des candidats sont en série C dont 5 % sont des filles ;
- 30 % des candidats sont en série D dont 40 % sont des filles.
- Aucun candidat ne peut composer dans plus d'une série lors d'une même session.

Le président de jury choisit au hasard le listing d'une série et lit au hasard un numéro de table.

On désigne par :

Ω « Le listing du centre de composition » ;

A l'évènement « le listing choisi est celui de la série A » ;

C l'évènement « le listing choisi est celui de la série C » ;

D l'évènement « le listing choisi est celui de la série D » ;

F l'évènement « le numéro de table lu est celui d'une fille ».

1-a) Justifie que les événements A , C et D sont deux à deux disjoints.

b) Recopie et complète l'égalité : $A \cup C \cup D = \dots$

2- Calcule : $P(F)$.

Je fais le point de l'activité

- Les événements A , C et D sont deux à deux disjoints et dont leur réunion est l'univers
On a : $A \cap C = \emptyset$, $A \cap D = \emptyset$, $D \cap C = \emptyset$ et $A \cup C \cup D = \Omega$.
On dit que les événements A , C et D forment une partition de l'univers.
- Pour tout évènement F de l'univers Ω on a $P(F) = P(F \cap A) + P(F \cap C) + P(F \cap D)$

l'évalue mes acquis



Une classe de terminale D à son effectif constitué de 80 % de garçons.

Au bilan annuel 45 % des garçons et 70 % des filles ont obtenu une moyenne supérieure ou égale à 10.

On choisit au hasard un élève de cette classe et on définit les événements suivants :

G , l'évènement : « l'élève choisi est un garçon » ;

M , l'évènement : « l'élève choisi a obtenu une moyenne supérieure ou égale à 10 ».

Calcule $P(M)$.

2- VARIABLE ALÉATOIRE

2.1- Connaître la définition d'une variable aléatoire

ACTIVITÉ 4

Une urne contient 4 boules rouges et 3 boules bleues. Un jeu consiste à tirer simultanément 2 boules de cette urne.

On gagne 100 F par boule rouge tirée et on perd 50 F par boule bleue tirée.

Dresse un tableau donnant à chaque éventualité de l'univers de cette expérience le gain algébrique correspondant du joueur.

Je fais le point de l'activité

Toute application qui, à chaque éventualité, associe un nombre réel est une **variable aléatoire**.

l'évalue mes acquis



Un joueur lance un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
Si le numéro obtenu est 1, 2 ou 3, il perd 10 F.
Si le numéro obtenu est 4 ou 5, il gagne 10 F ; Sinon il gagne 100 F.
On appelle X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.
Détermine les valeurs prises par X .

2.2 Connaître la définition d'une loi de probabilité

ACTIVITÉ 5

Sur l'univers Ω d'une expérience aléatoire on a défini une variable aléatoire X .

Le tableau ci-dessous donne les différentes valeurs prises par X et le cardinal de l'évènement $\{X = x_i\}$.

Valeurs x_i prises par X	-100	50	200
$\text{Card}(\{X = x_i\})$	3	12	6

Détermine pour chaque x_i la probabilité P_i de l'évènement $\{X = x_i\}$.

Je fais le point de l'activité

À chaque valeur x_i prise par la variable aléatoire X , on associe la probabilité P_i de l'évènement $\{X = x_i\}$.

On dit que l'on a défini la loi de probabilité de X ou la distribution de X .

l'évalue mes acquis



Détermine la loi de probabilité de la variable aléatoire X définie sur l'univers des éventualités de l'expérience « le lancer du dé ci-dessous »

2.3- Connaître la définition d'une fonction de répartition

ACTIVITÉ 6

Soit X la variable aléatoire dont la loi de probabilité est présentée dans le tableau ci-dessous.

Valeurs x_i prises par X	-100	50	200
$P_i = P(X = x_i)$	1/7	4/7	2/7

On considère l'application $F: \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]$

$$x \mapsto P(X \leq x)$$

Valeurs de x	$-\infty$	100	50	200	$+\infty$
$F(x) = P(X \leq x)$					

Je fais le point de l'activité

La fonction $F: \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]$

$x \mapsto P(X \leq x)$, est la fonction de répartition de la variable aléatoire X

F est fonction croissante en escalier.

J'évalue mes acquis

Le tableau ci-après donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire X associée à une expérience aléatoire.

Valeurs x_i prises par X	-10	10	100
$P_i = P(X = x_i)$	1/2	1/3	1/6

1. Définie la fonction de répartition de X .
2. Représente la fonction de répartition de X .

2.4 Connaître la définition de l'espérance mathématique, de la variance et de l'écart-type

2.4.1 Connaître la définition de l'espérance mathématique

Activité 7

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est présentée par le tableau ci-dessous.

Valeurs x_i prises par X	-100	50	200
$P_i = P(X = x_i)$	1/7	4/7	2/7

- 1- Détermine la moyenne des valeurs x_i pondérées par les nombres P_i .
- 2- X étant le gain algébrique du joueur, dis si le jeu est favorable au joueur.

Je fais le point de l'activité

Soit X la variable aléatoire dont la loi de probabilité est présentée par le tableau ci-dessous :

Valeurs x_i prises par X	x_1	x_2	...	x_n
$P_i = P(X = x_i)$	P_1	P_2	...	P_n

On appelle espérance mathématique ou moyenne de X le nombre réel noté $E(X)$ défini par :

$$x_1 P_1 + x_2 P_2 + \dots + x_n P_n$$

J'évalue mes acquis

Soit X la variable aléatoire X de loi de probabilité ci-dessous :

Valeurs x_i prises par X	-10	10	100
$P_i = P(X = x_i)$	1/2	1/3	1/6

Calcule l'espérance mathématique de X .

2.4-2 Connaître la définition de la variance et de l'écart-type

Activité 8

Soit X la variable aléatoire de loi de probabilité ci-dessous :

Valeurs x_i prises par X	-100	50	200
$P_i = P(X = x_i)$	1/7	4/7	2/7

Sachant que son espérance mathématique est $E(X) = \frac{500}{7}$

Calcule la moyenne des valeurs $(x_i - E(X))^2$ pondérées des P_i pour apprécier la dispersion des valeurs autour de $E(X)$

Je fais le point de l'activité

Soit X la variable aléatoire de loi de probabilité.

Valeurs x_i prises par X	x_1	x_2	...	x_n
$P_i = P(X = x_i)$	P_1	P_2	...	P_n

On appelle variance de X le nombre réel positif ou nul noté $V(X)$ définie par :

$$(x_1 - E(X))^2 P_1 + (x_2 - E(X))^2 P_2 + \dots + (x_n - E(X))^2 P_n$$

On appelle écart-type de X le nombre réel positif ou nul noté $\sigma(X)$ définie par $\sqrt{V(X)}$.

j'évalue mes acquis



Soit X la variable aléatoire de loi de probabilité ci-dessous.

Valeurs x_i prises par X	-10	10	100
$P_i = P(X = x_i)$	1/2	1/3	1/6

Calcule la variance et l'écart-type de X .

Activité 9

Soit X une variable aléatoire de loi de probabilité

Valeurs x_i prises par X	-100	50	200
$P_i = P(X = x_i)$	1/7	4/7	2/7

Justifie que la variance de X est $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

Je fais le point de l'activité

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ est une autre expression de la variance de la variable aléatoire X .

j'évalue mes acquis



Soit X la variable aléatoire de loi de probabilité ci-dessous :

Valeurs x_i prises par X	-10	10	100
$P_i = P(X = x_i)$	1/2	1/3	1/6

Calcule la variance la variance de la variable aléatoire X en appliquant l'égalité $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.

3- LOI BINOMIALE

3.1-Connaitre la définition d'une épreuve de Bernoulli

ACTIVITÉ 10

On dispose d'un dé parfait dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Dans l'expérience « Le lancer de dé parfait » d'univers Ω , on appelle SUCCÈS l'événement S : « obtenir un multiple de 3 ».

1- Définir l'ensemble des éléments de S et de $\bar{S}$

2- Justifie que $S \cup \bar{S} = \Omega$ et $S \cap \bar{S} = \emptyset$

3-a) Donne le nombre d'issues possibles dans cette épreuve.

b) Détermine $P(S)$.

Je fais le point de l'activité

- Lorsque, dans une expérience aléatoire, on s'intéresse uniquement à la réalisation d'un événement S précisé, appelé SUCCÈS ou à sa non réalisation $\bar{S}$, on dit que cette expérience correspond à une épreuve de Bernoulli.
- La probabilité du succès S , notée P , est appelée paramètre de l'épreuve de Bernoulli.

l'évalue mes acquis



1. Cite deux exemples d'épreuves de Bernoulli.
2. Dans l'expérience le lancer de dé, on s'intéresse à l'événement « Obtenir 6 ». Détermine le paramètre de cette épreuve de Bernoulli.

3.2-Connaitre la définition d'un schéma de Bernoulli

ACTIVITÉ 11

On lance cinq fois de suite le dé parfait de l'activité 10 et on note le nombre de parution de l'événement S « Obtenir un multiple de 3 »

a) Détermine le nombre de répétitions de l'épreuve « lancer le dé parfait ».

b) Justifie que l'épreuve « lancer le dé parfait » est une épreuve de Bernoulli et précise son paramètre.

Je fais le point de l'activité

- Une suite de n épreuves identiques de Bernoulli et indépendantes est un schéma Bernoulli.
- Le nombre n des épreuves de Bernoulli et la probabilité p du succès sont les paramètres du schéma de Bernoulli.

l'évalue mes acquis



- 1- Cite des exemples de schémas de Bernoulli.
- 2- On lance quatre fois de suite le dé parfait de l'activité 10 et on note le nombre de parution de l'événement : « Obtenir un multiple de 3 ». Justifie que cette expérience est un schéma de Bernoulli et précise ses paramètres.

3.3-Connaitre la définition de la loi binomiale de paramètres n et p .

Activité 12

Une étude statistique des performances d'une équipe de football montre que lors d'une épreuve de tir au but, la probabilité de réussir un tir au but est de $\frac{2}{3}$.

Cette équipe participe à une épreuve de 5 tirs au but.

On note dans l'ordre de parution S ou E selon que le tir est réussi ou non.

On désigne par X la variable aléatoire qui à chaque éventualité de cette épreuve de 5 tirs associe le nombre de tirs réussis.

Complète le tableau ci-dessous :

Valeurs k prises par X	0	1	2	3	4	5
e_k une éventualité de l'évènement $\{X = k\}$		SEEEE Ou ESEEE ou...				
Nombre d'éventualité de l'évènement $\{X = k\}$		C_5^1				
La probabilité de l'évènement élémentaire e_k		$\left(\frac{2}{3}\right)^1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^4$				
$P(X = k)$		$C_5^1 \left(\frac{2}{3}\right)^1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^4$				

Je fais le point de l'activité

Dans un schéma de Bernoulli de paramètres n et p (n épreuves, p la probabilité du succès), la loi de probabilité de la variable aléatoire X désignant le nombre de succès est définie par :

$$P(X = k) = C_n^k \times p^k \times (1 - p)^{n-k}, \text{ ou } 0 \leq k \leq n.$$

Cette loi de probabilité de X est appelée loi binomiale à paramètres n et p .

On dit dans ce cas que la variable aléatoire X suit la loi binomiale à paramètres n et p .

L'espérance mathématique et la variance de X sont définies par : $E(X) = np$ et $V(X) = np(1 - p)$.

l'évalue mes acquis



Une étude statistique montre que la probabilité pour qu'un diabétique infecté du covid-19 guérisse de cette infection est $\frac{1}{10}$.

Un centre de dépistage détecte 3 diabétiques infectés au covid-19 qui sont immédiatement pris en charge.

Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de guéris du covid-19 parmi ces 3 malades.

- 1- Justifie que X suit une loi binomiale et précise les paramètres.
- 2- Calcule l'espérance mathématique de X .
- 3- Calcule la variance et l'écart-type de X .

II- RÉSUMÉ DE COURS



1- PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

1.1 Définitions – propriétés

a) Probabilité conditionnelle

Soit B un événement de l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire tel que : $P(B) \neq 0$.

- On définit la probabilité de A sachant que B est réalisé, notée $P_B(A)$ ou $P(A/B)$ par la l'égalité

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ ou } P_B(A) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(B)}$$

- Cette probabilité est appelée probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé ou probabilité de A sachant B.

b) Conséquences

- $P_B(B) = 1$
- Si $A \subset B$, alors $P_B(A) = \frac{P(A)}{P(B)}$
- Si $B \subset A$, alors $P_B(A) = 1$

1.2 Événements indépendants

Deux événements A et B d'un même univers sont dits indépendants en probabilité, lorsque :

- $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
- $P_B(A) = P(A)$ avec $(P(B) \neq 0)$ ou $P_A(B) = P(B)$ avec $(P(A) \neq 0)$

1.3 Probabilités totales

a) Partition d'un ensemble

DÉFINITION

$B_1, B_2, \dots, B_n$ forment une partition de $\mathcal{B}$ signifie que $B_1, B_2, \dots, B_n$ sont deux à deux disjoints et $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = \mathcal{B}$

b) Formule des probabilités totales

PROPRIÉTÉS

$B_1, B_2, \dots, B_n$ forment une partition de l'univers $\mathcal{B}$. Pour tout événement A de $\mathcal{B}$, $P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \dots + P(A \cap B_n)$.

2- VARIABLES ALÉATOIRES

2.1 Définition d'une variable aléatoire

DÉFINITION

Lorsque à chaque éventualité e_i d'une expérience aléatoire, on associe un nombre réel x_i , on dit que l'on a défini une variable aléatoire numérique X .



La variable aléatoire X est une application de Ω dans $\mathbb{R}$. Ω est l'univers des possibles.

b) Notation et vocabulaire

L'événement " X prend la valeur x_i " est noté $\{X = x_i\}$.

2.2 Loi de probabilité

DÉFINITION

Lorsque à chaque valeur x_i prise par une variable aléatoire X , on associe la probabilité P_i de l'événement $\{X = x_i\}$, on dit que l'on a défini la loi de probabilité de X (ou la distribution de X).



Il est intéressant de présenter la loi de probabilité par un tableau en prenant soin de ranger les x_i dans l'ordre croissant.

- $x_1 < x_2 < \dots < x_n$
- $P_1 + P_1 + \dots + P_n = 1$

x_1	x_1	x_2	...	x_n
$P_1 = P(X = x_1)$	P_1	P_2	...	P_n

2.3 Fonction de répartition

a) Définition

DÉFINITION

La fonction de répartition de la variable aléatoire X est l'application :

$$F: \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]$$

$$x \mapsto P(X \leq x)$$



- F est une fonction croissante en escalier.
- F est définie par les formules explicites suivantes :
 Pour $x < x_1$, $F(x) = 0$
 Pour $x_i \leq x < x_{i+1}$, $F(x_{i-1}) + P(X = x_i)$
 Pour $x_n \leq x$, $F(x) = 1$

2.4 Espérance mathématique - Variance et Ecart-type

2.4.1 Espérance mathématique

DÉFINITION

X étant une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ avec les probabilités respectives $P_1, P_2, \dots, P_n$, on appelle espérance mathématique de X le nombre réel noté $E(X)$ définie par :

$$E(X) = x_1 P_1 + x_2 P_2 + \dots + x_n P_n = \sum x_i P_i$$

$E(X)$ est donc la moyenne des valeurs pondérées par les nombres réels P_i .

b) Interprétation de $E(X)$ en termes de jeu



La variable aléatoire X désignant le gain du joueur, lorsque :

- $E(X) > 0$, le jeu est avantageux (favorable) pour le joueur.
- $E(X) < 0$, le jeu est désavantageux (défavorable) pour le joueur.
- $E(X) = 0$, le jeu est dit équitable.

2.4-2 Variance - Ecart type

DÉFINITION

X étant une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ avec les probabilités respectives $P_1, P_2, \dots, P_n$ et $E(X)$ étant noté m .

- On appelle variance de X le nombre réel positif noté $V(X)$ définie par :

$$V(X) = E(X - m)^2 = P_1(x_1 - m)^2 + P_2(x_2 - m)^2 + \dots + P_n(x_n - m)^2 = \sum_{i=1}^n P_i(x_i - m)^2$$

- On appelle écart type de X , le nombre réel noté $\sigma(X)$ défini par : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Autres expressions de la variance

$$V(X) = E(X^2) - m^2 = \sum_{i=1}^n P_i x_i^2 - m^2 \text{ avec } E(X) = m$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

3- LOI BINOMIALE

3.1 Épreuve de Bernoulli

DÉFINITION

- Lorsque, dans une expérience aléatoire, on s'intéresse uniquement à la réalisation d'un certain événement S précisé, appelé succès ou à sa non réalisation, appelé échec, on dit que cette expérience correspond à une épreuve de Bernoulli.
- La probabilité du succès $P(S)$ est appelée paramètre de l'épreuve de Bernoulli.

3.2 Schéma de Bernoulli

DÉFINITION

- On appelle schéma de Bernoulli une suite de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes (n étant un nombre entier naturel différent de 0 et 1).
- Le nombre n des épreuves de Bernoulli et la probabilité $P(S)$ du succès sont appelés paramètres du schéma de Bernoulli.

3.3 Loi binomiale et ses conséquences.

a) Loi binomiale

Soit n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes où n est un entier naturel supérieur ou égale à 2. $p = P(S)$ la probabilité du succès, $q = 1 - p$ celle de l'échec. X est la variable aléatoire qui à chaque éventualité associe le nombre k de succès ($0 \leq k \leq n$). La loi de probabilité de X est définie par $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$. Cette loi de probabilité de X est appelée loi binomiale à paramètres n et p .

b) Conséquences

Lorsque X suit la loi binomiale de paramètres n et p , l'espérance mathématique et la variance de X sont définies par : $E(X) = np$ et $V(X) = np(1 - p)$.

III-

MÉTHODE



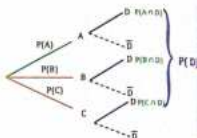
• Construire un arbre de probabilité

Au premier niveau d'un arbre de probabilités, on indique les probabilités des événements A, B et C (selon le cas) et au second niveau, les probabilités conditionnelles.

Un arbre comporte des nœuds et des branches.

On applique les règles suivantes :

- La somme des probabilités marquées sur des branches issues d'un même nœud est égale à 1, par exemple : $P(A) + P(B) + P(C) = 1$
- La probabilité d'un événement qui correspond à un chemin est le produit des probabilités inscrites sur les branches de ce chemin, ainsi :



En bout de branche apparaissent ainsi les probabilités des intersections.

- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des branches aboutissant à cet événement :

$$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D).$$

• Fonction de répartition

Pour représenter la fonction de répartition d'une variable aléatoire on procède de la manière suivante :

- Si la loi n'est pas donnée, il faut commencer par la déterminer.
- La fonction de répartition F de X est la fonction en escaliers définie par : $F(x) = P(X \leq x)$.

IV- SAVOIR-FAIRE



Savoir-faire 1. Calculer la probabilité d'un événement donné

Énoncé

On considère l'ensemble E des nombres entiers de 20 à 40. On choisit l'un de ces nombres au hasard.
 A est l'événement : « le nombre choisi est un multiple de 3 »,
 B est l'événement : « le nombre choisi est un multiple de 2 »,
 C est l'événement : « le nombre choisi est un multiple de 6 ».
 Calcule $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$, $P(A \cap C)$ et $P(A \cup C)$.

Solution commentée

Je calcule $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$, $P(A \cap C)$ et $P(A \cup C)$.

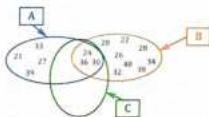
L'expression « au hasard » signifie que l'on se trouve dans une situation d'équiprobabilité. L'ensemble E contient $40 - 20 + 1 = 21$ éléments : il y a donc 21 événements élémentaires équiprobables.

On a : $A = \{21; 24; 27; 30; 33; 36; 39\}$

$B = \{20; 22; 24; 26; 28; 30; 32; 34; 36; 38; 40\}$

$C = \{24; 30; 36\}$

NB : Pour dénombrer les éléments de divers ensembles, il est recommandé de dessiner un diagramme.



Il y a sept multiples de 3 donc Card $A = 7$ et on a : $P(A) = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$

Il y a onze multiples de 2 donc Card $B = 11$ et on a : $P(B) = \frac{11}{21}$

Il y a trois multiples de 6 donc Card $C = 3$ et on a : $P(C) = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$

$A \cap B = \{24; 30; 36\}$ d'où $P(A \cap B) = P(C) = \frac{3}{21}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Puisque l'ensemble C est inclus dans l'ensemble A on a :

$$= \frac{7}{21} + \frac{11}{21} - \frac{3}{21} = \frac{15}{21} \text{ d'où } P(A \cup B) = \frac{5}{7}.$$

Savoir-faire 2. Construire un arbre pondéré - Calculer la probabilité d'un événement donné en utilisant la formule de la probabilité totale.

Énoncé

Un sac contient des jetons de trois couleurs, la moitié de blancs, le tiers de verts et le sixième de jaunes.
 50% des jetons blancs sont ronds, 30 % des jetons verts sont ronds et 40 % des jaunes sont ronds. Tous les autres jetons sont carrés.

1- Représente par un arbre de probabilités les diverses probabilités que l'on peut rencontrer.

Dans le sac, on tire un jeton au hasard.

2- Calcule la probabilité pour qu'il soit rond.

3- Sachant qu'il est rond, calcule la probabilité pour qu'il soit blanc, pour qu'il soit jaune, pour qu'il soit vert.

SOLUTION COMMENTÉE

1- Je représente par un arbre de probabilités les diverses probabilités.

Soit A l'événement : « la moitié des jetons sont blancs » ;

B l'événement : « le tiers des jetons sont verts » ;

C l'événement : « le sixième des jetons sont jaunes »

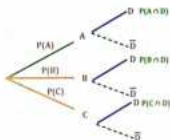
D l'événement : « le jeton est rond »

$\bar{D}$ l'événement : « le jeton est carré »

Puisque l'on connaît d'abord les couleurs, au premier niveau de l'arbre figurent les trois couleurs et au second la forme : « rond » ou « carré ».

D'après les données on a : $P(A) = \frac{1}{2}$; $P(B) = \frac{1}{3}$; $P(C) = \frac{1}{6}$

$P_A(D)$ est la probabilité des jetons blancs qui sont ronds. Donc $P_A(D) = \frac{50}{100} = \frac{1}{2} = 0,5$.



De même $P_B(D)$ est la probabilité des jetons verts qui sont ronds. Donc $P_B(D) = \frac{30}{100} = \frac{3}{10} = 0,3$

$P_C(D)$ est la probabilité des jetons jaunes qui sont ronds. Donc $P_C(D) = \frac{40}{100} = \frac{2}{5} = 0,4$

2- Je calcule la probabilité pour que le jeton tiré soit rond.

On sait qu'un jeton rond tiré peut être soit blanc, soit jaune, soit vert. Ce qui se traduit par :

$D = (A \cap D) \cup (B \cap D) \cup (C \cap D)$ or $A \cap B = \emptyset$; $A \cap C = \emptyset$; $B \cap C = \emptyset$.

Donc $P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D)$. Par la lecture de l'arbre pondéré on a :

$$P(A \cap D) = P(A) \times P_A(D) = \frac{1}{2} \times 0,5 = \frac{1}{4}$$

$$P(B \cap D) = P(B) \times P_B(D) = \frac{1}{3} \times 0,3 = \frac{1}{10}$$

$$P(C \cap D) = P(C) \times P_C(D) = \frac{1}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{15}$$

$$\text{D'où } P(D) = \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{5}{12}$$

3- Sachant que le jeton est rond, calcule la probabilité pour qu'il soit blanc, pour qu'il soit jaune, pour qu'il soit vert.

$P_D(A)$ est la probabilité pour que le jeton rond tiré est blanc.

$P_D(B)$ est la probabilité pour que le jeton rond tiré est vert.

$P_D(C)$ est la probabilité pour que le jeton rond tiré est jaune.

$$P_D(A) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{12}} = \frac{3}{5} \quad \text{on a aussi de même } P_D(B) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{5}{12}} = \frac{6}{25}$$

$$\text{Et aussi } P_D(C) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{5}{12}} = \frac{4}{25}$$



On peut aussi constater que :

- $P(A) + P(B) + P(C) = 1$
- $P_D(A) + P_D(B) + P_D(C)$ et déduis $P_D(C)$.

Savoir-faire 3

Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire - Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type d'une variable aléatoire donnée.

Énoncé

On lance trois fois de suite un dé bien équilibré. Au cours de ce lancer de dé, le joueur perd 500 FCA s'il obtient au moins un multiple de 3 et gagne 1000 FCFA dans le cas contraire. X est la variable aléatoire égale au « gain » du joueur.

- Détermine la loi de probabilité de X .
- Calcule $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

Solution commentée

a) Je détermine la loi de probabilité de X

Le joueur perd 500 FCFA ou gagne 1000 FCFA à chaque lancer de dé, donc la variable aléatoire X prend les valeurs -500 et 1000. Les événements $[X = -500]$ et $[X = 1000]$ sont donc des événements contraires. Les non multiples de 3 sont : 1 ; 2 ; 4 ; 5. Il y a donc 4 chiffres non multiples de 3. Soit Ω l'univers de l'expérience. On a : $\text{Card } \Omega = 6 \times 6 \times 6 = 63$

$$P(X = -500) = \frac{4 \times 4 \times 4}{6^3} = \frac{8}{27}$$

Puisque les événements $[X = -500]$ et $[X = 1000]$ sont des événements contraires alors on a :

$$P(X = -500) = 1 - P(X = 1000) \\ = 1 - \frac{8}{27} \text{ donc } P(X = -500) = \frac{19}{27}$$

X	-500	1000
$P(X = k)$	$\frac{19}{27}$	$\frac{8}{27}$

b) Je calcule $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

D'après le tableau on a :

$$E(X) = -500 \times \frac{19}{27} + 1000 \times \frac{8}{27} = -\frac{500}{9}$$

$$V(X) = ((-500)^2 \times \frac{19}{27} + (1000)^2 \times \frac{8}{27}) - (-\frac{500}{9})^2 = \frac{38\,000\,000}{81}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{(500)^2 \times 152}{27 \times 3}} = \frac{100}{9} \sqrt{38}$$

Savoir-faire 4 Justifier que deux événements sont indépendants ou non.

Énoncé

On lance un dé équilibré. Si l'on obtient 6, on tire au hasard un jeton d'une urne U_1 qui contient 2 jetons rouges et 1 jeton blanc, sinon, on tire au hasard un jeton d'une urne U_2 qui contient 4 jetons rouges, 1 blanc et 1 vert.

Justifie que les événements A : « Obtenir 6 » et R : « Tirer un jeton rouge » sont indépendants.

Solution commentée

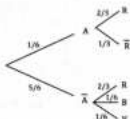
$P_A(R) = \frac{2}{3}$ car si A est réalisé, alors on tire dans l'urne U_1 où 2 boules sur 3 sont rouges.

$P_X(R) = \frac{2}{3}$ car si A n'est pas réalisé, alors on tire dans l'urne U_2 où 4 boules sur 6 sont rouges.

On représente cette situation par l'arbre pondéré ci-contre où B et V sont respectivement les événements « Tirer un jeton blanc », « Tirer un jeton vert ».

$$P(A \cap R) = \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{9}$$

$$P(A) = \frac{1}{6} \text{ et } P(R) = P(A \cap R) + P(\bar{A} \cap R) \\ = \frac{1}{9} + \frac{5}{6} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$



Donc $P(A) \cdot P(R) = \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{9} = P(A \cap R)$ ainsi les événements A et R sont indépendants.

Savoir-faire 5 : Déterminer et représenter une fonction de répartition.

Exercice

A l'issue d'une expérience aléatoire, on définit une variable aléatoire X par le tableau ci-dessous :

x_i	-5	-3	2	4	7	8
$P(X = x_i)$	0,05	0,15	0,1	0,4	0,1	0,2

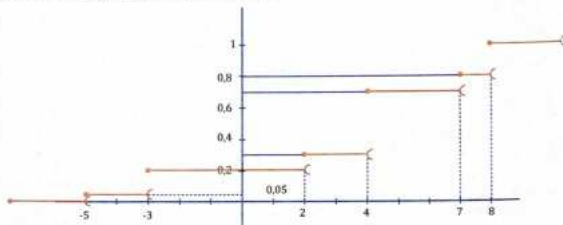
Détermine et représente la fonction de répartition de X.

Solution commentée

• Le tableau ci-dessous donne les valeurs numériques de F :

x	$]-\infty ; -5[$	$[-5 ; -3[$	$[-3 ; 2[$	$[2 ; 4[$	$[4 ; 7[$	$[7 ; 8[$	$[8 ; +\infty[$
$F(x)$	0	0,05	0,2	0,3	0,7	0,8	1

La représentation graphique de F est la suivante :



V- JE M'EXERCE



1- Exercices de fixation / Application

Connaître la définition d'une probabilité conditionnelle

1- A et B sont deux événements d'une même expérience aléatoire et $P(A) \neq 0$.

Réponds par Vrai ou par Faux à chacune des affirmations suivantes :

- 1- $P(A) + P(\bar{A}) = 1$
- 2- Si A et B sont deux événements incompatibles, alors A et B sont deux événements contraires.
- 3- $P_A(B) + P_A(\bar{B}) = 1$
- 4- Si A et B sont indépendants, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- 5- Si A et B sont indépendants, alors : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
- 6- Si A et B sont indépendants, alors : $P_A(B) = P(B)$.

2- A et B sont deux événements tels que :

- $P(A \cap B) = 0,4$
- $P(B) = 0,6$
- $P_A(B) = 0,5$

Calcule :

- a) $P(A \cap \bar{B})$
- b) $P(A)$
- c) $P_A(B)$.

3- Trouve toutes les bonnes réponses.

A et B sont deux événements d'un univers E.

1- La probabilité que l'événement B soit réalisé, sachant que A est réalisé, est :

- a) $P(A \cap B)$; b) $P_B(A)$; c) $\frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

2- Si les événements A et B précédents sont tels que $P(A \cap B) = 0,2$ et $P_A(B) = 0,25$, alors :

- a) $P(A) = 0,4$; b) $P(A) = 0,8$; c) $P(A) = 0,45$.

3- Si les événements A et B précédents sont tels que $P(A) = 0,4$; $P_A(B) = 0,1$ et , alors :

- a) $P_B(A) = 0,1$; b) $P_A(B)$; c) $P(B) = 0,22$.

Connaître la définition d'un système complet d'événements et la formule des probabilités totales

3- Dis si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifie ta réponse.

Ω désigne l'univers associé à une expérience aléatoire.

- 1- Ω et $\emptyset$ forment un système complet d'événements.
- 2- Si $p(A) = 0$, alors l'événement A ne peut pas appartenir à un système complet d'événements de Ω .
- 3- Si A est un événement tel que : $p(A) \neq 0$ et $p(A) \neq 1$, alors A et $\bar{A}$ forment un système complet d'événements.
- 4- Si A, B et C forment un système complet d'événements de Ω , alors : $p(A) \times p(B) \times p(C) \neq 0$ et $p(A) + p(B) + p(C) = 1$.

3- Parmi les réponses proposées, détermine celles qui sont exactes (au moins une par affirmation).

1- On donne deux événements A et B tels que : $p(A \cap B) = 0,3$ et $p(A \cap B) = 0,25$.

Alors :

- a) $p(A) = 0,05$; b) $p(A) = 0,55$; c) $p(B) \geq 0,25$.
- 2- B et C forment un système complet d'événements et on a :

$P(B) = 0,4$; $p_B(A) = 0,75$ et $p_C(A) = \frac{2}{3}$.

- a) $P(C) = 0,6$; b) $p(A) = 0,3$; c) $p(A) = 0,7$.
- d) On ne peut pas calculer $p(A)$.

3- Un magasin de sport propose des réductions sur les trois marques de vêtements qu'il distribue. La marque A représente 64 % des vêtements vendus ;

La marque N représente 28 % ;

La marque O en représente 8 %.

30 % des vêtements de la marque A, 60 % de ceux de la marque N et 80 % de ceux de la marque O sont soldés.

a) Justifie que les événements S, N et O forment un système complet d'événements.

b) Calcule la probabilité pour qu'un client ait acheté un vêtement soldé.

- Justifie que les événements S, N et O forment un système complet d'événements.
- Calcule la probabilité pour qu'un client ait acheté un vêtement soldé.

3 L'entreprise Vendage, créée par une excellente cuisinière de la ville de Bouaflé, propose des ateliers culinaires pour adultes et pour enfants de 8 à 12 ans, ayant pour thème la pâtisserie (P), la cuisine salée (S) ou les apéritifs dinatoires (A). 60 % de ces ateliers sont consacrés à la pâtisserie et 10 % aux apéritifs dinatoires.

On sait que $\frac{1}{6}$ de chacun des ateliers « pâtisserie » et « apéritifs dinatoires », sont réservés aux enfants et $\frac{7}{8}$ des ateliers « cuisine salée » concernent les adultes uniquement.

- On interroge au hasard un participant à ces ateliers. Calcule la probabilité que ce soit un enfant.
- On interroge un enfant ayant participé à ces ateliers. Calcule la probabilité qu'il ait suivi un atelier pâtisserie.

4 Afin d'équiper les élèves des groupes scolaires de la commune, une municipalité achète auprès d'un grossiste des stylos-billes de trois marques différentes A, B et C.

- 40 % des stylos commandés sont de marque A, la moins chère ; parmi ces stylos, 15 % sont défectueux.
- 35 % des stylos commandés sont de marque B, et 10 % de ces stylos sont défectueux.
- 25 % des stylos commandés sont de marque C, et 5 % de ces stylos sont défectueux.

On choisit au hasard un stylo dans le stock de la municipalité.

- Construis un arbre pondéré décrivant la situation étudiée.
- Détermine la probabilité que le stylo choisi soit défectueux.
- Le stylo choisi est en bon état de fonctionnement. Détermine la probabilité, au centième près, qu'il soit de marque C.

Connaître la définition :

- d'une variable aléatoire
- d'une loi de probabilité,
- d'une fonction de répartition,
- de l'espérance mathématique, de la variance et de l'écart-type

- Soit une variable aléatoire discrète associée à la loi de probabilité suivante. Calculer son espérance et sa variance.

x_i	1	2	3	4	5	6
P_i	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,5

- Une variable aléatoire X est établie par la loi d probabilité suivante :

x_i	-2	-1	0	1	2	3
P_i	0,1	0,05	0,1	0,05	0,2	p

Soit F sa fonction de répartition.

- Calcule p.
- Calcule $F(0,5)$.
- Calcule $E(X)$.
- Calcule $\sigma(X)$.

- On tire 5 cartes au hasard dans un jeu de 32 cartes.

On appelle cela une main. Si la main contient 4 rois, on gagne 1000 FCFA, si la main contient 3 rois, on gagne 500 FCFA, si la main contient 2 rois, on ne gagne rien et on ne perd rien, si la main contient 1 roi, on perd 100 CFA et si la main ne contient aucun roi, on perd 500 FCFA.

Soit X la variable aléatoire correspondant au gain

- Etabli la loi de probabilité de X.
- Calcule l'espérance mathématique de X.
- Détermine et représente la fonction de répartition F de X.

- On lance deux dés cubiques bien équilibrés. Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque couple (a,b) de numéros obtenus la distance $|a - b|$.

- Détermine la loi de probabilité de X.
- Calcule son espérance mathématique et son écart-type.
- Détermine la probabilité que lors d'un lancer la distance des deux numéros obtenus soit strictement supérieure à trois.

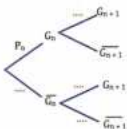
- A l'issue d'un lancer de 2 dés numérotés chacun de 1 à 6, on définit une variable aléatoire X égales au produit des faces supérieures.

- Détermine l'univers - image $\Omega(X)$.
- Détermine la probabilité p_i des événements élémentaires de X.
- Détermine la loi de probabilité de X.
- Calcule $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

On dispose de 3 urnes. La première urne contient 20 % de boules blanches, la seconde 40 % et la troisième 60 %. On tire une boule blanche dans chaque urne et on désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches

2- Exercices de renforcement / approfondissement

Koffi joue des parties successives sur sa console de jeux. On suppose que la probabilité qu'il gagne la première partie est 0,4 et que, s'il gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la suivante est 0,7. S'il perd une partie, la probabilité qu'il gagne la suivante est 0,5.



Pour tout entier $n \geq 1$, on note G_n l'événement : « Koffi gagne la n -ième partie ». On pose $p_n = P(G_n)$.

1- A l'aide d'un arbre pondéré, montre que $p_2 = 0,58$.

2- a) Recopie et complète l'arbre ci-contre.

b) Justifie que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$p_{n+1} = 0,2p_n + 0,5$$

3- On note (un) la suite définie, pour tout entier $n \geq 1$, par $u_n = p_n - 0,625$.

a) Démontre que la suite (un) est géométrique.

b) Détermine, au bout d'un grand nombre de parties, la probabilité pour Koffi de gagner une partie.

Soit X une variable aléatoire qui peut prendre les valeurs -8, 3, 4, 7 et 9. On note :

$$u_1 = p(X = -8); u_2 = p(X = 3); u_3 = p(X = 4);$$

$$u_4 = p(X = 7) \text{ et } u_5 = p(X = 9).$$

1- Sachant que $u_1, u_2, \dots, u_5$ sont les termes consécutifs d'une suite géométrique de raison, détermine la loi de probabilité de X .

2- Détermine l'espérance mathématique de X .

3- Détermine l'écart type de X .

L'organisateur d'une loterie annonce qu'il y aura 1 ticket gagnant 5000 FCFA, 5 tickets gagnant 1000 FCFA et 50 tickets gagnant 50 FCFA sur un total de Q tickets.

On note p le prix d'achat d'un billet.

tirées.

a) Détermine les différentes valeurs prises par X .

b) Détermine la loi de probabilité de X .

c) Détermine et représente la fonction de répartition de X .

On note X la variable aléatoire représentant le gain de Stéphane (montant du lot gagné moins le prix d'achat du ticket).

1- Détermine, en fonction de p , les valeurs possibles de X .

2- Détermine, en fonction de p et Q , la loi de probabilité de X .

3- Détermine l'espérance mathématique de X .

4- L'organisateur souhaite faire un bénéfice de 2000 F.

Sachant que $p = 5$ FCFA, détermine Q .

5- Dédus-en alors la valeur exacte de $E(X)$.

On admet que dans une famille, pour toute naissance d'un enfant, la probabilité d'avoir un garçon est la même que celle d'avoir une fille et que, lors de deux naissances séparées, les sexes des enfants sont indépendants.

1- Dans une famille de deux enfants, détermine la probabilité des événements suivants :

A : « les enfants sont deux garçons »

B : « les enfants sont deux filles »

C : « les enfants sont de même sexe »

D : « les enfants sont de sexes différents »

2- Pour une famille de trois enfants (les naissances étant toujours séparées), on désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque famille, associe le nombre de filles.

a) Détermine la loi de probabilité de X .

b) Calcule l'espérance et l'écart type de X .

Un sac contient trois boules numérotées respectivement 0, 1 et 2 indiscernables au toucher. On tire une boule du sac, on note son numéro X et on la remet dans le sac, puis on tire une seconde boule, on note son numéro Y et on la remet dans le sac. Toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées. A chaque tirage de deux boules, on associe dans le plan, muni d'un repère orthonormé, le point M de coordonnées $(X; Y)$. On désigne par D le disque de centre O et de rayon 1,7.

Les résultats seront donnés sous forme de fraction irréductible.

- 1- Place dans le plan muni du repère les points correspondants aux différents résultats possibles.
- 2- Calcule la probabilité de chacun des événements suivants :
 A « le point M est sur l'axe des abscisses »,
 B « le point M appartient au cercle de centre O et de rayon 1 ».
- 3- a) Soit T la variable aléatoire qui, à chaque tirage de deux boules, associe la somme. Détermine la loi de probabilité de la variable aléatoire T. Calcule son espérance mathématique $E(T)$.
 b) Démontre que la probabilité de l'événement : « le point M appartient au disque D » est égale à .
- 4- On tire 5 fois de suite, de façon indépendante, deux boules successivement et avec remise. On obtient ainsi 5 points du plan.

Détermine la probabilité de l'événement suivant :
 « Au moins un de ces points appartient au disque D ».

- 2
- 1- On considère une roue de loterie divisée en six secteurs égaux : un secteur est rouge, trois sont blancs et deux sont bleus.

Un joueur fait tourner cette roue et regarde la couleur obtenue. Si elle est rouge il gagne, si elle est blanche il perd ; si elle est bleue, il doit refaire tourner la roue. Si à l'issue de cette deuxième épreuve, la couleur obtenue est rouge, le joueur gagne ; si elle est blanche ou bleue il perd.

Calcule les probabilités suivantes :

- a) Probabilité p_1 de gagner dès la première épreuve.
 - b) Probabilité p_2 de gagner à l'issue de la deuxième épreuve.
 - c) Probabilité p' de gagner la partie.
- 2- La roue possède maintenant x secteurs égaux (x est un nombre entier naturel supérieur ou égal à 4), un secteur est rouge, trois sont blancs et les autres sont bleus. Le principe du jeu reste que précédemment. Si le joueur gagne à la première épreuve il reçoit 4 mille francs ; s'il perd à cette première épreuve il verse 2 mille francs, s'il obtient secteur rouge à la seconde épreuve il reçoit 6 mille francs ; s'il obtient un secteur blanc il verse mille francs et s'il obtient un secteur bleu, il ne reçoit ni ne verse rien.
 On appelle X la variable aléatoire réelle, égale

à $+A$ si le joueur a gagné A francs, à $-B$ si le joueur a perdu B francs.

- a) Etablis la loi de probabilité de X en fonction de x .
- b) Détermine en fonction de x l'espérance mathématique $E(X)$.
- c) Détermine le nombre total de secteurs de la roue pour que le jeu soit équitable.
- d) Détermine le nombre total de secteurs pour que $E(X)$ soit maximale.

3 On jette successivement et indépendamment sur une table deux dés tétraédriques dont les faces sont numérotées de 1 à 4. X étant le produit des nombres obtenus.

- 1- Détermine la loi de probabilité de X .
- 2- Détermine la fonction de répartition de X et construis sa courbe représentative.

4 Une urne contient 6 boules blanches et n boules rouges (n est un nombre entier tel que $n \geq 2$ - toutes indiscernables au toucher. Un joueur tire au hasard, successivement et sans remise deux boules de l'urne. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 200 FCFA, et pour chaque boule rouge, il perd 300 FCFA.
 On appelle X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur.

- 1- Détermine les différentes valeurs que peut prendre X .
- 2- Justifie que $P(X = -100) = \frac{12n}{(n+6)(n+5)}$
- 3- Détermine la loi de probabilité de X .
- 4- Justifie que $E(X) = \frac{-600 \times (n^2 + n - 20)}{(n+6)(n+5)}$
- 5- Discute selon la valeur de n de l'intérêt de jouer à ce jeu.

5 Un groupe de 22 personnes décide d'aller au cinéma deux samedis de suite pour voir deux films A et B.

Le premier samedi : 8 personnes vont voir le film A, et les autres vont voir le film B.

Le deuxième samedi : 4 personnes décident de revoir le film A, 2 vont revoir le film B, et les autres vont voir le film qu'elles n'ont pas vu la semaine précédente.

Après la deuxième séance, on interroge au hasard une personne du groupe.

On considère, pour $k \in \{1; 2\}$ les événements : A_k : « La personne a vu le film A le $k^{\text{ième}}$ samedi » et B_k : « La personne a vu le film B le $k^{\text{ième}}$ samedi ».

1- Illustre la situation par un arbre pondéré en justifiant chacune des probabilités inscrites. En déduire le calcul de $P(A_2)$. Retrouve cette probabilité par un calcul direct.

2- Le prix du billet est de 5 € pour le film A, et de 4 € pour le film B.

On appelle X la variable aléatoire égale au coût total, pour la personne interrogée, des deux séances de cinéma.

- Détermine la loi de probabilité de la variable aléatoire X .
- Calcule l'espérance mathématique de X et la variance de X .
- Détermine et construis la fonction de répartition de X .

2 Dans une salle de jeu, un appareil comporte 4 roues, chacune portant à sa périphérie 8 images de fruits différents : ananas, bananes, cerises, dattes, fraises, groseilles, poires, raisins. Une mise de 100 FCFA déclenche le fonctionnement de l'appareil pour une partie. Chacune des quatre roues affiche au hasard dans une fenêtre un de ces 8 fruits.

On admettra l'équiprobabilité de tous les affichages.

1- Calcule la probabilité des événements E : « on obtient quatre fruits identiques » ; F : « on obtient trois fruits identiques et trois seulement » ; G : « on obtient quatre fruits distincts ».

2- Certains résultats permettent de gagner de l'argent : 500 FCFA pour quatre fruits identiques, 50 FCFA pour trois fruits identiques, 10 FCFA pour quatre fruits distincts et 0 FCFA pour les autres résultats. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque résultat associe le gain du joueur (mise non comprise).

- Calcule la probabilité de l'événement « obtenir un gain nul ».
- Détermine et interprète l'espérance mathématique de X , notée $E(X)$.

3- Soit Y la variable aléatoire associant à chaque résultat le nombre d'images de poires obtenues. Justifie que Y suit une loi binomiale et précise le nombre moyen de poires apparaissant dans une partie.

constituée de couronnes concentriques, délimitées par des cercles de rayons 1, 2, ..., 10 cm et numérotées respectivement de 10 à 1. La probabilité d'atteindre la couronne k est proportionnelle à l'aire de cette couronne, et on suppose que le joueur atteint sa cible à

chaque lancer. Soit X la variable aléatoire qui chaque lancer associe le numéro de la cible.

- Détermine la loi de probabilité de X .
- Le joueur gagne k points s'il atteint la couronne numérotée k pour k compris entre 6 et 10, tandis qu'il perd 2 points s'il atteint l'une des couronnes périphériques numérotées de 1 à 5. Dis si le jeu est favorable ou non au joueur. Justifie ta réponse.

3 Un jeu consiste à lancer simultanément au hasard deux dés non pipés.

On note X , la variable aléatoire qui associe à chaque lancer, la somme des points marqués sur les faces supérieures des deux dés.

- 1-a) Détermine les valeurs prises par X .
b) Donne la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

2- Trace dans un repère orthogonal la courbe représentative de la fonction de répartition de X .

3- Calcule $E(X)$ et $V(X)$.

On définit la règle du jeu comme suit :

- On gagne 100 FCFA si le total des points marqués sur les faces supérieures des deux dés est supérieur ou égal à 10,
- On perd 100 FCFA si ce total est inférieur ou égal à 5,
- On n'est ni gagnant ni perdant si ce total est 6, 7, 8 ou 9.

On note Y la variable aléatoire qui associe à chaque lancer le « gain » correspondant.

- 4-a) Détermine les valeurs prises par Y .
b) Détermine la loi de probabilité de Y .
- 5- Trace dans un repère orthogonal la courbe représentative de la fonction de répartition de Y .
- 6-a) Calcule $E(Y)$ et Dis si le jeu est avantageux ou non.
b) Calcule $V(Y)$ et $\sigma(Y)$.

Un joueur tire sur une cible de 10 cm de rayon,

3. Situation complexe

En vue de postuler à un appel d'offre, un industriel doit vérifier l'état de marche de ses machines et en remplacer certaines le cas échéant. D'après des statistiques précédentes, il évalue à 30 % la probabilité pour une machine de tomber en panne en 5 ans; parmi ces dernières, la probabilité de devenir hors d'usage suite à une panne plus grave est évaluée à 75 %; cette probabilité est de 40 % pour une machine n'ayant jamais eu de panne.

Soucieux de figurer parmi les meilleurs candidats à l'appel d'offre, cet industriel voudrait savoir si cette affaire lui sera profitable. Pour cela, il te demande de l'aider à répondre à cette inquiétude.

A l'aide d'une production argumentée, dis si ce appel d'offre est favorable à cet industriel.



VI- RENDEZ-VOUS DES CURIEUX !

L'histoire des probabilités a commencé avec celle des jeux de hasard. Bien que quelques calculs de probabilité soient apparus dans des applications précises au Moyen Âge, ce n'est qu'au XVII^e siècle que la théorie des probabilités est élaborée. Elle évolue sans vrai formalisme pendant deux siècles autour du célèbre problème des partis, de problèmes d'urnes ou d'autres problèmes issus de jeux. Apparaît alors au XX^e siècle la théorie classique des probabilités basée sur la théorie de la mesure et la théorie de l'intégration. Cette théorie s'est depuis lors diversifiée dans de nombreuses applications.

Les discussions entre scientifiques, la publication des ouvrages et leur transmission étant difficiles à certaines époques, certaines questions historiques restent difficiles à résoudre ; c'est le cas de la paternité de la théorie des probabilités.

La théorie des probabilités est une mathématisation de l'incertitude et du caractère imprévisible des phénomènes. L'incertitude de la situation présente et à venir a d'abord été attribuée au destin, à la nature ou à des divinités.

Pendant l'antiquité, le hasard n'a pas été un objet d'étude à proprement parler. Cependant le hasard a été utilisé pour le divertissement dans les jeux de hasard comme les jeux de dés en terre cuite présents dans l'Égypte antique (du XXXI^e siècle av. J.-C. au I^{er} siècle av. J.-C.), en Mésopotamie (III^e millénaire av. J.-C.) ou encore en Inde à la même époque³. La notion d'équité était déjà présente puisque certains dés avaient été pipés volontairement.

Les cartes étaient également très présentes, elles sont d'abord apparues en Chine, Inde, Arabie et Égypte pour n'arriver que beaucoup plus tard à Venise (1377), Nuremberg (1380) et à Paris (1397). Le hasard était également utilisé comme moyen de prise de décision, par exemple pour décider dans quel ordre les équipes vont se rencontrer lors d'un sport.

Les philosophes de la Grèce antique ont abordé la question de la définition de ce concept d'incertitude. Le concept de probabilités chez Aristote (IV^e siècle av. J.-C.) est défini dans les *Topiques* :

« Sont probables les opinions qui sont reçues par tous les hommes, ou par la plupart d'entre eux, ou par les sages, et parmi ces derniers, soit par tous, soit par la plupart, soit enfin par les plus notables et les plus illustres »

3

Dérivabilité et étude de fonctions

Notions essentielles :

- Dérivabilité

- Etude et représentation de fonctions

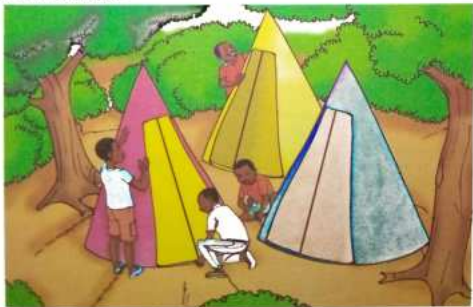
SITUATION D'APPRENTISSAGE

Des élèves de terminale D de ton établissement veulent organiser un camping. Ils disposent d'un disque de tissu plastique de rayon 2 mètres. Ils souhaitent fabriquer une tente ayant la forme d'un cône de révolution dont le volume doit être maximal.

Le schéma de la tente est donné ci-contre.

Un des organisateurs affirme que le volume de la tente constitué est une fonction de x .

Informés, les élèves de ta classe décident de faire une étude approfondie sur les fonctions et leurs représentations graphiques.





I- ACTIVITÉS DE DÉCOUVERTE

1- CONNAÎTRE LA DÉFINITION D'UNE FONCTION DÉRIVABLE À GAUCHE (RESPECTIVEMENT À DROITE) EN UN POINT - NOTER UN NOMBRE DÉRIVÉ À GAUCHE (RESPECTIVEMENT À DROITE) D'UNE FONCTION.

Activité 1

1- On donne dans chaque cas les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ suivantes :

$$\text{Cas 1 : } f(x) = x|x-2| \text{ et } x_0 = 2 ; \quad \text{Cas 2 : } \begin{cases} \forall x \in]-\infty; 0[, f(x) = x^2 \\ \forall x \in]0; +\infty[, f(x) = \sqrt{x} \end{cases} \text{ et } x_0 = 0$$

- a) Pour chacune des fonctions calcule, lorsque cela est possible, les limites de $x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ à gauche, puis à droite en x_0 .
- b) Indique dans quels cas les limites ainsi trouvées sont des nombres réels.
- 2- Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x|x|$.

- a) Calcule les limites de $x \mapsto \frac{g(x) - g(0)}{x}$ à gauche, puis à droite en 0.
- b) Compare les limites ainsi obtenues.

Je fais le point de l'activité

Soit f une fonction définie sur un intervalle K contenant x_0 .

- On dit que f est dérivable en x_0 lorsque la limite de $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ lorsque x tend vers x_0 existe et est finie.

Cette limite est appelée le nombre dérivé en x_0 de f .

$$\text{On note : } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

- On dit que f est dérivable à droite en x_0 lorsque la limite de $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ à droite en x_0 existe et est finie. Cette limite est appelée le nombre dérivé à droite en x_0 de f .

$$\text{On note : } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_d(x_0)$$

- On dit que f est dérivable à gauche en x_0 lorsque la limite de $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ à gauche en x_0 existe et est finie. Cette limite est appelée le nombre dérivé à gauche en x_0 de f .

$$\text{On note : } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_g(x_0)$$

- f est dérivable en $x_0 \Leftrightarrow f'_g(x_0) = f'_d(x_0) = f'(x_0)$

l'évalue mes acquis



Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant x_0 .

Réponds par vrai ou par faux aux affirmations suivantes :

- a) Pour savoir qu'une fonction f est dérivable à gauche (resp. à droite) de x_0 , on

calcule la limite de $x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ à gauche (resp. à droite) en x_0 pour s'assurer qu'elle existe.

- b) Pour savoir qu'une fonction f est dérivable à gauche (resp. à droite) en x_0 , on

calcule la limite de $x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ à gauche (resp. à droite) en x_0 pour s'assurer qu'elle existe et est un nombre réel.

- c) La fonction $f: x \mapsto |x|\sqrt{|x|}$ est dérivable en $x_0 = 0$.

- d) La fonction $f: x \mapsto |x - 1|$ est dérivable en $x_0 = 1$.

2- INTERPRÉTER GRAPHIQUEMENT LA DÉRIVABILITÉ À DROITE (RESP. À GAUCHE) D'UNE FONCTION.

Activité 2

Soient les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telles que : $f(x) = |x^2 - 1|$ et $g(x) = \sqrt{x}$.

- 1- Etudie et représente graphiquement les courbes (C_1) et (C_2) représentatives respectives des fonctions f et g .

- 2-a) Détermine une équation de la droite passant par le point $A(1, 0)$ de la courbe (C_1) de coefficient directeur $f'_s(1)$.

- b) Construis cette droite.

- 3-a) Détermine une équation de la droite passant par le point $A(1, 0)$ de la courbe (C_1) de coefficient directeur $f'_d(1)$.

- b) Construis cette droite.

- 4-a) Etudie la dérivabilité de g en 0.

- b) Construis la tangente à (C_2) au point d'abscisse 0.

Je fais le point de l'activité

- La droite passant par le point $M_0(x_0; y_0)$ et de coefficient directeur $f'_s(x_0)$ est appelée la tangente à gauche en x_0 à la courbe représentative de f au point M_0 .
- La droite passant par le point $M_0(x_0; y_0)$ et de coefficient directeur $f'_d(x_0)$ est appelée la tangente à droite en x_0 à la courbe représentative de f au point M_0 .
- Lorsque la limite à droite ou à gauche en x_0 de la fonction $x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est infinie, la représentation graphique de f admet une tangente verticale au point M_0 .

l'évalue mes acquis



(C) est la courbe représentative de f . Choisis la bonne réponse.

- Si la limite de $x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ à gauche en a est infinie, alors :
 - l'axe des ordonnées est tangente (C) au point $A(a; f(a))$.
 - la parallèle à l'axe des ordonnées passant par $A(a; f(a))$ est tangente à (C) en $A(a; f(a))$.
 - l'axe des abscisses est tangente à (C) au point $A(a; f(a))$.
- Si la limite de la fonction $x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ à droite en a , existe et est finie, alors :
 - $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à (C) en $A(a; f(a))$.
 - la tangente à droite à (C) en $A(a; f(a))$ a pour coefficient directeur $f'(a)$.
 - la tangente à droite à (C) en $A(a; f(a))$ ne peut jamais être parallèle à l'axe des abscisses.
- Les coefficients directeurs des tangentes, à gauche et à droite, en un point sont toujours :
 - différents
 - des nombres réels
 - des nombres réels non nuls.

3- CONNAÎTRE LES PROPRIÉTÉS RELATIVES À LA DÉRIVABILITÉ D'UNE FONCTION SUR UN INTERVALLE.

Activité 3

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = x\sqrt{x}$

- Soit x_0 un nombre réel de $]0; +\infty[$, étudie la dérivabilité de f en x_0 .
- Étudie la dérivabilité de f en 0.
- Déduis-en l'intervalle sur lequel f est dérivable.

Je fais le point de l'activité

- f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et f est dérivable en 0 donc f est dérivable sur $[0; +\infty[$.

l'évalue mes acquis



Choisis la bonne réponse.

- Si f est dérivable sur l'intervalle $]a; b[$ et $f'(a)$ est un nombre réel, alors f est dérivable sur :
 - $[a; b[$; b) $[a; b[$; c) $]a; b[$.
- Si f est dérivable sur l'intervalle $]a; b[$ et $f'(b) = -1$, alors f est dérivable sur :
 - $[a; b[$; b) $[a; b[$; c) $]a; b[$.
- Si f est dérivable sur l'intervalle $]a; b[$ et $f'_g(a), f'_d(a)$ sont des nombres réels, alors f est dérivable sur :
 - $[a; b[$; b) $[a; b[$; c) $]a; b[$.

4- CONNAÎTRE LES NOUVELLES NOTATIONS DES DÉRIVÉES SUCCESSIVES () - NOTER LE DÉRIVÉES SUCCESSIVES D'UNE FONCTION

Activité 4

Soit f une fonction dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 5x + 7$

- Détermine la fonction dérivée f' de f sur $\mathbb{R}$.
- Justifie que f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et détermine la dérivée f'' de f' .

3- Justifie que f''' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et détermine sa dérivée.

Je fais le point de l'activité

f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

- Sa fonction dérivée est notée f' ou $\frac{df}{dx}$ ou $f^{(1)}$
- Si f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ sa fonction dérivée est notée f'' ou $\frac{d^2f}{dx^2}$ ou $f^{(2)}$
- Si f'' est dérivable sur $\mathbb{R}$, sa fonction dérivée est notée f''' ou $\frac{d^3f}{dx^3}$ ou $f^{(3)}$.

J'évalue mes acquis



Soit f une fonction trois fois dérivable.

Recopie et complète les phrases suivantes :

- La dérivée de f se note ou
- La dérivée de la dérivée seconde se note ou
- $\frac{d^3f}{dx^3}$ se note aussi

5- CONNAÎTRE LA PROPRIÉTÉ RELATIVE À LA DÉRIVÉE D'UNE FONCTION COMPOSÉE.

Activité 5

Soient f, g et h des fonctions dérivables et définies sur $\mathbb{R}$.

par : $f(x) = 7x - 3$, $g(x) = x^2$, $h(x) = (7x - 3)^2$.

- Vérifie que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = g \circ f(x)$.
- Justifie que :
 - $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = 49x^2 - 42x + 9$
 - $\forall x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = 14(7x - 3)$
- Détermine les dérivées f' de f et g' de g sur $\mathbb{R}$.
- Compare $h'(x)$ et $f'(x) \times g'(f(x))$.

Je fais le point de l'activité

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et g une fonction dérivable sur un intervalle J de $\mathbb{R}$ tel que :

- pour tout x de I , $f(x)$ appartient à J .
- la composée $g \circ f(x)$ est dérivable sur I , et : pour tout x de I , $(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x))$.

J'évalue mes acquis



Les conditions de la dérivabilité d'une fonction composée sont vérifiées. Choisis la bonne réponse.

- $(u \circ v)'$ est égale à :
 - $u' \times (v \circ u)$; b) $v' \times (u \circ v)$; c) $v' \times (u' \circ v)$.
- $(\cos(u(x)))'$ est égale à :
 - $-u'(x)\sin u(x)$; b) $u'(x)\cos u(x)$; c) $u'(x)\sin u'(x)$.
- $(\sqrt{u})'$ est égale à :
 - $u' \cdot u$; b) $u' \times \frac{1}{\sqrt{u}}$; c) $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

6- DÉTERMINER LE NOMBRE DÉRIVÉ DE LA FONCTION f^{-1} . BIJECTION RÉCIPROQUE DE FONCTION / EN UN POINT y_0

ACTIVITÉ 6

Soit f une fonction définie, dérivable et strictement monotone sur l'intervalle I tel que $I = [a; b]$.

1- Justifie que f admet une bijection réciproque que l'on notera f^{-1} , définie sur l'intervalle J tel que $J = f(I) = [f(a); f(b)]$ qui à tout nombre réel de J associe son unique antécédent par f dans I .

2- On admet que pour $y_0 \in J$, $f'(f^{-1}(y_0)) \neq 0$. Démontre que : $\forall y_0 \in J, (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$.

3- Soient g la fonction définie de $[0; +\infty[$ vers $[0; +\infty[$ par : $g(x) = x^2$.

a) Justifie que g est une bijection de $[0; +\infty[$ sur $[0; +\infty[$.

b) Détermine la bijection réciproque g^{-1} de g .

c) Construis les courbes représentatives (C) et (C^{-1}) respectives de g et g^{-1} dans un repère orthonormé.

Je fais le point de l'activité

Soit f une fonction continue, strictement monotone sur un intervalle I , telle que : $\forall x \in I, f'(x) \neq 0$.

- La bijection réciproque f^{-1} est dérivable en y_0 élément de $f(I)$ et : $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$.
- La courbe représentative (C^{-1}) de f^{-1} s'obtient par une symétrie orthogonale d'axe la droite d'équation $y = x$ de la courbe représentative (C) de f .

J'évalue mes acquis



Soit g une fonction définie, dérivable et strictement croissante sur l'intervalle $I = [a; b]$. On suppose que g est non nulle sur l'intervalle I . Choisis la bonne réponse.

1- $(g^{-1} \circ g)'$ est égale à :

- a) $g^{-1} \times g' \circ g$; b) $\frac{g'}{g}$; c) $g' \times (g^{-1})' \circ g$.

2- $(g^{-1})'$ est égale à :

- a) $\frac{g'}{g}$; b) $\frac{1}{g' \circ g^{-1}}$; c) $-\frac{g'}{g}$.

3- Connaissant la courbe représentative (C) de g , on construit la courbe représentative (C^{-1}) de g^{-1} dans un repère orthonormé (O, I, J) par :

- a) une symétrie orthogonale d'axe la droite d'équation $y = x$ la courbe (C) .
b) une symétrie centrale de centre O la courbe (C) .
c) une symétrie orthogonale d'axe la droite d'équation $y = -x$ la courbe (C) .

7- RECONNAÎTRE GRAPHIQUEMENT UN POINT D'INFLÉXION.

ACTIVITÉ 7

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x^2$. La courbe représentative (C) de la fonction f est donnée ci-contre.

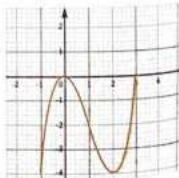
1- Reproduis la courbe, puis construis la tangente à (C) en

chacun des points A et B d'abscisses respectives $-\frac{1}{2}$ et 1.

2- Parmi les deux points A et B, indique le point pour lequel la tangente « traverse » la courbe (C) .

3- a) Calcule $f''(x)$ pour tout x élément de $\mathbb{R}$.

b) Vérifie que f'' s'annule en 1 en changeant de signe.



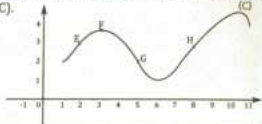
Je fais le point de l'activité

Le point B est un point d'inflexion à la courbe représentative (C) de f .

Pour reconnaître graphiquement un point d'inflexion à la courbe représentative d'une fonction, on trace la tangente en ce point afin de s'assurer si elle « traverse » cette courbe en ce point.

J'évalue mes acquis

Soit (C) la courbe représentative de la fonction f . Indique parmi les points E, F, G et H ceux qui sont des points d'inflexion à (C).



8- CONNAÎTRE LES PROPRIÉTÉS RELATIVES À L'INÉGALITÉ DES ACCROISSEMENTS FINIS.

ACTIVITÉ 8

On considère une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I tel que $I = [a; b]$. On suppose qu'il existe par ailleurs deux nombres réels m et M tels que pour tout nombre réel x de I : $m \leq f'(x) \leq M$.

On se propose de démontrer qu'il est possible d'encadrer la différence $f(v) - f(u)$ pour tous nombres réels u et v de I (avec $u < v$).

- 1- Démonstre que la fonction $g : x \mapsto f(x) - f(u) - M(x - u)$ est dérivable sur $J = [u; v]$ et calcule sa fonction dérivée, puis détermine les variations de g sur J et déduis son signe.
- 2- Démonstre que la fonction $h : x \mapsto f(x) - f(u) - m(x - u)$ est dérivable sur $J = [u; v]$ et calcule sa fonction dérivée, puis détermine les variations de h sur J et déduis son signe.
- 3- Dédus des questions précédentes que : $m(v - u) \leq f(v) - f(u) \leq M(v - u)$.
- 4- Pour $m = -M$, donne un encadrement de $f(v) - f(u)$.

Je fais le point de l'activité

- Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert K , a et b deux éléments de K tels que $a < b$.

S'il existe des nombres réels M et m tels que : pour tout x élément de $[a; b]$,

$m \leq f'(x) \leq M$, alors $m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$.

- Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert K .

S'il existe un nombre réel M tel que : $|f'(x)| \leq M$, alors pour tout x de K :

$|f(b) - f(a)| \leq M(b - a)$

J'évalue mes acquis

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert K , t et s deux éléments de K tels que $t < s$. Choisis la bonne réponse

- 1- Si $-2 \leq f'(x) \leq 3$, alors :

- a) $-2(s + t) \leq f(s) - f(t) \leq 3(s + t)$
- b) $-2st \leq f(s) - f(t) \leq 3st$
- c) $-2(s - t) \leq f(s) - f(t) \leq 3(s - t)$

- 2- Si $|f'(x)| \leq \sqrt{2}$, alors :

- a) $|f(s) - f(t)| \geq \sqrt{2}|s - t|$
- b) $|f(t) - f(s)| \leq \sqrt{2}(t - s)$
- c) $|f(s) - f(t)| \leq \sqrt{2}|s - t|$



9. ETUDE ET REPRÉSENTATION GRAPHIQUE DE FONCTIONS

9.1. Représenter graphiquement la fonction du type $x \mapsto x^r$ ($r \in \mathbb{Q}^*$; $x \in \mathbb{R}^*$.)

Activité 9

Soient les fonctions f, g et h de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}_+$ définies par :

$$f(x) = x^{-\frac{1}{2}}; \quad g(x) = x^{\frac{1}{3}}; \quad h(x) = x^{\frac{2}{3}}$$

- 1- Détermine l'ensemble de définition de chacune des fonctions f, g et h .
- 2- Détermine les limites en 0 et en $+\infty$ des fonctions f, g et h .
- 3- Étudie la dérivabilité de f, g et h sur $\mathbb{R}_+$.
- 4- Détermine les variations de f, g et h sur $\mathbb{R}_+$.
- 5- Construis les courbes représentatives de f, g et h dans des repères différents.

Je fais le point de l'activité

Soit la fonction f de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}_+$ définie par : $f(x) = x^r$ où r est un nombre rationnel non nul.

- Si $r < 0$, alors la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
- Si $0 < r < 1$, alors la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
- Si $r > 1$, alors la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et dérivable en 0.

J'évalue mes acquis



Construis dans un même repère les courbes représentatives des fonctions de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}_+$ définies par :

$$f_1(x) = x^{-\frac{1}{2}}; \quad f_2(x) = x^{\frac{1}{3}}; \quad f_3(x) = x^{\frac{2}{3}}$$

9.2 Représenter graphiquement une fonction du type : $x \mapsto \cos(ax + b)$, $x \mapsto \sin(ax + b)$, $x \mapsto \tan(ax + b)$

Activité 10

Le repère (O, I, J) est orthogonal. Soit les fonctions $f: x \mapsto \cos 2x$ et $g: x \mapsto \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

- 1 a) Justifie que f est périodique de période π .
- b) Détermine la dérivée et le signe de la dérivée de f sur $[-\pi; 0]$.
- c) Justifie que f est décroissante sur $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{\pi}{2}; 0\right]$.
- d) Représente graphiquement la courbe (C_f) de f sur $[-\pi; \pi]$ dans le repère (O, I, J) .
- 2 a) Justifie qu'on obtient la courbe (C_g) de g par la translation de vecteur $-\frac{\pi}{3}\vec{OI}$.
- b) Dédus-en la construction de la courbe (C_g) de g dans le même repère que (C_f) .

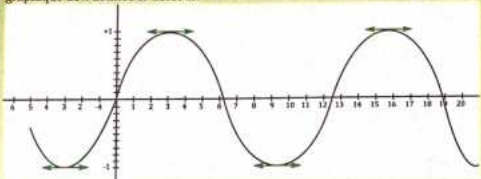
Je fais le point de l'activité

- La courbe de $x \mapsto \cos(ax + b)$ s'obtient par la translation de vecteur $-b\vec{OI}$ de celle de $x \mapsto \cos(ax)$
- La courbe de $x \mapsto \sin(ax + b)$ s'obtient par la translation de vecteur $-b\vec{OI}$ de celle de $x \mapsto \sin(ax)$
- La courbe de $x \mapsto \tan(ax + b)$ s'obtient par la translation de vecteur $-b\vec{OI}$ de celle de $x \mapsto \tan(ax)$

J'évalue mes acquis



On considère les fonctions $k: x \mapsto \sin \frac{x}{2}$ et $h: x \mapsto \sin \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right)$ et (C_k) la représentation graphique de k donnée ci-dessous.



- Justifie que k et h sont périodiques de période 4π .
- A partir de la courbe (C_k) de k , représente celle de h sur $[-\pi; 5\pi]$ et justifie ta construction.

9.3 Plan d'étude d'une fonction quelconque.

Activité 11

On considère les fonctions $f: x \mapsto \sqrt{-x^2 + 3x - 2}$ et $g: x \mapsto \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

Réponds par Vrai (V) si l'affirmation est vraie et par faux (F) si l'affirmation est fausse

N°	AFFIRMATIONS
1	f et g ont le même ensemble de définition
2	On peut calculer les limites de f à l'infini
3	On peut représenter la courbe de g sur $]-\infty; 1[$ et sur $]2; +\infty[$
4	f et g sont dérivables en 1 et en 2
5	La courbe de f n'admet pas d'asymptote
6	La droite d'équation $y = -x + \frac{3}{2}$ est une asymptote à la courbe de g
7	La droite d'équation $x = \frac{3}{2}$ est axe de symétrie des courbes de f et de g
8	Pour déterminer les variations d'une fonction, on peut avoir besoin de déterminer : les limites aux bornes de son ensemble de définition et le signe de sa dérivée.
9	Il n'est pas nécessaire de représenter les asymptotes d'une courbe avant de construire cette courbe.
10	La courbe de f admet une branche parabolique de direction celle de (OI)
11	La réunion des courbes (C_f) et (C_g) est la représentation graphique de la fonction $x \mapsto \sqrt{ x^2 - 3x + 2 }$

Je fais le point de l'activité

Pour représenter graphiquement une courbe de fonction on peut déterminer :

- Son ensemble de définition
- Les limites aux bornes de son ensemble de définition
- La parité
- La dérivée et le signe de la dérivée
- Le tableau de variation
- Les asymptotes
- Les éléments de symétrie
- Les branches paraboliques.

J'évalue mes acquis



On donne la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

1. Justifie que $]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$ est l'ensemble de définition de f .
2. Détermine les limites de f en $-\infty$, en $+\infty$, à gauche en -1 et à droite en 1 .
3. a) Détermine la dérivée et le signe de la dérivée de f .
b) Déduis-en le sens de variation et dresse le tableau de variation de f .
4. Justifie que les droites d'équations $y = -x$ et $y = x$ sont des asymptotes à (C_f) respectivement en $-\infty$ et en $+\infty$.
5. Construis la courbe (C_f) de f dans un repère orthonormé.

II- RÉSUMÉ DE COURS



1- DÉRIVABILITÉ À GAUCHE, DÉRIVABILITÉ À DROITE EN x_0

a) Définition de la dérivabilité à gauche, de la dérivabilité à droite en x_0

DÉFINITION

f est une fonction définie sur un intervalle K contenant x_0 .

On dit que f est **dérivable à gauche** (respectivement **à droite**) en x_0 si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right] \quad (\text{respectivement } \lim_{x \rightarrow x_0^+} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right]) \text{ existe et est finie.}$$



- Si f est dérivable à gauche en x_0 , alors : $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right]$ se note $f'_g(x_0)$ et $f'_g(x_0)$ est le nombre dérivé de f à gauche en x_0 .
- Si f est dérivable à droite en x_0 , alors : $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right]$ se note $f'_d(x_0)$ et $f'_d(x_0)$ est le nombre dérivé de f à droite en x_0 .

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = |x|$.

- Cas $x < 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$ donc $f'_g(0) = -1$
- Cas $x > 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$ donc $f'_d(0) = 1$

b) Dérivabilité d'une fonction en un point d'abscisse x_0

PROPRIÉTÉS

f est une fonction définie sur un intervalle ouvert K contenant x_0 .

f est **dérivable en x_0** si et seulement si f est **dérivable à gauche en x_0** , **dérivable à droite en x_0** et : $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.

Exemple

La fonction $f: x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0 car : $f'_g(0) = -1$, $f'_d(0) = 1$ et $f'_g(0) \neq f'_d(0)$.

2- INTERPRÉTATION DU NOMBRE DÉRIVÉ

PROPRIÉTÉS

• La droite passant par le point $M_0(x_0; y_0)$ et de coefficient directeur $f'_g(x_0)$ (respectivement $f'_d(x_0)$) est la tangente à gauche (respectivement à droite) en x_0 à la représentation graphique de f .

• Si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right] = \pm \infty$ et (ou) $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right] = \pm \infty$, alors f n'est pas dérivable à gauche et (ou) à droite en x_0 mais (C_f) admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse x_0 .

Exemple

Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x}$.

On a : $x > 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$. Donc la courbe représentative de f admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 0.

3- DÉRIVABILITÉ SUR UN INTERVALLE

DÉFINITION

• f est une fonction définie sur un intervalle ouvert $]a; b[$.

On dit que f est **dérivable sur l'intervalle ouvert $]a; b[$** lorsque f est dérivable en tout élément de $]a; b[$.

• f est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert $]a; b[$.

On dit que f est dérivable sur l'intervalle fermé $[a; b]$ lorsque f est dérivable à droite en a et dérivable à gauche en b .

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x|x|$.

Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto |x|$ sont dérivables respectivement sur les ensembles $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^*$.

La fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et a pour dérivée $f' : x \mapsto 2|x|$.

On a : $f'_g(0) = f'_d(0) = 0$. Donc f est dérivable en 0.

Ainsi f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée la fonction $f' : x \mapsto 2|x|$.

- DÉRIVÉES SUCCESSIVES

DÉFINITION

f est une fonction dérivable sur un intervalle K .

Si f' est dérivable sur K , sa dérivée est appelée **dérivée seconde de f** , notée f'' ou $f^{(2)}$.

f' est aussi appelée **dérivée première de f** , on la note $f^{(1)}$.

f' est aussi appelée **dérivée d'ordre 1** de la fonction f .

Notation

$f', f'', \dots, f^{(n)}$ sont aussi notées respectivement $\frac{df}{dx}, \frac{d^2f}{dx^2}, \dots, \frac{d^n f}{dx^n}$.

Exemple

La fonction $f: x \rightarrow x^3 + 2x^2 - 8x + 5$ a pour dérivées successives : $f'(x) = 3x^2 - 4x - 8$, $f^{(2)}(x) = 6x - 4$, $f^{(3)}(x) = 6$.

Pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à 4 : $f^{(n)}(x) = 0$.

5- DÉRIVÉE D'UNE FONCTION COMPOSÉE

PROPRIÉTÉS

f est une fonction définie sur un intervalle K , g une fonction définie sur un intervalle I , contenant $f(K)$.

- Si la fonction f est dérivable en x_0 de K et la fonction g dérivable en $f(x_0)$ alors la fonction $g \circ f$ est dérivable en x_0 , et $(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) \times g'(f(x_0))$.
- Si la fonction f est dérivable sur K et la fonction g est dérivable sur I , alors la fonction $g \circ f$ est dérivable sur K , et $(g \circ f)' = f' \times g' \circ f$.

Exemple

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \cos(x^3)$.

La fonction est f de la forme $\cos u$ où u et v sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = x^3$ et $v(x) = \cos$.

Les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et :

Pour tout nombre réel x , $u'(x) = 3x^2$ et $v'(x) = -\sin x$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que la composée de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = u'(x) \times v'(u(x)) = 3x^2 \times (-\sin(x^3)) = -3x^2 \sin(x^3)$$

6- NOMBRE DÉRIVÉ DE LA FONCTION f^{-1} , BIJECTION RÉCIPROQUE DE LA FONCTION f EN UN POINT x_0 .

PROPRIÉTÉS

Soit f une fonction dérivable, strictement monotone sur un intervalle K , telle que :

$$\forall x \in K, f'(x) \neq 0$$

- La fonction f réalise une bijection de K vers $f(K)$.
- La bijection réciproque est dérivable sur $f(K)$ et on a : $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$

Exemple

Soit la fonction f de $[-2; 1]$ vers $[-2; \frac{1}{4}]$ définie par : $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$

La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[-2; 1]$ en tant que quotient de deux fonctions dérivables sur $[-2; 1]$.

$\forall x \in [-2; 1], f'(x) = \frac{-3}{(x-2)^2}$ donc f est strictement décroissante sur $[-2; 1]$.

La fonction f est continue et strictement monotone sur $[-2; 1]$. Donc f réalise une bijection de $[-2; 1]$

sur $f([-2; 1]), f([-2; 1]) = [-2; \frac{1}{4}], 0 \in [-2; \frac{1}{4}]$.

On a : $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))}$

Recherche du nombre réel de l'intervalle $[-2; 1]$ tel que $f(\beta) = 0$.

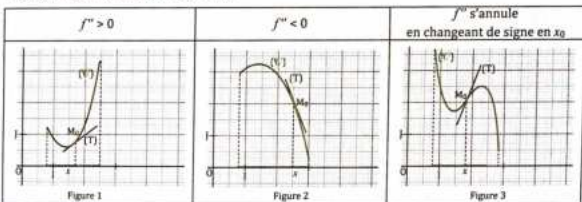
$f(\beta) = 0 \Leftrightarrow \frac{\beta+1}{\beta-2} = 0$ et $\beta+1 = 0 \Leftrightarrow \beta = -1$ d'où $f^{-1}(0) = -1$

donc $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$.

7 POINT D'INFLEXION

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle K et x_0 un élément de K . On désigne par (C) sa courbe représentative et (T) la tangente à (C) en M_0 d'abscisse x_0 .

- Si f'' est strictement positive sur K , alors f' est strictement croissante sur K . (C) est au-dessus de (T) sur K . On dit que f est **convexe** sur K . (figure 1)
- Si f'' est strictement négative sur K , alors f' est strictement décroissante sur K . (C) est au-dessous de (T) sur K . On dit que f est **concave** sur K . (figure 2)
- Si f'' s'annule et change de signe en x_0 . La tangente (T) « traverse » la courbe (C) en M_0 . On dit que M_0 est un **point d'inflexion** (figure 3)



8- INÉGALITÉS DES ACCROISSEMENTS FINIS

PROPRIÉTÉS

f est une fonction dérivable sur un intervalle K , a et b deux éléments de K tels que $a < b$.
S'il existe des nombres réels m et M tels que : pour tout x élément de $[a; b]$, $m \leq f'(x) \leq M$,
alors $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$

Exemple

Soit f la fonction dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \cos x$.

Pour tout nombre réel x , On a : $f'(x) = -\sin x$. On a : $\forall x \in [0; \frac{\pi}{3}], -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq f'(x) \leq 0$.

Soit u élément de $[0; \frac{\pi}{3}]$, d'après l'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction f sur $[0; u]$, on a : $\frac{\sqrt{3}}{2}(u-0) \leq f(u) - f(0) \leq 0(u-0)$, soit $-\frac{\sqrt{3}}{2}u + 1 \leq f(u) \leq 1$.

Ainsi : $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right], 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}x \leq f(x) \leq 1$

PROPRIÉTÉS

f est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert K .

S'il existe un nombre réel M tel que : pour tout x de K , $|f'(x)| \leq M$, alors pour tout éléments a et b de K , $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$.

Exemple

Soit g la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ par . Pour tout nombre réel x ,

Or, pour tout nombre réel x , $|\cos x| \leq 1$, donc : $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) \leq 1$.

Soit x un nombre réel. En appliquant l'inégalité des accroissements finis sur l'intervalle , on a :

$|g(x) - g(0)| \leq 1|x - 0|$, soit $g(x) \leq |x|$. Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leq |x|$

9- ÉTUDE ET REPRÉSENTATION GRAPHIQUE DE FONCTIONS

9.1- Représenter graphiquement la fonction du type $x \mapsto x^r$ ($r \in \mathbb{Q}^*$; $x \in \mathbb{R}^*$.)

PROPRIÉTÉS

Soit la fonction f de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}_+$ définie par : $f(x) = x^r$ où r est un nombre rationnel non nul.

- Si $r < 0$, alors la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
- Si $0 < r < 1$, alors la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
- Si $r > 1$, alors la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et dérivable

9.2 Représenter graphiquement une fonction du type : $x \mapsto \cos(ax + b)$, $x \mapsto \sin(ax + b)$, $x \mapsto \tan(ax + b)$

PROPRIÉTÉS

- La courbe de $x \mapsto \cos(ax + b)$ s'obtient par la translation de vecteur $-\frac{b}{a}\vec{O1}$ de celle de $x \mapsto \cos(ax)$
- La courbe de $x \mapsto \sin(ax + b)$ s'obtient par la translation de vecteur $-\frac{b}{a}\vec{O1}$ de celle de $x \mapsto \sin(ax)$
- La courbe de $x \mapsto \tan(ax + b)$ s'obtient par la translation de vecteur $-\frac{b}{a}\vec{O1}$ de celle de $x \mapsto \tan(ax)$

9.3 Plan d'étude d'une fonction quelconque.

Méthode

Pour représenter graphiquement une courbe de fonction on peut déterminer :

- Son ensemble de définition
- Les limites aux bornes de son ensemble de définition
- La parité
- La dérivée et le signe de la dérivée
- Le tableau de variation
- Les asymptotes
- Les éléments de symétrie
- Les branches paraboliques.

III-

MÉTHODE



1- Pour déterminer le sens de variation d'une bijection réciproque d'une fonction f sur un intervalle J connaissant le sens de variation de f sur un intervalle,

on applique l'une des propriétés suivantes :

- a) si f est croissante sur l'intervalle $[a; b]$, alors f^{-1} est croissante sur $[f(a); f(b)]$.
- b) si f est décroissante sur l'intervalle $[a; b]$, alors f^{-1} est décroissante sur $[f(b); f(a)]$.

N.B : la fonction f et sa bijection réciproque f^{-1} ont le même sens de variation.

2- Pour déterminer le nombre dérivé en de la fonction, réciproque d'une fonction f dérivable et strictement monotone sur un intervalle K ,

on peut procéder comme suit :

- on pose : $f^{-1}(\alpha) = \beta$
- on cherche β tel que : $f(\beta) = \alpha$
- on calcule $f'(\beta)$
- on vérifie que : $f'(\beta) \neq 0$
- on conclut : $f^{-1}(\alpha) = \frac{1}{f'(\beta)}$

3- Pour déterminer un point d'inflexion d'une courbe représentative d'une fonction,

on applique la propriété suivante :

Si f et f' sont dérivables sur l'intervalle K et si l'élément a de K est tel que $f''(a) = 0$ et f'' change de signe en ce point a , alors le point d'abscisse a est un point d'inflexion.

4- Pour calculer la dérivée d'une fonction composée.

On vérifie que l'on est dans les conditions d'application de la propriété de dérivation d'une fonction composée et on applique la formule : $(f \circ u)' = u' \times f' \circ u$.

5- Pour démontrer une inégalité ou établir un encadrement,

on peut appliquer l'un des procédés suivants :

- étudier le signe d'une fonction
- appliquer les inégalités des accroissements finis.

IV- SAVOIR-FAIRE



Savoir-faire 1- Déterminer le signe d'une fonction en utilisant ses variations

Énoncé

On donne ci-dessous le tableau de variation d'une fonction f .

x	$-\infty$	-3	1	6	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	-2	-1	-2	5

Détermine le signe de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Solution commentée

Recherche des zéros de la fonction f .

- La fonction f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty; -3]$, elle réalise une bijection de $]-\infty; -3]$ sur $[-2; +\infty[$. Comme 0 appartient bien à $[-2; +\infty[$, donc il existe un unique réel α de l'intervalle $]-\infty; -3]$ tel que $f(\alpha) = 0$.
- La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[6; +\infty[$, elle réalise une bijection de $[6; +\infty[$ sur $[-2; 5]$. Comme 0 appartient bien à $[-2; 5]$, donc il existe un unique réel β de l'intervalle $[6; +\infty[$ tel que $f(\beta) = 0$.

Donc les nombres réels α et β sont les zéros de la fonction f .

Ainsi :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; \alpha] \cup [\beta; +\infty[, f(x) \geq 0 \\ \forall x \in [\alpha; \beta], f(x) \leq 0 \end{cases}$$

Savoir-faire 2- Déterminer le nombre dérivé de la fonction f^{-1} en un point y_0 .

Énoncé

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 17$

Justifie que la fonction f réalise une bijection de $[-2; 0]$ sur $[3; 17]$, puis calcule $f(-1)$ et $(f^{-1})'(13)$.

Solution commentée

- La fonction f est une fonction polynôme, donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et en particulier sur l'intervalle $[-2; 0]$. Pour tout nombre réel x de $[-2; 0]$, $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$. La fonction f est donc strictement croissante sur l'intervalle $[-2; 0]$ et réalise une bijection de $[-2; 0]$ sur $f([-2; 0]) = [f(-2); f(0)] = [3; 17]$.
- Calcul de $f(-1)$ et $(f^{-1})'(13)$.

On a : $f(-1) = -1 - 3 + 17 = 13$ et donc $f^{-1}(13) = -1$, $f'(-1) = 9$ ainsi $f'[(f^{-1})'(13)] \neq 0$.

$$\text{Donc : } (f^{-1})'(13) = \frac{1}{f'[(f^{-1})'(13)]} = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{9}.$$

Savoir-faire 3 : Déterminer un point d'inflexion d'une courbe représentative d'une fonction.

Énoncé

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 - 4x$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.

Détermine les points d'inflexion à la courbe (C) de la fonction g .

Solution commentée

La fonction g est une fonction polynôme de degré 4, elle est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = x^3 - 6x^2 - 4 \text{ et } g''(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x - 4)$$

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow 3x(x - 4) = 0, \text{ soit } x = 0 \text{ ou } x = 4.$$

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$g''(x)$		+	0	-	0	+	

Conclusion : g admet deux points d'inflexion en 0 et en 4 à sa courbe (C) car g'' s'annule en 0 et en 4 en changeant de signe.

Savoir-faire 4 : Étudier la dérivabilité d'une fonction définie par intervalles en un point de raccordement.

Énoncé

Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} \forall x \in [0 ; 4], f(x) = (x - 3)^2 \\ \forall x \in]4 ; 6], f(x) = 2x - 7 \end{cases}$

Étudie la dérivabilité de la fonction f en 4.

Solution commentée

- Pour $x \in [0 ; 4]$, $\lim_{x \rightarrow 4^-} \left[\frac{f(x) - f(4)}{x - 4} \right] = \lim_{x \rightarrow 4^-} \left[\frac{(x - 3)^2 - 1}{x - 4} \right] = \lim_{x \rightarrow 4^-} \left[\frac{(x - 4)(x - 2)}{x - 4} \right] = 2$
- Pour $x \in]4 ; 6]$, $\lim_{x \rightarrow 4^+} \left[\frac{f(x) - f(4)}{x - 4} \right] = \lim_{x \rightarrow 4^+} \left[\frac{2x - 7 - 1}{x - 4} \right] = \lim_{x \rightarrow 4^+} \left[\frac{2(x - 4)}{x - 4} \right] = 2$

On a bien $f'_{x \rightarrow 4}(4) = f'_{x \rightarrow 4}(4) = 2$, donc la fonction f est dérivable en 4.

V- JE M'EXERCE



1. Exercices de fixation / Application

Connaître la définition d'une fonction dérivable à gauche (resp. à droite) en un point - Noter un nombre dérivé à gauche (resp. à droite) d'une fonction.

1 Interprète les égalités suivantes en utilisant « le nombre dérivé à gauche », « le nombre dérivé à droite », f est dérivable en x_0 .

$$a) \lim_{x \rightarrow a^-} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right] = f'_g(a)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow b^+} \left[\frac{f(x) - f(b)}{x - b} \right] = f'_d(b)$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \right] = 2$$

$$d) \lim_{x \rightarrow a^-} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right] = -7 \quad e) f'_g(x_0) = f'_d(x_0).$$

2 Parmi les fonctions ci-dessous, indique celles qui sont dérivables à gauche en x_0 ou dérivables à droite en x_0 .

$$a) f(x) = x|x - 1|, x_0 = 1$$

$$b) f(x) = \frac{|x| + 1}{x - 2}, x_0 = 0$$

$$c) \begin{cases} \forall x \in]-\infty; 1], f(x) = -x^2 + x + 1 \\ \forall x \in [1; +\infty[, f(x) = 2 - x \end{cases}, x_0 = 1$$

Connaître la définition des dérivées successives d'une fonction - Noter les dérivées successives d'une fonction.

3 Parmi les fonctions suivantes, indique celles qui sont les dérivées d'ordres 1, 2 et 3 de la fonction $x \mapsto \cos x$.

$$a) x \mapsto \cos x$$

$$b) x \mapsto \sin x$$

$$c) x \mapsto -\sin x$$

$$d) x \mapsto -\cos x.$$

Connaître les nouvelles notations des dérivées successives $\frac{df}{dx}, \frac{d^2f}{dx^2}, \dots, \frac{d^nf}{dx^n}$

4 Associe des dérivées de même ordre.

$$\frac{df}{dx} \cdot \quad \cdot \quad (f^{(n-1)})'$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} \cdot \quad \cdot \quad f''$$

$$\frac{d^nf}{dx^n} \cdot \quad \cdot \quad f^{(n)}$$

5 On donne l'expression : $L = x^2 + 3y^2 - 3xy^3$. Relie une écriture de gauche à une écriture de droite.

$$\frac{dL}{dx} \cdot \quad \cdot \quad 6y - 9xy^2$$

$$\frac{dL}{dy} \cdot \quad \cdot \quad 2x - 3y^3$$

$$\frac{d^2L}{dx^2} \cdot \quad \cdot \quad 6 - 18xy$$

$$\frac{d^2L}{dy^2} \cdot \quad \cdot \quad 2$$

Connaître les propriétés relatives à la dérivabilité d'une fonction sur un intervalle.

6 f est une fonction définie sur un intervalle ouvert $]a; b[$.

Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

a) f est dérivable sur $]a; b[$ lorsque f est dérivable sur $]a; b[$ et f n'est pas dérivable en b .

b) f est dérivable sur $]a; b[$ lorsque f est dérivable en tout point de $]a; b[$ et f est dérivable à droite en a et f est dérivable à gauche en b .

c) f est dérivable sur $]a; b[$ lorsque f est dérivable en tout point de l'intervalle $]a; b[$.

7 f est une fonction définie sur un intervalle fermé $[a; b]$.

Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

a) f est dérivable sur $[a; b]$ lorsque f est dérivable sur $]a; b[$ et f n'est pas dérivable en a et f est dérivable à gauche en b .

b) f est dérivable sur $[a; b]$ lorsque f est dérivable sur $]a; b[$, et f est dérivable à droite en a et dérivable à gauche en b .

c) f est dérivable sur $[a; b]$ lorsque f est dérivable sur $]a; b[$, et f est dérivable en a et en b .

8 Pour chaque fonction, indique parmi les intervalles proposés celui sur lequel elle est dérivable.

$$1- f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$a)]-1; 1[\quad b) [-1; 1[\quad c) [-1; 1] \quad d)]-1; 1]$$

$$2- g(x) = |x^2 - x|$$

$$a) [0; 1[\quad b)]0; 1] \quad c) [0; 1] \quad d)]0; 1[$$

$$3- h(x) = \sqrt{|x|}$$

Connaître la propriété relative à la dérivée d'une fonction composée

Les fonctions f et g vérifient les conditions de dérivabilité d'une fonction composée. Choisis la bonne réponse.

1- $(f \circ g)$ est égale à :

- a) $g \times f' \circ g$ b) $g' \times f \circ g$ c) $g' \times f' \circ g$

2- La fonction f réalisant une bijection de I sur $f(I)$, $(f^{-1})'$ est égale à :

- a) $\frac{1}{f' \circ f}$ b) $-1 \times (f^{-1})' \times f^{-2}$ c) $\frac{1}{f' \circ f^{-1}}$

Connaître les propriétés relatives à l'inégalité des accroissements finis

Choisis la bonne réponse.

1- f est une fonction dérivable sur un intervalle I , t et s sont deux nombres réels tels que :

$\forall x \in [t; s], u \leq f'(x) \leq v$ on a :

a) $u(s-t) \leq f(s) - f(t) \leq v(s-t)$;

b) $v(s-t) \leq f(s) - f(t) \leq u(s-t)$;

c) $u(s-t) \leq f(s) - f(t) \leq v(s-t)$.

2- g est une fonction dérivable sur un intervalle J tel que : $\forall x \in [a; b], |g'(x)| \leq \pi$, on a :

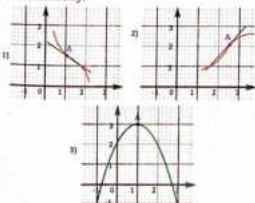
a) $|g(b) - g(a)| \leq \pi|b - a|$;

b) $|g(b) - g(a)| \geq \pi|b - a|$;

c) $|g(a) - g(b)| \geq \pi(a - b)$.

Reconnaître graphiquement un point d'inflexion

Parmi ces figures ci-contre, identifie celle où A est un point d'inflexion à la courbe représentative de la fonction f .



Déterminer le signe d'une fonction en utilisant ses variations.

Détermine le signe de chacune des fonctions ci-dessous à partir de leurs variations sur l'intervalle I indiqué.

1- $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 5x - 1, I = \mathbb{R}$;

2- $g(x) = \frac{x}{x+1} ; I = [-2; +\infty[$

3- $h(x) = x + \frac{1}{x} ; I = \mathbb{R}$

Déterminer le sens de variation d'une bijection réciproque d'une fonction f sur un intervalle J connaissant le sens de variation de f sur un intervalle I .

Dans chacun des cas ci-dessous, f est une bijection sur un intervalle. Détermine le sens de variation de sa bijection réciproque.

1- $f(x) = x^2 - 2x ; I = [1; +\infty[$

2- $f(x) = \frac{3-x}{x+1} ; I =]-\infty; -1[$

3- $f(x) = x - \sqrt{x} ; I = [\frac{1}{4}; +\infty[$

Déterminer le nombre dérivé de la fonction f^{-1} en un point y_0

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x|x|$. Justifie que f est une bijection sur $\mathbb{R}$, puis calcule les valeurs de $(f^{-1})'$ aux points -1 ; -4 ; 3 et 12 .

Soit g la fonction de $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ vers $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ définie

par : $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$

Justifie que g est une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, puis calcule les valeurs de $(g^{-1})'$ aux points -2 ; 0 et 20 .

Soit la fonction h de $[0; 1]$ vers $[\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ définie

par : $h(x) = \frac{x}{x^2+1}$ et (C) sa courbe représentative.

Justifie que h est une bijection de $[0; 1]$ sur

$[0; \frac{1}{2}]$, puis détermine le coefficient directeur

de la tangente à la courbe représentative (C^{-1}) de sa bijection réciproque h^{-1} au point d'abscisse $\frac{1}{4}$.

Déterminer un point d'inflexion d'une courbe représentative d'une fonction.

Dans chacun des cas ci-dessous, f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, et (C) sa courbe représentative. Détermine, si possible, les points d'inflexion à (C) .

$$1. f(x) = 3x^4 - 4x^2 - 1$$

$$2. f(x) = \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2}$$

$$3. f(x) = x^3 - 3x^2 + 30$$

Déterminer des dérivées successives d'une fonction.

11 Soit f la fonction dérivable et définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Détermine les dérivées d'ordres 1, 2 et 3 de la fonction f .

12 Détermine, dans chaque cas, les dérivées successives f' , f'' et $f^{(3)}$ de f sur l'ensemble indiqué.

$$1. f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 5x - 3; E = \mathbb{R};$$

$$2. f(x) = \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right); E = \mathbb{R};$$

$$3. f(x) = \frac{1}{5x-2}; E = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{5}\right\};$$

$$4. f(x) = 3x + 6; E =]-2; +\infty[.$$

13 Un point M d'un milieu de propagation est affecté par une onde mécanique sinusoïdale. Ses coordonnées $(x; y)$ dans un repère à l'instant t

vérifient la relation : $y = a \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$, où a , T et λ sont des constantes égales respectivement à l'amplitude, la période et la longueur d'onde de l'onde.

Détermine $\frac{dy}{dt}$ et $\frac{dy}{dx}$.

14 Le travail de la force de rappel exercée par un ressort de constante de raideur k est : $w = \frac{1}{2}kx^2$, où x représente l'allongement algébrique du ressort. Détermine le travail élémentaire dw de la force de rappel lorsqu'on étire le ressort d'une longueur dx infiniment petite.

Etudier la dérivabilité d'une fonction définie par intervalles en un point de raccordement.

15 Etudie la dérivabilité de chacune des fonctions f au point donné.

$$1. f(x) = \frac{2x}{3|x| + 4}; x_0 = 0;$$

$$2. f(x) = \frac{|x|}{|x| + 1}; x_0 = 0;$$

$$3. \begin{cases} \forall x \in]-\infty; 2], f(x) = x^2 - 3x + 1 \\ \forall x \in [2; +\infty[, f(x) = -2x^2 + 9x - 11 \end{cases}; x_0 = 2$$

$$4. \begin{cases} \forall x \in]-\infty; 1], f(x) = 1 + x - x^2 \\ \forall x \in [1; +\infty[, f(x) = 2 - x \end{cases}; x_0 = 1$$

$$5. f(x) = x|x - 3|; x_0 = 3$$

Calculer le nombre dérivé en un point d'une fonction composée.

16 Dans chacun des cas suivants, f est une fonction dérivable, en utilisant la dérivée d'une fonction composée, calcule la valeur de f' au point x_0 donné.

$$1. f(x) = (3x - 1)^3; x_0 = -1$$

$$2. f(x) = \sqrt{x^2 + 1}; x_0 = -1$$

$$3. f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}; x_0 = 1$$

$$4. f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}x^2\right); x_0 = -1$$

$$5. f(x) = \tan x^2; x_0 = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Calculer les dérivées des fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sqrt[n]{x}; x \mapsto x^n; x \mapsto u^n(x); x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$$

17 Dans chacun des suivants, calcule la dérivée de la fonction f après avoir précisé son ensemble de dérivabilité.

$$1. a) f(x) = \sqrt[3]{x}; b) f(x) = \sqrt[4]{x}$$

$$2. a) f(x) = x^{\frac{6}{7}}; b) f(x) = x^{\frac{3}{5}}; x^{\frac{9}{2}}$$

$$3. f(x) = (5x^3 - 4)^2; b) f(x) = (5x^4 - 3x + 2); c) f(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$4. a) f(x) = \sqrt{3x-7}; b) f(x) = \sqrt{4x^3+4x+1}; c) f(x) = \sqrt{\frac{1}{x+1}}$$

Calculer la dérivée d'une fonction composée

18 Soient f , g et h les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$v(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 + 3}; f(x) = v(4x + 1); g(x) = v(\sin x)$$

Détermine la dérivée v' de v puis en utilisant la propriété de la composée de deux fonctions détermine la dérivée f' de f et la dérivée g' de g .

19 En utilisant la propriété relative à une fonction composée, détermine la dérivée de la fonction f sur l'intervalle I , dans chacun des cas suivants.

$$1. f(x) = (2x^4 + x - 5)^2; I = \mathbb{R};$$

$$2. f(x) = \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^3; I =]1; +\infty[;$$

$$3- f(x) = \left(\frac{x\sqrt{3}-1}{2} \right)^4; l = \mathbb{R};$$

$$4- f(x) = \sqrt{4x^2+1}; l = \mathbb{R};$$

$$5- f(x) = \cos^2\left(3x + \frac{\pi}{5}\right); l = \mathbb{R};$$

44 Avec l'énoncé de l'exercice 16, construis la courbe représentative (C^{-1}) de la bijection réciproque f^{-1} de f dans un repère orthonormé.

45 Construis la courbe représentative (C^{-1}) de la bijection réciproque f^{-1} de la fonction $f: x \mapsto x|x|$ sur $\mathbb{R}$.

46 Pour chaque cas, construis la courbe représentative (C) de la fonction f , puis trace les demi-tangentes là où elles existent.

$$1) f(x) = \sqrt{x-1}; 2) f(x) = \sqrt{|x|}; c) f(x) = \sqrt{4-x^2}$$

Représenter graphiquement des fonctions du type : $x \mapsto \sqrt[n]{x} (n \in \mathbb{R}^*)$; $x \mapsto x^r (r \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^{*+})$

47 Représente graphiquement les fonctions suivantes :

$$1- a) f(x) = \sqrt[4]{x}; b) f(x) = \sqrt[3]{x}; c) f(x) = \sqrt[5]{x}$$

$$2- a) f(x) = x^{-\frac{1}{4}}; b) f(x) = x^{\frac{1}{4}}; c) f(x) = x^{\frac{1}{5}}$$

Représenter une fonction comportant : une valeur absolue, une racine carrée.

48 Représente chacune des fonctions suivantes :

$$a) f(x) = |x^2 - 2x - 3|; b) f(x) = |x - 1| - \frac{1}{x+1}$$

$$c) f(x) = |x - \frac{1}{x}|; d) f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 4}$$

$$e) f(x) = x - \sqrt{x}; c) f(x) = \frac{\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2+1}}$$

Représenter graphiquement une fonction du type : $x \mapsto \cos(ax+b)$; $x \mapsto \sin(ax+b)$; $x \mapsto \tan(ax+b)$.

49 Représente graphiquement les fonctions suivantes sur les intervalles indiqués.

$$1- f(x) = \sin\left(4x + \frac{\pi}{3}\right); l = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$2- f(x) = \cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right); l = \left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$$

$$3) f(x) = \tan(3x); l = \left] \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$$

Interpréter graphiquement la dérivabilité à droite (resp. à gauche) d'une fonction.

50 La fonction f est définie sur un intervalle contenant a . Donne une interprétation graphique à chacune des limites suivantes.

$$1- \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right] = \alpha; (\alpha \in \mathbb{R})$$

$$2- \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right] = \beta; (\beta \in \mathbb{R})$$

$$3- \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right] = +\infty;$$

$$4- \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right] = -\infty;$$

Démontrer qu'une fonction composée est dérivable en un point.

51 Démonstre que chaque fonction f est dérivable en x_0 en utilisant la propriété relative à une fonction composée.

$$1- f(x) = 5\left(x + \frac{1}{x}\right)^3; x_0 = 1$$

$$2- f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right); x_0 = 0$$

$$3- f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+3x+1}}; x_0 = -1$$

$$4- f(x) = \frac{1 + \sin \frac{\pi}{2}}{3}; x_0 = \frac{\pi}{2}$$

Utiliser l'inégalité des accroissements finis pour : démontrer une inégalité, établir un encadrement.

52 Soit f la fonction racine carrée.

1- Démonstre que :

$$\forall x \in [100; 121], \frac{1}{22} \leq f'(x) \leq \frac{1}{20}$$

2- Dédus-en en un encadrement de $\sqrt{100}$ en appliquant l'inégalité des accroissements finis sur l'intervalle $[100; 110]$.

53 Démonstre, en utilisant l'inégalité des accroissements finis, que pour tous nombres x et y , on a : $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$.

2- Exercices de renforcement / approfondissement

- 15 Soient a et b deux nombres réels et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
- $$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; 1], f(x) = ax^2 + 6x - 5 \\ \forall x \in [1; +\infty[, f(x) = \frac{b}{x} - x \end{cases}$$
- Détermine les nombres réels a et b pour que la fonction soit continue sur $\mathbb{R}$.

- 16 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]-\infty; 0], f(x) = -\frac{5}{4}x$$

$$\forall x \in]0; 1[, f(x) = \frac{x^5}{2} - \frac{5x}{5} + 1$$

$$\forall x \in [1; +\infty[, f(x) = \frac{5}{4}x - 1$$

- 1- Étudie la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.
- 2- Détermine la fonction dérivée f' de f .
- 3- Étudie la dérivabilité de f' sur $\mathbb{R}$.

- 17 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 3}$$

- 1- Calcule les dérivées successives f' , f'' et de la fonction f sur $\mathbb{R} \setminus \{1; 3\}$.
- 2- a) Détermine deux nombres réels a et b tels que, pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{1; 3\}$, on ait :

$$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-3}$$

- b) Utilise cette expression pour retrouver les résultats de la question 1).

- 18 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + \sqrt{1+x^2}$$

- 1- Démontre que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout nombre réel x :
- $$f'(x)\sqrt{1+x^2} = f(x).$$
- 2- Dédus que f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout nombre réel x :
- $$(1+x^2)f''(x) + xf'(x) - f(x) = 0.$$

- 19 Soient f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + \frac{2}{x}} + 1 \text{ et } (C) \text{ sa courbe représentative}$$

dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$ (unité graphique 1cm).

- 1- a) Détermine l'ensemble de définition D de la fonction f .
- b) Étudie les variations de g sur D .
- 2- a) Démontre que, pour x appartenant à $] -\infty; 1]$

$$\frac{g(x) - g(-1)}{x+1} = \sqrt{\frac{x^2 - x + 2}{x(x+1)}}$$

- b) Dédus-en que f n'est pas dérivable en 1
- c) Interprète graphiquement le résultat.

Exercice 45 : Inégalité de Bernoulli.

- 20 n est un nombre entier fixé et t un nombre réel positif.

On note (B_n) l'inégalité : $(1+t)^n \geq 1+nt$.

- 1- Vérifie que (B_0) et (B_1) sont vraies.

- 2- On suppose $n \geq 2$ et on considère sur l'intervalle $[0; +\infty[$ la fonction φ définie par :
- $$\varphi : t \mapsto (1+t)^n - 1 - nt.$$

- a) Calcule $\varphi'(t)$ et $\varphi''(t)$
- b) Démontre que, pour tout nombre réel t appartenant à $[0; +\infty[$, on a : $\varphi'(t) \geq 0$
- c) Dédus-en l'inégalité (B_n) .

- 21 On admet qu'il existe une fonction f définie sur

$$I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \text{ telle que : } f(0) = 0 \text{ et } f'(x) = \sqrt{1-f^2(x)}.$$

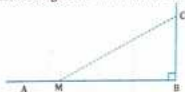
- 1- Détermine les variations et le signe de f sur I .
- 2- Dédus-en les variations de f' sur l'intervalle I sans déterminer la dérivée f'' .
- 3- a) Démontre que : $\forall x \in I, f''(x) = -f(x)$.
- b) Retrouve alors le sens de variation de f' sur I .

- 22 Soit f la fonction numérique de la variable x définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par : $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

- 1- Étudie les variations de f .
 - 2- Soit (Γ_1) la courbe représentative de f dans le plan d'un repère orthonormé $(O; I; J)$.
- a) Détermine une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe (Γ_1) au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$.
 - b) Trace la courbe (Γ_1) et la droite (T) .
 - 3- Sur le même graphique, trace la courbe (Γ_2) courbe symétrique de (Γ_1) dans la symétrie orthogonale d'axe (OI) .
 - 4- Soit $(\Gamma) = (\Gamma_1) \cup (\Gamma_2)$. Démontre que la courbe (Γ) a pour équation cartésienne : $x(x^2 + y^2) - y^2 = 0$.
- La courbe (Γ) est appelée la cissoïde de DIOPHANTE.

- 23 Un randonneur, arrivé au point A, doit terminer sa promenade au point C. S'il suit le sentier, il lui reste à parcourir la distance AB égale à 900 mètres et la distance BC égale à 200 mètres (les chemins $[AB]$ et $[BC]$ étant perpendiculaires).

On se propose de déterminer l'endroit où le randonneur doit quitter le chemin pour mettre le moins de temps possible à rejoindre le point C. On précise que la vitesse du randonneur est constante et égale à 6 km/h sur le sentier, et constante et égale à 5 km/h dans le champ.



Soit M un point situé entre A et B : on pose $AM = x$
1- Démontre que la durée totale, en heures, du parcours $AM + MC$ est :

$$f(x) = \frac{x}{6} + \frac{1}{5} \sqrt{x^2 - 1,8x + 0,85} \text{ avec } 0 \leq x \leq 0,9.$$

- 2- Etudie les variations de la fonction $x \mapsto f(x)$ sur l'intervalle $[0 ; 0,9]$.
3- Réponds au problème posé.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1 ; 2]$ par : $f(x) = \frac{1}{2x - 6}$

- 1- Démontre que la dérivée f' de la fonction f est majorée par $-\frac{1}{8}$ et minorée par $-\frac{1}{2}$.

2- a) Donne un encadrement de $f(x) - f(1)$ où x est un nombre de l'intervalle $[1 ; 2]$.

b) Dédus-en que :

$$\forall x \in [1 ; 2], -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \leq f(x) \leq \frac{1}{8}x - \frac{1}{8}$$

Soit h la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $h(x) = 2x^3 + 9x^2 - 24x + 6$, et (C) sa courbe représentative dans un repère

3- Situation complexe

Des élèves de terminale D de ton établissement veulent organiser un camping.



Ils disposent d'un disque de tissu plastique de rayon 2 mètres. Ils souhaitent fabriquer une tente

orthonormée.

- 1- Calcule les images de -3 ; -2 ; -1 ; 0 et 1 par f .
- 2- Etudie les variations de h et trace sa courbe (C).
- 3- Soit g la restriction de h à l'intervalle $[-4 ; 1]$.
 - a) Démontre que h est une bijection de $[-4 ; 1]$ sur un intervalle J que l'on précisera.
 - b) Calcule $(h^{-1})'(74)$ et trace (C^{-1}) la courbe représentative de la bijection réciproque (h^{-1}) de la fonction h .

Un lapin désire traverser une route de 4 mètres de largeur. Un camion, occupant toute la route, arrive à sa rencontre à la vitesse de 60 km / h. Le lapin décide au dernier moment de traverser, alors que le camion n'est plus qu'à 7 mètres de lui. Son démarrage est foudroyant et on suppose qu'il effectue la traversée en ligne droite au maximum de ses possibilités, c'est-à-dire...30 km / h !

L'avant du camion est représenté par le segment $[CC']$ sur le schéma ci-dessous. Le lapin part du point A en direction de D. Cette direction est repérée par l'angle $\theta = \text{mes}(\widehat{BAD})$ avec θ (en radians).



- 1- Détermine les distances AD et CD en fonction de θ et les temps t_1 et t_2 , mis par le lapin et le camion pour parcourir respectivement les distances AD et CD.
- 2- On pose $f(\theta) = 3,5 + 2 \tan \theta - \frac{1}{\cos \theta}$. Démontre que le lapin aura traversé la route avant le passage du camion si, et seulement si, $f(\theta) > 0$.

ayant la forme d'un cône de révolution dont le volume doit être maximal.

Un des organisateur fait remarquer qu'un homme de taille moyenne (1,6 m) ne pourra pas tenir debout sous cette tente.

Informés de cette sortie, dis si cet organisateur a raison.

On rappelle que le volume d'un cône de révolution

$$\text{est : } V = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$



VI- RENDEZ-VOUS DES CURIEUX !

A quinze ans, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) maîtrise les langues anciennes et s'abreuve de littérature grecque et latine.

Auprès de son père professeur de philosophie morale à l'université de Leipzig, il apprend lathéologie, la logique et la philosophie.

Entre 1663 et 1667, il part étudier les mathématiques à Lénà où il y obtiendra un doctorat. C'est lors de son séjour à Paris de 1672 à 1679, qu'il élabore son calcul différentiel.

Les travaux de Leibniz seront édités dès 1886, et donc bien avant ceux de Newton, c'est pourquoi à cette époque les deux hommes s'étaient vivement opposés, chacun revendiquant la paternité de la découverte.



Notions essentielles :

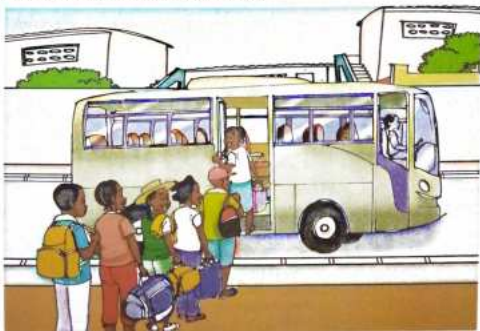
- Notion de primitive ;
- Primitives des fonctions de référence ;
- Primitives et opérations ;
- Primitives des fonctions composées.

SITUATION D'APPRENTISSAGE

Pour une sortie détente pour les fêtes de Noël, les élèves d'une classe de T^hD d'un lycée empruntent un car. Le conducteur roule sur une route bitumée rectiligne à 80 km/h. L'accueil des élèves est prévu dans une heure dans un hôtel et le car a pris du retard. Un élève dit que si leur chauffeur accélère en passant de 80km/h à 90km/h les élèves arriveraient à temps pour l'accueil.

Une discussion s'engage alors entre les élèves.

De retour de leur sortie ils posent le problème à leur professeur de mathématiques qui leur demande d'étudier les fonctions dont on connaît les dérivées.





I- ACTIVITÉS DE DÉCOUVERTE

1- CONNAÎTRE LA DÉFINITION D'UNE PRIMITIVE D'UNE FONCTION CONTINUE

ACTIVITÉ 1

On considère trois fonctions f , F et G définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par :

$$f(x) = 3x - 2, F(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2x + 7 \text{ et } G(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2x - 9$$

- Justifie que F et G sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
- Vérifie que pour tout nombre réel x : $F'(x) = f(x)$ et $G'(x) = f(x)$.
- Détermine une autre fonction H telle que : $H'(x) = f(x)$ pour tout nombre réel x .

Je fais le point de l'activité

Les fonctions F , G et H sont appelées des primitives de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

J'évalue mes acquis



Réponds par vrai ou par faux aux affirmations suivantes :

- La fonction $x \mapsto 5 - \cos x$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto 5x + \cos x + 6$
- La fonction $x \mapsto 6x^2 - 8x + 1$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto 12x - 8$

2- DÉTERMINER LES PRIMITIVES D'UNE FONCTION

ACTIVITÉ 2

Soit F une primitive d'une fonction f sur un intervalle K .

- Démontre que pour tout nombre réel c , la fonction $x \mapsto F(x) + c$ est une primitive de f sur K .
- Démontre que toute primitive de f sur K est de la forme : $x \mapsto F(x) + c$ où c est un nombre réel.

Je fais le point de l'activité

Si la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle I , alors, pour tout nombre réel k , la fonction $x \mapsto F(x) + k$ est une primitive sur I de f .

Toutes les primitives de f sur I sont de la forme : $x \mapsto F(x) + k$ où $k \in \mathbb{R}$.

J'évalue mes acquis



Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x - 5$

- Détermine une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
- Détermine toutes les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

3- DÉTERMINER LA PRIMITIVE D'UNE FONCTION QUI VÉRIFIE UNE CONDITION DONNÉE

ACTIVITÉ 3

Soit F une primitive d'une fonction f sur un intervalle K . x_0 et y_0 sont deux nombres réels.

- Soit G une primitive de f sur K qui prend la valeur y_0 en x_0 c'est-à-dire $G(x_0) = y_0$.
Pour tout nombre x de K , exprime $G(x)$ en fonction de $F(x)$; $F(x_0)$ et y_0 .
- Donne le nombre de fonction G qu'on peut trouver.

Je fais le point de l'activité

Soit f une fonction admettant des primitives sur un intervalle K .

Etant donné deux nombres réels x_0 et y_0 , avec x_0 appartenant à K , il existe une unique primitive G de f sur K qui prend la valeur y_0 en x_0 .

J'évalue mes acquis



Énoncé 1

Réponds par Vrai ou par Faux aux affirmations suivantes :

- 1- La fonction $x \mapsto \frac{1}{4}x^4 - 13$ est la primitive de la fonction $x \mapsto x^3$ qui prend la valeur 9 en 2.
- 2- La fonction $x \mapsto 1 + \cos x$ est la primitive de la fonction $x \mapsto -\sin x$ qui prend la valeur 0 en π .

Énoncé 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 1$.

Détermine la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur -2 en 3.

4- CONNAÎTRE LES PRIMITIVES DES FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

Activité 4

- 1- Calcule la dérivée sur $\mathbb{R}$ de la fonction : $x \mapsto c$, où $c \in \mathbb{R}$
- 2- Calcule la dérivée sur $\mathbb{R}$ de la fonction : $x \mapsto ax$, où $a \in \mathbb{R}$
- 3- Calcule la dérivée sur $]0; +\infty[$ de la fonction : $x \mapsto \frac{1}{r+1}x^{r+1}$, $r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$.
- 4- Calcule la dérivée sur $]0; +\infty[$ de la fonction : $x \mapsto \frac{-1}{(r-1)x^{r-1}}$, $r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$
- 5- Calcule la dérivée sur $]0; +\infty[$ de la fonction : $x \mapsto 2\sqrt{x}$
- 6- Calcule la dérivée sur $\mathbb{R}$ de la fonction : $x \mapsto \sin x$
- 7- Calcule la dérivée sur $\mathbb{R}$ de la fonction : $x \mapsto -\cos x$
- 8- Calcule la dérivée sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ de la fonction : $x \mapsto \tan x$
- 9- Recopie et complète le tableau suivant :

Fonction F	Une primitive de f	sur l'intervalle
$x \mapsto 0$		$\mathbb{R}$
$x \mapsto a$ ($a \in \mathbb{R}$)		$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^r$ ($r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$)		$] -\infty; 0[$ ou $] 0; +\infty[$
$x \mapsto \frac{1}{x^r}$ ($r \in \mathbb{Q} \setminus \{0; 1\}$)		$] -\infty; 0[$ ou $] 0; +\infty[$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$		$] 0; +\infty[$
$x \mapsto \sin x$		$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos x$		$\mathbb{R}$
$x \mapsto 1 + \tan^2 x$		$\left]-\frac{\pi}{2} + k; \frac{\pi}{2} + k\right[$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Je fais le point de l'activité

Le tableau ci-dessus est le tableau des primitives des fonctions de référence.

J'évalue mes acquis



Choisis la bonne réponse en écrivant le numéro de la ligne suivi de la lettre qui convient

No	Enoncé	A	B	C
1	Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto -2$ est la fonction...	$x \mapsto -2 + x$	$x \mapsto -2x$	$x \mapsto \frac{1}{2}x - 2$
2	Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction nulle est la fonction...	$x \mapsto 3$	$x \mapsto x(x-1) - x^2 + 1$	$x \mapsto x(x-1) - x^2$
3	Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \frac{3}{2}$ est la fonction...	$x \mapsto \frac{3}{8}x^2 + x$	$x \mapsto \frac{3}{4}x^2 + 5$	$x \mapsto \frac{3}{8}x^2$
4	Une primitive sur $] -\infty ; 0[$ de la fonction $x \mapsto \frac{-1}{x^2}$ est la fonction...	$x \mapsto \frac{1}{x+1}$	$x \mapsto \frac{1}{x} - 1$	$x \mapsto 1 - \frac{1}{x}$
5	Une primitive sur $]0 ; +\infty[$ de l'inverse de la fonction racine carrée est la fonction...	$x \mapsto 2\sqrt{x} - 1$	$x \mapsto \frac{2}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$
6	Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction cosinus est la fonction...	$x \mapsto 1 + \sin x$	$x \mapsto -\sin x$	$x \mapsto \cos x$
7	Une primitive sur $\left] \frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$ ou $x \mapsto 1 + \tan^2 x$ est la fonction...	$x \mapsto 1 - \tan x$	$x \mapsto \tan x$	$x \mapsto -\tan x$

5- CONNAÎTRE LA PRIMITIVE RELATIVE À LA COMPOSÉE DE DEUX FONCTIONS

Activité 5

u une fonction dérivable sur un intervalle K et v une fonction dérivable sur un intervalle contenant $u(K)$. Calcule sur K la dérivée de $v \circ u$.

Je fais le point de l'activité

La fonction $v \circ u$ est une primitive de la fonction $u' \times v' \circ u$

J'évalue mes acquis



Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x \cos(x^2 + 5)$. Détermine sur $\mathbb{R}$ une primitive F de la fonction f .

6- CONNAÎTRE LES PROPRIÉTÉS RELATIVES AUX PRIMITIVES ET AUX OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONS :

ACTIVITÉ 6

u et v sont deux fonctions dérivables sur l'intervalle K .

1- Calcule sur K la dérivée de $u + v$.

2- Calcule sur K la dérivée de λu , $\lambda \in \mathbb{R}$.

3- Si u ne s'annule pas sur K alors calcule la dérivée de $\frac{1}{r+1}u^{r+1}$, $r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$.

4- Si u ne s'annule pas sur K alors calcule la dérivée de $\frac{-1}{(r-1)u^{r-1}}$, $r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$.

5- Si u est strictement positive sur K alors calcule la dérivée de $2\sqrt{u}$.

6- Calcule sur K la dérivée de $-\cos u$.

7- Calcule sur K la dérivée de $\sin u$.

8- Calcule sur K la dérivée de $\tan u$.

9- Recopie et complète le tableau ci-dessous

Fonction f	Une primitive sur l'intervalle k
λu , $\lambda \in \mathbb{R}$	
$u' + v'$	
$u' \times u^r$, ($r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$)	
$\frac{u'}{u}$, ($r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$)	
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	
$u' \cos u$	
$u' \sin u$	
$u'(1 + \tan^2 u)$ ou $\frac{u'}{\cos^2 u}$	

Je fais le point de l'activité

On obtient le tableau des primitives des fonctions ci-dessus.

J'évalue mes acquis

F et G sont deux fonctions dérivables sur K de dérivées respectives f et g .
Ecris le numéro de la ligne suivi de la lettre correspondant à l'affirmation juste.

No	Énoncé	A	B	C
1	Une primitive sur K de la fonction $\frac{f}{2\sqrt{f}}$ est :	$\sqrt{f}$	$2\sqrt{f}$	$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{f}}$
2	Une primitive sur K de la fonction $g \cos(G)$ est :	$\cos(G)$	$-\sin(G)$	$\sin(G)$
3	Une primitive sur K de la fonction $f \times (g \circ F)$ est :	$F \circ G$	$G \circ F$	FG
4	Une primitive sur K de la fonction $f \times F^7$ est :	$\frac{1}{8} F^8$	$\frac{1}{7} F^6$	$\frac{1}{7} F^8$
5	Une primitive sur K de la fonction $f \circ g$ est :	$\frac{f}{g}$	$F - G$	$F + G$
6	Une primitive sur K de la fonction $\frac{g}{G}$ est :	$\frac{-1}{6G^6}$	$\frac{-1}{4G^4}$	$\frac{-1}{4G^3}$

II- RÉSUMÉ DE COURS



1- PRIMITIVE D'UNE FONCTION CONTINUE SUR UN INTERVALLE I

a) DÉFINITION

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

On appelle **primitive de f** sur I la fonction dérivable F sur I telle que : pour tout nombre réel x de I , $F'(x) = f(x)$.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3x^2$.

La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x^3$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ car F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x , $F'(x) = f(x)$.

La fonction $G : x \mapsto x^3 + 20$ est aussi une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b) Condition d'existence de primitives

PROPRIÉTÉS

Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

2- ENSEMBLE DES PRIMITIVES D'UNE MÊME FONCTION

PROPRIÉTÉS

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et F une primitive de f sur I .

- Pour tout nombre réel k , la fonction $x \mapsto F(x) + k$ est aussi une primitive de f sur I .
- Toute primitive de f sur I est de la forme : $x \mapsto F(x) + k$, $k \in \mathbb{R}$.

Exemple

Soit f la fonction définie $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}x - 5$.

La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{1}{4}x^2 - 5x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Donc l'ensemble des primitives de f sur $\mathbb{R}$ est l'ensemble des fonctions de la forme :

$x \mapsto \frac{1}{4}x^2 - 5x + k$ où k un nombre réel.

3- PRIMITIVE D'UNE FONCTION VÉRIFIANT UNE CONDITION INITIALE

PROPRIÉTÉS

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I .

Quels que soient x_0 de I et y_0 de $\mathbb{R}$, il existe une unique primitive de f sur I qui prend la valeur y_0 en x_0 .

Exemple

Déterminons la primitive F sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto 3x^2 - x$ qui prend la valeur -1 en 2 .

Cette primitive F de f sur $\mathbb{R}$ est de la forme $F(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + k$, $k \in \mathbb{R}$ et vérifie la condition initiale

$F(2) = -1$.

$F(2) = -1$ signifie que : $8 - 2 + k = -1$ donc $k = -7$.

Donc $F: x \mapsto x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 7$ est l'unique primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur -1 en 2 .

4- PRIMITIVES DES FONCTIONS DE RÉFÉRENCE.

Fonction f	Une primitive de f	sur l'intervalle
$x \mapsto 0$	$x \mapsto k, (k \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto a (a \in \mathbb{R})$	$x \mapsto ax$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^r (r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\})$	$x \mapsto \frac{1}{r+1}x^{r+1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x^r} (r \in \mathbb{Q} \setminus \{0; 1\})$	$x \mapsto \frac{1}{(r-1)x^{r-1}}$	$] -\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \tan^2 x + 1$ ou $x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$	$x \mapsto \tan x$	$]\frac{\pi}{2} + k; \frac{\pi}{2} + k[(k \in \mathbb{Z})$

Exemples

Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto -8$ est la fonction $x \mapsto -8x$

Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto x^3$ est la fonction $x \mapsto \frac{1}{4}x^4$

Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^3}$ est la fonction $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$

5- PRIMITIVE DE LA COMPOSÉE DE DEUX FONCTIONS

PROPRIÉTÉS

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle K et v une fonction dérivable sur un intervalle contenant $u(K)$ alors la fonction $u' \times v' \circ u$ admet pour primitive sur K , la fonction $v \circ u$

Exemple

Déterminons une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par : $f(x) = 6x \sin(3x^2)$.

Posons $u(x) = 3x^2$ et $v(x) = -\cos x$. u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x , $u'(x) = 6x$; $v'(x) = \sin x$. On peut alors écrire : $f(x) = u'(x) v' \circ u(x)$ ou $f = u' \circ v \circ u$.

On en déduit qu'une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie par : $F(x) = -\cos(3x^2)$

6- PRIMITIVES ET OPÉRATIONS

PROPRIÉTÉS

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle K et v une fonction dérivable sur un intervalle contenant $u(K)$ alors la fonction $u' \times v' \circ u$ admet pour primitive sur K , la fonction $v \circ u$

Fonction f	$\lambda u'$, $\lambda \in \mathbb{R}$	$u' + v'$	$u' \times u'$, $(r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\})$	$\frac{u'}{u'}$ ($u \neq 0$ et $r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$)	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$ ($u > 0$)	$u' \cos u$	$u' \sin u$
Une primitive sur l'intervalle I	λu	$u + v$	$\frac{1}{r+1}u^{r+1}$	$\frac{-1}{(r-1)u^{r-1}}$	$2\sqrt{u}$	$\sin u$	$-\cos u$

Exemples

- 1- Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction : $x \mapsto 7x^3$ est la fonction : $x \mapsto 7(\frac{1}{4}x^4)$
- 2- Une primitive sur $]0; +\infty[$ de la fonction : $x \mapsto 5 + \frac{1}{x^2} - \frac{6}{\sqrt{x}}$ est la fonction : $x \mapsto 5x - \frac{1}{x} - 12\sqrt{x}$
- 3- Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction : $x \mapsto 2x(x^2 + 5)^3$ est la fonction : $x \mapsto \frac{1}{4}(x^2 + 5)^4$
- 4- Une primitive sur $]0; +\infty[$ de la fonction : $x \mapsto \frac{6x^2}{\sqrt{x^3}}$ est la fonction : $x \mapsto 2\sqrt{x^3}$

III-**MÉTHODE**

- 1- Pour déterminer une primitive d'une fonction f sur un intervalle I :

On commence par justifier son existence en s'assurant que f est continue sur I , puis on cherche à reconnaître une formule de dérivation.

- 2- Pour déterminer toutes les primitives d'une fonction sur un intervalle I :

On en trouve une et on lui ajoute une constante arbitraire.

- 3- Pour déterminer l'unique primitive F d'une fonction f sur un intervalle I telle que $F(x_0) = y_0$:

- On trouve une primitive F de f sur l'intervalle I .
- On écrit F sous la forme $x \mapsto F(x) + k$, avec k un nombre réel.
- On calcule la constante k pour que la condition initiale $F(x_0) = y_0$ soit vérifiée.

- 4- Pour justifier qu'une fonction F donnée est une primitive sur un intervalle I d'une fonction f donnée :

On justifie que F est dérivable sur I et que, pour tout nombre réel x de I , $F'(x) = f(x)$.

IV-**SAVOIR-FAIRE****Savoir-faire 1 - Déterminer les primitives d'une fonction continue****Exercice**

Dans chacun des cas suivants, détermine les primitives F de la fonction f sur l'intervalle I indiqué.

a) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + x - 6$, $I =]0; 2[$; b) $f(x) = -\frac{3}{x^2}$, $I =]-\infty; 0[$

SOLUTION COMMENTÉE

- a) La fonction f est continue sur l'intervalle I , donc les primitives de f sur I sont de la forme

$$F(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{2}x^2 - 6x + k \text{ où } k \text{ est un nombre réel.}$$

- b) La fonction f est continue sur l'intervalle I , donc les primitives de f sur I sont de la forme

$$F(x) = \frac{3}{2x} + k \text{ où } k \text{ est un nombre réel.}$$

Savoir-faire 2

Déterminer la primitive d'une fonction qui prend la valeur donnée en un point donné.

Énoncé

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2$
Détermine la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en -1 .

Solution commentée

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, donc F existe et pour tout nombre réel x , on a : $F(x) = x^4 - 2x^3 + 2x + k$ où k est un nombre réel.

On cherche le nombre réel k tel que $F(-1) = 0$.

$$F(-1) = 0 \Leftrightarrow 1 + 2 - 2 + k = 0$$

$$F(-1) = 0 \Leftrightarrow k = -1$$

Conclusion : pour tout nombre réel x , $F(x) = x^4 - 2x^3 + 2x - 1$.

Savoir-faire 3

Déterminer les primitives d'une fonction du type : $v' \times (u' \cdot v)$; $\frac{u'}{u}$;

($r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$; $u' \times u^r$, ($m \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$)) ; où u et v sont dérivables sur un intervalle I .

Énoncé

Dans chacun des cas suivants, détermine une primitive F de la fonction f sur l'intervalle I indiqué.

a) $f(x) = (\pi x - 1) \cos(\frac{\pi}{2}x^2 - x)$, $I = [0 ; 1]$; b) $f(x) = \frac{5x}{(5x^2 + 6)^3}$, $I = [0 ; 3]$.

c) $f(x) = 12x(2x - 1)(8x^3 - 6x^2 + 1)^4$, $I = \mathbb{R}$.

Solution commentée

a) La fonction f est continue sur l'intervalle I . Elle est de la forme $= v' \times (u' \cdot v)$ avec

$$u'(x) = \cos x \text{ et } v(x) = \frac{\pi}{2}x^2 - x, \text{ où } u \text{ et } v \text{ sont deux fonctions dérivables sur } I.$$

Une primitive sur I d'une fonction de type $v' \times (u' \cdot v)$ est la fonction $u \cdot v$ avec $u(x) = \sin x$ et $v(x) = \frac{\pi}{2}x^2 - x$.

Ainsi : pour tout nombre réel x de I , $F(x) = (u \cdot v)(x) = \sin(\frac{\pi}{2}x^2 - x)$.

Autre méthode

La fonction f est continue sur l'intervalle I . Elle est de la forme $f = u' \cos u$ avec

$$u(x) = \frac{\pi}{2}x^2 - x \text{ et } u'(x) = \pi x - 1.$$

Une primitive sur I d'une fonction de type $u' \cos u$ est la fonction $\sin u$ donc pour tout nombre réel x de I ,

$$F(x) = \sin(u(x)) = \sin(\frac{\pi}{2}x^2 - x).$$

b) La fonction f est continue sur l'intervalle I . Elle est de la forme $f = \frac{u'}{u^r}$, ($r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$) avec $u'(x) = 10x$, $u(x) = 5x^2 + 6$ et $r = 3$.

Une primitive sur I d'une fonction de type $\frac{ku'}{u^r}$, $k \in \mathbb{R}$ est la fonction $\frac{k}{(3-1)u^{r-1}} = \frac{k}{2u}$ avec $u(x) = 5x^2 + 6$

Donc : pour tout nombre réel x de I , $F(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{(5x^2 + 6)^2}$

c) La fonction f est continue sur l'intervalle I . Elle est de la forme $f = u' \times u^m$, ($m \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$) avec

$$u'(x) = 24x^2 - 12x = 12x(2x - 1), u(x) = 8x^3 - 6x^2 + 1 \text{ et } r = 4.$$

Une primitive sur I d'une fonction de type $u' \times u^k$ est la fonction $\frac{1}{k+1} u^{k+1} = \frac{1}{5} u^5$

Donc : pour tout nombre réel x de I , $F(x) = -\frac{1}{5} \times (8x^3 - 6x^2 + 1)^5$.

V- JE M'EXERCE



I- Exercices de fixation/ Application

Connaître la définition d'une primitive d'une fonction continue.

1 Réponds par vrai ou par faux aux affirmations suivantes :

- a) Toute fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ admet une primitive sur $\mathbb{R}$.
- b) Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur cet intervalle.
- c) La fonction inverse admet des primitive sur $[-1; 0]$.
- d) La fonction valeur absolue admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

2 Réponds par vrai ou par faux aux affirmations suivantes :

- a) Les fonctions $x \mapsto x(x-3)$ et $x \mapsto \left(x - \frac{3}{2}\right)^2$ sont deux primitives sur $\mathbb{R}$ de la même fonction.
- b) Si f est une fonction continue sur un intervalle I , alors elle admet une primitive F qui s'annule sur I .
- c) Si une fonction est continue sur $\mathbb{R}^*$ alors elle admet une primitive sur $\mathbb{R}^*$.
- d) Deux primitives sur un intervalle I d'une même fonction diffèrent d'une constante réelle.

3 Soient F et G deux primitives d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.
Sachant que $F(-1) = 5$, $F(2) = -5$ et $G(2) = 7$, détermine l'image de -1 par G .

4 Dans chacun des cas suivants, indique si les fonctions f et g suivantes sont les primitives sur $[-1; 1]$ d'une même fonction sans calculer leur dérivée.

- 1- $f(x) = (x+x^3)(x-2)$, $g(x) = x^2 + x$;
- 2- $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 7}{x+2}$, $g(x) = \frac{2x^2 - 3x + 5}{x+2}$;

Connaître les primitives des fonctions de référence

5 Pour chaque cas, détermine une primitive de la fonction f sans se soucier de l'intervalle de continuité.

- a) $f(x) = 0$; b) $f(x) = \sqrt{2}$; c) $f(x) = \cos x$
- d) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; e) $f(x) = 3x$; f) $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

6 Détermine une primitive sur l'intervalle $]0; 1]$ de chacune des fonctions suivantes :

- a) $f(x) = x - 3$; b) $g(x) = \frac{8}{x^2}$;
- c) $h(x) = \sin x$; d) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}$; e) $f(x) = 1 + \tan x$.

Connaître les primitives des fonctions de type :

- $\bullet u' + v$; $\lambda u'$, $\lambda \in \mathbb{R}$;
- $\bullet v' \times (u' + v)$; $\frac{u'}{\sqrt{u}}$; $u' \cos u$; $u' \sin u$; $\frac{u'}{u^r}$ ($r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$) ;
- $\bullet u' \times u^m$ ($m \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$) où u et v sont deux fonctions dérivables

7 f et g sont deux fonctions strictement positives et dérivables sur un intervalle I de primitives respectives de F et G .

Détermine une primitive de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle I .

- a) $f + g$; b) $2022g$; c) $g \times (f \circ G)$; d) $\frac{f}{\sqrt{F}}$
- e) $g \cos G$; f) $f' \times f^{21}$; i) $\frac{f}{G}$.

8 Détermine une primitive F sur un intervalle I de la fonction f donnée sans se soucier de sa continuité sur I .

- a) $f(x) = x - \frac{2}{x^2}$; b) $f(x) = \sqrt{13}(x^2 + \pi x)$;
- c) $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2}}$; d) $f(x) = x^2 \cos(x^3)$;
- e) $f(x) = -\frac{3}{x^{17}}$; i) $f(x) = \cos x \sin^2 x$

Déterminer l'ensemble des primitives d'une fonction continue.

9 Détermine les primitives sur l'intervalle I de chacune des fonctions suivantes :

- a) $f(x) = 3 \sin x + 5 \cos x$, $I = \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$

$$b) f(x) = 1 + x + \tan^2 x, I =]0; +\infty[$$

$$c) f(x) = \sin x \cos^2 x, I = \mathbb{R}$$

$$d) f(x) = \frac{1}{6\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4x+9}}; I =]0; +\infty[$$

Déterminer les primitives d'une fonction en utilisant les primitives des fonctions de référence.

13 Détermine une primitive sur l'intervalle $]0; +\infty[$ des fonctions f suivantes :

$$a) f(x) = 3x^2 - 5x - 6; \quad b) f(x) = (2x - 1)(x^2 + 2x);$$

$$c) f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x} - \frac{5x^3 + 7x}{6}; \quad d) \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} + \frac{2}{x^4}$$

14 Détermine une primitive de la fonction f sur l'intervalle I .

$$a) f(x) = x(2x - 7) + 7, I = \mathbb{R}$$

$$b) f(x) = 3x^4 - \frac{1}{2x^2} + \frac{3}{x^3}, I =]0; +\infty[$$

$$c) f(x) = \frac{5x^4 + 2x^4 - 3x + 6}{4x^2}, I =]0; +\infty[$$

$$d) f(x) = \frac{1}{2}(2 - \sin x + \cos x) + \tan^2 x, I = [0; 1]$$

Déterminer la primitive de la fonction qui prend une valeur donnée en un point donné.

15 Détermine, dans chaque cas, la primitive F de la fonction f sur l'intervalle I , vérifiant la condition donnée.

$$1- f(x) = 3x - 1, I = \mathbb{R}, F(-2) = -1$$

$$2- f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 4x + \frac{1}{4}, I = \mathbb{R}, F(1) = 0$$

$$3- f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{4}{3x^4} + \frac{2}{\sqrt{x}}, I =]0; +\infty[, F(1) = 0$$

$$4- f(x) = \frac{x}{2} - 1 - \tan^2 x, I = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

16 Détermine la primitive de la fonction f sur l'intervalle I qui prend la valeur y_0 en x_0 .

$$1- f(x) = x^3 - 2x^2 - x, I = \mathbb{R}, x_0 = -2, y_0 = 1$$

$$2- f(x) = \frac{2}{3\sqrt{x}} + 2, I =]0; +\infty[, x_0 = 4, y_0 = -5$$

$$3- f(x) = \frac{2}{x^2} - 2x^3 + 3, I =]+\infty; 0[, x_0 = -1, y_0 = 2$$

Déterminer les primitives d'une fonction du type $u' + v'$ où u et v sont des fonctions dérivables

17 Détermine une primitive F sur l'intervalle I des fonctions f données.

$$a) f(x) = 6x^3 - \frac{1}{x^4}, I =]0; +\infty[$$

$$b) f(x) = \frac{1}{\cos^3 x} - 5x^9, I = \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right[$$

$$c) f(x) = \cos(2x), I =]0; +\infty[$$

Déterminer les primitives d'une fonction du type λu , où u est une fonction dérivable

18 Détermine une primitive F sur l'intervalle I des fonctions f données.

$$1- f(x) = 2022x, I = \mathbb{R}$$

$$2- f(x) = 3\sqrt{2}(x^3 - 6x^2 - 1), I = \mathbb{R}$$

$$3- f(x) = \frac{\pi}{4}x^4 - \frac{2}{\pi}\sin(x), I =]0; +\infty[$$

Déterminer les primitives d'une fonction du type $v' \cdot u$ (ou $u' \cdot v$), où u et v sont des fonctions dérivables

19 Détermine une primitive F sur l'intervalle I des fonctions f données.

$$1- f(x) = \frac{\pi}{2}x \sin(\pi x^2 - 5), I = \mathbb{R}$$

$$2- f(x) = \frac{6x+3}{(x^4+1)^3}, I = \mathbb{R}$$

$$3- f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}, I =]0; +\infty[$$

Déterminer les primitives d'une fonction du type $\frac{u'}{v'}$ où u est une fonction dérivable.

20 Détermine une primitive F sur l'intervalle I des fonctions f données.

$$1- f(x) = \frac{3}{\sqrt{3x-1}}, I = \left]\frac{1}{3}; +\infty\right[$$

$$2- f(x) = -\frac{1}{\sqrt{4-5x}}, I = \left]-\infty; \frac{4}{5}\right[$$

$$3- f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x(x-2)}}, I =]-\infty; 0[$$

$$4- f(x) = \frac{3(x^2+x+1)}{\sqrt{2x^3+3x^2+6x+1}}, I =]0; +\infty[$$

$$5- f(x) = \frac{3x^2 + \sin x}{\sqrt{2x^3 - 3\cos x + 3}}, I =]1; +\infty[$$

$$6- f(x) = \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}, I = \mathbb{R}$$

Déterminer les primitives d'une fonction du type $\frac{u'}{v'}$ ($r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$), où u est une fonction dérivable.

21 Détermine une primitive F sur l'intervalle I des fonctions f données.

$$1- f(x) = \frac{2x+5}{(x^2+5x)^r}, I =]0; +\infty[.$$

$$2- f(x) = \frac{3x^2 + 2}{(x^3 + 2x)^4}, I =]0; +\infty[.$$

$$3- f(x) = \frac{1 - x^2}{(x^3 - 3x + 1)^5}, I = [2; +\infty[.$$

$$4- f(x) = \frac{-15x^2 - 10}{(x^3 + 2x)^4}, I =]-2; 0[.$$

$$5- f(x) = \frac{\cos x}{\sin^3 x}, I =]0; \pi[.$$

$$6- f(x) = \frac{\tan x}{(1 + \tan^2 x)^2}, I = \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$$

$$7- f(x) = \frac{\cos x}{\sin^3 x (1 - \cos^2 x)^6}, I = \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[.$$

Déterminer les primitives d'une fonction du type u^r , $(r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\})$ où u est une fonction dérivable.

15 Détermine une primitive F sur l'intervalle I des fonctions f données.

$$1- f(x) = 2x(x^2 + 3)^4, I = \mathbb{R}$$

$$2- f(x) = (2x + 1)(x^2 + x + 1)^5, I = \mathbb{R}$$

$$3- f(x) = (x^3 - 3x + 4)^5(2x^2 - 2), I = \mathbb{R}$$

$$4- f(x) = \sin x \cos^4 x, I = \mathbb{R}$$

$$5- f(x) = \cos x \sin^3 x, I = \mathbb{R}$$

$$6- f(x) = \tan(3x) + \tan^3(3x), I = \left] -\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6} \right[$$

$$7- f(x) = \frac{\cos x}{\sin^3 x (1 - \cos^2 x)^6}, I = \left] -\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6} \right[$$

Justifier qu'une fonction est une primitive d'une fonction donnée.

16 Soient F et f deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -3x^2 + 4x + 1$ et $F(x) = -x^3 + 2x^2 + x + 3$. Justifie que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

17 Dans chacun des cas ci-dessous, justifie que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle I .

$$1- F(x) = \left(3x + \frac{1}{x}\right)^2, f(x) = 2\left(\frac{9x^4 - 1}{x^3}\right), I =]0; +\infty[$$

$$2- F(x) = \frac{2}{3} \cos^3 x, f(x) = \cos x \sin 2x, I = \mathbb{R}$$

$$3- F(x) = \frac{3x^4 - 10x^3 - 14}{2x^2}, f(x) = \frac{3x^4 - 5x^3 + 14}{x^3}, I =]0; +\infty[$$

2. Exercices de renforcement / approfondissement

18 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+3} \text{ et } F \text{ la primitive de } f \text{ sur } \mathbb{R}$$

s'annulant en 3.

Détermine une équation réduite de la tangente (T) à la courbe représentative de la fonction F au point d'abscisse 3.

19 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{2x+3}{(x-1)^3}$$

1- Détermine deux nombres réels a et b tels que, pour tout nombre réel x différent de 1 :

$$f(x) = \frac{a}{(x-1)^2} - \frac{b}{(x-1)}$$

2- Dédus-en une primitive de f sur l'intervalle $] -\infty; 1[$.

20

1- Démontre que : $\forall x \in \mathbb{R}, \sin^3 x = \sin x - \sin x \cos^2 x$

2- Dédus-en une primitive F de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sin^3 x$.

21 Soient F et G les fonctions définies sur $]0; +\infty[$ par :

$$F(x) = -x^2 + 3x - \frac{4}{x}, G(x) = x(3-x) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{8}{x}\right)$$

1- Vérifie que F et G ne sont pas égales sur $]0; +\infty[$.

2- Démontre que F et G sont deux primitives sur $]0; +\infty[$ d'une même fonction f que l'on précisera.

3- Donne une troisième primitive H de f sur $]0; +\infty[$ différente de F et de G .

22 Soit f la fonction définie sur $] -1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 9}{2(x+1)^2}$$

1- Détermine les deux nombres réels a et b tels que :

$$\forall x \in] -1; +\infty[, f(x) = a + \frac{b}{(x+1)^2}$$

2- Dédus-en la primitive de f sur $] -1; +\infty[$ qui s'annule en 0.

23 Soient F et G les fonctions définies sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$F(x) = \frac{1}{x} \text{ et } \begin{cases} G(x) = \frac{1}{x} - 1 & \text{si } x \in] -\infty; 0[\\ G(x) = \frac{1}{x} + 2 & \text{si } x \in]0; +\infty[\end{cases}$$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = -\frac{1}{x^2}$.

1- Démontre que F et G , restreintes à l'intervalle $] -\infty; 0[$ sont deux primitives de f sur $] -\infty; 0[$

2- Dis si F et G , restreintes à l'intervalle $]0; +\infty[$ sont deux primitives de f sur $]0; +\infty[$.

10 Soient F et G les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = 3 - x + \sqrt{x^2 + 1} \text{ et } G(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$$

- 1- Démontre que : $\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = G'(x)$
- 2- Dédus-en que : $F(x) - G(x)$ égale à une constante que tu détermineras.

11 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$

$$p, r : f(x) = \frac{10}{(2x-1)^2}$$

- 1- Justifie que f admet des primitives sur I .
- 2- Démontre que la fonction $F : x \mapsto \frac{6x-8}{2x-1}$ est une primitive de f sur I .
- 3- Démontre que la fonction

$$G : x \mapsto \frac{-5}{2x-1} \text{ est une autre}$$

primitive de f sur I :

- a) en déterminant la dérivée de G sur I .
- b) en déterminant la fonction $G - F$ sur I .

12 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = |x|$

- a) Justifie que f n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$.
- b) Justifie que f admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

2- Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} F(x) = -\frac{x^2}{2} \text{ si } x \in]-\infty; 0[\\ F(x) = \frac{x^2}{2} \text{ si } x \in]0; +\infty[\end{cases}$$

- a) Étudie la dérivabilité de F sur $\mathbb{R}$.
- b) Conclue si F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Justifie ta réponse.

13 Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle

$$[0; 1] \text{ telle que : } f(0) = \frac{1}{2} \text{ et } f' = -f^2$$

- 1- a) Démontre que f ne s'annule pas sur $[0; 1]$.
- b) Démontre que $\left(\frac{1}{f}\right)$ est constante sur $[0; 1]$.
- 2- Dédus-en la fonction f .

14 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 1 + x + \sqrt{x^2}$$

- 1- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{x+|x|}{2}$
 - a) Justifie que g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$
 - b) Justifie que g est dérivable en 0.

c) Détermine $g'(x)$ pour tout nombre réel x .

- 2- Détermine la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 1.

15 Soient f, g et h les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 \cos x; g(x) = x^2 \sin x \text{ et } h(x) = -2x \cos x.$$

- 1- On pose : $u = g - h$.
Détermine les dérivées des fonctions g, h et u .
- 2- Dédus-en une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

16 Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos x \cos 2x \text{ et } g(x) = \sin x \sin 2x$$

- 1- Vérifie que la fonction $f - g$ s'écrit sous la forme $\cos(u)$, où u est une fonction que l'on précisera. Dédus-en une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f - g$.
- 2- Détermine une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f + g$.
- 3- Dédus-en les primitives sur $\mathbb{R}$ des fonctions f et g .

17 Un point mobile M , fixé à un ressort, est soumis à une accélération instantanée :

$$a(t) = 10 \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$$

- 1- Sachant qu'à l'instant $t = 0$ la vitesse instantanée est nulle, exprime $v(t)$ en fonction de t .
- 2- Sachant qu'à l'instant $t = 0$ le point M est à l'origine O , détermine la loi horaire du mouvement.

18 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

et F l'unique primitive de f qui vérifie la condition $F(0) = 0$.

- 1- a) Démontre que la fonction $x \mapsto -F(-x)$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
- b) Dédus-en que F est une fonction impaire.
- 2- Soit g la fonction définie sur l'intervalle

$$]0; +\infty[\text{ par } g(x) = F\left(\frac{1}{x}\right).$$

a) Démontre que g est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

b) Dédus-en que, pour tout nombre réel strictement positif : $F(x) = 2F(1) - F\left(\frac{1}{x}\right)$ et que la fonction F admet une limite finie en $+\infty$.

- 3- On désigne par h la fonction définie sur l'intervalle $\left] \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ par $h(x) = F(\tan x)$.

- a) Détermine la fonction dérivée de h .
- b) Dédus-en que, pour tout nombre réel x , $h(x) = x$.
- c) Calcule $F(1)$ et déduis-en la valeur de L .

3. Situation complexe

15 Pour participer à une cérémonie de remise de prix à l'INPHB de Yamoussoukro, les élèves d'une classe de 1^{re} D empruntent un car à 8 heures à Gagnoa. Le conducteur du car roule à une vitesse moyenne de 70 km/h pendant vingt minutes. A ce moment précis un élève lui demande de rouler plus vite car la cérémonie d'ouverture est prévue pour 10 heures alors que l'INPHB est située à 180 km de Gagnoa.

Le chauffeur maintient alors une accélération constante pendant une minute et atteint 90 km/h,

puis décide de rouler à cette vitesse constante jusqu'à l'arrivée.

Un débat s'engage alors entre les élèves. Un groupe soutient qu'ils seront à l'INPHB avant l'ouverture de la cérémonie tandis qu'un autre groupe soutient qu'à cette allure ils rateront la cérémonie d'ouverture. Un élève de la classe vous sollicite pour départager les deux groupes.

Dis si les élèves du car arriveront avant la cérémonie d'ouverture.



VI-

RENDEZ-VOUS DES CURIEUX !

Des primitives introuvables !

Il existe certaines fonctions dont les primitives ne peuvent s'exprimer à l'aide des fonctions que nous connaissons (polynômes, fractions rationnelles, trigonométrie, exponentielles, logarithme, ... etc.)

Notions essentielles :

Définition et propriétés algébriques de la fonction logarithme népérien;

- Etude et représentation graphique de la fonction $\ln$;
- Résolution d'équations, d'inéquations et de systèmes faisant intervenir $\ln$;
- Limites de références de la fonction logarithme népérien
- Etude et représentation graphique des fonctions du type : $\ln u$ et $\ln|u|$
- Logarithme décimal
- Logarithme de base a , $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$

SITUATION D'APPRENTISSAGE

Lors d'une table ronde organisée par le club Mathématiques d'un lycée sur les fonctions, tes camarades de terminale et toi êtes surpris d'apprendre qu'il existe des fonctions dont le but est de simplifier le calcul d'un produit en le ramenant à une somme.

Vous décidez alors de faire des recherches sur de telles fonctions.





I- ACTIVITÉS DE DÉCOUVERTE

1- DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES DE LA FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

1.1- Connaître la définition de la fonction logarithme népérien et les conséquences immédiates

Activité 1

Soit la fonction $f:]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

- Justifie que la fonction f admet des primitives sur $]0; +\infty[$.
- Justifie qu'il existe une unique primitive G de f sur $]0; +\infty[$ qui s'annule en 1.

Je fais le point de l'activité

- La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ admet une unique primitive sur $]0; +\infty[$ qui s'annule en 1.

Cette unique primitive est appelée fonction logarithme népérien et est notée $\ln$.

- La fonction logarithme népérien est définie sur $]0; +\infty[$.
- $\ln(1) = 0$.
- Pour tout x élément de $]0; +\infty[$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

J'évalue mes acquis



Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

N°	Affirmations	Réponses
1	La fonction logarithme népérien est une primitive sur $\mathbb{R}^*$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$	
2	Le logarithme népérien de x est noté $\log(x)$	
3	La fonction logarithme népérien est définie sur $]0; +\infty[$	
4	$\ln(1) = 0$.	
5	$\forall x \in]0; +\infty[, \ln'(x) = \frac{1}{x}$	

1.2- Déterminer le signe de la fonction $x \mapsto \ln x$

Activité 2

- Détermine le sens de variation de la fonction $x \mapsto \ln x$ sur $]0; +\infty[$
- Détermine le signe de $\ln x$ pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0; 1[$.
- Détermine le signe de $\ln x$ pour tout nombre réel x de l'intervalle $]1; +\infty[$.

Je fais le point de l'activité

- Si $x \in]0; 1[$, $\ln x < 0$ et si $x \in]1; +\infty[$, $\ln x > 0$.

J'évalue mes acquis



Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

N°	Affirmations	Réponses
1	La fonction logarithme népérien est définie sur $\mathbb{R}^*$.	
2	$\ln(0,001) < 0$	
3	si $x \in]1; +\infty[$, alors $\ln x \geq 0$.	

1.2- Connaître les propriétés algébriques de la fonction logarithme népérien

ACTIVITÉ 3 (PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE)

Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \ln(ax)$ où a est un nombre réel strictement positif.

1- On pose, pour tout x élément de $]0; +\infty[$, $v(x) = ax$ et $u(x) = \ln x$.

Vérifie que : $\forall x \in]0; +\infty[, f(x) = (u \circ v)(x)$.

2- En appliquant la formule de la dérivée de la composée de deux fonctions, détermine $f'(x)$, pour tout x élément de $]0; +\infty[$.

3- a) Dédus - en que les fonctions f et u sont des primitives sur $]0; +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$.

b) Dédus qu'il existe une constante c telle que : $\forall x \in]0; +\infty[, f(x) = u(x) + c$.

4- Calcule $f(1)$ puis déduis que : pour tous éléments a et x de $]0; +\infty[, \ln(ax) = \ln x + \ln a$.

Je fais le point de l'activité

Pour tous nombres réels a et b strictement positifs, on a : $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

J'évalue mes acquis



1 Complète les pointillés par le nombre qui convient :

a) $\ln(33) = \ln(3) + \dots$ b) $\ln(2) + \ln(7) = \dots$

2 Dis si la proposition ci-dessous est correcte.

Soit x et y deux nombres strictement positifs. On a : $\ln(xy) = \ln x \times \ln y$.

ACTIVITÉ 4

a et b sont des nombres réels strictement positifs.

1- Complète les pointillés ci-dessous pour obtenir la propriété fondamentale de $\ln$.

On a : $\ln(ab) = \dots$

2- Remplace a par $\frac{1}{b}$ dans la propriété fondamentale puis détermine $\ln\left(\frac{1}{b}\right)$

3- Remplace b par $\frac{1}{b}$ dans la propriété fondamentale puis détermine $\ln\left(\frac{a}{b}\right)$

4 a) Remplace successivement b par a , a^2 et a^3 dans la propriété fondamentale puis détermine $\ln(a^2)$, $\ln(a^3)$ et $\ln(a^4)$.

b) En écrivant que $a^n = a \times a \times \dots \times a$ (n facteurs égaux au nombre a), justifie que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ln(a^n) = n \ln a$.

c) Démontre que : $\forall p \in \mathbb{Z}, \ln(a^p) = p \ln a$.

d) Démontre que : $\forall r \in \mathbb{Q}, \ln(a^r) = r \ln a$.

(On pourra poser : $r = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}^*$ et calculer : $\ln\left[(a^{\frac{1}{q}})^p\right]$. Dédus-en $\ln(\sqrt[q]{a})$).

Je fais le point de l'activité

Pour tous nombres réels a et b strictement positifs et pour tout nombre rationnel, on a :

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a; \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

$$\ln a^r = r \ln a; \text{ En particulier : } \ln \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \ln a$$

J'évalue mes acquis



1- Exprime chacun des nombres ci-dessous en fonction de $\ln 2$.

a) $\ln 16$; b) $\ln\left(\frac{1}{64}\right)$; c) $\ln \sqrt[8]{2}$; d) $\ln\left(\frac{\sqrt[2]{2}}{2}\right)$.

2- Exprime chacun des nombres ci-dessous en fonction de $\ln 3$ et $\ln 5$.

a) $\ln 45$; b) $\ln\left(\frac{3}{25}\right)$; c) $\ln(15\sqrt{3})$

2- ETUDE ET REPRESENTATION GRAPHIQUE DE LA FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . On note (C) la courbe représentative de la fonction $\ln$ dans le repère (O, I, J) .

2.1 Connaître le sens de variation, les limites aux bornes de l'ensemble de définition et la représentation graphique de la fonction $\ln$

Activité 5

Soit la fonction $\ln:]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \ln x$

- a) Détermine $\ln'(x)$ pour tout x élément de $]0; +\infty[$.
- b) Dédus-en le sens de variation de la fonction $\ln$.
- 2- Justifie que la fonction $\ln$ n'est pas majorée. (On pourra raisonner par l'absurde).
- 3- Dédus des questions précédentes que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$.
- 4- En posant : $X = \frac{1}{x}$ et en utilisant : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$, détermine $\lim_{X \rightarrow 0} \ln X$.
Interprète graphiquement ce résultat.
- 5- Dresse le tableau de variation de la fonction $\ln$.
- 6- a) Justifie que la fonction $\ln$ est une bijection de $]0; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.
- b) Dédus -en qu'il existe un unique nombre réel noté e , appartenant à $]2,7; 2,8[$ tel que $\ln e = 1$.
Donne une valeur approchée par défaut à 10^{-2} près de e .
- 7- a) Justifie qu'une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1 est : $y = x - 1$.
- b) Justifie qu'une équation de la tangente (T') à (C) au point d'abscisse e passe par O .
- 8- Complète le tableau de valeurs suivant :

x	0,1	0,2	0,5	1	2	3	8	9	10
$\ln x$									

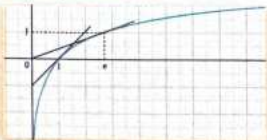
- 9- Construis (T) , (T') et la courbe (C) dans le plan muni du repère (O, I, J) .

Je fais le point de l'activité

- La fonction $\ln$ est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
- On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$, donc la droite (OJ) est une asymptote à (C) .
- $\ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$ avec $e = 2,718281828459$ (valeur approchée par défaut à 10^{-12} près).
- Tableau de variation de $\ln$

	0	1	e	$+\infty$
$\ln'(x)$			+	
$\ln x$	$-\infty$	0	1	$+\infty$

- Courbe représentative de $\ln$



l'évalue mes acquis



Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes

N°	Affirmations	Réponses
1	La fonction logarithme népérien est décroissante sur $]0; +\infty[$.	
2	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$	
3	$\ln 1 = e$	
4	L'axe des ordonnées est une asymptote à la courbe de la fonction $\ln$.	
5	La courbe représentative de la fonction $\ln$ est en dessous de l'axe des abscisses sur l'intervalle $]0; 1[$.	
6	La tangente à la courbe (C) de la fonction $\ln$ au point d'abscisse 1 est au-dessus de la courbe représentative de la fonction $\ln$.	

2.2 Connaître des conséquences du sens de variation de la fonction $\ln$

Activité 5

Soit a et b deux éléments de $]0; +\infty[$.

Recopie et complète les pointillés par le nombre qui convient. Tu justifieras ta réponse.

$$\ln a = 0 \Leftrightarrow a = \dots ; \ln a = 1 \Leftrightarrow a = \dots$$

$$\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = \dots ; \ln a < \ln b \Leftrightarrow \dots < b ;$$

$$a < 1 \Leftrightarrow \ln a < \dots ; a > 1 \Leftrightarrow \ln a > \dots$$

Je fais le point de l'activité

La fonction $\ln$ est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$. Donc :

$$\ln a = 0 \Leftrightarrow a = 1 ; \ln a = 1 \Leftrightarrow a = e ;$$

$$\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b ; \ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b ;$$

$$a < 1 \Leftrightarrow \ln a < 0 ; a > 1 \Leftrightarrow \ln a > 0.$$

l'évalue mes acquis



1- Donne le signe des nombres suivants : $\ln\left(\frac{2021}{2022}\right)$; $\ln(\sqrt{3})$ et $\ln(e-1)$.

2- Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

a) L'équation : $x \in]0; +\infty[$, $\ln(x) = \ln 5$ est équivalente à $x \in]0; +\infty[$, $x = 5$;

b) L'inéquation : $x \in]0; +\infty[$, $\ln(x) < -\ln e$ est équivalente à $x \in]0; +\infty[$, $x < -e$;

c) L'inéquation : $x \in]0; +\infty[$, $\ln(2x) \geq \ln 2$ est équivalente à $x \in]0; +\infty[$, $x \geq 1$.

3- Résous, dans $\mathbb{R}$, les équations et inéquations suivantes :

1) $\ln(x) = \ln 3$; 2) $\ln(2x - 4) = 0$; 3) $\ln(x^2 - 4) = \ln(3x)$;

4) $\ln(x - 10) < 0$; 5) $\ln(2x + 4) \geq \ln(6 - 2x)$; 6) $\ln(1 - x) - \ln(2x + 3) \geq \ln(-x)$.

3- LIMITES DE RÉFÉRENCE DE LA FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

Connaître les limites de référence de la fonction $\ln$

Activité 7

- Donne les réponses des limites suivantes de : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x$.
- On se propose de déterminer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$
 - Dresse le tableau de variation de la fonction h dérivable et définie sur $]0; +\infty[$ par : $h(x) = \ln x - \sqrt{x}$.
 - Déduis que, pour tout x élément de $]0; +\infty[$, $\ln x < \sqrt{x}$.
 - Déduis que, pour tout x élément de $]1; +\infty[$, $0 \leq \frac{\ln x}{x} < \frac{1}{\sqrt{x}}$, puis détermine : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$.
- On se propose de déterminer : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$.
En posant : $X = \frac{1}{x}$ et en utilisant le résultat de : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$, détermine $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$.
- On se propose de déterminer : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x}$
 - En utilisant le nombre dérivé de la fonction $\ln$ en 1, détermine : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$.
 - Déduis de 4.a), $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x}$.

Je fais le point de l'activité

- a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$; c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$;
 d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$; e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$; f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$.

J'évalue mes acquis



Calcule les limites suivantes :

- a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x - \ln x)$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(\sqrt{x} + 3)$; c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} ((\ln(x+1) + \ln(x^2 - 3x - 1)))$
 d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \ln x$
 e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\ln(x+3)} - 4 \right)$; f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^3 - 1}$; g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{\ln x}$
 h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}$; i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$

4- ÉTUDE DES FONCTIONS DU TYPE : $\ln \circ u$ ou $\ln \circ |u|$ 4.1 Connaître l'ensemble de définition des fonctions du type : $x \mapsto \ln \circ u(x)$ et $x \mapsto \ln \circ |u(x)|$

Activité 8

Soit f et g deux fonctions numériques à variable réelle définies par : $f(x) = \ln \circ u(x) = \ln[u(x)]$ et $g(x) = \ln \circ |u(x)| = \ln|u(x)|$ où u est une fonction quelconque définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

- Détermine l'ensemble de définition de f .
- Détermine l'ensemble de définition de g .

Je fais le point de l'activité

- $\ln[u(x)]$ est définie si et seulement si $x \in D_u$ et $u(x) > 0$.
- $\ln|u(x)|$ est définie si et seulement si $x \in D_u$ et $u(x) \neq 0$.

l'évalue mes acquis



Détermine l'ensemble de définition de chacune des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies ci-dessous :

$$f(x) = \ln(-3x + 2) \quad ; \quad g(x) = \ln(x - 1)^2 \quad ; \quad h(x) = \ln|x^2 - 4| \quad ; \quad p(x) = \ln|x^3|.$$

4.2 Connaître les fonctions dérivées des fonctions du type : $x \mapsto \ln \circ u(x)$ et $x \mapsto \ln \circ |u(x)|$

ACTIVITÉ 9

- Soit u une fonction numérique, dérivable sur un intervalle I et strictement positive sur I et/la fonction définie sur I par : $f(x) = \ln \circ u(x)$.
 - Justifie que f est dérivable sur I .
 - Détermine $f'(x)$ pour tout x élément de I .
- Soit u une fonction numérique, dérivable sur un intervalle I et ne s'annulant pas sur I et g la fonction définie sur I par : $g(x) = \ln |u(x)|$.
 - Justifie que g est dérivable sur I .
 - Détermine $g'(x)$ pour tout x élément de I . (On pourra utiliser : $\ln |u| = \frac{1}{2} \ln u^2$).

Je fais le point de l'activité

- Soit u une fonction numérique, dérivable sur un intervalle I et strictement positive sur I .

La fonction f est dérivable sur I et on a : $(\ln \circ u)' = (\ln(u))' = \frac{u'}{u}$.

- Soit u une fonction numérique, dérivable sur un intervalle I et ne s'annulant pas sur I .

La fonction f est dérivable sur I et on a : $(\ln |u|)' = (\ln|u|)' = \frac{u'}{u}$.

l'évalue mes acquis



Détermine les dérivées des fonctions suivantes après avoir déterminé leur ensemble de dérivabilité.

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= \ln x \quad ; \quad \text{b) } f(x) = \ln(2x^2 + 3x + 4) \quad ; \quad \text{c) } f(x) = \ln\left(\frac{x^2 + 3x - 4}{x}\right) ; \\ \text{d) } f(x) &= \ln x - \ln(\ln x) \quad ; \quad \text{e) } f(x) = \ln|-3x + 1| \quad ; \quad \text{f) } f(x) = \ln\left(\left|\frac{x-1}{2-x}\right|\right) \end{aligned}$$

4.3 Connaître les primitives des fonctions du type : $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$

ACTIVITÉ 10

On considère une fonction u dérivable sur un intervalle I et ne s'annulant pas sur I .

On pose : $f(x) = \ln|u(x)|$

- Écris $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.
- Calcule $f'(x)$ pour $u(x) < 0$.
 - Calcule $f'(x)$ pour $u(x) > 0$.
- Déduis de tout ce qui précède une primitive sur I de la fonction $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$

Je fais le point de l'activité

Soit une fonction u dérivable sur un intervalle I et ne s'annulant pas sur I

La fonction $\frac{u'}{u}$ admet pour primitive sur I la fonction $\ln |u|$.

l'évalue mes acquis



Détermine, dans chacun des cas ci-dessous, les primitives sur l'intervalle I de la fonction f .

- a) $f(x) = \frac{1}{x}$; $I =]-\infty ; 0[$ b) $f(x) = \frac{1}{3x+1}$; $I =]-\infty ; -\frac{1}{3}[$
 c) $f(x) = \frac{4x-1}{2x^2-x+1}$; $I =]1 ; +\infty[$ d) $f(x) = \tan x$; $I =]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$.

5- LOGARITHME DECIMAL - LOGARITHME DE BASE $a, a \in \mathbb{R}, a \neq 1$

5.1 Connaître la définition de la fonction logarithme décimal

ACTIVITE 11

A l'aide de la touche $\log$ de la calculatrice, complète le tableau de valeurs à 10^{-2} près ci-dessous.

x	-15,7	-3	-1	0	0,5	1	5	10	100	1000
$\log(x)$										
$\frac{\ln x}{\ln 10}$										

- Détermine l'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto \log(x)$.
- Pour tout x appartenant à $]0 ; +\infty[$, compare $\log(x)$ et $\frac{\ln x}{\ln 10}$.

Je fais le point de l'activité

- La fonction notée $\log$ définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $\log(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$ est appelée **fonction logarithme décimal**.
- $\log(1) = 0$ et $\log(10) = 1$.

l'évalue mes acquis



- Donne, sans utiliser la calculatrice, la valeur de chacun des nombres suivants : $\log(1)$; $\log(10)$ et $\log(100000000)$.
- A l'aide de la définition de la fonction logarithme décimal, détermine les valeurs de x pour lesquelles $\log(x) < 0$.

5.2 Connaître les propriétés algébriques de la fonction logarithme décimal

ACTIVITE 12

Soit x et y deux nombres réels strictement positifs et r nombre rationnel.

On désigne par $\log$ la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $\log(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$

Démontre que :

- $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$
- $\log\left(\frac{1}{y}\right) = -\log(y)$
- $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y)$
- $\log(x^r) = r \log(x)$
- $\log(x) = r \Leftrightarrow x = 10^r$

Je fais le point de l'activité

Toutes les propriétés algébriques de la fonction $\ln$ restent valables pour la fonction $\log$.

J'évalue mes acquis



1- Ecris plus simplement : $\log(100) - \log(1000)$

2- Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$\log(x^2 - x + 4) = 1; \quad \text{b)} \quad 6 - \log^2(x) = -\log(x)$$

5.3 Connaître la définition et les propriétés algébriques de la fonction logarithme de base a

Activité 13

Soit a un nombre réel strictement positif différent de 1. On désigne par $\log_a$ la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

définie par : $\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$.

1- Détermine l'ensemble de définition de $\log_a$.

2- Détermine : $\log_a(x)$ et $\log_{10}(x)$.

3- Démontre que pour tous nombres réels strictement positifs x et y et tout nombre rationnel r , on a :

a) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$

b) $\log_a\left(\frac{1}{y}\right) = -\log_a(y)$

c) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$

d) $\log_a(x^r) = r \log_a(x)$

e) $\log_a(x) = r \Leftrightarrow x = a^r$

f) Calcule : $\log_a(1)$ et $\log_a(a)$.

Je fais le point de l'activité

• $\log_a(x)$ est défini si $x > 0$.

• La fonction notée $\log_a$ définie sur $]0; +\infty[$ par : $\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$ est appelée fonction logarithme de base a , $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$.

• La fonction logarithme népérien est la fonction logarithme de base e .

• La fonction logarithme décimal est la fonction logarithme de base 10.

• Toutes les propriétés algébriques de la fonction $\ln$ restent valables pour la fonction $\log_a$.

• $\log_a(1) = 0$ et $\log_a(a) = 1$.

J'évalue mes acquis



Ecris plus simplement :

$$\log_3(81); \log_2\left(\frac{1}{8}\right); \log_2(\sqrt{8}) \times \log_3(27^2).$$

II- RÉSUMÉ DE COURS



1- DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES

1.1- Définition et conséquences immédiates

DÉFINITION

La fonction logarithme népérien, notée $\ln$, est la primitive sur $]0; +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1.

Conséquences

- L'ensemble de définition de la fonction $\ln$ est $]0; +\infty[$ et $\ln 1 = 0$.
- Pour tout x élément de $]0; +\infty[$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

1.2- Signe de la fonction $\ln$

PROPRIÉTÉ

- Si $x \in]0; 1[$, $\ln x < 0$ et si $x \in]1; +\infty[$, $\ln x > 0$.

1.3- Propriétés algébriques

Pour tous nombres réels a et b strictement positifs, on a : $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

PROPRIÉTÉS

Pour tous nombres réels a et b strictement positifs et pour tout nombre rationnel r , on a :

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a ; \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

$$\ln a^r = r \ln a ; \text{ En particulier : } \ln \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \ln a$$



$$\ln \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \ln a \text{ pour } n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$$

2- ÉTUDE ET REPRÉSENTATION GRAPHIQUE DE LA FONCTION $\ln$

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . On note (C) la courbe représentative de la fonction $\ln$ dans le repère (O, I, J) .

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \ln x$$

2.1- Dérivée et sens de variation

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $f'(x) = \frac{1}{x}$.

$$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) > 0.$$

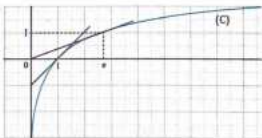
Donc la fonction f est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty.$$

Représentation graphique

• Tableau de variation

	0	1	e	$+\infty$
$\ln'(x)$			+	
$\ln x$	$-\infty$	0	1	$+\infty$

• Courbe représentative de $\ln$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$; donc, la droite (O) est une asymptote à (C).

$\ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$ avec $e \approx 2,71$.

Une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1 est : $y = x - 1$.

Une équation de la tangente (T') à (C) au point d'abscisse e est : $y = \frac{1}{e}x$. (T') passe par O.



La courbe représentative de f admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de (O) ;

donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

2.2 - Conséquences

Propriétés

Pour tous nombres réels a et b , on a :

$$\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b ;$$

$$\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b .$$

En particulier :

$$\ln a = 0 \Leftrightarrow a = 1 ;$$

$$\ln a = 1 \Leftrightarrow a = e$$

$$\ln a < 0 \Leftrightarrow 0 < a < 1 ;$$

$$\ln a > 0 \Leftrightarrow a > 1 ;$$



• $\ln e = 1$; e est appelé base du logarithme népérien (ou constante de Neper ou nombre d'Euler)

• A l'aide d'une calculatrice, on obtient une valeur approchée de e : $e \approx 2,718281828456$.

• $\forall x \in \mathbb{R} ; \ln e^x = x$.

3- LIMITES DE RÉFÉRENCE DE LA FONCTION $\ln$

Propriétés

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty ;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

4- ÉTUDE DES FONCTIONS DU TYPE : $\ln u$ et $\ln|u|$ 4.1 Ensemble de définition des fonctions du type : $x \mapsto \ln(u(x))$ et $x \mapsto \ln|u(x)|$

- $\ln(u(x))$ est définie si et seulement si $x \in D_u$ et $u(x) > 0$.
- $\ln|u(x)|$ est définie si et seulement si $x \in D_u$ et $u(x) \neq 0$.

4.2-Dérivée des fonctions du type : $\ln u$ et $\ln|u|$

PROPRIÉTÉS

- Soit u une fonction numérique, dérivable sur un intervalle I et strictement positive sur I .
La fonction $\ln u$ est dérivable sur I et on a : $(\ln u)' = (\ln u)' = \frac{u'}{u}$.
- Soit u une fonction numérique, dérivable sur un intervalle I et ne s'annulant pas sur I .
La fonction $\ln|u|$ est dérivable sur I et on a : $(\ln|u|)' = (\ln|u|)' = \frac{u'}{u}$.

4.3-Primitives des fonctions du type $\frac{u'}{u}$

PROPRIÉTÉS

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I tel que : $\forall x \in I, u(x) \neq 0$.

- La fonction $\frac{u'}{u}$ admet pour primitives sur I les fonctions $\ln|u| + C, C \in \mathbb{R}$.

Autrement dit :

- La fonction $\frac{u'}{u}$ admet pour primitive, la fonction :

$\ln u$, sur tout intervalle I sur lequel u est strictement positive ;

$\ln(-u)$, sur tout intervalle I sur lequel u est strictement négative.

5- LOGARITHME DÉCIMAL - LOGARITHME DE BASE $a, a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

5.1-Fonction logarithme décimal

DÉFINITION

On appelle fonction logarithme décimal ou fonction logarithme de base 10, notée $\log$, la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$.



- $\log(x)$ est défini si $x > 0$.
- $\log 10 = 1$ et $\log(1) = 0$.
- $\forall x \in]0; +\infty[, [\log(x)]' = \frac{1}{x \ln 10}$.

5.2-Propriétés algébriques

PROPRIÉTÉS

Pour tous nombres réels x et y strictement positifs et tout nombre rationnel r . On a :

- a) $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$; b) $\log\left(\frac{1}{y}\right) = -\log(y)$; c) $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y)$;
d) $\log(x^r) = r \log(x)$; e) $\log(x) = r \Leftrightarrow x = 10^r$.



Toutes les propriétés algébriques de la fonction $\ln$ restent valables pour la fonction $\log$.

5.3-Fonction logarithme de base $a, a \in \mathbb{R}, \setminus \{1\}$

DÉFINITION

Soit a un nombre réel strictement positif, différent de 1.

On appelle fonction logarithme de base a , notée $\log_a$, la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$



$\log_a(x)$ est défini si $x > 0$.

• $\log_a(1) = 0$ et $\log_a(a) = 1$.

• La fonction logarithme népérien est la fonction logarithme de base e .

• La fonction logarithme décimal est la fonction logarithme de base 10.

• Toutes les propriétés algébriques de la fonction $\ln$ restent valables pour la fonction $\log_a$.

PROPRIÉTÉS

Soit $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ et $r \in \mathbb{Q}, \forall x \in \mathbb{R}^+$ et $y \in \mathbb{R}^+$, on a :

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y); \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y); \log_a(x^r) = r \log_a(x)$$

$$\log_a(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \log_a(x); \log_a(b) = \frac{1}{\log_a(a)} \text{ soit } \log_a(b) \times \log_a(a) = 1.$$

III- MÉTHODE



• **Déterminer les primitives des fonctions du type :** $\frac{u'}{u}$, où u est une fonction dérivable non nulle

Pour déterminer une primitive d'une fonction du type : $\frac{u'}{u}$, on utilise la formule suivante :

Pour toute fonction u dérivable et non nulle sur un intervalle I , la fonction $\frac{u'}{u}$ a pour primitives sur I , les fonctions : $\ln|u| + c$ où c est un nombre réel.

• **Pour résoudre une équation comportant des logarithmes, on peut procéder de la façon suivante :**

- On détermine les contraintes sur l'inconnue ;
- On se ramène à une ou plusieurs égalités de la forme : $\ln a = \ln b$;
- On conclut.

• **Pour résoudre une inéquation comportant des logarithmes, on peut procéder de la façon suivante :**

- On détermine les contraintes sur l'inconnue ;
- On se ramène à une ou plusieurs inégalités de la forme : $\ln a > \ln b$;
- On conclut.

• **Pour résoudre un système d'équations ou d'inéquations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ comportant des logarithmes, on peut procéder de la façon suivante :**

- On détermine les contraintes sur l'inconnue ;
- On se ramène à une ou plusieurs égalités ou inégalités de la forme : $\ln a = \ln b$ ou $\ln a > \ln b$;
- On résout le système obtenu ;
- On conclut.

IV- SAVOIR-FAIRE



Savoir-faire 1. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions du type : $\ln u$ et $\ln |u|$

ÉNONCÉ

Détermine l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = \ln(3-x) \quad ; \quad g(x) = \ln(x^2+1) \quad ; \quad h(x) = \frac{\ln(x-1)}{x-2} ;$$

$$k(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right) \quad ; \quad l(x) = \ln|x^2+x-2| \quad ; \quad m(x) = \ln\left|\frac{1-\ln x}{1+\ln x}\right|$$

SOLUTION COMMENTÉE

Déterminons l'ensemble de définition de chacune des fonctions ci-dessus.

• f est définie si et seulement si : $3-x > 0$.

$$x < 3$$

$$\text{Donc : } D_f =]-\infty ; 3[.$$

• g est définie si et seulement si : $x^2+1 > 0$.

$$\text{Or, } \forall x \in \mathbb{R}, x^2+1 > 0.$$

$$\text{Donc : } D_g = \mathbb{R}.$$

• h est définie si et seulement si : $x-1 > 0$ et $x-2 \neq 0$.

$$x > 1 \text{ et } x \neq 2.$$

$$\text{Donc : } D_h =]1 ; 2[\cup]2 ; +\infty[.$$

$$x \in D_k \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}, x+1 \neq 0 \text{ et } \frac{x+2}{x+1} > 0.$$

$$\text{On dresse le tableau de signe de : } \frac{x+2}{x+1}.$$

$$\text{On conclut que : } D_k =]-\infty ; -2[\cup]-1 ; +\infty[.$$

$$x \in D_l \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \text{ et } x^2+x-2 \neq 0.$$

$$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \text{ et } (x-1)(x+2) \neq 0.$$

$$\text{Donc : } D_l = \mathbb{R} \setminus \{-2 ; 1\}.$$

$$x \in D_m \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}, \frac{1-\ln x}{1+\ln x} \neq 0 \text{ et } 1+\ln x \neq 0 \text{ et } x > 0.$$

$$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}, 1-\ln x \neq 0 \text{ et } \ln x \neq -1 \text{ et } x > 0.$$

$$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}, x \neq e \text{ et } x \neq \frac{1}{e} \text{ et } x > 0.$$

$$\text{Donc : } D_m = \mathbb{R}_+^* \setminus \left\{ \frac{1}{e} ; e \right\}.$$

Savoir-faire 2. Résoudre des équations et inéquations comportant des logarithmes népériens

Résous dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

$$\text{a) } (x-2)\ln(x-2) = 0 \quad ; \quad \text{b) } \ln(x^2-x-1) = 0 \quad ; \quad \text{c) } \ln(2x+8) - \ln(3x+2) = \ln(x+1) ;$$

$$\text{d) } \ln^2 x - 6\ln x + 5 = 0 \quad ; \quad \text{e) } \ln(2x-e) > 1 \quad ; \quad \text{f) } \ln(x^2-4) \leq \ln(x+2).$$

SOLUTION COMMENTÉE

$$\text{a) Résolvons dans } \mathbb{R}, \text{ l'équation (E): } (x-2)\ln(x-2) = 0$$

$$\text{Contraintes sur l'inconnue : } x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2 \text{ donc : } x \in]2 ; +\infty[.$$

$$\text{Pour tout } x \in]2 ; +\infty[, (x-2)\ln(x-2) = 0 \Leftrightarrow x-2 = 0 \text{ ou } \ln(x-2) = 0.$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } \ln(x-2) = \ln 1.$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x - 2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = 3$$

$2 \notin]2; +\infty[$ et $3 \in]2; +\infty[$. Donc : l'ensemble des solutions de (E) est : $\{3\}$.

b) Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'équation $\ln(x^2 - x - 1) = 0$

Contraintes sur l'inconnues : $x^2 - x - 1 > 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) > 0$;

Donc : $x \in]-\infty; \frac{1-\sqrt{5}}{2}[\cup]\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty[$

$\forall x \in]-\infty; \frac{1-\sqrt{5}}{2}[\cup]\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty[$, $\ln(x^2 - x - 1) = 0 \Leftrightarrow \ln(x^2 - x - 1) = \ln 1$.

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0.$$

Donc : $x = -1$ ou $x = 2$.

-1 et 2 appartiennent à $] -\infty; \frac{1-\sqrt{5}}{2}[\cup]\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty[$, donc : l'ensemble des solutions de l'équation : $\ln(x^2 - x - 1) = 0$ est : $\{-1; 2\}$.

c) Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'équation (E) : $\ln(2x+8) - \ln(3x+2) = \ln(x+1)$

Contraintes sur l'inconnue : $2x+8 > 0$, $3x+2 > 0$ et $x+1 > 0$.

Donc : $x \in]-\frac{2}{3}; +\infty[$.

$\ln(2x+8) - \ln(3x+2) = \ln(x+1) \Leftrightarrow \ln(2x+8) = \ln(x+1) + \ln(3x+2)$

$$\Leftrightarrow (2x+8) = (x+1)(3x+2)$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -2.$$

Seul $1 \in]-\frac{2}{3}; +\infty[$ d'où l'ensemble des solutions de (E) est : $\{1\}$.

d) Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'équation (E) : $\ln^2 x - 6\ln x + 5 = 0$

Contraintes sur l'inconnue : $x \in]0; +\infty[$

Soit x élément $]0; +\infty[$; posons : $X = \ln x$

(E) $\Leftrightarrow X^2 - 6X + 5 = 0 \Leftrightarrow (X-1)(X-5) = 0$

$$\Leftrightarrow X = 1 \text{ ou } X = 5$$

$$\Leftrightarrow \ln x = 1 \text{ ou } \ln x = 5$$

$$\Leftrightarrow x = e \text{ ou } x = e^5. \text{ Or } e \in]0; +\infty[\text{ et } e^5 \in]0; +\infty[.$$

Donc : l'ensemble des solutions de (E) est : $\{e; e^5\}$.

e) Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'inéquation (I) : $\ln(2x-e) > 1$

Contraintes sur l'inconnue : $2x-e > 0 \Leftrightarrow x > \frac{e}{2}$ donc $x \in]\frac{e}{2}; +\infty[$

$\ln(2x-e) > 1 \Leftrightarrow \ln(2x-e) > \ln e$

$$\Leftrightarrow 2x-e > e$$

$$\Leftrightarrow x > e \Leftrightarrow x \in]e; +\infty[$$

$$S_{(I)} =]\frac{e}{2}; +\infty[\cap]e; +\infty[.$$

$$S_{(I)} =]e; +\infty[.$$

f) Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'inéquation (I) : $\ln(x^2-4) \leq \ln(x+2)$

Contraintes sur l'inconnue : $x^2-4 > 0$ et $x+2 > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[\cap]-2; +\infty[$.

Donc : $x \in]2; +\infty[$.

$$\ln(x^2-4) \leq \ln(x+2) \Leftrightarrow x^2-4 \leq x+2.$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x-3) \leq 0.$$

$$\Leftrightarrow x \in [-2; 3].$$

$$S_{(I)} = [-2; 3] \cap]2; +\infty[.$$

$$S_{(I)} =]2; 3].$$

Savoir-faire 3

Résoudre des équations de la forme : $x^n = k$ ($k \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}^*$) et des inéquations d'inconnue n de la forme : $q^n \leq k$, $q^n \geq k$ ($k \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}^*$, $q \in \mathbb{R}_+$).

Énoncé

- 1- Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $x^5 = 2$.
 2- Résous dans $\mathbb{N}$ les inéquations suivantes :

a) $2^n \leq 100$ b) $\left(\frac{1}{4}\right)^n \leq \frac{1}{1000}$

Solution commentée

- 1- Résolvons, dans $\mathbb{R}$, l'équation (E) : $x^5 = 2$.

Contraintes sur l'inconnue : $x \in \mathbb{R}^*$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^5 = 2 \Leftrightarrow 5 \ln x = \ln 2$

$$\Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{5} \ln 2$$

$$\Leftrightarrow \ln x = \ln \left(2^{\frac{1}{5}}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = 2^{\frac{1}{5}}$$

Donc : $S_{(E)} = \left\{2^{\frac{1}{5}}\right\}$

- 2- a) Résolvons dans $\mathbb{N}$, l'inéquation (I₁) : $2^n \leq 100$

Contraintes sur l'inconnue : $n \in \mathbb{N}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \leq 100 \Leftrightarrow n \ln 2 \leq \ln 100$

$$\Leftrightarrow n \leq \frac{\ln 100}{\ln 2} \Leftrightarrow n \leq 6,64, \text{ car } \ln 2 > 0$$

$$S_{(I_1)} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}.$$

- b) Résolvons dans $\mathbb{N}$, l'inéquation (I₂) : $\left(\frac{1}{4}\right)^n \leq \frac{1}{1000}$

Contraintes sur l'inconnue : $n \in \mathbb{N}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(\frac{1}{4}\right)^n \leq \frac{1}{1000} \Leftrightarrow n \ln \left(\frac{1}{4}\right) \leq \ln \frac{1}{1000}$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln \frac{1}{1000}}{\ln \frac{1}{4}} \text{ car } \ln \frac{1}{4} < 0$$

$$S_{(I_2)} = [4,9; +\infty[\cap \mathbb{N}.$$

Savoir-faire 4

Utiliser les limites de référence de la fonction logarithme népérien pour calculer des limites

Énoncé

Calcule les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+6x)}{3x}$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x \ln x)$; c) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\ln x}{1-x}\right)$;
 d) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \ln x\right)$; e) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln x - 3}{\ln x + 7}\right)$

Solution commentée

a) Je calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+6x)}{3x}$

On ne peut pas conclure directement quant au calcul de : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+6x)}{3x}$

Posons : $X = 6x$; on a alors : $x = \frac{X}{6}$. Lorsque x tend vers 0, X tend vers 0.

$$\begin{aligned} \text{D'où : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+6x)}{3x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6}{3} \frac{\ln(X+1)}{X} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{\ln(X+1)}{X} \end{aligned}$$

$$\text{Puisque : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(X+1)}{X} = 1 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+6x)}{3x} = 2.$$

b) Je calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x \ln x)$

On ne peut pas conclure directement quant au calcul de : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x \ln x)$.

Factorisons $(x^2 - x \ln x)$ par x^2 . On obtient : $x^2 - x \ln x = x^2 \left(1 - \frac{\ln x}{x} \right)$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} \right) = 0. \text{ Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^2 \left(1 - \frac{\ln x}{x} \right) \right] = +\infty.$$

$$\text{Par suite : } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x \ln x) = +\infty$$

c) Je calcule $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\ln x}{1-x^2} \right)$

On ne peut pas conclure directement quant au calcul de : $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\ln x}{1-x^2} \right)$.

$$\text{On a : } \frac{\ln x}{1-x^2} = \frac{1}{x+1} \times \frac{\ln x}{x-1}; \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x+1} \right) = \frac{1}{2} \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\ln x}{x-1} \right) = 1.$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\ln x}{1-x^2} \right) = \frac{1}{2}.$$

d) Je calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \ln x \right)$

On ne peut pas conclure directement quant au calcul de : $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \ln x \right)$.

$$\text{On a : } \frac{1}{x^2} - \ln x = \frac{1}{x^2} (1 - x^2 \ln x);$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} (1 - x^2 \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0} (1 - x(x \ln x)) = 1 - 0 \times 0 = 1.$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \ln x \right) = +\infty.$$

e) Je calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln x - 3}{\ln x + 7} \right)$

On ne peut pas conclure directement quant au calcul de : $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln x - 3}{\ln x + 7} \right)$

$$\frac{\ln x - 3}{\ln x + 7} = \frac{1 - \frac{3}{\ln x}}{1 + \frac{7}{\ln x}}. \text{ Or } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3}{\ln x} \right) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{7}{\ln x} \right) = 0. \text{ Donc } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln x - 3}{\ln x + 7} \right) = 1.$$

Savoir-faire 5 : Déterminer les fonctions dérivées des fonctions comportant le logarithme népérien

Exercice

Pour chaque fonction, détermine sa dérivée sur l'intervalle indiqué.

$$f_1(x) = \ln(4 - x^2) \text{ sur }]-2; 2[; f_2(x) = \frac{1}{1 + \ln x} \text{ sur }]0; \frac{1}{e}[\cup \left] \frac{1}{e}; +\infty \right[;$$

$$f_3(x) = \ln(x-1) - \ln(x-2) \text{ sur }]2; +\infty[; f_4(x) = (x+1) \ln(x+1) - x \text{ sur }]-1; +\infty[.$$

Solution commentée

a) Je calcule la dérivée de la fonction $f_1(x) = \ln(4 - x^2)$ sur $]-2; 2[$

La dérivée de $\ln u$ est : $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$.

$$\text{Posons : } u(x) = 4 - x^2, \text{ on a : } u'(x) = -2x; \text{ donc : } f_1'(x) = \frac{-2x}{4 - x^2}.$$

b) Je calcule la dérivée de la fonction $f_2(x) = \frac{1}{1 + \ln x}$ sur $]0; \frac{1}{e}[\cup \left] \frac{1}{e}; +\infty \right[$

La fonction f_2 est sous la forme $\frac{1}{v}$ avec $v(x) = 1 + \ln x$.

Donc : $f_2'(x) = \frac{v'}{v^2}$; or $v'(x) = \frac{1}{x}$, donc : $f_2'(x) = -\frac{1}{x(1 + \ln x)^2}$

c) Je calcule la dérivée de la fonction $f_3(x) = \ln(x-1) - \ln(x-2)$ sur $]2; +\infty[$

$$\begin{aligned}\text{On a : } f_3'(x) &= \frac{(x-1)'}{x-1} - \frac{(x-2)'}{x-2} \\ &= \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2}\end{aligned}$$

$$\text{Donc : } f_3'(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$$

d) Je calcule la dérivée de la fonction $f_4(x) = (x+1)\ln(x+1) - x$ sur $] -1; +\infty[$

$$f_4'(x) = (x+1)' \ln(x+1) + (x+1)[\ln(x+1)]' - (x)'$$

$$f_4'(x) = 1 \times \ln(x+1) + (x+1) \times \frac{1}{x+1} - 1$$

$$\text{Donc : } f_4'(x) = \ln(x+1).$$

Savoir-faire 6 - Déterminer des primitives de fonctions faisant intervenir la fonction $\ln$

Exercice

Détermine les primitives sur K de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{x-1}{(x^2-2x+3)}, K = \mathbb{R} \quad ; \quad g(x) = \frac{4x+2}{x^2+x+1}, K = \mathbb{R} ;$$

$$h(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}, K =]0; +\infty[\quad ; \quad j(x) = \frac{1}{x \ln x}, K =]1; +\infty[.$$

Solution commentée

Je détermine les primitives F de la fonction $f(x) = \frac{x-1}{(x^2-2x+3)}, K = \mathbb{R}$.

Posons : $u(x) = x^2 - 2x + 3$. On a : $u'(x) = 2x - 2$; $x - 1 = \frac{1}{2} u'(x)$.

Donc : $f(x) = \frac{1}{2} \frac{u'(x)}{u(x)}$. Par suite, $F(x) = \frac{1}{2} \ln|x^2 - 2x + 3| + C_1$; $C_1 \in \mathbb{R}$.

Comme $x^2 - 2x + 3 > 0$ pour tout x élément de $\mathbb{R}$ ($\Delta < 0$), il vient :

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2 - 2x + 3) + C_1 ; C_1 \in \mathbb{R}.$$

Je détermine les primitives G de la fonction $g(x) = \frac{4x+2}{x^2+x+1}, K = \mathbb{R}$.

Posons : $u(x) = x^2 + x + 1$; $u'(x) = 2x + 1$ et $4x + 2 = 2u'(x)$. Donc : $g(x) = 2 \frac{u'(x)}{u(x)}$

Par suite : $G(x) = 2 \ln|x^2 + x + 1| + C_2$; $C_2 \in \mathbb{R}$.

Comme $x^2 + x + 1 > 0$ pour tout x élément de $\mathbb{R}$ ($\Delta < 0$), il vient :

$$G(x) = 2 \ln(x^2 + x + 1) + C_2 ; C_2 \in \mathbb{R}.$$

Je détermine les primitives H de la fonction $h(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$; $K =]0; +\infty[$.

En écrivant : $h(x) = \frac{1}{x} (\ln x)^2$, on reconnaît une expression du type $u' u^n$ qui a pour primitive $\frac{u^{n+1}}{n+1}$.

$$\text{Donc : } H(x) = \frac{1}{3} (\ln x)^3 + C_4 ; C_4 \in \mathbb{R}.$$

Je détermine les primitives F de la fonction $j(x) = \frac{1}{x \ln x}$; $K =]1; +\infty[$.

En écrivant j sous la forme : $j(x) = \frac{1}{x} \frac{1}{\ln x}$, on a : $j(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ où $u(x) = \ln x$.

D'où : $F(x) = \ln|\ln x| + C_5$; $C_5 \in \mathbb{R}$; puisque $x \in]1; +\infty[$, donc : $F(x) = \ln(\ln x) + C_5$; $C_5 \in \mathbb{R}$.

V- JE M'EXERCE



1- Exercices de fixation/ Application

Connaître et utiliser les propriétés algébriques de la fonction logarithme népérien

1 Réponds par vrai ou par faux à chacune des égalités suivantes :

N°	Affirmations	Réponses
1	$\ln 2 + \ln \frac{1}{2} - \ln(e^{-2}) = 2$	
2	$\ln(3^2) + \ln 3 - \ln \sqrt{3} = 2 \ln 3$	
3	$\frac{\ln e^{-1}}{\ln e^{-1}} - \ln 2e = 1 - \ln 2$	
4	$\ln 125 - \ln 81 - \ln \frac{3}{5} + 2 \ln 243 = 4 \ln 5 - \ln 3$	
5	$\ln \left(\sqrt[3]{2} - 1 \right)^{2012} + \ln \left(\sqrt[3]{2} + \frac{1}{3} \right)^{2012} = 0$	

2 Simplifie les expressions A, B, C, D, E et F suivantes :

$$A = \ln 4 - \ln(\sqrt{2}) ; B = \ln 2 + \ln(8e) - \ln(4e^2) + 1 ;$$

$$C = 3 \ln 4 - \ln 256 ; D = \ln e^{3x-1} - \ln e^{3x+1} ;$$

$$E = \ln(2x) - \ln(x) \text{ pour } x > 0 ;$$

$$F = \ln(x^2 - 1) - \ln(x - 1) \text{ pour } x > 1.$$

3 Exprime chacun des nombres suivants sous la forme $\ln a$ où a est un nombre réel strictement positif.

$$A = \ln 20 - \ln 4 ; B = -\ln 4 + \ln 28 ;$$

$$C = 3 \ln 2 ; D = -2 \ln 4$$

$$E = 3 \ln 3 - 2 \ln 2 ; F = 3 \ln 4 - 3 \ln 2.$$

4 Exprime chacun des nombres suivants en fonction de $\ln 3$.

$$1) \ln\left(\frac{1}{9}\right) ; 2) \ln 24 - \ln 8 ; 3) \ln\left(\frac{3}{4}\right) + \ln 4 ;$$

$$4) 2 \ln 3 - \ln 27 ; 5) \ln(9\sqrt{3}).$$

5 Dans chacun des cas suivants, compare les nombres réels A et B.

$$1- A = \ln 2 + \ln 5 \text{ et } B = \ln 9 ;$$

$$2- A = \ln 4 \text{ et } B = \ln 6 - \ln 2 ;$$

$$3- A = 3 \ln 2 \text{ et } B = 2 \ln 3 ;$$

$$4) A = \ln 25 \text{ et } B = 2 \ln 5$$

6 On donne les encadrements suivants :

$$0,69 < \ln 2 < 0,70 \text{ et } 1,60 < \ln 5 < 1,61.$$

Déduis les encadrements des nombres suivants :

$$a) \ln 4 ; b) \ln(2^5) ; c) \ln\left(\frac{5}{2}\right) \text{ et } d) \ln\left(\frac{16}{25}\right).$$

Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction comportant le logarithme népérien

7 Pour chacune des affirmations, trois réponses sont proposées. Une seule réponse est exacte.

Recopie le numéro de chaque affirmation ainsi que la lettre qui correspond à la réponse choisie.

Aucune justification n'est demandée.

N°	Affirmations	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	On considère la fonction f définie par : $f(x) = \ln(1 - x^2)$. L'ensemble de définition de la fonction f est :	$]0 ; +\infty[$	$] -1 ; 1[$	$]1 ; +\infty[$
2	On considère la fonction g définie par : $g(x) = \ln(x^2)$. L'ensemble de définition de la fonction g est :	$\mathbb{R}$	$]0 ; +\infty[$	$\mathbb{R}^+$
3	La fonction $x \mapsto \ln(-x)$ est définie sur :	$] -\infty ; 0[$	$] -\infty ; -1[$	$]0 ; +\infty[$
4	La fonction $x \mapsto \ln 3 - x $ est définie sur :	$] -\infty ; 3[$	$\mathbb{R} \setminus \{3\}$	$]3 ; +\infty[$
5	L'expression de la fonction h qui est définie sur $] -2 ; 2[$	$\ln(x^2 - 2)$	$\ln 4 - x^2 $	$\ln(4 - x^2)$

8 Détermine l'ensemble de définition D_f de la fonction f dans chaque cas ci-dessous :

$$1) f(x) = x \ln x - x ; 2) f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) ;$$

$$3) f(x) = \frac{\ln(x+1)}{\ln(x-1)} ; 4) f(x) = -2x + 1 + \ln\left|\frac{x+1}{x}\right| ;$$

$$5) f(x) = \frac{\ln(1-x)}{x} ; 6) f(x) = \frac{1}{x^2 \ln x} - \ln|x - e| ;$$

$$7) f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x-1} + 2x$$

10 Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- 1) $\ln x = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$; 2) $\ln x = \frac{\ln 5}{2}$;
 3) $\ln x = -\ln 9$; 4) $(\ln x - 2)(1 + \ln x) = 0$;
 5) $\ln(6 - 3\ln x) = 0$.

11 Résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

- 1) $\ln x \geq 1$; 2) $\ln x > -2$;
 3) $\ln x \leq \frac{1}{2}$; 4) $\ln x < 3$;
 5) $\ln(6x + 1) > 2$; 6) $\ln(3x) < \ln(2 - 5x)$.

12 Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- 1) $\ln x = 2$; 2) $\ln x = -1$;
 3) $3\ln x - 9 = 0$; 4) $(\ln x + 5) = \ln 3$;
 5) $\ln(x^2) = \ln 9$; 6) $\ln(x^2 + x) = \ln 6$.

13 Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- 1) $2 + 3\ln x = 14$; 2) $\ln(2 - x) + 1 = 0$;
 3) $\ln x + \ln(x - 1) = \ln 5$;
 4) $\ln(3x) - \ln(1 - x) = \ln 2$;
 5) $\ln(2x - 1) = \ln x$; 6) $\ln(2x - 5) = -2$;
 7) $\ln x = 0$; 8) $\ln|x| = 3$.

14 Résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

- 1) $\ln(x + 3) \geq \ln(3x + 2)$; 2) $\ln(2 - 3x) \geq 0$;
 3) $\ln(1 - x) < 1$; 4) $\ln x < -5$;
 5) $\ln(x^2 - 2) > \ln(2x)$; 6) $\ln(x - 3) < \ln(2 - 3x)$;
 7) $\ln\left(\frac{3}{x}\right) > \ln 3$; 8) $2\ln(x) \geq \ln(2 - x)$;
 9) $\ln(x) + \ln(2x + 5) \leq \ln 3$.

15 Résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

- 1) $\ln(4x) - \ln 2 < \ln 4$; 2) $\ln(-2x + 1) \leq 0$;
 3) $\ln\left(\frac{3x - 1}{x + 2}\right) \geq 1$; 4) $\ln(2x - 1) + 1 > 0$

16

- 1- Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation : $X^2 - 2X - 15 = 0$.
 2- Dédus-en les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation :
 $(\ln x)^2 - 2\ln x - 15 = 0$.

17 Soit $P(x) = -x^3 + 7x - 6$.

- 1-a) Calcule $P(1)$.
 b) Dédus une factorisation de $P(x)$.
 2-a) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation : $P(x) = 0$.
 b) Dédus-en les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation :
 $-(\ln x)^3 + 7\ln x - 6 = 0$.

- 18 1- Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\left(1 + \frac{t}{100}\right)^n = 1,3$.
 2- Huit augmentations successives de t %
 correspond à une augmentation globale de 30 %.
 Donne une valeur approchée de t à 10^{-1} près.

Résoudre des systèmes d'équations comportant des logarithmes népériens

- 19 Résous dans $\mathbb{R}^2$ le système (S) : $\begin{cases} xy = e^{-3} \\ \ln x + \ln y^2 = -1 \end{cases}$

- 20 1-a) Résous dans $\mathbb{R}^2$ le système : $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ 3x + 4y = 5 \end{cases}$

b) Dédus-en la résolution dans $\mathbb{R}^2$ du système :

$$\begin{cases} \ln \frac{x}{y} = 7 \\ \ln x^3 y^4 = 5 \end{cases}$$

- 2- Résous dans $\mathbb{R}^2$ le système : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 7 \\ \ln x + \ln y = \ln 10 \end{cases}$

Calculer des limites

21 Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

N°	Affirmations	Réponses
1	$\lim_{x \rightarrow 0} x^3 \ln x = 0$	
2	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty$	
3	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 1$	
4	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x) = -\infty$	
5	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right) = 0$	

- 22 1- Démontre la propriété suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1.$$

2- Dédus les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sqrt{x})}{\sqrt{x}} \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

23 Calcule :

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x^3$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x \ln x - (\ln x)^2]$;
 c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x^{10}}{x}$; d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x}{x+1}$;
 e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x - 2}{2 \ln x + 1}$; f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}$;
 g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{2x}$; h) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x^2 - x + 1)}{x - 1}$;
 i) $\lim_{x \rightarrow e} \frac{x \ln x - x}{x - e}$.

Déterminer des dérivées de fonctions comportant le logarithme népérien

23 Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

N	Affirmations	Réponses
1	La fonction $f: x \mapsto \frac{1}{x} + \ln x$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et sa dérivée f' vérifie : $f'(x) = \frac{1+x}{x^2}$	
2	La fonction $g: x \mapsto x \ln x - x$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et sa dérivée g' vérifie : $g'(x) = \ln x$	
3	La fonction $h: x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et sa dérivée h' vérifie : $h'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$	
4	La fonction $f: x \mapsto \ln(x^2 + x - 2)$ est dérivable sur $] -\infty; -2[$ et sur $]1; +\infty[$ et sa dérivée f' vérifie : $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2 + x - 2}$	
5	La fonction $p: x \mapsto \ln \left(\frac{x+1}{x+3} \right)$ est dérivable sur $] -\infty; -3[$ et sur $] -1; +\infty[$ et sa dérivée p' vérifie : $p'(x) = \frac{2}{(x+1)(x+3)}$	

24 Détermine la dérivée de chaque fonction sur l'intervalle I indiqué.

- a) $f(x) = x - \ln x, I =]0; +\infty[$
 b) $f(x) = \frac{3 - 2 \ln x}{x - 2}, I =]1; +\infty[$
 c) $f(x) = \ln(x - 1)^2, I = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
 d) $f(x) = \ln \left(\frac{x+1}{x+3} \right), I =]-\infty; -3[$
 e) $f(x) = \sqrt{\ln x}, I =]1; +\infty[$
 f) $f(x) = \frac{1}{\ln x(x-1)}, I =]1; +\infty[.$

Déterminer les primitives d'une fonction

25 Dans chacun des cas ci-dessous, détermine les primitives de la fonction f sur l'intervalle I .

- a) $f(x) = \frac{1}{x+1}, I =]-1; +\infty[$
 b) $f(x) = \frac{3}{x-x}, I =]2; +\infty[$
 c) $f(x) = \frac{1}{2x+1}, I =]0; +\infty[$
 d) $f(x) = \frac{-2}{3x-1}, I =]-\infty; 0[$
 e) $f(x) = \frac{4x-1}{2x^2-x+1}, I = \mathbb{R};$
 f) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+5}, I = \mathbb{R}.$

2- Exercices de renforcement / approfondissement

26 Résous les systèmes suivants :

$$(S1) \begin{cases} x^2 - y^2 = 7500 \\ \ln x - \ln y = 2 \ln \sqrt{2} \end{cases} \quad (S2) \begin{cases} \log(xy) = 2 \\ x + y = 29 \end{cases}$$

27 Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{2x} - \frac{3}{2}x + 1. \text{ On note } (C) \text{ la courbe}$$

représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, 1, 1)$.

1- Détermine les limites de f en 0 et en $+\infty$.

2- Démontre que la droite (Δ) d'équation :

$$y = -\frac{3}{2}x + 1 \text{ est asymptote à } (C) \text{ en } +\infty.$$

3- Étudie les positions relatives de (C) et de (Δ) .

28 Pour chacune des fonctions ci-dessous :

Détermine les limites aux bornes de l'intervalle I indiqué puis, la dérivée sur I .

- a) $f(x) = \frac{\ln \sqrt{x}}{x}, I =]0; +\infty[$
 b) $f(x) = \frac{\ln x - 3}{\ln x + 5}, I =]e^{-5}; +\infty[$

c) $f(x) = (x \ln x)^2, I =]0; +\infty[$

d) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), I =]0; +\infty[;$

e) $f(x) = \ln(4x^2 + 2x + 1)^3, I = \mathbb{R}$

f) $f(x) = \ln \left(\frac{1}{2(x+1)} \right), I =]-1; +\infty[$

29 Soit f une fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x[\ln(x+1) - \ln x] & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

- 1- Étudie la continuité de f en 0.
 2- Étudie la dérivabilité de f en 0. Interprète graphiquement le résultat

30

Détermine les nombres réels a et b tels que la fonction f définie sur $] -1; +\infty[$ par :

$$f(x) = a + b \ln(1+x) \text{ vérifie : } f(0) = 3 \text{ et } f'(3) = \frac{3}{4}$$

2- Étudie les variations de f .

10 Soit a et b deux nombres réels.

On considère la fonction f définie par :

$f(x) = \ln(ax + b)$ et (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .

- 1- Détermine a et b tels que la courbe (C_f) passe par le point $A(2; 0)$ et la tangente en A ait pour coefficient directeur -2 .

11 Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{x(x-2)}{(x+1)^2}$.

- 1- Détermine trois nombres réels a , b et c tels que, pour tout nombre réel différent de -1 ,

$$f(x) = a + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$$

- 2- a) Déduis-en les primitives sur $] -1; +\infty[$ de f .
b) Détermine la primitive sur $] -1; +\infty[$ de f qui s'annule en 1 .

12 On considère la fonction numérique f définie

$$\text{par : } f(x) = \frac{5x^2 - x}{(x-1)(x^2+1)}$$

- 1- Détermine trois réels a , b et c tels que pour tous nombres réels x de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{c}{x-1}$.
2- Déduis-en les primitives de f sur $]1; +\infty[$.

13 Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J) . Construis les courbes des fonctions f , g , h , p et q qui vérifient :

$$f(x) = \ln(x+1) \quad ; \quad g(x) = \ln|x| \quad ; \quad h(x) = 1 + \ln(x);$$

$$p(x) = |\ln x| \quad ; \quad q(x) = 1 + \ln(x-1)$$

14 On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = (\ln x - 1)\ln x$. On note (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . (unité graphique 1cm).

- 1- Calcule : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.
2- a) Calcule : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.
b) Interprète graphiquement les résultats obtenus.
3- a) Justifie que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{2\ln x - 1}{x}$.
b) Étudie les variations de f et dresse son tableau de variation.
4- a) Résous l'équation $f(x) = 0$.
b) Détermine les équations des tangentes (T) et (T') aux points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses.
5- Construis (T) , (T') et (C_f) .

15 On considère la fonction f dérivable sur $]0; +\infty[$ et définie par : $f(x) = x \ln x$

- 1- Calcule les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2- Pour tout nombre réel $x > 0$, calcule $f'(x)$.
3- Étudie le signe de $f'(x)$ et déduis-en les variations de f .
4- Déduis-en que f admet un minimum sur $]0; +\infty[$ que l'on précisera.

On considère la fonction f dérivable sur $]0; +\infty[$ et définie par : $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$. On note (C_f) sa

courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) (unité graphique 2cm).

- 1- a) Calcule : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et interprète graphiquement le résultat.
b) Calcule : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et interprète graphiquement le résultat.
2- a) Justifie que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{-\ln x}{x^2}$.
b) Étudie les variations de f et dresse son tableau de variation.
3- a) Résous l'équation : $f(x) = 0$.
b) Soit E le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses.

Détermine une équation de la tangente (T) à (C_f) au point E .

- 4- Construis (T) et (C_f) dans le repère (O, I, J) .

16 On considère la fonction h dérivable sur $]0; +\infty[$ et définie par : $h(x) = (\ln x)^3 - 3\ln x$. On note (C_h) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) (unité graphique 1cm).

- 1- a) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x)$ et interprète graphiquement le résultat.
b) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$.
c) Démontre que la courbe (C_h) admet une branche parabolique de direction celle de (OI) en $+\infty$.
2- a) Démontre que pour tout $x > 0$,
$$h'(x) = \frac{2(\ln x - 1)(\ln x + 1)}{x}$$

b) Étudie les variations de h et dresse son tableau de variation.
3- Détermine les coordonnées des points d'intersection de (C_h) et de la droite (OI) .
4- Construis (C_f) .

Partie A

Soit la fonction g dérivable sur $]0; +\infty[$ et définie

$$\text{par : } g(x) = x^2 + 4 - 8 \ln x.$$

$$1- \text{ Calcule : } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x).$$

2- Étudie les variations de g puis, dresse son tableau de variation.

3- Donne le signe de g sur $]0; +\infty[$.

Partie B

Soit f la fonction dérivable sur $]0; +\infty[$ et définie

$$\text{par : } f(x) = 1 + \frac{4}{x^2} \ln x. \text{ On désigne par (C) la courbe}$$

représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, 1, 1)$.

$$1- a) \text{ Calcule : } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \text{ et interprète}$$

graphiquement le résultat obtenu.

$$b) \text{ Calcule : } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Interprète graphiquement les résultats obtenus.

$$2- a) \text{ Justifie que pour tout nombre réel } x \in]0; +\infty[,$$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}.$$

$$b) \text{ Dresse le tableau de variation de } f.$$

3- Détermine une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.

4- Trace (T) et construis (C) dans le même repère.

Le but de ce problème est d'étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, 1, 1)$ (unité : 2cm).

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie et dérivable sur

$$]0; +\infty[\text{ par : } g(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1} - \ln(x^2 + 1).$$

$$1- a) \text{ Calcule la limite de } g \text{ en } +\infty.$$

$$b) \text{ Démontre que : } \forall x \in]0; +\infty[,$$

$$g'(x) = \frac{2x(x+1)(1-1x)}{(x^2+1)^2}$$

c) Étudie les variations de g et dresse son tableau de variation.

2- Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0; +\infty[$ et $1,98 < \alpha < 1,99$.

3- Justifie que : $\forall x \in]0; \alpha[, g(x) > 0$ et $\forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) < 0$.

Partie B : Etude de la fonction f .

1- Justifie que la fonction f est impaire.

2- a) Justifie que : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2} = 1$ et déduis-en que f est dérivable en 0.

b) Calcule la limite de f en $+\infty$. Interprète graphiquement le résultat obtenu.

3- a) Pour tout x élément de $]0; +\infty[$, calcule $f'(x)$ et justifie que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.

b) Déduis-en les variations de f sur $]0; +\infty[$.

c) Démontre que : $f(\alpha) = \frac{2}{\alpha + \frac{1}{\alpha}}$ et donne un encadrement de $f(\alpha)$ à 10^{-2} près.

d) En utilisant les propriétés de la parité de f , dresse le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

4- a) Détermine une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point O.

b) Construis la droite (T) et la courbe (C).

Partie C : Etude d'une bijection

Soit h la restriction de f à l'intervalle $[-\alpha; \alpha]$ et (Γ) sa courbe représentative dans le même repère que (C).

1- Démontre que h est une bijection de $[-\alpha; \alpha]$ sur un intervalle K à préciser.

2- Soit h^{-1} la bijection réciproque de h et (Γ') la courbe représentative de h^{-1} dans le même repère que (C).

a) Détermine le plus petit intervalle sur lequel h^{-1} est dérivable.

b) Calcule $(h^{-1})'(0)$ et interprète le résultat obtenu.

3- a) Dresse le tableau de variation de h^{-1} .

b) Construis dans le même repère que (C), en vert, la courbe (Γ') . Explique ta méthode

3- Situation complexe

41 Lors d'une visite d'un site archéologique par des élèves de terminale scientifique d'un lycée dont ceux de votre classe, un guide vous donne les informations suivantes :



« Tant qu'un organisme est vivant, la quantité de carbone 14 qu'il contient est constante. Après la mort de l'organisme, cette quantité diminue. La mesure de la quantité de carbone restante permet de dater les organismes qui contiennent du carbone, à condition qu'ils datent de moins de 50000 ans.

Si x désigne la fraction de carbone 14 restant dans l'organisme fossilisé, une modélisation de l'âge $f(x)$ en années d'un fossile est établi par :

$$f(x) = -8310 \ln x.$$

Curieux, la majorité des élèves souhaitent déterminer graphiquement, l'arrondi à la centaine d'années près, l'âge d'un fossile qui contient encore 35 % de son carbone 14 et la fraction de carbone 14 restant dans un fossile de 15000 ans. Malheureusement, ils éprouvent des difficultés et ils te sollicitent pour les aider.

Réponds à leurs préoccupations, en argumentant.

42 Dans le but de diversifier ses ressources financières, le comité de gestion (COGES) de ton lycée a créé une entreprise. Cette entreprise fabrique et vend à des particuliers des panneaux publicitaires. Elle en produit chaque mois entre 50 et 2 500.

Si x représente le nombre de centaines de panneaux fabriqués et vendus, alors on admet que la

fonction f définie sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; 25\right]$ par :

$f(x) = -x^2 + 16x - 3(5 - 6 \ln x)$ représente le bénéfice mensuel de l'entreprise, en milliers de francs.

Le président du COGES souhaite faire un bilan. Il veut déterminer le nombre minimal et le nombre maximal de panneaux que l'entreprise doit produire et vendre pour être bénéficiaire puis, déterminer la valeur moyenne du bénéfice mensuel de l'entreprise, arrondie à la centaine de francs, lorsque celle-ci produit et vend entre 100 et 1800 panneaux. Il confie donc la tâche à ton père, membre du COGES. Perturbé par ces calculs, ton père te sollicite pour l'aider.

Réponds aux préoccupations du président du COGES.



VI- RENDEZ-VOUS DES CURIEUX !

En 1614, un mathématicien Ecossais, **JOHN NAPIER (1550-1617)**, plus connu sous le nom Français de **NEPER** publie « *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* ».

Dans cet ouvrage, qui est la finalité d'un travail de 20 ans, NEPER présente un outil permettant de simplifier des calculs opératoires : le logarithme. NEPER construit le mot à partir des mots grecs « logos » (logique) et « arithmos » (nombre).

Toute fois cet outil ne trouvera son essor qu'après la mort de NEPER.

Les mathématiciens anglais **HENRY BRIGGS (1561-1630)** et

WILLIAM OUGHRED (1574-1660) reprennent et prolongent les travaux de NEPER.

Les mathématiciens de l'époque établissent alors des tables de logarithmes de plus en plus précises.

L'intérêt d'établir ces tables logarithmiques est de permettre de substituer une multiplication par une addition.

Ceci peut paraître dérisoire aujourd'hui, mais il faut comprendre qu'à cette époque, les calculatrices n'existent évidemment pas, les nombres décimaux ne sont pas d'usage courant et les opérations posées telles que nous les utilisons ne sont pas encore connues. Et pourtant l'astronomie, la navigation ou le commerce demandent d'effectuer des opérations de plus en plus complexes.



6

Nombres Complexes

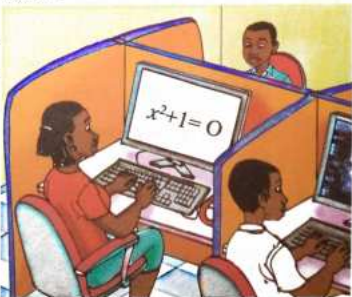
Notions essentielles :

- Forme algébrique d'un nombre complexe ;
- Conjugué d'un nombre complexe ;
- Forme trigonométrique d'un nombre complexe ;
- Forme exponentielle d'un nombre complexe ;
- Point image et vecteur image d'un nombre complexe ;
- Formule de Moivre et formules d'Euler ;
- Racines n -ième d'un nombre complexe non nul.

SITUATION D'APPRENTISSAGE

Une élève d'une classe de terminale D d'un lycée fait des recherches sur la résolution des équations dans une salle multimédia dudit établissement.

Elle découvre que, l'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solutions dans l'ensemble $\mathbb{R}$. Elle sait que depuis les classes antérieures, lorsqu'un ensemble est insuffisant, un nouvel ensemble est étudié (dans l'ordre : $\mathbb{N}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$). Elle se demande, s'il peut exister un nouvel ensemble dans lequel l'équation a des solutions. De retour en classe, elle pose le problème à son professeur de mathématiques. Ce dernier informe tous les élèves de la classe qu'il faut envisager effectivement un autre ensemble noté $\mathbb{C}$ contenant le nombre imaginaire i tel que $i^2 = -1$. Curieux, les élèves de la classe décident de s'organiser pour approfondir leurs connaissances sur ce nouvel ensemble $\mathbb{C}$.





I- ACTIVITÉS DE DÉCOUVERTE

1- ETUDE ALGÈBRE D'UN NOMBRE COMPLEXE

1.1 Connaître l'ensemble des nombres complexes-Identifier la forme algébrique d'un nombre complexe

Activité 1

- On considère l'équation $(E_1) : x^2 + 1 = 0$.
 - Justifie que l'équation (E_1) n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
 - On suppose qu'il existe un nombre i tel que : $i^2 = -1$. En conservant les règles de calcul utilisées dans $\mathbb{R}$, résous l'équation (E_1) .
- Résous, en utilisant la même méthode qu'à la question 1.b), chacune des équations suivantes : $(E_2) : x^2 + 7 = 0$; $(E_3) : x^2 + 6x + 10 = 0$. (On pourra remarquer que : $x^2 + 6x + 10 = (x + 3)^2 + 1$).
- Déduis des questions précédentes la forme générale des solutions des équations (E_1) , (E_2) et (E_3) .
- Soit $z_1 = -3 - i$ l'une des solutions de l'équation (E_3) . z_1 est sous la forme : $z_1 = a + ib$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$
 - Donne la valeur de a .
 - Donne la valeur de b .

Je fais le point de l'activité

- La forme générale des solutions de ces équations est : $z = a + ib$; $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.
L'écriture $a + ib$ est appelée forme algébrique du nombre complexe z .
- Le nombre réel -3 est appelé partie réelle de : $z_1 = -3 - i$.
On note : $\text{Re}(z_1) = -3$.
Le nombre réel -1 est appelé partie imaginaire de : $z_1 = -3 - i$.
On note : $\text{Im}(z) = -1$.

J'évalue mes acquis



Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

N°	Affirmations	Réponses
1	L'équation $x^2 + 5 = 0$ n'admet pas de solutions dans l'ensemble $\mathbb{C}$.	
2	Tout nombre réel est un nombre complexe.	
3	L'écriture $\sqrt{3} + \frac{1}{2}i$ est une forme algébrique.	
4	Si : $z = -\frac{3}{4} - \frac{1}{2}i$, alors : $\text{Re}(z) = -\frac{3}{4}$ et $\text{Im}(z) = \frac{1}{2}$.	
5	La partie imaginaire de $-0,5i + 3$ est $-0,5$.	
6	0 est un nombre complexe.	
7	Tout nombre complexe est un nombre réel.	

1.2 Connaître les propriétés relatives à l'égalité, à la somme, au produit et au quotient de deux nombres complexes

Activité 2

Soit z et z' deux nombres complexes de formes algébriques : $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ où a, b, a' et b' sont des nombres réels.

- Démontre que : $z = z' \Leftrightarrow a = a'$ et $b = b'$.
 - Déduis-en que : $z = 0 \Leftrightarrow a = 0$ et $b = 0$.
- Donne la forme algébrique de chacun des nombres suivants :

a) $z + z'$ b) $z - z'$ c) $z \times z'$ d) z^2 e) $\frac{1}{z}$ (pour $z' \neq 0$) f) $\frac{z}{z'}$ (pour $z' \neq 0$).

Je fais le point de l'activité

Soient a, b, a' et b' des nombres réels.

• $a + ib = a' + ib'$ équivaut à : $a = a'$ et $b = b'$

($z = z'$ équivaut à : $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z')$ et $\operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(z')$).

• $a + ib = 0$ équivaut à : $a = 0$ et $b = 0$;

($z = 0$ équivaut à : $\operatorname{Re}(z) = 0$ et $\operatorname{Im}(z) = 0$)

• $(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$;

• $(a + ib) - (a' + ib') = (a - a') + i(b - b')$;

• $(a + ib)(a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$;

• $(a + ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab$;

• Pour $(a' + ib') \neq (0 + i0)$: $\frac{1}{a' + ib'} = \frac{a'}{(a')^2 + (b')^2} - i \frac{b'}{(a')^2 + (b')^2}$;

• Pour $(a' + ib') \neq (0 + i0)$: $\frac{a + ib}{a' + ib'} = \frac{aa' + bb'}{(a')^2 + (b')^2} - i \frac{a'b - ab'}{(a')^2 + (b')^2}$.

l'évalue mes acquis



Soit : $z = -2 + i$ et $z' = 3 - 2i$.

Ecris sous forme algébrique chacun des nombres complexes suivants :

a) $z + z'$ b) $z - z'$ c) $z \times z'$ d) z^2 e) $\frac{1}{z}$ f) $\frac{z}{z'}$

1.3 Connaître les propriétés relatives à la puissance entière d'un nombre complexe

ACTIVITÉ 3

1- Soit z un nombre complexe non nul et n un nombre entier naturel non nul. Par analogie avec les propriétés dans l'ensemble $\mathbb{R}$. Recopie puis écris le nombre qui convient :

$z^0 = \dots$; $0^n = \dots$; $z^{n+1} = z \times \dots$; $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$

2- a) Calcule : i^0 ; i^1 ; i^2 ; i^3 ; i^4 ; i^5 ; i^6 ; i^7 ; i^8 ; i^9 ; i^{10} ; i^{11} .

b) Calcule i^{4n} ; i^{4n+1} ; i^{4n+2} ; i^{4n+3} pour tout nombre entier naturel n .

3- a) En utilisant la formule du binôme de Newton, calcule : $(z + z')^n$, pour tous nombres complexes z et z' non nuls et pour tout nombre entier naturel n plus grand que 1.

b) Calcule : $(1 + i)^4$ et $(1 - 2i)^5$.

Je fais le point de l'activité

• Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $z^0 = 1$; $0^n = 0$; $z^{n+1} = z^n \times z$; $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$.

• $\forall n \in \mathbb{N}$, $i^{4n} = 1$; $i^{4n+1} = i$; $i^{4n+2} = -1$; $i^{4n+3} = -i$.

l'évalue mes acquis

Calcule : i^{45} ; i^{2020} ; i^{2021} ; i^{2022} et i^{2025} .



1.4 Connaître la définition du conjugué et les propriétés relatives au conjugué d'un nombre complexe

Activité 4

- Soit z un nombre complexe de forme algébrique : $z = a + ib$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. On note $\bar{z}$ le nombre complexe tel que : $\bar{z} = a - ib$.
 - Justifier que : $\bar{\bar{z}} = z$; $\overline{-z} = -\bar{z}$.
 - Calculer chacun des nombres complexes suivants : $z + \bar{z}$; $z - \bar{z}$ et $z \times \bar{z}$.
 - Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur z pour que : $\bar{z} = z$.
 - Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur z pour que : $\bar{z} = -z$.
- Soit z et z' deux nombres complexes tels que : $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ et n un nombre entier relatif.
 - Justifier que : $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$; $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$.
 - Démontrer que : $\forall z' \neq 0, \overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\bar{z}'}$ (On pourra utiliser l'égalité : $z' \times \frac{1}{z'} = 1$).
 - Déduire-en que : $\forall z' \neq 0, \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$.
- Soit $z \neq 0$. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, (\bar{z}^n) = (\bar{z})^n$.
 - Déduire-en que, pour $n < 0, (\bar{z}^n) = (\bar{z})^n$. (On pourra poser : $N = -n$).

Je fais le point de l'activité

Le nombre complexe noté $\bar{z}$ tel que : $\operatorname{Re}(\bar{z}) = \operatorname{Re}(z)$ et $\operatorname{Im}(\bar{z}) = -\operatorname{Im}(z)$ est appelé conjugué du nombre complexe z .

J'évalue mes acquis



Calcule : $\overline{-3 + 2i}$; $\overline{\sqrt{3}i}$; $\overline{\pi}$; $\overline{-4i(1+i)}$; $\overline{\left(\frac{1}{1-i}\right)}$ et $\overline{\left(\frac{3-2i}{-2+i}\right)}$.

1.5 Connaître la définition du module et les propriétés relatives au module d'un nombre complexe

Activité 5

- Soit : $z_1 = -1 + 3i$, $z_2 = 2 - 4i$ et $z = a + ib$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.
Détermine les nombres réels positifs suivants : $r_1 = \sqrt{z_1 \times \bar{z}_1}$; $r_2 = \sqrt{z_2 \times \bar{z}_2}$ et $r = \sqrt{z \times \bar{z}}$.
- Soit z un nombre complexe de forme algébrique : $z = a + ib$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.
On note $|z|$ le nombre réel positif tel que : $|z| = \sqrt{[\operatorname{Re}(z)]^2 + [\operatorname{Im}(z)]^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$.
 - Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur z pour que : $|z| = 0$.
 - Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur z pour que : $|z| = 1$.
 - Calculer et comparer : $|-z|$, $|z|$, $|-z|$ et $|z|$.
 - Calculer et comparer : $|\operatorname{Re}(z)|$ et $|z|$; $|\operatorname{Im}(z)|$ et $|z|$.
- Soit z et z' deux nombres complexes tels que : $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ et n un nombre entier relatif.
 - Calculer et comparer : $|z \times z'|$ et $|z| \times |z'|$; $\left|\frac{1}{z}\right|$ et $\frac{1}{|z|}$ si $z \neq 0$.
 - Déduire-en que : $\forall z' \neq 0, \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$.
 - Calculer et comparer : $|z + z'|$ et $|z| + |z'|$.
- Soit $z \neq 0$. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, |z^n| = (|z|)^n$.
 - Déduire-en que, pour $n < 0, |z^n| = (|z|)^n$.

Je fais le point de l'activité

Le nombre réel positif noté $|z|$ tel que : $|z| = \sqrt{z \times \bar{z}}$ est appelé module du nombre complexe z .

J'évalue mes acquis



Calcule le module de chacun des nombres complexes suivants :

$$1 - 5i ; -\sqrt{3} + i ; -8 ; -2i ; 4i(1+i)^2 ; \frac{1}{-7+i} ; \frac{1}{(1+i)^2}$$

1.6 Représentation géométrique d'un nombre complexe : point image, affixe, vecteur image

Activité 6

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit les nombres complexes z_1, z_2 et z tels que : $z_1 = -1 + 3i, z_2 = 2 - 4i$ et

$z = a + ib, a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

- 1- Au nombre complexe z_1 , on associe le point $A_1(-1; 3)$; à z_2 , on associe le point $A_2(2; -4)$ et à z , on associe le point $M(a; b)$. Place dans le plan muni du repère les points A_1, A_2 et M .
- 2- Au nombre complexe z_1 , on associe le vecteur $\vec{u}_1(-1; 3)$; à z_2 , on associe le vecteur $\vec{u}_2(2; -4)$ et à z , on associe le vecteur $\vec{u}(a; b)$. Construis dans le plan muni du repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ les vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ et $\vec{u}$.
- 3- Représente l'ensemble des points M du plan tels que :
a) z est un nombre réel ; b) z est un imaginaire pur.
- 4- Soit K le milieu du segment $[A_1A_2]$ et $\vec{v} = \overrightarrow{A_1A_2}$.
a) Détermine le nombre complexe associé au point K .
b) Détermine le nombre complexe associé au vecteur $\vec{v}$.

Je fais le point de l'activité

- Le point $M(a; b)$ est appelé point-image du nombre complexe $a + ib$.
 $a + ib$ est appelé affixe du point $M(a; b)$.
- Le vecteur $\vec{u}(a; b)$ est appelé vecteur-image du nombre complexe $a + ib$.
 $a + ib$ est appelé affixe du vecteur $\vec{u}(a; b)$.

J'évalue mes acquis



Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1- Place le point-image de chacun des nombres complexes suivants :

$$1 - 4i ; -3i ; 2 ; -2 + i$$

- 2- Détermine l'ensemble des points-images des nombres complexes z tels que z est un nombre réel strictement négatif.

2- ETUDE TRIGONOMETRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE

2.1 Connaître la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul

Activité 7

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit les nombres complexes z_1, z_2, z_3 et z tels que : $z_1 = -3, z_2 = 2i, z_3 = -1 + i$ et $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

On désigne respectivement par M_1, M_2, M_3 et M les points-images de z_1, z_2, z_3 et z .

- 1- Place M_1, M_2, M_3 et M dans le plan muni du repère.
- 2- Détermine la mesure principale et deux autres mesures de chacun des angles orientés suivants :

a) $(\widehat{OI, OM_1})$ b) $(\widehat{OI, OM_2})$ c) $(\widehat{OI, OM_3})$ d) $(\widehat{OI, OM})$

3- Soit O le point image du nombre complexe nul.

Dis si l'on peut définir l'angle $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OO})$. Justifie ta réponse

Je fais le point de l'activité

Soit z un nombre complexe non nul et M son point image.

La mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ est appelé l'argument principal de z .

On le note : $\text{Arg}(z)$.

J'évalue mes acquis



Détermine l'argument principal de chacun des nombres complexes suivants :

$$1+i; 2; -i; \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i; 2021.$$

2.2 Identifier la forme trigonométrique et la forme exponentielle d'un nombre complexe non nul

Activité 8

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, j) .

Soit z un nombre complexe non nul de forme algébrique $a+ib$ et M son point-image.

On désigne par r le module de z et θ son argument de z . ($r \in \mathbb{R}^+$; $\theta \in \mathbb{R}$).

1- Justifie que : $a = r \cos \theta$ et $b = r \sin \theta$.

2- Exprime z en fonction de r et θ .

3- Soit z' un nombre complexe non nul tel que : $z' = |z'|(\cos \theta' + i \sin \theta')$, $\theta' \in \mathbb{R}$.

Détermine une condition nécessaire et suffisante pour que $z' = z$.

4- En posant $\cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$, donne une autre écriture de z en fonction de $e^{i\theta}$.

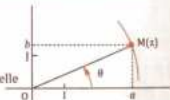
Je fais le point de l'activité

• Tout nombre complexe non nul z de module r et d'argument θ peut s'écrire sous la forme :

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

• L'écriture $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$; $r \in \mathbb{R}^+$ et $\theta \in \mathbb{R}$, est appelée forme trigonométrique du nombre complexe non nul z .

• L'écriture $z = re^{i\theta}$, $r \in \mathbb{R}^+$ et $\theta \in \mathbb{R}$ est appelée forme exponentielle du nombre complexe non nul z .



J'évalue mes acquis



1- Ecris sous forme trigonométrique chacun des nombres complexes a, b, c et d suivants : $a = 1+i$; $b = 1-i\sqrt{3}$; $c = \sqrt{3}+i$; $d = i$

2- Ecris sous forme exponentielle chacun des nombres complexes u, v, w et d suivants : $u = -1+i\sqrt{3}$; $v = -1$; $w = -\sqrt{3}+i$; $d = i$

2.3 Connaître les propriétés des arguments

Activité 9

Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes non nuls tels que :

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1} \quad (r_1 \in \mathbb{R}^+; \theta_1 \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad z_2 = r_2 e^{i\theta_2} \quad (r_2 \in \mathbb{R}^+; \theta_2 \in \mathbb{R}).$$

1- Détermine la forme exponentielle de chacun des nombres complexes ci-dessous en utilisant les propriétés des puissances.

a) $z_1 z_2$; b) $\frac{z_1}{z_2}$; c) $\frac{z_1}{z_2}$; d) $z_1^n, n \in \mathbb{Z}$.

2- Dédus-en : a) $\arg(z_1 z_2)$; b) $\arg\left(\frac{1}{z_1}\right)$; c) $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$; d) $\arg(z_1^n)$, $n \in \mathbb{Z}$

Je fais le point de l'activité

$$\text{On a : } z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} ; \frac{1}{z_1} = \frac{1}{r_1} e^{-i\theta_1} ; \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} ; z_1^n = r_1^n e^{in\theta_1}$$

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\arg\left(\frac{1}{z_1}\right) = -\arg(z_1) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\arg(z_1^n) = n \arg(z_1) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

J'évalue mes acquis



Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes tels que : $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = -\sqrt{3} + i$.

Détermine le module et un argument de chacun des nombres complexes suivants :

$$z_1 ; z_2 ; \frac{1}{z_2} ; \frac{z_1}{z_2} ; (z_1)^3 ; (z_2)^3 \text{ et } \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2$$

2.4 Connaître les formules de Moivre et d'Euler

Activité 10

Soit n un entier relatif et z le nombre complexe non nul tel que :

$$z = \cos\theta + i\sin\theta, \theta \in \mathbb{R}$$

1- Ecris z^n sous forme trigonométrique.

2- On pose : $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$ et $\cos n\theta + i\sin n\theta = e^{in\theta}$.

a) Exprime $\cos\theta$ en fonction de $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$, puis $\sin\theta$ en fonction de $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$.

b) Exprime $\cos(n\theta)$ en fonction de $e^{in\theta}$ et $e^{-in\theta}$, puis $\sin(n\theta)$ en fonction de $e^{in\theta}$ et $e^{-in\theta}$.

Je fais le point de l'activité

Pour tout nombre réel θ et pour tout nombre entier relatif n , on a :

• $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$. Cette formule est appelée formule de Moivre.

• $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$; $\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$. Ces formules sont appelées formules d'Euler.

• On a : $\cos(n\theta) = \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2}$; $\sin(n\theta) = \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i}$

J'évalue mes acquis



1- Calcule $(-\sqrt{3} + i)^{2021}$.

2- Linéarise $\sin^3(x)$ c'est-à-dire exprime $\sin^3(x)$ en fonction de $\cos 3x$ et $\sin 3x$ en utilisant la formule d'Euler.

3- RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS DANS $\mathbb{C}$

3.1 Connaître les racines carrées d'un nombre complexe

Activité 11

On donne Z et z deux nombres complexes tels que : $Z = -5 - 12i$ et $z = x + iy$.

On rappelle que z est une racine carrée de Z revient à écrire que : $z^2 = Z$.

1- a) Détermine le module des nombres complexes z^2 et Z et justifie que : $x^2 + y^2 = 13$

$$\text{b) Justifie que : } z^2 = Z \text{ équivaut à : } \begin{cases} x^2 - y^2 = -5 & (1) \\ x^2 + y^2 = 13 & (2) \\ xy = -6 & (3) \end{cases}$$

- 2-a) Détermine les valeurs de x .
- b) Détermine les valeurs de Y pour chaque valeur de x .
- 3- Dédus les racines carrées du nombre complexe $-5 - 12i$.

Je fais le point de l'activité

On donne deux nombres complexes Z et z .

z est une racine carrée de Z revient à dire que : $z^2 = Z$.

l'évalue mes acquis



Détermine les racines carrées de chacun des nombres complexes suivants :

- a) $-3 + 4i$; b) -5 ; c) $8i$.

3.2 Résoudre une équation du second degré

Activité 12

1- Résous dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

- a) $z^2 - 4z + 4 = 0$ b) $z^2 + 4 = 0$ c) $z^2 - 4z + 4 = 0$.

2- Soit l'équation (E) : $z^2 - iz + 1 + 3i = 0$ où z est un nombre complexe.

- a) Détermine les racines carrées du nombre complexe $-5 - 12i$.

(On pourra utiliser les résultats de l'activité 11).

- b) Calcule le discriminant Δ de l'équation (E).

- c) Dédus-en la résolution de l'équation (E).

3- Explique ta méthode pour résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation du second degré : $az^2 + bz + c = 0$.

Je fais le point de l'activité

L'équation (E) : $az^2 + bz + c = 0$ où a, b et c sont des nombres complexes

($a \neq 0$) est une équation du second degré dans $\mathbb{C}$.

l'évalue mes acquis



Résous dans $\mathbb{C}$ chacune des équations du second degré ci-dessous.

- (1) $z^2 + 16 = 0$; (2) $z^2 - 5z + 9 = 0$; (3) $z^2 - z - 2 = 0$;
(4) $z^2 - 6z + 9 = 0$; (5) $z^2 + (2 + 3i)z - 2 + 4i = 0$.

3.3 Racines n -ièmes d'un nombre complexe non nul

Activité 13

Soit Z un nombre complexe non nul de module r et d'angle θ ($Z = re^{i\theta}$; $r \in \mathbb{R}^+$; $\theta \in \mathbb{R}$) , et n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On se propose de déterminer les nombres complexes z solutions de l'équation (E) : $z^n = Z$.

On pose : $z = \rho e^{i\alpha}$, ($\rho \in \mathbb{R}^+$; $\alpha \in \mathbb{R}$)

- 1- Démontre que : z est solution de (E) $\Leftrightarrow \rho = \sqrt[n]{r}$ et $\alpha = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$.

2- On pose : $z_k = \sqrt[n]{r} e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})}$ et on désigne par $M_0, M_1, \dots$ et M_{n-1} les points images respectifs des nombres complexes $z_0, z_1, \dots$ et z_{n-1} .

- a) Calcule $OM_0, OM_1, \dots$ et OM_{n-1} , puis déduis que les points $M_0, M_1, \dots$ et M_{n-1} appartiennent à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

- b) Démontre que : $\text{Mes}(\widehat{OM_k, OM_{k+1}}) = \frac{2\pi}{n}$, pour tout nombre réel tel que : $k \in \{0 ; 1 ; 2 ; \dots ; n-1\}$.

3- Calcule : $z_0 + z_1 + z_2 + \dots + z_{n-1}$.

4- Déduis de la question 1) les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$.

Je fais le point de l'activité

Soit n un nombre entier naturel non nul et z un nombre complexe.

On appelle racine n -ièmes de z tout nombre complexe z tel que : $z^n = z$.

J'évalue mes acquis



1- Justifie que $1 - i$ est une racine cubique de $-2(1 + i)$.

2- Détermine les racines cubiques de chacun des nombres complexes suivants et représente les points images de ces racines cubiques dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, i, j) .

a) 1 ; b) $1 - i\sqrt{3}$

II- RÉSUMÉ DE COURS



1- ÉTUDE ALGÉBRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE

1.1- Ensemble des nombres complexes -Forme algébrique d'un nombre complexe

a) Introduction- Définition

On a introduit un nombre "i" dit imaginaire.

Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$ et contenant l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels et un nombre imaginaire noté i vérifiant $i^2 = -1$.

Cet ensemble $\mathbb{C}$ s'appelle ensemble des nombres complexes.

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$, l'addition et la multiplication ont les mêmes règles de calculs que dans $\mathbb{R}$.

Tout nombre complexe s'écrit sous la forme $a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$.

b) Forme algébrique

Notation et vocabulaire

Soit a et b deux nombres réels.

L'écriture $z = a + ib$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ est appelée **forme algébrique** du nombre complexe z .

Le nombre réel a est appelé **partie réelle** de z et noté : $\text{Re}(z)$.

Le nombre réel b est appelé **partie imaginaire** de z et noté : $\text{Im}(z)$.

Si $b = 0$ alors $z = a$; z est un nombre réel.

Si $a = 0$ alors $z = ib$; z est dit **nombre imaginaire pur**.

L'ensemble des imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$ et l'ensemble des imaginaires purs non nuls est noté $i\mathbb{R}^*$.



Soit z un nombre complexe.

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Im}(z) = 0.$$

$$z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Re}(z) = 0.$$

1.2-   galit  , somme, produit et quotient de deux nombres complexes

a)   galit   de deux nombres complexes

Soient a, b, a' et b' des nombres réels.

z et z' deux nombres complexes tels que : $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.

$$a + ib = a' + ib' \Leftrightarrow a = a' \text{ et } b = b'; \{z = z' \Leftrightarrow \text{Re}(z) = \text{Re}(z') \text{ et } \text{Im}(z) = \text{Im}(z')\}.$$

$$a + ib = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ et } b = 0; \{z = 0 \Leftrightarrow \text{Re}(z) = 0 \text{ et } \text{Im}(z) = 0\}$$

b) Calculs dans $\mathbb{C}$

Soient a, b, a' et b' des nombres réels.

z et z' deux nombres complexes tels que : $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.

Somme

$$z + z' = (a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b').$$

Produit

$$z \times z' = (a + ib)(a' + ib') = (aa' - bb') + i(a'b + ab').$$

$$z \times z = (a + ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab.$$

Inverse

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul.

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{(a + ib) + (a - ib)} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Quotient

Soit $z' = a' + ib'$ un nombre complexe non nul.

$$\frac{z}{z'} = \frac{a + ib}{a' + ib'} = \frac{aa' + bb'}{(a')^2 + (b')^2} + i \frac{a'b - ab'}{(a')^2 + (b')^2}.$$

1.3 Puissance entière d'un nombre complexe

a)

- Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $z^0 = 1$; $0^n = 0$; $z^{n+1} = z^n \times z$; $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $i^{4n} = 1$; $i^{4n+1} = i$; $i^{4n+2} = -1$; $i^{4n+3} = -i$.

b) Formule du binôme de Newton

PROPRIÉTÉ 1

Pour tous nombres complexes non nuls x et y et pour tout nombre entier naturel n plus grand que 1 :

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^{n-k} y^k ; (x - y)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k x^{n-k} y^k$$

Triangle de Pascal : $C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p$.

	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Lecture : C_n^p se trouve à l'intersection de la colonne p et de la ligne n .

On a : $C_2^1 = 2$; $C_3^1 = 3$; $C_3^2 = 3$; $C_4^1 = 4$; $C_4^2 = 6$; $C_4^3 = 4$; $C_5^1 = 5$; $C_5^2 = 10$; $C_5^3 = 10$; $C_5^4 = 5$.

1.4 Conjugué d'un nombre complexe

DÉFINITION

Soit z un nombre complexe. On appelle conjugué de z et on note $\bar{z}$ le nombre complexe tel que : $\operatorname{Re}(\bar{z}) = \operatorname{Re}(z)$ et $\operatorname{Im}(\bar{z}) = -\operatorname{Im}(z)$.

Si $z = a + ib$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, alors : $\bar{z} = a - ib$.

PROPRIÉTÉ 1

Soit z un nombre complexe de forme algébrique : $z = a + ib$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. On a :

$$\bar{\bar{z}} = z ; \overline{-z} = -\bar{z} ; z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z) = 2a ; z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z) = 2ib ;$$

$$z \times \bar{z} = [\operatorname{Re}(z)]^2 + [\operatorname{Im}(z)]^2 = a^2 + b^2.$$

• z est réel si et seulement si $\bar{z} = z$.

• z est imaginaire pur si et seulement si $\bar{z} = -z$.

• Soit z et z' deux nombres complexes tels que : $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ et n un nombre entier relatif. On a :

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}' ; \overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}' ; \left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{\bar{z}} \quad (z \neq 0) ;$$

$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'} \quad (z' \neq 0) ; \forall n \in \mathbb{Z} ; \bar{z}^n = \overline{z^n}, (z \neq 0).$$



$$\forall z \in \mathbb{C}, \forall z' \in \mathbb{C}^* : \frac{z}{z'} = \frac{z \times \bar{z}'}{z' \times \bar{z}'}$$

1.5 Module d'un nombre complexe
DÉFINITION

On appelle module d'un nombre complexe z , le nombre réel positif noté $|z|$ tel que : $|z| = \sqrt{z \times \bar{z}}$.
Si $z = a + ib$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, alors : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

PROPRIÉTÉ 2

• Soit z et z' deux nombres complexes et n un nombre entier relatif. On a :

$$|\bar{z}| = |z| ;$$

$$|\operatorname{Re}(z)| \leq |z| ; |\operatorname{Im}(z)| \leq |z| ;$$

$$|z \times z'| = |z| \times |z'| ;$$

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} \quad (z \neq 0) ; \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad (z' \neq 0) ;$$

$$|z + z'| \leq |z| + |z'| \quad (\text{Inégalité triangulaire}) ;$$

$$|z^n| = (|z|)^n.$$

$$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0.$$

$$|z| = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z} \quad (z \neq 0).$$

1.6 Représentation géométrique d'un nombre complexe

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On note $z = a + ib$

Définitions et vocabulaire

A tout nombre complexe $a + ib$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ on fait correspondre dans le plan, le point $M(a ; b)$ et inversement.

• Le point $M(a ; b)$ est appelé point image du nombre complexe $a + ib$.

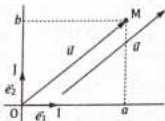
On note : $M(z)$.

• $a + ib$ est appelé affixe du point $M(a ; b)$. On note : z_M .

• A tout nombre complexe $a + ib$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ on fait correspondre dans le plan, le vecteur $\vec{u}(a ; b)$ et inversement.

• Le vecteur $\vec{u}(a ; b)$ est appelé vecteur image du nombre complexe $a + ib$.

• $a + ib$ est appelé affixe du vecteur $\vec{u}(a ; b)$. On note : $z_{\vec{u}}$ ou z_u .



• Le plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{OI}, \vec{OJ})$ est appelé plan complexe.

La droite de repère $(O; \vec{OI})$ est appelée axe réel et celle de repère $(O; \vec{OJ})$ est appelée axe imaginaire.



$$z_M \in \mathbb{R} \Leftrightarrow M \in (OI)$$

$$z_M \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow M \in (OJ)$$

L'affixe z_K de K , milieu de $[A_1A_2]$, est tel que : $z_K = \frac{z_{A_1} + z_{A_2}}{2}$.

L'affixe $z_{\vec{A_1A_2}}$ de $\vec{A_1A_2}$ est tel que : $z_{A_1A_2} = z_{A_2} - z_{A_1}$ et $A_1A_2 = |z_{A_2} - z_{A_1}|$,
 $|z| = OM = \|\vec{u}\|$.

2- ETUDE TRIGONOMETRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE

Dans cette partie, le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, i, j) .

2.1- Argument d'un nombre complexe non nul

DÉFINITION

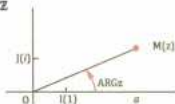
Soit z un nombre complexe non nul et M son point image.

• La mesure principale de l'angle orienté $(\vec{OI}, \vec{OM})$ est appelé l'argument principal de z .
 On le note : $\text{Arg}(z)$.

• Toute mesure de l'angle orienté $(\vec{OI}, \vec{OM})$ est un argument de z . On le note : $\arg(z)$.

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \arg(z) = \text{Arg}(z) + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

$$\arg(z) = \text{mes}(\vec{OI}, \vec{OM}) + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$$



• Le nombre complexe 0 n'admet pas d'argument.

• z est un nombre réel non nul si et seulement si $\arg(z) = 0$ ou $\arg(z) = \pi$.

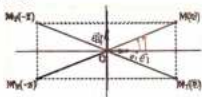
• z est imaginaire pur non nul si et seulement si $\arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

• Pour tout nombre complexe z non nul, on a :

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$\arg(-z) = \pi + \arg(z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$\arg(\bar{z}) = \pi - \arg(z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$



2.2 Forme trigonométrique et forme exponentielle d'un nombre complexe non nul

a) Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

PROPRIÉTÉ

• Tout nombre complexe non nul z de module r et d'argument θ peut s'écrire sous la forme : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

• L'écriture $z = r(\cos\theta + i\sin\theta); r \in \mathbb{R}_+, \theta \in \mathbb{R}$, est appelée forme trigonométrique du nombre complexe non nul z .



$$(r = |z| \text{ et } \theta = \arg(z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z})$$

• Soit z et z' deux nombres complexes non nuls.

$$z = z' \Leftrightarrow |z| = |z'| \text{ et } \arg(z) = \arg(z') + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

• Soit les nombres réels a et b tels que : $a \neq 0, b \neq 0, r \in \mathbb{R}^+, \theta \in \mathbb{R}$.

$$a + ib = r(\cos\theta + i\sin\theta) \Leftrightarrow r = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ et } \begin{cases} \cos\theta = \frac{a}{r} \\ \sin\theta = \frac{b}{r} \end{cases}$$

Exemples

$$-5 = 5(\cos\pi + i\sin\pi); 1 - i = \sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4}))$$

b) Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul

$$\text{On pose : } \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$$

PROPRIÉTÉ - DÉFINITION

• Tout nombre complexe non nul z de module r et d'argument θ peut s'écrire sous la forme :

$$z = re^{i\theta}$$

• L'écriture $z = re^{i\theta}$, $r \in \mathbb{R}^+$ et $\theta \in \mathbb{R}$, est appelée la forme exponentielle de z .

$$z = |z| e^{i\arg(z)}$$

Exemples

$$-5 = 5e^{i\pi}; 1 - i = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

PROPRIÉTÉ

Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes non nuls tels que : $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ ($r_1 \in \mathbb{R}^+$ et $\theta_1 \in \mathbb{R}$) et $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ ($r_2 \in \mathbb{R}^+$ et $\theta_2 \in \mathbb{R}$) et n un entier relatif.

$$\text{On a : } z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}; \frac{1}{z_1} = \frac{1}{r_1} e^{-i\theta_1}; \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}; z_1^n = (r_1)^n e^{in\theta_1}$$

2.3 Propriété des arguments

PROPRIÉTÉ

Pour tous nombres complexes non nuls z_1 et z_2 , pour tout nombre entier relatif n , on a :

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\arg\left(\frac{1}{z_1}\right) = -\arg(z_1) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\arg(z_1^n) = n \arg(z_1) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

2.4 Formules de Moivre et d'Euler

a) Formule de Moivre

PROPRIÉTÉ

Pour tout nombre réel θ et pour tout nombre entier relatif n , on a :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Cette formule est appelée formule de Moivre.

b) Formules d'Euler

PROPRIÉTÉ

Pour tout nombre réel, on a :

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}; \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Ces formules sont appelées formules d'Euler.



Pour tout nombre réel θ et pour tout nombre entier relatif n , on a :

$$\text{On a : } \cos n\theta = \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2}; \quad \sin n\theta = \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i}$$

3- RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS DANS $\mathbb{C}$

3.1 Racine carrée d'un nombre complexe

DÉFINITION

Soit Z un nombre complexe non nul, on appelle racine carrée de Z , tout nombre complexe z tel que $z^2 = Z$.

Détermination de la racine carrée d'un nombre complexe

On donne deux nombres complexes Z et z tels que : $Z = a + ib$, $z = x + iy$ avec z une racine carrée de Z .

$$z^2 = Z \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a & (1) \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} & (2) \\ 2xy = b & (3) \end{cases}$$

En faisant : (1) + (2),

En utilisant (3), on détermine les valeurs de y pour chaque valeur de x .

On obtient ainsi les deux racines carrées de Z .

Les deux racines carrées de Z sont opposées.

Soit Z et Z' deux nombres complexes non nuls.

$$Z = Z' \Leftrightarrow \begin{cases} |Z| = |Z'| \\ \operatorname{Re}(Z) = \operatorname{Re}(Z') \\ \operatorname{Im}(Z) = \operatorname{Im}(Z') \end{cases}$$

$$Z = Z' \Leftrightarrow \begin{cases} |Z| = |Z'| \\ \arg(Z) = \arg(Z') + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

3.2 Equation du second degré dans $\mathbb{C}$

DÉFINITION

On appelle équation du second degré dans $\mathbb{C}$, toute équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ où a, b et c sont des nombres complexes avec $a \neq 0$.

PROPRIÉTÉ

Soit l'équation du second degré (E) : $x \in \mathbb{C}$, $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C}$).

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de l'équation (E) et on désigne par δ et $-\delta$ les racines carrées dans $\mathbb{C}$ de Δ .

• Si $\Delta = 0$, alors l'équation (E) a une solution double : $-\frac{b}{2a}$.

• Si $\Delta \neq 0$, alors l'équation (E) a deux solutions distinctes : $x_1 = \frac{-b + \delta}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b - \delta}{2a}$.

3.3 Racines nièmes d'un nombre complexe

DÉFINITION

Soit n un nombre entier naturel plus grand que 1 et Z un nombre complexe non nul. On appelle racine n -ièmes de Z tout nombre complexe z tel que : $z^n = Z$.

PROPRIÉTÉ

Soit n un nombre entier naturel plus grand que 1 et Z un nombre complexe non nul.

- Tout nombre complexe non nul de forme exponentielle $re^{i\theta}$ ($r \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in \mathbb{R}$) admet

n racines n -ièmes qui sont les nombres complexes z_k tels que :

$$z_k = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}, k \in \{0; 1; 2; \dots; n-1\}.$$

- Le plan étant muni d'un repère orthonormé (O, I, J) , les points images des n racines n -ièmes sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{r}$.



La somme des n racines n -ièmes d'un nombre complexe non nul est nulle.

c) Racines n -ièmes de l'unité

DÉFINITION

Soit n un nombre entier naturel plus grand que 1.

On appelle racine n -ièmes de 1 (ou de l'unité) tout nombre complexe z tel que : $z^n = 1$.

Exemples

Les racines cubiques de l'unité sont : 1, j et $\bar{j}$ avec $j = \frac{-1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$.

PROPRIÉTÉ

Les n racines n -ièmes de l'unité sont les nombres complexes z_k tels que :

$$z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k \in \{0; 1; 2; \dots; n-1\}.$$

4- QUELQUES CARACTÉRISATIONS COMPLEXES

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J) .

- Soit A, B et C trois points du plan.

- L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A$.
- Si $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, alors $z_C = z_A + z_B$.
- Si $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$, alors $z_M = z_{AB}$.
- Si C est le milieu de $[AB]$ alors $z_C = \frac{z_A + z_B}{2}$.
- $|z_A| = d(O, A) = OA$.
- $|z_B - z_A| = d(A, B) = AB$.

- Soit un nombre complexe non nul z et A, B, C et D des points distincts du plan.

- Si $M(z)$ est le point image de z , alors $\arg(z) = \text{mes}(\widehat{OI, OM})$.
- $\text{mes}(\widehat{OI, AB}) = \arg(z_{AB}) = \arg(z_B - z_A)$.
- $\text{mes}(\widehat{AB, CD}) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$.

III-

MÉTHODE



• **Démontrer qu'un nombre complexe est un nombre réel**

Pour démontrer qu'un nombre complexe z est un nombre réel, on peut utiliser l'une des méthodes suivantes :

- Justifier que : $\text{Im}(z) = 0$;
- Justifier que : $\bar{z} = z$;
- Justifier que : $\arg(z) = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, (pour $z \neq 0$).

• **Démontrer qu'un nombre complexe est un nombre imaginaire pur**

Pour démontrer qu'un nombre complexe z est un nombre imaginaire pur, on peut utiliser l'une des méthodes suivantes :

- Justifier que : $\text{Re}(z) = 0$;
- Justifier que : $\bar{z} = -z$;
- Justifier que : $\arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, (pour $z \neq 0$).

• **Ecrire un nombre complexe sous forme algébrique**

Pour écrire un nombre complexe sous sa forme algébrique, il suffit de l'écrire sous la forme $A + iB$ où A et B sont des nombres réels.

• **Ecrire un nombre complexe sous forme trigonométrique**

Pour écrire un nombre complexe sous sa forme trigonométrique, il suffit de l'écrire sous la forme $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ où $r \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in \mathbb{R}$ ($r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$).

• **Ecrire un nombre complexe sous forme exponentielle**

Pour écrire un nombre complexe sous sa forme exponentielle, il suffit de l'écrire sous la forme $re^{i\theta}$ où $r \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in \mathbb{R}$ ($r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$).

• **Déterminer les racines carrées sous forme algébrique d'un nombre complexe non nul**

Pour déterminer les racines carrées d'un nombre complexe Z non nul tel que : $Z = a + ib$, on peut utiliser la méthode suivante :

- on pose : $z = x + iy$;
- on résout le système ci-dessous :
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ 2xy = b \end{cases}$$
- on obtient deux nombres complexes opposés.

• **Résoudre une équation du second degré**

Pour résoudre une équation du second degré dans $\mathbb{C}$ de la forme :

$ax^2 + bx + c = 0$ ($a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}, c \in \mathbb{C}$), on peut utiliser la méthode suivante :

- on calcule le discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$;
- on détermine les racines carrées dans $\mathbb{C}$ de Δ : δ et $-\delta$;
- Si : $\Delta = 0$, alors l'équation (E) a une solution double : $-\frac{b}{2a}$;
- Si : $\Delta \neq 0$, alors l'équation (E) a deux solutions distinctes : $z_1 = \frac{-b + \delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}$.

• **Déterminer les racines n-èmes d'un nombre complexe non nul**

Pour déterminer les racines n-èmes d'un nombre complexe Z non nul tel que :

que : $z = re^{i\theta}$ ($r \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in \mathbb{R}$), il suffit de calculer les nombres complexes z_k tels que :

$$z_k = \sqrt[n]{r} e^{i(\frac{\theta}{n} + 2k\pi/n)}, k \in \{0; 1; 2; \dots; n-1\}.$$

On obtient n racines n -ièmes de Z .

IV- SAVOIR-FAIRE



Savoir-faire 1- Écrire un nombre complexe sous forme algébrique

ÉNONCÉ

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J) . A tout nombre complexe z différent de $1+i$, on

associe le nombre complexe Z tel que : $Z = \frac{z-2i}{z-1-i}$. On pose $z = x + iy$ ($x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$).

Écrire Z sous forme algébrique.

SOLUTION COMMENTÉE

J'écris Z sous forme algébrique.

$$\text{On a : } Z = \frac{x + iy - 2i}{x + iy - 1 - i} = \frac{x - 2i + iy}{x - 1 - i + iy}$$

$$Z = \frac{(x - 2i + iy)(x - 1 + i - iy)}{(x - 1 - i + iy)(x - 1 + i - iy)} = \frac{x^2 - x + ix - ixy - 2ix + 2i + 2 - 2y + ixy - iy - y + y^2}{(x-1)^2 + (y-1)^2}$$

$$Z = \frac{(x^2 + y^2 - x - 3y + 2) + i(-x - y + 2)}{(x-1)^2 + (y-1)^2}$$

$$= \frac{x^2 + y^2 - x - 3y + 2}{(x-1)^2 + (y-1)^2} + i \frac{-x - y + 2}{(x-1)^2 + (y-1)^2}$$

Savoir-faire 2- Déterminer un ensemble de points (des lieux géométriques)

ÉNONCÉ

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J) . A tout nombre complexe z différent de $1+i$, on

associe le nombre complexe Z tel que : $Z = \frac{z-2i}{z-1-i}$. On pose $z = x + iy$ ($x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$).

- 1- Détermine l'ensemble (E) des points M d'affixes z tels que Z soit un nombre réel.
- 2- Détermine l'ensemble (F) des points M d'affixes z tels que Z soit un nombre imaginaire pur.
- 3- Détermine l'ensemble (G) des points M d'affixes z tels que $|Z| = 1$.

SOLUTION COMMENTÉE

$$\text{D'après l'exercice précédent, on a : } Z = \frac{x^2 + y^2 - x - 3y + 2}{(x-1)^2 + (y-1)^2} + i \frac{-x - y + 2}{(x-1)^2 + (y-1)^2}$$

$$\text{posons : } \begin{cases} X = \frac{x^2 + y^2 - x - 3y + 2}{(x-1)^2 + (y-1)^2} \\ Y = \frac{-x - y + 2}{(x-1)^2 + (y-1)^2} \end{cases}$$

1- Je détermine l'ensemble des points M d'affixes z tels que Z soit un nombre réel.

$$Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Im}(Z) = 0; \text{ soit } \frac{-x - y + 2}{(x-1)^2 + (y-1)^2} = 0; \text{ donc : } -x - y + 2 = 0 \text{ et } (x; y) \neq (1; 1).$$

L'ensemble (E) est la droite d'équation $y = -x + 2$ privée du point A(1; 1).

2- Je détermine l'ensemble des points M d'affixes z tels que Z soit un nombre imaginaire pur.
 $Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Re}(Z) = 0$; soit $\frac{x^2 + y^2 - x - 3y + 2}{(x-1)^2 + (y-1)^2} = 0$; donc : $x^2 + y^2 - x - 3y + 2 = 0$ et $(x; y) \neq (1; 1)$.
 $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 2 = 0$, soit $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ d'où :

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

Donc l'ensemble (F) est le cercle de centre $\Omega\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$ privé du point A(1; 1).

3- Je détermine l'ensemble des points M d'affixes z tels que $|Z| = 1$.

$$|Z| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z-2i}{z-1-i}\right| = 1, z \neq 1+i$$

$$\Leftrightarrow \frac{|z-2i|}{|z-1-i|} = 1, z \neq 1+i$$

$$\Leftrightarrow |z-2i| = |z-1-i|, z \neq 1+i$$

Donc l'ensemble (G) est la médiatrice du segment [PA] où P est le point d'axe $2i$ et A le point d'axe $1+i$.

Savoir-faire 3 : Déterminer la forme trigonométrique d'un nombre complexe

Exercice

Ecris sous forme trigonométrique chacun des nombres complexes a et b suivants :

$$a = 1 - i\sqrt{3} ; b = -7.$$

Solution commentée

J'écris sous forme trigonométrique le nombre complexe a

$$a = 1 - i\sqrt{3}$$

$$|a| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2 ; \text{ soit } \theta = \operatorname{Arg}(a), \text{ on a : } \begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \theta = -\frac{\pi}{3}$$

$$\text{Donc : } a = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

J'écris sous forme trigonométrique le nombre complexe b

$$b = -7.$$

$$|b| = \sqrt{(-7)^2 + 0^2} = 7 ; \text{ soit } \theta = \operatorname{Arg}(b) \text{ on a : } \begin{cases} \cos\theta = -1 \\ \sin\theta = 0 \end{cases} ; \quad \theta = \pi$$

$$\text{Donc : } b = 7(\cos \pi + i\sin \pi).$$

Savoir-faire 4 : Déterminer la forme exponentielle d'un nombre complexe

Exercice

1- Ecris sous forme exponentielle chacun des nombres complexes : $z_1 = -2 + 2i$ et $z_2 = -3 - i\sqrt{3}$.

2- a) Déduis-en la forme exponentielle du produit $z_1 z_2$.

b) Détermine les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

Solution commentée

1 J'écris sous forme exponentielle chacun des nombres complexes : $z_1 = -2 + 2i$ et $z_2 = -3 - i\sqrt{3}$.

$$z_1 = -2 + 2i$$

$$|z_1| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} ; \text{ soit } \theta = \operatorname{Arg}(z_1) \text{ on a : } \begin{cases} \cos\theta = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} ; \quad \theta = \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{Donc : } z_1 = 2\sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

$$z_2 = -3 - i\sqrt{3}$$

$$|z_2| = \sqrt{(-3)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} ; \text{ soit } \theta = \operatorname{Arg}(z_2) \text{ on a :}$$

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{-3}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta = \frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{2} \end{cases} ; \theta = -\frac{2\pi}{3}$$

$$\text{Donc : } z_2 = 2\sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

2-a) Je déduis la forme exponentielle du produit $z_1 z_2$

$$|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2| = 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{6}$$

$$\text{Arg}(z_1 \times z_2) = \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2) = \frac{3\pi}{4} - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{12}$$

$$\text{Donc : } z_1 \times z_2 = 4\sqrt{6} e^{i\frac{\pi}{12}}$$

b) Je détermine les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

$$z_1 z_2 = (-2 + 2i)(-3 - i\sqrt{3}) = 6 + 2\sqrt{3} + i(-6 + 2\sqrt{3})$$

$$z_1 z_2 = 4\sqrt{6}(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}) \text{ par identification, on a :}$$

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{6 + 2\sqrt{3}}{4\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \text{ et } \sin \frac{\pi}{12} = \frac{-6 + 2\sqrt{3}}{4\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

Savoir-faire 5 : Déterminer les racines carrées d'un nombre complexe

Énoncé

Détermine les racines carrées de chacun des nombres complexes suivants :

a) $Z = 7 + 24i$; b) $z = -4i$.

Solution commentée

Je détermine les racines carrées de $Z = 7 + 24i$

Déterminer les racines carrées de Z revient à déterminer les nombres complexes z tels que : $z^2 = Z$.

En posant $z = x + iy$ on a : $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ et $|z^2| = |(x + iy)^2| = |x + iy|^2 = x^2 + y^2$

$$Z = 7 + 24i ; |Z| = \sqrt{(7)^2 + (24)^2} = \sqrt{49 + 576} = \sqrt{625} = 25$$

$$z^2 = Z \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 - y^2 = 7 \\ 2xy = 24 \end{cases} \text{ ; en ajoutant membre à membre les deux premières équations ;}$$

on obtient : $2x^2 = 32$ donc : $x^2 = 16$; d'où $x = 4$ ou $x = -4$.

Pour $x = 4$; $y = 3$ et pour $x = -4$; $y = -3$

Donc les deux racines carrées de $Z = 7 + 24i$ sont : $4 + 3i$ et $-4 - 3i$.

Je détermine les racines carrées de $Z = -4i$.

$$Z = -4i ; |Z| = \sqrt{(0)^2 + (-4)^2} = \sqrt{16} = 4$$

$$z^2 = Z \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = -4 \end{cases} \text{ ; en ajoutant membre à membre les deux premières équations ;}$$

on obtient : $2x^2 = 4$ alors $x^2 = 2$ d'où $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$.

Pour $x = \sqrt{2}$; $y = -\sqrt{2}$ et pour $x = -\sqrt{2}$; $y = \sqrt{2}$.

Donc les deux racines carrées de $Z = -4i$ sont : $\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ et $-\sqrt{2} + \sqrt{2}i$.

V- JE M'EXERCE



1 - Exercices de fixation / Application

Connaître la forme algébrique d'un nombre complexe

1 Soit le nombre complexe : $z = 7 - 11i$

Coche les cases de la dernière colonne du tableau ci-dessous correspondant aux affirmations justes.

a	La partie réelle de z est $7i$	
b	La partie imaginaire de z est i	
c	La partie réelle de z est 7	
d	La partie imaginaire de z est -11	
e	La partie imaginaire de z est $-11i$	

2

1- Relie chaque nombre complexe à sa partie réelle.

Nombre complexe	Partie réelle
$-7 + 5i$	$2\sqrt{5}$
$\frac{\sqrt{3}}{4}i$	$1 + \sqrt{3}$
$1 + \sqrt{3} + i$	-3
$3 + \frac{\sqrt{3}}{3}i$	3
$2\sqrt{5}$	$-\sqrt{7}$
$-3 - i$	0

2- Relie chaque nombre complexe à sa partie imaginaire.

Nombre complexe	Partie réelle
$-\sqrt{7} - 2i$	$\frac{-3}{2}$
$4i$	6
$-2i$	0
$2 + 6i$	-17
$-7 - 17i$	-7
$\frac{\sqrt{3}}{2}i$	-2

3 Détermine la forme algébrique de chacun des nombres complexes suivants :

a) $z = (2 + i)(1 - i) - (3 - 2i)^2 + (5 - i)(5 + i)$

b) $z = 3i(2 + 8i) - 7(5 - 2i) + (1 + 2i)^2$

4 Détermine le nombre complexe z tel que :

a) $(2 - i)z + i(z - 1) = (3 + 2i)z - 5$

b) $2z - 3i - 1 = 0$.

Connaître le conjugué d'un nombre complexe

5 Détermine le nombre complexe conjugué de chacun des nombres complexes suivants :

a) $2 + 4i$; b) $1 - 5i$; c) $2i(4 - i)$;

d) $(3 + i)(-5i + 3)$; e) $\frac{1}{2 + i}i$;

f) $\frac{3 - i}{6i - 2}$; g) 5 ; h) $6i$.

Calculer le module d'un nombre complexe

6 Calcule le module de chacun des nombres complexes suivants :

a) $2 + 4i$; b) $1 - 5i$; c) $-7 + i$;

d) $-1 - 3i$; e) $-6i$; f) -8 ;

g) $(\sqrt{2} + i\sqrt{3})(\sqrt{3} + i\sqrt{5})(\sqrt{2} + i\sqrt{5})$;

h) $\frac{1 + i}{1 - i}$; i) $\frac{(2 - 3i)(3 + 4i)}{(6 + 4i)(15 - 8i)}$

Déterminer les affixes d'un point, d'un vecteur

7 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J) .

On considère dans le repère (O, I, J) les points A, B et C de coordonnées respectives $(1 ; -3)$, $(4 ; 5)$ et $(-3 ; 2)$.

1- a) Détermine les affixes de chacun des points A, B et C.

b) Détermine les affixes de chacun des vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{BC}$.

2- Détermine l'abscisse du point K milieu du segment $[AB]$.

3- On définit les points D et E tels que :

$\vec{AD} = 2\vec{AB} + \vec{AC}$ et $3\vec{BE} = \vec{BC}$.

Détermine l'abscisse de chacun des points D et E.

Déterminer un ensemble de points

8 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J) d'unité graphique 1 cm.

On considère les points A(i) ; B($3 - i$) ; C($1 + 2i$) ; D($3i$) et E($2 + 2i$).

1- Place ces points dans le repère (O, I, J) .

2- Détermine et construis l'ensemble des points $M(z)$ tels que :

- $|z - i| = 3$;
- $|z - i| = |z - 3i|$;
- $|z - 3 + i| = |z - 2 - 2i|$.

11 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Au point M d'affixe $z = x + iy$, avec $z \neq \frac{1}{2}$, on associe

le point M' d'affixe $Z = \frac{z-2}{2z-1}$.

- Exprime les coordonnées X et Y de M' en fonction des coordonnées x et y de M .
- Détermine l'ensemble des points M du plan tels que :
 - Z soit un nombre réel.
 - Z soit un nombre imaginaire pur.
 - $|Z| = 1$.

Écrire un nombre complexe sous forme trigonométrique ou sous forme algébrique

12 Ecris sous forme trigonométrique chacun des nombres complexes suivants :

$$a = 1 + i; \quad b = 1 - i\sqrt{3}; \quad c = \sqrt{3} + i; \quad d = i;$$

13 On donne $z = (1 + i)(1 - i\sqrt{3})$.

$$z_1 = 1 + i\sqrt{3} + i(1 - i\sqrt{3}) \text{ et } z_2 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{1 - i}.$$

2- Exercices de renforcement / approfondissement

14 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Au point M d'affixe $z = x + iy$, avec $z \neq 1$, on associe

le point M' d'affixe $Z = \frac{z-3i}{z-1}$.

- Exprime les coordonnées X et Y de M' en fonction des coordonnées x et y de M .
- Détermine l'ensemble des points M du plan tels que :
 - Z soit un nombre réel.
 - Z soit un nombre imaginaire pur.
 - Le module de Z est égal à 1.

15

1- Détermine le module et un argument de z_1 .

$$z_2 \text{ et définies par : } z_1 = \frac{\sqrt{6} + i\sqrt{2}}{2}; \quad z_2 = 1 - i;$$

$$z = \frac{z_1}{z_2}$$

2- Déduis-en les valeurs exactes de : $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$

1- Ecris z sous forme algébrique.

2- Ecris sous forme trigonométrique chacun des nombres complexes z_1 et z_2 .

Déterminer les racines carrées d'un nombre complexe

16 Détermine les racines carrées de chacun des nombres complexes suivants :

$$a) 6 - 6i\sqrt{3}; \quad b) Z = 1 + i\sqrt{3}; \quad d) z = i$$

Résoudre des équations du second degré dans $\mathbb{C}$

17 Résous dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$(1) z^2 + 4 = 0; \quad (2) z^2 - 5z + 9 = 0;$$

$$(3) z^2 - z - 2 = 0; \quad (4) z^2 - 6z + 9 = 0;$$

$$(5) z^2 + iz + 1 + 3i = 0$$

18

Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - \bar{z} + 2 = 0$.

Déterminer les racines n -ièmes d'un nombre complexe

19 Soit $z = 1 + i\sqrt{3}$ un nombre complexe.

1- Ecris z sous forme trigonométrique.

2- Déduis les racines cubiques de z et représente les points images des racines cubiques de z dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

20 On donne deux nombres complexes définis par :

$$z_1 = -1 - i \text{ et } z_2 = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

1- Ecris $\frac{z_1}{z_2}$ sous forme algébrique.

2- Déduis-en un module et un argument de $\frac{z_1}{z_2}$.

3- Déduis des questions précédentes les valeurs exactes de : $\cos \frac{11\pi}{12}$ et $\sin \frac{11\pi}{12}$.

21 On donne : $z = \sqrt{3} + i$.

a) Ecris z sous forme trigonométrique et exponentielle.

b) Déduis z^{2021} sous forme algébrique.

22 On donne les nombres complexes $a = 5\sqrt{2}(1 + i)$ et $b = -5(1 + i\sqrt{3})$.

1- Détermine le module et un argument de a et b .

2- Soit Z le nombre complexe tel que : $aZ = b$.

Ecris Z sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.

3- Déduis les valeurs exactes de : $\cos \frac{13\pi}{12}$ et $\sin \frac{13\pi}{12}$.

1 Résous dans $\mathbb{C}$ les équations ci-dessous :

(E₁) : $ix^2 - (2 + 6i)x + 2 + 11i = 0$.

(E₂) : $z^3 - (6 + i)z^2 - (13 + 7i)z - 10(1 + i) = 0$
sachant que (E₂) admet une solution réelle.

2 On considère la fonction f définie par :

$f(z) = z^3 - 2(\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})$.

1- Démontre que $f(z)$ admet une racine imaginaire pure.

2- Détermine les nombres complexes a , b et c tels que : $f(z) = (z - 2i)(az^2 + bz + c)$.

3- Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$.

4- Ecris les solutions de l'équation $f(z) = 0$ sous forme algébrique, trigonométrique et exponentielle.

3 Soit l'équation (E) :

$z^3 + (4 - 5i)z^2 + (8 - 20i)z - 40i = 0$.

1- Démontre que (E) admet une solution imaginaire pure et la déterminer.

2- Démontre que (E) peut se mettre sous la forme : $(z - 5i)(z^2 + az + b)$; $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$.

3- Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

4 Soit P le polynôme défini par :

$P(z) = z^3 - (11 + 2i)z^2 + 2(17 + 7i)z - 42$.

1- Démontre qu'il existe un nombre réel α solution de l'équation : $P(z) = 0$.

2- Détermine le polynôme Q tel que :

$P(z) = (z - \alpha)Q(z)$.

3- Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $P(z) = 0$.

5

1- Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^5 = 1$.

2- a) Justifie que : $(1 + i)^5 = -4 - 4i$.

b) Déduis-en les solutions de l'équation

$z^5 = -4 - 4i$ et représente graphiquement leurs images dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(o; \vec{u}, \vec{v})$.

6 Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^4 = 8\sqrt{2}(-1 + i)$ et représente les solutions dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(o; \vec{u}, \vec{v})$.

7

1- Résous dans $\mathbb{C}$: $z^3 = 1$.

2- a) Développe : $(\sqrt{2} - i\sqrt{2})^3$.

b) Soit l'équation (E) : $z^3 = 4\sqrt{2}(-1 - i)$.

En posant $Z = \frac{z}{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}$, détermine sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique les solutions de l'équation (E).

3- Déduis-en les valeurs exactes de : $\cos \frac{5\pi}{12}$ et

$\sin \frac{5\pi}{12}$.

8 On considère le nombre complexe

$z = 1 + \sqrt{3} + i(\sqrt{3} - i)$.

1- Calcule z^6 .

2- a) Ecris z^2 sous forme trigonométrique.

b) Déduis-en le module et un argument de z .

3- Calcule z^6 .

9

1- Exprime $\sin 5x$ en fonction de $\sin x$.

2- Linéarise $\cos^3 x \sin^2 x$.

10

1- Soit l'équation (E) :

$z^3 + (-6 - 4i)z^2 + (12 + 21i)z + 9 - 45i = 0$.

a) Détermine la solution imaginaire pure z_0 de l'équation (E).

b) Achève la résolution de (E). (on appellera z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive et z_2 la troisième solution).

2- Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé $(o; \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $3i$, $3 + 3i$ et $3 - 2i$.

a) Place les points A, B et C dans le repère.

b) Calcule $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$.

Déduis-en la nature du triangle ABC.

11 Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O, 1, i)$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $a = -1 + i$, $b = -1 - i$, $c = 2i$ et $d = 2 - 2i$.

1- Place les points A, B, C et D dans le repère.

2- a) Calcule : $\frac{c - a}{d - a}$ et $\frac{c - b}{d - b}$.

b) Déduis-en la nature des triangles ACD et BCD.

3- Démontre que les points A, B, C et D sont cocycliques.

12

1- Calcule $\left(\frac{\sqrt{3} - i}{2}\right)^3$.

2- Résous dans $\mathbb{C}$, chacune des équations suivantes :

a) $z^3 - 1 = 0$; b) $z^3 = -i$; c) $u^2 - (-1 - i)u - i = 0$

d) $z^6 - (-1 - i)z^3 - i = 0$

11 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

A, B, C, D sont les points d'affixes respectives : $\sqrt{3} + 2i$; $\sqrt{3} + i$; $-2i$ et $1 - i$.

Calcule $\text{mes}(\widehat{AB}, \widehat{CD})$.

12 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

A, B, C sont les points d'affixes respectives $-2i$; $-2 - 5i$ et $4 + 4i$.

Démontre que les points A, B et C sont alignés.

13 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

A, B et C sont les points d'affixes respectives $-1 - i$; $4 + i$; $-2 + \frac{3}{2}i$.

Démontre que le triangle ABC est rectangle en A.

14 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

A, B et C sont les points d'affixes respectives 3 ; $3 - 2\sqrt{3} + 2i$ et $3 - 2\sqrt{3} + 2i$.

Démontre que le triangle ABC est équilatéral.

15 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

A, B, C et D sont les points d'affixes respectives $3 - i$; $\sqrt{3} + i$; $-\sqrt{3} + i$ et $-2i$.

Démontre que les points A, B, C et D sont cocycliques.

16 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

A, B et C sont les points d'affixes respectives $3 + i$; $2i$ et $2 - 2i$.

Démontre que le triangle ABC est rectangle isocèle en A.

17 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Soit $A(3 + i)$, $B(2i)$ et $C(2 - 2i)$.

1- Place les points A, B et C et démontre que le triangle ABC est rectangle isocèle.

2- Détermine l'affixe du point D tel que ABCD soit un parallélogramme. Place le point D.

3- Détermine l'affixe du point E, symétrique de A par rapport au milieu de [AB]. Place le point E.

18 a est un nombre réel quelconque. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) :

$$z^3 - (ia + 2\sqrt{3})z^2 + (2ia\sqrt{3} + 4)z - 4ai = 0.$$

1. Détermine le nombre réel a pour que $-2i$ soit solution de l'équation (E).

2- Détermine le polynôme Q de degré 2 tel que : $\forall z \in \mathbb{C}, z^3 + (2i - 2\sqrt{3})z^2 + (4 - 4i\sqrt{3})z + 8i = Q(z)(z - \sqrt{3} - i)$.

3- Résous l'équation (E) pour $a = -2$.

4- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, I, J) , on donne les points N, M et Q d'affixes respectives : $3 + i$; $-2i$ et $\sqrt{3} - i$.

a) Place dans le repère (O, I, J) , les points N, M et Q (on prendra 2 cm pour l'unité)

b) T représente le symétrique de M par rapport à (OJ)

Démontre que le triangle TMQ est rectangle en M. Démontre que les points M, Q, N et T sont cocycliques.

3- Situation complexe

19 En vue de préparer le prochain devoir de niveau, deux élèves d'une classe de Terminale D d'un lycée font des recherches à la bibliothèque du dit lycée. Ils découvrent dans un livre de Mathématique que l'équation

(E): $-z^3 + 6z - 20i = 0$ admet une solution imaginaire pure a et que si h et c sont les autres solutions de l'équation (E), (h ayant la partie réelle

positive), les points A, B et C d'affixes respectives a , h et c forment un triangle rectangle isocèle.

Ils veulent vérifier cette affirmation ; mais ils éprouvent des difficultés. Ils te sollicitent.

Propose - leur une solution argumentée en utilisant tes connaissances mathématiques au programme.



VI- RENDEZ-VOUS DES CURIEUX !

Le XIX^e siècle s'est émerveillé sur « ces nombres qui mêlent le réel et l'imaginaire ! ».

La construction des nombres complexes a enregistré la contribution d'éminents mathématiciens à qui s'est posé la nécessité de trouver une racine carrée de -1 .

Citons Euler, Hamilton, Cauchy...

Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) conjectura, sans pouvoir le prouver, que « dans l'ensemble des nombres complexes, tout polynôme de degré n a exactement n racines... »

Niels Henrik Abel et Évariste Galois apportèrent la preuve de cette base fondamentale de l'algèbre.

L'écriture d'un nombre complexe sous forme exponentielle est due à Euler.

Elle facilite les calculs dans $\mathbb{C}$ car elle transforme les règles de calcul sur les produits et les quotients en règles de calcul sur les puissances.

La formule $e^{i\pi} + 1 = 0$, qui aurait été écrite la première fois par Euler, a frappé les imaginations du fait qu'elle lie entre eux, de façon simple, cinq nombres fondamentaux, dont trois (i , e et π) restaient à l'époque, quelque peu mystérieux.

7

Fonctions Exponentielles
Népériennes

Notions essentielles :

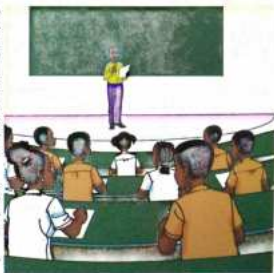
- Définition et propriétés algébriques de la fonction exponentielle népérienne ;
- Etude et représentation graphique de la fonction exponentielle népérienne ;
- Résolution d'équations, d'inéquations et de système faisant intervenir des exponentielles ;
- Limites de référence de la fonction exponentielle népérienne ;
- Fonction exponentielle de base a , $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$;
- Fonction puissance d'exposant réel non nul ;
- Etude et représentation graphique des fonctions du type : $\exp a x$ et a^x ($a \in \mathbb{R}^*$) ;
- Croissance comparée des fonctions logarithme népérien, exponen-

SITUATION D'APPRENTISSAGE

Lors d'une conférence, les élèves d'une classe de terminale scientifique apprennent que l'unité de stockage d'information est le BIT et dans 1 BIT, on peut stocker soit 0, soit 1. C'est-à-dire que 1 BIT permet de stocker deux informations différentes. De plus, le conférencier les informe que pour pouvoir stocker une plus grande possibilité d'informations différentes, on juxtapose ces unités d'informations et qu'avec 2 BIT, on peut stocker soit 00, soit 01, soit 10, soit 11 ; c'est-à-dire qu'on a 4 possibilités.

Emerveillés par ces informations, tes camarades de classe et toi souhaitez déterminer le nombre de possibilités si le nombre de BIT est de 100.000. Le major de la classe affirme qu'il existe une fonction qui permet de résoudre ce problème.

Vous décidez d'identifier cette fonction, de l'étudier et de la représenter graphiquement.



I- ACTIVITÉS DE DÉCOUVERTE



1- DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES DE LA FONCTION EXPONENTIELLE NÉPÉRIENNE

1.1- Connaître la définition de la fonction exponentielle népérienne et les conséquences immédiates

ACTIVITÉ 1

Soit la fonction $\ln :]0 ; +\infty[\mapsto \mathbb{R}$
 $x \mapsto \ln x$

- 1- a) Justifie que la fonction $\ln$ est une bijection de $]0 ; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.
 b) En notant $\exp$ la bijection réciproque de la fonction $\ln$, définis la fonction $\exp$.
- 2- a) Donne l'ensemble de définition de la fonction $\exp$.
 b) Détermine le signe de la fonction $\exp$.
 c) Complète les pointillés suivants :
 $\forall x \in]0 ; +\infty[, \exp(\ln x) = \dots$
 $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(\exp x) = \dots$
 $\forall x \in \mathbb{R} \text{ et } \forall y \in]0 ; +\infty[, \exp(x) = y \Leftrightarrow x = \dots$
 d) Détermine : $\exp(0)$, $\exp(1)$ et $\exp(-1)$.
- 3- En posant pour tout nombre réel, $\exp(x) = e^x$, réécris les résultats obtenus aux questions 2.b), 2.c) et 2.d).

Je fais le point de l'activité

- La fonction exponentielle népérienne, notée $\exp$ est la bijection réciproque de la fonction $\ln$.
- $\exp : \mathbb{R} \mapsto]0 ; +\infty[$
 $x \mapsto \exp(x)$
- Notation : $\exp(x) = e^x$

J'évalue mes acquis



Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

N°	Affirmations	Réponses
1	La fonction exponentielle népérienne est la bijection réciproque de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$.	
2	La fonction exponentielle népérienne est strictement positive sur $]-\infty ; 0[$.	
3	La fonction exponentielle népérienne est définie sur $\mathbb{R}$.	
4	$\exp(1) = 0$.	
5	$\ln(e^{-2}) = \frac{1}{2}$.	
6	$e^{0,001} < 0$.	
7	$e^{\ln(5)} = \frac{1}{5}$.	

1.2-Connaitre le sens de variation de la fonction exp et ses conséquences

Activité 2

- 1- a) Justifie que la fonction exp est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0; +\infty[$.
 b) Détermine le sens de variation de la fonction exp.
 2- Soit a et b deux nombres réels. Complète les pointillés. Tu justifieras tes réponses.
 $e^a = e^b \Leftrightarrow \dots$; $e^a < e^b \Leftrightarrow \dots$;
 $e^a < 1 \Leftrightarrow \dots$; $e^a > 1 \Leftrightarrow \dots$;

Je fais le point de l'activité

$$e^a = e^b \Leftrightarrow a = b ; \quad e^a < e^b \Leftrightarrow a < b ; \\ e^a < 1 \Leftrightarrow a < 0 ; \quad e^a > 1 \Leftrightarrow a > 0 .$$

l'évalue mes acquis



- 1- Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :
 a) La fonction exponentielle népérienne est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
 b) L'égalité : $x \in \mathbb{R}, e^x = -e^3$ est équivalente à $x \in \mathbb{R}, x = -3$.
 c) L'inégalité : $x \in \mathbb{R}, e^x < e^{-7}$ est équivalente à $x \in \mathbb{R}, x < -7$.
 2- Résous dans $\mathbb{R}$, les équations et inéquations suivantes :
 1) $e^x = e^5$; 2) $e^{2x-4} = 1$; 3) $e^{3-10} < e^5$; 4) $e^{2x+4} \geq e^{2-3x}$.

1.3 Connaitre les propriétés algébriques de la fonction exponentielle népérienne

Activité 3

Soit a et b deux nombres réels et r un nombre rationnel.

- 1- Démontre que : $e^{a+b} = e^a \times e^b$.
 2- Calcule $e^a \times e^a$ puis déduis une relation entre e^a et e^{-a} .
 3- Calcule e^{a-b} puis déduis une relation entre $\frac{e^a}{e^b}$ et e^{a-b} .
 4- Démontre que $e^a = (e^r)^{\frac{1}{r}}$.

Je fais le point de l'activité

Pour tous nombres réels a et b et pour tout nombre rationnel r , on a :

$$e^{a+b} = e^a \times e^b, \text{ (Propriété fondamentale) ;}$$

$$e^{-a} = \frac{1}{e^a} ; \quad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} ; \quad (e^a)^r = e^{ar}.$$

l'évalue mes acquis



Pour chacune des affirmations, trois réponses A, B et C sont proposées. Une seule réponse est exacte.

Recopie le numéro de chaque affirmation suivi de la lettre qui correspond à la réponse choisie.

N°	Affirmations	A	B	C
1	$e^3 \times e^2 = \dots$	e^{3+2}	$e^{3 \times 2}$	e^{3+2}
2	$\frac{1}{e^5} \times e^3 = \dots$	e^{-8}	e^2	e^8
3	$\frac{1}{e^{-5}} = \dots$	e^{-5}	e^{-5}	e^5
4	$\frac{e^{-3}}{e^6} = \dots$	e^3	e^{-7}	$e^{\frac{1}{6}}$
5	$(e^{-3})^{-4} = \dots$	e^{-12}	e^{-7}	e^{12}
6	$e^{-2 \ln 3} = \dots$	3^{-2}	2^{-3}	3^2

2- ÉTUDE ET REPRÉSENTATION GRAPHIQUE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE NÉPÉRIENNE

2.1 Connaitre la dérivée et la représentation graphique de la fonction $\exp$

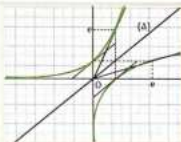
ACTIVITÉ 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . On note (C) la courbe représentative de la fonction $\exp$ dans le repère (O, I, J) et (C') celle de la fonction $\ln$.

- 1- a) Détermine l'ensemble de dérivabilité, D , de la fonction $\ln$, puis calcule la dérivée de la fonction $\ln$ pour tout x élément de D .
- b) Justifie que la fonction $\exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et détermine sa dérivée $(e^x)'$. (On utilisera la propriété de la dérivée de la bijection réciproque d'une fonction)
- 2- Dresse le tableau de variation de la fonction $\ln$ puis déduis celui de la fonction $\exp$.
- 3- Construis la courbe (C') dans le repère (O, I, J) .
- 4- Dédus-en la construction de la courbe (C) dans le repère précédent. Explique ta méthode.
- 5- Donne l'équation de l'asymptote horizontale de (C) et précise que (C) admet une branche parabolique de direction celle de (OJ) .
- 6- Justifie que (C) admet une tangente de coefficient directeur :
 - a) 1 au point J .
 - b) e au point de coordonnées $(1; e)$ et cette tangente passe par le point O .
7. Vérifie que, pour tout réel x , $e^x > x + 1$ et $e^x > x$.

Je fais le point de l'activité

- Courbe représentative de la fonction $\exp$
Les courbes (C) et (C') sont symétriques par rapport à la droite d'équation : $y = x$.



j'évalue mes acquis



Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

N°	Affirmations	Réponses
1	La fonction exponentielle népérienne n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$.	
2	L'axe des ordonnées est une asymptote à la courbe de la fonction $\exp$.	
3	$(\exp)'(e) = e$.	
4	La courbe représentative de la fonction $\exp$ est au-dessus de l'axe des abscisses.	
5	La courbe représentative de la fonction $\exp$ admet une branche parabolique de direction celle de (OI) .	
6	La tangente à la (C) au point d'abscisse 1 est au-dessus de la courbe représentative de la fonction $\exp$.	

2.2-Connaitre les limites de référence de la fonction exponentielle népérienne

Activité 5

- 1- La fonction exponentielle étant une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ vers $]0; +\infty[$, détermine : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x$.
- 2- En posant $X = e^x$, détermine $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}$.
- 3- En posant $X = -x$, détermine $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x$.
- 4- En utilisant le nombre dérivé au point d'abscisse 0 de la fonction : $x \mapsto e^x$, détermine $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$.

Je fais le point de l'activité

• Les limites ci-après, sont appelées des limites de référence :

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$;

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$; c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$; d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$; e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

• Pour calculer certaines limites non évidentes, on procède par factorisation ou changement de variables, pour faire apparaître les limites de référence.

J'évalue mes acquis



Pour chacun des énoncés, trois réponses A, B et C sont proposées. Une seule réponse est exacte.

Recopie le numéro de chaque énoncé suivi de la lettre qui correspond à la réponse choisie.

N°	Affirmations	A	B	C
1	$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = -$	$-\infty$	0	$+\infty$
2	$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = -$	$-\infty$	0	$+\infty$
3	$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$	$-\infty$	0	$+\infty$
4	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = -$	0	1	$+\infty$
5	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = -$	-1	0	1

3- ETUDE DES FONCTIONS DU TYPE : $\exp \circ u$ (ou e^u)

3.1 Connaitre l'ensemble de définition et la fonction dérivée des fonctions du type :

$$x \mapsto \exp \circ u(x) \text{ (ou } x \mapsto e^{u(x)})$$

Activité 6

- 1- Soit f une fonction numérique à variable réelle définie par : $f(x) = e^{u(x)}$ où u est une fonction quelconque définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
Détermine l'ensemble de définition de f .
- 2- Soit u une fonction numérique, dérivable sur un intervalle I et f la fonction définie sur I par : $f(x) = e^{u(x)}$. On suppose que f est dérivable sur I .
En appliquant la propriété sur la dérivée de la composée de deux fonctions, détermine $f'(x)$ pour tout x élément de I .

Je fais le point de l'activité

- $e^{u(x)}$ est définie si et seulement si $x \in D_u$. Donc, l'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est l'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto u(x)$.
- Soit u une fonction numérique, dérivable sur un intervalle I . La fonction e^u est dérivable sur I et on a : $(e^u)' = u' e^u$.

J'évalue mes acquis



1- Détermine l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = e^{-3x+2}; g(x) = e^{-x^2+3x-5}; h(x) = e^{\frac{3-2x}{x}}; p(x) = e^{\sqrt{2-x}}; q(x) = e^{(-3x+1)}.$$

2- Détermine les dérivées des fonctions suivantes après avoir déterminé leur ensemble de dérivabilité.

$$f(x) = e^{-3x+2}; g(x) = e^{-x^2+3x-5}; h(x) = e^{\frac{3-2x}{x}}; p(x) = e^{\sqrt{2-x}}.$$

3- On donne la fonction dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et définie par : $f(x) = e^{\frac{1}{x+1}}$

Entoure parmi ces trois fonctions dérivées ci-dessous, la dérivée qui est celle de la fonction.

$$a) f'(x) = \frac{2x}{(x+1)^2} e^{\frac{1}{x+1}} \quad b) f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} e^{\frac{1}{x+1}} \quad c) f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} e^{\frac{1}{x+1}}$$

3.2 Connaître les primitives des fonctions du type : $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$

Activité 7

Dans chacun des cas ci-dessous, f et g sont deux fonctions définies sur l'intervalle I indiqué. Détermine la dérivée de f , puis déduis-en une primitive sur I de g .

a) $f(x) = e^x; g(x) = e^x; I = \mathbb{R}$

b) $f(x) = e^{-5x+2}; g(x) = -\frac{1}{5}e^{-5x+2}; I = \mathbb{R}$

c) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}; g(x) = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}; I = \mathbb{R}^*$

d) $f(x) = e^{u(x)}; g(x) = u'(x)e^{u(x)}$ où u est une fonction dérivable sur I .

Je fais le point de l'activité

- La fonction $x \mapsto e^x$ admet pour primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto e^x$.
- La fonction $x \mapsto e^{ax+b}$ ($a \in \mathbb{R}^* \text{ et } b \in \mathbb{R}$) admet pour primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto \frac{1}{a}e^{ax+b}$.
- La fonction $x \mapsto u'e^u$ admet pour primitive sur tout intervalle I sur lequel u est dérivable la fonction $x \mapsto e^u$.

J'évalue mes acquis



Détermine, dans chacun des cas ci-dessous, les primitives sur l'intervalle I de la fonction f .

a) $f(x) = 6e^{-5x}; I = \mathbb{R}$

b) $f(x) = -e^{\frac{1}{2}-5}; I =]-\infty; +\infty[$

c) $f(x) = 3xe^{x^2-1}; I =]1; +\infty[$

d) $f(x) = 2x + 3e^{-0,2x}; I =]-5; 5[$

4- FONCTIONS EXPONENTIELLES DE BASE a ($a > 0$)**4.1- Connaître la définition et les propriétés algébriques de la fonction exponentielle de base a** **ACTIVITÉ 8**

Soit a un nombre réel strictement positif.

On désigne par $\exp_a$ la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $\exp_a(x) = a^x$.

1- a) Justifie que : $\forall x \in \mathbb{R}, e^{x \ln a} = a^x$.

b) Dédus-en l'ensemble de définition de la fonction $\exp_a$.

2- Détermine : $\exp_a(x)$, $\exp_{10}(x)$ et $\exp_1(x)$.

3- Démonstre que pour tous nombres réels strictement positifs a et b et pour tous nombres réels x et y , on a :

a) $\ln(a^x) = x \ln a$

b) $a^{x+y} = a^x \times a^y$

c) $a^{-y} = \frac{1}{a^y}$

d) $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$

e) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

f) $(ab)^x = a^x \times b^x$

g) $(a^x)^y = a^{xy}$

h) Pour $a \neq 1$, $a^x = b \Leftrightarrow x = \frac{\ln b}{\ln a}$

i) Calcule : $\exp_a(0)$ et $\exp_a(1)$.

Je fais le point de l'activité

- La fonction notée $\exp_a$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\exp_a(x) = a^x$ est appelée fonction exponentielle de base a ($a \in \mathbb{R}_+$).
- La fonction exponentielle de base e est la fonction réciproque de la fonction logarithme népérienne.
- La fonction exponentielle de base 10 est la fonction réciproque de la fonction logarithme décimale.
- La fonction exponentielle de base 1 est la fonction constante $x \mapsto 1$.

l'évalue mes acquis

Soit a un nombre réel strictement positif.

Ecris les nombres suivants sous la forme a^x où x est un nombre réel.

1) $a^{3,12} \times a^{-3,10}$; 2) $a^{\frac{1}{4}} \times a^{\frac{1}{2}}$; 3) $\frac{\sqrt{a}}{a^{\frac{1}{2}}}$; 4) $(a^{-7,8})^{0,5}$.

**5- FONCTIONS PUISSANCES****5.1 Connaître la définition d'une fonction puissance d'exposant réel non nul et l'allure de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^a$, $a \neq 0$.****ACTIVITÉ 9**

Soit a un nombre réel non nul.

Soit g_a la fonction de $]0; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g_a(x) = x^a$. On désigne par (C_a) la courbe représentative de la fonction g_a dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) .

1- a) Justifie que, pour tout nombre réel x strictement positif, $x^a = e^{a \ln x}$.

- b) Détermine l'ensemble de définition de g_a
 2- a) Détermine, pour $a < 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} g_a$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_a$.

Interprète graphiquement ces résultats.

- b) Détermine, pour $a > 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} g_a$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g_a(x)}{x}$.

(Pour $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_a$ on distinguera les cas $0 < a < 1$ et $a > 1$)

Interprète graphiquement ces résultats.

- 3- a) Justifie que : $\forall x \in]0 ; +\infty[, g_a'(x) = \alpha x^{a-1}$.
 b) Dédus-en, suivant les valeurs de a , le sens de variation de g_a .
 4- Dresse le tableau de variation de g_a dans chacun des cas suivants : $a < 0$ et $a > 0$.
 5- Donne l'allure de (C_a) dans chacun des cas suivants :
 a) $a < 0$; b) $0 < a < 1$; c) $a > 1$.

Je fais le point de l'activité

- Soit a un nombre réel non nul.

La fonction $g_a :]0 ; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^a$

est appelée fonction puissance d'exposant a ($a \in \mathbb{R}^*$).

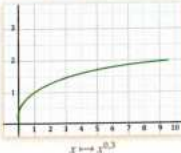
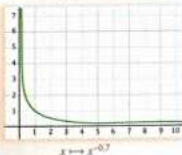
- $\forall x \in]0 ; +\infty[, x^a = e^{a \ln x}$.
- L'ensemble de définition de f_a est $]0 ; +\infty[$.
- Tableau de variation de f_a

$a < 0$

x	0	1	$+\infty$
$g'_a(x)$		-	
$g_a(x)$	$+\infty$	1	0

$a > 0$

x	0	1	$+\infty$
$g'_a(x)$		-	
$g_a(x)$	0	1	$+\infty$



Évalue mes acquis



Étudie et représente graphiquement dans le plan muni d'un repère orthonormé chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = x^{-3} ; g(x) = x^{0.25} ; h(x) = x^{\frac{2}{3}}$$

5.2- Connaître les fonctions dérivées des fonctions du type u^a , $a \in \mathbb{R}^*$

Activité 10

Soit a un nombre réel non nul et u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle K . Soit f la fonction de $]0; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \{u(x)\}^a$.

1- Justifie que, pour tout nombre réel x appartenant à K , $\{u(x)\}^a = e^{a \ln u(x)}$.

2- Ecris f sous forme de composée de deux fonctions dont l'une est la fonction u .

3- a) Justifie que la fonction f est dérivable sur K .

b) En utilisant la propriété sur la dérivée de la composée de deux fonctions, détermine la dérivée de la fonction f pour tout réel x appartenant à K .

Je fais le point de l'activité

Soit a un nombre réel non nul et u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle K .

La fonction u^a est dérivable sur K et on a : $(u^a)' = a u^a u' u^{a-1}$.

J'évalue mes acquis



Soit f la fonction définie sur $]3; +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt[3]{\ln(x-2)}^2$.

Justifie que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]3; +\infty[$ et détermine sa fonction dérivée.

5.3- Connaître les primitives des fonctions du type $u' u^m$, $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Activité 11

Dans chacun des cas ci-dessous, f et g sont deux fonctions définies sur l'intervalle I indiqué. Détermine la dérivée de f , puis déduis-en une primitive sur I de g .

a) $f(x) = \frac{1}{3}(x^3 + x^2 + e)^3$; $g(x) = (3x^2 + 2x)(x^3 + x^2 + e)^2$; $I = \mathbb{R}$

b) $f(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2$; $g(x) = \frac{\ln x}{x}$; $I =]1; +\infty[$

c) $f(x) = \frac{1}{m+1} u^{m+1}(x)$; $g(x) = u'(x) u^m(x)$ où $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et u une fonction dérivable et strictement positive sur I .

Je fais le point de l'activité

Soit $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et u une fonction dérivable et strictement positive sur I .

La fonction $u' u^m$ admet pour primitive sur I la fonction $\frac{1}{m+1} u^{m+1}$.

J'évalue mes acquis



Détermine, dans chacun des cas ci-dessous, les primitives sur l'intervalle I de la fonction f .

a) $f(x) = 2x(4 - x^2)^9$; $I =]-2; 2[$;

b) $f(x) = 3e^{-x}(\sqrt{3+e^{-x}})$; $I = \mathbb{R}$.

5.4- Connaitre les propriétés relatives à la croissance comparée des fonctions $\ln x$, e^x et x^a

Activité 12

Soit a un nombre réel strictement positif.

1- Calcule $\frac{1}{a} \frac{\ln(x^a)}{x^a}$ et en posant $X = x^a$, détermine : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^a}$.

2- Calcule $\frac{1}{a} (x^a \ln(x^a))$ et en posant $X = x^a$, détermine : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^a \ln x$.

3- a) Calcule $\frac{1}{a^2} \frac{e^{\frac{1}{a}}}{\frac{1}{a}}$ et en posant $X = \frac{x}{a}$, détermine : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^a}$.

b) Dédus-en : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^a e^{-x}$.

4- Soit n un entier naturel. En posant $X = -x$, détermine : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x$.

Je fais le point de l'activité

Soit a un nombre réel strictement positif et n un entier naturel. On a :

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0$; 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^a \ln x = 0$; 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^a} = +\infty$;

4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^a e^{-x} = 0$; 5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$.

J'évalue mes acquis



Calcule les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - \ln x)$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} e^{-x} + 3)$; c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x$;

d) $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{2}{3}} \ln x$; e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^3)$; f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 - 1}$.

II- RÉSUMÉ DE COURS



1- DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES DE LA FONCTION EXPONENTIELLE NÉPÉRIENNE

1.1 Définition et conséquences

Définition

On appelle fonction exponentielle népérienne, notée $\exp$, la bijection réciproque de la fonction $\ln$.

On pose : $\exp(x) = e^x$.

Conséquences

- $\exp : \mathbb{R} \rightarrow]0 ; +\infty[$
 $x \mapsto \exp(x)$
- L'ensemble de définition de la fonction $\exp$ est $\mathbb{R}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) > 0$. ($e^x > 0$)
- $\forall x \in]0 ; +\infty[, e^{\ln x} = x$;
- $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(e^x) = x$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall y \in]0 ; +\infty[, e^x = y \Leftrightarrow x = \ln(y)$.
- $e^0 = 1$; $e^1 = e$; $e^{-1} = \frac{1}{e}$.

1.2 Sens de variation et conséquences

PROPRIÉTÉ

La fonction exponentielle népérienne est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Conséquences

Pour tous nombres réels a et b , on a :

- $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$;
- $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$;
- $e^a > e^b \Leftrightarrow a > b$;
- $e^a = 1 \Leftrightarrow a = 0$;
- $e^a < 1 \Leftrightarrow a < 0$ et $e^a > 1 \Leftrightarrow a > 0$.

1.3 Propriétés algébriques

PROPRIÉTÉ

Pour tous nombres réels a et b et pour tout nombre rationnel r , on a :

- $e^a \times e^b = e^{a+b}$ (Propriété fondamentale) ;
- $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$;
- $e^a \div e^b = \frac{e^a}{e^b}$;
- $(e^a)^r = e^{ar}$.

2- ÉTUDE ET REPRÉSENTATION GRAPHIQUE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE NÉPÉRIENNE

2.1 Dérivée et représentation graphique de la fonction $\exp$

2.1.1-Dérivée

PROPRIÉTÉ

La fonction $x \mapsto \exp(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $(e^x)' = e^x$.



La fonction exponentielle népérienne est égale à sa dérivée.

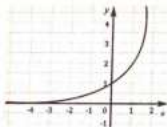
2.2- Tableau de variation de la fonction $\exp$

x	$-\infty$	$+\infty$
$(e^x)'$	+	
e^x	0	$+\infty$

2.3-Courbe représentative de la fonction $\exp$

Tableau de valeurs

x	-2	-1	-0,5	0	1	1,5
e^x	0,13	0,36	0,6	1	2,72	4,48





- La courbe (C) admet la droite (OI) d'équation : $y = 0$ comme asymptote horizontale.
- La courbe (C) admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de (OI).
- L'équation de la tangente à la courbe (C) au point $I(0; 1)$ est : $y = x + 1$.
L'équation de la tangente à la courbe (C) au point $(1; e)$ est $y = ex$ et passe par O.
La courbe (C) est au-dessus de sa tangente en tout point de (C).
Donc, pour tout réel x , $e^x > x + 1$ et $e^x > ex$.
(Trace les droites d'équations $y = x + 1$ et $y = ex$)

2.4- Limites de référence

PROPRIÉTÉ

- a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$; c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$;
d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$; e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

3- ÉTUDE DES FONCTIONS DU TYPE : $\exp \circ u$ (ou e^u)

3.1- Ensemble de définition et dérivée des fonctions du type : $x \mapsto \exp \circ u(x)$ (ou $x \mapsto e^{u(x)}$)

3.1-1 Ensemble de définition des fonctions du type e^u

Soit u une fonction quelconque définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

L'ensemble de définition de la fonction e^u est l'ensemble de définition de la fonction u .

3.1-2- Dérivée des fonctions du type e^u

PROPRIÉTÉ

Soit u une fonction numérique, dérivable sur un intervalle I .

La fonction e^u est dérivable sur I et on a : $(e^u)' = u' e^u$.

3.2- Primitives des fonctions du type : $x \mapsto u'(x) e^{u(x)}$

PROPRIÉTÉ

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et telle que sa dérivée u' soit continue sur I .

La fonction $u' e^u$ admet pour primitive sur I la fonction e^u .



- La fonction $x \mapsto e^x$ admet pour primitives sur $\mathbb{R}$ les fonctions $x \mapsto e^x + C$, où $C \in \mathbb{R}$.
- La fonction $x \mapsto e^{ax+b}$ ($a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$) admet pour primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto \frac{1}{a} e^{ax+b}$.

4- FONCTIONS EXPONENTIELLES DE BASE a ($a \in \mathbb{R}_+$)

DÉFINITION

Soit a un nombre réel strictement positif.

On appelle fonction exponentielle de base a , la fonction notée $\exp_a$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\exp_a(x) = a^x.$$

$$\exp_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$$

$$x \mapsto a^x$$

Pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $a^x = e^{x \ln a}$. Exemple : $7^x = e^{x \ln 7}$.



• $\exp_a(x)$ est défini pour tout nombre réel x .

• La fonction exponentielle de base e est la fonction réciproque de la fonction logarithme népérienne.

• La fonction exponentielle de base 10 est la fonction réciproque de la fonction logarithme décimale.

• La fonction exponentielle de base 1 est la fonction constante $x \mapsto 1$.



Soit a et b deux nombres réels strictement positifs.

• $\ln(a^x) = x \ln a$.

• Pour $a \neq 1$, $a^x = b \Leftrightarrow x = \frac{\ln b}{\ln a}$

• $a^1 = a$; $a^0 = 1$ pour $a \neq 0$.

4.1- Propriétés algébriques

PROPRIÉTÉ

Pour tous nombres réels strictement positifs a et b et pour tous nombres réels x et y , on a :

$$a^{x+y} = a^x \times a^y ; a^{-x} = \frac{1}{a^x} ; a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} ; \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x} ; (ab)^x = a^x \times b^x ; (a^x)^y = a^{xy}.$$



(Puissance d'un nombre réel strictement positif)

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Le nombre réel noté a^α et défini par : $a^\alpha = e^{\alpha \ln a}$ est appelé **puissance** du nombre a d'exposant α .

Exemples : $5^3 = e^{3 \ln 5}$; $2^{-1} = e^{-\ln 2}$

4.2- Variations de la fonction a^x

Dérivée

On a : $a^x = e^{x \ln a}$. Par conséquent, $\forall x \in \mathbb{R}$, $(e^{x \ln a})' = (\ln a) e^{x \ln a}$; donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $(a^x)' = a^x (\ln a)$

Comme $a^x > 0$ alors le signe de $(a^x)'$ est celui de $(\ln a)$.

Sens de variation

PROPRIÉTÉ

Soit a un nombre réel appartenant à $]0; +\infty[\setminus \{1\}$ et $f(x) = a^x$

La fonction exponentielle de base a est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]0; +\infty[$.

• Si $0 < a < 1$ alors $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

• Si $a > 1$ alors $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

5- FONCTIONS PUISSANCES

5.1- Définition d'une fonction puissance d'exposant réel non nul et l'allure de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^\alpha$, $\alpha \neq 0$.

5.1.1 Définition

Soit α un nombre réel non nul.

La fonction $f_\alpha :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x^\alpha$$

est appelée fonction puissance d'exposant α .



$\forall x \in]0; +\infty[$, $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$.

5.1-2 Dérivée - variations et représentation graphique de la fonction $x \mapsto x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).

- L'ensemble de définition de la fonction f_α est $]0; +\infty[$.
- Soit $f_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$.
- $\forall x \in]0; +\infty[, f'_\alpha(x) = (\alpha \ln x) e^{\alpha \ln x}$.
- $\forall x \in]0; +\infty[, f'_\alpha(x) = \frac{\alpha}{x} x^\alpha$. Donc : $\forall x \in]0; +\infty[, f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

Le signe de $f'_\alpha(x)$ est celui de α .

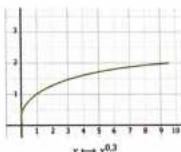
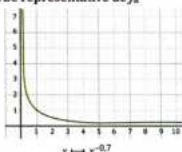
- Si $\alpha < 0$ alors $f'_\alpha(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.
- Si $\alpha > 0$ alors $f'_\alpha(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Tableau de variation de f_α $\alpha < 0$

x	0	1	$+\infty$
$g'_\alpha(x)$		-	
$g_\alpha(x)$	$+\infty$	1	0

 $\alpha > 0$

x	0	1	$+\infty$
$g'_\alpha(x)$		+	
$g_\alpha(x)$	0	1	$+\infty$

Courbe représentative de f_α 5.2- Dérivée des fonctions du type u^α ($\alpha \in \mathbb{R}^*$)

PROPRIÉTÉ

Soit α un nombre réel non nul et u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle K .

La fonction u^α est dérivable sur K et on a : $(u^\alpha)' = \alpha u' u^{\alpha-1}$.

5.3- Primitives des fonctions du type u^m ($m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$)

PROPRIÉTÉ

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I tel que u' soit continue sur I .

La fonction $u' u^\alpha$ admet pour primitive sur I la fonction $\frac{1}{\alpha+1} u^{\alpha+1}$.

5.4- Croissance comparée des fonctions $\ln x$, e^x et x^α . ($\alpha > 0$)

PROPRIÉTÉ

Soit α un nombre réel strictement positif et n un entier naturel. On a :

- 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \ln x = 0$; 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$; 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$; 5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha e^x = +\infty$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^x} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |x^n| e^x = 0.$$

• On dit que :

La fonction exponentielle $x \mapsto e^x$ croît plus vite que la fonction puissance $x \mapsto x^a$.

La fonction puissance $x \mapsto x^a$ croît plus vite que la fonction logarithme $x \mapsto \ln x$.

III- MÉTHODE



• Déterminer l'ensemble de définitions des fonctions du type $e^{u(x)}$

Pour déterminer l'ensemble de définition des fonctions du type $x \mapsto e^{u(x)}$, on peut procéder comme suit :

- On détermine l'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto u(x)$;
- On conclut que c'est l'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$.

• Résolution d'équations, d'inéquations et de systèmes d'équations

Pour résoudre une équation comportant des exponentielles, on peut procéder de la façon suivante :

- On détermine les contraintes sur l'inconnue ;
- On se ramène à une ou plusieurs égalités de la forme : $e^a = e^b$;
- On conclut.

• Pour résoudre une inéquation comportant des exponentielles, on peut procéder de la façon suivante :

- On détermine les contraintes sur l'inconnue ;
- On se ramène à une ou plusieurs inégalités de la forme : $e^a > e^b$;
- On conclut.

• Pour résoudre une équation du type $pe^{2x} + qe^x + r$ on peut procéder comme suit :

- On pose : $X = e^x$ et on résout l'équation du second degré : $pX^2 + qX + r = 0$
- On se ramène à une ou plusieurs égalités de la forme : $e^a = e^b$;
- On conclut.

• Pour résoudre un système d'équations ou d'inéquations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ comportant des exponentielles, on peut procéder de la façon suivante :

- On détermine les contraintes sur les inconnues ;
- On se ramène à une ou plusieurs égalités ou inégalités de la forme : $e^a = e^b$ ou $e^a > e^b$;
- On conclut.

• Calculer une limite de fonction faisant intervenir exponentielle

Pour calculer une limite de fonction faisant intervenir exponentielle, on peut utiliser les méthodes suivantes :

- les limites de références de la fonction exponentielle népérienne,
- la croissance comparée des fonctions $x \mapsto \ln x$, $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto x^a$.

- Déterminer les fonctions dérivées des fonctions du type : e^u où u est une fonction dérivable sur un intervalle I

Pour déterminer la dérivée sur I d'une fonction du type e^u , on peut procéder comme suit :

- On dérive la fonction u ;
- On conclut que la dérivée de $e^{u(x)}$ est $u'(x)e^{u(x)}$.

- Déterminer les primitives des fonctions du type : $u'e^u$ où u est une fonction dérivable et continue sur un intervalle I

Pour déterminer les primitives d'une fonction du type : $u'e^u$, on peut appliquer les formules suivantes :

Fonctions f	Primitives F de f sur I
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + c, c \in \mathbb{R}$
$f(x) = e^{ax+b} (a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R})$	$F(x) = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c, c \in \mathbb{R}$
$f(x) = u'(x)e^{u(x)}$	$F(x) = e^{u(x)} + c, c \in \mathbb{R}$

IV- SAVOIR-FAIRE



Savoir-faire 1. Utiliser les propriétés algébriques de la fonction exponentielle népérienne pour transformer une écriture

ÉNONCÉ

Simplifie chacune des expressions A, B, C, D et E telles que :

$$A = \frac{e^7 \times e^{-4}}{e^{-5}} ; B = (e^5)^{-6} \times e^{-3} ; C = \frac{1}{(e^{-3})^2} + \frac{(e^4)^{-1}}{e^2 \times e^{-6}} ; D = e^{5+3\ln 2} ; E = \frac{e^3}{e^{\ln 3}}.$$

SOLUTION COMMENTÉE

- Je simplifie A

$$A = \frac{e^7 \times e^{-4}}{e^{-5}} = \frac{e^{7-4}}{e^{-5}}. \text{ D'où } A = \frac{e^3}{e^{-5}}; \text{ par suite : } e^{3-(-5)}. \text{ Donc : } A = e^8.$$

- Je simplifie B

$$B = (e^5)^{-6} \times e^{-3} \\ B = e^{5 \times (-6)} \times e^{-3} \text{ d'où } B = e^{-30} \times e^{-3} \text{ par conséquent } B = e^{-30-3}; \text{ donc } B = e^{-33}.$$

- Je simplifie C

$$C = \frac{1}{(e^{-3})^2} + \frac{(e^4)^{-1}}{e^2 \times e^{-6}} \text{ d'où } C = \frac{1}{e^{-3 \times 2}} + \frac{(e^4)^{-1}}{e^{2-6}} \text{ c'est-à-dire : } C = \frac{1}{e^{-6}} + \frac{e^{-4}}{e^{-4}} \text{ par conséquent, } C = e^6 + \frac{e^{-4}}{e^{-4}} \\ \text{donc } C = e^6 + 1$$

- Je simplifie D

$$D = e^{5+3\ln 2} = e^5 \times e^{3\ln 2}; \text{ d'où } D = e^5 \times e^{\ln(2^3)} = e^5 \times e^{\ln 8}; \text{ par conséquent } \\ D = 8e^5$$

- Je simplifie E

$$E = \frac{e^3}{e^{\ln 3}} = \frac{1}{3} e^3.$$

Savoir-faire 2 : Déterminer l'ensemble de définition des fonctions comportant exponentielle**Énoncé**

Détermine l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = x - \frac{2e^x}{e^x - 1} ; g(x) = e^{\sqrt{x^2 - 3}} ; h(x) = e^{\frac{x+1}{x-2}} ; k(x) = e^{x^2 - x + 1}.$$

Solution commentée

• Je détermine l'ensemble de définition D_f de la fonction f

f est définie si et seulement si : $e^x - 1 \neq 0$.

$$e^x \neq 1 \text{ d'où } x \neq 0$$

$$\text{Donc : } D_f =]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$$

• Je détermine l'ensemble de définition D_g de la fonction g

$$x \in D_g \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}, x^2 - 3 \geq 0,$$

$$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}, (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) \geq 0.$$

On dresse le tableau de signe de : $x^2 - 3$

Tableau de signe

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$x^2 - 3$	+	0	0	+

On conclut que : $D_g =]-\infty ; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3} ; +\infty[$.

• Je détermine l'ensemble de définition D_h de la fonction h

$$x \in D_h \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}, 1 - 2x \neq 0.$$

$$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{1}{2}.$$

$$\text{Donc : } D_h =]-\infty ; \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2} ; +\infty[.$$

• Je détermine l'ensemble de définition D_k de la fonction k

La fonction $x \mapsto x^2 - x + 1$ est définie sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme.

$$\text{Donc : } D_k = \mathbb{R}.$$

Savoir-faire 3 : Résoudre des équations, inéquations et systèmes d'équations comportant des exponentielles**Énoncé**

1- Résous dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

$$(E_1) : e^{x+5} = 1 ; (E_2) : e^{-2x+5} = e^{\frac{1}{2}} ; (E_3) : (e^{-3x} - 2)(e^{2x} - 4) = 0 ; (E_4) : 3e^{2x} - \frac{5}{e^x} + 2 = 0 ;$$

$$(I_1) : e^{3x+2} \leq e ; (I_2) : e^{-2x+5} > 3 ; (I_3) : (e^{-3x} + 2)(e^{2x} - 4) > 0.$$

2- Résous dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le système d'équations (S) suivant : $\begin{cases} e^x + e^y = 9 \\ e^x - e^y = -1 \end{cases}$

Solution commentée

• Je résous dans $\mathbb{R}$ l'équation (E_1)

L'ensemble de validité de (E_1) est $\mathbb{R}$.

$$e^{x+5} = 1 \Leftrightarrow e^{x+5} = e^0$$

$$\Leftrightarrow x + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -5.$$

$$S(E_1) = \{-5\}.$$

• Je résous dans $\mathbb{R}$ l'équation (E_2)

Les contraintes sur l'inconnue : $x \in \mathbb{R}$ et $x \neq 0$.

$$\text{On a : } e^{-2x+5} = e^{\frac{1}{2}} \text{ équivaut à : } -2x + 5 = \frac{2}{x} \text{ et } x \neq 0.$$

$$e^{-2x+5} = e^{\frac{1}{2}} \text{ équivaut à : } -2x^2 + 5x = 2 \text{ et } x \neq 0.$$

$$e^{-2x+5} = e^{\frac{1}{2}} \text{ équivaut à : } -2x^2 + 5x - 2 = 0 \text{ et } x \neq 0.$$

En factorisant le polynôme $-2x^2 + 5x - 2$, on obtient $(-2x + 1)(x - 2)$.

Par suite, on a : $x = \frac{1}{2}$ ou $x = 2$, $\frac{1}{2} \neq 0$ et $2 \neq 0$,

$$\text{donc : } S(E_2) = \left\{-2; \frac{1}{2}\right\}.$$

• Je résous dans $\mathbb{R}$ l'équation (E_3)

L'ensemble de validité de (E_3) est $\mathbb{R}$.

$$(e^{-3x} - 2)(e^{2x} - 4) = 0 \text{ équivaut à : } e^{-3x} - 2 = 0 \text{ ou } e^{2x} - 4 = 0.$$

$$(e^{-3x} - 2)(e^{2x} - 4) = 0 \text{ équivaut à : } e^{-3x} = 2 \text{ ou } e^{2x} = 4.$$

$$(e^{-3x} - 2)(e^{2x} - 4) = 0 \text{ équivaut à : } -3x = \ln 2 \text{ ou } 2x = \ln 4$$

$$(e^{-3x} - 2)(e^{2x} - 4) = 0 \text{ équivaut à : } x = -\frac{\ln 2}{3} \text{ ou } x = \frac{2 \ln 2}{2}$$

$$\text{Donc : } x = -\frac{\ln 2}{3} \text{ ou } x = \ln 2$$

$$\text{Donc l'ensemble de solutions de l'équation } (E_3) \text{ est } \left\{-\frac{\ln 2}{3}; \ln 2\right\}$$

• Je résous dans $\mathbb{R}$ l'équation (E_4)

L'ensemble de validité de (E_4) est $\mathbb{R}$ car : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \neq 0$.

$$\text{On a après transformation : } 3e^{2x} - \frac{5}{e^x} + 2 = 0 \text{ équivaut à : } 3e^{2x} - 5e^x + 2 = 0$$

$$\text{En posant } X = e^x, \text{ on obtient } 3X^2 - 5X + 2 = 0. \text{ Soit } (3X - 2)(X - 1) = 0.$$

$$\text{D'où } X = \frac{2}{3} \text{ ou } X = 1 \text{ or } X = e^x \text{ par conséquent, } e^x = \frac{2}{3} \text{ ou } e^x = 1;$$

$$\text{donc } x = \ln\left(\frac{2}{3}\right) \text{ ou } x = 0.$$

$$\text{Par conséquent : } S(E_4) = \left\{0; \ln\left(\frac{2}{3}\right)\right\}.$$

• Je résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (I_1)

L'ensemble de validité de (I_1) est $\mathbb{R}$.

$$e^{3x+2} \leq e \text{ équivaut à } 3x + 2 \leq 1$$

$$e^{3x+2} \leq e \text{ équivaut à } 3x \leq -1 \text{ d'où } x \leq -\frac{1}{3}$$

$$\text{Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation } (I_1) \text{ est }]-\infty; -\frac{1}{3}[.$$

• Je résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (I_2)

L'ensemble de validité de (I_2) est $\mathbb{R}$.

$$\text{On a : } e^{2x+5} > 3 \text{ équivaut à : } -2x + 5 > \ln 3$$

$$e^{2x+5} > 3 \text{ équivaut à : } -2x > -5 + \ln 3$$

$$e^{2x+5} > 3 \text{ équivaut à : } x < \frac{5 - \ln 3}{2}$$

$$\text{Donc l'ensemble de solutions de l'inéquation } (I_2) \text{ est }]-\infty; \frac{5 - \ln 3}{2}[$$

• Je résous dans $\mathbb{R}$ l'équation (I_3)

L'ensemble de validité de (I_3) est $\mathbb{R}$.

$$(I_3) : (e^{-3x} + 2)(e^{2x} - 4) > 0 \text{ équivaut à } e^{2x} - 4 > 0 \text{ car : } \forall x \in \mathbb{R}, e^{-3x} + 2 > 0.$$

$$\text{d'où } e^{2x} > 4.$$

$$\text{Par conséquent, } e^{2x} - 4 > 0 \text{ équivaut à : } 2x > \ln 4 \text{ donc } x > \ln 2.$$

$$\text{Donc l'ensemble de solutions de l'inéquation } (I_3) \text{ est }]\ln 2; +\infty[.$$

• Je résous dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le système (S)

Contraintes sur les inconnues : $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

On pose : $X = e^x$ et $Y = e^y$. On obtient :

$$\begin{cases} X + Y = 9 \\ X - Y = -1 \end{cases}$$

Par addition des deux équations, on trouve : $2X = 8$.

Par suite, on obtient : $X = 4$ et $Y = 5$.

Or $X = e^x$ et $Y = e^y$; d'où $e^x = 4$ et $e^y = 5$; soit $x = \ln 4$ et $y = \ln 5$.

Donc la solution dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ du système (S) est $(\ln 4 ; \ln 5)$.

Savoir-faire 4 : Calculer des limites en utilisant des limites de référence de la fonction exponentielle ou la croissance comparée de $\ln x$, e^x et x^x .

ÉNONCÉ

Calcule les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^x}{e^x + 3}$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x}$; c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1-x)e^{1-x}$; d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - (x+1)e^{-2x}$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x)$; f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^x$; g) $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 (\ln x)^4$; h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^x}{-4x^5 - 4x^3 + 2}$.

SOLUTION COMMENTÉE

• Je calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^x}{e^x + 3}$

On ne peut pas conclure directement quant au calcul de cette limite.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^x}{e^x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^x}{e^x \left(1 + \frac{3}{e^x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1 + \frac{3}{e^x}}$$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{3}{e^x} = 1$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{e^x} = 0$. Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^x}{e^x + 3} = +\infty$.

• Je calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x}$

On ne peut pas conclure directement quant au calcul de cette limite.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

• Je calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1-x)e^{1-x}$

On pose : $X = 1 - x$. Lorsque $x \rightarrow -\infty$; $X \rightarrow +\infty$.

D'où $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1-x)e^{1-x} = \lim_{X \rightarrow +\infty} X e^X = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1-x)e^{1-x} = +\infty$

• Je calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - (x+1)e^{-2x}$

On ne peut pas conclure directement quant au calcul de cette limite.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - (x+1)e^{-2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{x+1}{x} e^{-2x}\right) ;$$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} -2x = -\infty$ d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0$.

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{x+1}{x} e^{-2x}\right) = +\infty$.

On conclut que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - (1-x)e^{1-x} = +\infty$.

• Je calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - \ln x)$

On ne peut pas conclure directement quant au calcul de cette limite.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left(1 - \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right).$$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$ (Croissance comparée) et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right) = 1$, et

comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - \ln x) = +\infty$.

• Je calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 e^x$

On ne peut pas conclure directement quant au calcul de cette limite.

Posons $X = -x$; lorsque x tend vers $-\infty$, X tend vers $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} -X^3 e^{-X} = 0. \text{ (Croissance comparée).}$$

• Je calcule $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 (\ln x)^4$

On ne peut pas conclure directement quant au calcul de cette limite.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^3 (\ln x)^4 = \lim_{x \rightarrow 0} [x^2 \ln x]^4, \text{ or } \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \ln x) = 0 \text{ (Croissance comparée).}$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 0} x^3 (\ln x)^4 = 0.$$

• Je calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^x}{-4x^5 - 4x^3 + 2}$

On ne peut pas conclure directement quant au calcul de cette limite.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^x}{-4x^5 - 4x^3 + 2} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^x}{x \left(-4 - \frac{4}{x^2} + \frac{2}{x^3} \right)} \\ &= \frac{e^x}{x^2} \left(\frac{1}{(-4 - \frac{4}{x^2} + \frac{2}{x^3})} \right) \end{aligned}$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty \text{ (Croissance comparée) et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{(-4 - \frac{4}{x^2} + \frac{2}{x^3})} \right) = -\frac{1}{4} \text{ et}$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^x}{-4x^5 - 4x^3 + 2} = -\infty.$$

Savoir-faire 5 : Déterminer des fonctions dérivées de fonctions comportant des exponentielles
Énoncé

Pour chaque fonction, détermine sa dérivée sur l'ensemble indiqué.

$$p(x) = e^{-x^2 + 5x + 1} \text{ sur } \mathbb{R}; \quad q(x) = e^{\frac{x-3}{x-2}} \text{ sur } \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$$s(x) = \ln(1 + e^{-x}) + \frac{x}{e^x + 1} \text{ sur } \mathbb{R}; \quad t(x) = (x-2)e^{1-x} \text{ sur } \mathbb{R}$$

Solution commentée
• Je calcule la dérivée p' de la fonction p

$$\forall x \in \mathbb{R}, p'(x) = (-x^2 + 5x + 1)' e^{-x^2 + 5x + 1}$$

$$\text{Donc : } p'(x) = (-2x + 5) e^{-x^2 + 5x + 1}$$

• Je calcule la dérivée q' de la fonction q

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, q'(x) = \left(\frac{x-3}{x-2} \right)' e^{\frac{x-3}{x-2}}$$

$$\text{Donc : } q'(x) = \frac{1}{(x-2)^2} e^{\frac{x-3}{x-2}}$$

• Je calcule la dérivée r' de la fonction r

$$\forall x \in \mathbb{R}, r'(x) = \left(\ln(1 + e^{-x}) + \frac{x}{e^x + 1} \right)'$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, r'(x) = \frac{-e^{-x}}{1 + \frac{1}{e^x}} + \frac{e^x + 1 - x e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{-e^{-x}}{\frac{e^x + 1}{e^x}} + \frac{e^x + 1 - x e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, r'(x) = \frac{-e^{-x} e^x}{e^x + 1} + \frac{e^x + 1 - x e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{-1}{e^x + 1} + \frac{e^x + 1 - x e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, r'(x) = \frac{-1(e^x + 1)}{(e^x + 1)^2} + \frac{e^x + 1 - x e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{-e^x - 1 + e^x + 1 - x e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, r'(x) = \frac{-xe^x}{(e^x + 1)^2}$$

• Je calcule la dérivée s' de la fonction s

$$\forall x \in \mathbb{R}, s'(x) = ((x-2)e^{1-x})'$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, s'(x) = (x-2)'(e^{1-x}) + (x-2)(e^{1-x})'$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, s'(x) = e^{1-x} + (x-2)(-1)e^{1-x}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, s'(x) = e^{1-x} - (x-2)e^{1-x}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, s'(x) = (1-x+2)e^{1-x} \text{ donc } \forall x \in \mathbb{R}, s'(x) = (3-x)e^{1-x}$$

Savoir-faire 6 : Déterminer les primitives d'une fonction

Énoncé

Déterminer les primitives sur $\mathbb{K}$ de chacune des fonctions suivantes :

$$p(x) = e^{5x}, K = \mathbb{R} ; q(x) = \frac{e^x}{1+e^x}, K = \mathbb{R} ; f(x) = \frac{2-e^{-x}}{e^{-x}+2x+5}, K = \mathbb{R} ;$$

$$g(x) = (3+e^x)(2e^{2x}-1), K = \mathbb{R} ; h(x) = 2e^{-x} + \frac{e^x}{e^x-3}, K =]\ln 3; +\infty[.$$

Solution commentée

• Je détermine les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction p

$$p(x) = e^{5x}. \text{ Posons } u(x) = 5x; \text{ on a : } u'(x) = 5.$$

D'où : $p(x) = u'(x) e^{u(x)}$. Donc les primitives de p sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions

$$F \text{ telles que : } F(x) = \frac{1}{5}e^{5x} + c, c \in \mathbb{R}.$$

• Je détermine les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction q

$$q(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$$

$$\text{Posons } u(x) = e^x + 1 \text{ et } u'(x) = e^x, \text{ d'où } q(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Par conséquent, les primitives de q sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions G telles que :

$$G(x) = \ln|u(x)| + c.$$

$$\text{Donc : } \forall x \in \mathbb{R}, G(x) = \ln(e^x + 1) + c; c \in \mathbb{R}.$$

• Je détermine les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction f

$$\text{On a : } f(x) = \frac{2-e^{-x}}{e^{-x}+2x+5}$$

$$\text{Posons } u(x) = e^{-x} + 2x + 5 \text{ et } u'(x) = 2 - e^{-x}.$$

$$\text{D'où } f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}. \text{ Par conséquent, les primitives } F \text{ de } f \text{ sont sous la forme } F(x) = \ln|u(x)| + c;$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \ln|e^{-x} + 2x + 5| + c; c \in \mathbb{R}.$$

• Je détermine les primitives F sur $\mathbb{R}$ de la fonction g

$$\text{On a : } g(x) = (3+e^x)(2e^{2x}-1) = 2e^{3x} + 6e^{2x} - e^x - 3.$$

$$\text{Par conséquent : } \forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \frac{2}{3}e^{3x} + 6 \times \frac{1}{2}e^{2x} - e^x - 3x + c.$$

$$\text{Donc : } \forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \frac{2}{3}e^{3x} + 3e^{2x} - e^x - 3x + c, c \in \mathbb{R}.$$

• Je détermine les primitives F sur $]\ln 3; +\infty[$ de la fonction h

$$\text{On a : } h(x) = 2e^{-x} + \frac{e^x}{e^x-3}$$

$\forall x \in]\ln 3; +\infty[$, $H(x) = 2e^{-2x} + \ln(e^x - 3) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Savoir-faire 7 Étudier et représenter graphiquement une fonction faisant intervenir la fonction exponentielle népérienne

Énoncé

On considère la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $f(x) = xe^{\frac{x}{2}}$

Étudie la fonction f puis construis sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .

Solution commentée

Calculons $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{\frac{x}{2}}$$

On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{x}{2}} = +\infty$ d'où $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-\frac{x}{2}} = +\infty$ donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{\frac{x}{2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{\frac{x}{2}}} = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

La droite (OI) est asymptote horizontale à (C) courbe représentative de f en $+\infty$

Déterminons la fonction dérivée f' de f

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = (xe^{\frac{x}{2}})' = (x)'e^{\frac{x}{2}} + x(e^{\frac{x}{2}})'$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^{\frac{x}{2}} - \frac{x}{2} e^{\frac{x}{2}}; \text{conséquent, } \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \left(1 - \frac{x}{2}\right)e^{\frac{x}{2}}.$$

Signe de f' et sens variation de f

$\forall x \in \mathbb{R}, e^{\frac{x}{2}} > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - \frac{x}{2}$.

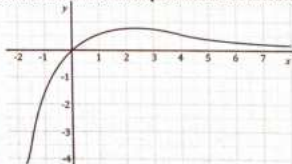
Par suite, on a : $\forall x \in]-\infty; 2[, f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]-\infty; 2[$ et

$\forall x \in \mathbb{R},]2; +\infty[, f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]2; +\infty[$.

Dressons le tableau de variation de f

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{2}{e}$	0

Construisons la courbe représentative de la fonction f .



Savoir-faire B

Etudier et représenter graphiquement une fonction faisant intervenir une fonction puissance d'exposant réel non nul

Enoncé

Etudie et représente graphiquement la fonction f_a définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x^a$$

Solution commentée

On a : $\forall x \in]0; +\infty[, f_a(x) = x^a$ d'où : $\forall x \in]0; +\infty[, f_a(x) = e^{a \ln x}$.

$$\forall x \in]0; +\infty[, f'_a(x) = (a \ln x)' e^{a \ln x}$$

$$f'_a(x) = \left(\frac{a}{x}\right) x^a$$

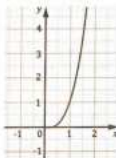
Donc : $\forall x \in]0; +\infty[, f'_a(x) = a x^{a-1}$.

Comme $a > 0$ alors $f'_a(x) > 0$ donc f_a est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Tableau de variation

x	0	$+\infty$
$f(x)$		+
$f(x)$	0	$+\infty$

Représentation graphique



V- JE M'EXERCE



1- Exercices de fixation / Application

Connaître et utiliser les propriétés algébriques de la fonction exponentielle

1- Ecris sous la forme e^k chacune des expressions suivantes où k est un nombre entier relatif.

a) $e^2 \times e^4$; b) $e^3 \times e^{-4}$; c) $(e^{-1}) \times e^2$;

d) $e^{\frac{3}{2}} \times \sqrt{e}$; e) $\frac{e^{-4}}{e} \times e^{10}$; f) $\frac{(e^2)^3}{e^4}$

2- Simplifie chacune des expressions suivantes :

a) $e^{-3} \times e^5$; b) $e^{3+2} \times e^{31}$; c) $e^{2-x} \times e^{x-1}$

d) $\frac{e^{41}}{e^{25}}$; e) $\frac{(e^{x-1})^2}{e^{2x}}$; f) $\frac{e^{1-x}}{e^{3x+4}}$

3- Donne la bonne réponse.

1- Pour tout nombre réel non nul a , le réel $e^{-\frac{1}{a}}$ est égal à :

a) $-e^{\frac{1}{a}}$; b) $\frac{1}{e^{\frac{1}{a}}}$; c) $\frac{1}{e^a}$; d) e^a

2- Pour tout nombre réel a , le réel $e^{\frac{1}{a}}$ est égal à :

a) $\sqrt{e^a}$; b) $\frac{e^2}{2}$; c) $\frac{e^a}{e^2}$; d) $e^{\frac{1}{a}}$

3- Ecris plus simplement chaque expression ci-dessous.

$e^{-\ln 5}$; $e^{2x} \times e^{-2x}$; $\ln \sqrt{e}$; $\ln \sqrt{e^3}$; $e^{\ln(x-1) + \ln x}$;

$e^{2 \ln 2} - e^{\ln \frac{1}{2}}$; $\ln(5e^4)$; $\frac{e^{2+\ln 5}}{e^{1-}}$; $\ln \frac{1}{e^2} + e^{-3 \ln x}$;

$\frac{e^{5x}}{e^{3x+4}}$; $\ln(e^{-2x})$; $\frac{e^{x-1}}{e^2} \times \ln e^3 \times e^{\ln e^3}$; $2 \ln(\ln e)$.

4- Démontre que pour tout nombre réel x :

$$\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} = \frac{1}{e^x+1} ; \frac{2-e^{-x}}{5e^{-x}+2} = \frac{2e^x-1}{2e^x+5}$$

5- Calcule les expressions suivantes

a) $16^{\frac{1}{2}}$; b) $4^{-\frac{1}{2}}$; c) $4^{\frac{1}{2}} \sqrt{2}$

Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction comportant exponentielle

2 Relie chaque fonction de la colonne A à l'ensemble de définition qui correspond dans la colonne B.

Colonne A	
$f(x) = (x+1)e^x$	a
$f(x) = \frac{e^x}{e^x - 3}$	b
$f(x) = e^{\frac{1}{x-3}}$	c
$f(x) = \frac{1-x^2}{x} e^{-x}$	d

Colonne B	
1 $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\ln 3\}$	
2 $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$	
3 $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$	
4 $D_f = \mathbb{R}$	

3 Dans chacun des cas ci-dessous, détermine l'ensemble de définition de la fonction f .

a) $f(x) = e^{x^2 - 3x + 1}$; b) $f(x) = e^{\frac{1-x}{x}}$;

c) $f(x) = e^{\sqrt{x^2 - 4}}$; d) $f(x) = x(e^x - e^{-x})$;

e) $f(x) = \ln(1 - e^{-x}) + \frac{x}{e^x + 1}$; f) $1 + e^x + \frac{3}{e^x - 3}$

g) $f(x) = \ln(1 + e^{2x})$; h) $f(x) = xe^{2x+1}$

i) $f(x) = x(-1 + e^{-x})$; j) $f(x) = (xe^{\frac{2}{x}}) - 3x$.

Calculer des limites

4 Recopie et complète les pointillés.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \dots ; \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = \dots ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^x} = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \dots (\alpha > 0) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\ln x} = \dots$$

5 Calcule les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{e^x + 1}$; b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} ((x+1)e^{-x} + x + 1)$;

c) $\lim_{x \rightarrow 0} e^{(2x-3)}$; d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{(2x-3)}$;

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{-2x})$; f) $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{-x} \ln x)$; g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$;

h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x + 6e^x)$; i) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{e^x - e^{\frac{1}{3}}}{x - \frac{1}{3}}$; j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x(x-1)} - 1}{x}$

k) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xe^x}{x^2 + 1}$; l) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{x}$; m) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 2x + 1)$.

6 Calcule les limites suivantes.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^x - x - 1)$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - x}{e^{2x} + 1}$;

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(e^{2x} - e^x)$; d) $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}}$; f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x}}$; g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}}$.

7 Calcule les limites des fonctions suivantes.

(1) $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x}}$ en $+\infty$; (2) $f(x) = e^{\frac{1}{x+1}}$ en $+\infty$, en $-\infty$ et en -1 .

(3) $f(x) = x + 3 + xe^x$ en $+\infty$ et en $-\infty$;

(4) $f(x) = e^{\cos(x)}$ en 0 ; (5) $f(x) = \frac{7x}{e^x - 1}$ en 0

8 Calcule les limites suivantes :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{\frac{x}{2}}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{\frac{x}{2}}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{1-x}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{1-x}$;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-0,5x}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{0,1x}}{x}$.

Déterminer des dérivées de fonctions comportant des exponentielles

9 Dans chacun des cas, détermine la fonction dérivée f' de f .

a) $f(x) = e^{x^2 - 3x + 1}$; b) $f(x) = e^{\frac{2x-3}{x+2}}$; c) $f(x) = e^{\sqrt{x^2 - 4}}$;

d) $f(x) = x(e^x - e^{-x})$; e) $f(x) = \ln(1 - e^{-x}) + \frac{x}{e^x + 1}$;

f) $1 + e^x + \frac{3}{e^x - 3}$; g) $f(x) = \ln(1 + e^{2x})$;

h) $f(x) = xe^{2x+1}$; i) $f(x) = x(-1 + e^{-x})$

j) $f(x) = (xe^{\frac{2}{x}}) - 3x$

10 Pour chacune des fonctions suivantes, calcule la fonction dérivée.

$f(x) = e^x + 2x$; $g(x) = -4e^x$;

$h(x) = e^{-x} - x^3$; $i(x) = e^{x^2}$

Déterminer les primitives d'une fonction

11 Détermine, dans chaque cas, une primitive F de la fonction f sur l'intervalle I donné.

a) $f(x) = e^{5x}$, $I = \mathbb{R}$; b) $f(x) = 3 + \frac{1}{e^x} + e^{-x}$, $I = \mathbb{R}$;

c) $f(x) = \cos x \cdot e^{\sin x}$, $I = \mathbb{R}$; d) $f(x) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x} + 4}$

$I =]0 ; +\infty[$;

e) $f(x) = \frac{e^{3x} - 5}{e^x}$, $I = \mathbb{R}$; f) $f(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$;

15 On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = (x + 2)e^{-x};$$

Justifie que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = (-x - 3)e^{-x}$$

est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

10 Soient les fonctions k et K définies sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = 3(x^2 + x)e^{-x}$ et $K(x) = (ax^2 + bx + c)$ où a, b et c sont des nombres réels.

Détermine les nombres réels a, b et c pour que K soit unprimitive de k sur $\mathbb{R}$.

Résoudre des équations comportant des exponentielles ou les faisant intervenir

11 Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$(E_1) : e^x = 2 ; (E_2) : 3e^{-x} - 4 = 0 ; (E_3) : e^{6-x} = -3.$$

$$(E_4) : (e^x - 1)(e^x - 2) = 0 ; (E_5) : \ln e^{x+1} = 1 ;$$

$$(E_6) : e^{3x+2} = e ; (E_7) : e^{3x-5} = e^{1-4x}.$$

12 Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$(E_1) : e^{-x} = 0 ; (E_2) : 2e^{-x} = \frac{4}{e^x + 1} ; (E_3) : e^{2x+3} = 1.$$

$$(E_4) : e^x - e^{-x} = 0 ; (E_5) : e^{4x} = \frac{1}{e} ;$$

$$(E_6) : e^{-x^2+2} = 0 ; (E_7) : e^x = e^{2x} ; (E_8) : e^{5-x^2} = e$$

13 Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$(E_1) : e^{2x} - 2e^x + 1 = 0 ; (E_2) : e^{2x} + e^x - 2 ;$$

$$(E_3) : e^{3x+1} + e^{2x+1} = 6e^{x+1} ; (E_4) : e^{2x} - 5e^x = -6$$

Résoudre des inéquations comportant des exponentielles ou les faisant intervenir

14 Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$(I_1) : e^x > 2 ; (I_2) : e^{x-3} < 4 ; (I_3) : e^{3x+2} \geq e ;$$

$$(I_4) : e^{3x} < 4 ; (I_5) : e^{2x} + 3e^x - 4 > 0 ;$$

$$(I_6) : e^{2x} - 3 \geq 0 ; (I_7) : e^x - e^{-x} > 0 ;$$

$$(I_8) : (e^x - 1)(e^x - 2) < 0 ; (I_9) : \frac{2e^x - 1}{e^x - 2} < \frac{e^x}{e^x + 1}$$

15 Résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$(I_1) : e^x - \frac{1}{e^x} \leq 0 ; (I_2) : \frac{1}{e^x} - e > 0.$$

16 Résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$(I_1) : 3e^{2x+9} \leq 7 ; (I_2) : 7^x < 2.$$

Résoudre des systèmes d'équations comportant des exponentielles

17 Résous dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ les systèmes suivants :

$$(S_1) \begin{cases} e^x + e^y = 7 \\ e^{x+y} = 10 \end{cases} ; (S_2) \begin{cases} x - y = 1 \\ e^x + e^y = e^{12} \end{cases}$$

18 Résous dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le système suivant :

$$(S_3) \begin{cases} e^x + \ln 3 + e^y + \ln 3 = 15 \\ e^x + \ln 5 + e^y + \ln 2 = 16 \end{cases}$$

2. Exercices de renforcement / approfondissement

19 Réponds par Vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

1- La fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$.

2- Pour tous nombres réels a et b , on a :

$$e^a + b = e^a + e^b.$$

3- La courbe (C_{exp}) de la fonction exponentielle népérienne est l'image de la courbe (C_{ln}) de la fonction logarithme népérien par la symétrie orthogonale d'axe (D) d'équation $y = x$.

4- Pour tout nombre réel x élément de $\mathbb{R}$,

$$(xe^x)' = (1 - x)e^x.$$

5- Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction

$$x \mapsto -\sin x \cdot e^{\cos x}$$

$$\text{est la fonction } x \mapsto e^{\cos x}.$$

20 Pour chacune des affirmations, trois réponses sont proposées. Une seule réponse est exacte.

Recopie le numéro de chaque affirmation ainsi que la lettre qui correspond à la bonne réponse.

Soit la fonction numérique définie par $f(x) = x + \frac{e^x}{2(e^x - 2)}$				
Réponses				
N°	Affirmations	A	B	C

1	L'ensemble de définition D_f est :	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \setminus \{\ln 2\}$	$\mathbb{R} \setminus \{-\ln 2\}$
2	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$	$+\infty$	0	$+\infty$
3	$\forall x \in D_f, f'(x) =$	$\frac{(e^x - 1)(e^x - 4)}{(e^x - 2)^2}$	$\frac{(e^x - 1)(e^x + 4)}{(e^x - 2)^2}$	$\frac{(e^x + 1)(e^x + 4)}{(e^x - 2)^2}$
4	Une primitive F de f sur D_f est égale à :	$\frac{1}{2}(x^2 + \ln(e^x - 2))$	$\frac{1}{2}(x^2 + \ln(e^x + 2))$	$\frac{1}{2}(x^2 + \ln(e^x - 2))$

21 On considère la fonction polynôme p définie par : $P(x) = -x^3 + 3x + 2$.

1- a) Vérifie que -1 est un zéro de p .

b) Justifie que $p(x) = (x + 1)(-x^2 + x + 2)$.

2- Écris le polynôme $-x^2 + x + 2$ sous forme de produit de polynômes de degré 1.

3- Dédus des questions précédentes la résolution de l'équation $p(x) = 0$.

4- Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : -e^{3x} + 3e^x = -2$.

5- Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$(I) : -e^{3x} + 3e^x + 2 \geq 0.$$

10 Résous dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ les systèmes d'équations suivants :

$$(S_1) : \begin{cases} 2e^{x+3} + 4e^{4-x} = 4 \\ 5e^{x+3} - 3e^{4-x} = - \end{cases} \quad (S_2) : \begin{cases} 5e^{-x} - 3e^{-y} - 3 = 0 \\ 7e^{-x} + 6e^{-y} = 11 \end{cases}$$

$$(S_3) : \begin{cases} \ln x + \ln y = -2 \ln 4 \\ e^x e^y = \frac{1}{\sqrt{e}} \end{cases}$$

11 Résous dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ les systèmes suivants :

$$(S_1) : \begin{cases} -e^{2x+1} + e^x = 0 \\ \ln(x+1) - \ln(y+4) = \ln 2 \end{cases}$$

$$(S_2) : \begin{cases} 2^x - 3^y = 5 \\ 3 - 2^x + 3^y = 24 \end{cases}$$

12 On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2x - 1)e^{x^2}$$

Pour chacune des affirmations ci-dessous, quatre réponses sont proposées. Une seule réponse est exacte. Recopie le numéro de chaque affirmation ainsi que la lettre qui correspond à la réponse exacte.

1- On a :

$$a) f(-\frac{1}{2}) = \frac{2}{\sqrt{e}} ; b) f(\frac{1}{2}) = -\frac{2}{\sqrt{e}}$$

$$c) f(0) = 1 ; d) f(1) = \frac{1}{e}$$

2- La courbe représentative de f est située au-dessus de l'axe des abscisses sur ...

$$a) \mathbb{R} ; b) [0 ; +\infty[$$

$$c)]-\infty ; \frac{1}{2} ; d) [\frac{1}{2} ; +\infty[$$

3- La dérivée f' est donnée par $f'(x) \dots$

$$a) (-2x + 3)e^{-x} ; b) (-2x - 1)e^{-x}$$

$$c) (2x + 1)e^{-x} ; d) -2e^{-x}$$

4- Le maximum de f est ...

$$a) \frac{2e}{\sqrt{e}} ; b) 0,44$$

$$c) 2e^{\frac{1}{2}} ; d) f(1) = \frac{2}{e^{\frac{1}{2}}}$$

5- La dérivée seconde f'' est donnée par $f''(x) \dots$

$$a) (2x - 5)e^{-x} ; b) 2e^{-x}$$

$$c) (-2x + 1)e^{-x} ; d) (-2x - 1)e^{-x}$$

6- La tangente au point d'abscisse 0 à la courbe de f a pour équation ...

$$a) y = 2x - 1 ; b) y = 3x$$

$$c) y = 3x - 1 ; d) y = 2x$$

7- L'équation $f(x) = 0$ admet sur l'intervalle $[0 ; 4]$

$$a) 0 \text{ solution} ; b) 1 \text{ solution}$$

c) 2 solution ; d) On ne peut pas savoir.

8- Un encadrement à de la solution de l'équation

$$f(x) = -2 \pm 10^{-2} \text{ près est :}$$

$$a) -0,27 < \alpha < -0,26 ; b) -0,26 < \alpha < -0,27$$

$$c) -36,95 < \alpha < -36,94 ; d) 0,40 < \alpha < 0,41$$

13 Soit la fonction f définie sur $] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty[$ par : $f(x) = (x + 2)e^{\frac{1}{x}}$.

1- Justifie que : $\forall x \in] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$$

2- Etudie les variations de f .

14 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^x$.

1- Justifie que : $f'(x) = (x + 1)e^x$

2- Dédus-en les variations de f sur $\mathbb{R}$.

15 Pour chacune des fonctions suivantes, calcule la dérivée et déduis-en les variations.

$$a) f_1(x) = (x + 1)e^x ; b) f_2(x) = 2(3 - x)e^x$$

$$c) f_3(x) = x^2 e^x ; d) f_4(x) = (3 - x^2)e^x$$

$$e) f_5(x) = x^2 e^{-x} ; f) f_6(x) = (3 - x^2)e^{-x}$$

16 Soit la fonction f définie sur $] 0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{e^x}{x}$$

1- Calcule $f'(x)$, pour tout élément x de $] 0 ; +\infty[$.

2- Dédus-en les variations de f sur $] 0 ; +\infty[$.

3- On admet que, pour tout x élément de $] 0 ; +\infty[$,

$$f''(x) = \frac{x - 1}{x^2} e^x$$

a) Détermine le signe de $x - 1$.

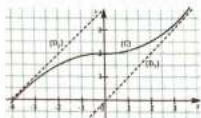
b) Dresse le tableau de variation de f' puis déduis le signe de f .

17 Soit la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par :

$$f''(x) = \frac{4}{1 + e^x} + x$$

On a tracé ci-dessous la courbe (C) de f ainsi que les droites (D₁) et (D₂) d'équations respectives :

$$y = x \text{ et } y = x + 4$$



1- Conjecture les positions relatives de (C) avec (D₁) et (D₂).

2- a) Etudie le signe de $f(x) - x$.

b) Déduis-en la position relative de (C) et (D₁).

3- a) Justifie que $f(x) - (x + 4) = \frac{-4e^x}{1 + e^x}$.

b) Déduis-en la position relative de (C) et (D₂).

4- a) Justifie que : $\frac{(e^x - 1)^2}{(e^x + 1)} = f'(x)$.

b) Détermine les variations de f .

c) Justifie que (C) admet une tangente horizontale.

10 On considère la fonction g définie par :

$$g(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x - 1}$$

1- Détermine l'ensemble de définition D_g de la fonction g .

2- Calcule les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.

3- Étudie les variations de g puis dresse son tableau de variation.

4- Justifie que la fonction G définie sur $]0; +\infty[$

par $G(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 4\ln(e^x - 1) + 3$ est une primitive de la fonction g .

11 On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\ln 3\}$

par : $f(x) = e^x - 4 + \frac{4}{e^x - 3}$

1- a) Détermine : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow \ln 3^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow \ln 3^+} f(x)$

b) Interprète graphiquement les résultats obtenus.

2- a) Détermine : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

b) Interprète graphiquement les résultats de la question 2.a).

3- Étudie et représente graphiquement la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

12 Étudie les variations de chacune des fonctions f_1, f_2 et f_3 définies par :

$$f_1(x) = \left(\frac{7}{9}\right)^x ; f_2(x) = 1,21^x \text{ et } f_3(x) = 0,98^x$$

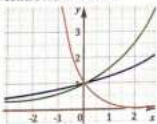
13 On a représenté ci-contre les fonctions

f_1, f_2 et f_3 définies par :

$$f_1(x) = 0,2^x ; f_2(x) =$$

$$1,3^x \text{ et } f_3(x) = 1,6^x$$

Associe en justifiant chaque fonction à sa courbe en désignant la couleur.



1- Détermine le nombre de solutions de l'équation : $\frac{e^x}{e^x + 1} = x$

2- Donne un encadrement d'amplitude 10^{-1} des éventuelles solutions.

14 On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{(x-2)e^x - x - 2}{e^x - 1}$$

1- Détermine les réels a, b et c tels que : $\mathbb{R}^*$,

$$f(x) = ax + b + \frac{ce^x}{e^x - 1}.$$

2- Déduis-en une primitive F de f sur $]0; +\infty[$.

15 On donne la fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\ln 3\}$ par :

$$g(x) = ex + 1 + \frac{3}{e^x - 3}$$

est la courbe représentation de la fonction g dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1- Calcule $g(0)$ et $g(-\ln 2)$.

2- Détermine les coordonnées des points d'intersection de (C) avec :

a) l'axe des abscisses.

b) la droite d'équation : $y = -2$.

16 Démontre que l'équation $e^x = 2$ n'admet qu'une seule solution dans l'intervalle $]0; 1[$, puis détermine un encadrement à 10^{-3} de cette solution.

17 Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on désigne par la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + e^{-x}$.

1- Justifie que (C) passe par le point A de coordonnées (0 ; 1).

2- Dresse le tableau de variation de f . (On précisera les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$).

3- Détermine la primitive F de f qui s'annule en $\ln 2$.

18 On considère la fonction g définie sur $]0; 2\pi[$ par : $g(x) = e^{\cos x}$

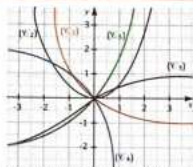
1- Détermine $g'(x)$ pour tout nombre réel x de $]0; 2\pi[$.

2- Déduis-en le tableau de variation de g sur $]0; 2\pi[$.

19 On a tracé les courbes de cinq fonctions f, g, h, i et j définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{-x} - 1 ; g(x) = -2e^x + 2 ; h(x) = e^x - 1 ;$$

$$i(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1 \text{ et } j(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}.$$



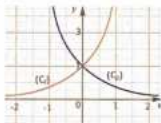
Les droites d'équations $y = -1$ et $y = 1$ sont les asymptotes en $+\infty$ respectivement des courbes (C_2) et (C_3)

Associe à chaque fonction la courbe qui lui correspond en justifiant tes réponses.

10 On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x \text{ et } g(x) = e^{-x}$$

Dans un repère orthonormé, on a tracé les courbes (C_f) et (C_g) de ces deux fonctions.



1- Démontre que si m est le coefficient directeur d'une droite (D) du plan, alors le vecteur de coordonnées $[1; m]$ est un vecteur directeur de cette droite.

2- Détermine, pour tout nombre réel x , $f(x)$ et $g'(x)$.

3- On note (T_a) et (Δ_a) les tangentes respectives à (C_f) et (C_g) au point d'abscisse a .

a)-Démontre que les tangentes à (C_f) et (C_g) au point d'abscisse 0 sont perpendiculaires

b) Démontre que les tangentes à (C_f) et (C_g) au point d'abscisse a sont perpendiculaires quel que soit le réel a .

50 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x}{e^x - x}$$

On note (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = e^x - x - 1$$

a) Étudie les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$ puis déduis-en le signe de $g(x)$.

b) Justifie que pour tout nombre réel x , $(e^x - x)$ est strictement positif.

2- a) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

b) Donne une interprétation graphique des résultats précédents.

3- a) f' désignant la fonction dérivée de f , calcule $f'(x)$.

b) Étudie le sens de variation de f puis dresse son tableau de variation.

c) f' Détermine une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 0.

4- Construis dans le même repère la tangente (T) et la courbe (C_f) .

53 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{4e^x}{e^x + 1} \text{ et } (C) \text{ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.}$$

1- Calcule la fonction dérivée f' de f puis déduis-en le sens de variation de f .

2- Justifie que : $f(x) = \frac{4}{1 - e^{-x}}$, puis calcule les limites de f en $+\infty$, en $-\infty$ et déduis-en l'existence d'éventuelles asymptotes.

3- Résume les résultats précédents dans un tableau de variation.

4- On appelle (T) la tangente à (C) au point d'abscisse 0. Détermine une équation de (T) .

5- Soit d la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$d(x) = f(x) - (x + 2)$$

a) Calcule $d(0)$ puis étudie le signe de $d(x)$.

b) Déduis-en la position relative de (C) et (T) .

6- Trace les asymptotes trouvées à la question 2, la tangente (T) et la courbe (C) .

52 Soit la fonction f dérivable sur $]0; +\infty[$ et définie par : $f(x) = e^x + \frac{1}{x}$.

1- Étude d'une fonction auxiliaire

a) Soit la fonction g dérivable sur $]0; +\infty[$ et définie par : $g(x) = x^2 e^x - 1$.

Étudie les variations de la fonction g .

b) Démontre qu'il existe un unique nombre réel α appartenant à $]0; +\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$, puis démontre que α appartient à l'intervalle $]0,703; 0,704[$.

c) Détermine le signe de g sur $]0; +\infty[$.

2- Etude de la fonction f

- a) Détermine les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
 b) On note f' la fonction dérivée de f sur $]0; +\infty[$.

Démontre que pour tout réel strictement positif x ,

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}.$$

- c) Déduis-en les variations de la fonction f et dresse son tableau de variation sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

d) Démontre que la fonction f admet pour minimum le nombre réel $m = \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2}$

- e) Justifie que : $3,43 < m < 3,45$

3- Situations complexes

Un technicien de surface d'un lycée a créé une entreprise afin de diversifier ces ressources financières. Cette entreprise fabrique x milliers d'objets où x appartenant à $[0; 5]$.

Après un inventaire, un spécialiste affirme que les bénéfices ou les pertes de l'entreprise en milliers de francs sont modélisés par la fonction f définie par : $f(x) = xe^x - e^x - 8$. Il ajoute que

pour une quantité x donnée, si $f(x)$ est positif, l'entreprise réalise un bénéfice et si $f(x)$ est négatif, l'entreprise subit une perte.

Le technicien de l'entreprise veut savoir à partir de combien d'objets produits son entreprise réalisera des bénéfices. Ne sachant comment procéder, il te sollicite.

Réponds à sa préoccupation en utilisant les outils mathématiques au programme.

« Un laboratoire fabrique un produit pharmaceutique. Sa capacité de production ne peut excéder 2,1 tonnes de produit. On note x la masse en tonnes de produit fabriqué.

Le coût de fabrication, en millions de Francs CFA, de x tonnes de produit est égal à $F(x)$ où

$$F(x) = 3x + 3 + (x - 3)e^x.$$

Si on note a le prix de vente, en millions de Francs CFA, d'une tonne de produit, alors $P(x) = ax - F(x)$ donne le profit ou la perte en millions de Francs CFA réalisé après la fabrication et la vente de x tonnes de produits. »

Curieux, il veut déterminer le nombre de tonnes de produit afin que ce laboratoire réalise un profit maximum. Il t'associe au projet.

En supposant $a = 3$, propose lui une solution argumentée à l'aide d'outils mathématiques.

Un élève de ta classe de terminale scientifique lit dans une revue les informations suivantes :



VI- RENDEZ-VOUS DES CURIEUX

Comme , le nombre e est un nombre irrationnel, c'est-à-dire qu'il s'écrit avec un nombre infini de décimales sans suite logique.

Ses premières décimales sont :

Le nombre e est également un nombre transcendant. On dit qu'un nombre est transcendant s'il n'est solution d'aucune équation à coefficients entiers.

Le nombre e par exemple, est irrationnel mais n'est pas transcendant puisqu'il est solution de l'équation :

Un tel nombre est dit « algébrique ».

Le premier à s'intéresser de façon sérieuse au nombre e est le mathématicien suisse Leonhard Euler (1707 - 1783).

C'est à lui que nous devons le nom de ce nombre ; non pas qu'il s'agisse de l'initiale de son nom mais peut-être car e est la première lettre du mot exponentiel.



Dans « *Introductio in Analysin infinitorum* » publié en 1748, Euler explique que :
Rappelons que par exemple : se lit « factorielle 5 » et est égal à : . Par cette formule, il obtient une estimation de avec décimales exactes.
Nous devons aussi à Euler la démonstration de l'irrationalité de .
Avec cette nouvelle notation, on a pu ainsi résumer l'ensemble des propriétés de la fonction exponentielle.

Notions essentielles :

- Ecritures complexes des transformations usuelles du plan :
- symétrie centrale ;
- symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses ;
- symétrie orthogonale par rapport à l'axe des ordonnées ;
- homothétie de centre Ω et de rapport k ;
- rotation de centre Ω et de d'angle θ ;
- Similitudes directes du plan
- Caractérisations complexes de configurations du plan :
- points alignés ;
- triangles particuliers ;
- cercle ;
- droite.

SITUATION D'APPRENTISSAGE

Lors d'une phase éliminatoire d'un festival des arts et culture en milieu scolaire, un élève d'une classe de terminale D a photographié un tableau d'art représenté comme l'indique la figure ci-contre.

De retour en classe, il informe ces camarades de classe que le candidat concepteur du tableau a affirmé que :

« Le dessin est construit à partir d'un carré initial suivi par des carrés tels que les sommets du carré suivant sont les milieux respectifs des côtés du carré précédent et que chaque carré est inscrit dans celui qui le précède ».

Emerveillés par la photo, les élèves de la classe décident de reproduire le dessin.

Le major de la classe affirme que l'on peut utiliser les composées de rotations et d'homothéties dans un repère.

Les autres élèves de la classe décident d'étudier les propriétés de la composée de ces deux transformations du plan.



I- ACTIVITÉS DE DÉCOUVERTE



Dans cette leçon le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1- NOMBRES COMPLEXES ET CONFIGURATIONS DU PLAN

1.1- Connaître la caractérisation complexe de points alignés

Activité 1

Soit A, B et C trois points du plan deux à deux distincts, d'affixes respectives z_A , z_B et z_C tels que :

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = k, \text{ où } k \text{ est un nombre réel.}$$

- 1- Justifie que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
- 2- Dédus - en que les points A, B et C sont alignés.
- 3- On suppose que les points A, B et C sont alignés et deux à deux distincts, d'affixes respectives z_A , z_B et z_C . Calcule les valeurs du rapport $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$

Je fais le point de l'activité

Les points A, B et C sont alignés si et seulement si $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est un nombre réel non nul.

J'évalue mes acquis



On donne les points A(-1 - i), B(2 + 3i) et C(-10 - 13i).
Justifie que les points A, B et C sont alignés.

1.2- Connaître la caractérisation complexe de droites parallèles

Activité 2

Soit A, B, C et D quatre points du plan deux à deux distincts, d'affixes respectives z_A , z_B , z_C et z_D tels que les droites (BC) et (AD) sont parallèles.

- 1- Recopie et complète les pointillés par le nombre qui convient :

$$\text{Mes}(\widehat{BC, AD}) = \dots \text{ ou } \text{Mes}(\widehat{CB, AD}) = \dots$$

- 2- Dédus-en que : $\arg\left(\frac{z_D - z_A}{z_C - z_B}\right) = k\pi \ (k \in \mathbb{R})$.

- 3- Dédus les valeurs de : $\frac{z_D - z_A}{z_C - z_B}$

- 4- On suppose que $\frac{z_D - z_A}{z_C - z_B}$ est un nombre réel non nul, justifie que les droites (BC) et (AD) sont parallèles.

Je fais le point de l'activité

Les droites (BC) et (AD) sont parallèles si et seulement si $\frac{z_D - z_A}{z_C - z_B}$ est un nombre réel non nul.

l'évalue mes acquis



On donne les points $A(5 + i)$, $B(-2)$, $C(1 + i)$ et $D(-4 - 2i)$.
Justifie que les droites (AD) et (BC) sont parallèles.

1.3. Connaître la caractérisation complexe de droites perpendiculaires

ACTIVITÉ 3

Soit A , B , C et D quatre points du plan deux à deux distincts, d'affixes respectives z_A , z_B , z_C et z_D tels que les droites (BC) et (AD) sont perpendiculaires.

1- Recopie et complète les pointillés par le nombre qui convient :

$$\text{mes}(\widehat{BC}, \widehat{AD}) = \dots \text{ ou } \text{mes}(\widehat{BC}, \widehat{AD}) = \dots k\pi \quad (k \in \mathbb{R}).$$

2- Déduis-en que : $\arg\left(\frac{z_D - z_A}{z_C - z_B}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{R}).$

3- Déduis les valeurs de : $\frac{z_D - z_A}{z_C - z_B}$.

4- On suppose que $\frac{z_D - z_A}{z_C - z_B}$ est un nombre imaginaire pur non nul, justifie que les droites (BC) et (AD) sont perpendiculaires.

Je fais le point de l'activité

Les droites (BC) et (AD) sont perpendiculaires si et seulement si $\frac{z_D - z_A}{z_C - z_B}$ est un nombre imaginaire pur non nul.

l'évalue mes acquis



On donne les points $O(0)$, $B(-2)$, $C(1 + i)$ et $E(-1 + 3i)$.
Démontre que les droites (OE) et (BC) sont perpendiculaires.

1.4. Connaître la caractérisation complexe de points cocycliques

ACTIVITÉ 4

Soit A , B , C et D quatre points distincts du plan, d'affixes respectives z_A , z_B , z_C et z_D tels que A , B , C et D sont cocycliques (c'est-à-dire les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle).

1- 1^{er} cas : les points C et D sont situés sur le même arc (AB) ou $(\overline{AB})$

a) Justifie que les angles orientés $(\widehat{CB}, \widehat{CA})$ et $(\widehat{DB}, \widehat{DA})$ ont la même mesure.

b) Déduis-en que : $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} + \frac{z_D - z_A}{z_D - z_B}\right) = 0.$

c) Déduis les valeurs de : $\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} + \frac{z_D - z_A}{z_D - z_B}$.

2- 2^{ème} cas : les points C et D sont situés de part et d'autre de la corde $[AB]$

a) Justifie que les angles orientés $(\widehat{CB}, \widehat{CA})$ et $(\widehat{DB}, \widehat{DA})$ sont supplémentaires.

b) Déduis-en que : $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} + \frac{z_D - z_A}{z_D - z_B}\right) = \pi.$

c) Déduis les valeurs de : $\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} + \frac{z_D - z_A}{z_D - z_B}$.

3- Déduis des questions précédentes que $\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} + \frac{z_D - z_A}{z_D - z_B}$ est un nombre réel non nul.

Je fais le point de l'activité

Les points A, B, C et D sont cocycliques si et seulement si $\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} + \frac{z_D - z_A}{z_D - z_B}$ est un nombre réel non nul.

J'évalue mes acquis



On donne les points A(-2i), B(-2 + 2i), C(1 + i) et D(2i).
Démontrez que les points A, B, C et D sont cocycliques.

1.5- Connaître les caractérisations complexes des triangles particuliers

ACTIVITÉ 5

A, B et C sont trois points distincts du plan non alignés d'affixes respectives z_A , z_B et z_C .

1- ABC est un triangle isocèle en A.

a) Détermine le module et un argument du nombre complexe $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.

b) Déduis-en la forme exponentielle du nombre complexe $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.

2- ABC est un triangle équilatéral.

a) On suppose que ABC est un triangle isocèle en A et $\text{Mes}(\widehat{BAC}) = \frac{\pi}{3}$.

Déduis de la question 1-b) la forme exponentielle du nombre complexe $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.

b) On suppose que ABC est un triangle isocèle en A et $\text{Mes}(\widehat{BAC}) = -\frac{\pi}{3}$.

Déduis de la question 1-b) la forme exponentielle du nombre complexe $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.

3- ABC est un triangle rectangle en A.

Justifie que le nombre complexe $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est un imaginaire pur

Je fais le point de l'activité

Triangles	Caractérisations complexes
Triangle ABC isocèle en A. $AB = AC$ et $\text{mes } \widehat{BAC} = \theta$ ($0 < \theta < \pi$)	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\theta}$ ou $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-i\theta}$
Triangle ABC équilatéral. $AB = AC$ et $\text{mes } \widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$
Triangle ABC rectangle en A. $\text{mes } \widehat{BAC} = \frac{\pi}{2}$	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = ih, h \in \mathbb{R}^*$
Triangle ABC rectangle et isocèle en A. $AB = AC$ et $\text{mes } \widehat{BAC} = \frac{\pi}{2}$	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i$ ou $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -i$

Évalue mes acquis



- 1- A, B et C sont trois points distincts du plan d'affixes respectives z_A , z_B et z_C . Dans le tableau ci-dessous, mets une croix dans la case qui convient.

	ABC est un triangle rectangle en A	ABC est un triangle isocèle en A	ABC est un triangle équilatéral	ABC est un triangle rectangle et isocèle en A
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$				
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i$				
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{2}}$				
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -3i$				
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$				

- 2- On donne les points A(3), B(2 + i√3), I(1) et C(1 + 2i).
 a) Démontre que le triangle AIB est équilatéral.
 b) Démontre que le triangle AIC est rectangle isocèle en I.

2- ÉCRITURES COMPLEXES DES TRANSFORMATIONS USUELLES DU PLAN

2.1- Connaître les formules relatives à l'écriture complexe d'une symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses ou à l'axe des ordonnées

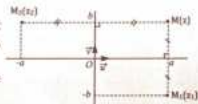
Activité 6

M, M₁ et M₂ sont des points d'affixes respectives z , z_1 et z_2 , comme représentés sur la figure ci-contre. (O, $\vec{u}$) et celle d' une symétrie orthogonale d'axe (O, $\vec{v}$).

- Donne les coordonnées des points M₁ et M₂.
Déduis-en la forme algébrique de z_1 puis celle de z_2 .
- Déduis de ce qui précède l'expression de z_1 en fonction de z et l'expression de z_2 en fonction de z .

Je fais le point de l'activité

- Sur la figure, $z = a + ib$, $z_1 = a - ib$ et $z_2 = -a + ib$.
- $z_1 = \bar{z}$ et $z_2 = -z$
- Soit M(z) et M'(z') deux points du plan tels que M' est l'image de M par une transformation F du plan ($M' = F(M)$).
 $z' = \bar{z}$ est l'écriture complexe de la symétrie orthogonale d'axe (O, $\vec{u}$).
 $z' = -\bar{z}$ est l'écriture complexe de la symétrie orthogonale d'axe (O, $\vec{v}$).



l'évalue mes acquis



M et M' sont des points d'affixes respectives z et z' .

Répond par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

1. $M' = S_{(O)}(M)$ équivaut à: $z' = -z$
2. $M' = S_{(O)}(M)$ équivaut à: $z' = \bar{z}$
3. $M' = S_{(O)}(M)$ équivaut à: $z' = -\bar{z}$
4. $M' = S_{(O)}(M)$ équivaut à: $z' = -z$

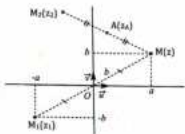
2.2-Connaitre les formules relatives à l'écriture complexe d'une symétrie centrale

Activité 7

Sur la figure ci-contre, M, M_1 , M_2 et A sont des points d'affixes respectives z , z_1 , z_2 et z_A tels que :

$M_1 = S_O(M)$ et $M_2 = S_A(M)$.

L'objectif de cette activité est de déterminer l'écriture complexe d'une symétrie centrale de centre O ou d'une symétrie de centre un point A d'affixe z_A ($z_A \neq 0$).



- 1- Détermine l'expression de z_1 en fonction de z .
- 2- Détermine l'expression de z_2 en fonction de z et z_A .

Je fais le point de l'activité

- $M_1 = S_O(M)$; donc : $z_1 = -z$
- $M_2 = S_A(M)$; donc : $z_2 = -z + 2z_A$
- Soit $M(z)$ et $M'(z')$ deux points du plan tels que M' est l'image de M par une transformation F du plan ($M' = F(M)$).
- $z' = -z$ est l'écriture complexe de la symétrie centrale de centre O.
- $z' = -z + 2z_A$ est l'écriture complexe de la symétrie centrale de centre A.

l'évalue mes acquis



- 1- Détermine l'écriture complexe de la symétrie centrale de centre A d'affixe $1 + 2i$.
- 2- Détermine l'écriture complexe de la symétrie centrale de centre Ω de coordonnées $(0; -2)$.

2.3-Connaitre la formule relative à l'écriture complexe d'une translation

Activité 8

Soit M et M' deux points du plan d'affixes respectives z et z' tels que M' est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe h ($M' = t_h(M)$).

L'objectif de cette activité est de déterminer l'écriture complexe d'une translation de vecteur $\vec{u}$.

- 1- Donne l'égalité vectorielle qui traduit cette translation.
- 2- Dédus-en l'expression de z' en fonction de z et h .

Je fais le point de l'activité

- $M' = t_{\vec{u}}(M)$ se traduit par l'égalité vectorielle $\vec{MM'} = \vec{u}$.
- On a : $\vec{MM'} = \vec{u} \Leftrightarrow z_{MM'} = \vec{u}$. Donc : $z' = z + b$.
- Soit $M(z)$ et $M'(z')$ deux points du plan tels que : $M' = t_{\vec{u}}(M)$ où b est l'afixe de $\vec{u}$.
 $z' = z + b$ est l'écriture complexe de la translation de vecteur $\vec{u}$ d'afixe b .

j'évalue mes acquis

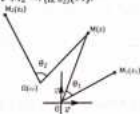


- 1- Détermine l'écriture complexe de la translation de vecteur $\vec{u}$ d'afixe $1 + 2i$.
- 2- Détermine l'écriture complexe de la translation de vecteur $\vec{v}$ de coordonnées $(0; -2)$.

2.4- Connaître les formules relatives à l'écriture complexe d'une rotation

Activité 9

On désigne par $r_{(0, \theta_1)}$ la rotation de centre O et d'angle orienté θ_1 et $r_{(0, \theta_2)}$ la rotation de centre O et d'angle orienté θ_2 .
 On note M, M_1, M_2 et Ω des points du plan d'afixes respectives z, z_1, z_2 et ω tels que : $M_1 = r_{(0, \theta_1)}(M)$ et $M_2 = r_{(\Omega, \theta_2)}(M)$.



- 1- a- Détermine le module et un argument de $\frac{z_1}{z}$. Déduis-en l'écriture exponentielle de $r_{(0, \theta_1)}$.
 b- Exprime z_1 en fonction de z et θ_1 .
- 2- a- Détermine le module et un argument de $\frac{z_2 - \omega}{z - \omega}$. Déduis-en l'écriture exponentielle de $r_{(\Omega, \theta_2)}$.
 Exprime z_2 en fonction de z, ω et θ_2 .

Je fais le point de l'activité

- $z' = e^{i\theta} z$ est l'écriture complexe de la rotation de centre O et d'angle orienté θ .
 $z' = e^{i\theta} (z - \omega) + \omega$ est l'écriture complexe de la rotation de centre Ω d'afixe ω et d'angle orienté θ .

j'évalue mes acquis



- 1- Détermine l'écriture complexe de la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{6}$.
- 2- Détermine l'écriture complexe de la rotation de centre $\Omega (1 + 2i)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
- 3- Soit r la transformation du plan qui à tout point M d'afixe z associe le point M' d'afixe z' tel que : $z' = -z + 6 + 4i$.
 Justifie que r est une rotation de centre A d'afixe $z_A = 3 + 2i$ et d'angle $\theta = \pi$.

2.5-Connaitre les formules relatives à l'écriture complexe d'une homothétie

ACTIVITE 10

Soit k_1 et k_2 deux nombres réels non nuls.

On désigne par $h_{(0, k_1)}$ l'homothétie de centre O et de rapport k_1

et $h_{(0, k_2)}$ l'homothétie de centre O et de rapport k_2 .

M, M_1 , M_2 et Ω sont des points du plan d'affixes respectives

z , z_1 , z_2 , ω tels que : $M_1 = h_{(0, k_1)}(M)$ et $M_2 = h_{(0, k_2)}(M)$.

1-a) Donne l'égalité vectorielle qui traduit la relation $M_1 = h_{(0, k_1)}(M)$.

b) Déduis-en l'expression de z_1 en fonction de z et k_1 .

2-a) Donne l'égalité vectorielle qui traduit la relation $M_2 = h_{(0, k_2)}(M)$.

b) Déduis-en l'expression de z_2 en fonction de z , ω et k_2 .

3- Conclus.

Je fais le point de l'activité :

$z' = kz$ est l'écriture complexe de l'homothétie de centre O et de rapport k .

$z' = k\omega + \omega(1 - k)$ est l'écriture complexe de l'homothétie de centre Ω d'affixe ω et de rapport k .

J'évalue mes acquis



1- Détermine l'écriture complexe de l'homothétie de centre O et de rapport -3.

2- Détermine l'écriture complexe de l'homothétie de centre $\Omega(1 - 2i)$ et de rapport $\frac{1}{2}$.

3- SIMILITUDE DIRECTE

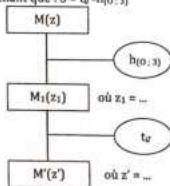
3.1-Connaitre la définition et les formules relatives à l'écriture complexe d'une similitude directe

ACTIVITE 11

Soit $\vec{u}$ un vecteur d'affixe i , $M(z)$, $M_1(z_1)$ et $M'(z')$ trois points et S une transformation du plan.

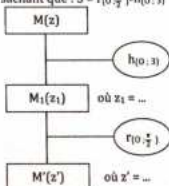
Recopie et complète le schéma ci-dessous

sachant que : $S = t_{\vec{u}} \circ h_{(0, 3)}$



Recopie et complète le schéma ci-dessous

sachant que : $S = r_{(0, \frac{\pi}{2})} \circ h_{(0, 3)}$



Donne la forme générale de l'écriture complexe de S

Je fais le point de l'activité

- Si $S = t_{(0, \frac{\pi}{4})} \circ h_{(0, \frac{1}{2})}$, alors l'écriture complexe de S est $z' = 3z + i$;
 - Si $S = S = r_{(0, \frac{\pi}{4})} \circ h_{(0, \frac{1}{2})}$, alors l'écriture complexe de S est $z' = 3iz$.
 - Dans les deux cas, l'écriture complexe de S est de la forme $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.
C'est l'écriture complexe d'une similitude directe.
 - L'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = az + b$ avec $(a; b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ est une similitude directe.
- L'écriture complexe d'une similitude directe est de la forme : $z' = az + b$ avec $(a; b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.

J'évalue mes acquis



Dans chacun des cas ci-dessous, dis si l'écriture complexe donnée est celle d'une similitude directe du plan ou pas.

- a) $z' = (1 + 2i)z - 1 - i$; b) $z' = (5i + 1)z - 1$; c) $z' = 5i\bar{z} - 1$; d) $z' = -3z$

3.2- Reconnaître l'écriture complexe d'une transformation usuelle du plan

Activité 12

Soit S la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = (1 + i\sqrt{3})z - \sqrt{3}(1 + 2i)$.

- 1- Justifie que S n'est ni une symétrie centrale, ni une symétrie orthogonale d'axe $(0, \bar{u})$, ni une symétrie orthogonale d'axe $(0, \bar{v})$, ni une translation, ni une homothétie, ni une rotation.
- 2- Soit $z' = az + b$ (où a et b sont deux nombres complexes tels que : $a \neq 0$) l'écriture complexe associée à une transformation F du plan.

Étudie F suivant les valeurs de a et b .

Je fais le point de l'activité

A partir d'une écriture complexe d'une similitude directe, il est possible de reconnaître la transformation associée.

J'évalue mes acquis



Exercice 1

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, u, v) .

Réponds par Vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

- a) La symétrie orthogonale d'axe $(0, \bar{u})$ est une similitude directe.
- b) La symétrie centrale de centre O est une similitude directe.
- c) Toute translation est une similitude directe.
- d) Toute rotation est une similitude directe.
- e) Toute homothétie est une similitude directe.
- f) Une symétrie orthogonale est une similitude directe.
- g) Toute similitude directe est une homothétie.

Exercice 2

2- Donne, dans chacun des cas ci-dessous, la nature et les éléments caractéristiques de la transformation S du plan d'écriture complexe indiquée.

- a) $z' = z - 3 - 5i$;
- b) $z' = \frac{3}{2}z + 3$;
- c) $z' = -\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})z + 2i$;
- d) $z' = \frac{1}{2}[1 - i]z + 3 + 2i$.

3.3- Connaître les éléments caractéristiques et les propriétés relatives à une similitude directe.

Activité 13

Soit S une similitude directe d'écriture complexe $z' = az + b$ avec $(a; b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.

Considérons les points M d'affixe z_M et N d'affixe z_N d'images respectives M' d'affixe $z_{M'}$ et N' d'affixe $z_{N'}$ par S .

1- Justifie que lorsque S n'est pas une translation, elle admet un seul point Ω tel que $S(\Omega) = \Omega$ dont on précisera son affixe ω .

2- Détermine $\text{Mes}(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'})$.

3- Conclus.

Je fais le point de l'activité

Soit $z' = az + b$ avec $(a; b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ l'écriture complexe d'une similitude directe S qui n'est pas une translation. Les éléments caractéristiques de S sont :

- Son centre est le point Ω d'affixe ω tel que : $\omega = a\omega + b \Leftrightarrow \omega = \frac{b}{1-a}$;
- Son rapport est $k = |a|$;
- Son angle est $\theta = \arg(a)$.

l'évalue mes acquis



Détermine les éléments caractéristiques de la similitude directe qui a pour écriture complexe

$$z' = (1 + i\sqrt{3})z - \sqrt{3}(1 + 2i).$$

3.4- Connaître la caractérisation géométrique d'une similitude directe

Activité 14

A) Soit S_1 une similitude directe d'écriture complexe $z' = az + b$ avec $a = 1 + i\sqrt{3}$ et $b = \sqrt{3}$.

1- Calcule $|a|$ puis détermine $\text{ARG}(a)$.

2- Soit $\Omega(\omega)$ tel que $S_1(\Omega) = \Omega$. Démontre que :

$$\omega = \frac{b}{1-a} \text{ puis que } \omega = i.$$

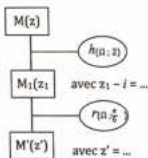
B) M est un point du plan d'affixe z .

Soit Ω un point d'affixe i et $S_2 = r_{(\Omega; \frac{\pi}{6})} \circ h_{(\Omega; 2)}$.

1- Recopie et complète le schéma ci-contre.

2- Etablis que : $z' = (1 + i\sqrt{3})z + \sqrt{3}$.

3- Justifie que : $S_1 = S_2$.



Je fais le point de l'activité

La similitude directe S_1 d'écriture complexe $z' = az + b$ est la composée de l'homothétie de centre

$\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right)$ de rapport $|a|$ et de la rotation de centre $\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right)$ et d'angle $\arg(a)$.

l'évalue mes acquis



Ecris, dans chacun des cas ci-dessous, la similitude directe S d'écriture complexe donnée sous forme de composée d'une homothétie et d'une rotation dont on précisera les éléments caractéristiques. a) $z' = \frac{3}{2}z + 3$; b) $z' = -\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})z + 2i$;

c) $z' = \frac{1}{2}(1 - i)z + 3 + 2i$; d) $z' = (1 + i\sqrt{3})z - \sqrt{3}(1 + 2i)$.

3.5- Connaître les propriétés relatives aux diverses déterminations d'une similitude

Activité 15

Dans le plan complexe, on considère les points A, B, A' et B' tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$, d'affixes respectives : $z_A, z_B, z_{A'}$ et $z_{B'}$.

Démontre qu'il existe une unique similitude directe S , qui transforme A en A' et B en B' .

Je fais le point de l'activité

Soit A, B, A' et B' quatre points du plan tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$.

Il existe une unique similitude directe S telle que : $S(A) = A'$ et $S(B) = B'$.

J'évalue mes acquis



Dans le plan complexe, on considère les points A, B, A' et B' d'affixes respectives : $3 - i$; $2i$; $-7 + i$ et $5 + i$.

Détermine l'écriture complexe de la similitude directe S , qui transforme A en A' et B en B' .

Activité 16

Dans le plan complexe, on considère les points Ω, A et A' trois points du plan tels que $A \neq \Omega$ et $A' \neq \Omega$, d'affixes : ω, z_A et $z_{A'}$.

Démontre qu'il existe une unique similitude directe S de centre Ω , qui transforme A en A' .

Je fais le point de l'activité

Soit Ω, A et A' trois points du plan tels que $A \neq \Omega$ et $A' \neq \Omega$.

Il existe une unique similitude directe S de centre Ω , qui transforme A en A' .

J'évalue mes acquis



Dans le plan complexe, on considère un carré $ABCD$ direct de centre O .

Détermine l'écriture complexe de la similitude directe S de centre O , qui transforme B en D .

Activité 17

Dans le plan complexe, on considère deux points A et A' d'affixes respectives : z_A et $z_{A'}$.

Soit k un nombre réel strictement positif et θ un nombre réel.

Démontre qu'il existe une unique similitude directe S de rapport k et d'angle θ , qui transforme A en A' .

Je fais le point de l'activité

Soit k un nombre réel strictement positif, θ un nombre réel, A et A' deux points du plan.

Il existe une unique similitude directe de rapport k et d'angle θ , qui transforme A en A' .

J'évalue mes acquis



Dans le plan complexe, on considère deux points A et B d'affixes respectives : i et $1 + i$.

Détermine la similitude S de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$, qui transforme A en B .

3.6- Connaitre les propriétés relatives aux images de figures simples par une similitude directe.

ACTIVITÉ 18

Soit S une similitude directe de rapport k et $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O et de rayon r ($r > 0$).
Démontre que l'image par S du cercle $(\mathcal{C})$ est le cercle $(\mathcal{C}')$ de centre $O' = S(O)$ et de rayon kr .

Je fais le point de l'activité

Toute similitude directe de rapport k transforme un cercle de centre O et de rayon r en un cercle de centre $O' = S(O)$ et de rayon kr .

J'évalue mes acquis



Dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct, on considère une similitude directe S d'écriture complexe : $z = (1 + i)z - 2$.

Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de centre A d'affixe $1 - i$ et de rayon 2.

Détermine l'image $(\mathcal{C}')$ du cercle $(\mathcal{C})$ par S .

ACTIVITÉ 19

Soit S une similitude directe de rapport k .

On considère le triangle ABC dont $[AH]$ est la hauteur relative au côté $[BC]$, on désigne par A', B', C' et H' les images respectives des points A, B, C et H par S . Etablis une relation entre :

- 1- les longueurs $B'C'$ et BC , puis $A'H'$ et AH .
- 2- les aires des triangles ABC et $A'B'C'$.

Je fais le point de l'activité

Toute similitude directe de rapport k multiplie les distances par k et les aires par k^2 .

J'évalue mes acquis



Soit S une similitude directe de rapport 2. Soit ABC un triangle de périmètre 12 cm et d'aire 18 cm².

Détermine le périmètre puis l'aire de l'image $A'B'C'$ du triangle ABC par S .

II- RÉSUMÉ DE COURS



Dans cette leçon, le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1- NOMBRES COMPLEXES ET CONFIGURATIONS DU PLAN

1.1- Caractérisation complexe de points alignés

PROPRIÉTÉ

Soit A, B et C trois points du plan deux à deux distincts, d'affixes respectives z_A, z_B et z_C .

A, B et C sont alignés si et seulement si : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^*$.

1.2- Caractérisation complexe de droites parallèles

PROPRIÉTÉ

Soit A, B, C et D quatre points du plan d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D tels que $A \neq B$ et $C \neq D$.

Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si : $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D} \in \mathbb{R}^*$.

1.3- Caractérisation complexe de droites perpendiculaires

PROPRIÉTÉ

Soit A, B, C et D quatre points du plan d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D tels que $A \neq B$ et $C \neq D$.

Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires si et seulement si $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D} \in i\mathbb{R}^*$.

1.4- Caractérisation complexe de points cocycliques

PROPRIÉTÉ

Soit A, B, C et D quatre points distincts du plan tels que trois d'entre eux ne soient pas alignés, d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D .

A, B, C et D sont cocycliques si et seulement si $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} + \frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} \in \mathbb{R}^*$.

1.5- Caractérisations complexes de triangles particuliers

PROPRIÉTÉ

Soit A, B et C trois points non alignés distincts du plan d'affixes respectives z_A, z_B et z_C .

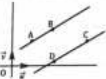
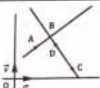
• ABC est un triangle isocèle en A si et seulement si $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\theta}$ ou $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-i\theta}$, avec $0 < \theta < \pi$.

• ABC est un triangle équilatéral si et seulement si $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

• ABC est un triangle rectangle en A si et seulement si $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}^*$.

• ABC est un triangle rectangle et isocèle en A si et seulement si $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i$ ou $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -i$.

Tableau récapitulatif

Points A, B, C alignés.		$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^*$
Droites parallèles		$\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^*$
Droites perpendiculaires		$\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}^*$

Points A, B, C, D non alignés cocycliques		$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} + \frac{z_B - z_D}{z_A - z_D} \in \mathbb{R}^*$
Triangle ABC isocèle en A		$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\theta} \text{ ou } \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-i\theta}$
Triangle ABC équilateral		$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ ou } \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$
Triangle ABC rectangle en A		$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = ib, b \in \mathbb{R}^*$
Triangle ABC rectangle et isocèle en A		$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i \text{ ou } \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -i$

2 ECRITURES COMPLEXES DES TRANSFORMATIONS USUELLES DU PLAN

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

2.1- Écritures complexes de symétries orthogonales d'axes $(O, \vec{u})$ et $(O, \vec{v})$ dans le repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

- Une transformation du plan est une application bijective du plan dans le plan.
- Soit F une transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' .
L'application bijective f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à l'affixe z associe l'affixe z' s'appelle la transformation complexe associée à F .
L'application F s'appelle la transformation ponctuelle associée à f .
L'expression de z' en fonction de z s'appelle l'écriture complexe de F .

PROPRIÉTÉ

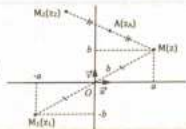
- La symétrie orthogonale d'axe $(O, \vec{u})$ a pour écriture complexe : $z' = \bar{z}$.
- La symétrie orthogonale d'axe $(O, \vec{v})$ a pour écriture complexe : $z' = -\bar{z}$.



2.2-Ecriture complexe d'une symétrie centrale

PROPRIÉTÉ

- La symétrie centrale de centre O a pour écriture complexe : $z' = -z$.
- La symétrie centrale de centre Ω d'affixe ω ($\omega \neq 0$) a pour écriture complexe : $z' = -z + 2\omega$.



2.3-Ecriture complexe d'une translation

PROPRIÉTÉ

La translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b a pour écriture complexe : $z' = z + b$.

2.4-Ecriture complexe d'une rotation

PROPRIÉTÉ

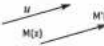
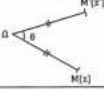
- La rotation de centre O et d'angle orienté θ a pour écriture complexe : $z' = e^{i\theta} z$.
- La rotation de centre Ω d'affixe ω ($\omega \neq 0$) et d'angle orienté θ a pour écriture complexe : $z' = e^{i\theta} (z - \omega) + \omega$.

2.5-Ecriture complexe d'une homothétie

PROPRIÉTÉ

- L'homothétie de centre O et de rapport k , ($k \in \mathbb{R}^*$) a pour écriture complexe : $z' = kz$.
- L'homothétie de centre Ω d'affixe ω ($\omega \neq 0$) et de rapport k , ($k \in \mathbb{R}^*$) a pour écriture complexe : $z' = k(z - \omega) + \omega$.

Tableau récapitulatif des écritures complexes des transformations du plan

Transformation du plan	Image $M'(z')$ d'un point $M(z)$	Définition géométrique	Écriture complexe
Symétrie par rapport à l'axe (OI)		La droite (OI) est la médiatrice du segment $[MM']$	$z' = \bar{z}$
Symétrie par rapport à l'axe (OJ)		La droite (OJ) est la médiatrice du segment $[MM']$	$z' = -z$
Symétrie centrale de centre $\Omega(\omega)$		$\overrightarrow{\Omega M'} = -\overrightarrow{\Omega M}$	$z' - \omega = -(z - \omega)$
Translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b		$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$	$z' = z + b$
Rotation de Centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ		$\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \text{mes}(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta \end{cases}$	$z' - \omega = e^{i\theta} (z - \omega)$
Homothétie de Centre $\Omega(\omega)$ et de rapport k ($k \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$)		$\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$	$z' - \omega = k(z - \omega)$

3- SIMILITUDE DIRECTE

3.1-Écriture complexe d'une similitude directe

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct.

DÉFINITIONS

- Une similitude directe est une transformation du plan dont l'écriture complexe est de la forme : $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.
- La similitude directe S de centre Ω d'affixe ω , de rapport k et d'angle θ a pour écriture complexe : $z' = ke^{i\theta}(z - \omega) + \omega$.



Toute translation, toute homothétie et toute rotation est une similitude directe.

PROPRIÉTÉ

Soit S une similitude directe d'écriture complexe : $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

- Si $a = 1$, alors S est la translation de vecteur d'affixe b .
- Si $a \neq 1$ alors S est la similitude directe de centre d'affixe $\frac{b}{1-a}$, de rapport $|a|$, d'angle $\text{Arg}(a)$.

Vocabulaire

Le centre, le rapport et l'angle d'une similitude directe sont appelés ses éléments caractéristiques.



- Toute rotation d'angle θ est une similitude directe de rapport 1 et d'angle θ .
- Toute homothétie de rapport k ($k > 0$) est une similitude directe de rapport k et d'angle nul.
- Toute homothétie de rapport k ($k < 0$) est une similitude directe de rapport $-k$ et d'angle π .

PROPRIÉTÉ

Soit S la similitude directe de centre c d'affixe ω , de rapport k , ($k \in \mathbb{R}^*$) et d'angle θ et dont l'écriture complexe est $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$. On a :

- $\omega = \frac{b}{1-a}$
- $k = |a|$
- $a = ke^{i\theta}$ et $\theta = \arg(a)$

On peut écrire : $S(\Omega, k, \theta)$

3.2. Reconnaître une similitude directe définie par son écriture complexe

PROPRIÉTÉ

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct, on considère la similitude directe S d'écriture complexe : $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

	Conditions vérifiées par a		Nature et éléments caractéristiques de S
Similitude directe S d'écriture complexe $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$	$a \in \mathbb{R}^*$	$a = 1$	S est la translation de vecteur u d'affixe b
		$a = -1$	S est la symétrie de centre Ω et d'affixe $w = \frac{b}{2}$
		$a \in \mathbb{R}^* \setminus \{-1; 1\}$	S est l'homothétie de centre Ω d'affixe $\frac{b}{1-a}$ et de rapport a
	Si $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$	$ a = 1$	S est la rotation de centre Ω d'affixe $\frac{b}{1-a}$ et d'angle $\arg(a)$
		$ a \neq 1$	S est la similitude directe de centre Ω d'affixe $\frac{b}{1-a}$ de rapport $ a $ et d'angle $\arg(a)$

3.3. Éléments caractéristiques et propriétés relatives à une similitude directe

PROPRIÉTÉ

Soit S une similitude directe de centre Ω , de rapport k et d'angle θ ($\theta \in]-\pi; \pi]$).

Pour tout point M du plan distinct de Ω , on a :

$$M' = S(M) \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = k \Omega M \\ \text{Mes}(\widehat{\Omega M, \Omega M'}) = \theta \end{cases}$$

3.4- Caractérisation d'une similitude directe

PROPRIÉTÉ

Soit $h_{(\Omega; k)}$ l'homothétie de centre Ω et de rapport k et $r_{(\Omega; \theta)}$ la rotation de centre Ω et d'angle de mesure θ .

Toute similitude directe $S_{(\Omega; k, \theta)}$ de centre Ω , de rapport k et d'angle de mesure θ , s'écrit de façon unique sous la forme : $S_{(\Omega; k, \theta)} = r_{(\Omega; \theta)} \circ h_{(\Omega; k)} = h_{(\Omega; k)} \circ r_{(\Omega; \theta)}$.

Vocabulaire

L'écriture : $S_{(\Omega; k, \theta)} = r_{(\Omega; \theta)} \circ h_{(\Omega; k)} = h_{(\Omega; k)} \circ r_{(\Omega; \theta)}$ s'appelle la décomposition canonique de la similitude directe $S_{(\Omega; k, \theta)}$.

3.5- Déterminations d'une similitude directe du plan

PROPRIÉTÉ

Soit A, B, A' et B' quatre points du plan tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$.

Il existe une unique similitude directe qui transforme A en A' et B en B' .

CONSÉQUENCE

Soit A, B et C trois points du plan tels que : $A \neq B$ et $B \neq C$.

Il existe une unique similitude directe qui transforme A en B et B en C .

PROPRIÉTÉ

Soit Ω, A et A' trois points du plan deux à deux distincts.

Il existe une unique similitude directe de centre Ω qui transforme A en A' .

PROPRIÉTÉ

Soit k un nombre réel positif, θ un nombre réel, A et A' deux points du plan.

Il existe une unique similitude directe de rapport k et d'angle θ qui transforme A en A' .

3.6- Images de figures simples par une similitude directe

PROPRIÉTÉ

Toute similitude directe de rapport k transforme :

- une droite en une droite ;
- une demi-droite en une demi-droite ;
- un segment de longueur l en un segment de longueur kl ;
- un cercle de centre A et de rayon r en un cercle de centre A' , image de A par la similitude directe, et de rayon kr .

PROPRIÉTÉ

Toute similitude directe de rapport k multiplie :

- les distances par k ;
- les aires par k^2 .

III- MÉTHODE



• Démontrer que trois points sont alignés

Pour démontrer que trois points A, B et C deux à deux distincts, d'affixes respectives z_A , z_B et z_C sont alignés, il suffit de justifier que : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^*$.

• Démontrer que quatre points sont cocycliques

Pour démontrer que quatre points A, B, C et D distincts du plan tels que trois d'entre eux ne soient pas alignés, d'affixes respectives z_A , z_B , z_C et z_D sont cocycliques il suffit de justifier que :

$$\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} + \frac{z_D - z_A}{z_D - z_B} \in \mathbb{R}^*.$$

• Justifier que deux droites sont parallèles

Soit A, B, C et D quatre points d'affixes respectives z_A , z_B , z_C et z_D tels que $z_A \neq z_B$ et $z_C \neq z_D$.

Pour démontrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles, il suffit de justifier que :

$$\frac{z_B - z_A}{z_D - z_C} \in \mathbb{R}^*.$$

• Justifier que deux droites sont perpendiculaires

Soit A, B, C et D quatre points d'affixes respectives z_A , z_B , z_C et z_D tels que $z_A \neq z_B$ et $z_C \neq z_D$.

Pour démontrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires, il suffit de justifier que :

$$\frac{z_B - z_A}{z_D - z_C} \in i\mathbb{R}^*.$$

• Justifier la nature d'un triangle

Soit A, B et C trois points distincts du plan non alignés, d'affixes respectives z_A , z_B et z_C .

- Pour démontrer que le triangle ABC est isocèle en A, il suffit de justifier que :

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\theta} \text{ ou } \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-i\theta} \text{ où } \theta = \text{mes } \hat{A}.$$

- Pour démontrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle en A, il suffit de justifier que :

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -i \text{ ou } \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i.$$

- Pour démontrer que le triangle ABC est équilatéral, il suffit de justifier que :

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ ou } \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

• Déterminer les éléments caractéristiques d'une similitude directe définie par son écriture complexe

Pour déterminer les éléments caractéristiques d'une similitude directe S d'écriture complexe

$z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}^* \setminus \{1\}$ et $b \in \mathbb{C}$, on peut procéder comme suit :

- On détermine le nombre complexe $\frac{b}{1-a}$; c'est l'affixe du centre de S.
- On calcule $|a|$; c'est le rapport de S ;
- On détermine $\arg(a)$; c'est l'angle de S.

• Déterminer l'image d'un point par une similitude directe définie par son écriture complexe

Pour déterminer l'image A' d'un point A(x_A ; y_A) par une similitude directe S d'écriture complexe

$z' = az + b$, on peut procéder comme suit :

- On pose : $z_A = x_A + iy_A$;
- On calcule $z_A' = az_A + b$;
- $z_A' = a(x_A + iy_A) + b$;

- On conclut que : $A' \in (\text{Re}(z_A) ; \text{Im}(z_A))$.
- **Déterminer l'image d'une droite par une similitude directe**
Pour déterminer l'image (D') d'une droite (D) par une similitude directe S , on peut procéder comme suit :
 - On détermine les images A' et B' par S de deux points A et B de la droite (D) ;
 - On conclut que (D') est la droite ($A'B'$).
- **Déterminer l'image d'un cercle par une similitude directe**
Pour déterminer l'image ($\mathcal{C}'$) d'un cercle ($\mathcal{C}$) de centre O et de rayon r par une similitude directe S , on peut procéder comme suit :
 - On détermine l'image O' par S du centre O de ($\mathcal{C}$) ; O' est le centre de ($\mathcal{C}'$) ;
 - On détermine le rayon r' de ($\mathcal{C}'$) tel que : $r' = |a| \times r$ où $|a|$ est le rapport de S ;
 - Une équation de ($\mathcal{C}'$) est donnée par : $O'M^2 = (r')^2$ où $M(x ; y)$ est un point de ($\mathcal{C}'$).

IV- SAVOIR-FAIRE



Savoir-faire 1- Déterminer l'écriture complexe associée à une transformation donnée

Énoncé

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, 1, j)$, on considère les points A et Ω d'affixes respectives $4 + 5i$ et $-3 + 2i$.

Détermine l'écriture complexe de chacune des transformations suivantes :

- La symétrie s de centre Ω .
- La translation t de vecteur $\overrightarrow{\Omega A}$.
- L'homothétie h de centre Ω et de rapport -2 .
- La rotation r de centre Ω et d'angle $\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
- La similitude directe S de centre Ω , de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Solution commentée

• Je détermine l'écriture complexe associée à chacune des transformations du plan donnée.

- L'écriture complexe de s est donnée par : $z' = -z + 2z_\Omega$.

$$z' = -z + 2(-3 + 2i)$$

Donc l'écriture complexe de s est : $z' = -z - 6 + 4i$.

- Soit α l'axe du vecteur $\overrightarrow{\Omega A}$.

On a : $\alpha = z_A - z_\Omega$; $\alpha = (4 + 5i) - (-3 + 2i) = 7 + 3i$. Donc l'écriture complexe de t est : $z' = z + 7 + 3i$.

- Soit ω l'axe du point Ω . On a : $\omega = -3 + 2i$.

L'écriture complexe de h est donnée par : $z' - \omega = -2(z - \omega)$.

Soit $z' - (-3 + 2i) = -2(z - (-3 + 2i))$. On obtient : $z' = -2z - 9 + 6i$

Donc l'écriture complexe de h est : $z' = -2z - 9 + 6i$.

- On a : $\omega = -3 + 2i$.

L'écriture complexe de r est donnée par : $z' - \omega = e^{i(\frac{\pi}{2})} (z - \omega)$. Donc : $z' - (-3 + 2i) = e^{i(\frac{\pi}{2})} (z - (-3 + 2i))$.

$$z' - (-3 + 2i) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)(z + 3 - 2i).$$

$$z' - (-3 + 2i) = -i(z + 3 - 2i).$$

Finalement, on trouve : $z' = -iz - 5 - i$

Donc l'écriture complexe de r est : $z' = -iz - 5 - i$.

e) L'écriture complexe de S est donnée par : $z' = ke^{i\theta}(z - \omega) + \omega$ où Ω , k et θ sont respectivement le centre, le rapport et l'angle de S.

$$z' = 2e^{i\frac{\pi}{4}}(z + 3 - 2i) - 3 + 2i$$

$$z' = 2(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4}))(z + 3 - 2i) - 3 + 2i$$

$$\text{Donc l'écriture complexe de S est : } z' = (\sqrt{2} + i\sqrt{2})z + (5\sqrt{2} - 3) + (\sqrt{2} + 2)i.$$

Savoir-faire

Déterminer les éléments caractéristiques d'une transformation du plan dont on connaît l'écriture complexe

Exercice

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$

Détermine, dans chaque cas, la nature et les éléments caractéristiques de la transformation F du plan dont l'écriture complexe est donnée par :

$$1) z' = z - 2 + 3i;$$

$$2) z' = -\frac{1}{3}z + 4 - 2i;$$

$$3) z' = (-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2})z - 1 + i$$

$$4) z' = (\sqrt{2} + i\sqrt{2})z + 1 - i$$

Solution commentée

Je détermine la nature de chacune des transformations F d'écriture complexe donnée

$z' = z + (-2 + 3i)$ est sous la forme $z' = z + a$ avec $a = -2 + 3i$, ce qui est la forme générale de l'écriture complexe d'une translation.

Donc F est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $-2 + 3i$.

$$2) z' = -\frac{1}{3}z + 4 - 2i$$

$$z' = -\frac{1}{3}z + 4 - 2i \text{ est sous la forme } z' = az + b \text{ avec } a = -\frac{1}{3} \text{ et } b = 4 - 2i.$$

$$a \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}, \text{ donc F est une homothétie de rapport } a = -\frac{1}{3}$$

$$\text{Soit } \Omega(\omega) \text{ le centre de F. On a : } \omega = \frac{b}{1-a}; \text{ soit } \omega = \frac{4-2i}{1+\frac{1}{3}} = 3 - \frac{3}{2}i$$

$$\text{Donc, F est l'homothétie de centre } \Omega(3 - \frac{3}{2}i) \text{ et de rapport } -\frac{1}{3}.$$

$$3) z' = (-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2})z - 1 + i$$

$$z' = (-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2})z - 1 + i \text{ est sous la forme } z' = az + b \text{ avec } a = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } b = -1 + i.$$

$$a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \text{ donc F est soit une rotation, soit une similitude directe.}$$

$$\text{On a de plus : } |a| = (-\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (-\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = 1; \text{ donc F est une rotation.}$$

$$\text{Soit } \theta = \arg(a) \text{ l'angle de F et } \Omega(\omega) \text{ son centre.}$$

$$\text{On a : } \begin{cases} \cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ donc } \theta = -\frac{3\pi}{4}$$

$$\text{et } \omega = \frac{b}{1-a} = \frac{-1+i}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}}; \text{ d'où } \omega = \frac{(-1+i)(1+\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})}{(1+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}; \text{ soit } \omega = [-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}] + \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

Par conséquent, F est la rotation de centre $\Omega(-1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i)$ et d'angle $\frac{3\pi}{4}$.

4) $z' = (\sqrt{2} + i\sqrt{2})z + 1 - i$

$z' = (\sqrt{2} + i\sqrt{2})z + 1 - i$ est sous la forme : $z' = az + b$ avec $a = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ et $b = 1 - i$

$a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, donc F est soit une rotation, soit une similitude directe.

De plus, $|a| = ((\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2) = 2$: $|a| \neq 1$ donc F n'est pas une rotation.

Par conséquent, F est une similitude directe de centre $\Omega(\omega)$, d'angle θ et de rapport $|a| = 2$.

On a : $\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{1-i}{1-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}$, soit $\omega = \frac{1}{5-2\sqrt{2}} + \frac{2\sqrt{2}-1}{5-2\sqrt{2}}i$

et $\begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ donc $\theta = \frac{\pi}{4}$

Donc, F est la similitude directe de centre $\Omega(\frac{1}{5-2\sqrt{2}} + \frac{2\sqrt{2}-1}{5-2\sqrt{2}}i)$, de rapport $|a| = 2$ et d'angle $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Savoir-faire 3. Démontrer une propriété géométrique en utilisant les caractérisations complexes

Énoncé

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, j) .

Soit F la transformation du plan d'écriture complexe : $z' = (\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})z$. On considère les points A

et M distincts d'affixes respectives $1+i$ et z . On note A' , I' et M' les images respectives des points A , I et M par F .

1- Démontrer que : $\text{mes}(\widehat{IA'; IM'}) = \text{Arg}(-i(z-1)) + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

2- Démontrer que l'image par F de l'angle orienté $(\widehat{IA; IM})$ est un angle de même mesure.

Solution commentée

1- Je démontre que : $\text{mes}(\widehat{IA'; IM'}) = \text{Arg}(-i(z-1)) + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

On a : $\text{mes}(\widehat{IA'; IM'}) = \text{Arg}(\frac{z_M - z_I}{z_A - z_I}) + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

$\text{mes}(\widehat{IA'; IM'}) = \text{Arg}(\frac{z-1}{1+i-1}) + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

Donc : $\text{mes}(\widehat{IA'; IM'}) = \text{Arg}(-i(z-1)) + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

2. Je démontre que l'image par F de l'angle orienté $(\widehat{IA; IM})$ est un angle de même mesure.

Je détermine les affixes $z_{A'}$, $z_{I'}$ et $z_{M'}$.

On a : $z' = (\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})z$.

Donc : $z_{A'} = (\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})z_A = (\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})(1+i)$; soit $z_{A'} = \sqrt{2}i$.

$z_{I'} = (\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})z_I = (\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})(1)$; soit $z_{I'} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

et $z_{M'} = (\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})z_M = (\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})z$.

L'image de l'angle orienté $(\widehat{IA; IM})$ par F est l'angle orienté $(\widehat{IA'; IM'})$.

On a : $\text{mes}(\widehat{IA'; IM'}) = \text{Arg}(\frac{z_{M'} - z_{I'}}{z_{A'} - z_{I'}}) + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
 &= \operatorname{Arg}\left[\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}\right)z - \left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}\right)\right] + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \\
 &= \operatorname{Arg}\left[\frac{\sqrt{2}i - (\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})}{2}\right] + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \\
 &= \operatorname{Arg}\left[\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(z-1)}{\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)}\right] + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \\
 &= \operatorname{Arg}\left[\frac{(-1-i)(1+i)(z-1)}{(-1-i)(-1+i)}\right] + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \\
 &= \operatorname{Arg}[-i(z-1)] + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

Or, $\operatorname{mes}(\widehat{IA}; \widehat{IM}) = \operatorname{Arg}[-i(z-1)] + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$; donc : $\operatorname{mes}(\widehat{IA}; \widehat{IM}) = \operatorname{mes}(\widehat{IA}; \widehat{IM})$.

Par conséquent, l'image par F de l'angle orienté $(\widehat{IA}; \widehat{IM})$ est un angle de même mesure.

Savoir-faire 4 : Construire l'image d'un point par une similitude directe définie par son centre, son rapport et son angle

Énoncé

Construis l'image M' d'un point M par la similitude directe S de centre A , de rapport 3 et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

Solution commentée

Je construis l'image M' d'un point M par la similitude directe S de centre B , de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

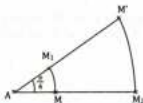
On a : $S(A; 3; \frac{\pi}{6}) = h(A; 3) \circ r(A; \frac{\pi}{6}) = r(A; \frac{\pi}{6}) \circ h(A; 3)$

$$\bullet S(A; 3; \frac{\pi}{6}) = h(A; 3) \circ r(A; \frac{\pi}{6})$$

$$M \xrightarrow{S} M_1 \xrightarrow{h} M'$$

$$\bullet S(A; 3; \frac{\pi}{6}) = h(A; 3) \circ r(A; \frac{\pi}{6})$$

$$M \xrightarrow{h} M_2 \xrightarrow{r} M'$$



Savoir-faire 5 : Déterminer l'image d'un cercle par une similitude directe

Énoncé

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; 1; j)$.

Soit T la similitude directe d'écriture complexe : $z' = \frac{1-i}{2}z$.

Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de centre A d'affixe 2 et de rayon $3\sqrt{2}$ et $(\mathcal{C}')$ son image par T .

Détermine la nature et les éléments caractéristiques de $(\mathcal{C}')$.

Solution commentée

Je détermine la nature et les éléments caractéristiques de $(\mathcal{C}')$.

• Les éléments caractéristiques de T sont :

- Centre O ;

- Rapport k tel que $k = \left|\frac{1-i}{2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

- Angle θ tel que $\theta = \arg\left(\frac{1-i}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$.

- $(\mathcal{C})$ le cercle de centre A d'affixe 2 et de rayon $3\sqrt{2}$; donc $(\mathcal{C}')$ est un cercle.

- Le centre de $(\mathcal{C}')$ est A' tel que $A' = T(A)$.

On a : $z_{A'} = \left(\frac{1-i}{2}\right)z_A$; soit $z_{A'} = \left(\frac{1-i}{2}\right)(2) = 1-i$.

- Le rayon de $(\mathcal{C}')$ est r' tel que $r' = kr$.
On a : $r' = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 3\sqrt{2} = 3$
- $(\mathcal{C}')$ est le cercle de centre A' d'affixe $1 - i$ et de rayon 3.

Savoir-faire 6 : Déterminer une similitude directe définie par deux points distincts et leurs images.

ÉNONCÉ

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct.

On donne les points $A(-2 - i)$, $B(2i)$, $C(2 - 2i)$ et $D(1 + 3i)$.

- 1- Détermine l'écriture complexe de la similitude directe s telle que : $s(A) = C$ et $s(B) = D$.
- 2- Détermine les éléments caractéristiques de s .

SOLUTION COMMENTÉE

1- Je détermine l'écriture complexe de la similitude directe s telle que : $s(A) = C$ et $s(B) = D$.

Soit : $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$, l'écriture complexe de s .

$$\begin{cases} s(A) = C \\ s(B) = D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a z_A + b = z_C \\ a z_B + b = z_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-2 - i)a + b = 2 - 2i \\ 2ai + b = 1 + 3i \end{cases}$$

$$(-2 - 3i)a = 1 - 5i \text{ d'où } a = \frac{1 - 5i}{-2 - 3i} = \frac{(1 - 5i)(-2 + 3i)}{4 + 9} ; \text{ soit } a = 1 + i.$$

La 2^{ème} équation du système donne :

$$b = 1 + 3i - 2ia = 1 + 3i - 2i(1 + i); \text{ soit } b = 3 + i.$$

L'écriture complexe de s est : $z' = (1 + i)z + 3 + i$.

2- Je détermine les éléments caractéristiques de s .

Notons k le rapport de s , θ son angle et Ω son centre. On a :

$$k = |1 + i| = \sqrt{2}$$

$$\theta = \text{Arg}(1 + i) = \frac{\pi}{4}$$

$$z_\Omega = \frac{3 + i}{1 - (1 + i)} = \frac{3 + i}{-i} = -1 + 3i$$

Donc, s est la similitude directe de centre $\Omega(-1 + 3i)$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Savoir-faire 7 : Déterminer une similitude directe définie par son centre, un point et son image.

ÉNONCÉ

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct, on donne les points $O(0)$, $I(2 + 2i)$ et $A(3 + i)$.

- 1- Détermine l'écriture complexe de la similitude directe s de centre I qui transforme O en A .
- 2- Détermine les éléments caractéristiques de s .

SOLUTION COMMENTÉE

1- Je détermine l'écriture complexe de la similitude directe s telle que : $s(I) = I$ et $s(O) = A$.

Soit : $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$, l'écriture complexe de s .

$$\begin{cases} s(I) = I \\ s(O) = A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a z_I + b = z_I \\ a z_O + b = z_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2 + 2i)a + b = 2 + 2i \\ 0 \times a + b = 3 + i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2 + 2i)a + b = 2 + 2i \\ b = 3 + i \end{cases}$$

La 2^{ème} équation du système donne : $b = 3 + i$.

La 1^{ère} équation du système donne : $(2 + 2i)a + 3 + i = 2 + 2i$

$$(2 + 2i)a = -1 + i; \text{ d'où : } a = \frac{-3 + i}{2(1 + i)} = \frac{1}{2}i.$$

L'écriture complexe de s est : $z' = \frac{1}{2}iz + 3 + i$.

2- Je détermine les éléments caractéristiques de s .

Notons k le rapport de s et θ son angle. On a :

$$k = \left| \frac{1}{2}i \right| = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \text{Arg} \left(\frac{1}{2}i \right) = \frac{\pi}{2}$$

Donc, s est la similitude directe de centre I , de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Savoir-faire B- Déterminer une similitude directe définie par son rapport, son angle, un point et son image.

ÉNONCÉ

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct, on donne les points E et F d'affixes respectives $-i$ et $\frac{1}{2} - i$. On considère la similitude directe S de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ qui transforme E en F .

1. Détermine l'écriture complexe de la similitude directe S .

2. Détermine le centre de S .

SOLUTION COMMENTÉE

1- Je détermine l'écriture complexe de la similitude directe S .

L'écriture complexe de S est sous la forme : $z' = ke^{i\theta}z + b$ avec $k = \frac{1}{2}$, $\theta = -\frac{\pi}{2}$ et $b \in \mathbb{C}$.

$$z' = \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}z + b = \frac{1}{2}(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2}))z + b. \text{ D'où : } z' = -\frac{1}{2}iz + b.$$

$$S(E) = F \Leftrightarrow z_F = -\frac{1}{2}iz_E + b; \text{ d'où } b = \frac{1}{2} - i + \frac{1}{2}i(-i) = 1 - i.$$

Donc, l'écriture complexe de S est : $z' = -\frac{1}{2}iz + 1 - i$.

2- Je détermine le centre de S .

Soit Ω le centre de S d'affixe ω .

$$\text{On a : } \omega = \frac{1-i}{1+\frac{1}{2}i} = \frac{6}{5} + \frac{2}{5}i.$$

V- JE M'EXERCE



1- Exercices de fixation/ Application

Dans tous les exercices suivants, le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J) .

Connaître la caractérisation complexe de points alignés - Démontrer que des points sont alignés

1 M, N et P sont trois points du plan d'affixes respectives m, n et p tels que : $n \neq p$.
Dis, dans chacun des cas ci-dessous, si ces trois points sont alignés ou pas.

a) $\frac{m-p}{n-p} = 2$; b) $\frac{m-p}{n-p} = 0$

c) $\frac{m-p}{n-p} = 2i$; d) $m = p$.

2 On considère les points $M(1+i)$, $N(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)$ et $P(-5-i)$.

Démontre que les points M, N et P sont alignés.

Connaître la caractérisation complexe de droites parallèles - Démontrer que des droites sont parallèles

3 M, N, P et Q sont quatre points distincts du plan d'affixes respectives m, n, p et q tels que $M \neq Q$ et $N \neq P$.

Dis, dans chacun des cas ci-dessous, si les droites (MQ) et (NP) sont parallèles ou pas.

a) $\frac{m-n}{p-q} = 2$; b) $\frac{m-q}{n-p} = 0$; c) $\frac{m-q}{n-p} = i$

d) $\frac{m-q}{n-p} = 1$; e) $\frac{n-p}{m-q} = -3$

4 On considère les points $M(\frac{5}{2} + \frac{1}{2}i)$, $N(-1)$,

$P(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)$ et $Q(-2-i)$.

Démontre que les droites (NP) et (MQ) sont parallèles.

Connaître la caractérisation complexe de droites perpendiculaires - Démontrer que des droites sont perpendiculaires

5 E, F, G et H sont quatre points distincts du plan d'affixes respectives e, f, g et h tels que $F \neq G$ et $E \neq H$.
Dis, dans chacun des cas ci-dessous, si les droites (FG) et (EH) sont perpendiculaires ou pas.

a) $\frac{m-n}{n-q} = 2$; b) $\frac{m-q}{n-p} = 0$; c) $\frac{m-q}{n-p} = i$

d) $\frac{m-q}{n-p} = 1$; e) $\frac{n-p}{m-q} = -3i$

6 On considère les points $A(-3-2i)$, $B(3+i)$, $C(2-2i)$ et $Q(2i)$.

Démontre que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Connaître la caractérisation complexe de points cocycliques - Démontrer que des points sont cocycliques

7 On considère quatre points distincts du plan $M(m)$, $N(n)$, $P(p)$ et $Q(q)$ tels que trois d'entre eux ne soient pas alignés.

Dis si dans chacun des cas ci-dessous, ces quatre points sont cocycliques ou pas.

a) $\frac{m-n}{p-n} = \frac{m-q}{p-q} = 5$; b) $\frac{m-n}{p-n} = \frac{m-q}{p-q} = i$

c) $\frac{m-n}{p-n} = \frac{m-q}{p-q} = 0$; d) $\frac{p-n}{m-n} = \frac{m-q}{p-q} = 2$

8 Démontre que les points A, B, C et D d'affixes respectives : -2 ; $-1-i$; $-1+3i$ et $-2+2i$ appartiennent à un même cercle.

9 On considère les points $M(-2+2i)$, $N(1-7i)$, $P(-4-2i)$, $Q(4+2i)$ et $\Omega(1-2i)$.

Démontre que les points M, N, P et Q appartiennent au cercle ($\mathcal{C}$) de centre Ω et dont on précisera le rayon.

Connaître les caractérisations complexes des triangles particuliers - Déterminer la nature d'un triangle

10 On considère un triangle MNP où $M(m)$, $N(n)$ et $P(p)$.

Donne la nature du triangle MNP dans chacun des cas suivants :

a) $\frac{m-n}{m-p} = -i$; b) $\frac{m-n}{m-p} = 3i$; c) $\frac{m-p}{m-n} = e^{2i}$

d) $\frac{n-p}{m-p} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; e) $\frac{m-p}{m-n} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

On considère les points $M(2)$, $N(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)$ et $P(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)$.
Démontre que le triangle MNP est équilatéral.

On considère les points $M(-6)$, $N(-5 - 7i)$ et $P(2 + 2i)$.
Démontre que le triangle MNP est rectangle et isocèle en M.

Connaitre la caractérisation complexe d'un cercle

On considère un cercle $(\mathcal{C})$ de centre $A(a)$ et de rayon r .
Dis si chacune des égalités suivantes caractérisent le cercle $(\mathcal{C})$ ou pas.
a) $|z + a| = r$; b) $|z - a| = -r$;
c) $|z - a| = r$; d) $z - a = r$ ou $z - a = -r$;

Connaitre la caractérisation complexe d'une droite

On considère deux points distincts $A(a)$ et $B(b)$ du plan.
Dis si chacune des égalités suivantes caractérisent la droite $(AB) \setminus \{B\}$ ou pas.
a) $\frac{z-a}{z-b} = -3$; b) $\frac{z-a}{z-b} = 0$; c) $\frac{z-a}{z-b} = 3i$
d) $z - a = 2z - 2b$

Connaitre les formules relatives à l'écriture complexe d'une symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses ou par rapport à l'axe des ordonnées

Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :
a) $z' = -2\bar{z}$ est l'écriture complexe de la symétrie orthogonale d'axe (OI) .
b) $z' = -\bar{z}$ est l'écriture complexe de la symétrie orthogonale d'axe (OJ) .
c) $z' = \bar{z}$ est l'écriture complexe de la symétrie orthogonale d'axe (OI) .
d) $z' = -\bar{z}$ est l'écriture complexe de la symétrie orthogonale d'axe (OJ) .

Connaitre la formule relative à l'écriture complexe d'une symétrie centrale - Déterminer l'écriture complexe d'une symétrie centrale

Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :
a) $z' = -z + 2$ est l'écriture complexe de la symétrie centrale de centre O .
b) $z' = -z$ est l'écriture complexe de la symétrie

centrale de centre O .

c) $z' = z - 2$ est l'écriture complexe de la symétrie centrale de centre $\Omega(-1)$.
d) $z' = -z + 2i$ est l'écriture complexe de la symétrie centrale de centre $\Omega(i)$.

1- Détermine l'écriture complexe de la symétrie centrale de centre O , origine du repère.
2- Détermine l'écriture complexe de la symétrie centrale de centre $\Omega(-1 - i)$.

Connaitre la formule relative à l'écriture complexe d'une translation - Déterminer l'écriture complexe d'une translation

Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :
a) $z' = z - 2 + 3i$ est l'écriture complexe d'une translation.
b) $z' = z - 1 - 2i$ est l'écriture complexe d'une translation.
c) $z' = z - 2$ est l'écriture complexe d'une translation.
d) $z' = -z + 1 - i$ est l'écriture complexe d'une translation.
e) $z' = z$ est l'écriture complexe d'une translation.

On considère deux points distincts $A(1 + 3i)$ et $B(3 - i)$ et $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$.
Détermine l'écriture complexe de $t_{\vec{u}}$ dans chacun des cas suivants :
a) $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$; b) $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$; c) $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$.

Connaitre la formule relative à l'écriture complexe d'une rotation - Déterminer l'écriture complexe d'une rotation

Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :
a) $z' = e^{i\frac{\pi}{4}} z + 4$ est l'écriture complexe d'une rotation.
b) $z' = [\cos(\frac{\pi}{12}) + i\sin(\frac{\pi}{12})]z - 1 - i$ est l'écriture complexe d'une rotation.
c) $z' = e^{i(4\pi)} z$ est l'écriture complexe d'une rotation.
d) $z' = 3e^{i(\frac{\pi}{12})} z + 2i$ est l'écriture complexe d'une rotation.
e) $z' = -iz + 4$ est l'écriture complexe d'une rotation.

12

- Détermine l'écriture complexe de l'homothétie de centre O et de rapport -3 .
- Détermine l'écriture complexe de l'homothétie de centre $\Omega(1 + 2i)$ et de rapport 2 .

Connaître la définition d'une similitude directe et la formule relative à l'écriture complexe d'une similitude directe - Reconnaitre une transformation du plan définie par son écriture complexe

13 Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

- Une similitude directe du plan est une application bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- Une similitude directe du plan est une application bijective de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.
- Soit $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.
Une similitude directe est une application bijective du plan (P) dans le plan (P) dont l'écriture complexe est de la forme :

- $z' = az + b$.
- $z' = a\bar{z} + b$.
- $z' = \bar{a}z + b$.
- $z' = az + \bar{b}$.
- $z' = \bar{a}z + \bar{b}$.

14 Soit S une transformation du plan d'écriture complexe : $z' = z - 2 + 3i$ et T une transformation du plan d'écriture complexe : $z' = -5z + 3 + 2i$. Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

N°	Affirmations	Réponses
1	S est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $2 - 3i$.	
2	S n'a aucun point invariant	
3	T est une homothétie de rapport -5 .	
4	T est la translation de vecteur $\vec{u} \left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 3 \end{smallmatrix} \right)$	
5	Le centre de T a pour affixe $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}i$.	

15 Pour chacune des affirmations, trois réponses sont proposées. Une seule réponse est exacte. Recopie le numéro de chaque affirmation ainsi que la lettre qui correspond à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

N°	Affirmations	Réponse	Réponse	Réponse C
1	Soit S une transformation du plan d'écriture complexe : $z' = (1 + i\sqrt{3})z + i\sqrt{3}$	S est la rotation de centre $\Omega(-1)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$	S est l'homothétie de centre $\Omega(-1)$ et de rapport 2	S est la similitude directe de centre $\Omega(-1)$, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{3}$
2	Soit $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$. Soit F une transformation du plan d'écriture complexe $z' = az + b$. F est une symétrie	$ a = 1$	$a = -1$	$a = i$

16 Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

- $z' = -e^{i\frac{\pi}{3}}z + 2i$ est l'écriture complexe d'une similitude directe.
- $z' = -1 - i$ est l'écriture complexe d'une similitude directe.
- $z' = e^{i\frac{1}{2}}\bar{z} - 2$ est l'écriture complexe d'une similitude directe.
- $z' = 2e^{i\frac{\pi}{4}}z + 2i$ est l'écriture complexe d'une similitude directe.
- $z' = (5 - 7i)z$ est l'écriture complexe d'une similitude directe.

Déterminer l'écriture complexe d'une similitude directe

17

- Détermine l'écriture complexe de la similitude directe de centre O , de rapport 2 et d'angle $-\frac{\pi}{6}$.
- Détermine l'écriture complexe de la similitude directe de centre $\Omega(-2i)$, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$.
- Détermine l'écriture complexe de la similitude directe de centre $\Omega(-1 - i)$, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle π .

Construire l'image d'un point par une similitude directe

18 Le plan complexe est muni d'un repère ortho-normé direct (O, i, j) .

Construis l'image d'un point M par la similitude directe S de centre $\Omega(\omega)$, de rapport k et d'angle θ dans chacun des cas suivants :

- $\omega = -2i$; $k = \frac{1}{2}$ et $\theta = \frac{\pi}{6}$;
- $\omega = 1 + 3i$; $k = 2$ et $\theta = -\frac{\pi}{6}$.

Construire l'image d'une droite et d'un cercle par une similitude directe

- Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J) .
On donne la similitude directe S de centre $\Omega(2 + i)$,

2. Exercices de renforcement / approfondissement

Dans tous les exercices suivants, le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J) .

- On donne les points $M(1)$, $N(-3 - 4i)$ et $P(3 - 4i)$.
1- Détermine l'abscisse q du point Q pour que le quadrilatère $MNQP$ soit un parallélogramme.
2- Démontre que $MNQP$ est un rectangle.
3- Démontre que $MNQP$ est un carré.

- Relie chaque transformation F de la colonne de gauche à son écriture complexe f de la colonne de droite.

Transformation	Écriture complexe
$t_{\Omega(-3 - i)}$	$z' = -z$
$h_{(\Omega(4i); 5)}$	$z' = -z + 2 + 2i$
$S_{(0)}$	$z' = \bar{z}$
$S_{(0)}$	$z' = 5z - 16i$
$r_{(\Omega(2); \pi/3)}$	$z' = 5z - (3 + i)$
$S_{\Omega(1 + i)}$	$z' = (\sqrt{2} + i\sqrt{2})z$
$S_{(0; 2; \pi/4)}$	$z' = (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})z$

- Soit h l'homothétie de centre $\Omega(2i)$ et de rapport $\frac{1}{2}$ et r la rotation de centre $\Omega(2i)$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$. On pose : $F = h \circ r$.

- 1- Détermine la nature et les éléments caractéristiques de F .
2- Détermine l'écriture complexe de la transformation F .
3- Soit (D) la droite d'équation : $y = x$. On note (D') l'image de (D) par F .

Détermine une équation de (D') puis, construis (D') .

- 4 Soit $(\mathcal{C})$ le cercle d'équation :

$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$ et $(\mathcal{C}')$ son image par F .
Détermine une équation de $(\mathcal{C}')$ puis, construis $(\mathcal{C}')$.

- Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J) .
On donne la similitude directe S dont l'écriture

de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

- 1- Construis l'image de la droite (l) par S .
2- Construis l'image $(\mathcal{C}')$ du cercle $(\mathcal{C})$ de centre $A(-2i)$ et de rayon $\frac{3}{2}$.

complexe est : $z' = (1 - i)z + 1 + i$.

- 1- Détermine la nature et les éléments caractéristiques de S .

- 2- a) Calcule l'aire du triangle OIJ .

- b) Dédus-en l'aire A de l'image du triangle OIJ par S .

- Soit h l'application de $\mathbb{C} \setminus \{2i\}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$h(z) = \frac{z - 1 + i}{z - 2i}$$

On désigne par E , F et M les points d'affixes respectives $2i$, $1 - i$ et z .

1. Donne une interprétation géométrique du module et d'un argument de $h(z)$.

2. Détermine et construis :

- a) l'ensemble (H_1) des points M tels que

$$|h(z)| = 1.$$

- b) l'ensemble (H_2) des points M tels que $h(z)$ soit un nombre réel strictement négatif.

- c) l'ensemble (H_3) des points M tels que $h(z)$ soit un nombre réel strictement positif.

- d) l'ensemble (H_4) des points M tels que $h(z)$ soit imaginaire pur.

- Dans chacun des cas ci-dessous, détermine la nature et les éléments caractéristiques de la transformation du plan dont l'écriture complexe est donnée.

a) $z' = -z + 3i$; b) $z' = \frac{1}{i}z$;

c) $z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)z$; d) $z' = 2z + 1 - i$;

e) $z' = (3 + 4i)z - 4 - 8i$

- Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .

- 1- On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = \frac{3}{2}$ et $z_B = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2}i$.

- a) Justifie que les points B , I et J sont alignés.

- b) Détermine la nature du triangle ABT .
c) Donne l'aire du triangle ABT .

10 Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J) , on donne le point A d'affixe $-1 + 2i$ et le cercle $(\mathcal{C})$ de centre J et de rayon 3.

- Détermine l'affixe de l'image de A par :
 - la symétrie par rapport à (OI) ;
 - la symétrie par rapport à (OJ) ;
 - la symétrie par rapport à O;
 - la symétrie par rapport au point E d'affixe $-2i$;
 - la rotation de centre B d'affixe $2 - i$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$;
 - l'homothétie de centre B d'affixe $2 - i$ et de rapport $-\frac{1}{3}$;
 - la similitude directe de centre O, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
- 2- Détermine une équation de l'image de $(\mathcal{C})$ par chacune des transformations ci-dessus.

11 On considère la transformation G du plan d'écriture complexe :

$$z' = (m - 1)^2 z + m - 2 \text{ où } m \in \mathbb{C}.$$

- 1- Détermine les valeurs de m pour lesquelles G est une translation.

On suppose dans la suite que : $(m - 1)^2 \neq 1$.

- 2- Justifie que le point Ω d'affixe $\omega = -\frac{1}{m}$ est l'unique point invariant de G.

- 3- Détermine les valeurs de m pour lesquelles G est une symétrie centrale et représente graphiquement les centres de ces symétries.

- 4- Détermine les valeurs de m pour lesquelles G est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et représente graphiquement les centres de ces rotations.

- 5- Détermine la nature et les éléments caractéristiques de G lorsque $m = 2 - i$.

12 Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J) d'unité graphique le centimètre, on donne les points E, F, G et H d'affixes respectives : $-3i$; $1 - i$; $2i$ et $-2 - 2i$.

- Place les points E, F, G et H dans le repère (O, I, J) .
- Démontre que le triangle EFH est rectangle et isocèle en E.
- Calcule l'aire du triangle EFH.

Soit s la similitude plane directe de centre

H telle que : $s(E) = F$.

- Démontre que l'écriture complexe de s est : $z' = (1 + i)z - 2 + 2i$.
- Démontre que : $s(E) = F$.
- Détermine l'image du triangle EFH par la similitude directe s .
- Déduis des questions 1.b) et 2.c) l'aire de l'image du triangle EFH par la similitude directe s .

13 Soit f définie sur $\mathbb{C}$ par : $f(z) = \frac{-2z - 2 + 2i}{-2z - 6}$.

- 1- Détermine l'ensemble de définition D_f de f .

- 2- Justifie que, $\forall z \in D_f$, $f(z) = \frac{z + 1 - i}{z + 3}$.

- 3- Soit les points A (-3) , B $(-1 + i)$ et M (z) .

- a) Démontre que : $|f(z)| = 1 \Leftrightarrow AM = BM$.

- b) Déduis-en l'ensemble (Γ_1) des points M tels que : $|f(z)| = 1$ puis construis (Γ_1) .

- 4- Détermine et construis l'ensemble (Γ_2) des points M tels que : $f(z) \in \mathbb{R}^*$.

- 5- Détermine et construis l'ensemble (Γ_3) des points M tels que : $f(z) \in i\mathbb{R}^*$.

- 6- Pour $z \in D_f$, on pose : $g(z) = -2(z + 3)f(z)$.

- a) Démontre que g est l'écriture complexe d'une similitude directe S .

- b) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de S .

14 Sur la figure ci-dessous :

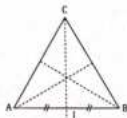
- ABC est un triangle équilatéral direct de centre de gravité G ;

- I est le milieu du segment [AB].

Soit S_1 la similitude directe de centre B qui transforme I en C ;

S_2 la similitude directe de centre I qui transforme A en C et

S_3 la similitude directe de centre A qui transforme G en C.



Détermine le centre et l'angle de chacune des similitudes directes S_1 , S_2 et S_3 .

1- Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J) .

On donne la figure ci-contre où les points A' et B' sont les images respectives des points A et B par une similitude directe T .

1- a) Détermine graphiquement les affixes des points A , B , A' et B' puis l'écriture complexe associée à T .

b) Détermine le rapport de T .

2- a) Construis le point K , antécédent par T du point I .

b) Construis l'image par T du cercle de centre A passant par O .

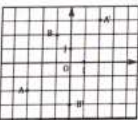
3- Soit O' l'image de O par T .
Dis si $O'A'B'$ est un triangle rectangle ou pas. Justifie ta réponse.

4- Dis si l'image par T de la médiatrice de $[AB]$ est parallèle à (AB') ou pas. Justifie ta réponse.

5- Soit C le point d'affixe $-i$ et C' son image par T .

a) Justifie que le triangle $A'B'C'$ est rectangle et isocèle en C' .

b) Calcule l'aire du triangle $A'B'C'$.



1- Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation

$$(E): z^2 + 4i(2 + i)z - 21 - 16i = 0.$$

2- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, I, J) d'unité graphique 1 cm, on considère les points A_0, A_1 et A_2 d'affixes respectives : $z_0 = 5 - 4i$, $z_1 = -1 - 4i$ et $z_2 = -4 - i$.

Soit la similitude directe S telle que : $S(A_0) = A_1$ et $S(A_1) = A_2$.

a) Justifie que l'écriture complexe de S est :

$$z' = \frac{1-i}{2}z - \frac{3-i}{2}$$

b) Déduis-en le rapport, l'angle et l'affixe ω du centre Ω de la similitude directe S .

c) Soit un point M d'affixe z ($z \neq 0$), et son image M' par S , d'affixe z' .

Vérifie que : $\omega - z' = i(z - z')$ puis déduis-en la nature du triangle $\Omega MM'$.

3- Pour tout entier naturel n , on définit le point A_{n+1} par : $A_{n+1} = S(A_n)$ et on pose : $u_n = A_n A_{n+1}$.

a) Place les points A_0, A_1, A_2 et construis géométriquement les points A_3, A_4, A_5 et A_6 .

b) Démontre que la suite (u_n) est géométrique.

4- On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$v_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

a) Exprime v_n en fonction de n .

b) Étudie la convergence de la suite (v_n) .

c) Donne une interprétation géométrique du résultat précédent.

3- Situation complexe

1- Un imprimeur de motif sur les textiles a reçu une commande pour des pagnes d'une association d'un village. Il doit peindre l'un des deux motifs ci-dessous sur les pagnes.



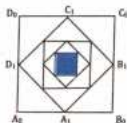
Pour peindre chaque motif, on utilise une similitude directe S de centre Ω qui applique A sur B . Le motif 1 est à base carrée de côté 4 centimètres tandis que le motif 2 a la forme d'un triangle équilatéral de côté 4 centimètres.

Pour faire la duplication sur les pagnes et pour maximiser son bénéfice, il décide de choisir le motif qui utilise le plus petit angle et le plus petit rapport de la similitude directe.

Ne sachant comment s'y prendre, il te sollicite pour les calculs.

Détermine les caractéristiques et l'écriture complexe de la similitude directe qui applique A sur B pour chacun des deux motifs puis réponds à la préoccupation de l'imprimeur.

2- Lors d'une phase éliminatoire d'un festival des arts et culture en milieu scolaire, un élève d'une classe de terminale D a photographié un tableau d'art représenté comme l'indique la figure ci-dessous.



De retour en classe, il informe ces camarades de classe que le candidat concepteur du tableau a affirmé que :

« Le dessin est construit à partir d'un carré initial suivi par des carrés tels que les sommets du carré suivant sont les milieux respectifs des côtés du carré précédent et que chaque carré est inscrit dans celui qui le précède ».

Emerveillés par la photo, les élèves de la classe

décident de reproduire le dessin.

Le major de la classe affirme que l'on peut munir le plan du repère orthonormé direct $(A_0; \vec{A_0B_0}, \vec{A_0D_0})$ et utiliser la similitude directe S qui transforme A_0 en A_1 , B_0 en B_1 , C_0 en C_1 et D_0 en D_1 .

2- Reproduis, avec précision, ce motif en prenant $A_0B_0 = 8$ cm puis nomme tous les sommets des carrés.



VI- RENDEZ-VOUS DES CURIEUX

En géométrie, une **similitude** est une transformation qui multiplie toutes les distances par une constante fixe, appelée son rapport.

L'image de toute figure par une telle application est une figure semblable, c'est-à-dire intuitivement « de même forme ».

Les **isométries**, c'est-à-dire les transformations qui conservent les distances sont des cas particuliers de similitudes ; elles transforment des figures en des figures de même forme et de même taille.

Les autres similitudes sont les composées d'une isométrie et d'une **homothétie** qui agrandit ou réduit la taille des figures.

Parmi les similitudes, certaines conservent l'orientation, elles sont appelées similitudes directes. Les autres sont appelées similitudes indirectes.

Dans le plan, les translations, les rotations, les symétries orthogonales selon un axe, les homothéties sont des cas particuliers de similitudes. On démontre qu'une similitude plane est toujours décomposable en au plus deux transformations de ce type. L'expression complexe d'une similitude plane est la donnée de la relation entre l'affixe d'un point et l'affixe de son image par une application affine.



Notions essentielles :

- Suites majorées, suites minorées et suites bornées ;
- Suites monotones ;
- Notions de convergence et de divergence ;
- Suites arithmétiques et suites géométriques.

SITUATION D'APPRENTISSAGE

Le chef d'un grand village vient de construire une nouvelle villa pour le sous - préfet. Pour s'assurer une autonomie en fourniture d'eau, il propose de réaliser un forage à proximité de la villa. Mais il dispose d'une somme de 409 600 F CFA pour réaliser son projet. Le coût du forage en franc CFA est fixé à 1 200 F pour le premier mètre creusé ; 1 400 F pour le deuxième mètre ; 1 600 F pour le troisième mètre creusé et ainsi de suite en augmentant de 200 F par mètre creusé. Après une étude par un expert des mines, le chef est informé que la nappe d'eau pour le site choisi est à soixante - sept mètres de profondeur. Le chef du village veut alors savoir s'il peut réaliser son projet.

Lors d'une réunion des jeunes du village, l'expert des mines informe l'auditoire que pour répondre à la préoccupation du chef il faut utiliser les suites numériques. En tant qu'élève de Terminale D, on vous propose de donner la solution de ce problème.





I- ACTIVITÉS DE DÉCOUVERTE

1- ÉTUDE GLOBALE D'UNE SUITE NUMÉRIQUE

1.1- Connaître la définition d'une suite majorée

ACTIVITÉ 1

Soit la suite numérique (u) définie par : $u_n = \frac{n}{n+1}$ pour tout entier naturel n .

Démontre que pour tout entier naturel n on a : $u_n \leq 1$.

Je fais le point de l'activité

Soit E une partie de $\mathbb{N}$.

S'il existe un nombre réel M tel que pour tout $n \in E$, $u_n \leq M$, on dit que la suite (u) est majorée sur E .

J'évalue mes acquis



Soit (u) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = \ln(n) - \ln(n+1)$

Démontre que la suite (u) est majorée.

1.2- Connaître la définition d'une suite minorée

ACTIVITÉ 2

Soit la suite numérique (u) définie par : $u_n = \frac{n}{n+1}$ pour tout entier naturel n .

Démontre que pour tout entier naturel n on a : $u_n \geq 0$

Je fais le point de l'activité

Soit E une partie de $\mathbb{N}$.

S'il existe un nombre réel m tel que pour tout $n \in E$, $u_n \geq m$, on dit que la suite (u) est minorée sur E .

J'évalue mes acquis



Soit (u) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2n - 5$.

Démontre que la suite (u) est minorée.

1.3- Connaître la définition d'une suite bornée

ACTIVITÉ 3

Soit la suite numérique (u) définie par : $u_n = \frac{n}{n+1}$ pour tout entier naturel n .

Démontre que pour tout entier naturel n on a : $0 \leq u_n \leq 1$.

Je fais le point de l'activité

Une suite numérique qui est à la fois minorée et majorée est dite bornée.

J'évalue mes acquis



A chaque affirmation réponds par VRAI si elle est correcte et réponds par FAUX si elle est incorrecte.

- 1- Toute suite numérique (u_n) vérifiant $u_n < 4$ pour tout entier naturel n est bornée.
- 2- Toute suite numérique (u_n) vérifiant $|u_n| < 4$ pour tout entier naturel n est bornée.
- 3- Toute suite numérique (u_n) vérifiant $u_n > 4$ pour tout entier naturel n est bornée.
- 4- Toute suite numérique (u_n) vérifiant $4 \leq u_n \leq 15$ pour tout entier naturel n est bornée.

1.4- Savoir mener un raisonnement par récurrence

ACTIVITÉ 4

Soit (u_n) la suite définie par
$$\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 4 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- 1- Vérifie que $u_0 \leq 8$
- 2- On suppose que $u_n \leq 8$ pour un entier naturel $n \geq 0$, démontre que $u_{n+1} \leq 8$
- 3- Dédus des questions précédentes que pour tout entier naturel n , $u_n \leq 8$.

Je fais le point de l'activité

Pour démontrer par récurrence qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n :

- On vérifie que $P(0)$ est vraie
- On suppose que $P(n)$ est vraie pour un entier $n \geq 0$ et on démontre que $P(n+1)$ est aussi vrai
- On conclut que la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

J'évalue mes acquis



Démontre par récurrence que pour tout entier naturel non nul n , on a :

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

1.5- Sens de variation d'une suite monotone

ACTIVITÉ 5

1- Soit la suite (u_n) de terme général $u_n = 3n + 5$ pour tout entier naturel n . Compare u_{n+1} et u_n pour tout nombre entier naturel n et déduis - en le sens de variation de la suite (u_n) .

2- Soit la suite (u_n) de terme général $u_n = \frac{n}{n+1}$ pour tout entier naturel n .

Compare u_{n+1} et u_n pour tout nombre entier naturel n et déduis - en le sens de variation de la suite (u_n) .

Je fais le point de l'activité

(u_n) étant une suite numérique définie sur $\mathbb{N}$;

- si $u_n < u_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, on dit que la suite u est strictement croissante
- si $u_n > u_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, on dit que la suite u est strictement décroissante
- si $u_n = u_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, on dit que la suite u est constante
- Une suite est dite monotone lorsqu'elle soit croissante, soit décroissante.

J'évalue mes acquis



Soit la suite u définie par $u_n = \frac{1}{n}$ pour tout entier naturel non nul n .
Détermine le sens de variation de la suite u .

2- LIMITE D'UNE SUITE NUMÉRIQUE

2.1- Connaître la notion de limite d'une suite

ACTIVITÉ 6

Soit la suite numérique (u) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \frac{\ln(n+2)}{n}$.

Calcule : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Je fais le point de l'activité

La limite d'une suite se calcule en $+\infty$.

J'évalue mes acquis



Calcule la limite de la suite u définie par : $u_n = e^{2n}$

2.2- Suites convergentes, suites divergentes

2.2-1- Connaître la définition d'une suite convergente et la définition d'une suite divergente

ACTIVITÉ 7

Soit la suite numérique u définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \frac{\ln(n+2)}{n}$

A chaque affirmation réponds par VRAI si elle est correcte et réponds par FAUX si elle est incorrecte.

- 1- La suite numérique (u) admet une limite infinie.
- 2- La suite numérique (u) admet une limite finie.
- 3- La suite numérique (u) n'admet pas de limite.

Je fais le point de l'activité

- Une suite numérique qui admet une limite finie est dite convergente.
- Une suite numérique qui n'est pas convergente est dite divergente.

J'évalue mes acquis



Soient (u) et (v) les suites numériques définies respectivement par $u_n = \frac{n+4}{e^n}$ et $v_n = -5n^2 + \ln(n) + 3$.

A chaque affirmation réponds par VRAI si elle est correcte et réponds par FAUX si elle est incorrecte.

- 1- La suite (u) est convergente.
- 2- La suite (v) est convergente
- 3- La suite (u) est divergente

2.2-2- Connaître la propriété de convergence d'une suite croissante et majorée

ACTIVITÉ 8

Soit (u_n) et (v_n) les suites définies par $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 4, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ et $v_n = u_n - 8$

On admet que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 8$

- Justifie que la suite (u_n) est strictement croissante
- a) Justifie que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison
b) Exprime (u_n) et (v_n) en fonction de n .
- Justifie que les suites (v_n) et (u_n) sont convergentes.
- Complète la phrase suivante par les expressions ci-après : **converge ; majorée ; croissante**.
La suite (u_n) est par 8 et est strictement donc elle

Je fais le point de l'activité

- Toute suite croissante et majorée converge.

J'évalue mes acquis



Soit (u_n) une suite strictement croissante vérifiant $|u_n| \leq 2, \forall n \in \mathbb{N}$.
Démontre que la suite (u_n) est convergente.

2.2-3 Connaître la propriété de convergence d'une suite décroissante et minorée.

ACTIVITÉ 9

Soit les suites (v_n) et (w_n) les suites numériques définies par $\begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = \sqrt{v_n}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ et $w_n = \ln(v_n)$.
On admet que $v_n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

- Justifie que la suite (u_n) est strictement décroissante
- a) Justifie que la suite (w_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison
b) Exprime w_n et v_n en fonction de n .
- Justifie que les suites (w_n) et (v_n) sont convergentes.
- Complète la phrase suivante par les expressions ci-après : **converge ; minorée ; décroissante**.
La suite (v_n) est par 1 et est strictement donc elle

Je fais le point de l'activité

- Toute suite décroissante et minorée converge.

J'évalue mes acquis



Soit la suite décroissante v définie par : $\begin{cases} v_0 = 15 \\ v_{n+1} = \ln(v_{n+1}), \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

- Démontre que la suite (v) est minorée par 0.
- Démontre que la suite (v) est convergente.

2.3 Connaître les propriétés sur la divergence des suites numériques

2.3.1- Connaître la propriété de divergence d'une suite croissante et non majorée.

ACTIVITÉ 10

(u) est une suite strictement croissante et non majorée.

Détermine la limite de la suite (u) .

Je fais le point de l'activité

Toute suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.

J'évalue mes acquis



Soit (w_n) la suite numérique définie par
$$\begin{cases} w_0 = 1 \\ w_{n+1} = e^{w_n}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

On admet que la suite (w_n) est strictement croissante et non majorée.

Calcule $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$.

2.3.2- Connaître les propriétés de divergence d'une suite décroissante et non minorée.

ACTIVITÉ 11

(u) est une suite strictement décroissante et non minorée.

Détermine la limite de la suite (u) .

Je fais le point de l'activité

Toute suite décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$.

J'évalue mes acquis



Soit (t_n) la suite numérique définie par
$$\begin{cases} t_0 = 9 \\ t_{n+1} = -2 + t_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

On admet que la suite (t_n) n'est pas minorée

Calcule la limite de la suite (t_n) .

2.4- Connaître les propriétés sur la convergence des suites définies par une formule explicite

ACTIVITÉ 12

On considère les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par : $f(x) = 5x + 3$ et $g(x) = \frac{2x-7}{x+1}$.
et les suites (u) et (v) définies par $u_n = f(n)$ et $v_n = g(n)$.

1- Détermine les limites de f et g en $+\infty$.

2- a) Détermine les formules explicite de u_n et v_n en fonction de n .

b) Détermine les limites des suites (u) et (v) .

Je fais le point de l'activité

Soit (u_n) une suite dont le terme général est défini par la formule explicite $u_n = f(n)$ où f est une fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$.

J'évalue mes acquis



Choisis la bonne réponse pour chacune des affirmations suivantes

N°	AFFIRMATIONS	RÉPONSES		
		a.	b.	c.
1	$u_n = -n + 2$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \dots$	0	$-\infty$	2
2	$u_n = \frac{n+2}{n}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \dots$	1	2	$+\infty$
3	$u_n = \ln\left(\frac{5n^2+2}{5n^2-n+9}\right)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \dots$	$+\infty$	1	0

2.5- Connaître les propriétés des suites récurrentes définies par une relation du type

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

ACTIVITÉ 13

Soient (u) et (v) deux suites numériques et f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout entier naturel n , $v_n = f(u_n)$.

Démontre que si la suite (u) converge vers a alors la suite (v) converge vers $f(a)$.

Je fais le point de l'activité

Si (u) est une suite qui converge vers a et f une fonction continue en a , alors la suite (v) définie par $v_n = f(u_n)$ converge vers $f(a)$

J'évalue mes acquis



Soit $v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ et $u_n = n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Calcule $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ et déduis - en $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

ACTIVITÉ 14

Soit (u) une suite numérique définie par une formule de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

On suppose que la suite (u) converge vers l .

1- Justifie que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = l$.

2- Démontre que $f(l) = l$.

Je fais le point de l'activité

Si (u) est une suite numérique convergente définie par une formule de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$ et si f est continue alors la limite l de (u) est solution de l'équation $f(x) = x$.

J'évalue mes acquis



Soit (u_n) la suite définie par
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{4} (u_n)^2 + 2u_n, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

On admet que la suite (u_n) est convergente et $u_n \geq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Détermine la limite de la suite (u_n) .

2.6- Reconnaître une suite géométrique convergente

Activité 15

Calcule la limite de chacune des suites géométriques définies respectivement par :

$$u_n = 2^n, v_n = \frac{1}{4^n} \text{ et } w_n = (-3)^n$$

Je fais le point de l'activité

Soient les suites géométriques (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ respectivement par $u_n = (\sqrt{2})^n$ et $v_n = (-\ln 2)^n$.

Etudie la convergence de chacune de ces suites.

J'évalue mes acquis



Etant donné une suite géométrique (u_n) de raison q , on a :

- Si $-1 < q < 1$ alors la suite (u_n) converge vers 0.
- Si $q = 1$ alors la suite (u_n) converge vers son premier terme.
- Si $q > 1$ alors la suite (u_n) diverge vers $-\infty$ ou $+\infty$ (selon le signe de son premier terme).
- si $q \leq -1$ alors la suite (u_n) n'a pas de limite donc elle diverge.

2.7 Reconnaître une suite arithmétique convergente

Activité 16

- 1- Détermine les raisons des suites arithmétiques suivantes : $u_n = -n - 1$; $v_n = 3n + 17$; $t_n = 2021$
- 2- Détermine les limites des suites (u) , (v) et (t) .

Je fais le point de l'activité

(u) est une suite arithmétique de raison r :

Si $r > 0$ alors (u_n) diverge vers $+\infty$;

Si $r < 0$ alors (u_n) diverge vers $-\infty$;

Si $r = 0$ alors (u_n) est constante donc convergente.

J'évalue mes acquis



Choisis la bonne réponse pour chacune des affirmations suivantes

N°	AFFIRMATIONS	REponses		
		a.	b.	c.
1	$u_n = -n + 2$ et la suite (u_n)	converge	diverge vers $-\infty$	diverge vers $+\infty$
2	$u_n = \frac{3}{2}n + 5$ et la suite (u_n)	converge	diverge vers $-\infty$	diverge vers $+\infty$
3	$u_n = 10000$ et la suite (u_n)	converge	diverge vers $-\infty$	diverge vers $+\infty$

2.8- Connaître les propriétés de comparaison

Activité 17

Soit (u_n) une suite numérique vérifiant $n^2 + 1 \leq u_n$

Justifie que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

J'évalue mes acquis



Si (u_n) et (v_n) sont deux suites numériques telles que $v_n \leq u_n$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Je fais le point de l'activité

Soit la suite (u_n) définie par : $u_n = n^2 - 5 + \cos(5n)$.
Calcule la limite de la suite (u_n) .

Activité 18

Soit (u_n) une suite numérique vérifiant $u_n \leq 6 - 2n$.
Justifie que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Je fais le point de l'activité

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites numériques telles que $u_n \leq v_n$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

J'évalue mes acquis



Soit la suite (u_n) définie par : $u_n = -n^3 + \sin(n^2)$.
Calcule la limite de la suite (u_n) .

Activité 19

Soit (u_n) une suite numérique vérifiant $\frac{n}{n^2+n} \leq u_n \leq \frac{n}{n^2+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Justifie que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Je fais le point de l'activité

Si (u_n) , (v_n) et (w_n) sont des suites numériques vérifiant $w_n \leq u_n \leq v_n$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ (Théorème des gendarmes).

J'évalue mes acquis



Soit (u_n) la suite définie par $u_n = -2 + \frac{\cos(n+1)}{n^2+1}$.
Démontre que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -2$.

2.9. Connaître les propriétés sur les croissances comparées des suites $\ln(n)$, n^a avec $a > 0$ et n^a avec $a > 0$

Activité 20

Soit $u_n = \frac{\ln(n)}{n^3}$, $v_n = \frac{2^n}{n^5}$ et $w_n = \frac{\ln n}{4^n}$.

Calcule $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$.

Je fais le point de l'activité

Pour tous nombres réels strictement positifs a et α on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n^\alpha} = 0$;

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{a^n} = \begin{cases} 0 & \text{si } a > 1 \\ +\infty & \text{si } 0 < a \leq 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n} = \begin{cases} +\infty & \text{si } a \geq 1 \\ 0 & \text{si } 0 < a < 1 \end{cases}$$

J'évalue mes acquis



Calcule $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{(0,3)^n}$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{5^n}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{(0,3)^n}$



II- RÉSUMÉ DE COURS

1- ÉTUDE GLOBALE D'UNE SUITE NUMÉRIQUE

Rappel : On appelle **suite numérique** toute fonction définie de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$.

1.1- Connaître la définition d'une suite majorée

DÉFINITION

Soit (u_n) une suite numérique définie sur un ensemble E où E est une partie $\mathbb{N}$

- Lorsqu'il existe un nombre réel M tel que $u_n \leq M$ pour tout $n \in E$, on dit que la suite (u_n) est **majorée** sur E .

1.2- Connaître la définition d'une suite minorée

DÉFINITION

Soit (u_n) une suite numérique définie sur un ensemble E où E est une partie $\mathbb{N}$

- Lorsqu'il existe un nombre réel m tel que $m \leq u_n$ pour tout $n \in E$, on dit que la suite (u_n) est **minorée** sur E .

1.3- Connaître la définition d'une suite bornée

DÉFINITION

Soit (u_n) une suite numérique définie sur un ensemble E où E est une partie $\mathbb{N}$

- Lorsque la suite (u_n) est à la fois minorée et majorée sur E , on dit que la suite (u_n) est **bornée** sur E .

Exemples

La suite (u_n) définie par $u_n = \frac{1}{n+1}$ est bornée sur $\mathbb{N}$ car pour tout entier naturel n , $0 < u_n \leq 1$.

1.4- Raisonement par récurrence

1.1-1 Principe

$p(n)$ étant une propriété dépendant de l'entier naturel n on a :

Si $p(n_0)$ est vraie et que la proposition $[p(n) \Rightarrow p(n+1)]$ est vraie, alors $p(n)$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

1.2-1 Méthode

Elle comporte deux étapes avant la conclusion.

Pour démontrer par récurrence que : « Pour tout n supérieur à n_0 , $p(n)$ », on procède comme suit :

1^{ère} étape : Initialisation

On vérifie que $p(n_0)$ est vraie (pour quelques petites valeurs de n)

2^{ème} étape : Hérédité (ou transmission)

On suppose que « pour tout entier supérieur à n_0 , $p(n)$ » est vraie et on démontre que $p(n+1)$ est vraie

Puis, **On conclut** : « $\forall n \in \mathbb{N}$, $p(n)$ »

1.5- Sens de variation d'une suite monotone

Définition

Soit (u_n) une suite numérique définie sur $\mathbb{N}$.

- Lorsque pour tout entier naturel n on a $u_n < u_{n+1}$, on dit que la suite (u_n) est **strictement croissante**.
- Lorsque pour tout entier naturel n on a $u_n > u_{n+1}$, on dit que la suite (u_n) est **strictement décroissante**.
- Lorsque pour tout entier naturel n on a $u_n = u_{n+1}$, on dit que la suite (u_n) est **constante**.



- Une suite est **monotone** lorsqu'elle est soit croissante, soit décroissante.
- Une suite est **stationnaire** si elle est constante à partir d'un certain rang.

Exemples

La suite numérique (u) définie pour tout entier naturel non nul n par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \text{ est strictement croissante car } u_n < u_{n+1}.$$

2- LIMITE D'UNE SUITE NUMÉRIQUE

2.1- Notion de limite d'une suite

- La limite d'une suite numérique se calcule en $+\infty$.
- Lorsqu'une suite numérique admet une limite cette limite est unique.

2.2- Suites convergentes - suites divergentes

2.2-1 Suites convergentes - suites divergentes

Définition

- Une suite convergente est une suite qui admet une limite finie.
- Une suite divergente est une suite qui n'est pas convergente.

Exemples de suites divergentes : $n \mapsto \sin(n)$; $n \mapsto (-1)^n$; $n \mapsto 2n - 5$

2.2-2 Convergence de suites monotones

Définition

- Toute suite croissante et majorée converge.
- Toute suite décroissante et minorée converge.

2.3- Divergence de suites monotones

- Toute suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.
- Toute suite décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$.

2.4- Limite d'une suite définie par une formule explicite

Propriété

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et (u_n) une suite numérique définie par la formule : $u_n = f(n)$.

Si la fonction f admet une limite en $+\infty$, alors la suite (u_n) admet une limite et on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n).$$

Exemple :

$$\text{Soit } u_n = \ln \left(\frac{n+5}{2n+1} \right).$$

$$\text{On a } u_n = f(n) \text{ avec } f(x) = \ln \left(\frac{x+5}{2x+1} \right)$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\ln 2$ alors la suite (u_n) admet une limite et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\ln 2$.

2.5- Propriétés des suites récurrentes définies par une relation du type $U_{n+1} = f(U_n)$ **PROPRIÉTÉ**

Soit (u_n) est une suite d'éléments de l'ensemble de définition d'une fonction f et (v_n) la suite définie par $v_n = f(u_n)$.

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$, où $a \in \mathbb{R} \{-\infty; +\infty\}$ et $l \in \mathbb{R} \{-\infty; +\infty\}$.

Exemple :

$$\text{Soit } u_n = \cos \left(\frac{\pi n^2}{2n^2+1} \right). \text{ Calculons } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$$

$$\text{On peut remarquer que } v_n = f(u_n) \text{ avec } f(x) = \cos x \text{ et } u_n = \frac{\pi n^2}{2n^2+1}.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{\pi}{2} \text{ et comme } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = 0 \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0.$$

PROPRIÉTÉ

Si (u_n) est une suite numérique convergente définie par une formule de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$ et si f est une fonction continue sur un intervalle contenant tous les termes u_n alors la limite de la suite (u_n) est solution de l'équation $f(x) = x$.

2.6- Convergence d'une suite géométrique**PROPRIÉTÉ**

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 non nul.

- Si $-1 < q < 1$ alors la suite (u_n) converge vers 0.
- Si $q = 1$ alors la suite (u_n) converge vers son premier terme.
- Si $q > 1$ alors $\begin{cases} (u_n) \text{ diverge vers } +\infty \text{ si } u_0 > 0 \\ (u_n) \text{ diverge vers } -\infty \text{ si } u_0 < 0 \end{cases}$
- si $q \leq -1$ alors la suite (u_n) n'a pas de limite donc elle diverge.

2.7- Convergence d'une suite arithmétique**PROPRIÉTÉ**

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 .

- Si $r > 0$, alors (u_n) diverge vers $+\infty$
- Si $r < 0$, alors (u_n) diverge vers $-\infty$
- Si $r = 0$, alors (u_n) est constante donc convergente

2.8- Propriétés de comparaison

PROPRIÉTÉ

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites numériques telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang alors
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

PROPRIÉTÉ (THÉORÈME DES GENDARMES)

Soit (u_n) une suite numérique et l un nombre réel.

- S'il existe deux suites (v_n) et (w_n) telles que $w_n \leq u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang et si
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \rho$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \rho$ ($\rho \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$).
- S'il existe une suite (v_n) telle que $|u_n - l| \leq v_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$
 alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.

2.9- Croissance comparée des suite $\ln(n), n^a$ et a^n avec $a > 0$ et $\alpha > 0$

PROPRIÉTÉ

Pour tous nombres réels strictement positifs α et a on a :

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = +\infty$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0$ si $0 < a < 1$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = +\infty$ si $a > 1$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 1$ si $a = 1$

III-

MÉTHODE



- Pour dénombrer qu'une suite est majorée par M , minorée par m ou bornée, on peut :
 - étudier le signe d'une différence de $u_n - M$ ou $u_n - m$
 - utiliser les propriétés de comparaison
 - se servir d'une étude de fonction
 - faire un raisonnement par récurrence

- Pour étudier le sens de variation d'une suite numérique (u_n) on peut :

étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$
 comparer à 1 le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ si la suite (u_n) est à termes strictement positifs

étudier le sens de variation de la fonction f lorsque la suite (u_n) est définie par la formule explicite $u_n = f(n)$

faire un raisonnement par récurrence (lorsque la suite (u_n) est définie par une formule de récurrence)

- Pour calculer la limite d'une suite numérique (u_n) , on peut :

calculer lorsqu'elle existe, la limite de la fonction f est $+\infty$ dans le cas où $u_n = f(n)$

appliquer les propriétés de comparaison

lorsque (u_n) est convergente et définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, on résout l'équation $f(x) = x$

- appliquer les propriétés sur les croissances comparées

- Pour démontrer qu'une suite numérique est convergente on peut :

calculer sa limite (finie)

appliquer les propriétés de convergence

IV- SAVOIR-FAIRE



Savoir-faire 1- Savoir démontrer qu'une suite est minorée, majorée ou bornée

Énoncé

Soit (u_n) la suite de terme général $u_n = \frac{4n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$

- 1- Démontrer que la suite (u_n) est majorée par 4.
- 2- Démontrer que la suite (u_n) est bornée.

Solution commentée :

1- Pour tout entier naturel n on a : $u_n - 4 = \frac{-4n}{n+1}$. Comme $n+1 > 0$ alors,

$u_n - 4 < 0$ donc $u_n < 4$ d'où la suite (u_n) est majorée par 4

2- Pour tout entier naturel n on a : $4n \geq 0$ et $n+1 > 0$ donc $\frac{4n}{n+1} \geq 0$ d'où $0 \leq u_n$. La suite (u_n) est minorée par 0

La suite (u_n) est à la fois minorée et majorée donc la suite (u_n) est bornée.

Énoncé

Soit (u_n) la suite numérique définie par $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} \end{cases} \forall n \in \mathbb{N}$.

Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est minorée par 1.

Solution commentée :

Soit la proposition $P(n) : 1 \leq u_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

On sait $u_0 = 4$ et $1 \leq 4$ donc $1 \leq u_0$ d'où $P(0)$ est vraie (1).

Supposons que $P(n)$ est vraie pour un entier $n \geq 0$ c'est-à-dire que $1 \leq u_n$. Si $1 \leq u_n$ alors $\sqrt{1} \leq \sqrt{u_n}$ donc $1 \leq u_{n+1}$ d'où si $P(n)$ est vraie alors $P(n+1)$ est vraie (2). (1) et (2) impliquent que pour tout entier naturel n , $1 \leq u_n$ donc la suite (u_n) est minorée.

Savoir-faire 2- Savoir démontrer qu'une suite est monotone

Énoncé

Soient les suites (u_n) et (v_n) définies respectivement par : $u_n = 2^n - 6$ et $v_n = \frac{(0,5)^n}{n}$, $n \geq 1$

- 1- Détermine le sens de variation de la suite (u_n) .
- 2- Détermine le sens de variation de la suite (v_n) .

Solution commentée :

1- Pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} - u_n = 2^n$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$ d'où $u_n < u_{n+1}$. La suite (u_n) est strictement croissante.

2- Pour tout entier naturel n , on a $u_n > 0$ et $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n^n}{2(n+1)^n}$ donc $\frac{v_{n+1}}{v_n} < 1$ d'où $v_n > v_{n+1}$.

La suite (v_n) est strictement décroissante.

Énoncé

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 4 \end{cases} \forall n \in \mathbb{N}$

Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est strictement croissante.

Solution commentée :

Soit la proposition : $P(n) : u_n < u_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$

On a : $u_0 = -2$ et $u_1 = 3$ donc $u_0 < u_1$ d'où $P(0)$ est vraie (1)

Supposons que $p(n)$ est vraie pour un entier naturel $n \geq 0$

$$\text{On a : } u_n < u_{n+1} \Rightarrow \frac{1}{2} u_n < \frac{1}{2} u_{n+1} \text{ d'où } \frac{1}{2} u_n + 4 < \frac{1}{2} u_{n+1} + 4.$$

$$\text{Or } \frac{1}{2} u_n + 4 = u_{n+1} \text{ et } \frac{1}{2} u_{n+1} + 4 = u_{n+2} \text{ donc } u_{n+1} < u_{n+2} \text{ d'où } P(n+1) \text{ est vraie.}$$

Si $P(n)$ est vraie alors $P(n+1)$ est aussi vraie (2)

(1) et (2) $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_n < u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est strictement croissante.

Savoir-faire 3 : Savoir Calculer la limite d'une suite numérique

ÉNONCÉ

Soient les suites numériques (u) et (v) définies respectivement par : $u_n = \frac{4+n^2}{e^n}$ et $v_n = \ln(n+1) + 2^{n+1}$

1) Calcule la limite de la suite (u_n) .

2) Calcule la limite de la suite (v_n) .

SOLUTION COMMENTÉE :

$$1) \text{ On a : } u_n = f(n) \text{ avec } f(x) = \frac{4+x^2}{e^x}.$$

$$\text{Comme } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{e^x} + \frac{x^2}{e^x} \right) = 0, \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

$$2) \text{ On a : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+1) = +\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{n+1} = +\infty \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$$

ÉNONCÉ

On considère la suite (u_n) définie par u_0 et pour tout entier n , $u_{n+1} = \frac{u_n}{3} + \frac{4}{3}$.

Afin d'étudier la convergence de la suite (u_n) , on définit la suite (v_n) par : $v_n = u_n - 2, \forall n \in \mathbb{N}$

1) Démontre que (v_n) est une suite géométrique dont tu préciseras la raison et le premier terme

2) Détermine la limite de la suite (v_n) et déduis - en la limite de la suite (u_n) .

SOLUTION COMMENTÉE :

1) Pour tout entier naturel n , on a : $v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \frac{u_n}{3} + \frac{4}{3} - 2 = \frac{1}{3}(u_n - 2) = \frac{1}{3}v_n$ donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$. Son premier terme est $v_0 = u_0 - 2 = 5 - 2 = 3$

2) On a $-1 < \frac{1}{3} < 1$ donc la suite géométrique (v_n) converge vers 0 ($\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$)

Comme $v_n = u_n - 2$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$.

Savoir-faire 4 : Savoir déterminer la plus petite valeur de l'entier n tel que $|u_n - l| \leq 10^p, p \in \mathbb{N}$

ÉNONCÉ

Soit (u_n) suite numérique vérifiant $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{4^n}$ où α désigne un nombre réel

Détermine le plus petit entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$

SOLUTION COMMENTÉE :

Pour avoir $|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$, il suffit que $\frac{1}{4^n} \leq 10^{-3}$.

$$\frac{1}{4^n} \leq 10^{-3} \text{ d'où } -n \ln 4 \leq -3 \ln 10.$$

$$\frac{1}{4^n} \leq 10^{-3} \Rightarrow -n \ln 4 \leq -3 \ln 10 \text{ d'où } n \geq \frac{3 \ln 10}{\ln 4}, n \geq 4,982 \Rightarrow n_0 = 5.$$

V-

JE M'EXERCE

1. Exercices de fixation / Application



Généralités sur les suites numériques

Connaître la définition d'une suite minorée, majorée ou bornée

1 A chaque affirmation réponds par Vrai si elle est correcte et réponds par Faux si elle est incorrecte.

- 1- Une suite bornée est une suite qui admet une limite finie.
- 2- La suite (u_n) vérifiant $-4 < u_n < 2, \forall n \in \mathbb{N}$ est majorée.
- 3- Toute suite décroissante est minorée.
- 4- Toute suite positive est minorée.

2 A chaque affirmation réponds par Vrai si elle est correcte et réponds par Faux si elle est incorrecte.

- 1- Si pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leq 3$ alors la suite (u_n) est minorée par 3.
- 2- Si pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leq 3$ alors la suite (u_n) est majorée par 3.
- 3- Si pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leq 3$ alors la suite (u_n) est bornée.
- 4- Si pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leq 3$ alors la suite (u_n) n'est pas majorée.

3 Soit (u_n) la suite de terme général $u_n = \frac{2n}{n+3}, \forall n \in \mathbb{N}$

Démontre que la suite (u_n) est majorée par 2

Démontrer qu'une suite est monotone

4 Soit une suite (u_n) numérique définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = 1 - n^2$.

Détermine le sens de variation de la suite (u_n) .

5 Détermine le sens de variation de la suite (v_n) définie par $v_n = 1 + e^{-2n}, \forall n \in \mathbb{N}$

6 Soit la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Démontre par récurrence que la suite est croissante.

Notion de limite d'une suite numérique

Connaître les propriétés de convergence et de divergence

7 Pour chaque phrase, complète les pointillés avec l'un des mots suivants : converge, diverge

- 1- Toute suite croissante et non majorée
- 2- Toute suite décroissante et minorée
- 3- Toute suite croissante et majorée
- 4- Toute suite décroissante et non minorée

8 A chaque affirmation réponds par Vrai si elle est correcte et réponds par Faux si elle est incorrecte.

- 1- Toute suite croissante et négative converge.
- 2- Toute suite décroissante et positive converge.
- 3- Toute suite croissante et bornée converge.
- 4- Toute suite décroissante et bornée converge.

Déterminer la limite d'une suite numérique

9 Calcule la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants :

a) $u_n = (0,7)^n$; b) $u_n = n^{0,3}$

c) $u_n = \frac{\ln(n)}{6^n}$; d) $u_n = \frac{2^n}{n^5}$

10 Calcule la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants :

a) $u_n = \frac{2}{3 + \sqrt{n}}$; b) $u_n = \frac{e^n + 2}{4e^n + 1}$

c) $u_n = \frac{n^2 + 8}{n(n+3) + 7}$; d) $u_n = \frac{\ln(n)}{n+2}$

Connaître les propriétés de comparaison

11 Soit (u_n) une suite numérique définie sur $\mathbb{N}$

dont le terme général vérifie $\frac{n-2}{n^3+1} \leq u_n \leq \frac{n+1}{n^3+1}$

Calcule la limite de la suite (u_n) .

15 Soit (u_n) une suite numérique définie sur $\mathbb{N}$ dont le terme général vérifie $u_n \geq e^n - n^3$.

Calcule la limite de la suite (u_n) .

Conjecturer le comportement d'une suite numérique

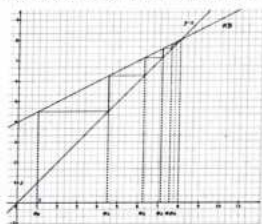
16 Soit u_n la suite définie par la formule de

$$\text{récurrence } \begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 0,5u_n + 4, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f = 0,5x + 4$ de représentation graphique (C_f) .

On a $u_{n+1} = f(u_n)$

Sur la figure ci-dessous on représente sur l'axe (OI) les termes u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5 .



A partir de cette représentation

- 1- Conjecture le sens de variation de la suite (u_n)
- 2- Conjecture la convergence de la suite (u_n)
- 3- A partir d'une conjecture, établis que la suite (u_n) est bornée.

Reconnaître une suite géométrique ou une suite arithmétique convergente ou divergente

17 A chaque affirmation réponds par Vrai si elle est correcte et réponds par Faux si elle est incorrecte.

- 1- La suite géométrique de raison 3 et de premier terme -5 est convergente.
- 2- Toute suite arithmétique de raison -6 est divergente.
- 3- Toute suite géométrique de raison $\frac{3}{5}$ converge vers 0.

18 Soit (w_n) une suite numérique de terme

$$\text{général } \begin{cases} w_0 = -2 \\ w_n = 0,7w_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Détermine le plus petit entier naturel n_0 tel que pour $n \geq n_0$, $w_n \geq 10^2$.

2- Exercices de renforcement/Approfondissement

19 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -3$ et pour tout entier n , $u_{n+1} = 5 - 4u_n$.

1- Démontre par récurrence que pour tout

entier n , $u_n = [-5]^{n+1} + 1$.

2- La suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 1$ est-elle convergente ? Justifie ta réponse.

20 Soit la suite (u_n) la suite définie

$$\text{par : } \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n + 3, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3}{5}x + 3$ de représentation graphique (C_f) dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 2cm. (Δ) est la droite d'équation $y = x$

1- Construis (C_f) et (Δ)

2- A l'aide de (C_f) et (Δ) place sur la droite (OI) les cinq premiers termes de la suite (u_n) sans les calculer. (On pourra remarquer que : $u_{n+1} = f(u_n)$).

3- Conjecture le sens de variation de la suite (u_n) .

4- Conjecture la convergence de la suite (u_n) .

5- Démontre par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n \leq 7,5$.

6- Démontre que la suite (u_n) est strictement croissante.

7- Démontre que la suite (u_n) est convergente.

21 Soit la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{R}$

$$\text{par : } \frac{n^2 + 2n}{(n+1)^2}.$$

1-a) Démontre que pour tout entier naturel n ,

$$u_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$$

b) Démontre que, pour tout entier naturel n , $0 < u_n < 1$.

c) Détermine le sens de variation de la suite (u_n)

2- Soit la suite (v_n) définie par $v_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n$

a) Démontre par récurrence que pour tout

$$\text{entier naturel } n, v_n = \frac{n+2}{2(n+1)}$$

b) Détermine la limite de la suite (v_n) .

20 Soient les suites numériques (u_n) et (v_n) définies respectivement

$$\text{par : } \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 4, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \text{ et } v_n = u_n - 8.$$

1- Démontre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$

2- Calcule v_0 et exprime v_n en fonction de n .

3- Calcule $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

4- On pose : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ et $T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Exprime S_n en fonction de n .

b) Dédus de la question précédente l'expression de T_n en fonction de n .

21 Soit u_n une suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}$ de raison -2 tel que $u_1 = 5$.

A chacun des affirmations ci-dessous réponds par Vrai si elle est correcte et réponds par Faux si elle est incorrecte.

1- La suite (u_n) est strictement croissante.

2- La suite (u_n) est convergente.

3- La suite (u_n) n'admet pas de limite.

22 On considère les suites u et v définies respectivement par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_1 = 5 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \text{ et } v_n = v_{n+1} - v_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

1- Calcule u_2, u_3, v_0 et v_1

2- Démontre que la suite v est constante et donne sa valeur.

3- Dédus - en que u est une suite arithmétique dont la raison est égale à 2.

4- Exprime u_n en fonction de n .

23 Soit la suite (u_n) définie par : $u_n = \frac{3n-1}{2n+1}$

1- Démontre que pour tout entier naturel n ,

$$u_n = \frac{3}{2} \left[1 - \frac{5}{6n+3} \right]$$

2- Dédus de la question précédente que pour

$$\text{tout entier naturel } n, \left| u_n - \frac{3}{2} \right| \leq \frac{5}{4n}$$

3- Calcule $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{4n}$ et dédus - en la limite de la suite (u_n) .

4- Détermine le plus petit entier naturel m tel que

$$\text{pour tout } n \geq m, \left| u_n - \frac{3}{2} \right| \leq 10^{-3}.$$

24 Une pièce automobile coûte 50000F CFA depuis le premier janvier 2020 dans un pays. Sachant que l'inflation est de 3% par an dans ce pays et que cette inflation est constante, calcule le prix de la pièce en 2021 et en 2030.

25 Calcule $1 + 2 + 4 + \dots + 500$.

26 Calcule $2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{20}$.

27 Soient les suites définies respectivement par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n}, \forall n \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad v_n = \frac{n}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N} \text{ et}$$

$$w_n = \ln(v_n), \forall n \in \mathbb{N}$$

définies respectivement par :

On admet que pour tout entier naturel n $u_n \neq 2$.

1- Démontre par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n = v_n$

2- a) Démontre que : $w_1 + w_2 + w_3 = -\ln 4$.

b) Soit $S_n = w_1 + w_2 + \dots + w_n$.

Exprime S_n en fonction de n et calcule $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

3- Soit P_n le produit défini pour tout entier naturel non nul n par : $P_n = u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n$

Exprime P_n en fonction de n .

28 Soient les suites u et v définies respectivement par

$$\begin{cases} u_1 = 12 \\ u_{n+1} = \frac{u_n - 2v_n}{3}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \end{cases} \text{ et } \begin{cases} v_1 = 1 \\ v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1- On pose $w_n = v_n - u_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

a) Démontre que la suite w de terme général w_n est une suite géométrique de raison $\frac{1}{12}$.

b) Exprime w_n en fonction de n .

c) Justifie que pour tout entier naturel n non nul $u_n < 0$.

d) Calcule la limite de la suite w .

2- a) Démontre que la suite u est décroissante.

- b) Démontre que la suite v est croissante.
- a) Démontre que pour tout entier naturel n non nul, .
- b) Déduis - en que .
- 3- a) Démontre que pour tout entier naturel n non nul, $u_n \geq v_n$.
- b) Déduis - en que $u_1 > u_n > v_n > v_1$
- 4- Justifie que les suites u et v convergent.

- 5- Soit la suite (t_n) définie par $t_n = 3u_n + 8v_n, \forall n \geq 1$
- a) Démontre que la suite (t_n) est constante.
- b) Calcule t_1 .
- c) Exprime v_n en fonction de n puis calcule la limite de la suite v .
- d) Déduis des questions précédentes la limite de la suite u .

3- Situations complexes

29 La coopérative d'un village possède une forêt de 50 hectares qu'elle veut mettre en valeur à partir de 2020. Le président de la coopérative propose de mettre en valeur la première année 5 hectares et cette superficie sera augmentée de 10% chaque année par rapport à l'année précédente. Il veut savoir si cette procédure permettra de mettre les 50 hectares en valeur au plus tard en 2025.

On vous demande de répondre à la préoccupation du président de la coopérative en le justifiant.

30 Le chef d'un grand village vient de construire une nouvelle villa pour le sous-préfet. Pour s'assurer une autonomie en fourniture d'eau, il

propose de réaliser un forage à proximité de la villa. Mais il dispose d'une somme de 409 600 F CFA pour réaliser son projet. Le coût du forage en franc CFA est fixé à 1 200 F pour le premier mètre creusé ; 1 400 F pour le deuxième mètre ; 1 600 F pour le troisième mètre creusé et ainsi de suite en augmentant de 200 F par mètre creusé. Après une étude par un expert des mines, le chef est informé que la nappe d'eau pour le site choisi est à soixante - sept mètres de profondeur. Le chef du village veut alors savoir s'il peut réaliser son projet.

En tant qu'élève de terminale TD, on vous demande de répondre à la préoccupation du chef du village en justifiant votre démarche.



VI- RENDEZ-VOUS DES CURIEUX !

Les suites numériques sont liées à la mathématique de la mesure (mesures d'un phénomène prises à intervalles de temps réguliers) et à l'analyse (une suite numérique est l'équivalent discret d'une fonction numérique).

La notion de suite est présente dès qu'apparaissent des procédés illimités de calcul. On en trouve, par exemple, chez **Archimède**, spécialiste des procédés illimités d'approximation (**séries géométriques** de raison $1/4$) pour des calculs d'aires et de volumes, ou en Égypte vers 1700 avant J.C. et plus récemment au I^{er} siècle après J.-C. dans le procédé d'extraction d'une racine carrée par la **méthode de Héron d'Alexandrie**.

On retrouve ensuite cette préoccupation plusieurs siècles plus tard (à partir du **XVII^e siècle**) avec la **méthode des indivisibles** (**Cavalieri, Torricelli, Pascal, Roberval**).

Dans l'**Encyclopédie Raisonnée de d'Alembert et Diderot (1751)**, une grande part est laissée aux suites et séries dont le principal intérêt semble être leur convergence.

C'est ainsi que l'on voit **Bernoulli, Newton, Moivre, Stirling et Wallis**, s'intéresser aux suites pour approcher des valeurs numériques. C'est à **Lagrange** que l'on doit, semble-t-il, la notation indicielle.

L'étude des suites ouvre la porte à celle des **séries entières** dont le but est d'approcher, non plus des nombres, mais des fonctions.

Dans la seconde moitié du **XX^e siècle**, le développement des calculateurs et des ordinateurs donne un second souffle à l'étude des suites en analyse numérique grâce à la **méthode des éléments finis**. On en retrouve l'usage aussi dans les **mathématiques financières**.

Parallèlement à ces études de suites pour leur convergence, se développe un certain goût pour l'étude de la suite non tant pour sa convergence mais pour son terme général. C'est le cas par exemple d'un grand nombre de suites d'entiers comme la **suite de Fibonacci**, celle de **Lucas** ou, plus récemment, celle de **Syracuse**. Sont aussi particulièrement étudiées les suites de coefficients dans des séries entières ou les suites de nombres découvertes lors de **dénombrements**.

(Extrait de wiki loves Africa)

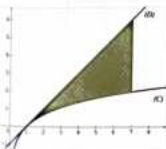
Notions essentielles :

- Propriétés de l'intégrale ;
- Techniques de calcul intégral ;
- Calcul d'aire ;
- Fonction définie par une intégrale.

SITUATION D'APPRENTISSAGE

Lors d'une recherche dans une salle multimédia un élève de Terminale D découvre l'exercice suivant :
 Exercice : Sur la figure ci-dessous, le plan est muni d'un repère orthonormé d'unité graphique 1cm. (C) est la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \ln x$ et (D) est la droite d'équation $y = x - 1$. Calcule en cm^2 l'aire de la partie hachurée.

Ne sachant quoi faire face à cet exercice, il le propose à sa classe qui à son tour consulte un professeur de mathématiques qui leur dit que pour traiter l'exercice ils doivent d'abord étudier le calcul intégral.



I- ACTIVITÉS DE DÉCOUVERTE

1- INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE.

1.1- Connaître la définition de l'intégrale d'une fonction continue

ACTIVITÉ 1

Soit la fonction continue définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x + 3$.

- Détermine une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.
- Calcule : $F(5) - F(2)$.
- Soit G une autre primitive de f . Démonstre que $G(5) - G(2) = F(5) - F(2)$.
- Démonstre que le nombre $F(5) - F(2)$, ne dépend pas de la primitive choisie.

Je fais le point de l'activité

Le nombre réel $F(5) - F(2)$ ne dépend pas de la primitive F choisie. Ce nombre est appelé **intégrale**

de 2 à 5 de f . On le note $\int_2^5 f(x)dx$ ou $\int_2^5 f(t)dt$. Les variables t et x sont dites **muettes**.

J'évalue mes acquis

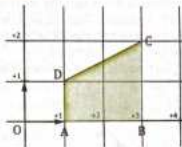


Calcule : $\int_1^e \frac{1}{x} dx$

1.2 Connaître l'interprétation graphique d'une intégrale

ACTIVITÉ 2

Soit la fonction f définie sur par $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ et (C) sa représentation graphique (voir figure ci-contre). On donne $A(1; 0)$, $B(3; 0)$, $C(3; 2)$ et $D(1; 1)$.



- Calcule l'aire θ du quadrilatère ABCD.
- Calcule l'intégrale $I = \int_1^3 (\frac{1}{2}x + \frac{1}{2})$.
- Compare θ et I .

Je fais le point de l'activité

L'intégrale $\int_1^3 f(x)dx$ est l'aire (en unité d'aire) du domaine grisé délimité par (C), (OI) et

les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$ en d'autre terme $\int_1^3 f(x)dx$ est égale à l'aire du quadrilatère ABCD.

J'évalue mes acquis



On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 3x + 2$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, 1, j)$. On suppose que f est positive sur $[-1; 4]$. L'unité graphique est le centimètre.

Détermine l'aire de la partie du plan délimitée par (C), (OI) et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 4$.

2- CONNAÎTRE LES PROPRIÉTÉS DE L'INTÉGRALE

2.1- Connaître la propriété sur la linéarité de l'intégrale

Activité 3

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a; b]$. F est une primitive de f et G est une primitive de g sur $[a; b]$.

1- Compare $\int_a^b (f+g)(x)dx$ et $\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

2- α étant un nombre réel, compare $\int_a^b \alpha f(x)dx$ et $\alpha \int_a^b f(x)dx$.

Je fais le point de l'activité

Si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a; b]$ et α un nombre réel alors :

$$\bullet \int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\bullet \int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$$

J'évalue mes acquis

Sans les calculer compare les intégrales suivantes.

$$\int_1^2 (\ln x - 6 \frac{e^x}{x}) dx \text{ et } \int_1^2 \ln x dx - 6 \int_1^2 \frac{e^x}{x} dx$$

2.2- Connaître la propriété de la relation de Chasles.

Activité 4

Soit f une fonction continue sur un intervalle K , a , b , et c trois éléments de K .

Démontre que : $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$.

Je fais le point de l'activité

Si f est une fonction continue sur un intervalle K , a , b , et c trois éléments de K alors

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

J'évalue mes acquis

f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

A chaque affirmation réponds par VRAI si elle est correcte et réponds par FAUX si elle est incorrecte.

1) $\int_4^6 f(x)dx = \int_4^9 f(x)dx + \int_9^6 f(x)dx$.

2) $\int_4^6 f(x)dx = \int_4^9 f(x)dx + \int_9^6 f(x)dx$.

3) $\int_4^6 f(x)dx = \int_4^9 f(x)dx + \int_9^0 f(x)dx$.

2.3- Connaître la propriété sur le signe d'une intégrale

Activité 5

Soit a et b deux nombres réels tels que $a \leq b$ et f une fonction vérifiant $f(x) \geq 0 \forall x \in [a; b]$.

1- Démontre que toute primitive F de f est croissante sur $[a; b]$.

2- Démontre que : $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

Je fais le point de l'activité

- Si f est une fonction continue et positive sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

- Si f est une fonction continue et négative sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f(x) dx \leq 0$.

J'évalue mes acquis



Détermine le signe de l'intégrale $\int_a^b (-1 + \ln x) dx$ sans la calculer.

2.4- Connaître les propriétés des intégrales et inégalités

Activité 6

Soit a et b deux nombres réels tels que $a \leq b$, f et g deux fonctions continues vérifiant $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a; b]$.

Démontre que $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$.

Je fais le point de l'activité

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle K , a et b deux nombres réels de K tels

que : $a \leq b$. Si $f(x) \geq g(x)$, alors, $\forall x \in [a; b], \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$.

J'évalue mes acquis



On admet que pour tout nombre réel $t \geq 0, \frac{e^t}{t} \geq \frac{1}{t}$.

Démontre que pour tout nombre réel $x \geq 1, \int_1^x \frac{e^t}{t} dt \geq \ln x$.

3- VALEUR MOYENNE D'UNE FONCTION CONTINUE

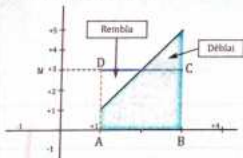
3.1- Connaître la définition de la valeur moyenne d'une fonction continue

Activité 7

1- Calcule le nombre réel tel que $\mu = \frac{1}{3-1} \int_1^3 (2x-1) dx$

2- Donne une illustration de μ .

Je fais le point de l'activité



- Le nombre réel $\mu = \frac{1}{3-1} \int_1^3 (2x-1) dx$ est appelé valeur moyenne de la fonction $x \mapsto 2x-1$ sur l'intervalle $[1; 3]$.
- Lorsque f est positive, μ est la hauteur AD du rectangle ABCD, de base $x_B - x_A$, dont l'aire est égale à celle de la surface colorée.
- Le remblais et le déblais sont égaux

J'évalue mes acquis



Calcule la valeur moyenne de la fonction $x \mapsto 1 + e^x$ sur l'intervalle $[0; 1]$.

3.2- Connaître la propriété de l'inégalité de la moyenne

ACTIVITÉ 8

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$, n et m sont deux nombres réels tels que $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a; b]$.

Démontre que : $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$.

Je fais le point de l'activité

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$.

S'il existe deux nombres réels m et M tels que $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a; b]$

alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$.

J'évalue mes acquis



On admet que pour tout nombre réel x , $|\sin^2 x| \leq 1$.

Démontre que : $-\frac{\pi}{4} \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx \leq \frac{\pi}{4}$.

4- TECHNIQUES DE CALCUL INTÉGRAL

4-1- Connaître la technique de l'intégration par parties

Activité 9

On rappelle que si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle K alors $(uv)' = u'v + uv'$ (c'est - à - dire $u'v = (uv)' - uv'$)

En admettant que u' et v' sont continues sur l'intervalle K , démontre que pour tous nombres réels a et b de

K , on a : $\int_a^b u'(x)v(x) dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx$.

Je fais le point de l'activité

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle K telles que u' et v' sont continues

$$\text{alors } \int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx.$$

Cette méthode d'intégration est appelée **intégration par parties**.

J'évalue mes acquis



Calcule l'intégrale $\int_1^e x \ln x dx$ à l'aide d'une intégration par parties.

4-1 Connaître la technique du changement de variable affine

Activité 10

Soit f une fonction continue sur un intervalle K . $x \mapsto ax + \beta$, $a \neq 0$ une application affine non constante. a et b sont deux nombres réels tels que pour tout $x \in [a; b]$, le nombre $ax + \beta \in [a; b]$.

1- Justifie que si F est une primitive de f sur K , alors la fonction $x \mapsto \frac{1}{a} F(ax + \beta)$ est une primitive de la fonction $x \mapsto f(ax + \beta)$.

2- En posant $u = ax + \beta$, démontre que $\int_a^b f(ax + \beta)dx = \int_{au+\beta}^{bu+\beta} \frac{1}{a} f(u)du$

Je fais le point de l'activité

En posant $u = ax + \beta$ ($x = \frac{u - \beta}{a}$), on a : $\int_a^b f(ax + \beta)dx = \int_{au+\beta}^{bu+\beta} \frac{1}{a} f(u)du$

J'évalue mes acquis



A l'aide d'un changement de variable affine, calcule $\int_0^1 x\sqrt{2x+1} dx$.

4.2- Calculer l'intégrale d'une fonction paire

Activité 11

Soit f une fonction paire continue sur un intervalle K symétrique par rapport à zéro.

1- Démontre que pour tout nombre a élément de K , $\int_{-a}^0 f(t)dt = \int_0^a f(t)dt$. (Tu peux faire un changement de variable affine en posant $u = -t$)

2- Dédus de la question précédente que $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$.

Je fais le point de l'activité

Si f est une fonction paire continue sur un intervalle K symétrique par rapport à zéro alors pour tout

$$a \text{ élément de } K, \int_{-a}^0 f(t)dt = \int_0^a f(t)dt \text{ et } \int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$$

J'évalue mes acquis



A chaque affirmation réponds par Vrai si elle est correcte sinon réponds par Faux.

1- $\int_{-2}^{-6} \cos^4 x dx = 2 \int_0^6 \cos^4 x dx$.

2- $\int_{-2}^{-6} \cos^4 x dx = 2 \int_0^2 \cos^4 x dx$.

3- $\int_{-2}^{-2} \cos^4 x dx = 2 \int_0^2 \cos^4 x dx$.

4.3- Calculer l'intégrale d'une fonction impaire

Activité 12

Soit f une fonction impaire continue sur un intervalle K symétrique par rapport à zéro.

1- Démontre que pour tout nombre a élément de K , $\int_{-a}^0 f(t) dt = \int_0^a f(t) dt$. (Tu peux faire un changement de variable affine en posant)

2- Dédus de la question précédente que : $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.

Je fais le point de l'activité

Si f est une fonction impaire continue sur un intervalle K symétrique par rapport à zéro alors pour tout a élément de K , $\int_{-a}^0 f(t) dt = -\int_0^a f(t) dt$ et $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.

J'évalue mes acquis



Justifie que : $\int_{-2}^{-2} \cos^3 x dx = 0$.

4.4- Calculer l'intégrale d'une fonction périodique

Activité 13

1- Compare $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2} + 2\pi} \cos^4 x dx$ et $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx$.

2- Compare $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2} + 2\pi} \cos x dx$ et $\int_0^{2\pi} \cos x dx$.

Je fais le point de l'activité

Si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période P alors pour tout nombre réel a ,

on a : $\int_a^{a+P} f(x) dx = \int_0^P f(x) dx$ et $\int_{a+P}^{b+P} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$

J'évalue mes acquis



A chaque affirmation réponds par Vrai si elle est correcte sinon réponds par Faux.

1- Si f est continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période 5 alors $\int_0^{13} f(x) dx = \int_0^5 f(x) dx$

2- $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx$

5- CALCUL D'AIRES

ACTIVITÉ 14

On donne les fonctions f et g définies par $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ et $g(x) = -\frac{1}{2}x + 2$.

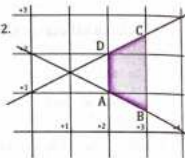
On donne les points $A(2; 1)$, $B(3; 0.5)$, $C(3; 2.5)$ et $D(2; 2)$

1- Calcule l'aire a du trapèze $ABCD$

2- a) Compare f et g sur l'intervalle $[2; 3]$

b) Calcule l'intégrale $I = \int_2^3 (f(x) - g(x)) dx$

3- Compare a et I .



Je fais le point de l'activité

L'intégrale $\int_2^3 (f(x) - g(x)) dx$ est l'aire (en unité d'aire) de la partie du plan limitée par les courbes de f , de g et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 3$, c'est aussi l'aire du quadrilatère $ABCD$.

J'évalue mes acquis



On donne les fonctions f définies par $f(x) = 2x^2 - x + 1$ et $g(x) = -x^2 + 6$. Détermine l'aire de la partie du plan limitée par les courbes de f , de g et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$

II- RÉSUMÉ DE COURS



1- INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE

1.1- Intégrale d'une fonction continue

DÉFINITION

Soit f une fonction continue sur un intervalle K , a et b deux éléments de K .

F désigne une primitive de f sur K .

Le nombre réel $F(b) - F(a)$, ne dépendant pas de la primitive choisie, est appelé **intégrale de a**

à b de la fonction f . Ce nombre se note $\int_a^b f(x) dx$ ou $\int_a^b f(u) du$ et on a : $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Exemples

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + e^x$ et F la fonction définie par $F(x) = x + e^x$ une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
donc $\int_0^1 (1 + e^x) dx = [x + e^x]_0^1 = F(1) - F(0) = (1 + e) - (1) = e$.



$\int_a^b f(x) dx$ ne dépend pas de la primitive F choisie.

a) Notation et Vocabulaire

$\int_a^b f(x) dx$ se lit « intégrale (ou somme) de a à b de $f(x) dx$ »

$[F(x)]_a^b$ se lit « $F(x)$ pris entre a et b »

Les nombres réels a et b sont appelés les bornes de l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$.

Dans l'écriture $\int_a^b f(x) dx$, on peut remplacer la lettre x par toute autre lettre sauf par a et b et écrire

$\int_a^b f(t) dt$ ou $\int_a^b f(u) du$. x, t, u sont appelés des variables muettes.

b) Conséquences de la définition

PROPRIÉTÉ

Soit f une fonction continue sur un intervalle K , a et b deux éléments de K . On a :

- $\int_a^a f(x) dx = 0$;
- $\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$.

c) Intégrale et primitive

DÉFINITION

Soit f une fonction continue sur un intervalle K et a un élément de K . La fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ de K dans $\mathbb{R}$, est la primitive de f sur K qui s'annule en a .

Exemples

La fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $x \mapsto \int_1^x \frac{1}{t} dt$ est la fonction logarithme népérien ($x \mapsto \ln x$)

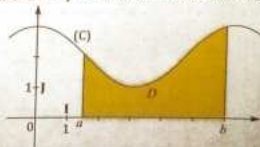
1.2-Interprétation graphique d'une intégrale

PROPRIÉTÉ

Soit f une fonction continue sur un intervalle K , (C) sa courbe représentative, a et b deux éléments de K ($a < b$).

Si f est positive sur l'intervalle $[a, b]$ alors

$\int_a^b f(x) dx$ est l'aire (en unité d'aire) du domaine D délimité par (C) , (OI) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$



2- PROPRIÉTÉ ALGÈBRE

2.1- Linéarité de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle K , α est un nombre réel, a et b deux éléments de K . On a :

$$\bullet \int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx$$

$$\bullet \int_a^b (f+g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

Exemples

$$\text{On a : } \int_1^e \frac{4\ln x - 1}{x} dx = \int_1^e \left(\frac{4\ln x}{x} - \frac{1}{x} \right) dx = 4 \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx - \int_1^e \frac{1}{x} dx = 4 \left[\frac{1}{2} (\ln x)^2 \right] - [\ln x]_1^e = 1$$

2.2- Relation de Chasles

PROPRIÉTÉ

Soit f une fonction continue sur un intervalle K , a , b et c trois éléments de K .

$$\text{On a : } \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

Exemples

$$\text{Calculons } \int_1^3 |4 - 2x| dx.$$

$$\text{On a : } \forall x \in [1; 2], 4 - 2x \geq 0 \text{ donc } |4 - 2x| = 4 - 2x$$

$$\forall x \in [2; 3], 4 - 2x \leq 0 \text{ donc } |4 - 2x| = -4 + 2x$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi : } \int_1^3 |4 - 2x| dx &= \int_1^2 |4 - 2x| dx + \int_2^3 |4 - 2x| dx \\ &= \int_1^2 (4 - 2x) dx + \int_2^3 (2x - 4) dx \\ &= \left[4x - x^2 \right]_1^2 + \left[x^2 - 4x \right]_2^3 \\ &= 10. \end{aligned}$$

2.3- Signe d'une intégrale

PROPRIÉTÉ

Soit f une fonction continue sur un intervalle K , a et b deux éléments de K ($a \leq b$).

Si f est positive sur $[a; b]$ alors $\int_a^b f(x) dx$ est positive sur $[a; b]$

Exemple

Déterminons le signe de l'intégrale $\int_0^1 \frac{1+e^x}{1+x^2} dx$ sans la calculer.

Pour tout nombre réel $x \in [0; 1]$, on a $\frac{1+e^x}{1+x^2} > 0$ donc $\int_0^1 \frac{1+e^x}{1+x^2} dx > 0$

2.4- Propriétés de comparaison**Propriété**

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle K , a et b deux éléments de K ($a \leq b$).

Si $f \leq g$ sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

Exemple

Démontrons que $\forall x \in [1; +\infty[$, $\ln x \leq x - 1$.

Soit $x \in [1; +\infty[$. Pour tout $x \in [1; x]$, on a $\frac{1}{t} \leq 1$ donc $\int_1^x \frac{1}{t} dt \leq \int_1^x 1 dt$ d'où $[\ln t]_1^x \leq [t]_1^x$

On en déduit que $\forall x \in [1; +\infty[$, $\ln x \leq x - 1$



Soit f une fonction continue sur un intervalle K , a et b deux éléments de K

($a \leq b$). On a : $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

3- VALEUR MOYENNE D'UNE FONCTION**3.1- Définition de la valeur moyenne****Définition**

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$, tel que $a < b$.

On appelle **valeur moyenne** de f sur $[a; b]$, le nombre réel noté μ tel que $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

Exemple

Calcule la valeur moyenne de la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 1$ sur $[-1; 2]$.

La valeur moyenne de f sur $[-1; 2]$ est $\mu = \frac{1}{2 - (-1)} \int_{-1}^2 (x^2 - 1) dx = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{3} x^3 - x \right]_{-1}^2 = 0$.

3.2- Inégalité de la moyenne**Propriété**

Soit f une fonction continue sur un intervalle K , a et b deux éléments de K tels que :

($a \leq b$). Si m et M sont deux nombres réels tels que pour tout

x élément de $[a; b]$, $m \leq f(x) \leq M$ alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$.

Exemple

Démontrons que $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$, $-\frac{\pi^3}{27} \leq \int_0^x -x^2 \sin x dx \leq \frac{\pi^3}{27}$.

On a : $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$, $-1 \leq \sin x \leq 1$ donc $-x^2 \leq -x^2 \sin x \leq x^2$ car $-x^2 \leq 0$

De plus $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right], -\frac{\pi^2}{9} \leq -x^2$ et $x^2 \leq \frac{\pi^2}{9}$ donc $-\frac{\pi^2}{9} \leq -x^2 \sin x \leq \frac{\pi^2}{9}$

$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right], -\frac{\pi^2}{9} \leq -x^2 \sin x \leq \frac{\pi^2}{9}$ donc $-\frac{\pi^2}{9} \left(\frac{\pi}{3} - 0\right) \leq \int_0^{\frac{\pi}{3}} (-x^2 \sin x) \leq \frac{\pi^2}{9} \left(\frac{\pi}{3} - 0\right)$.

On en déduit que $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right], -\frac{\pi^3}{27} \leq \int_0^{\frac{\pi}{3}} -x^2 \sin x dx \leq \frac{\pi^3}{27}$

PROPRIÉTÉ

Soit f une fonction continue sur un intervalle K , a et b deux éléments de K .

Si M est un nombre réel tel que pour tout x élément de K , $|f(x)| \leq M$, alors $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq M(b-a)$.

4- TECHNIQUES DE CALCUL INTÉGRAL

4-1 Intégration par parties

PROPRIÉTÉ

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle K telles que les fonctions dérivées u' et v' sont continues sur K , a et b sont deux éléments de K .

On a : $\int_a^b u'(x) v(x) dx = [u(x) v(x)]_a^b - \int_a^b u(x) v'(x) dx$

Exemple

Calculons $\int_1^e x \ln x dx$

Posons $\begin{cases} u'(x) = x \\ v(x) = \ln x \end{cases}$. On a alors $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{2}x \\ v(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$ donc :

$$\begin{aligned} \int_1^e x \ln x dx &= \left[\frac{1}{2} x^2 \ln x \right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{1}{2} x^2 \times \frac{1}{x} \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{2} x^2 \ln x \right]_1^e - \left[\frac{1}{2} x \right]_1^e \\ &= \left[\frac{1}{2} x^2 \ln x \right]_1^e - \left[\frac{1}{4} x^2 \right]_1^e \\ &= \frac{e}{2} + \frac{1}{4} \end{aligned}$$



Soit $P(x)$ un polynôme.

1 - Pour calculer $\int_a^b P(x) \ln x dx$, on posera $u'(x) = P(x)$ et $v(x) = \ln x$.

2 - Pour calculer $\int_a^b P(x) e^x dx$, on posera $u'(x) = e^x$ et $v(x) = P(x)$.

3 - Pour calculer $\int_a^b P(x) \cos x dx$, on posera $u'(x) = \cos x$ et $v(x) = P(x)$.

4 - Pour calculer $\int_a^b P(x) \sin x dx$, on posera $u'(x) = \sin x$ et $v(x) = P(x)$.

4-2 Changement de variable affine

Pour calculer l'intégrale $\int_a^b f(ax + \beta) dx$, on peut :

- faire le changement de variable en posant $u = ax + \beta$.
- utiliser l'égalité $\int_a^b f(ax + \beta) dx = \int_{a\alpha + \beta}^{a\beta + \beta} \frac{1}{a} f(u) du$

Exemple

Calculons $\int_0^1 \sqrt{2x+1} dx$

En posant $u = 2x + 1$. On a alors $\int_0^1 \sqrt{2x+1} dx = \int_{2 \times 0 + 1}^{2 \times 1 + 1} \sqrt{u} du = \int_1^2 \frac{1}{2} \sqrt{u} du = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} u \sqrt{u} \right]_1^2 = \sqrt{3} - \frac{1}{3}$

4-3 Intégrales de fonctions paires et de fonctions impaires

PROPRIÉTÉ

Soit f une fonction continue sur un intervalle K symétrique par rapport à zéro et a un élément de K .

- Si f est paire alors $\int_{-a}^0 f(t) dt = \int_0^a f(t) dt$ et $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.
- Si f est impaire alors $\int_{-a}^0 f(t) dt = - \int_0^a f(t) dt$ et $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.

Exemple

Calculons $\int_{-5}^5 x^3 \cos x dx$.

La fonction $x \mapsto x^3$ définie sur $[-5; 5]$ est impaire donc $\int_{-5}^5 x^3 \cos x dx = 0$.

4-4 Intégrale de fonction périodique

PROPRIÉTÉ

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période p .

Pour tous nombres réels a et b , on a :

- $\int_a^{b+p} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$.
- $\int_a^{a+p} f(t) dt = \int_0^p f(x) dx$.

Exemple

Sachant que la fonction $x \mapsto \cos 2x$ est périodique de période π donc :

- $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx = \int_0^{\pi} f(x) dx = \left[\frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\pi} = 0$ (car $\frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi$).
- $\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos 2x dx = \int_{-\frac{3\pi}{4} + \pi}^{\frac{3\pi}{4} + \pi} \cos 2x dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \cos 2x dx = \left[\frac{1}{2} \sin 2x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3}-2}{4}$.

4.5-Exemples d'utilisation d'une primitive

1) Calcule $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x (\cos x)^3 dx$

Posons $f(x) = \sin x (\cos x)^3$, f est continue sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

En posant $u(x) = \cos x$, on a $u'(x) = -\sin x$ donc $f = -u'u^3$ d'où $F = -\frac{1}{4}u^4$ est une primitive de f sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Ainsi $I = \left[-\frac{1}{4}(\cos x)^4\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}$.

2) Calcule $J = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx$

Posons $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$, f est continue sur $[0; 1]$.

En posant $u(x) = 1 + e^x$, on a $u'(x) = e^x$ donc $f = \frac{u'}{u}$.

f sur $[0; 1]$. Ainsi $J = \left[\ln|1 + e^x|\right]_0^1 = \ln\left(1 + \frac{1}{e}\right) + \ln 2$.

5- CALCUL D'AIRE

5.1-Calcul de l'aire d'une partie du plan limitée par l'axe des abscisses et une courbe

PROPRIÉTÉ

Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ alors l'aire de la partie du plan délimitée par (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est : $\int_a^b |f(x)| dx u_0$.

Exemple

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 2 cm et $f(x) = \ln x$. Calcule l'aire A en cm^2 de la partie du plan comprise entre (C_f) , (OI) et les droites d'équations $x = \frac{1}{2}$ et $x = 1$.

Solution

f est continue et négative sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ donc

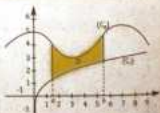
$$A = \int_{\frac{1}{2}}^1 (-\ln x) dx \times 2 \times 2 cm^2 = \left[-x \ln x + x\right]_{\frac{1}{2}}^1 \times 4 cm^2 = (2 - 2 \ln 2) cm^2.$$

5.2-Calcul de l'aire d'une partie du plan limitée comprise entre deux courbes

PROPRIÉTÉ

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle K , (C_f) et (C_g) les courbes représentatives respectives de f et g , a et b deux éléments de K ($a < b$).

Si $f \leq g$ sur $[a; b]$ alors l'aire du domaine D délimité par (C_f) , (C_g) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est : $A(D) = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx \times u_0$
 u_0 : unité d'aire



III-

MÉTHODE



• Pour calculer une intégrale $\int_a^b f(x) dx$, on peut :

- déterminer une primitive de la fonction f lorsque cela est possible
- faire une intégration par parties
- faire un changement de variable affine
- reconnaître une fonction paire, une fonction impaire ou une fonction périodique

• Pour comparer deux intégrales $\int_a^b f(x) dx$ et $\int_a^b g(x) dx$

- on peut étudier le signe de l'intégrale $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx$

• Intégrale d'une fonction trigonométrique.

- Dans la recherche d'une primitive de la fonction $\cos^p x$ ou de $\sin^p x$, lorsque p est impaire on peut éviter la linéarisation. La linéarisation est obligatoire lorsque p est paire.
- On peut aussi éviter la linéarisation de la fonction $\cos^p x \sin^q x$ lorsque p ou q est impaire.

IV-

SAVOIR-FAIRE



Savoir-faire 1-

Savoir calculer une intégrale $\int_a^b f(x) dx$ en recherchant simplement une primitive de la fonction f .

ÉNONCÉ

Calcule : $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx$.

SOLUTION COMMENTÉE :

Soit $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. En posant $u(x) = x^2 + 1$, on a $f = \frac{1}{2} \times \frac{u'}{u}$ donc $F = \frac{1}{2} \times \ln|u|$.

Ainsi $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \left[\frac{1}{2} \ln|x^2+1| \right]_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2$.

Savoir-faire 2-

Savoir appliquer la relation de Chasles

ÉNONCÉ

Soit f la fonction définie par $\begin{cases} f(x) = 2x - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \frac{1}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Calcule : $\int_0^e f(x) dx$.

SOLUTION COMMENTÉE :

$$\begin{aligned}\text{On a : } \int_0^e f(x) dx &= \int_0^1 f(x) dx + \int_1^e f(x) dx \\ &= \int_0^1 (2x - 1) dx + \int_1^e \frac{1}{x} dx \\ &= \left[x^2 - x \right]_0^1 + \left[\ln x \right]_1^e \\ &= 1\end{aligned}$$

Savoir-faire 3 : Savoir effectuer une intégration par parties

ÉNONCÉ

A l'aide d'une intégration par parties, calcule $K = \int_1^e x^2 \ln x dx$.

SOLUTION COMMENTÉE :

Posons $\begin{cases} u'(x) = x^2 \\ v(x) = \ln x \end{cases}$. On a alors $\begin{cases} u(x) = \frac{1}{3}x^3 \\ v(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$

$$\text{Donc } K = \left[\frac{1}{3}x^3 \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{3}x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3 \ln x \right]_1^e - \left[\frac{1}{9}x^3 \right]_1^e = \frac{-2e^3 - 1}{9}$$

ÉNONCÉ

A l'aide d'une intégration par parties, calcule $J = \int_0^1 x e^{-2x} dx$

SOLUTION COMMENTÉE :

Posons $\begin{cases} u'(x) = e^{-2x} \\ v(x) = x \end{cases}$. On a alors $\begin{cases} u(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} \\ v(x) = 1 \end{cases}$

$$\text{Donc } J = \left[-\frac{1}{2}x e^{-2x} \right]_0^1 - \int_0^1 \left(-\frac{1}{2}e^{-2x} \right) dx = \left[-\frac{1}{2}x e^{-2x} \right]_0^1 - \left[\frac{1}{4}e^{-2x} \right]_0^1 = \frac{-3e^{-2} + 1}{4}$$

Savoir-faire 4 : Savoir effectuer un changement de variable affine

ÉNONCÉ

A l'aide d'un changement de variable affine, calcule $L = \int_{-1}^0 \frac{x}{\sqrt{2x+3}} dx$

SOLUTION COMMENTÉE :

Posons $u = 2x + 3$, on a $\frac{u-3}{2}$ et $dx = \frac{1}{2}du$

$$\text{Donc } L = \int_1^3 \frac{\frac{1}{2}(u-3)}{\sqrt{u}} \times \frac{1}{2} du = \frac{1}{4} \int_1^3 \left(\sqrt{u} - \frac{3}{\sqrt{u}} \right) du = \frac{1}{4} \left[\frac{2}{3} u \sqrt{u} - 6 \sqrt{u} \right]_1^3 = \frac{4}{3} - \sqrt{3}.$$

Savoir-faire 5 : Savoir calculer l'intégrale d'une fonction paire ou impaire

ÉNONCÉ

Je calcule chacune des intégrales suivantes :

$$M = \int_{-5}^5 \frac{x^3}{x^2+4} dx \text{ et } N = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos x dx.$$

SOLUTION COMMENTÉE :

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \frac{x^3}{x^2+4}$ est impaire donc $M = \int_{-5}^5 \frac{x^3}{x^2+4} dx = 0$

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \cos x$ est paire donc

$$N = \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos x dx = 2 \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \cos x dx = 2 \left[\sin x \right]_0^{\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2}.$$

Savoir-faire 6 : *Savoir comparer deux intégrales*

ÉNONCÉ

Compare les intégrales $\int_0^1 x^2 + 1 dx$ et $\int_0^1 2x dx$ sans les calculer.

SOLUTION COMMENTÉE :

Pour tout nombre réel $x \in [0; 1]$, on a : $x^2 + 1 - 2x = (x+1)^2$ donc $x^2 + 1 - 2x \geq 0$ d'où $x^2 + 1 \geq 2x$.

Comme $x^2 + 1 \geq 2x \quad \forall x \in [0; 1]$, alors $\int_0^1 (x^2 + 1) dx \geq \int_0^1 2x dx$.

Savoir-faire 7 : *Savoir calculer l'intégrale d'une fonction trigonométrique*

ÉNONCÉ

Calcule les intégrales suivantes : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx$; $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^2 x dx$ et $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^6 x dx$.

SOLUTION COMMENTÉE :

$$\cos^5 x = \cos^2 x \cos^3 x = (1 - \sin^2 x) \cos^3 x = \cos^3 x - \sin^2 x \cos^3 x$$

$$\begin{aligned} &= (1 - \sin^2 x) \cos x - \sin^4 x \cos x (1 - \sin^2 x) \\ &= \cos x - \sin^2 x \cos x - \sin^2 x \cos x + \cos x \sin^4 x \end{aligned}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx = \left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \left[\frac{\sin^3 x}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{\sin^5 x}{5} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{2}{3} + \frac{2}{5} = \frac{2}{15}$$

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^2 x dx &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x \cos^2 x - \sin^3 x \cos^2 x) dx = \left[\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{17}{480} + \frac{\sqrt{2}}{120} \end{aligned}$$

Je calcule $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^6 x dx$: Par la linéarisation on obtient

$$\cos^6 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^6 = \frac{1}{16} (\cos 6x + 6 \cos 4x + 15 \cos 2x + 10)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^6 x dx &= \frac{1}{16} \left(\cos \pi + 6 \cos \frac{2\pi}{3} + 15 \cos \frac{\pi}{3} + 10 - (1 + 6 + 15 + 10) \right) \\ &= \frac{1}{16} (-1 + 3\sqrt{3} + \frac{15}{2} - 22) = \frac{3\sqrt{3}}{16} - \frac{31}{32} \end{aligned}$$

V- JE M'EXERCE

1- Exercices de fixation/ Application



Intégrale d'une fonction continue

Connaitre la définition d'une intégrale

1- f est une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ et F désigne une primitive de f sur $[a; b]$

A chaque affirmation réponds par Vrai si elle est correcte et réponds par Faux si elle est incorrecte.

1- On a : $\int_a^b f(x) dx = F(a) - F(b)$;

2- On a : $\int_b^a f(x) dx = F(a) - F(b)$;

3- On a : $\int_a^b f(x) dx = \left[F(x) \right]_a^b$.

1- f est une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ et F désigne une primitive de f sur $[a; b]$

A chaque affirmation réponds par Vrai si elle est correcte et réponds par Faux si elle est incorrecte.

1- On a : $\int_a^a f(x) dx = 0$;

2- On a : $\int_b^a f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$;

3- On a : $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$.

Connaitre les propriétés de l'intégrale

1- Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle K , a et b deux éléments de K .

F et G sont les primitives respectives de f et g et α un nombre réel

A chaque affirmation réponds par Vrai si elle est correcte et réponds par Faux si elle est incorrecte.

1- On a : $\int_a^b \alpha f(x) dx = F(b) - F(a)$;

2- On a : $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = F(b) - F(a) + G(b) - G(a)$;

3- On a : $\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(t) dt$.

4- On a : $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$

1- Pour chaque question trois réponses sont proposées dont une seule correcte. Ecris le numéro de la question et la lettre de la bonne réponse

1- Si f est une fonction continue sur un intervalle

K , a , b et c des éléments de K alors :

a) $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$;

b) $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c g(x) dx = \int_a^c f(x) dx$;

c) $\int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx = \int_a^c f(x) dx$;

2- Si f est une fonction continue sur un intervalle K , a et b deux éléments de K ($a < b$) alors la valeur moyenne de f sur $[a; b]$ est :

a) $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$;

b) $\frac{1}{b+a} \int_a^b f(x) dx$;

c) $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

3- Si f est une fonction impaire continue sur $\mathbb{R}$ alors pour tous nombres réels a et b , on a :

a) $\int_a^b f(x) dx = 0$;

b) $\int_a^a f(x) dx = 0$;

c) $\int_a^b f(x) dx = 0$.

1- Calcule la valeur moyenne de la fonction

$x \mapsto \tan x$ sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$.

1- Calcule la valeur moyenne de la fonction f définie sur $[0; \pi]$ par : $f(x) = x - \sin x$

1- Sachant que $\forall x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right], 1 \leq \frac{1}{\sin x} \leq \sqrt{2}$

détermine un encadrement de $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx$.

Intégrale d'une fonction continue

Connaitre la définition d'une intégrale

1- u et v sont deux fonctions dérivables telles que u' et v' sont continues sur un intervalle K , a et b deux éléments de K

A chaque affirmation réponds par Vrai si elle est correcte et réponds par Faux si elle est incorrecte. Soit la suite la suite définie deux éléments de $\mathbb{K}$.

$$1- \int_a^b u'(x)v(x)dx = \left[u(x)v(x) \right]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx;$$

$$2- \int_a^b u'(x)v(x)dx = \left[u(x)v(x) \right]_a^b + \int_a^b u(x)v'(x)dx;$$

$$3- \int_a^b u'(x)v(x)dx = \left[u(x)v(x) \right]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx;$$

$$4- \int_a^b u'(x)v(x)dx = \left[u'(x)v'(x) \right]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx;$$

3 A l'aide d'une intégration par parties calcule les intégrales suivantes

$$L = \int_0^1 (2x+1)e^{-x}dx; M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} x \sin 2x dx \text{ et}$$

$$N = \int_1^e (x+1) \ln x dx$$

Connaître la technique de changement de variable affine

10 Soit α et β deux nombres réels tels que $\alpha \neq 0$, f une fonction continue sur son ensemble de définition D_f telle que $\alpha x + \beta \in D_f$, a et b sont deux éléments de D_f .

A chaque affirmation réponds par Vrai si elle est correcte et réponds par Faux si elle est incorrecte.

$$1- \int_a^b f(\alpha x + \beta)dx = \frac{1}{\alpha} \int_a^b f(u)du \text{ où } u = \alpha x + \beta;$$

$$2- \int_a^b f(\alpha x + \beta)dx = \int_{\alpha a + \beta}^{\alpha b + \beta} f(u)du \text{ où } u = \alpha x + \beta;$$

$$3- \int_a^b f(\alpha x + \beta)dx = \frac{1}{\alpha} \int_{\alpha a + \beta}^{\alpha b + \beta} f(u)du \text{ où } u = \alpha x + \beta.$$

11 Calcule les intégrales suivantes à l'aide d'un changement de variable affine :

$$A = \int_0^1 x\sqrt{x+2}dx; B = \int_0^1 \frac{x^2+2}{x+1}dx$$

$$C = \int_0^1 x^2(1-x)^8dx \text{ et } D = \int_{-1}^1 \frac{x^2}{(3x-4)^3}dx$$

Calculer des intégrales de fonctions paires, impaires ou périodiques

12 Justifie chacune des égalités suivantes :

$$a) \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin(4x)dx = 0$$

$$b) \int_0^6 \frac{e^{2x}}{x^4+1}dx = 2 \int_0^6 \frac{e^{2x}}{x^4+1}dx$$

$$c) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^6 x dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \cos^6 x dx$$

13 Justifie l'égalité suivante :

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(4x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(4x)dx$$

Calculer une aire

14 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 2cm.

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ de représentation graphique (C) .

Calcule l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par (C) , (O) et les droites d'équations $x = -3$ et $x = -1$.

15 Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J) tel que $OI = 2 \text{ cm}$ et $OJ = 1 \text{ cm}$.

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ de représentation graphique (C) et (D) est la droite d'équation $y = x$.

1) Etudie le signe de $f(x) - x$ sur $[0; +\infty[$.

2) Calcule l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par (C) , (D) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

Etudier une fonction définie par une intégrale

16 Soit f la fonction dérivable définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \int_0^x t^2 e^{t^2} dt$$

1- Calcule $f(0)$

2- a) Calcule $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) Détermine le sens de variation de f .

3- Détermine le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .

2- Exercices de renforcement / Approfondissement

15 A chaque affirmation réponds par Vrai si elle est correcte sinon réponds par Faux.

1- Pour toute fonction paire f définie sur $\mathbb{R}$ on a :

$$\int_{-4}^4 f(x) dx = 0.$$

2- Pour toute fonction périodique f , de période 5,

$$\text{définie sur } \mathbb{R} \text{ on a } \int_{-2}^6 f(x) dx = \int_1^{11} f(x) dx$$

3- Pour toute fonction périodique f , de période 5,

$$\text{définie sur } \mathbb{R} \text{ on a } \int_{-2}^6 f(x) dx = \int_0^5 f(x) dx$$

4- Pour toute fonction périodique f , de période 5,

$$\text{définie sur } \mathbb{R} \text{ on a } \int_{-4}^1 f(x) dx = \int_0^5 f(x) dx$$

16 Calcule les intégrales suivantes :

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sqrt{1-x^2} dx$; b) $\int_e^{e^2} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx$; c) $\int_1^{-1} xe^{3x^2} dx$

17 On admet que pour tout nombre réel t positif, $1-t \leq \frac{1}{t+1} \leq (A)$ en utilisant (A), démontre que pour tout nombre réel positif x , $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(x+1) \leq x$

20 Soit $I = \int_0^5 \sqrt{1+x^2} dx$

1- Démontre que pour tout $x \in [0; 2]$,

$$1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq 2,3.$$

2- Déduis - en que $2 \leq I \leq 4,6$

21 Sans faire de calcul, donne (en justifiant) la valeur de chacune des intégrales suivantes :

a) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (x^3 - \tan x) dx$; b) $\int_{-1}^{\frac{1}{2}} \ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right) dx$

22 A l'aide d'une intégration par parties calcule les intégrales suivantes :

a) $\int_0^{\pi} (2x-1)\sin x dx$; b) $\int_{\frac{1}{e}}^2 \frac{\ln x}{x^2} dx$; c) $\int_0^1 (x+1)e^{2x} dx$

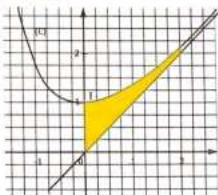
23 A l'aide de deux intégrations par parties calcule les intégrales suivantes :

a) $\int_0^1 x^2 e^{3x} dx$; b) $\int_1^e (\ln x)^2 dx$

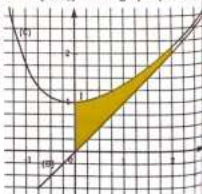
24 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 2cm et $f(x) = \ln x$. Calcule l'aire A en cm^2 de la partie du plan comprise entre (C_f) , (OI) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$

25 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité 1cm. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - 1$ et (C_f) est sa courbe représentative. (D) est la droite d'équation $y = x - 1$. Calcule l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par (C_f) , (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.

26 Sur la figure ci - dessous $(\mathcal{C})$ est la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^3 - 2x + 2$ dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) . Calcule l'aire en cm^2 de la partie hachurée du plan sur cette figure



27 Sur la figure ci - dessous (C) est la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x + e^x$ et (D) est la droite d'équation $y = x$ dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 2cm. Calcule l'aire en cm^2 de la partie hachurée du plan sur cette figure



3-Situation complexe

49 Lors d'une conférence prononcée dans un lycée par un médecin, des élèves de terminale C ont noté les informations suivantes :

« la capacité pulmonaire d'un être humain est la quantité d'air présente dans les poumons, mesurée à des fins diagnostiques lors d'une exploration fonctionnelle respiratoire,

Elle est exprimée en litres et dépend de plusieurs

facteurs dont l'âge. On peut la modéliser par la

fonction f telle que : $f(x) = \frac{110(\ln x - 2)}{x}$ où x désigne l'âge et $x \in [10; 90]$ »

Le conférencier affirme que la capacité pulmonaire moyenne entre 20 et 70 ans n'atteint pas 5l. En utilisant tes connaissances mathématiques sur les intégrales vérifie l'affirmation du médecin.



VI- RENDEZ-VOUS DES CURIEUX !

En mathématiques, l'**intégration** est le fait de calculer une **intégrale**. C'est aussi une des deux branches du **calcul infinitésimal**, appelée également **calcul intégral**, l'autre étant le **calcul différentiel**.

Le **calcul intégral** s'est développé au XVII^e siècle avec les travaux de **Bonavventura Cavalieri**, **Isaac Newton**, **Leibniz**... mais les prémices remontent à l'Antiquité, avec deux résultats dus à **Archimède** portant l'un sur l'aire du disque et l'autre sur l'aire du segment de parabole.

Les opérations de mesure de grandeurs (longueur d'une courbe, aire, volume, flux...) et de calcul de probabilités étant souvent soumises à des calculs d'intégrales, l'intégration est un outil scientifique fondamental. C'est la raison pour laquelle l'intégration est souvent abordée dès l'enseignement secondaire.

Les différents domaines dans lesquels peuvent se rencontrer des intégrales ont conduit à donner des définitions différentes de l'intégrale permettant d'en calculer pour des fonctions de moins en moins régulières. On rencontre ainsi les intégrales dites de **Riemann**, de **Lebesgue** ou de **Kurzweil-Henstock**. Mais toutes ces définitions coïncident dans le cas des fonctions continues.

Le symbole mathématique représentant l'intégration, $\int$, est appelé **signe somme**, **signe d'intégration**, **signe intégral** ou **intégrateur** ; il a été introduit par **Leibniz**.

(Source internet)

Notions essentielles :

- Série statistique à deux caractères ;
- Fréquences marginales ;
- Point moyen d'un nuage de points ;
- Covariance ;
- Droites de régression par la méthode des moindres carrés ;
- Coefficient de corrélation linéaire.

SITUATION D'APPRENTISSAGE

Les élèves de la promotion terminale d'un lycée effectuent une visite dans une entreprise afin de connaître le processus de fabrication du chocolat « Mango ».

Au service comptable, on leur remet une feuille sur laquelle figure le tableau ci-dessous où x_i représente le bilan des dépenses effectuées et y_i le bilan des bénéfices réalisés par l'entreprise après huit mois d'activités.

Numéro du mois	1	2	3	4	5	6	7	8
Dépenses x_i (en million de FCFA)	4,5	6,6	5,4	7,8	10,2	9	8,5	10,8
Bénéfices y_i (en million de FCFA)	1,2	3	1,8	3,4	5	4,5	4,2	6

Après une minutieuse analyse du tableau, un des élèves souhaite prévoir le bénéfice de l'entreprise si les dépenses s'élèvent à 15 000 000 FCFA et évaluer les dépenses si l'entreprise veut avoir un bénéfice de 10 000 000 FCFA.

Il expose son projet aux autres élèves qui le trouvent intéressant.

Les élèves de la promotion terminale décident donc de répondre à ces préoccupations en effectuant des calculs.



I- ACTIVITÉS DE DÉCOUVERTE



1- SÉRIE STATISTIQUE A DEUX CARACTÈRES

1.1- Connaître la définition d'une série statistique à deux caractères et les tableaux de fréquences marginales

ACTIVITÉ 1

On a relevé le nombre de voitures et le nombre d'écrans (télévisions et ordinateurs) en possession de 40 ménages d'un quartier.

Les résultats sont résumés dans le tableau ci-dessous :

nombre de voitures \ nombre d'écrans	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	2	2	1	2	0	0	1	0	0
1	1	4	3	2	2	3	3	1	1
2	0	0	1	0	0	2	2	2	1
3	0	0	0	1	0	0	1	1	0
4	0	0	0	0	1	0	0	0	0

- 1- a) Détermine le nombre de ménages qui ont deux voitures et deux écrans.

Nombre d'écrans (n_i)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Effectif (n_i)									
Fréquence (f_i)									

- b) Détermine le nombre de ménages qui ont trois voitures et sept écrans.

Nombre de voitures	0	1	2	3	4
Effectif (n_i)					
Fréquence (f_i)					

- c) Détermine le nombre de ménages qui n'ont aucun écran.

- d) Détermine le nombre de ménages qui ont une voiture.

- 2- Soit X le nombre d'écrans et Y le nombre de voitures.

- a) Détermine l'effectif de chaque modalité du caractère X puis complète le tableau ci-dessous.
b) Détermine l'effectif de chaque modalité du caractère Y puis complète le tableau ci-dessous.

Je fais le point de l'activité

- Le tableau 1 ci-dessus est un tableau statistique à double entrée.
- A chaque couple (x_i, y_j) de l'ensemble $X \times Y$, on associe un nombre qui correspond au nombre d'écrans et au nombre de voitures du ménage. Ce nombre est noté.
- L'ensemble des couples (x_i, y_j) définit une série statistique à deux caractères (ou une série statistique double) notée (x_i, y_j, n_{ij}) où n_{ij} est l'effectif du couple (x_i, y_j) .
- Le tableau linéaire ci-dessous associé au caractère X est appelée série marginale du caractère X.
- Le tableau linéaire ci-dessous associé au caractère Y est appelée série marginale du caractère Y.

l'évalue mes acquis



On donne le tableau à double entrée ci-dessous.

Dresse les tableaux des fréquences marginales associés à la série statistique double (x_i, y_i, n_{ij}) .

$x_i \backslash y_j$	0	1	2	3	4	5
1	6	4	1	0	0	0
2	3	11	10	5	1	0
3	1	3	16	13	4	1
4	0	1	3	5	8	4

2- NUAGE DE POINTS

2.1- Représenter un nuage de points et connaître la définition du point moyen

Activité 2

Le plan est muni d'un repère orthogonal.

- I- On considère le tableau ci-dessous de l'activité 1 de la série statistique double (x_i, y_i, n_{ij}) à caractères quantitatifs.

nombre d'écrans	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	2	2	1	2	0	0	1	0	0
1	1	4	3	2	2	3	3	1	1
2	0	0	1	0	0	2	2	2	1
3	0	0	0	1	0	0	1	1	0
4	0	0	0	0	1	0	0	0	0

- 1- Forme tous les couples (x_i, y_i) d'effectifs non nuls.
- 2- Représente ces couples formés dans le repère orthogonal.
 - a) Calcule la moyenne $\bar{x}$ de la série marginale (x_i, y_i) et la moyenne $\bar{y}$ de la série marginale (x_i, y_i) .
 - b) Place dans le repère précédent le point G de coordonnées $(\bar{x}, \bar{y})$.

- II- Lors d'une épreuve de

mathématiques au Baccalauréat série C, on a relevé au bout de combien de temps chacun des douze candidats présents a rendu sa copie et la note sur 20 obtenue. Les résultats sont résumés dans le tableau suivant :

Nombre d'écrans (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Effectif (n_i)	8	14	9	17	19	3	7	15	12	11	9	16
Fréquence (f_i)	2h	3h	2h	4h	3h	1h	3h	4h	3h	2h	3h	3h

- 1- Forme tous les couples (x_i, y_i) .
- 2- Représente ces couples formés dans le repère orthogonal.
- 3- a) Calcule la moyenne $\bar{x}$ de la série marginale (x_i, y_i) et la moyenne $\bar{y}$ de la série marginale (x_i, y_i) .
- b) Place dans le repère précédent le point G de coordonnées $(\bar{x}, \bar{y})$.

Je fais le point de l'activité

Soit deux caractères quantitatifs X et Y sur une même population d'effectif N.

On note $x_1, x_2, \dots, x_p$ les modalités du caractère X et $y_1, y_2, \dots, y_p$ les modalités du caractère Y.

• Dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) , l'ensemble des points de couple de coordonnées (x_i, y_i) d'effectifs non nuls est appelé nuage de points associé à la série statistique double caractère (X, Y) .

• On appelle point moyen d'un nuage de points de coordonnées (x_i, y_i) , le point G de coordonnées (x_G, y_G) tel que :

$$x_G = \bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_p x_p}{n_1 + n_2 + \dots + n_p} = \frac{\sum n_i x_i}{\sum n_i} = \frac{\sum n_i x_i}{N}$$

$$y_G = \bar{y} = \frac{n_1 y_1 + n_2 y_2 + \dots + n_p y_p}{n_1 + n_2 + \dots + n_p} = \frac{\sum n_i y_i}{\sum n_i} = \frac{\sum n_i y_i}{N}$$

J'évalue mes acquis



Lors d'une enquête dans une entreprise de la place, l'on a relevé le chiffre d'affaires exprimé en million de franc CFA pendant huit années consécutives. Les résultats sont résumés dans le tableau suivant :

Numéro d'année (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8
Chiffre d'affaire (y_i)	41	68	55	80	95	10	10	12

- 1- Représente le nuage de points de cette série statistique dans le plan muni d'un repère orthogonal.
Echelle : 1 cm pour 1 an en abscisse et 1 cm pour 20 ans en ordonnée.
- 2- Détermine les coordonnées du point moyen de cette série statistique puis, place-le dans le repère précédent

3- AJUSTEMENT LINEAIRE PAR LA METHODE DES MOINDRES CARRES

Dans cette partie, on considère une série statistique à deux caractères quantitatifs notée (x_i, y_i, n_{ij}) où $n_{ij} = 1$.

n_{ij} est l'effectif du couple (x_i, y_j) et N est l'effectif total de cette série double.

3.1 Connaître la formule de la covariance

ACTIVITÉ 3

Le tableau suivant donne la taille y_i (en cm) d'un jeune enfant selon son âge x_i (en mois).

Age x_i (en mois)	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33
Taille y_i (en cm)	66	71	74	77	80	83	85	88	90	92

- 1- Calcule la moyenne $\bar{x}$ de la série $(x_i, 1)$ et la moyenne $\bar{y}$ de la série $(y_i, 1)$.
- 2 Calcule : $\frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^p n_{ij} x_i y_i \right) - \bar{x} \bar{y} = \frac{1}{N} (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_p y_p) - \bar{x} \bar{y}$; $n_y = 1$.
- 3- Justifie que : $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_{ij} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^p n_{ij} x_i y_i \right) - \bar{x} \bar{y}$

Je fais le point de l'activité

On considère une série statistique double (x_i, y_i) à deux caractères quantitatifs (X, Y) d'effectif total N .

• Le nombre réel $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_{ij} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$, noté $\text{Cov}(X; Y)$, est appelé covariance de la série statistique double de caractère $(X; Y)$.

• $\text{Cov}(X; Y) = \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^p n_{ij} x_i y_i \right) - \bar{x} \bar{y}$

J'évalue mes acquis



Calcule la covariance de la série statistique suivante :

Numéro d'année (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8
Chiffre d'affaire (y_i)	41	68	55	80	95	10	10	12

3.2 Droites de régression par la méthode des moindres carrés

Activité 4 (Droite de régression de Y en X)

1- On considère la série statistique double suivante :

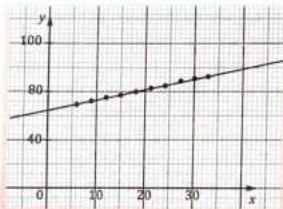
x_i	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33
y_i	1	2	3	4	5	6	7	8		

a) Représente le nuage de points de cette série statistique double dans le plan muni d'un repère orthogonal.

b) Donne une conjecture concernant ce nuage de points.

2- Soit $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq N}$ une série statistique à deux caractères X et Y telle que $V(X) \neq 0$.On se propose de déterminer une droite (Δ) qui passe le plus près possible des points de ce nuage.Soit $(\Delta) : y = ax + b$. On note $M_i(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq N}$ les points de ce nuage et A_i le point de même abscisse x_i que M_i situé sur la droite (Δ) .On pose : $e_i = M_i A_i$ (l'écart absolu qui mesure la distance entre les points M_i et A_i et $\sum_{i=1}^N e_i^2$, la somme des distances des carrées de M_i à A_i , $\sum_{i=1}^N e_i^2 = \sum_{i=1}^N [y_i - (ax_i + b)]^2$).Justifie que : $\sum_{i=1}^N e_i^2 = Nb^2 - 2b \sum_{i=1}^N (y_i - ax_i) + \sum_{i=1}^N (y_i - ax_i)^2$ 3-a) On fixe a . Justifie que cette somme est minimale pour $b = \bar{y} - a\bar{x}$.b) Dédus de la question précédente que le point moyen G appartient à la droite (Δ) .4- On suppose que : $b = \bar{y} - a\bar{x}$.a) Justifie que : $\sum_{i=1}^N e_i^2 = a^2 \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 - 2a \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) + \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2$.b) Justifie que cette somme est minimale pour $a = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$ b) Dédus une expression de a en fonction de $\text{Cov}(X, Y)$ et $V(X)$.

Je fais le point de l'activité

• Soit $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq N}$ une série statistique à deux caractères X et Y telle que $V(X) \neq 0$.• La droite (Δ) qui permet le meilleur ajustement linéaire de ce nuage a pour équation

$$y = ax + b \text{ où } a = \frac{\text{Cov}(X; Y)}{V(X)} \text{ et } b = \bar{y} - a\bar{x}.$$

• La droite (Δ) passe par le point moyen $G(\bar{x}; \bar{y})$ du nuage.• La droite (Δ) est appelée droite des moindres carrées ou droite de régression de Y en X.

J'évalue mes acquis



On considère la série statistique suivante :

Numéro d'année (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8
Chiffre d'affaire (y_i)	41	68	55	80	95	10	10	12

- Détermine, par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite de régression de Y en X.
- a) Représente le nuage de points associé à cette série statistique.
b) Trace la droite de régression de Y en X.

ACTIVITÉ 5 (DROITE DE RÉGRESSION DE X EN Y)

Soit $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq N}$ une série statistique à deux caractères X et Y telle que $V(Y) \neq 0$.

On se propose de déterminer une droite (Δ') qui passe le plus près possible des points de ce nuage. Soit $(\Delta') : x = a'y + b'$. On note $M_i(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq N}$, les points de ce nuage et A'_i le point de même ordonnée y_i que M_i situé sur la droite (Δ') .

On pose : $e'_i = M_i A'_i$, (l'écart absolu qui mesure la distance entre les points M_i et A'_i et $\sum_{i=1}^N e'^2_i$, la somme des distances des carrées de M_i à A'_i , $(\sum_{i=1}^N e'^2_i = \sum_{i=1}^N [y_i - (ax_i + b)]^2$).

- Justifie que : $\sum_{i=1}^N e'^2_i = Nb'^2 - 2b' \sum_{i=1}^N (x_i - a'y_i) + \sum_{i=1}^N (x_i - a'y_i)^2$.
- a) On fixe a' . Justifie que cette somme est minimale pour $b' = \bar{x} - a'\bar{y}$.
b) Dédus de la question précédente que le point moyen G appartient à la droite (Δ') .
- On suppose que : $b' = \bar{x} - a'\bar{y}$.

a) Justifie que : $\sum_{i=1}^N e'^2_i = a'^2 \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 - 2a' \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x}) + \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$.

b) Justifie que cette somme est minimale pour $a' = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}$.

Dédus une expression de a' en fonction de $\text{Cov}(X, Y)$ et $V(Y)$.

Je fais le point de l'activité

Soit $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq N}$ une série statistique à deux caractères X et Y telle que $V(Y) \neq 0$.

- La droite (Δ') qui permet le meilleur ajustement linéaire de ce nuage a pour équation

$$x = a'y + b' \text{ où } a' = \frac{\text{Cov}(X; Y)}{V(Y)} \text{ et } b' = \bar{x} - a'\bar{y}.$$

- La droite (Δ') passe par le point moyen $G(x; y)$ du nuage.
- La droite (Δ') est appelée droite des moindres carrés ou droite de régression de X en Y.

J'évalue mes acquis



On considère la série statistique suivante :

Numéro d'année (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8
Chiffre d'affaire (y_i)	41	68	55	80	95	10	10	12

- Détermine, par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite de régression de X en Y.
- Trace la droite de régression de X en Y.

3.3- Coefficient de corrélation linéaire

ACTIVITÉ 6

Le tableau suivant donne la taille y_1 (en cm) d'un jeune enfant selon son âge x_1 (en mois).

Soit r le nombre réel défini par : $r = \frac{\text{Cov}(X;Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$

Age x_1 (en mois)	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33
Taille y_1 (en cm)	66	71	74	77	80	83	85	88	90	92

- 1-
 - a) Justifie que : $r = \frac{\text{Cov}(X;Y)}{\sigma(X) \times \sigma(Y)}$ où $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$ désignent respectivement les écarts-types des caractères X et Y .
 - b) Détermine le signe de r .
- 2- Soit $(\Delta) : y = ax + b$ et $(\Delta') : x = a'y + b'$ les droites de régression respectives de X en Y et de Y en X .
 - a) Justifie que : $r^2 = a \times a'$ puis déduis-en $|r|$.
 - b) Détermine la valeur de r lorsque les droites de régression sont confondues.
- 3
 - a) En utilisant les résultats des activités 3 et 4, calcule r .
 - b) $|r|$ est-il proche de 1 ?
 - c) Vérifie que : $r \notin]-1; -0,87]$ et $r \notin [0,87; 1[$.

Je fais le point de l'activité

- Le nombre réel r défini par : $r = \frac{\text{Cov}(X;Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = \frac{\text{Cov}(X;Y)}{\sigma(X) \times \sigma(Y)}$ est appelé coefficient de corrélation linéaire de la série double $(X; Y)$.
- En général, lorsque $0,87 \leq |r| < 1$, c'est-à-dire $-1 < r \leq -0,87$ ou $0,87 \leq r < 1$, on dit qu'il y a une forte corrélation.

J'évalue mes acquis



On considère la série statistique double suivante :

Numéro d'année (x_1)	1	2	3	4	5	6	7	8
Chiffre d'affaire (y_1)	41	68	55	80	95	10	10	12

- 1- Calcule le coefficient de corrélation linéaire de cette série statistique double.
- 2- Interprète le coefficient de corrélation linéaire ci-dessus.

II- RÉSUMÉ DE COURS



1- SÉRIE STATISTIQUE À DEUX CARACTÈRES

Définition

Soit deux caractères quantitatifs X et Y sur une même population d'effectif N .

On note $x_1, x_2, \dots, x_p$ les modalités du caractère X ; $y_1, y_2, \dots, y_m$ les modalités du caractère Y et n_{ij} l'effectif du couple (x_i, y_j) .

On appelle série statistique double de caractère (X, Y) , l'ensemble des triplets (x_i, y_j, n_{ij}) .

Tableau à double entrée - Séries statistiques marginales

Soit deux caractères quantitatifs X et Y sur une même population d'effectif N .

On note $x_1, x_2, \dots, x_p$ les modalités du caractère X ; $y_1, y_2, \dots, y_m$ les modalités du caractère Y et n_{ij} l'effectif du couple (x_i, y_j) .

Exemple :

- Le tableau ci-dessous est un tableau statistique à double entrée.

$y_i \backslash x_j$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Total
y_1	0	2	2	1	3	2	10
y_2	0	4	0	2	1	0	7
y_3	2	0	1	0	2	2	
y_4	2	2	3	0	0	1	
Total	4	8	6	3	6	5	32

- Le tableau linéaire ci-dessous associé au caractère X est appelée série marginale du caractère X.

x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Total
Effectif (n_j)	4	8	6	3	6	5	32

(On additionne les nombres d'une même colonne du tableau)

- Le tableau des fréquences marginales de X est donc :

x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Total
Fréquence (f_j)	$\frac{4}{32}$	$\frac{8}{32}$	$\frac{6}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{6}{32}$	$\frac{5}{32}$	1

(La fréquence d'une modalité est l'effectif de la modalité sur l'effectif total)

- Le tableau linéaire ci-dessous associé au caractère Y est appelée série marginale du caractère Y.

y_i	y_1	y_2	y_3	y_4	Total
Effectif (n_i)	10	7	7	8	32

(On additionne les nombres d'une même ligne du tableau)

- Le tableau des fréquences marginales de Y est donc :

y_i	y_1	y_2	y_3	y_4	Total
Fréquence (f_i)	$\frac{10}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{8}{32}$	1

2- NUAGE DE POINTS

2.1-Nuage de points

Le plan est muni d'un repère orthogonal.

DÉFINITION

Soit deux caractères quantitatifs X et Y sur une même population d'effectif N.

On note $x_1, x_2, \dots, x_p$ les modalités du caractère X et $y_1, y_2, \dots, y_m$ les modalités du caractère Y.

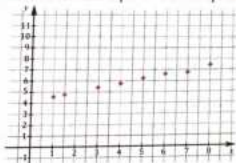
On appelle nuage de points associé à la série statistique double de caractère (X, Y) les points

Exemple

Le tableau ci-dessous donne l'évolution, par tranche de cinq ans, de la population mondiale (en milliards) entre 1980 et 2015.

Année	1980	1985	1990	1995	2000	2005	2010	2015
Rang de l'année (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre d'habitants en milliards (y_i)	4,4	4,8	5,3	5,7	6,1	6,5	6,8	7,3

Le nuage de points associé à cette série statistique double est représenté ci-dessous.



2.2- Point moyen

DÉFINITION

On appelle point moyen d'un nuage de points de coordonnées (x_i, y_i) , le point G de coordonnées (x_G, y_G) tel que :

$$x_G = \bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_p x_p}{n_1 + n_2 + \dots + n_p} = \frac{\sum n_i x_i}{\sum n_i} = \frac{\sum n_i x_i}{N} \quad (\bar{x} \text{ est la moyenne de la série } (x_i, n_i))$$

$$\text{et } y_G = \bar{y} = \frac{n_1 y_1 + n_2 y_2 + \dots + n_p y_p}{n_1 + n_2 + \dots + n_p} = \frac{\sum n_i y_i}{\sum n_i} = \frac{\sum n_i y_i}{N} \quad (\bar{y} \text{ est la moyenne de la série } (y_i, n_i))$$

EXEMPLE

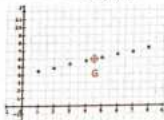
Le tableau ci-dessous donne l'évolution, par tranche de cinq ans, de la population mondiale (en milliards) entre 1980 et 2015.

Année	1980	1985	1990	1995	2000	2005	2010	2015
Rang de l'année (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre d'habitants en milliards (y_i)	4,4	4,8	5,3	5,7	6,1	6,5	6,8	7,3

Les coordonnées du point moyen G sont :

$$\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5+6+7+8}{8} = 4,5 \quad \text{et} \quad \bar{y} = \frac{4,4 + 4,8 + 5,3 + 5,7 + 6,1 + 6,5 + 6,8 + 7,3}{8} = 5,8625$$

Donc G a pour coordonnées (4,5; 5,8625).



3- AJUSTEMENT LINÉAIRE PAR LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS

Dans la suite de la leçon, on prendra des séries statistiques doubles dont l'effectif du couple (x_i, y_i) est égal à 1.

3.1-Covariance

DÉFINITION

On considère une série statistique double (x_i, y_i) de caractère quantitatifs (X, Y) d'effectif total N.

On appelle covariance de (x_i, y_i) le nombre réel noté $\text{Cov}(X, Y)$ et défini par :

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n n_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \quad \text{ou} \quad \text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^n n_i x_i y_i \right) - \bar{x} \bar{y}$$



Si les n_{ij} valent 1, on obtient : $\text{Cov}(X; Y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N n_{ij} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
 ou $\text{Cov}(X; Y) = \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N n_{ij} x_i y_i \right) - \bar{x} \bar{y}$

EXEMPLE

Reprenons le tableau qui donne l'évolution, par tranche de cinq ans, de la population mondiale (en milliards) entre 1980 et 2015.

On a : $\text{Cov}(X; Y) = \frac{1}{N} (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_p y_p) - \bar{x} \bar{y}$

$$\text{Cov}(X; Y) = \frac{1 \times 4,4 + 2 \times 4,8 + 3 \times 5,3 + 4 \times 5,7 + 5 \times 6,1 + 6 \times 6,5 + 7 \times 6,8 + 8 \times 7,3}{8} - 4,5 \times 5,8625$$

$$\text{Cov}(X; Y) = \frac{228,2}{8} - 26,38125$$

Donc : $\text{Cov}(X; Y) = 2,14375$

3.2- Droites de régression par la méthode des moindres carrés

On considère un nuage de points associé à une série statistique double dans le plan muni d'un repère orthogonal.

Faire un ajustement de ce nuage de points, c'est déterminer une courbe qui passe le plus près possible du maximum de points de ce nuage.

Lorsque cette courbe est une droite, on dit que l'ajustement est linéaire ou affine

DÉFINITION

Soit $\{x_i, y_i\}_{1 \leq i \leq N}$ une série statistique à deux caractères X et Y d'effectif N.

Soit $V(X)$ la variance de la série statistique de caractère X et $V(Y)$ la variance de la série statistique de caractère Y telles que $V(X) \neq 0$ et $V(Y) \neq 0$.

- La droite (Δ) qui permet le meilleur ajustement linéaire de ce nuage a pour équation :

$$y = ax + b \text{ où } a = \frac{\text{Cov}(X; Y)}{V(X)} \text{ et } b = \bar{y} - a\bar{x}$$

La droite (Δ) est appelée droite de régression de Y en X par la méthode des moindres carrés. La droite (Δ) passe par le point moyen $G(x; y)$ du nuage.

- La droite (Δ') qui permet le meilleur ajustement linéaire de ce nuage a pour équation

$$x = a'y + b' \text{ où } a' = \frac{\text{Cov}(X; Y)}{V(Y)} \text{ et } b' = \bar{x} - a'\bar{y}$$

La droite (Δ') est appelée droite de régression de X en Y par la méthode des moindres carrés. La droite (Δ') passe par le point moyen $G(x; y)$ du nuage.

Exemple

Reprenons le tableau qui donne l'évolution, par tranche de cinq ans, de la population mondiale (en milliards) entre 1980 et 2015.

On a : $x = 4,5$; $y = 5,8625$ et $\text{Cov}(X; Y) = 2,14375$. Calculons $V(X)$ et $V(Y)$.

$$V(X) = \frac{1}{N} \sum (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{N} \sum x_i^2 - (\bar{x})^2 ; V(X) = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2}{8} - 4,5^2 = 5,25$$

$$V(Y) = \frac{1}{N} \sum (y_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{N} \sum y_i^2 - (\bar{y})^2 ; V(Y) = \frac{4,4^2 + 4,8^2 + 5,3^2 + 5,7^2 + 6,1^2 + 6,5^2 + 6,8^2 + 7,3^2}{8} - (5,8625)^2 =$$

0,8 (arrondi d'ordre 1)

- La droite, (Δ) , de régression de Y en X a pour équation : $y = ax + b$ où $a = \frac{\text{Cov}(X; Y)}{V(X)}$ et $b = \bar{y} - a\bar{x}$.

$$\text{On a : } a = \frac{\text{Cov}(X; Y)}{V(X)} = \frac{2,14375}{5,25} = 0,4 \text{ et } b = 5,8625 - 0,4 \times 4,5 = 4,1 \text{ (arrondis d'ordre 1 de } a \text{ et de } b).$$

Donc, $(\Delta) : y = 0,4x + 4,1$.

- La droite, (Δ') , de régression de X en Y a pour équation $x = a'y + b'$ où $a' = \frac{\text{Cov}(X;Y)}{V(Y)}$ et $b' = x - a'y$.

On a : $a' = \frac{\text{Cov}(X;Y)}{V(Y)} = \frac{2,14375}{0,8} = 2,6$ et $b' = 4,5 - 2,6 \times 5,8625 = -10,7$ (arrondis d'ordre 1 de a' et de b').

Donc, $(\Delta') : x = 2,6y - 10,7$.

- Traçons (Δ) et (Δ') .



Droite de régression de Y en X ,



Droite de régression de X en Y



Il est possible de faire une prévision de la valeur de y connaissant celle de x en utilisant l'équation de la droite de régression de y en fonction de x . De même, on peut déterminer la valeur de x connaissant celle de y .

3.4- Coefficient de corrélation linéaire

DÉFINITION

On considère une série statistique double (x_i, y_i) .

Soit $\text{Cov}(X; Y)$ la covariance de la série double $(X; Y)$, $V(X)$ la variance de la série statistique de caractère X et $V(Y)$ la variance de la série statistique de caractère Y telles que $V(X) \neq 0$ et $V(Y) \neq 0$.

On appelle coefficient de corrélation linéaire de cette série le nombre réel r tel que :

$$r = \frac{\text{Cov}(X; Y)}{\sqrt{V(X) V(Y)}} \text{ ou encore } r = \frac{\text{Cov}(X; Y)}{\sigma(X) \sigma(Y)}$$

($\sigma(X)$ est l'écart-type du caractère X et $\sigma(Y)$ l'écart-type du caractère Y).



Soit $(\Delta) : y = ax + b$ et $(\Delta') : x = a'y + b'$ les droites de régression respectives de X en Y et de Y en X .

- Le coefficient de corrélation linéaire r a le même signe que $\text{Cov}(X; Y)$.
- $r^2 = a \times a'$; donc : $|r| = \sqrt{a \times a'}$. Donc :
 - Si $a > 0$ et $a' > 0$ alors $r = \sqrt{aa'}$
 - Si $a < 0$ et $a' < 0$ alors $r = -\sqrt{aa'}$
- Le coefficient de corrélation linéaire r de la série double $(X; Y)$ mesure l'intensité de la liaison entre les caractères X et Y .
- Lorsque les droites (Δ) et (Δ') sont confondues, $a = \frac{1}{a'}$ et $r^2 = 1$. On dit que l'ajustement linéaire est parfait.
- Lorsque $|r|$ est proche de 1, on dit qu'il y a une forte (ou bonne) corrélation entre les caractères X et Y .
- En général, lorsque, c'est-à-dire $-1 < r \leq -0,87$ ou $0,87 \leq r < 1$, on dit qu'il y a une forte corrélation.

Exemple

Reprenons le tableau qui donne l'évolution, par tranche de cinq ans, de la population mondiale (en milliards) entre 1980 et 2015.

Le coefficient de corrélation linéaire r de cette série est : $r = \frac{\text{Cov}(X; Y)}{\sqrt{V(X)} \sqrt{V(Y)}}$

On a : $V(X) = 5,25$; $V(Y) = 0,8$ et $\text{Cov}(X; Y) = 2,14375$.

$$r = \frac{\text{Cov}(X; Y)}{\sqrt{V(X)} \sqrt{V(Y)}} = \frac{\text{Cov}(X; Y)}{\sqrt{5,25} \sqrt{0,8}}$$

Donc, $r \approx 1$.

L'ajustement linéaire est parfait et on remarque que les droites de régression sont presque confondues.

III-**MÉTHODE**

- **Déterminer les moyennes $\bar{x}$ et $\bar{y}$, les variances $V(X)$ et $V(Y)$, la covariance $\text{Cov}(X, Y)$ de la série statistique double (X, Y)**

Pour déterminer la moyenne $\bar{x}$ et la variance $V(X)$ du caractère X , la moyenne $\bar{y}$ et la variance $V(Y)$ du caractère Y , et la covariance $\text{Cov}(X, Y)$ de la série statistique double (X, Y) d'effectif N , on peut procéder de la façon suivante :

- établir un tableau de calcul qui résume la somme des x_i , y_i , x_i^2 , y_i^2 et $x_i y_i$ selon le modèle ci-dessous

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
x_1	y_1	x_1^2	y_1^2	$x_1 y_1$
x_2	y_2	x_2^2	y_2^2	$x_2 y_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	y_n	x_n^2	y_n^2	$x_n y_n$
$\sum_{i=1}^n x_i$	$\sum_{i=1}^n y_i$	$\sum_{i=1}^n x_i^2$	$\sum_{i=1}^n y_i^2$	$\sum_{i=1}^n x_i y_i$

$$\bullet \quad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{N} ; \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{N}$$

$$\bullet \quad V(X) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{N} - \bar{x}^2 ; V(Y) = \frac{\sum_{i=1}^n y_i^2}{N} - \bar{y}^2$$

$$\bullet \quad \text{Cov}(X; Y) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{N} - \bar{x} \bar{y}$$

- **Déterminer une équation de la droite de régression de Y en X**

Pour déterminer une équation de la droite de régression de Y en X (de la forme $y = ax + b$) par la méthode des moindres carrés, on peut procéder comme suit :

- on calcule les moyennes $\bar{x}$ et $\bar{y}$ des séries statistiques de caractères X et Y ;
- on calcule la variance de la série statistique de caractères X ;
- on calcule la covariance, de la série statistique double $(X; Y)$;
- on détermine $a : a = \frac{\text{Cov}(X; Y)}{V(X)}$;
- on détermine $b : b = \bar{y} - a\bar{x}$;
- on remplace a et b par leurs valeurs dans l'équation $y = ax + b$;
- on conclut.

- **Déterminer une équation de la droite de régression de X en Y**

Pour déterminer une équation de la droite de régression de X en Y (de la forme $x = a'y + b'$) par la méthode des moindres carrés, on peut procéder comme suit :

- on calcule les moyennes $\bar{x}$ et $\bar{y}$ des séries statistiques de caractères X et Y ;
- on calcule la variance de la série statistique de caractère Y ;
- on calcule la covariance, de la série statistique double $(X; Y)$;
- on détermine $a' : a' = \frac{\text{Cov}(X; Y)}{V(Y)}$;

n conclut.

• **Calculer le coefficient de corrélation linéaire**

Soit (D) : $y = ax + b$ et (D') : $x = a'y + b'$ les droites de régressions de la série double (X, Y).

Pour calculer le coefficient de corrélation linéaire r entre les caractères quantitatifs X et Y, on peut utiliser l'une des formules suivantes :

- $r = \frac{\text{Cov}(X; Y)}{\sqrt{V(X)} \sqrt{V(Y)}} ;$
- $r = \sqrt{a \times a'} ;$ si a et a' sont strictement positifs ;
- $r = -\sqrt{a \times a'} ;$ si a et a' sont strictement négatifs.

• **Justifier l'existence d'une forte corrélation entre deux caractères quantitatifs**

Pour justifier qu'il existe une forte corrélation linéaire (ou une bonne corrélation linéaire) entre deux caractères quantitatifs X et Y, on peut procéder comme suit :

- on calcule le coefficient de corrélation linéaire r de la série double (X ; Y) ;
- on vérifie que $|r| \geq 0,87$ c'est-à-dire : $-1 < r \leq -0,87$ ou $0,87 \leq r < 1$.

IV- SAVOIR-FAIRE



A travers l'énoncé ci-dessous, nous allons étudier une série statistique à double caractère

ÉNONCÉ

Lors d'une étude statistique sur deux caractères quantitatifs, l'on a relevé les données suivantes :

X	5	6	9	12	18
Y	25	30	35	45	65

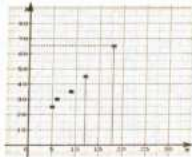
Savoir-faire 1- Représenter un nuage de points

ÉNONCÉ

Représente le nuage de points associé à la série statistique ci-dessus.

SOLUTION COMMENTÉE

Je représente le nuage de points



Savoir-faire 2- Calculer les coordonnées du point moyen

ÉNONCÉ

Calcule les coordonnées du point moyen G puis place G dans le repère précédent.

SOLUTION COMMENTÉE

J'établis le tableau de calculs ci-dessous.

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
5	25	25	625	125
6	30	36	900	180
9	35	81	1225	315
12	45	144	2025	540
18	65	324	4225	1170
Total	50	200	6100	2330

Ce tableau nous permettra de faire les calculs de façon efficace.

Je calcule la moyenne du caractère X et la moyenne du caractère Y.

Soit $\bar{x}$ la moyenne du caractère X et $\bar{y}$ la moyenne du caractère Y. On a :

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{5} = \frac{50}{5} \text{ d'où } \bar{x} = 10 \text{ et } \bar{y} = \frac{\sum y_i}{5} = \frac{200}{5} \text{ d'où } \bar{y} = 40.$$

Or $G(x, y)$, donc $G(10, 40)$.

Je place le pont moyen G dans le repère ci-contre.



Savoir-faire 3 : Calculer les variances et les écart-types de X et de Y

Énoncé

Calcule la variance $V(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$ du caractère X.

Calcule la variance $V(Y)$ et l'écart-type $\sigma(Y)$ du caractère Y.

Solution commentée

Je calcule la variance $V(X)$ du caractère X et la variance $V(Y)$ du caractère Y.

$$\text{On sait que } V(X) = \frac{\sum x_i^2}{N} - (\bar{x})^2 \text{ et } V(Y) = \frac{\sum y_i^2}{N} - (\bar{y})^2.$$

Or d'après le tableau de calculs établi ci-dessus, on a : $\sum x_i^2 = 610$ et $\sum y_i^2 = 9000$.

$$\text{Donc : } V(X) = \frac{610}{5} - 10^2 = 22 \text{ et } V(Y) = \frac{9000}{5} - 40^2 = 200.$$

Je calcule l'écart-type $\sigma(X)$ du caractère X et l'écart-type $\sigma(Y)$ du caractère Y.

$$\text{On a : } \sigma(X) = \sqrt{V(X)} \text{ et } \sigma(Y) = \sqrt{V(Y)}.$$

Donc : $\sigma(X) = \sqrt{22} = 4,69$ (arrondi d'ordre 2) et $\sigma(Y) = \sqrt{200} = 14,14$ (arrondi d'ordre 2).

Savoir-faire 4 : Calculer la covariance de la série double (X, Y)

Énoncé

Calcule la covariance $\text{Cov}(X; Y)$ de la série statistique (X ; Y).

Solution commentée

Je calcule la covariance $\text{Cov}(X; Y)$ de la série statistique double (X, Y).

$$\text{On sait que : } \text{Cov}(X; Y) = \frac{\sum x_i y_i}{N} - \bar{x} \bar{y}.$$

On a, d'après le tableau de calculs établi précédemment $\sum x_i y_i = 2330$.

$$\text{D'où : } \text{Cov}(X; Y) = \frac{2330}{5} - (10 \times 40), \text{ par conséquent : } \text{Cov}(X, Y) = 66.$$

Savoir-faire 5 : Calculer le coefficient de corrélation linéaire r et interpréter le résultat

Énoncé

Calcule le coefficient de corrélation linéaire r de cette série statistique double.

Interprète ce résultat.

Solution commentée

Je calcule le coefficient de corrélation linéaire r de la série statistique double (X ; Y)

$$\text{On a : } r = \frac{\text{Cov}(X; Y)}{\sqrt{V(X)} \sqrt{V(Y)}} ; \text{ par conséquent, } r = \frac{66}{\sqrt{22 \times 200}} \text{ donc } r = 0,99 \approx 1$$

J'interprète le résultat

On a : $r \approx 1$ donc la corrélation linéaire entre les caractères X et Y est parfaite (ou très forte).

Savoir-faire 6 : Déterminer, par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite de régression de y en x et celle de x en y

Énoncé

Détermine une équation de la droite de régression de y en x.

Détermine une équation de la droite de régression de x en y.

Construis ces deux droites dans le même repère que celui du nuage de points.

SOLUTION COMMENTÉE

Je détermine une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés.

Une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés est :

$$y = ax + b \text{ avec } a = \frac{\text{Cov}(X; Y)}{V(X)} \text{ et } b = \bar{y} - a\bar{x}.$$

$$\text{On a : } a = \frac{66}{22} = 3 \text{ et } b = 40 - (3 \times 10) = 10.$$

Donc une équation de la droite de régression de y en x est : $y = 3x + 10$.

Je détermine une équation de la droite de régression de x en y par la méthode des moindres carrés.

Une équation de la droite de régression de x en y par la méthode des moindres carrés est : $x = a'y + b'$

$$\text{avec } a' = \frac{\text{Cov}(X; Y)}{V(Y)} \text{ et } b' = \bar{x} - a'\bar{y}$$

$$\text{On a : } a' = \frac{66}{200} = 0,33 \text{ et } b' = 10 - (0,33 \times 40) = -3,2$$

Donc une équation de la droite de régression de x en y par la méthode des moindres carrés est : $x = 0,33y - 3,2$.

Je construis la droite de régression de y en x et la droite de régression de x en y .

Soit (D) la droite de régression de y en x et (D') la droite de régression de x en y .

Ici les droites (D) et (D') sont confondues car nous avons une parfaite corrélation linéaire entre X et Y ($r = 0,99 \approx 1$)



V- JE M'EXERCE

1- Exercices de fixation/ Application



Etablir les séries marginales à partir d'un tableau à double entrée représentant une série statistique double

1 70 candidats se sont présentés à un concours scientifique d'une région comportant une épreuve de Mathématiques et une épreuve de Physique-Chimie.

Le tableau statistique ci-contre donne le nombre de candidats ayant obtenu un couple de notes donné.

On désigne par $X = (x_i)$

la série statistique des

notes de Mathématiques (M) et par $Y = (y_i)$

celle des notes de Physique-Chimie (PC).

1- Détermine les séries statistiques marginales.

2 Dédus-en les tableaux des fréquences marginales.

$y_i \backslash x_i$	2	6	10	14	18
6	4	2	1	0	0
8	2	5	2	0	0
10	1	6	18	5	2
12	0	2	3	7	3
14	0	1	0	2	4

du point moyen et calculer les coordonnées du point moyen

3 En prévision au lancement d'un produit, une société a effectué une enquête auprès d'éventuels clients afin de fixer le prix de vente de ce produit. Le tableau ci-dessous donne le nombre d'éventuels acheteurs en fonction du prix de vente en FCFA.

$x_i \backslash y_i$	9	10	11	12	13	14	15	16
120	100	90	70	60	50	40	30	

Représente le nuage de points.

4 Soit $(x_i; y_i)$ une série statistique double à deux caractères quantitatifs X et Y d'effectif N .

$\bar{x}$ la moyenne de la série statistique X et $\bar{y}$ celle de Y . $V(X)$ la variance de la série statistique X et $V(Y)$ celle de Y .

On note G le point moyen de la série statistique double $(x_i; y_i)$.

Réponds par vrai (V) ou par faux (F) à chacune des affirmations suivantes :

Représenter un nuage de points - Connaître la définition

N°	Affirmations	Réponse
1	Le point G a pour coordonnées $(\bar{X}; \bar{Y})$	
2	Le point G a pour coordonnées $(V(X); V(Y))$	
3	Le point G a pour coordonnées $(\bar{X}; \bar{Y})$	
4	L'abscisse du point G est toujours positive.	
5	Le point G est toujours un point du nuage de	

3 Le tableau suivant donne l'évolution de la température y_i (en degré Celsius) en fonction de l'année x_i depuis 1974 dans une ville de Côte d'Ivoire.

Années	1974	197	198	198	199	199	199
Rang de l'années	1	2	3	4	5	6	7
Température (y_i)	19,1	19,7	19,6	20	20,6	20,8	20,9

Calcule les coordonnées du point moyen de la série $(X; Y)$.

3 Le tableau suivant donne les hauteurs y_i (en centimètres) d'une plante mesurée tous les trois jours à midi du 1er janvier au 16 janvier de l'année 2020.

Jours x_i	1	24	7	410	13	16
y_i	6,5	8,4	12	15,4	19,7	

La hauteur mesurée le jour 16 a été effacée par inadvertance, mais on sait que le point moyen a pour ordonnée 14,5. Détermine cette hauteur.

Connaître la formule de la covariance et calculer la covariance

3 Soit une série statistique double $(x_i; y_i)$ d'effectif total N . On note $\bar{x}$ et $\bar{y}$ les moyennes respectives des séries X et Y ; $V(X)$ et $V(Y)$ les variances respectives des séries X et Y .

La covariance de la série statistique $(X; Y)$ est notée $\text{Cov}(X; Y)$.

Réponds par Vrai ou par Faux à chacune des affirmations suivantes :

1- $\text{Cov}(X; Y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i y_i - \bar{x} \bar{y}$

2- $\text{Cov}(X; Y) = V(X) \times V(Y)$

3- $\text{Cov}(X; Y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i y_i - (\bar{x} \bar{y})^2$

4- $\text{Cov}(X; Y)$ est un nombre réel toujours positif

3 Le tableau suivant donne l'évolution des bénéfices y_i (en millier de francs CFA) depuis le nouvel aménagement d'un glacier en 1999 en fonction du nombre d'années écoulé depuis l'aménagement.

Années	199	200	200	200	200
x_i	1	2	3	4	5
y_i	0,96	1,69	2,03	2,31	2,55

Détermine la covariance de cette série statistique.

3 La société Ibo investit de manière continue en publicité. Le budget publicitaire (BP) et le chiffre d'affaires (CA), tous deux en million de francs CFA, ont été relevés dans le tableau ci-dessous.

Mois : i	1	2	3	4
BP : x_i	1	1,2	1,5	1,3
CA : y_i	4,5	7,9	9,9	11,5

Calcule la covariance de cette série statistique.

Connaître la formule du coefficient de corrélation linéaire et calculer le coefficient de corrélation linéaire

3 Une étude statistique porte sur deux caractères quantitatifs X et Y .

- Caractère X : nombre de grammes d'alcool consommé par la mère durant la grossesse

- Caractère Y : poids de naissance en kilogrammes

On donne : $\sigma(Y) = 100$ et $\sigma(Y) = 0,2$ les écart-types de X et Y puis $\text{Cov}(X; Y) = 8$ la covariance de la série statistique $(X; Y)$.

Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes lorsqu'on utilise un modèle de régression linéaire de Y en X .

N°	Affirmations	Réponse
1	L'unité du coefficient de corrélation linéaire est le kilogramme	
2	Le coefficient de corrélation linéaire est égal à 0,4	
3	Plus la consommation d'alcool diminue, moins le poids de l'enfant sera élevé	
4	Il y a une bonne corrélation linéaire entre les caractères X et Y	
5	Il manque des informations pour calculer le coefficient directeur de la droite de régression de Y en X	

10

1- Quelle interprétation donne-tu lorsque $0,87 \leq |r| < 1$?

2- Donne une expression du coefficient de corrélation linéaire r dans une série statistique à deux caractères.

3 La société Ibo investit de manière continue en publicité. Le budget publicitaire (BP) et le chiffre d'affaires (CA), tous deux en million de francs CFA, ont été relevés dans le tableau ci-dessous.

Mois : i	1	2	3	4
BP : x_i	1	1,2	1,5	1,3
CA : y_i	4,5	7,9	9,9	11,5

Calcule le coefficient de corrélation linéaire et interprète ce résultat.

Droites de régression par la méthode des moindres carrés

15 Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

- 1- Le coefficient directeur de la droite de régression de y en x est toujours positif.
- 2- La droite de régression de y en x et celle de x en y se coupent au point moyen G .
- 3- Si $\text{Cov}(x; y) < 0$, alors il est impossible de déterminer une équation de la droite de régression de x en y .
- 4- Si le coefficient de corrélation linéaire est négatif, alors la droite de régression de y en x est décroissante.
- 5- Si $(D): x = mx + n$ est la droite de régression de x en y , alors : $m = \frac{\text{Cov}(X; Y)}{V(Y)}$ et $n = y - mx$.

16 Le point moyen du nuage de points d'une série statistique à deux variables X et Y a pour coordonnées $(2; 5)$. Le coefficient directeur de la droite d'ajustement linéaire de y en x par la méthode des moindres carrés est 10. Détermine une équation de cette droite.

17 On a réalisé un ajustement d'une série statistique à deux variables x_i et y_i par la méthode des moindres carrés. On a trouvé pour une équation de cette droite : $y = 2,4x + 5,1$.

On sait que la moyenne de x_i est de 15.

Calcule les coordonnées du point moyen du nuage.

- 18 1- Recopie puis complète le tableau de calcul ci-dessous.

	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
1		41			
2		68			
3		55			
4		80			
5		95			
6		104			
7		100			
8		122			
Total					

2- Détermine une équation de la droite de régression de y en x .

3- Détermine une équation de la droite de régression de x en y .

19 La série statistique suivante donne l'évolution du pourcentage y_i des salariés travaillant à temps partiel par rapport au total des salariés d'une entreprise en fonction du rang x_i de l'année.

Années	2010	2012	2013	2015	2016	2018	2019	2020
x	2	4	5	8	9	11	12	13
y	8,9	10,2	10,5	12,2	12,3	13,2	13,8	14,5

Détermine une équation de la droite d'ajustement linéaire de x en y par la méthode des moindres carrés (on arrondira les coefficients à 0,1 près).

20 Le tableau ci-dessous donne la recette d'un restaurant en fonction de nombre de clients.

Nombre de clients (x_i)	10	11	13	15	17	18
Recette (y_i) en milliers de	10	10	11	111	112	11

On admet qu'une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés est

$y = 1,07x + 94,92$ et on a une bonne corrélation linéaire entre les caractères X et Y . Détermine la recette du restaurant s'il y a une clientèle de 25 personnes.

2- Exercices de renforcement/Approfondissement

21 On considère le tableau à double entrée ci-dessous donnant la répartition du nombre d'élèves de terminale d'un lycée selon le sexe et la série.

	Série	A_1 / A_2	C	D	Total
Sexe					
Garçons					
Filles					
Total					

- 1- Recopie et complète le tableau ci-dessus.

- 2-
- a) Détermine le nombre de filles en Tle C.
 - b) Détermine le nombre d'élèves en Tle D.
 - c) Détermine le nombre de garçons en terminale.
 - d) Détermine le nombre d'élèves de cette promotion.
- 3- Soit X le caractère désignant le sexe de l'élève et Y le caractère désignant la série de l'élève.

- a) Détermine l'effectif de chaque modalité du caractère X puis complète le tableau suivant :

Sexe		
Effectif		

- b) Détermine l'effectif de chaque modalité du caractère Y puis complète le tableau suivant :

Sexe			
Effectif			

- Associe chaque groupe de mot de la colonne de gauche à l'expression qui lui convient dans la colonne de droite.

Ecart-type de X	•	•	$\frac{\text{Cov}(X; Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$
Covariance de X et Y	•	•	$\frac{\sum x_i^2}{N} - (\bar{x})^2$
Variance de X	•	•	$V(X)$
Coefficient de corrélation linéaire r	•	•	$\frac{\sum y_i^2}{N} - (\bar{y})^2$
Variance de Y	•	•	$\frac{\sum x_i y_i}{N} - \bar{x}\bar{y}$

- Une seule des réponses proposées est correcte pour chacune des affirmations ci-dessous. Choisis la bonne réponse.

N°	Affirmations	Réponses														
		A	B	C												
1	Le coefficient de corrélation linéaire r a pour expression	$r = \frac{\text{cov}(X; Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}$	$r = \frac{\text{cov}(X; Y)}{\sqrt{V(X)} + \sqrt{V(Y)}}$	$r = \frac{\text{cov}(X; Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$												
2	On donne la table statistique suivante															
	<table border="1"> <tr> <td>x</td> <td>1</td> <td>1,5</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td>n</td> <td>0,75</td> <td>2,8</td> <td>2</td> <td>1</td> <td>0,5</td> </tr> </table>	x	1	1,5	2	3	4	n	0,75	2,8	2	1	0,5	622,5 ; 2,01	623,01 ; 2,01	623,50 ; 2,01
x	1	1,5	2	3	4											
n	0,75	2,8	2	1	0,5											
3	Le coefficient directeur de la droite de régression de y en x est	$a = \frac{\text{cov}(X; Y)}{\sigma(X)}$	$a = \frac{\text{cov}(X; Y)}{\sigma(Y)}$	$a = \frac{\text{cov}(X; Y)}{\sqrt{V(X)}}$												
4	Les coefficients de corrélation linéaire r et r' vérifient les inéquations des droites de régression de x en y et de y en x	Oui	Non	Où ne sait pas												

- Pendant la période des calculs de moyennes du premier trimestre, le professeur principal d'une classe de terminale C a observé les notes de Mathématiques et de Français des douze élèves de sa classe. Ces notes sont résumées dans le tableau suivant :

- 1- Représente le nuage de points associé à cette série statistique dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité graphique 1 cm.
2- a) Calcule la moyenne des notes de Mathématiques et celle des notes de Français.

Notes de Mathématiques	5	4	9	5	14	13	16	11	4	12
Notes de Français (y _i)	10	6	8	10	15	12	16	7	6	11

- b) Dédus-en les coordonnées du point moyen G puis place-le dans le repère précédent.

- 3- Calcule les variances et des caractères X et Y.
4- Calcule la covariance des caractères X et Y.
5- a) Détermine une équation de la droite (D) de régression de y en x.
b) Détermine une équation de la droite (D') de régression de x en y.
c) Construis les droites (D) et (D') dans le même repère.

- Dans un journal économique de juin 2021, un journaliste commente ainsi la baisse continue du nombre de reprises d'entreprises.

- En 2019, 43 300 sociétés ont été reprises ;
- En 2020, ce chiffre a baissé de 3%.

Calcule le nombre de sociétés reprises en 2020.

- 2- Le tableau ci-dessous représente le nombre de reprises d'entreprises en Côte d'Ivoire (indice 100 pour l'année 2007) ; x_i est le rang de l'année et y_i est l'indice du nombre de reprises.

Années	2010	2012	2013	2015	2016	2018	2019	2020
x _i	1	2	3	4	5	6	7	8
y _i	80	83	78	78	78	73	72	70

- a) Représente par un nuage de points M(x_i ; y_i) cette série statistique. On prendra comme unité : en abscisses 1 cm pour une année en commençant au rang 0 et en ordonnées 1 cm pour dix points d'indice.
b) Détermine une équation de la droite d'ajustement de y en x par la méthode des moindres carrés (on arrondit les coefficients à 0,01 près).
c) On admet que la droite (D) réalise un ajustement affine convenable du nuage de points et que l'évolution du nombre de reprises d'entreprises ne sera pas modifiée dans les années à venir. Détermine par le calcul en quelle année l'indice descendra pour la première fois au-dessous de 50.

- Les droites de régression d'une série double (x_i ; y_i) sont :

(D₁) : x = 1,25 y - 7,8 (droite de régression de x en y) et (D₂) : x = 0,75 y + 1,3 (droite de régression de x en y).

- 1- Calcule les coordonnées du point moyen du nuage de points.
2- Calcule le coefficient de corrélation linéaire et interprète-le.

27 Les cinq caractères d'une variable X d'une série double $(x_i; y_i)$ sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 et 5.

Le coefficient de corrélation linéaire de cette série est : $r = 0,8$ et le coefficient directeur de la droite de régression de Y en X est : $a = 0,425$.

Calcule la covariance de cette série double et la variance de Y .

28 Un opérateur de radiotéléphonie est amené chaque année à réaliser des investissements considérables pour améliorer son réseau.

Le tableau suivant donne les investissements réalisés par cet opérateur de 2015 à 2019, ainsi que le nombre d'abonnés obtenu.

Année	2015	2016	2017	2018	2019
Investissement en milliard FCFA	1	1,1	1,2	1,3	1,4
Nombre d'abonnés en milliers	90	100	105	110	112

1- Représente le nuage de point $M(x_i; y_i)$ dans un repère orthogonal d'unité graphique 2 cm pour 0,1 milliard FCFA en abscisses et 5 cm pour 10 milliers d'abonnés en ordonnées. On commencera la graduation de l'axe des abscisses à 1 et celle des ordonnées à 80.

2- Madame Ypaud propose un ajustement graphique à l'aide de la droite (D) passant par les points A(1,1 ; 100) et B(1,3 ; 110) du nuage. Détermine une équation de cette droite.

3- Madame Yao propose d'ajuster le nuage de points par la courbe représentative de la fonction définie sur l'intervalle $[1; 1,6]$ par :

$$f(x) = a - \frac{b}{x} \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont des nombres réels.}$$

Pour cela, on pose : $\frac{1}{x}$

a) Recopie et complète le tableau ci-dessous. On arrondira les valeurs de x_i à 0,01 près.

x_i					
y_i	90	100	105	110	112

b) Détermine une équation de la droite d'ajustement de x en y par la méthode des moindres carrés. (on arrondira les coefficients à 0,01 près).

c) Dédus-en l'expression de y en x fonction de .

4- En 2020, l'opérateur a augmenté ses investissements de 0,2 milliard FCFA. Le nombre observé a été de 118 000.

a) Calcule l'estimation du nombre d'abonnés en 2020 avec chacun des modèles proposés par Madame Ypaud ou Madame Yao.

b) En considérant la valeur effectivement observée en 2020, quel modèle vous paraît le plus approprié ? Justifie ta réponse.

29 L'entreprise VET'PRO fabrique un revêtement de sols anti-abrasif pour les industries. Il se présente sous la forme d'un produit plastique liquide qui se solidifie au bout de quelques heures. Le PDG de cette entreprise désire faire une estimation de ses ventes afin d'étudier ses investissements futurs.

Dans le tableau ci-dessous est reportée la production des dix dernières années en tonnes.

Année	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
Rang	1	2	3	4	5	6	7	8
Production en tonnes	49	48	51	58	57	61	65	66

1- Représente le nuage de points de cette série. (on prendra pour unité 1 cm pour une année en abscisses et 1 cm pour 5 tonnes en ordonnées en débutant la graduation de l'axe des ordonnées à 45.

2- Déterminer les coordonnées du point moyen G du nuage de points.

3- Place G, puis trace la droite d'ajustement de ce nuage d'équation $y = 2,2x + 45,8$.

4- Détermine par calcul, les productions prévisibles en 2006 et en 2007. (on admet que la tendance se poursuit dans les mêmes conditions)

30 On a relevé pour chaque année de 2000 à 2004, le budget x_i (en milliard de FCFA) et le nombre de mariages y_i (en milliers) en Côte d'Ivoire.

Année	2000	2001	2002	2003	2004
y_i	253,8	260,9	266,3	273,8	283,7
x_i	298	288	279	276	259

1- Représente le nuage de points de coordonnées $(x_i; y_i)$. On prendra en abscisses 1 cm pour 5 unités en commençant la graduation à 250 et en ordonnées 1 cm pour 5 unités en commençant la graduation à 250.

2- Un ajustement affine du nuage est-il envisageable ? Justifie ta réponse.

3- Détermine une équation de la droite d'ajustement de y en x par la méthode des moindres carrés.

4- a) Peut-on estimer le nombre de mariages lorsque le budget de la Côte d'Ivoire sera de 400 milliards de FCFA ? de 600 milliards FCFA ?
b) Commente les résultats trouvés à la question 4.

31 Lors d'une enquête statistique sur une série double portant sur 10 objets, l'enquêteur a obtenu les résultats suivants :

$$\sum x_i = 233 + x_1; \quad \sum y_i = 304; \quad \sum x_i y_i = 8286; \quad \sum x_i^2 = 7127; \quad \sum y_i^2 = 9734.$$

1- Sachant que la moyenne $\bar{x} = 26,1$, calcule x_1 .

2- Détermine les coordonnées du point moyen G.

3- Calcule la covariance $\text{Cov}(X; Y)$ de X et Y .

4- Par la méthode des moindres carrés :

- Détermine une équation de la droite de régression de y en x .
- Détermine une équation de la droite de régression de y en x .

5-

- Calcule le coefficient de corrélation linéaire r .
- Existe-t-il une bonne corrélation linéaire entre les caractères X et Y ? Justifie ta réponse.

10 Le tableau ci-contre donne, sur six semaines consécutives, le chiffre d'affaires C_i d'un grand magasin (en millions de FCFA) et les dépenses publicitaires D_i de ce magasin (en milliers de FCFA).

C_i	10	11	13	14	15	16
D_i	1,7	1,9	2	2,2	2,3	2,5

1- Représente le nuage de points associé à la série statistique double (D_i ; C_i)

On prendra en abscisses 10 cm pour unité en commençant la graduation à 1,5 et en ordonnées 1 cm pour unité, en commençant la graduation à 8.

2- Place le point moyen du nuage de points.

3-

- Détermine une équation de la droite d'ajustement linéaire de D en C par la méthode des moindres carrés (on arrondira les coefficients à 0,01 près).
- Trace cette droite sur le graphique de la question 1.

4- Dans cette question, on reprend les mêmes données, mais on change les rôles de D_i et C_i .

- Sur un nouveau graphique, représente le nuage de points de coordonnées (D_i ; C_i).
- Place le point moyen de ce nouveau nuage de points.
- Détermine une équation de la droite d'ajustement de C en D par la méthode des moindres carrés (on arrondira les coefficients à 0,01 près).
- Trace cette droite sur le graphique de la question 4a).
- Exprime en fonction de (on utilisera la question 4c) et on arrondira les coefficients à 0,01 près).
- Trace la droite dont on a trouvé l'équation en 4d) sur le graphique de la question 1. Que constate-t-on pour ces deux droites ?

11 Une étude a permis de dresser le tableau suivant où x_i représente le rang de l'année

et y_i , l'indice du chiffre d'affaire hors taxe (la base 100 étant pour l'année de rang 1).

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	100	97	91	106	121	137	136	158	167	182

1- Représente le nuage de points M_i de coordonnées (x_i ; y_i) associé à cette série statistique dans un repère orthogonal. (On prendra comme unités graphiques : 1 cm pour 1 unité sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 5 unités sur l'axe des ordonnées en commençant par 70.

2- Calcule les coordonnées du point moyen G du nuage de points.

3- On admet que la droite (Δ) d'équation

$$y = \frac{553}{55}x + 73,3 \text{ est un ajustement affine du nuage de points.}$$

nuage de points.

a) Vérifie que le point moyen appartient à la droite (Δ)

b) Trace (Δ).

4- On utilise cet ajustement et on admet que l'année de rang 1 correspond à 1996.

a) Détermine graphiquement l'indice prévisible du chiffre d'affaires en 2006.

Vérifie le résultat par le calcul.

b) Détermine à partir de quelle année le chiffre d'affaires doublera par rapport à celui de 1996.

12 Au cours du premier trimestre, le professeur principal d'une classe de T^{MD} a relevé les notes de mathématiques (x_i) et les notes de physique-chimie (y_i) de huit de ses élèves dans le tableau suivant :

Notes de mathématiques (x_i)	6	9	10	11	12	16	17
Notes de physique-chimie (y_i)	8	10	10	12	13	14	18

Lors du report des notes, le professeur a oublié de reporter une note de mathématiques et une note de physique-chimie, mais il se souvient que la moyenne $\bar{y}$ des notes de mathématiques est égale à 11,75 et la moyenne $\bar{x}$ des notes de physique-chimie est égale à 12,5.

- Détermine les notes manquantes du tableau.
- Détermine une équation de la droite de régression de x en y .
- Calcule le coefficient de corrélation linéaire puis interprète-le.

13 Deux élèves de terminale D ont créé un site Internet ; ils ont relevé sur le tableau suivant le nombre de visiteurs par mois de leur site, depuis sa création le 1^{er} novembre 2019 jusqu'à la fin de mois de juin 2020.

	Novembre	Décembre	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin
	1	2	3	4	5	6	7	8
	322	325	328	327	334	332	335	337

- 1- Représente le nuage de points A_i de coordonnées $(x_i ; y_i)$ associé à cette série statistique dans un repère orthogonal d'unités : 2 cm en abscisses et 2 cm pour 5 personnes en ordonnées. On commencera la graduation à 315 sur l'axe des ordonnées et on graduera l'axe des abscisses jusqu'à 11.

- 2- Détermine les coordonnées du point moyen G de ce nuage puis place-le sur le graphique.

- 3- On choisit pour ajustement affine du nuage de points la droite (D) passant par G et de coefficient directeur 2.

a) Détermine une équation de la droite (D).

b) Construis la droite (D).

- 4- On suppose que le nombre de visiteurs évolue en suivant cet ajustement.

a) Détermine graphiquement une estimation du nombre de visiteurs au mois d'août 2020. Cette lecture devra être justifiée par un tracé en pointillé.

b) Détermine par un calcul une estimation du nombre de visiteurs au mois d'octobre 2020.

10 Pendant les épreuves du baccalauréat, l'on a relevé dans le tableau ci-dessous, les notes de Français x_i et les notes de mathématiques y_i de 10 élèves d'une classe de terminale D.

x_i	9	12	5	6	9	14	3	6	12	14
y_i	10	13	18	10	13	17	5	8	16	14

- 1- Représente le nuage de points associé à cette série statistique.

- 2- Détermine une équation de la droite de régression de y en x et de x en y .

- 3- Construis ces deux droites dans le nuage de points.

- 4- Calcule le coefficient de corrélation linéaire puis donne une interprétation du résultat.

11 Une entreprise fabrique un équipement. Le prix unitaire y (en FCFA) de ce produit est fonction du nombre n d'unités produits. On a relevé les résultats dans le tableau suivant :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	1501	811	544	436	375	320	287	252	233	210

- 1- a) Représente le nuage de points de coordonnées $(n_i ; y_i)$. On prendra pour unité 1 cm pour une unité en abscisse et 1 cm pour 100 FCFA en

ordonnées.

- b) Un ajustement affine vous paraît-il justifié ? Pourquoi ?

2-

- a) On pose $x_i = \frac{1}{n}$. Calcule les valeurs de x_i à 10^{-2} près

par défaut, puis représente le nuage de points de coordonnées $(x_i ; y_i)$. On prendra 10 cm pour une unité en abscisse et 1 cm pour 100 FCFA en ordonnées.

- b) Détermine une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés (arrondis les coefficients à 10^{-2} près).

- c) Dédus-en l'expression de y en fonction de n .

12 On donne ci-dessous la proportion, en pourcentage, du nombre d'enfants nés hors mariage dans une région.

Année a	1980	1985	1990	1995	2000	2003
Proportion p	11,4	19,6	30,1	37,6	42,6	45,2

On souhaite effectuer un ajustement linéaire de cette série statistique.

1-

- a) Construis le nuage de points de coordonnées $(a_i ; p_i)$ dans le plan muni d'un repère orthogonal. On prendra 0,5 cm pour unité sur l'axe des abscisses et 0,5 cm pour unité sur l'axe des ordonnées et le point de coordonnées (1980 ; 10) comme origine du repère.

- b) Un ajustement affine semble-t-il adapté ? Justifie ta réponse.

- 2- On note a l'année et y la proportion, on pose : $x = a - 1950$ et $t = \ln x$.

- a) Complète le tableau ci-dessous.

Année a	1980	1985	1990	1995	2000	2003
$x = a - 1950$	30					
$t = \ln x$	3,401					
	11,4					

On donnera pour t des valeurs arrondies au millième.

- b) Exprime y en fonction de t par une régression linéaire en utilisant la méthode des moindres carrés. On arrondira les coefficients à 0,1 près.

- c) Dédus-en la relation : $y = 61,3 \ln x - 197$.

- d) Détermine, en utilisant cet ajustement, le pourcentage du nombre d'enfants nés hors mariage (arrondi à 1 %), que l'on peut prévoir en 2010 dans cette région. (On admet que la tendance se poursuit dans les mêmes conditions).

- e) À partir de quelle année peut-on prévoir que la proportion du nombre d'enfants nés hors mariage sera-t-elle supérieure à 60 % ? Justifie ta réponse.

3- Situation complexe

52 En vue d'accroître le chiffre d'affaire de son entreprise, madame Kouakou décide de faire une publicité sous forme d'encart dans les journaux de la région. Voici résumé dans le tableau ci-dessous l'évolution des dépenses publicitaires et les chiffres d'affaires (exprimés en milliers de FCFA) correspondants aux sept premiers mois de l'année 2019.

Mois	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet
Dépenses (x)	400	1200	1800	800	2100	2400	1500
Chiffres d'affaires (y)	25000	31000	20000	30000	37500	41500	35000

A l'aide des outils mathématiques au programme, justifie que dans cette entreprise, les dépenses publicitaires sont liées au chiffre d'affaires puis détermine une estimation du chiffre d'affaires de l'entreprise de madame Kouakou pour un budget publicitaire de 3 500 000 FCFA.



VI- RENDEZ-VOUS DES CURIEUX !

Ruder Josip Bošković est le premier scientifique à calculer les coefficients de régression linéaire, en 1755-1757, quand il entreprit de mesurer la longueur de cinq méridiens terrestres en minimisant la somme des valeurs absolues.

Pierre-Simon de Laplace utilise cette méthode pour mesurer les méridiens dans « Sur les degrés mesurés des méridiens et sur les longueurs observées sur pendule » en 1789.

La première utilisation de la méthode des moindres carrés est attribuée à Adrien-Marie Legendre en 1805 ou à Carl Friedrich Gauss qui dit l'avoir utilisée à partir de 1795.

Carl Friedrich Gauss démontre en 1821 le théorème connu aujourd'hui sous le nom de théorème de Gauss-Markov qui exprime sous certaines conditions la qualité des estimateurs ; Andreï Markov le redécouvre en 1900.

La paternité de l'expression « régression linéaire » revient à Francis Galton qui, dans un article de 1886, constate un phénomène de « régression vers la moyenne » de la taille des fils en fonction de la taille des pères.



Equations Différentielles

Notions essentielles :

- Équations différentielles du type $y' = ay$, $a \in \mathbb{R}$;
- Équations différentielles du type $y'' = my$, $m \in \mathbb{R}$.

SITUATION D'APPRENTISSAGE

En faisant une recherche sur le radium pour un exposé en physique-chimie dans une classe de Terminale D d'un lycée, un élève découvre les informations suivantes :
Le radium est une substance radioactive contenue dans l'uranium et découverte par les physiciens français Pierre et Marie Curie en 1898.

Cette substance émet des rayons alpha (noyaux d'hélium, de charge positive), bêta (particules de charge négative) et gamma (comparables aux rayons X), éminemment nocifs pour la santé. Ce faisant, il se désintègre et on a constaté que la masse d'atomes de radium se désintégrant dans un court intervalle de temps $[t; t + dt]$ est proportionnel :

- au temps écoulé dt
- à la masse de radium présente à l'instant t .

De nombreuses expériences ont montré que la perte de masse du radium est de l'ordre de 0,043% par an.

On appelle période d'une substance radioactive, le temps nécessaire pour qu'une masse donnée de cette substance diminue de la moitié de sa valeur.

En tant qu'élève de Terminale D, on vous propose de déterminer la période du radium, exprimée en années.



I- ACTIVITÉS DE DÉCOUVERTE



1- EQUATION DIFFÉRENTIELLE

1.1 Connaître la définition d'une équation différentielle

Activité 1

Soit f la fonction dérivable définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-2x} - 8$.

1- Calcule la dérivée f' de f .

2- Justifie que $f(x) = -\frac{1}{2}f'(x) - 8, \forall x \in \mathbb{R}$.

Je fais le point de l'activité

- L'équation : $y = -\frac{1}{2}y' - 8$ est une équation différentielle
- Une équation différentielle est une équation ayant pour inconnue une fonction et dans laquelle figure au moins une des dérivées successives de la fonction inconnue.

J'évalue mes acquis



Soit f une fonction. On considère les équations suivantes :

- a) $4f(x) = 2x - \ln x + f'(x)$ b) $f''(x) - 2f(x) = e^{x+1}$ c) $f'(x) = 9f(x) + 12$
 d) $[f'(x)]^2 = x + 1$

Parmi les équations ci-dessus, indique celles qui sont des équations différentielles.

1.2- Justifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle

Activité 2

Soit l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = 4$.

Vérifie que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2e^{2x} - 4$ est une solution de l'équation différentielle (E).

Je fais le point de l'activité

On appelle solution d'une équation différentielle toute fonction vérifiant cette équation différentielle.

J'évalue mes acquis



Soit l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = 0$

Parmi les fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par : $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = e^{2x}$ et $h(x) = e^{2x} + 1$, indique celle qui est solution de l'équation différentielle (E).

2- RÉSOLUTION D'EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

2.1 Equation différentielle du type $y' = ay$ où a est un nombre réel.

2.1.1 Résoudre une équation différentielle du type $y' = ay, a \in \mathbb{R}$

Activité 3

Soit l'équation différentielle (E) : $y' = ay$ où a désigne un nombre réel.

Démontre que les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = ke^{ax}, k \in \mathbb{R}$. (On peut distinguer le cas $a = 0$ et le cas $a \neq 0$)

Je fais le point de l'activité

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay$ où $a \in \mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto ke^{ax}$.

J'évalue mes acquis



Résous sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $y' = -4y$

2.1.2 Déterminer la solution d'une équation différentielle du type $y' = ay$, $a \in \mathbb{R}$ satisfaisant à une condition initiale donnée.

ACTIVITÉ 4

Soit l'équation différentielle (H) : $y' = 2y$.

- 1- Détermine toutes les solutions f de l'équation différentielle (H) qui prennent la valeur 3 en 1.
- 2- Indique le nombre de solutions trouvées.

Je fais le point de l'activité

Pour tout couple de nombres réels $(x_0; y_0)$, l'équation différentielle $y' = ay$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur y_0 en x_0 .

J'évalue mes acquis



Détermine la solution f de l'équation différentielle $y' = -4y$ qui prend la valeur -1 en 0.

2.2 Résoudre une équation différentielle du type $y' = ay + b$, $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$

ACTIVITÉ 5

Soient les équations différentielles (E) : $y' = ay + b$ et (E') : $y' = ay$ où a et b désignent des nombres réels avec $a \neq 0$.

- 1- Démontre que la fonction $x \mapsto f(x)$ est solution de (E) si et seulement si la fonction $x \mapsto f(x) + \frac{b}{a}$ est solution de (E')
- 2- Dédus-en que les solutions de (E) sont de la forme $x \mapsto ke^{ax} - \frac{b}{a}$

Je fais le point de l'activité

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay + b$, $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto ke^{ax} - \frac{b}{a}$ où $k \in \mathbb{R}$.

J'évalue mes acquis



Détermine la solution f de l'équation différentielle $y' = 4y + 8$ qui prend la valeur -1 en 0.

2.3 Résoudre une équation différentielle du type $y'' = 0$

ACTIVITÉ 6

f étant une fonction deux fois dérivable, détermine f' telle que $(f')' = 0$ et déduis - en f .

Je fais le point de l'activité

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' = 0$ sont les fonctions $x \mapsto ax + b$, a et b sont des nombres réels.

J'évalue mes acquis



Détermine la solution f de l'équation différentielle $y'' = 0$ qui vérifie $f(1) = 0$ et $f(3) = 1$.

2.4 Résoudre une équation différentielle du type $y'' = \omega^2 y$, $\omega \in \mathbb{R}^*$.

ACTIVITÉ 7

Soit f la fonction deux fois dérivable définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ae^{\omega x} + be^{-\omega x}$.

- 1- Pour tout nombre réel x , calcule $f''(x)$.
- 2- Justifie que f est solution de l'équation différentielle $y'' = \omega^2 y$, $\omega \in \mathbb{R}^*$.

Je fais le point de l'activité

On admet que les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' = \omega^2 y$, $\omega \in \mathbb{R}^*$ sont les fonctions $x \mapsto ae^{\omega x} + be^{-\omega x}$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

J'évalue mes acquis



Résous sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' = 16y$.

2.5 Résoudre une équation différentielle du type $y'' = -\omega^2 y$, $\omega \in \mathbb{R}^*$.

ACTIVITÉ 8

Soit g la fonction deux fois dérivable définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = a \cos \omega x + b \sin \omega x$, a et b sont des réels.

- 1- Pour tout nombre réel x , calcule $g''(x)$.
- 2- Justifie que g est solution de l'équation différentielle $y'' = -\omega^2 y$, $\omega \in \mathbb{R}^*$.

Je fais le point de l'activité

On admet que les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' = -\omega^2 y$, $\omega \in \mathbb{R}^*$ sont les fonctions $x \mapsto a \cos \omega x + b \sin \omega x$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

J'évalue mes acquis



Résous sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' = -9y$.

II- RÉSUMÉ DE COURS



1- ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

DÉFINITION

On appelle **équation différentielle**, toute équation ayant pour inconnue une fonction et dans laquelle figure au moins une des dérivées successives de la fonction inconnue.

EXEMPLE

Les équations suivantes : $f'(x) - 4f(x) = 0$, $f''(x) - 4f'(x) = 4x$, $f'(x) - f(x) = 0$, $f'''(x) = e^{2x}$ sont des équations différentielles.

VOCABULAIRE

- Toute équation différentielle qui peut se mettre sous la forme $f'(x) - af(x) = 0$ où a est un nombre réel est appelée **équation différentielle linéaire du premier ordre, à coefficients constants, sans second membre**.

- Toute équation différentielle qui peut se mettre sous la forme $f''(x) + af'(x) + hf(x) = 0$ où a et b sont des nombres réels est appelée **équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, sans second membre**.

2- Solution d'une équation différentielle

DÉFINITION

On appelle **solution d'une équation différentielle** toute fonction vérifiant cette équation différentielle.

Exemple

Soit l'équation différentielle (E): $y' - 2y = 0$

Parmi les fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par : $f(x) = x^2 + 1$, $f(x) = e^{2x}$ et $h(x) = e^{2x} + 1$ indique celle qui est solution de l'équation différentielle (E).

Solution

g est solution de l'équation différentielle (E).



- **Résoudre (ou intégrer)** une équation différentielle sur un intervalle ouvert K , c'est déterminer l'ensemble des solutions sur K de cette équation différentielle
- La courbe représentative d'une solution d'une équation différentielle est appelée **courbe intégrale** de cette équation différentielle.

2- RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

2.1- Équation différentielle du type $y' = ay$ où $a \in \mathbb{R}$

PROPRIÉTÉ

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay$ où $a \in \mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto ke^{ax}$, $k \in \mathbb{R}$.

Exemple

Pour chaque affirmation, réponds par Vrai si elle est correcte et réponds par Faux si elle est incorrecte. L'équation différentielle $y' = 3y$ a pour solution :

- 1- les fonctions $x \mapsto ke^{-3x}$, $k \in \mathbb{R}$.
- 2- les fonctions $x \mapsto 3e^{4x}$, $k \in \mathbb{R}$.
- 3- les fonctions $x \mapsto ke^{3x}$, $k \in \mathbb{R}$.

Solution

1) Faux

2) Faux

3) Vrai

PROPRIÉTÉ

Pour tous nombres réels x_0 et y_0 , l'équation différentielle $y' = ay$, $a \in \mathbb{R}$, admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur y_0 en x_0 .

Exemple

Détermine la solution f de l'équation différentielle $y' = -2y$ qui prend la valeur 3 en 2. f étant solution de l'équation différentielle $y' = -2y$, alors f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ke^{-2x}$, $k \in \mathbb{R}$. Comme $f(2) = 3$ alors $k = 3e^4$ donc $f(x) = 3e^{-2x+4}$.

2.2- Équation différentielle du type $y' = ay + b$ $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$

PROPRIÉTÉ

a et b sont deux nombres réels tels que $a \neq 0$.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions $x \mapsto ke^{ax} - \frac{b}{a}$, $k \in \mathbb{R}$.

Exemple

Pour chaque affirmation réponds par Vrai si elle est correcte et réponds par Faux si elle est incorrecte.
L'équation différentielle $y' = 2y - 5$ a pour solution :

- 1- les fonctions $x \mapsto ke^{-2x} - \frac{5}{2}$, $k \in \mathbb{R}$;
- 2- les fonctions $x \mapsto ke^{+2x} - \frac{5}{2}$, $k \in \mathbb{R}$;
- 3- les fonctions $x \mapsto ke^{2x} + \frac{5}{2}$, $k \in \mathbb{R}$.

Solution

1) Faux

2) Faux

3) Vrai

PROPRIÉTÉ

Pour tout couple de nombres réels $(x_0; y_0)$, l'équation différentielle $y' = ay + b$, a et $b \in \mathbb{R}$, admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur y_0 en x_0 .

EXEMPLE

Détermine la solution g de l'équation différentielle $y' = \frac{1}{3}y + 2$ qui prend la valeur 2 en 0.

g étant solution de l'équation différentielle $y' = \frac{1}{3}y + 2$ alors g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = ke^{\frac{x}{3}} - 6$, $k \in \mathbb{R}$.

Comme $g(0) = 2$ alors $k = 8$ donc $g(x) = 8e^{\frac{x}{3}} - 6$.

2.3. Equation différentielle du type $y'' = 0$ **PROPRIÉTÉ**

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' = 0$ sont les fonctions $x \mapsto ax + b$, a et b sont les réels.

Exemple

Pour chaque affirmation réponds par Vrai si elle est correcte et réponds par Faux si elle est incorrecte.
L'équation différentielle $y'' = 0$ a pour solution :

- 1- les fonctions $x \mapsto ax + b$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$
- 2- les fonctions $x \mapsto ax^2 + b$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$
- 3- les fonctions $x \mapsto ae^x + b$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$

Solution

1) Vrai

2) Faux

3) Faux

2.4. Equation différentielle du type $y'' = \omega^2 y$ où $\omega \in \mathbb{R}^*$ **PROPRIÉTÉ**

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' = \omega^2 y$ où $\omega \in \mathbb{R}^*$ sont les fonctions $x \mapsto ae^{\omega x} + be^{-\omega x}$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

Exemple

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' = 25y$ sont les fonctions $x \mapsto ae^{5x} + be^{-5x}$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

2.5. Equation différentielle du type $y'' = -\omega^2 y$ où $\omega \in \mathbb{R}$ **PROPRIÉTÉ**

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' = -16y$ sont les fonctions $x \mapsto a \cos 4x + b \sin 4x$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

Exemple

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' = -16y$ sont les fonctions $x \mapsto a \cos 4x + b \sin 4x$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

Tableau récapitulatif

NOMS	EQUATIONS	SOLUTIONS
Equation du 1 ^{er} degré à coefficient constant sans second membre	$y' - ay = 0$ ($a \in \mathbb{R}$)	$y = ke^{ax}$ ($k \in \mathbb{R}$)
	$y' + ay = 0$ ($a \in \mathbb{R}$)	$y = ke^{-ax}$ ($k \in \mathbb{R}$)
Equation du 1 ^{er} degré à coefficient constant sans second membre	$y' = ay + b$ ($a, b \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$)	$y = ke^{ax} - \frac{b}{a}$ où $k \in \mathbb{R}$
Equation du 2 ^{ème} degré à coefficient constant sans second membre	$y'' = 0$	$y' = ax + b$ (a, b réels)
	$y'' + w^2y = 0$ ($w \in \mathbb{R}^*$)	$y = A \cos wx + B \sin wx$ (A, B réels)
	$y'' - w^2y = 0$ ($w \in \mathbb{R}^*$)	$y = Ae^{wx} + Be^{-wx}$ (A, B réels)

III- MÉTHODE

- Pour résoudre une équation différentielle sans second membre au programme, on peut :
 - transformer l'équation différentielle et la mettre sous la forme $y' = ay$, $a \in \mathbb{R}$ ou $y'' = my$, $m \in \mathbb{R}$
 - appliquer la formule adéquate
- Pour résoudre une équation différentielle avec second membre au programme,
 - On détermine une solution particulière
 - on résout l'équation sans second membre associée
 - on exploite le questionnement pour déduire les solutions de l'équation différentielle avec second membre.

IV- SAVOIR-FAIRE

Savoir-faire 1 : Savoir justifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle

ÉNONCÉ 1

Soit l'équation différentielle (E): $y' + 2y = x^2 + 1$

Justifie que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 0,5x^2 - 0,5x + 0,75$ est une solution de l'équation différentielle (E).

SOLUTION COMMENTÉE

On a : $f'(x) + 2f(x) = x - 0,5 + x^2 - x + 1,5 = x^2 + 1$

Comme $f'(x) + 2f(x) = x^2 + 1$ alors f est une solution de l'équation différentielle (E).

ÉNONCÉ 2

Soit l'équation différentielle (E'): $16y'' + y = 0$

Justifie que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2\cos\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$ est une solution de l'équation différentielle (E').

SOLUTION COMMENTÉE

Pour tout nombre réel x on a : $g'(x) = -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$ et $g''(x) = -\frac{1}{8}\cos\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$

$$\text{donc } 16g''(x) + g(x) = -2\cos\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{3}\right) + 2\cos\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

Comme $16g''(x) + g(x) = 0$ alors g est une solution de l'équation différentielle (E').

Savoir-faire 2

Savoir déterminer la solution d'une équation différentielle du type $y' = ay + b$, a et b deux nombres réels ($a \neq 0$) qui vérifie une condition initiale

ÉNONCÉ

Soit l'équation différentielle (F) : $y' - 4y = -20$.

Détermine la fonction h , solution de (F), qui prend la valeur 2 en 0

SOLUTION COMMENTÉE

On a (F) $\Leftrightarrow y' = 4y - 20$ donc h est définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = ke^{4x} + 5$, $k \in \mathbb{R}$

Comme $h(0) = 2$ alors $k + 5 = 2$ d'où $k = -3$. On en déduit que $h(x) = -3e^{4x} + 5$

Savoir-faire 3

Savoir déterminer la solution d'une équation différentielle du type $y'' = my$, m est un nombre réel non nul.

ÉNONCÉ 1

Soit l'équation différentielle (H) : $16y'' + y = 0$.

Détermine la fonction g solution de (H) qui vérifie $g(0) = 1$ et $g'(0) = -\frac{\sqrt{3}}{4}$

SOLUTION COMMENTÉE

On a : (H) $\Leftrightarrow y'' = -\frac{1}{16}y = -\left(\frac{1}{4}\right)^2 y$ donc g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = a\cos\left(\frac{x}{4}\right) + b\sin\left(\frac{x}{4}\right)$ a et b des nombres réels. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x ,

$$g'(x) = -\frac{a}{4}\sin\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{b}{4}\cos\left(\frac{x}{4}\right)$$

Comme $g(0) = 1$ alors $a = 1$. $g'(0) = -\frac{\sqrt{3}}{4}$, alors $\frac{b}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{4}$, donc $b = -\sqrt{3}$.

On en déduit que $g(x) = \cos\left(\frac{x}{4}\right) - \sqrt{3}\sin\left(\frac{x}{4}\right)$.

ÉNONCÉ 2

Soit l'équation différentielle (E) : $y'' - y = 0$.

Détermine la fonction f , solution de (E), qui vérifie $f(0) = 1$ et $f'(0) = 5$

SOLUTION COMMENTÉE

On a : (E) $\Leftrightarrow y'' = y = (1)^2 y$, donc f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ae^x + be^{-x}$, a et b des nombres réels. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x , $f'(x) = ae^x - be^{-x}$

Comme $f(1) = 1$, alors $a + b = 1$. $f'(1) = 5$ alors $a - b = 5$

On obtient le système $\begin{cases} a + b = 1 \\ a - b = 5 \end{cases}$ dont la résolution donne $a = 3$ et $b = -2$

Ainsi on : $f(x) = 3e^x - 2e^{-x}$

Savoir-faire 4 Savoir résoudre une équation différentielle avec second membre

ENDICE

Soit les équations différentielles (E) : $y' + y = xe^{-x}$ et (E') : $y' + y = 0$.

1- Résous sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E').

2- Justifie que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{1}{2}x^2e^{-x}$ est solution de (E).

3-

a) Démontre qu'une fonction f est solution de l'équation (E) si et seulement si la fonction $f \cdot g$ est solution de l'équation (E').

b) Résous sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E).

SOLUTION COMMENTÉE

1- On a (E') $\Leftrightarrow y' = (-y)$ donc les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E') sont les fonctions $x \mapsto ke^{-x}$.

2- Pour tout nombre réel x , on a : $g'(x) = \frac{1}{2}(2xe^{-x} - x^2e^{-x}) = xe^{-x} - \frac{1}{2}x^2e^{-x}$

$$g'(x) + g(x) = xe^{-x} - \frac{1}{2}x^2e^{-x} + \frac{1}{2}x^2e^{-x} = xe^{-x}$$

Comme $g' + g = xe^{-x}$ alors g est une solution de l'équation (E).

3-a)

f est une solution de (E) $f' + f = xe^{-x}$

$$f' + f = g' + g \quad \text{car } xe^{-x} = g' + g \text{ d'après 2)}$$

$$f' + f - g' - g = 0$$

$$(f' - g') + (f - g) = 0$$

donc $f - g$ est solution de (E')

b) D'après la question 3-a), $f - g$ doit être solution de (E') donc pour tout nombre réel x ,

$$(f - g)(x) = ke^{-x}. \text{ On en déduit que } f(x) = ke^{-x} + g(x) = ke^{-x} + \frac{1}{2}x^2e^{-x}, k \in \mathbb{R}.$$

Ainsi les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E) sont les fonctions : $x \mapsto ke^{-x} + \frac{1}{2}x^2e^{-x}, k \in \mathbb{R}$ ou encore

$$x \mapsto \left(\frac{1}{2}x^2 + k\right)e^{-x}, k \in \mathbb{R}.$$

V- JE M'EXERCE

1- Exercices de fixation / Application

Connaître la définition d'une équation différentielle

1 A chaque affirmation, réponds par Vrai si elle est correcte et réponds par Faux si elle est incorrecte.

1- Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est un nombre réel.

2- Une équation différentielle est une équation ayant pour inconnue une fonction et dans laquelle figure au moins une des dérivées successives de la fonction inconnue.

3- On appelle équation différentielle toute

équation dont l'inconnue est une fonction

Identifier une équation différentielle

3 Parmi les équations suivantes, indique les équations différentielles.

a) $y^2 + 4y = 0$; b) $y'' + 5y = e^{2x} + 1$; c) $y' - 2xy = 5$

d) $-6y + 12 = 0$ e) $y'' - 6y + 5y = 0$

Connaître les solutions d'une équation différentielle

3 Soit l'équation différentielle (E) : $y' = ay, a \in \mathbb{R}$.

Parmi les fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par : $f(x) = x^2 + 1, g(x) = ke^{ax}, k \in \mathbb{R}$ et $h(x) = e^{ax} + 1$ indique celle qui est solution de l'équation différentielle (E).



❶ Soit l'équation différentielle (E) : $y' = ay + b$, $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.

A chaque affirmation réponds par Vrai si elle est correcte et réponds par Faux si elle est incorrecte.

1- Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E) sont les fonctions : $x \mapsto ke^{ax} + \frac{b}{a}$, $k \in \mathbb{R}$

2- Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E) sont les fonctions : $x \mapsto ke^{-ax} + \frac{b}{a}$, $k \in \mathbb{R}$

3- Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E) sont les fonctions : $x \mapsto ke^{-ax} + \frac{b}{a}$, $k \in \mathbb{R}$

4- Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E) sont les fonctions : $x \mapsto ke^{ax} - \frac{b}{a}$, $k \in \mathbb{R}$

❷ Soit l'équation différentielle (E) : $y'' = 0$

A chaque affirmation réponds par Vrai si elle est correcte et réponds par Faux si elle est incorrecte.

1- Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E) sont les fonctions : $x \mapsto ax$, $a \in \mathbb{R}$

2- Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E) sont les fonctions $x \mapsto ax + b$, $a \in \mathbb{R}$

❸ Soit l'équation différentielle (E) : $y'' = \omega^2 y$, $\omega \in \mathbb{R}^*$

A chaque affirmation réponds par Vrai si elle est correcte et réponds par Faux si elle est incorrecte.

1- Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E) sont les fonctions $x \mapsto ae^{ax} + be^{-ax}$, a et b sont des réels.

2- Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E) sont les fonctions $x \mapsto a \cos \omega x + b \sin \omega x$, a et b sont des réels.

3- Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E) sont les fonctions $x \mapsto ae^{ax}$, $a \in \mathbb{R}$

❹ Soit l'équation différentielle $y'' = -\omega^2 y$, $\omega \in \mathbb{R}^*$

A chaque affirmation réponds par Vrai si elle est correcte et réponds par Faux si elle est incorrecte.

1- Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E) sont les fonctions $x \mapsto ae^{ax} + be^{-ax}$, a et b sont des réels.

2- Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E) sont les fonctions $x \mapsto a \cos \omega x + b \sin \omega x$, a et b sont des réels.

3- Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E) sont les fonctions $x \mapsto ae^{ax}$, $a \in \mathbb{R}$

Justifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle

❶ Soit l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = 0$

Justifie que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = -e^{2x}$ est une solution de l'équation (E).

❷ Soit l'équation différentielle (E') : $y'' - 9y = 0$

Justifie que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = -5e^{3x} + 2e^{-3x}$ est une solution de l'équation (E').

Résoudre une équation différentielle du type $y' = ay$, $a \in \mathbb{R}$

❶ Résous sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' + 4y = 0$

Résoudre une équation différentielle du type $y' = ay + b$, $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$

❶ Résous sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' = -2y + 18$

Résoudre une équation différentielle du type $y'' = my$, $m \in \mathbb{R}$

❶ Résous sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' = -4y$

❶ Résous sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' = 3y$

❶ Résous sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' = 0$.

Déterminer la solution une équation différentielle du type $y' = ay + b$, $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$ qui vérifie une condition donnée.

❶ Détermine la fonction f solution de l'équation différentielle $y' = -3y + 12$ qui prend la valeur 2 en 0.

Déterminer la solution une équation différentielle du type $y'' = my$, $m \in \mathbb{R}^*$ et qui vérifie à des conditions données.

❶ Détermine la fonction f solution de l'équation différentielle $y'' = 4y$ qui vérifie $f(0) = 2$ et $f'(0) = 1$.

❶ Détermine la fonction f solution de l'équation différentielle $y'' = -y$ qui vérifie $f(\frac{\pi}{2}) = 1$ et $f'(\frac{\pi}{2}) = 4$.

❶ Détermine la fonction g solution de l'équation différentielle $y'' = 0$ qui vérifie $g(1) = -2$ et $g(-3) = -14$.

2. Exercices de renforcement / Approfondissement

11 Résous sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

a) $y'' = e^{-2x}$; b) $y' = 1 - \ln x$; c) $y' = 3e^{2x}$

12 Résous sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (G) : $y' - 3y = -5$

2- Détermine la solution f de (G) dont la courbe représentative passe par le point $M(1; 5)$

13 Soit l'équation différentielle (E) : $2y' + y = 0$

1- Résous sur $\mathbb{R}$ l'équation (E).

2- Détermine la solution f de (E) dont la courbe admet au point d'abscisse -2 une tangente de coefficient directeur $\frac{3}{5}$.

14 Soit l'équation différentielle (F) : $y'' + 16 = -2e^x \sin x$. Détermine les nombres réels a et b pour que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (a \sin x + b \cos x)e^x \text{ soit solution de (F).}$$

15 Détermine la solution h de l'équation différentielle $y'' = 2x$ qui vérifie $h(0) = 1$ et $h(1) = 0$

16 Soit l'équation différentielle (E) définie par : (E) : $y' + 2y = 3e^{-3x}$.

1- Résous sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 0$.

2- Vérifie que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -3e^{-3x}$ est une solution de (E).

3- Soit h une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

a) Démontre que $h + g$ est solution de (E) si et seulement si g est solution de (E).

b) Dédus des questions précédentes les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E).

c) Détermine la solution f de (E) qui prend la valeur $\frac{3}{2}$ en zéro.

17 Soit l'équation différentielle $y'' + y = \sin x$

1- Détermine le nombre réel a de telle sorte que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = a \cos x$ soit solution de (E).

2-a) Soit f une fonction solution de (E). Démontre que $f - g$ est solution de l'équation (E') : $y'' + y = 0$

b) Résoudre l'équation (E')

3- Dédus-en la forme générale des solutions de (E)

18 Un laboratoire de recherche étudie l'évolution d'une population animale qui semble en voie de disparition. En l'an 2000, l'effectif était égal à mille (1000).

L'effectif de cette population évolue par rapport au temps t et peut être approché par une fonction f . Le temps t est exprimé en années à partir de 2000. La fonction f est dérivable, strictement positive sur l'intervalle $[2000; +\infty[$ et est solution de l'équation différentielle : (E₁) : $y'(t) + \frac{1}{200} y(t) = \frac{200}{t^2} + \frac{1}{t}$

1- Soit h la fonction dérivable et définie sur

$$\text{l'intervalle } [2000; +\infty[\text{ par : } h(t) = \frac{200}{t}$$

Vérifie que h est une solution de (E₁).

2- Résous l'équation différentielle (E₂) :

$$y'(t) + \frac{1}{200} y(t) = 0.$$

3-a) Démontre qu'une fonction g est solution de (E₁) si et seulement si $g - h$ est solution de (E₂).

b) Dédus-en les solutions de (E₁).

c) Sachant que $f(2000) = 1000$, vérifie que :

$$\forall t \in [2000; +\infty[, f(t) = 999,9e^{(10 - \frac{t}{200})} + \frac{200}{t}$$

d) Détermine le nombre d'individus de cette population animale en 2025.

(Donne le résultat arrondi à l'ordre 0).

19 Soit les équations différentielles (E) : $u' + 2u = 0$ et (E') : $u' + 2u = 2 + xe^{1-x}$.

1- Résous sur $\mathbb{V}$ l'équation (E).

2- Démontre que la fonction r définie sur $\mathbb{R}$ par $r(x) = 1 - (1-x)e^{1-x}$ est une solution de l'équation (E').

3-a) Démontre qu'une fonction v est solution de (E) si et seulement si $v - r$ est solution de (E).

b) Dédus-en les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E').

c) Détermine la solution q de (E') qui s'annule en 1.

20 1- Résous sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $y'' - 4y = 0$.

2- On considère l'équation différentielle (E') : $y'' - 4y = 4(x-1)^2 - 2$.

a) Démontre que le polynôme $p(x) = -x^2 + 2x - 1$ est solution de (E').

b) Démontre qu'une fonction f est solution de (E') si et seulement si la fonction $f - p$ est solution de (E).

c) Dédus-en les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E').

d) Détermine la solution f de (E') qui vérifie $f(0) = f'(0) = 0$.

21 Soit $y(t)$ le nombre d'atomes de radium d'une substance radio active à l'instant t exprimé en années. On admet que $y'(t) = -25 \times 10^{-5} y(t)$ et $y(0) = y_0$. Détermine le nombre d'années au bout duquel le nombre d'atomes de radium aura diminué de moitié

10 Dans une salle dont la température est 20°C , un corps s'est refroidi de 100°C à 60°C en 20 minutes. On admet que la vitesse de refroidissement est proportionnelle à la différence de température entre la température du corps et la température de

la salle (loi de Newton) et on négligera l'élévation de la température de la salle.

Déterminez en combien de minutes la température tombera à 30°C .

3. Situations complexes

11 En faisant une recherche sur le **radium** pour un exposé en physique – chimie dans une classe de Terminale D dans un lycée, un élève découvre les informations suivantes :

Le radium est une substance radioactive contenue dans l'uranium et découverte par les physiciens français Pierre et Marie Curie en 1898.

Cette substance émet des rayons alpha (noyaux d'hélium, de charge positive), bêta (particules de charge négative) et gamma (comparables aux rayons X), éminemment nocifs pour la santé.

Ce faisant, il se désintègre et on a constaté que la masse d'atomes de radium se désintégrant dans un court intervalle de temps $[t; t + dt]$ est proportionnel :

- au temps écoulé dt
- à la masse de radium présente à l'instant t .

De nombreuses expériences ont montré que la perte

de masse du radium est de l'ordre de $0,043\%$ par an. On appelle **période d'une substance radioactive**, le temps nécessaire pour qu'une masse donnée de cette substance diminue de la moitié de sa valeur.

En tant qu'élève de Terminale D, on vous propose de déterminer la période du radium, exprimée en années.

12 Un professeur de biologie cultive une colonie bactérienne de mille bactéries avec ses élèves de terminale D.

Sachant que l'accroissement de la population est proportionnel à cette population et double chaque quatre heures, utilisez vos connaissances mathématiques sur les équations différentielles pour déterminer le nombre de bactéries de la culture un jour après cette culture.



VI- RENDEZ-VOUS DES CURIEUX !

La notion d'équation différentielle apparaît chez les mathématiciens à la fin du XVII^e siècle. Encouragé par Huygens à étudier les mathématiques, Leibniz sera l'inventeur en 1686, en même temps que Newton, du calcul différentiel et intégral (*Nova methodus pro maximis et minimis*, 1684-86).

À cette époque, les équations différentielles s'introduisent en mathématique par le biais de problèmes d'origine mécanique ou géométrique, comme par exemple :

- Mouvement du pendule circulaire,
- Problème du mouvement de deux corps s'attirant mutuellement suivant la loi de la gravitation Newtonnienne,
- Problème de l'étude de mouvements de corps "élastiques" (tiges, ressorts, cordes vibrantes),
- Problème de l'équation de la courbe (appelée chaînette) décrivant la forme prise par une corde, suspendue aux deux extrémités et soumise à son propre poids.

Vers 1700, beaucoup de ces problèmes étaient déjà partiellement ou totalement résolus et quelques méthodes de résolution mises au point. Ensuite, les mathématiciens se sont progressivement intéressés à des classes de plus en plus larges d'équations différentielles. Assez curieusement, les équations différentielles linéaires à coefficients constants sans

second membre, qui apparaissent maintenant comme les plus simples, ne furent résolues qu'en 1739 par Euler. Il ne faut pas oublier que, pour les mathématiciens de cette époque, le maniement de la fonction exponentielle n'était pas encore familier.

Dans la phase que nous venons de décrire, les mathématiciens s'attachent au calcul effectif d'une solution.

MAQUETTE ET MISE EN PAGES : SERVICE INFOGRAPHIE
Achevé d'imprimer pour le compte
des ÉDITIONS SUPERNOVA
par MAKISSA PRINT Grand-Bassam
Août 2021
Dépot légal n° 17263-1^{er} trimestre 2021

DANS LA MEME COLLECTION

