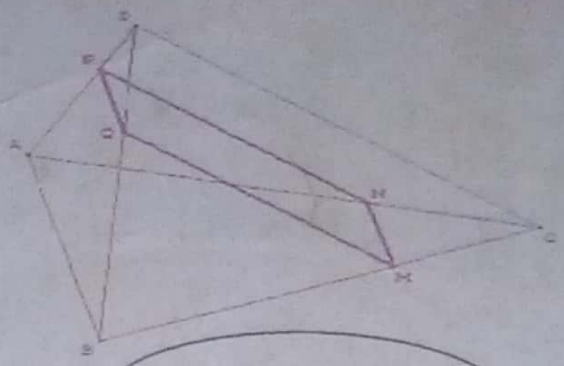


EDITION 2018

2500 fcfa

la pyramide

MATHEMATIQUES

COLLECTION "LA PYRAMIDE"
Tél. : 75 47 74 95 07
Burkina Faso

Terminales D

- ⇒ *Résumés de cours*
- ⇒ *Méthodes pour résoudre des problèmes*
- ⇒ *Recueil d'exercices et problème avec corrigés détaillés*
- ⇒ *Sujets type BAC*
- ⇒ *Sujets du BAC de 2009 à 2017*

$$\int_{\frac{1}{e}-1}^{0} \frac{1+\ln(x+1)}{x+1}dx = \left[\frac{1}{2}\times\left(1+\ln(x+1)\right)^2\right]_{-1+\frac{1}{e}}^{0}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(1+(-1)\right)^2 = \frac{1}{2}$$

« ***Le succès est la résultante de l'effort et de la méthode*** »

Rasmané NANA
Elève-inspecteur de Mathématiques

REPRODUCTION INTERDITE

Scanned by CamScanner

TABLE DES MATIERES

Avant propos :.....2

Complexes :.....3

Probabilité :.....11

Fonctions :.....20

Suites :.....35

Intégrations :.....40

Equations différentielles :.....45

Courbes paramétrées :.....47

Géométrie dans l'espace :.....41

Statistiques: :.....53

Sujets type BAC :.....55

Corrigés :.....76

La Pyramide 2018

Scanned by CamScanner

Avant propos

Ce fascicule, destiné aux élèves de la terminale D est conforme aux programmes en vigueur au Burkina-Faso.
Il est conçu de façon à être utilisé de manière non linéaire, l'élève peut commencer par le thème que le professeur a déjà traité en classe.

Enrichi de l'expérience et des suggestions de l'inspecteur NACOULMA et de ses collaborateurs, j'ai voulu rédiger dans un langage simple et rigoureux un fascicule accessible à tous les élèves de terminale D. En outre, je souhaite que ce fascicule soit un outil de travail utile et agréable pour tous les élèves, à qui je souhaite bonne chance à l'examen de l'année en cours.

J'espère que ce fascicule transmet ma conception ouverte et vivante des mathématiques et j'accueillirai avec reconnaissance, les critiques et suggestions susceptibles de l'améliorer car dit-on : toute œuvre humaine n'est jamais parfaite.

Je voudrais bien adresser mes sincères remerciements à tous ceux qui, de manières diverses, ont apporté leur soutien à l'aboutissement de cette œuvre.

Qu'Allah le tout puissant les rétribue au centuple...

L'auteur :

Scanned by CamScanner

Nombres complexes

I. Forme algébrique

Tout nombre complexe s'écrit de façon unique sous la forme algébrique $z = a + ib$ (a et b sont des réels) avec $i^2 = -1$

- a est appelé la partie réelle et est noée $\mathrm{Re}(z)$
- b est appelé la partie imaginaire et est notée $\mathrm{Im}(z)$

Théorème

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.

Soit deux nombres complexes $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$

$$a + ib = a' + ib' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$$

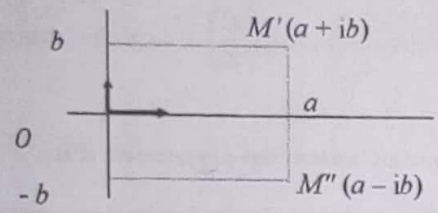
Conjugué d'un nombre complexe

Définition

On appelle *conjugué* du complexe z = a + i b, a et b réels, le complexe noté $\bar{z}$ et défini par $\bar{z} = a - ib$.

Interprétation géométrique

Les images de deux complexes conjugués sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses (appelé souvent axe des réels).



Exemples :

Les conjugués respectifs de 3, i, 1 - 5i sont -3, -i et 1 + 5i.

Théorèmes

Soit z un nombre complexe.

- z est réel si et seulement si $\bar{z} = z$
- z est imaginaire pur si et seulement si $\bar{z} = -z$
- $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$ et $z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$.

Propriétés

Pour tous nombres complexes z et z' : on a

- $\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z'}$ (le conjugué de la somme est la somme des conjugués)
- $\overline{zz'} = \bar{z}\,\bar{z'}$ (le conjugué du produit est le produit des conjugués)
- $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$ $(z' \neq 0)$ (le conjugué du quotient est le quotient des cojugués)
- $\forall n \in \mathbb{N}, \overline{z^n} = (\bar{z})^n$
- $z\bar{z} = a^2 + b^2$ avec $z = a + ib$

Méthodes

Pour écrire un quotient de complexes sous forme algébrique, on multiplié le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur (si n'est pas réel).

▷ Exemples

$$\frac{2+i}{3+2i} = \frac{(2+i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{6-4i+3i-2i^2}{3^2+2^2} = \frac{8}{13} - \frac{i}{13}$$

Résolutions d'équations complexes

a.Racine carrée d'un réel négatif

Définition

Tout réel strictement négatif a admet deux racines carrées $i\sqrt{-a}$ et $-i\sqrt{-a}$

On utilise cette définition dans la résolution des équations complexes du second degré dans le cas où $\Delta < 0$

b. Racine carrée d'un complexe

Définition on appelle racine carrée du nombre complexe a toute solution de l'équation $z^2 = a$

Calcul des racines carrées du complexe a

Soit $a = a_0 + ia_1$ et $z = x + iy$ avec a_0, a_1, x, y des réels

$$z^2 = a \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{{a_0}^2 + {a_1}^2} \\ x^2 - y^2 = a_0 \\ 2xy = a_1 \end{cases}$$

On utilise cette définition dans le cas où Δ est un nombre complexe.

c) Quelques exemples d'équations.

• Résolution de l'équation $\frac{1+iz}{z} = -1 + 3i$

Pour tout $z \neq 0$

$$\frac{1+iz}{z} = -1+3i \Leftrightarrow 1+iz = (-1+3i)z$$
$$\Leftrightarrow 1+iz = -z+3zi \Leftrightarrow iz-(-1+3i)z = 1$$
$$\Leftrightarrow (i+1-3i)z = -1 \Leftrightarrow z = -\frac{1}{1-2i}$$
$$\Leftrightarrow z = -\frac{1+2i}{(1-2i)(1+2i)} = -\frac{1+2i}{1^2+2^2} = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$$

Résolvons l'équation $az + b\bar{z} + c = 0$ avec a et b des nombres complexes.

Méthode

On pose $z = x + iy$ (x et y réels) et on remplace z et $\bar{z}$ par leurs formes algébriques dans l'équation pour trouver x et y puis l'expression de z.

▷ **Exemple**

• Résolution de l'équation $(1+i)z = \bar{z} - 2 + 3i$

Posons $z = x + iy$ (x et y réels)

$$(1+i)z = \bar{z} - 2 + 3i \Leftrightarrow (1+i)(x+iy) = x - iy - 2 + 3i$$
$$\Leftrightarrow x + xi + yi - y = x - 2 + (3-y)i$$
$$\Leftrightarrow x - y + i(x+y) = x - 2 + (3-y)i$$
$$\Leftrightarrow 2 - y + i(x + 2y - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - y = 0 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = -1 \end{cases}$$

D'où $\boxed{z = -1 + 2i}$

La Pyramide 2018

Scanned by CamScanner

Résolution d'équations complexes de type

$az^2+bz+c=0$ (a, b et c sont des réels)

Méthodes

- Si $\Delta>0$ alors l'équation admet deux solutions réelles

$z_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

- Si $\Delta=0$ alors l'équation admet une solution réelle

$z_1=\dfrac{-b}{2a}$

- Si $\Delta<0$ alors l'équation admet deux solutions complexes

$z_1=\dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2=\dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

▷ Exemple

Résolvons l'équation $z^2+z+2=0$

$\Delta=-7$ on a donc les solutions

$z_1=\dfrac{-1-i\sqrt{7}}{2}$ et $z_2=\dfrac{-1+i\sqrt{7}}{2}$

Résolutions d'équations du type

$az^2+bz+c=0$ (a, b et c sont des co;plexes)

Toute équation $az^2+bz+c=0$ avec a, b et c trois nombres complexes et $a\neq 0$ admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions $z_1=\dfrac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2=\dfrac{-b+\delta}{2a}$, où δ est une racine carrée de Δ.

▷ **Exemple**

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-iz+1-3i=0$

$\Delta=(-i)^2-4(1-3i)=-1-4+12i=-5+12i$

Soit $\delta=x+yi$ avec $(x;y)\in\mathbb{R}^2$ une racine carrée de Δ

on a d'après b) $\delta^2=\Delta\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=\sqrt{(-5)^2+12^2}\\x^2-y^2=-5\\2xy=12\end{cases}$

$\begin{cases}x^2+y^2=\sqrt{169}\\x^2-y^2=-5\\2xy=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=13\\x^2-y^2=-5\\xy=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\\\\xy=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\text{ ou }x=-2\\xy=6\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$. Donc une racine carrée de Δ est $\delta=2+3i$.

D'où les solutions de l'équation $z^2-iz+1-3i=0$ sont

$z=\dfrac{i+2+3i}{2}$ ou $z=\dfrac{i-2-3i}{2}$ soit

$z=1+2i$ ou $z=-1-i$. $\boxed{S=\{1+2i;-1-i\}}$

II. Forme trigonométrique- Module et arguments

Pour $z=a+ib$ (a et b reels)

$\boxed{\text{• le ;odule de } z \text{ est } |z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{z\bar{z}}}$

$\boxed{\text{•Si } z\neq 0\text{, pour tout reel } \theta \text{ tel } \begin{cases}\cos\theta=\dfrac{a}{|z|}\\\sin\theta=\dfrac{b}{|z|}\end{cases}\text{ est un}}$

argument de z. on note $\boxed{\arg(z)=\theta+2k\pi,k\in\mathbb{Z}}$

Pour nombre complexe z non nul, il existe un réel θ tel $z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$, cette écriture est appelée forme trigonométrique de z.

Propriétés des modules et arguments.

Propriétés des modules

Pour tous complexes z et z' :

$|z|=0\Leftrightarrow z=0$; $|-z|=|\bar{z}|=|-\bar{z}|=|z|$

$|z|=\sqrt{z\bar{z}}$; $|z+z'|\leq|z|+|z'|$ (inégalité triangulaire)

$|zz'|=|z||z'|$; $\left|\dfrac{1}{z}\right|=\dfrac{1}{|z|}$, $\left|\dfrac{z}{z'}\right|=\dfrac{|z|}{|z'|}$ si $z\neq 0$,

pour tout entier naturel n, $|z^n|=|z|^n$.

Propriétés des arguments

Pour tous complexes non nuls z et z'

$\arg(-z)=\arg z-\pi$ $\arg(\bar{z})=-\arg z$

$\arg(zz')=\arg(z)+\arg(z')$ $[2\pi]$ et, pour tout entier naturel n, $\arg(z^n)=n\arg(z)$ $[2\pi]$

$\arg\left(\dfrac{1}{z}\right)=-\arg(z)$ $[2\pi]$; $\arg\left(\dfrac{z'}{z}\right)=\arg(z')-\arg(z)$ $[2\pi]$

▷ **Exemples**

Méthodes pour calculer un argument d'un complexe

Il faut maîtriser la table des valeurs des angles remarquable suivant :

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Il faut aussi maîtriser la formule $-\cos\alpha=\cos(\pi-\theta)$ **et la résolution de** $\cos\theta=\cos\alpha$

$\cos\theta=\cos\alpha\Leftrightarrow\begin{cases}\theta=\alpha+2k\pi\\ou\\\theta=\alpha+2k\pi\end{cases},k\in\mathbb{Z}$

▷ Exemples

Ecrire sous la forme trigonométrique les complexes suivants : $z_0=\sqrt{3}+i$; $z_1=-1+i\sqrt{3}$; $z_2=1-i$; $z_3=-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$

* $z_0=\sqrt{3}+i$; $|z|=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$; soit θ un argument de z_0, on a $\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\\sin\theta=\dfrac{1}{2}\end{cases}$

La Pyramide 2018

Scanned by CamScanner

$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\cos\theta=\cos\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow\begin{cases}\theta=\frac{\pi}{6}+2k\pi\\ ou\\ \theta=-\frac{\pi}{6}+2k\pi\end{cases},k\in\mathbb{Z}$

Comme $\sin\theta>0$ donc $\theta=\frac{\pi}{6}$ d'où la forme trigonométrique est $z_0=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

*$z_1=-1+i\sqrt{3}$; $|z|=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$; soit θ un argument de z_1, on a $\begin{cases}\cos\theta=-\frac{1}{2}\\ \sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$

$\cos\theta=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos\theta=-\cos\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow\cos\theta=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow\cos\theta=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}\theta=\frac{2\pi}{3}+2k\pi\\ ou\\ \theta=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi\end{cases},k\in\mathbb{Z}$

Comme $\sin\theta>0$ donc $\theta=\frac{2\pi}{3}$ d'où la forme trigonométrique est $z_1=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

*$z_3=-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$; $|z|=\sqrt{2+2}=\sqrt{4}=2$; soit θ un argument de z_3, on a $\begin{cases}\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

$\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\cos\theta=-\cos\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\cos\theta=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow\cos\theta=\cos\left(\frac{4\pi}{4}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}\theta=\frac{3\pi}{4}+2k\pi\\ ou\\ \theta=-\frac{3\pi}{4}+2k\pi\end{cases},k\in\mathbb{Z}$

Comme $\sin\theta<0$ donc $\theta=-\frac{3\pi}{4}$ d'où la forme trigonométrique est $z_3=2\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right]$

Forme exponentielle d'un nombre complexe

Pour tout θ, on pose $\cos\theta+i\sin\theta=e^{i\theta}$

Si un nombre complexe z non nul admet r comme module et θ un argument alors $z=re^{i\theta}$ est appelée forme exponentielle de z.

Propriétés

Soit θ un réel, on a : $\left|e^{i\theta}\right|=1$; $\overline{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}$;

$e^{i\theta}\times e^{i\alpha}=e^{i(\theta+\alpha)}$; $\frac{1}{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}$; $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\alpha}}=e^{i(\theta-\alpha)}$; $\left(e^{i\theta}\right)^n=e^{in\theta}$

Remarque

Si $z=re^{i\theta}$ avec r>0 alors $|z|=r$ et $argz=\theta 2k\pi,k\in\mathbb{Z}$

▷ **Exemples classiques d'utilisation de la forme exponentielle.**

*calcul de $(1-i)^{12}$. Il est hors de question de faire le calcul sous forme algébrique

On détermine d'abord la forme exponentielle de $z=1-i$

$|z|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

$\begin{cases}\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$;

$\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\cos\theta=\cos\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\begin{cases}\theta=\frac{\pi}{4}+2k\pi\\ \theta=-\frac{\pi}{4}+2k\pi\end{cases}$. Comme $\sin\theta<0$ alors $\theta=-\frac{\pi}{4}$, donc $z=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$(1-i)^{12}=\left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^{12}=\left(\sqrt{2}\right)^{12}\times e^{-\frac{12i\pi}{4}}=64e^{-3i\pi}$

$=64e^{-i(\pi+2\pi)}=64e^{-i\pi}=-64$

D'où $(1-i)^{12}=-64$

*Soit $z_1=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ et $z_2=\sqrt{3}+i$

Mettre sous la forme trigonométrique $\frac{z_1}{z_2}$ et en déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

En calculant le module et un argument de z_1 et z_2, on a $z_1=2e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_2=2e^{i\frac{\pi}{6}}$

$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}}=e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)}=e^{i\frac{\pi}{12}}$ d'où $\frac{z_1}{z_2}=\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

En déduisons $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{\sqrt{3}+i}=\frac{\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-i\right)}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

On a donc $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

d'où $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Formule de Moivre

$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$.

Remarque

En développant le premier membre et en identifiant les parties réelles et imaginaires des deux

La Pyramide 2018

Scanned by CamScanner

membres, on obtient $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$

▷ **Exemple**

Exprimons $\cos 3x$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$

$$(\cos x+i\sin x)^3=\cos(3x)+i\sin(3x)$$

$$(\cos x+i\sin x)^3=\cos^3 x+3i\cos^2 x\times\sin x-3\cos x\times\sin^2 x-3i\sin^3 x$$

$$=\cos^3 x-3\cos x\times\sin^2 x+i\left(3\cos^2 x\times\sin x-\sin^3 x\right)$$

D'où par identification on a $\cos 3x=\cos^3 x-3\cos x\times\sin^2 x$

Formule d'Euler

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\text{ et }\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

On utilise la forme d'Euler pour les linéarisations de $\cos^n\theta$ et $\sin^n\theta$

▷ **Exemple**

Linéarisons $\cos^3 x$

$$\cos^3 x=\left(\frac{e^{ix}+e^{ix}}{2}\right)^3=\frac{1}{8}\left(e^{3ix}+3e^{2ix}.e^{-ix}+3e^{ix}.e^{-2ix}+e^{-3ix}\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left(e^{3ix}+e^{-3ix}+3e^{ix}+3e^{-ix}\right)=\frac{1}{8}(2\cos 3x+6\cos x)$$

$$=\frac{1}{4}\cos 3x+\frac{3}{4}\cos x$$

D'où $\cos^3 x=\frac{1}{4}\cos 3x+\frac{3}{4}\cos x$

Méthode de mise sous la forme exponentielle les complexes $e^{ix}+e^{iy}, e^{ix}-e^{iy}, 1+e^{ix}$ et $1-e^{ix}$

- $e^{ix}+e^{iy}=e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)}\left[e^{i\left(\frac{x-y}{2}\right)}+e^{-i\left(\frac{x-y}{2}\right)}\right]=2e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)}\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$
- $e^{ix}-e^{iy}=e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)}\left[e^{i\left(\frac{x-y}{2}\right)}-e^{-i\left(\frac{x-y}{2}\right)}\right]=2ie^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)}\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$
- $1+e^{ix}=e^{i0}+e^{ix}=e^{i\left(\frac{x}{2}\right)}\left[e^{-i\left(\frac{x}{2}\right)}+e^{i\left(\frac{x}{2}\right)}\right]=2e^{i\left(\frac{x}{2}\right)}\cos\left(\frac{x}{2}\right)$
- $1-e^{ix}=e^{i0}-e^{ix}=e^{i\left(\frac{x}{2}\right)}\left[e^{-i\left(\frac{x}{2}\right)}-e^{i\left(\frac{x}{2}\right)}\right]=-2ie^{i\left(\frac{x}{2}\right)}\sin\left(\frac{x}{2}\right)$

III. Nombres complexes et géométrie

1. Affixe d'un point ; Affixe d'un vecteur

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

- L'affixe du point $M(x,y)$ est $z_M=x+iy$
- L'affixe du milieu du segment $[AB]$ est $z_I=\frac{z_A+z_B}{2}$
- Soit G barycentre des points pondérés $(A;\alpha)$, $(B;\beta)$ et $(C;\gamma)$. L'affixe du point G est

$$z_G=\frac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

- L'affixe du vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ est $z_{\vec{u}}=x+iy$
- L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A$ (affixe de l'extrémité –affixe de l'origine)
- L'affixe du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ est $z_{\vec{u}+\vec{v}}=z_{\vec{u}}+z_{\vec{v}}$
- L'affixe du vecteur $k\vec{u}$ est $z_{k\vec{u}}=k\times z_{\vec{u}}$

2. Interprétation géométrique d'un argument, le module d'un complexe.

- si M est d'affixe $z\neq 0$ alors $|z|=OM$ et $\arg(z)=\left(\vec{u};\overrightarrow{OM}\right)$ ou $\left(\vec{u};\overrightarrow{OM}\right)+2k\pi$
- Si $\vec{t}$ est un vecteur d'affixe $z\neq 0$ alors $|z|=\|\vec{t}\|$ et $\arg(z)=\left(\vec{u};\vec{t}\right)+2k\pi$

N.B Géométriquement le module est une distance et l'argument est un angle orienté.

- $|z_A-z_B|=AB$ et $\arg(z_A-z_B)=\arg\left(z_{\overrightarrow{BA}}\right)=\left(\vec{u};\overrightarrow{BA}\right)+2k\pi$ avec $z_A\neq z_B$
- $\arg\left(\frac{z_D-z_A}{z_D-z_C}\right)=\arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{CD}}}\right)=\left(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{AB}\right)+2k\pi$

3. Ecriture complexe des transformations du plan

Dans le plan orienté muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$ on considère la transformation qui associe à tout point M d'affixe z le point M' d'affixe z'

Transformation	Ecriture complexe
Translation dont le vecteur est d'affixe $z\,z_0$	$z'=z+z_0$
Homothétie de centre Ω d'affixe ω et de rapport k	$z'-\omega=k(z-\omega)$
Symétrie de centre Ω d'affixe ω	$z-\omega=-(z-\omega)$
Rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle de mesure α	$z'-\omega=e^{i\alpha}(z-\omega)$
Rotation de centre O et d'angle de mesure α	$z'=e^{i\alpha}z$
Symétrie d'axe xx'	$z'=\bar{z}$
Symétrie d'axe yy'	$z'=-\bar{z}$

2. Interprétation géométrique de l'écriture $z'=z+z_0$

Soit la transformation f qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'

Ecriture complexe de f	**Interprétation géométrique de f**
$z'=z+z_0$	f est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe z_0
$z'=e^{i\alpha}z$	f est la rotation de centre O et d'angle de mesure α

Nature d'un triangle

Soit A, B et C trois points d'affixes respectives z_A, z_B et z_C. Posons $Z=\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$

La Pyramide 2018

Scanned by CamScanner

Si	Alors
$\lvert Z\rvert=1$	Le triangle ABC est un triangle isocèle en A
$Z=e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $Z=e^{-i\frac{\pi}{3}}$	Le triangle ABC est un triangle équilatéral
Z est imaginaire pur	Le triangle ABC est un triangle rectangle en A
$Z=i$ ou $Z=-i$	Le triangle ABC est un triangle rectangle et isocèle en A

Interprétation géométrique de relations complexes

Relation complexe	Interprétation géométrique
$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ réel	A, B et C alignés
$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ imaginaire pur	(AB) est perpendiculaire à (CD)
$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=i$ ou $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=-i$	AB = CD et
$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\times\frac{z_C-z_D}{z_B-z_D}$ réel	A, B, C et D sont alignés ou cocycliques

Lieux géométrique

Soit M, A et B des points d'affixes respectives z, a et b

Ensemble des points M tels que	Interprétation géométrique
$\lvert z-a\rvert=r$ avec r>0	est le cercle de centre A et de rayon r
$\lvert z-a\rvert=\lvert z-b\rvert$	est la médiatrice du segment $[AB]$
$\arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right)=0+2k\pi$	est la droite (AB) privé du segment $[AB]$
$\arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right)=\pi+2k\pi$	est le segment $[AB]$ privé des points A et B
$\arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right)=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi$	est le demi-cercle de diamètre $[AB]$ privé des points A et B
$\arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right)=\pm\frac{\pi}{2}+k\pi$	est le cercle de diamètre $[AB]$ privé des points A et B
$\frac{z-a}{z-b}$ soit réel	est la droite (AB) privé du point B
$\frac{z-a}{z-b}$ soit imaginaire pur	est le cercle de diamètre $[AB]$ privé des points A et B

Caractérisation d'un réel et d'un imaginaire pur.

Caractérisation d'un réel

Soit z un nombre complexe

- z est réel $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}\mathrm{Im}(z)=0\\ \underline{ou}\\ z=\bar{z}\\ ou\\ \arg(z)=0+2k\pi \text{ ou } \arg(z)=\pi+2k\pi\end{cases}$

- z est imaginaire pur $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}\mathrm{Re}(z)=0\\ \underline{ou}\\ z=-\bar{z}\\ ou\\ \arg(z)=\frac{\pi}{2}+2k\pi \text{ ou } \arg(z)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi\end{cases}$

Méthodes

Pour déterminer un ensemble de points M d'affixe z tels qu'une relation complexe soit réelle ou imaginaire pure, on utilise deux méthodes à savoir la méthode analytique et la méthode géométrique

—∘ La méthode analytique

Il s'agit ici de poser $z=x+iy$ avec x et y des réels et d'écrire la relation complexe sous forme algébrique et prendre la partie nulle si la relation complexe est imaginaire pure ou prendre la partie imaginaire nulle si on veut que la relation complexe soit réelle

▷ Exemples

a) Déterminons l'ensemble E des points M d'affixe z tels que $(2+i)z+3-4i$ soit imaginaire pur

Posons $z=x+iy$ avec $(x;y)\in IR\times IR$

$(2+i)z+3-4i=(2+i)(x+iy)+3-4i$

$=2x-y+3+i(x+2y-4)$

$(2+i)z+3-4i$ est imaginaire lorsque sa partie réelle est nulle c'est-à-dire $2x-y+3=0$

$2x-y+3=0\Leftrightarrow y=2x+3$. Donc l'ensemble E cherché est la droite d'équation $y=2x+3$

b) Déterminons l'ensemble G des points M d'affixe z tels que $\frac{z-i}{z-2}$ soit réel

Posons $z=x+iy$ avec x et y des réels

$$\frac{z-i}{z-2}=\frac{x+iy-i}{x+iy-2}=\frac{x+i(y-1)}{x-2+iy}=\frac{[x+i(y-1)][x-2-iy]}{[x-2+iy][x-2-iy]}$$

$$=\frac{x(x-2)-ixy+i(y-1)(x-2)+y(y-1)}{(x-2)^2+y^2}$$

$$=\frac{x^2-2x+y^2-y}{(x-2)^2+y^2}+i\frac{-2y-x+2}{(x-2)^2+y^2}$$

$\frac{z-i}{z-2}$ est réel lorsque sa partie imaginaire est nulle

c'est-à-dire $\frac{-2y-x+2}{(x-2)^2+y^2}=0$

$\frac{-2y-x+2}{(x-2)^2+y^2}=0\Leftrightarrow -2y-x+2=0$ et $(x-2)^2+y^2\neq 0$

$-2y-x+2=0$ et $(x-2)^2+y^2\neq 0$

$\Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x+1$ et $x\neq 2$ et $y\neq 0$. Par conséquent l'ensemble G cherché est la droite d'équation $y=-\frac{1}{2}x+1$ privée du point de coordonnées $(2;0)$

La Pyramide 2018

Scanned by CamScanner

⊸ La méthode géométrique

Il s'agit là de chercher à écrire sous forme d'angle orienté l'argument de la relation complexe. Cet angle orienté est soit égale à $0+k\pi$ si la relation complexe est réelle et $\frac{\pi}{2}+k\pi$ si la relation est imaginaire pure.

▷ **Exemple**

Déterminons l'ensemble G des points M d'affixe z tels que $\frac{z-i}{z-2}$ soit réel

Soit le point A d'affixe i et le point B d'affixe 2

$\frac{z-i}{z-2}=\frac{z-z_A}{z-z_B}=\frac{z_{\overrightarrow{AM}}}{z_{\overrightarrow{BM}}}$. Donc

$\arg\left(\frac{z-i}{z-2}\right)=\arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{AM}}}{z_{\overrightarrow{BM}}}\right)=\left(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM}\right)$. Ainsi $\frac{z-i}{z-2}$ est lorsque $\frac{z-i}{z-2}=0$ ou $\arg\left(\frac{z-i}{z-2}\right)=k\pi$ c'est-à dire

$z=i$ et $z\neq 2$ ou $\arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{AM}}}{z_{\overrightarrow{BM}}}\right)=k\pi$ soit

$M=A$ et $M\neq B$ ou $\left(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM}\right)=k\pi$. O en déduit que l'ensemble G cherché est la droite (AB) privé du B

Exercices de synthèse

Exercice 1

Soit le nombre complexe $a=\frac{5+3i\sqrt{3}}{2\left(1-2i\sqrt{3}\right)}$

1.Ecrire a sous forme algébrique.

2. Vérifier que $a^2=\overline{a}$. En déduire a^3 et montrer que $1+a+a^2=0$

3. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $\left(o;\vec{u};\vec{v}\right)$, on donne les points A_1, A_2 et A_3 d'affixes respectives 1 ; a et a^2.

a. Déterminer les coordonnées cartésiennes des points A_1; A_2 et A_3 puis les placer dans le repère en laissant les traits de construction.

b. Montrer que le triangle $A_1A_2A_3$ est un triangle équilatéral.

Exercice 2

Soit le nombre complexe $Z=\frac{z}{z-1}$ où z est un nombre complexe différent de 1.

1.a. Pour $z=\frac{1+i}{2}$, écrire Z sous forme algébrique.

b. Montrer que si Z est réel alors z est réel.

2. On pose $z=x+iy$ et $Z=X+iY$ avec x, y, X et Y des réels. Montrer que :

$X=\frac{x^2+y^2-x}{(x-1)^2+y^2}$ et $Y=\frac{-y}{(x-1)^2+y^2}$

3. Le plan complexe muni d'un repère orthonormé $\left(o;\vec{u};\vec{v}\right)$. Déterminer et construire les ensembles suivants : (D) ensemble des points M d'affixe z tel que soit réel ; (C) ensemble des points M d'affixe z tels que Z soit imaginaire pur.

Exercice 3

a. On considère le nombre complexe $z=1-i\sqrt{3}$. Mettre z sous forme trigonométrique. Calculer z^2 et z^3. En déduire z^{1992} et z^{1994}.

b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3+8=0$ (on remarquera que cette équation a une racine évidente réelle). En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(iz-1)^3+8=0$. Donner les solutions sous forme algébrique.

Exercice 4

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, i désigne le nombre de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$

1. Montrer que $(1+i)^6=-8i$.

2. On considère l'équation (E) : $z^2=-8i$.

a. Déduire de 1. une solution de l'équation (E).

b. L'équation (E) possède une autre solution ; écrire cette solution sous forme algébrique.

3. Déduire également de 1. une solution de (E') : $z^3=-8i$.

4. On considère le point A d'affixe $2i$ et la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

a. Déterminer l'affixe b du point B, image de A par r, ainsi que l'affixe c du point C, image de B par r.

b. Montrer que b et c sont solutions de (E').

5. a. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 2 cm), représenter les points A, B et C.

b. Quelle est la nature de la figure que forment les images de ces solutions ?

c. Déterminer le centre de gravité de cette figure.

Exercice 5

On donne le nombre complexe

$z=-\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}$

a. Exprimer z^2 sous forme algébrique

b. Exprimer z^2 sous forme exponentielle.

c. En déduire z sous forme exponentielle.

Exercice 6

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 1 cm)

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-8z\sqrt{3}+64=0$.

2. On considère les points A et B qui ont pour affixes respectives les nombres complexes $a=4\sqrt{3}-4i$ et $b=4\sqrt{3}+4i$.

a. Ecrire a et b sous forme exponentielle.

b. Calculer les distances OA, OB, AB. En déduire la nature du triangle OAB.

La Pyramide 2018

Scanned by CamScanner

3. On désigne par C le point d'affixe $c=-\sqrt{3}+i$ et par D son image par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{3}$. Déterminer l'affixe du point D.

4. On appelle G le barycentre des trois points pondérés $(O\,;-1)$, $(D\,;+1)$, $(B\,;+1)$.

a. Justifier l'existence de G et montrer que ce point a pour affixe $g=4\sqrt{3}+6i$.

b. Placer les points A, B, C, D et G sur une figure.

c. Montrer que les points C, D et G sont alignés.

d. Démontrer que le quadrilatère $OBGD$ est un parallélogramme.

Exercice 7

1. On considère le polynôme P de la variable complexe z, défini par :

$P(z)=z^3+\left(1-i\sqrt{2}\right)z^2+\left(74-i\sqrt{2}\right)z-74i\sqrt{2}$.

a. Déterminer le nombre réel y tel que iy soit solution de l'équation $P(z)=0$.

b. Trouver deux nombres réels a et b tels que, pour tout nombre complexe z, on ait

$P(z)=\left(z-i\sqrt{2}\right)\left(z^2+az+b\right)$.

c. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation $P(z)=0$.

2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. On prendra 1 cm pour unité graphique.

a. Placer les points A, B et I d'affixes respectives $z_A=-7+5i$; $z_B=-7-5i$ et $z_I=i\sqrt{2}$.

b. Déterminer l'affixe de l'image du point I par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

c. Placer le point C d'affixe $z_C=1+i$. Déterminer l'affixe du point N tel que $ABCN$ soit un parallélogramme.

d. Placer le point D d'affixe $z_D=1+11i$.

Calculer $Z=\frac{z_A-z_C}{z_D-z_B}$ sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique. Justifier que les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires et en déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.

Exercice 8

Partie A

1. z_1 et z_2 sont des nombres complexes ; résoudre le système d'équations suivant $\begin{cases} z_1\sqrt{3}-z_2=-2 \\ z_1-z_2\sqrt{3}=-2i \end{cases}$.

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct de centre O, d'unité graphique 4 cm, on considère les points A et B d'affixes respectives : $z_A=-\sqrt{3}+i$ et $z_B=-1+i\sqrt{3}$.

Donner les écritures de z_A et z_B sous forme exponentielle. Placer les points A et B.

3. Calculer module et argument de $\frac{z_A}{z_B}$.

En déduire la nature du triangle ABO et une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$.

4. Déterminer l'affixe du point C tel que $ACBO$ soit un losange. Placer C. Calculer l'aire du triangle ABC en cm².

Partie B

Soit f la transformation qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z'=e^{-i\frac{\pi}{6}}z$.

1. Définir cette transformation et donner ses éléments caractéristiques.

2. Quelles sont, sous forme exponentielle, les affixes de A', B' et C' images par f de A, B et C ?

3. Quelle est l'aire du triangle $A'B'C'$ en cm² ?

Exercice 9

1. Développer $(1-\sqrt{2})^2$

2. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l' équation $z^2-(1+\sqrt{2})z+\sqrt{2}=0$.

3. Résoudre dans l'ensemble des complexes les équations $z+\frac{1}{z}=1$ puis $z+\frac{1}{z}=\sqrt{2}$.

4. Soit $P(z)$ le polynôme de la variable complexe z défini par

$P(z)=z^4-(1+\sqrt{2})z^3+(2+\sqrt{2})z^2-(1+\sqrt{2})z+1$.

Vérifier que pour tout z non nul, on a

$\frac{P(z)}{z^2}=\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-(1+\sqrt{2})\left(z+\frac{1}{z}\right)+\sqrt{2}$.

En déduire les solutions de l'équation $P(z)=0$.

Exercice 10

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

On appelle A, B et C les points d'affixes respectives $z_A=-1+3i$ et $z_B=-2$ et $z_C=-\frac{3-3i}{2}$.

Soit f l'application du plan privé de A dans le plan qui, à tout point M d'affixe z distincte de z_A, associe le point M' d'affixe z' définie par : $z'=\frac{z+2}{z+1-3i}$.

1. Factoriser $z^2-3iz-2$ en remarquant que $z=i$ en est une solution, puis résoudre l'équation

(E) : $z^2-3iz-2=0$

2. Déterminer les affixes des points invariants par f. (*Un point est invariant lorsque $z=z'$*)

3. Déterminer l'ensemble des points M tels que M' appartienne au cercle de centre O de rayon 1.

4. En posant $z=x+iy$, déterminer $\mathrm{Im}(z')$ en fonction de x et y. En déduire l'ensemble des points M tels que M' appartienne à l'axe des abscisses.

5. a. Montrer que pour tout z différent de $-1+3i$ on a l'équivalence suivante :

$\frac{z+2}{z+1-3i}=-\frac{\overline{z}+2}{\overline{z}+1+3i}\Leftrightarrow(z-z_C)(\overline{z-z_C})=\frac{5}{2}$.

b. En déduire l'ensemble des points M tels que M' ait une affixe imaginaire pure (*on peut répondre à la question b en admettant le résultat de la question a).*

La Pyramide 2018

Scanned by CamScanner

Exercice 11

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique : 4 cm.

On considère le point A d'affixe $z_A = 2+i$ et le cercle (Γ) de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.

1. Faire une figure qui sera complétée tout au long de l'exercice.

2. a. Déterminer les affixes des points d'intersection de (Γ) et de l'axe $(O;\vec{u})$.

b. On désigne par B et C les points d'affixes respectives $z_B = 1$ et $z_C = 3$.

Déterminer l'affixe z_D du point D diamétralement opposé au point B sur le cercle (Γ).

3. Soit M le point d'affixe $\frac{3}{5}+\frac{6}{5}i$.

a. Calculer le nombre complexe $\frac{z_D - z_M}{z_B - z_M}$.

b. Interpréter géométriquement un argument du nombre $\frac{z_D - z_M}{z_B - z_M}$; en déduire que le point M appartient au cercle (Γ).

4. On note (Γ') le cercle de diamètre $[AB]$. La droite (BM) recoupe le cercle (Γ') en un point N.

a. Montrer que les droites (DM) et (AN) sont parallèles.

b. Déterminer l'affixe du point N.

5. On désigne par M' l'image du point M par la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

a. Déterminer l'affixe du point M'.

b. Montrer que le point M' appartient au cercle (Γ').

Exercice 12

Le plan complexe est muni du repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$; unité graphique 2 cm. On appelle A et B les points du plan d'affixes respectives $a = 1$ et $b = -1$. On considère l'application f qui, à tout point M différent de point B, d'affixe z, fait correspondre le point M' d'affixe z' définie par $z' = \frac{z-1}{z+1}$. *On fera une figure qui sera complétée tout au long de cet exercice.*

1. Déterminer les points invariants de f c'est-à-dire les points M tels que $M = f(M)$.

2. a. Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de -1, $(z'-1)(z+1) = -2$.

b. En déduire une relation entre $|z'-1|$ et $|z+1|$, puis entre arg $(z' - 1)$ et arg $(z + 1)$, pour tout nombre complexe z différent de -1. Traduire ces deux relations en termes de distances et d'angles.

3. Montrer que si M appartient au cercle (C) de centre B et de rayon 2, alors M' appartient au cercle (C') de centre A et de rayon 1.

4. Soit le point P d'affixe $p = -2 + i\sqrt{3}$.

a. Déterminer la forme exponentielle de $(p + 1)$.

b. Montrer que le point P appartient au cercle (C).

c. Soit Q le point d'affixe $q = -\overline{p}$ où $\overline{p}$ est le conjugué de p. Montrer que les points A, P et Q sont alignés.

d. En utilisant les questions précédentes, propo une construction de l'image P' du point P par l'application f.

Exercice 13

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les poin M_n d'affixes $z_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(1+i\sqrt{3}\right)$ où n est un entier naturel.

1. Exprimer z_{n+1} en fonction de z_n puis z_n en fonction de z_0 et n.

Donner z_0, z_1, z_2, z_3 et z_4 sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.

2. Placer les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4 (unité graphique 4 cm).

3. Déterminer la distance OM_n en fonction n.

4. a) Montrer que l'on a $M_nM_{n+1} = \frac{\sqrt{5}}{2^n}$ pour tout entier naturel.

b) On pose $L_n = \sum_{k=0}^{n} M_kM_{k+1}$ (c'est-à-dire $L_n = M_0M_1 + M_1M_2 + ..M_nM_{n+1}$)

déterminer L_n en fonction de n, puis la limite de quand n tend vers $+\infty$.

5. Déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM_n}\right)$ fonction de n.

Pour quelles valeurs de n les points O, M_0 et M_n sont-ils alignés ?.

La Pyramide 2018

Scanned by CamScanner

Les Probabilités

I. Dénombrement

Dénombrer c'est trouver le nombre d'éléments d'un ensemble.

Les principes de dénombrement

Principe de la somme

Soit E un ensemble de cardinal fini. Si $A_1, A_2, ...A_p$ constitue une partition de E alors

$cardE = cardA_1 + cardA_2 + ... + cardA_p$

Exemple

Combien a-t-il de carrés dont les côtés sont matérialisés sur la figure ci-dessous.



Soit E l'ensemble de tous les carrés. Dans il y a des carrés d'un carreau, de 2 carreaux, de 3 carreaux et de 4 carreaux. Notons A_1, A_2, A_3 et A_4 l'ensemble de ces carrés ayant pour côtés respectifs 1 ; 2 ; 3 et 4 carreaux. Les sous-ensembles A_1, A_2, A_3 et A_4 constituent une partition de E (puisqu'ils n'ont aucun élément en commun et que leur réunion est E.

D'après le principe de la somme

$cardE = cardA_1 + cardA_2 + cardA_3 + cardA_4$

Les carrés d'un carreau sont au nombre de 16 donc $cardA_1 = 16$

Les carrés de 2 carreaux sont au nombre de 9 donc $cardA_2 = 9$

Les carrés de 3 carreaux sont au nombre de 4 donc $cardA_3 = 4$

Les carrés de 4 carreaux sont au nombre de 1 donc $cardA_4 = 1$.

D'où $cardE = 16 + 9 + 4 + 1 = 30$

Il y a au total 30 carrés dont les côtés sont matérialisés sur la figure ci-dessus.

Principe du produit ou principe multiplicatif

Lorsqu'une situation comporte p étapes offrant respectivement $n_1, n_2, ...n_p$ possibilités (où chaque n_i ne dépend que l'étape i), le nombre total d'issues est $n_1 \times n_2 \times ... \times n_p$. C'est la règle utilisée lorsqu'on dresse un arbre.

Exemples

a)Un code comporte deux lettres distinctes suivies d'un chiffre non nul. Combien peut-on former de codes distincts ?

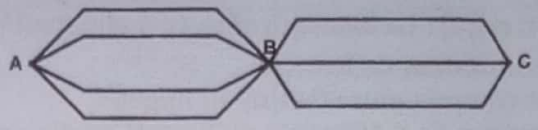
pour former un code il y a 3 étapes : choix de la première lettre, de la deuxième lettre puis du chiffre.

Le choix de la première lettre offre 26 possibilités

Le choix de la deuxième lettre offre 25 possibilités

Le choix du chiffre offre 9 possibilités. D'après le principe multiplicatif le nombre cherché est $26 \times 25 \times 9 = 5850$ codes distincts

b) Quel est le nombre d'itinéraires distincts menant de A à C ? et le nombre d'itinéraires « aller-retour » A-C-A n'empruntant que des chemins distincts ?



Le nombre d'itinéraires distincts menant de A à C

Pour aller de A à C, il y a deux étapes : l'étape de A à B offrant 4 possibilités et l'étape de B à C offrant 3 possibilités. D'après le principe multiplicatif, le nombre d'itinéraires distincts menant de A à C est $4 \times 3 = 12$

Pour aller de A à C et revenir il y a 4 étapes :

A l'aller on a

l'étape de A à B qui offre 4 possibilités

L'étape de B à C qui offre 3 possibilités

Au retour

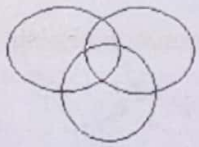
L'étape de C à B offre 2 possibilités car on a déjà emprunté un chemin pour quitter de B à C.

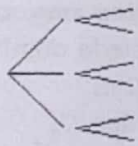
L'étape de B à A offre 3 possibilités pour les mêmes raisons que précédemment.

Donc le nombre d'itinéraires « aller-retour » A-C-A n'empruntant que des chemins distincts est $4 \times 3 \times 2 \times 3 = 72$.

De ces principes, on peut dégager deux outils de représentation de situations de dénombrement :

Les diagrammes les arbres





Le dénombrement étant en général rattaché à des notions ensemblistes, on introduit les notions suivantes :

Définitions

Soit E un ensemble de cardinal fini n. soit p un entier supérieur ou éal à zéro.

On appelle liste de p éléments de E ou p-listes de E toute suite ordonnée de p éléments de E non nécessairement distincts.

Exemple

$E = \{0;1;2;....;99\}$. Une 5-listes de E est par exemple $(21;12;4;15;98)$

Une 6-listes de E est $(4;72;4;4;8)$

On appelle arrangement de p éléments de E toute suite ordonnée de p éléments de E deux à deux distincts.

Exemple

Scanned by CamScanner

$E=\{a;b;d;....;z\}$. Les listes suivantes $(b;e;a;u),(h;i;v;e;r)$ sont respectivement un arrangement de 4 et 5 éléments de E.

On appelle permutation de E toute liste de n éléments deux à deux distincts.

Exemple

$E=\{u;r;e;c;s\}$. La liste suivante $(s;u;c;r;e)$ est une permutation de E.

Si p est compris entre 0 et n, on appelle combinaison de p éléments de E toute partie de E ayant p éléments.

Exemple

$E=\{a;b;c\}$ et p = 2. Les combinaisons de 2 éléments de E sont les parties $\{a;b\},\{a;c\},\{b;c\}$

Maintenant comment dénombrer les structures précédemment définies ?

Théorème

Soit E un ensemble fini de cardinal n. soit p un entier naturel.

- Le nombre de p-listes de E est n^p

Si p est compris entre 0 et n :

- Le nombre d'arrangements de p éléments de E est noté A_p^n et vaut $n(n-1)(n-2)...(n-p+1)$
- Le nombre de permutation de E est noté $n!$ et se lit factoriel n et vaut $n(n-1)(n-2)\times...\times 2\times 1$
- Le nombre de combinaisons de p éléments de E est noté C_n^p et vaut $\frac{n!}{p!(n-p)!}$

Interprétation importante

C_n^p représente le nombre de façons de choisir p objets parmi n.

Propriétés des C_n^p

Propriété 1 : symétrie

Pour tout entier n et tout entier p tel que $0\le p\le n$ on a : $C_n^p=C_n^{n-p}$

Conséquences $C_n^0=C_n^n=1$; $C_n^1=C_n^{n-1}=n$

Exemple le nombre de façons de choisir 2 délégués parmi 30 élèves est égal au nombre de façons de choisir 20 élèves non délégués parmi 30. : $C_{30}^2=C_{30}^{28}$

Propriété 2 : Relation de Pascal

Pour tout entier n et tout entier p tel que $1\le p\le n-1$ on a : $C_n^p=C_{n-1}^p+C_{n-1}^{p-1}$

Formule du binôme de Newton

Théorème

Pour tous nombres réels ou complexes a et b on a : $(a+b)^n=\sum_{p=0}^{n}C_n^p a^{n-p}b^p$

Exemple

$$(a+b)^2=\sum_{p=0}^{2}C_2^p a^{2-p}b^p=C_2^0a^2b^0+C_2^1ab+C_2^2a^0b^2$$
$$=a^2+2ab+b^2$$

Applications

-linéarisation de lignes trigonométriques (cela facilitera leur intégration)

Les différents types de tirages dans une u

Soit une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. on veut effectuer un tirage de k boules de l'urne (k étant entier naturel compris entre 1 et n).

Soit on tire une à une les k boules, soit on tire toute les k boules d'un seul coup.

Si on tire les boules une à une, on dit qu'on effectue un tirage successif. Il deux type de tirage successif : le tirage successif sans remise et le tirage successif avec remise.

Si on tire les k boules d'un seul coup, on dit qu'on effectue un tirage simultané.

Le tirage successif sans remise : Arrangement

On extrait successivement et sans remise k boules. Il en résulte que la même boule ne peut être choisie plusieurs fois et que $k\le n$. Il y a k étapes dans ce type de tirage : la première étape offre n possibilités, la deuxième étape offre n-1 possibilités, ainsi de suite jusqu'à la k-ème étape qui offre n-k+1 possibilités donc Le nombre de tirage dans ce cas est

$A_k^n=n(n-1)(n-2)...(n-k+1)$

Le tirage successif avec remise : p-listes

On extrait successif et avec remise k boules. Il résulte que la même boule peut être choisie plusieurs fois et que l'on peut avoir $k\ge n$. Ici aussi il y a k étapes et chaque étape offre n possibilités puisqu'on remet la boule tirée avant d'effectuer le prochain tirage. Donc le nombre de tirage de ce cas est n^k.

Le tirage simultané : Combinaisons

On extrait simultanément k boules de l'urne. Il résulte que toutes les k boules sont extraits en même temps, ainsi un tirage est constitué d'une partie contenant k boules et par conséquent le nombre de tirage est $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$

Probabilité

I) Le vocabulaire des probabilités

1.expérience aléatoire

Le lancer d'une pièce de monnaie, le lancer d'un dé, le tirage de boules dans une urne, ... sont des expériences aléatoires, car avant de les effectuer on ne peut pas prévoir avec certitude quel en sera le résultat qui dépend en effet du hasard. lors d'une expérience aléatoire :

Scanned by CamScanner

L'ensemble des résultats possibles est appelé nivers et on le note généralement Ω ;
Toute partie de Ω est appelé Evénement ;
Un événement qui comporte un seul élément est ppelé événement élémentaire ;
étant donné un univers Ω, l'événement Ω est événement certain ;
l'ensemble vide est l'événement impossible ;
Soit A un événement d'un univers Ω.
événement formé de tous les éléments de Ω qui appartiennent pas à A est appelé événement ontraire de A et on est noté $\overline{A}$;
L'événement $A \cap B$ (noté aussi « A et B ») est événement formé des éléments de Ω appartenant A et à B ;
L'événement $A \cup B$ (noté aussi « A ou B ») est événement formé des éléments de Ω appartenant u moins à l'un des événements A ou B ;
Deux événements A et B sont dits incompatibles rsque $A \cap B = \phi$

emarque : Evénements du type « au moins n » u « au plus n ».
n choisit au hasard un groupe de 4 personnes ans une classe. Soient les événements suivants :
: « il y a au moins une fille dans le groupe »
: « il y a au moins 3 filles dans le groupe »
événement A est réalisé dans les cas suivants : ille et 3 garçons ou 2filles et 2garçons ou 3filles 1garçon ou 4filles.
événement B est réalisé dans les cas suivants : illes et 1garçon ou 4filles.

ontraire des événements : « au moins n » ou « au plus n ».
e contraire de « au moins n » est **« moins de n »**.
e contraire de « au plus n » est **« plus de n »**.

xemple

'événement contraire de A est l'événement $\overline{A}$ « il y a moins d'une fille dans le groupe » c'est-à-dire « il y a pas aucune fille dans le groupe »

'événement contraire de B est l'événement $\overline{B}$ « il y a moins de 3 filles dans le groupe ». L'événement $\overline{B}$ est réalisé dans les cas suivants : 1fille et 3 garçons ou illes et 2 garçons.

II Probabilité

)Définition

Soit $\Omega = \{e_1; e_2; ...; e_n\}$ un univers. Si à chaque ésultat possible e_i, $1 \le i \le n$ on associe un nombre (e_i) tel que $0 \le p(e_i) \le 1$ et $(e_1) + p(e_2) + ... + p(e_n) = 1$, on dit que l'on a défini ne loi de probabilité sur Ω.
Pour tout événement E inclus dans Ω, on définit (E) comme la somme des probabilités des vénements élémentaires qui définissent E.

b) Propriétés des probabilités

Parties de Ω	Vocabulaire des événements	Propriété
A	Evénement quelconque	$0 \le p(A) \le 1$
Ω	Evénement certain	$p(\Omega) = 1$
ϕ	Evénement impossible	$p(\phi) = 0$
$A \cap B = \phi$	A et B sont incompatibles	$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$
$\overline{A}$	Evénement contraire de A	$p(\overline{A}) = 1 - p(A)$
$A \cup B$	Evénement A ou B	$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

c) Equiprobabilité

Définition

On dit qu'il y a équiprobabilité lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité.
Calculs dans le cas d'équiprobabilité.
Dans une situation d'équiprobabilité, si Ω a n éléments et si A est un événement composé de m événements élémentaires : $p(A) = \frac{cardA}{card\Omega}$ où cardA et card Ω désignent respectivement le nombre d'éléments de A et de Ω. On le mémorise souvent en disant que c'est le nombre de cas favorables divisé par le nombre de cas possibles.

Remarque

Les situations d'équiprobabilité sont : dé équilibré ; dé parfait ; dé non truqué ; dé non pipé ; boules tirées de l'urne au hasard ; boules indiscernables....

Exercice d'application

On considère l'ensemble U des entiers de 20 à 40. On choisit l'un de ces nombres au hasard.
- A est l'événement : « le nombre est multiple de 3 »
- B est l'événement : « le nombre est multiple de 2 »
- C est l'événement : « le nombre est multiple de 6 »

Calculer
$p(A), p(B), p(C), p(A \cap B), p(A \cup B), p(A \cap C), p(A \cup C)$

d) Variables aléatoires

Une variable aléatoire X définie sur un univers Ω est une fonction qui à chaque résultat possible associe un rée. Les valeurs possibles de X sont notées x_i. La probabilité que X prenne la valeur x_i est notée $p(X = x_i)$

Scanned by CamScanner

• Définir la loi de probabilité de X, c'est donner (sous forme d'un tableau) la probabilité de chacun des événements $X = x_i$

• **Espérance mathématique de X :**

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(X = x_i)$$

$$= x_1 \times p(X = x_1) + x_2 \times p(X = x_2) + \ldots + x_n \times p(X = x_n)$$

• Variance de X

$$V(X) = E\left(X^2\right) - \left[E(X)\right]^2$$

$$= x_1^2 p(X = x_1) + x_2^2 p(X = x_2) + \ldots + x_n^2 p(X = x_n) - \left[E(X)\right]^2$$

• **Ecart type de X**

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

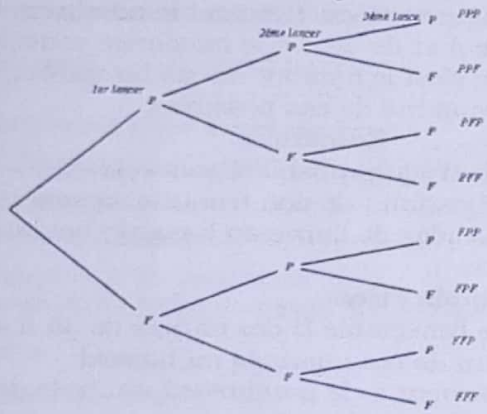
▹ Exemple

On lance trois fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. On gagne 200frs pour chaque résultat « pile » et on gagne 100frs pour chaque résultat « face ». on désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque issue associe le gain correspondant.

1. Quel est l'ensemble E des issues possibles.
2. a) Quelles sont les valeurs prises par X.
b) Déterminer la loi de probabilité de X.
c) Calculer l'espérance mathématique de X ; sa variance et son écart type.

Correction

1. L'ensemble des issues possibles.



D'où $E = \{PPP; PPF; PFP; PFF; FPP; FPF; FFP; FFF\}$

2. a) Les valeurs prises par X sont : -300 ; 0 ; 300 : 600.

b) Loi de probabilité de X

$$P(X = -300) = p(\text{obtenir 3 faces}) = \frac{1}{8}$$

$$P(X = 0) = p(\text{obtenir 2 faces et 1 pile}) = \frac{3}{8}$$

$$P(X = 300) = p(\text{obtenir 1 faces et 2 piles}) = \frac{3}{8}$$

$$P(X = 600) = p(\text{obtenir 3 iles}) = \frac{1}{8}$$

D'où la loi de probabilité de X.

X	-300	0	300	600
$P(X = x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

c) Calculons l'espérance mathématique de X.

en appliquant les formules on trouve

$E(X) = 150$; $V(X) = 67500$; $\sigma(X) \approx 212{,}132$

III) Probabilité conditionnelle

On considère une expérience aléatoire et l'ensemble des résultats est muni d'une loi de probabilité p.

A et B sont des événements de E, avec A de probabilité non nulle.

1) Définition

La probabilité de B sachant que A est réalisé le nombre réel, noté $p_B(A)$ ou $p(B/A)$ défini p

$$p(B/A) = p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}.$$

Dans le cas d'une équiprobabilité, la probabi de B sachant que A est réalisé devient alors :

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{card(A \cap B)}{cardA}$$

$$= \frac{\text{nombre d'éléments de } A \cap B}{\text{nombre d'éléments de } A}$$

Exemples

Xavier tire 1 carte parmi les 32 d'un jeu bien battu. On s'intéresse à la probabilité de l'événement B : « la carte tirée est un as » .

• Dans le cas où Yves n'a rien vu, il est clai la probabilité de l'événement B est

$$p(B) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}.$$

• Supposons maintenant que Yves a pu se rendre compte que la carte tirée n'est pas un honneur (valet, dame ou roi). Appelons A l'événement « la carte tirée n'est pas un honn de probabilité 20/32 = 5/8.

On sait que cet événement B est réalisé. La probabilité cherchée est alors la probabilité conditionnelle :

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{\frac{4}{32}}{\frac{5}{8}} = \frac{1}{5}$$

qu'on aurait pu aussi déterminer directement $\frac{4}{20} = \frac{1}{5}$)

L'information apportée par la réalisation de l'événement A a permis de diminuer la probab de l'événement B.

• Supposons que Yves a pu se rendre compt que la carte tirée est rouge (événement A' de probabilité 1/2). Dans ce cas :

$$p_{A'}(B) = \frac{p(A' \cap B)}{p(A')} = \frac{\frac{2}{32}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}$$

La réalisation de A' ne change pas la probabil de B.

Scanned by CamScanner

) Formule des probabilités composées

résulte de la définition d'une probabilité nditionnelle la propriété suivante :

i on connaît la probabilité de l'événement A et la robabilité conditionnelle de B sachant que A est alisé, on en déduit la probabilité de $A \cap B$ vénement A et B) :

$$p(A \cap B) = p(A)\, p_A(B)$$

***n peut aussi écrire* $p(A \cap B) = p(B)\, p_B(A)$.**

) Événements indépendants

oit E l'ensemble des résultats d'une expérience éatoire ; A et B sont deux événements de E.

remière définition Les événements A et B sont dépendants lors que la probabilité de l'un est la ême que l'autre soit ou non réalisé.

utrement dit : $p(B) = p_A(B)$ ou $p(A) = p_B(A)$.

xemple

euxième définition Dire que deux événements et B sont indépendants signifie que :

$A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

Répétitions d'épreuves indépendantes

i on répète n fois de façon indépendante une ême expérience aléatoire et si $p(A)$ représente la robabilité de l'événement A pour une de ces xpériences aléatoires :

- La probabilité que l'événement A se réalise fois est égale à $\left[p(A)\right]^n$
- La probabilité que l'événement A ne se alise jamais est égale à $\left[p\left(\overline{A}\right)\right]^n = \left[1-p(A)\right]^n$
- La probabilité que l'événement A se réalise u moins une fois est égale

p(l'événement A ne se réalise jamais) $= 1-\left[p\left(\overline{A}\right)\right]^n$

- La probabilité que l'événement A se réalise xactement k fois est égale à

$C_n^k\left[p(A)\right]^k \times \left[1-p(A)\right]^{n-k}$

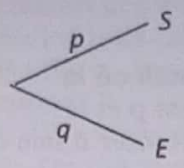
xemple

n lance un dé normal 10 fois de suite et on intéresse au nombre de fois où l'on obtient le hiffre 5.

a probabilité d'obtenir 10 fois le chiffre 5 est gale à $\left(\frac{1}{6}\right)^{10}$. La probabilité de ne jamais obtenir chiffre 5 est $\left(\frac{5}{6}\right)^{10}$. La probabilité d'obtenir au oins une fois le chiffre est égale à $1-\left(\frac{5}{6}\right)^{10}$. La robabilité d'obtenir exactement 3 fois le chiffre 5 st égale à $C_{10}^3\left(\frac{1}{6}\right)^3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^7$

IV. Loi de Bernoulli

Une expérience aléatoire qui ne comporte que deux issues possibles (succès S ou échec E) est appelée *épreuve de Bernoulli*.



avec $q = 1-p$

La loi de Bernoulli associée à cette épreuve est défini par :

x_i	S	E
p_i	p	q

Exemples

- Le jet d'une pièce de monnaie bien équilibrée constitue un exemple simple d'épreuve de Bernoulli : la probabilité du succès (pile par exemple) est 0,5, ainsi que celle de l'échec. La loi est résumée par le tableau

x_i	S	E
p_i	1/2	1/2

- On lance un dé cubique bien équilibré et on s'intéresse à l'obtention ou non du 6. La probabilité du succès est 1/6. La loi est résumée par le tableau :

x_i	S	E
p_i	1/6	5/6

3) **Loi binomiale**

On appelle *schéma de Bernoulli* une expérience qui consiste à répéter plusieurs fois et de manière indépendante une épreuve de Bernoulli.

Exemple

- Si on jette trois fois la même pièce de monnaie en appelant succès l'événement « obtenir pile » on est en présence d'un schéma de Bernoulli à 3 épreuves.
- Une urne contient 3 boules noires et 5 blanches.

Une expérience consiste à extraire trois boules de l'urne et à noter leur couleur.

Si le tirage se fait avec remise, on est bien en présence d'un schéma de Bernoulli à trois épreuves, la probabilité d'un succès (obtenir une boule blanche par exemple) étant 5/8, et celle d'un échec (obtenir une boule noire) 3/8.

Si par contre le tirage a lieu sans remise, nous ne sommes plus en présence d'un schéma de Bernoulli, puisque les épreuves ne sont plus indépendantes les unes des autres (ainsi la probabilité d'obtenir une boule blanche dépend alors des tirages précédents).

Remarque

Scanned by CamScanner

Pour s'assurer que l'on a bien affaire à un schéma de Bernoulli, il faut vérifier que chaque expérience prise isolement n'admet que deux issues possibles (contraire l'une de l'autre), que le succès a toujours la même probabilité d'apparaître et qu'il y a bien indépendance entre chacune des épreuves.

Propriété

Etant donné une épreuve de Bernoulli où la probabilité d'obtenir un Succès S est p et le schéma de Bernoulli consistant à répéter n fois de manière indépendante cette épreuve.

Si on note X la variable aléatoire qui à chaque issue possible du schéma de Bernoulli associe le nombre de fois où est apparu un succès S. La loi de probabilité de X est appelée **loi binomiale de paramètre n et p** et est notée **B(n ;p).**

- La probabilité d'obtenir k succès est $p(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ avec $0 \le k \le n$
- L'espérance mathématique de X est $E(X)=np$
- Variance et écart type de X : $V(X)=np(1-p)$ et $\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$

Exercices de synthèse

Exercice 1

Soient A et B deux événements tels que $P(A)=\frac{1}{5}$ et $P(A\cup B)=\frac{1}{2}$.

1. Supposons que A et B soient incompatibles. Calculer $P(B)$.
2. Supposons que A et B soient indépendants. Calculer $P(B)$.
3. Calculer $P(B)$ en supposant que l'événement A ne peut être réalisé que si l'événement B est réalisé.

Exercice 2

On lance deux fois un dé pipé tel que P(1)=P(3)=P(4)=1/2 et P(2)=P(6)=1/4. Quelle est la probabilité que la somme des points obtenus soit supérieure à 10 (strictement) sachant que :

1. un des résultats est 6.
2. le premier résultat est 6.

Exercice 3

Un agriculteur a entreposé dans un local humide 12 doses d'herbicides et 8 doses de fongicide. Après plusieurs mois de séjour, les étiquettes ne sont pas différentiables (parce qu'illisibles).

En vue d'un traitement, l'agriculteur prend 6 doses au hasard.

a. Quelle est la probabilité qu'il prenne 6 doses d'herbicide ?

b. Quelle est la probabilité qu'il prenne au moins 2 doses d'herbicide ?

Exercice 4

Une boîte contient 4 boules rouges, 3 boules vertes et 7 boules jaunes. On tire simultanément 2 boules de la boîte et on suppose que tous les tirages sont équiprobables.

Calculez la probabilité d'obtenir :

a. Deux boules de la même couleur.

b. Deux boules de couleurs différentes.

Exercice 5

Une boîte contient 8 cubes :

- 1 gros rouge et 3 petits rouges,
- 2 gros verts et 1 petit vert,
- 1 petit jaune.

Un enfant choisit au hasard et simultanément cubes de la boîte. On admettra que la probabi de tirer un cube donné est indépendante de taille et de sa couleur.

Les résultats seront donnés sous forme de fraction irréductible.

1. On note A l'événement : "Obtenir des cube couleurs différentes" et B l'événement : "Obt au plus un petit cube".

a. Calculer la probabilité de A.

b. Vérifier que la probabilité de B est égale à

2. Soit X la variable aléatoire donnant le nom de petits cubes rouges tirés par l'enfant.

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Calculer l'espérance mathématique de X.

3. L'enfant répète 5 fois l'épreuve "tirer simultanément 3 cubes de la boîte", en remet dans la boîte les cubes tirés avant de procéd tirage suivant. Les tirages sont indépendants On note p la probabilité que l'événement B s réalisé.

a. Déterminer la probabilité que B soit réalis moins une fois à l'issue des 5 épreuves.

b. Déterminer la probabilité que l'événement soit réalisé exactement 3 fois.

Exercice 6

Une urne contient cinq boules blanches et tr boules rouges indiscernables au toucher.

1. On tire successivement sans remise trois boules dans l'urne.

a) Combien y a-t-il de tirages possibles ?

b) Quelle est la probabilité d'obtenir trois bou rouges ?

c) Quelle est la probabilité d'obtenir deux bo rouges ?

2. Reprendre la première question, en suppos que les trois boules sont tirées simultanémen Comparer les résultats obtenus dans les deu questions.

Exercice 7

Une urne contient trois boules vertes portant numéro 0, deux boules rouges portant le nu 5 et une boule noire portant le numéro a (a e

Scanned by CamScanner

ıtier naturel non nul, différent de 5 et de 10).
outes les boules sont indiscernables au toucher.
n joueur tire simultanément trois boules de
irne.
Quelle est la probabilité pour qu'il tire :
a) trois boules de la même couleur,
b) trois boules de couleurs différentes,
c) deux boules et deux seulement de la même
ouleur.
Le joueur reçoit, en francs, la somme des
uméros marqués sur les boules tirées. Les gains
ossibles du joueur sont donc :
; 5 ; 10 ; a ; 5 + a ; 10 + a.
a) Soit X la variable aléatoire égale au gain du
oueur, déterminer la loi de probabilité de X.
b) Calculer l'espérance mathématique de X en
nction de a.
c) Calculer a pour que l'espérance de gain du
ueur soit de 20 francs.

xercice 8

n établissement dispos de trois classes de
rminales : A, D et C de même effectif.
y a 20% de filles en A, 40% de filles en D et 60%
filles en C.
On choisit un élève au hasard dans chacune de
s classes et on désigne par X la variable
éatoire réelle prenant pour valeur le nombre de
les obtenues.
Définir la loi de probabilité de X.
Déterminer l'espérance mathématique et l'écart
pe de X.
On réunit tous les élèves des trois classes A, D
C dans la cours de l'établissement et on choisit
n élève au hasard parmi eux.
alculer la probabilité de chacun des événements
uivant :
« L'élève choisit est de la terminale A »
L'élève choisit est une fille »

xercice 9

n porte-monnaie contient quatre pièces de 500 F
FA et six pièces de 200 F CFA. Un enfant tire au
asard et simultanément 3 pièces de ce porte-
onnaie.
Calculer la probabilité de l'évènement A :"tirer
ois pièces de 500 F".
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de
èces de 500 F figurant parmi les trois pièces
rées.
Déterminer la loi de probabilité de X.
Calculer l'espérance mathématique et l'écart
pe de X.
L'enfant répète cinq fois l'expérience en mettant
haque fois les trois pièces tirées dans le porte-
onnaie.
uelle est la probabilité que l'événement A se
alise trois fois à l'issue des cinq tirages ?

xercice 10

Dans un jeu de 32 cartes on a quatre « couleur » : pique, trèfle, carreau et cœur ;
Chaque « couleur » comprend huit cartes dont une carte as.
1) On tire simultanément 3 cartes d'un jeu de 32 cartes bien battu. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
A « les trois cartes sont des as »
B « Il y a au moins 2 couleurs » parmi ces 3 cartes.
C « Il y a pas d'as parmi les 3 cartes ».
2) On tire successivement avec remise 3 cartes du jeu de 32 cartes .Le nombre de cœurs tirés définit une variable aléatoire X. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X ; la loi de probabilité de X et son espérance mathématique.
3) On tire simultanément 3 cartes d'un jeu de 32 cartes.
L'ensemble des éventualités est l'ensemble des cartes à 3 éléments de l'ensemble des cartes

Exercice 11

Une urne contient 6 jetons numérotés de 1 à 6. Lorsqu'on tire au hasard un jeton de l'urne, on note p_i avec $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$ la probabilité de tirer le jeton numéroté i. On suppose que les nombres p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 et p_6 sont dans cet ordre en progression arithmétique de raison $\frac{1}{30}$

1-a) Montrer que $p_1 = \frac{1}{12}$

b) En déduire p_2, p_3, p_4, p_5, p_6

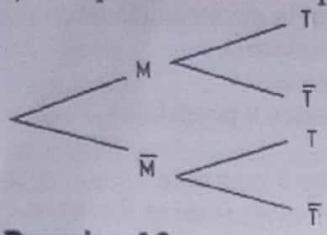
2) On tire trois fois de suite et avec remise un jeton de cette urne, on désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de jetons portant un numéro pair.
a) Déterminer la loi de la probabilité de X.
b) Déterminer l »espérance mathématique de X puis son écart-type.
3) Un joueur tire simultanément 2 jetons et note S la valeur absolue de la différence des numéros que portent les 2 jetons tirés.
Déterminer la loi de probabilité de S.

Exercice 12

Dans un magasin d'électroménager, on s'intéresse au comportement d'un acheteur potentiel d'un téléviseur et d'un magnétoscope.
La probabilité pour qu'il achète un téléviseur est de 0,6.
La probabilité pour qu'il achète un magnétoscope quand il a acheté un téléviseur est de 0,4.
La probabilité pour qu'il achète un magnétoscope quand il n'a pas acheté de téléviseur est de 0,2.
1) Quelle est la probabilité pour qu'il achète un téléviseur et un magnétoscope ?

Scanned by CamScanner

2) Quelle est la probabilité pour qu'il achète un magnétoscope ?
3) Le client achète un magnétoscope. Quelle est la probabilité qu'il achète un téléviseur ?
4) Compléter l'arbre de probabilité suivant :



Exercice 13

On considère un dé rouge et un dé vert, cubiques, équilibrés.
Le dé rouge comporte : deux faces numérotées -1 ; deux faces numérotées 0 ; deux faces numérotées 1.
Le dé vert comporte : une face numérotée 0; trois faces numérotées 1;deux faces numérotées 2.
On lance simultanément les deux dés. On note X la somme des points obtenus.
1) Déterminer la loi de probabilité de X.
2) Définir F, fonction de répartition de X et construire sa représentation graphique

Exercice 14

Les deux questions sont indépendantes. Les résultats devront être présentés sous forme de fractions irréductibles.
Une urne contient 10 boules : 3 bleues ; 2 vertes ; 5 rouges.
Dans les deux questions suivantes on supposera l'équiprobabilité des tirages.
a. On tire 3 boules l'une après l'autre en remettant à chaque fois la boule tirée dans l'urne. On note X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de boules bleues obtenues. Donner l'espérance mathématique de X.
b. On tire 3 boules simultanément. Calculer la probabilité des évènements suivants :
- les 3 boules tirées sont de même couleur
- les 3 boules tirées sont de couleurs différentes
- 2 boules sont d'une couleur, la troisième d'une autre couleur
- 2 boules au moins sont de la même couleur.

Exercice 15

Dans une classe de 25 élèves, 15 élèves s'intéressent à la musique, 8 élèves s'intéressent au jeu d'échecs et
3 élèves s'intéressent à la fois à la musique et au jeu d'échecs.
A/ Combien d'élèves ne s'intéressent ni à la musique ni au jeu d'échecs ?
B/ On interroge un élève au hasard. Calculer la probabilité des événements suivants :
1/ l'élève s'intéresse à la musique ;
2/ l'élève s'intéresse à la musique ou au jeu d'échecs.
C/ On interroge quatre élèves au hasard. Ca la probabilité des événements suivants :
1. « 4 élèves s'intéressent à la musique » ;
2. « 3 élèves exactement s'intéressent à la musique » ;
3. « 3 élèves exactement s'intéressent à la musique et 1 élève exactement s'intéresse au d'échecs ».

Exercice 16

Alain et Bernard disposent d'une urne et de boules : 6 boules noires et 4 boules rouges. Ils conçoivent alors le jeu suivant : Alain mis francs, puis il tire dans l'urne 4 boules au ha La somme qu'il gagnera est fonction du nom de boules rouges qu'il aura tirées, selon le ta suivant :

1 rouge	1 franc
2 rouges	20 francs
3 rouges	50 francs
4 rouges	100 francs

A/ Soit X la variable aléatoire désignant la so gagnée par Alain.
1/ Déterminer la loi de X et calculer son espérance.
2/ En déduire le gain moyen d'Alain.
B/ Le lendemain, Bernard propose deux nou règles du jeu :
1. première proposition : augmenter la mise d 1 franc ;
2. deuxième proposition : ajouter une boule n dans l'urne.
Quelle est la solution la plus avantageuse pou Alain ?

Exercice 17

On place dans une urne six boules numérotée 0 à 5, indiscernables au toucher ; deux des s boules sont rouges, les autres sont vertes.
L'expérience consiste à tirer simultanément t boules dans l'urne.
A/ Quel est le nombre de tirages possibles ? (Justifier la réponse).
B/ calculer la probabilité des évènements suivants :
A : « on tire trois boules vertes » ;
B : « on tire au moins une boule rouge ».
C/ soit X la variable aléatoire qui, à chaque expérience, prend comme valeur le plus grand numéros portés sur les trois boules tirées.
1/ Déterminer la loi de probabilité de X.
2/ Calculer la probabilité pour que X prenne valeur strictement supérieure à 3.

Exercice 18

Scanned by CamScanner

n sac contient cinq boules rouges et trois boules oires. On tire au hasard une boule du sac.
cette boule est noire, on arrête le jeu, si cette oule est rouge, on replace la boule tirée dans le c, on ajoute deux boules rouges et on procède à n deuxième tirage.
construire un arbre pondéré de cette périence aléatoire ;
quelle est la probabilité de tirer deux boules uges ?
quelle est la probabilité de tirer une boule uge et une boule noire ?

xercice 19

la suite de la découverte dans un pays A des emiers cas d'une maladie contagieuse non ortelle M. il a été procédé dans ce pays à une portante campagne de vaccination : 70% des abitants ont été vaccinés. Une étude a révélé que % des vaccinés ont été touchés a des degrés vers par la maladie, pourcentage qui s'est élevé 60% chez les non vaccinés
calculez la probabilité pour qu'un individu pris hasard dans la population ait été touché par la aladie ;
calculez la probabilité pour qu'un individu ait é vacciné, sachant qu'il a été atteint par la aladie.

xercice 20

n admet que dans une famille, pour toute issance d'un enfant, la probabilité d'avoir un rçon est la même que celle d'avoir une fille et e, lors de deux naissances séparées, les sexes s enfants sont indépendants.
dans une famille de deux enfants, déterminer la obabilité des événements suivants :
: « les enfants sont deux garçons »
: « les enfants sont deux filles »
: « les enfants sont de même sexe »
: « les enfants sont de sexes différents »
pour une famille de trois enfants (les issances étant toujours séparées), on désigne r X la variable aléatoire qui, à chaque famille, socie le nombre de filles
déterminer la loi de probabilité de X
calculer l'espérance mathématique et l'écart pe de X

xercice 21

n plongeur de restaurant lave 30 verres, 10 de pe A, 10 de type B, 10 de type C.
n cours de la vaisselle deux verres sont cassés n hasard
Calculs de probabilités
Quelle est la probabilité pour que les deux rres cassés soient du même type ?
Quelle est la probabilité de casser au moins un rre de type A ?
3) Quelle est la probabilité de casser un verre de type B et un verre de type C ?
B) Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de verres de type A cassés
1) Déterminer la loi de probabilité de X
2) Calculer son espérance mathématique E(X) et sa variance V(X)

Exercice 22

Une entreprise utilise des machines de type M constituées chacune de deux éléments E_1 et E_2
La défectuosité d'un seul des deux éléments E_1 ou E_2 suffit à mettre la machine hors service et on exclut toute autre éventualité de panne
Soient A_1 et A_2 les deux événements définis par :
.A_1 : « l'événement E_1 tombe en panne »
. A_2 : « l'événement E_2 tombe en panne »
On suppose que A_1 et A_2 sont indépendants et ont pour probabilités :
$p(A_1) = p_1 = 0,08$ et $p(A_2) = p_2 = 0,05$
A) Calculer la probabilité p pour que les deux éléments soient simultanément hors service
B) Calculer la probabilité p' pour que la machine M soit en panne
C) On note X la variable aléatoire égale au nombre d'éléments hors service.
1) Déterminer la loi de probabilité de X.
2) Vérifier que l'espérance mathématique de X est égale à 0,13..

Exercice 23

Un sac contient six boules numérotées de 0 à 5. On en extrait simultanément deux boules, qui portent respectivement les numéros x et y. A chaque tirage, un associe la variable aléatoire X définie de la façon suivante :

si x et y sont pairs, X prend la valeur $\frac{x+y}{2}$

si x et y sont impairs, X prend la valeur $\frac{|x-y|}{2}$

si x et y sont de parités différentes, on attribue à X la valeur 0(zéro).
(On rappelle que 0 est pair)

a) Déterminer les valeurs prises par X.
b) Etablir la loi de probabilité de X.
2) Calculer l'espérance mathématique de X.
3) On extrait dix fois de suite deux boules simultanément avec remise. Quelle est la probabilité d'obtenir sept fois x et y de même parité. (on exprimera le résultat sous forme de puissances de 2, 3 et 5

Scanned by CamScanner

I. Généralités sur les fonctions

1. Domaine de définition d'une fonction

Le domaine de définition d'une fonction f est l'ensemble des réels ayant une image par f. En conséquence le domaine de définition se définit en tenant compte des principes mathématiques suivants :

- Le dénominateur ne doit pas s'annuler car on ne divise pas par zéro.
- La racine carrée ne s'applique que sur un réel positif ou nul.
- La fonction logarithme népérien ne s'applique que sur un réel strictement positif.

2. Parité-Périodicité

a-Fonction paire

- Si $x \in D_f$; $-x \in D_f$ et si $\forall x \in D_f, f(-x) = f(x)$ alors f est paire

Interprétation géométrique

- Si f paire sa courbe dans un repère orthogonal est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

b-Fonction impaire

- Si $x \in D_f$; $-x \in D_f$ et si $\forall x \in D_f, f(-x) = -f(x)$ alors f est impaire

Interprétation géométrique

- si f impaire sa courbe dans un repère orthogonal est symétrique par rapport à l'origine du repère

b-Fonction périodique

- Une fonction définie sur IR est périodique de période T si pour tout x de IR $f(x+T) = f(x)$.

Interprétation géométrique

- La courbe de f dans un repère orthogonal est invariante par la translation de vecteur $T\vec{i}$

3. Axe et centre de symétrie

- Si $\forall x \in Df, f(2a-x) = f(x)$ alors la droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de (C_f)
- Si $f(2a-x)+f(x) = 2b$ alors le point $\Omega(a;b)$ est un centre de symétrie de (C_f)

Comparaison de courbes

relation	Interprétation graphique
$g(x) = f(-x)$	(C_g) est l'image de (C_f) par la symétrie orthogonale d'axe (oy)
$g(x) = -f(x)$	(C_g) est l'image de (C_f) par la symétrie orthogonale d'axe (ox)
$g(x) = -f(-x)$	(C_g) est l'image de (C_f) par la symétrie de centre l'origine du répère

II. Limites-Continuité

1. Limites

Limite d'une somme

$\underbrace{(\ )}_{\to\ell} + \underbrace{(\ )}_{\to\ell'} \to \ell+\ell'$	$\underbrace{(\ )}_{\to\ell} + \underbrace{(\ )}_{\to+\infty} \to +\infty$	$\underbrace{(\ )}_{\to\ell} + \underbrace{(\ )}_{\to-\infty} \to$
$\underbrace{(\ )}_{\to+\infty} + \underbrace{(\ )}_{\to+\infty} \to +\infty$	$\underbrace{(\ )}_{\to-\infty} + \underbrace{(\ )}_{\to-\infty} \to -\infty$	

Limite d'un produit

$\underbrace{(\ )}_{\to\ell} \times \underbrace{(\ )}_{\to\ell'} \to \ell\times\ell'$	$\underbrace{(\ )}_{\to\ell>0} \times \underbrace{(\ )}_{\to+\infty} \to +\infty$	$\underbrace{(\ )}_{\to\ell<0} + \underbrace{(\ )}_{\to+\infty} \to$
$\underbrace{(\ )}_{\to\ell>0} \times \underbrace{(\ )}_{\to-\infty} \to -\infty$	$\underbrace{(\ )}_{\to\ell<0} \times \underbrace{(\ )}_{\to-\infty} \to +\infty$	$\underbrace{(\ )}_{\to+\infty} \times \underbrace{(\ )}_{\to-\infty} \to$
$\underbrace{(\ )}_{\to-\infty} + \underbrace{(\ )}_{\to-\infty} \to +\infty$	$\underbrace{(\ )}_{\to-\infty} \times \underbrace{(\ )}_{\to+\infty} \to -\infty$	

Limite de l'inverse

$\underbrace{\left(\frac{1}{(\ )}\right)}_{\to\ell\neq0} \to \frac{1}{\ell}$	$\underbrace{\left(\frac{1}{(\ )}\right)}_{\to\pm\infty} \to 0$	$\underbrace{\left(\frac{1}{(\ )}\right)}_{\to0^+} \to +\infty$	$\underbrace{\left(\frac{1}{(\ )}\right)}_{\to0^-} \to$

Limite d'un quotient

Pour les quotients (autres que les fonctions rationnelles en $\pm\infty$) si on tombe sur le cas $\frac{0}{\infty}$ on sépare la fraction comme suit : $\frac{(\ )}{(\ )} = (\ ) \times \frac{1}{(\ )}$ calcule.

Remarque : les deux cas de forme indéterminé sont : $\underbrace{(\ )}_{\to+\infty} + \underbrace{(\ )}_{\to-\infty}$; $\underbrace{(\ )}_{\to\pm\infty} \times \underbrace{(\ )}_{\to0}$

Polynômes et fonctions rationnelles en $\pm\infty$

En $\pm\infty$, la limite d'une fonction polynôme est la limite de son terme de plus haut degré

En $\pm\infty$, la limite d'une fonction rationnelle est à la limite du quotient des termes du plus ha degré du numérateur et du dénominateur.

Théorèmes des limites

Théorèmes de comparaison	$f(x) \geq u(x)$ $\lim\limits_{x\to\infty} u(x) = +\infty$ alor $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$
	$f(x) \leq u(x)$ $\lim\limits_{x\to\infty} u(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$
Théorème des gendarmes	$u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ et $\lim\limits_{x\to\infty} u(x) = \lim\limits_{x\to\infty} v(x) = \ell (\ell \in \mathbb{R})$ Alors $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \ell$
Limite des fonctions composées	Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x\to b} g(x) =$ $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = \ell$ ℓ étant un réel ou l'infini

Scanned by CamScanner

imites usuelles

$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=0;\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

. Asymptotes

- Si $\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ alors la droite d'équation $x=a$ st une asymptote verticale à la courbe de f
- Si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=b$ alors la droite d'équation st une asymptote horizontale à la courbe de f
- Si $\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$ alors la droite 'équation $y=ax+b$ est une asymptote oblique à la ourbe de f
- Si $f(x)=ax+b+g(x)$ si $\lim_{x\to\pm\infty} g(x)=0$ alors la roite d'équation $y=ax+b$ est une asymptote blique à la courbe de f

Branches infinies

Si $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty$ alors la courbe de f admet une ranche parabolique de direction l'axe des rdonnées

Si $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ alors la courbe de f admet une ranche parabolique de direction l'axe des bscisses.

tudier la position relative de deux courbes

éthodes

our étudier la position relative de deux courbes (C_f) et (C_g) on étudie le signe de $\boxed{f(x)-g(x)}$

méthodes valable pour l'étude de la position elative des courbes et les asymptotes horizontales t obliques).

Si $\boxed{f(x)-g(x)\geq 0}$ pour tout x d'un intervalle I alors (C_f) est située au dessus de (C_g) sur l'intervalle I

Si $\boxed{f(x)-g(x)\leq 0}$ pour tout x d'un intervalle J alors (C_f) est située au dessous de (C_g) sur l'intervalle J.

Chapitre 3 : Dérivation et Primitves

3. Dérivation

- **Dérivabilité**
  - Si $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et égale à un réel alors la fonction f est dérivable en a.
  - Si $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\infty$ alors f n'est pas dérivable en a.
  - Si , $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et égale à un réel alors f est dérivable à droite de a
  - Si $\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et égale à un réel alors f est dérivable à gauche de a

- **Opérations sur les fonctions dérivables**

Fonction	Fonction dérivée
$kf;k\in\mathbb{R}$	kf'
$f+g$	$f'+g'$
fg	$f'g+g'f$
$f^n;n\geq 2$	$nf'f^{n-1}$
$\frac{1}{f}$	$-\frac{f'}{f^2}$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f'g-fg'}{g^2}$

4. Tangentes

a) tangentes

- Si f est dérivable en a alors (C_f) admet au point d'abscisse a une tangente d'équation $y=f'(a)(x-a)+f(a)$
- Si $f'(a)=0$ alors la tangente est horizontale.
- Si $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\infty$ alors (C_f) admet une tangente verticale d'équation x = a

b) demi- tangentes

Soit a un élément de D, soit $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\ell$ et $\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\ell'$ avec ℓ et ℓ' des réels

- si $\ell=\ell'$ alors la fonction f est dérivable en a et la courbe C admet une tangente au point d'abscisse a ayant pour coefficient directeur $f'(a)=\ell$. Une équation de cette tangente est y = f'(a)(x - a) + f(a)
- si $\ell\neq\ell'$ alors la fonction f n'est pas dérivable en a et la courbe (C) admet une demi tangente à droite et une demi tangente à gauche au point d'abscisse a d'équations respectives

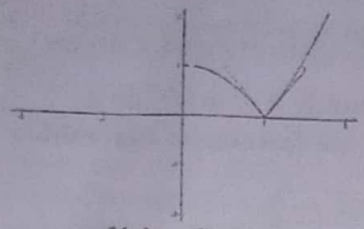
$y=\ell(x-a)+f(a)$ et $y=\ell'(x-a)+f(a)$

Dans ce cas précis, le point M(a ;f(a)) est appelé point anguleux de la courbe de f

Exemple $f(x)=|x^2-1|$

$F(x)=x^2-1$ pour x de l'intervalle $[1;+\infty[$ et $f(x)=-x^2+1$ pour de l'intervalle $[-1;1]$ le nombre dérivé à droite de f en est 2 celui à gauche de f en est -2 d'où au point A(1 ;0) Cf admet un point anguleux

Scanned by CamScanner



Si $\lim_{x\to a'} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \pm\infty$ (respectivement $\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \pm\infty$) alors (C) admet une demi-tangente verticale à droite au point d'abscisse a(respectivement à gauche au point d'abscisse a)

- Pour déterminer les abscisses des éventuels Points de (C_f) où la tangente est parallèle à une certaine droite d'équation $y = mx + p$ il suffit de résoudre l'équation $f'(x) = m$ (les coefficients directeurs devant être égaux).

4. Continuité

- Soit a un élément de D_f si f admet une limite en a et si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ alors f est continue en a
- Si f est dérivable en a alors f est continue en a

Remarque

Pour montrer qu'nue fonction f est continue sur un intervalle I de D_f il suffit de montrer qu'elle est dérivable sur cet intervalle I(*car toute fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle*)

5.Bijection

Théorème

Si une fonction f est dérivable sur un intervalle I= [a,b] et est strictement croissante sur I alors la fonction f réalise une bijection de I sur [f(a) ;f(b)]

- Enoncé analogue si f est strictement décroissante sur I en inversant f(a) et f(b)
- Dans un repère orthonormé du plan, la courbe

la fonction f^{-1}(bijection réciproque de f) est le symétrique de celle de f par rapport à la droite d'équation y = x

Comment montrer que l'équation f(x) = m admet une unique solution dans I ?

- d'abord vérifier que f est dérivable et strictement croissante ou décroissante sur I ensuite vérifier que m appartient respectivement à l'intervalle [f (a) ; f (b)] ou [f(b) ; f(a)] si tout ceci est vérifié, on conclut en disant que la fonction f est dérivable et strictement croissante (respectivement décroissante) sur I et m appartient à [f(a) ;f(b)] (respectivement m appartient à [f(b) ;f(a)]) donc l'équation f(x) = m admet une unique solution dans I.

Exemple : **soit f la fonction définie sur $I=$ par $f(x)=x^3+x$. Montrons que l'équation $f(x)$ admet une unique solution dans I.**

$\forall x \in I, f'(x) = 3x^2+1 > 0$; f est donc strictement croissante sur I. on a $f(1)=2$ et $f(2)=10$

f est continue sur I car dérivable sur I. De p est compris entre $f(1)=2$ et $f(2)=10$ donc on c que l'équation $f(x)=5$ admet une unique solu α dans I.

Recherchons une valeur approchée de α à près

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
$f(x)$	2	2,43	2,93	3,5	4,14	**4,87**	**5,7**

On a arrêté les calculs après 1,6 car $f(1,5) < 5$. On peut donc en déduire que $1,5 < \alpha < 1,6$. Un valeur approchée de α par défaut **à** 10^{-1} **près 1,5** et une valeur approchée de α par excès **à près est 1,6**

inégalités de la moyenne

- soit f une fonction dérivable sur I = [a ;b] aeI soit k un réel compris entre 0 et 1

Comment montrer que pour tous x ϵ I $|f(x)-f(\alpha)| \le k|x-\alpha|$?

-d'abord vérifier que f est dérivable sur I et q que soit x de de I $|f'(x)| \le k$, $\alpha \in I$ ensuite, on c en disant que f est dérivable sur I et donc d'a théorème de l'inégalité de la moyenne, on a : $|f(x)-f(\alpha)| \le k|x-\alpha|$ pour tout x appartenant

PRIMITIVES

- si f est dérivable sur un intervalle I et pour tout x de I $F'(x) = f(x)$ alors F est si primitive de f sur I
- si F_0 est une primitive de f sur l'interv alors toutes les primitive de f sur I s la forme : $F(x) = F_0(x) + k$ où k est une constante réelle.
- Toute fonction continue sur un interva admet des primitives sur I.

- **Primitives des fonctions usuelles**

fonction	Primitive
$f(x) = a, a \in \mathbb{R}$	$F(x) = ax$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2$
$f(x) = x^2$	$F(x) \frac{1}{3}x^3$
$f(x) = x^3$	$F(x) = \frac{1}{4}x^4$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x}$

Scanned by CamScanner

$(x)=\frac{1}{x^3}$	$F(x)=-\frac{1}{2x^2}$
$(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x)=2\sqrt{x}$
$(x)=\sin x$	$F(x)=-\cos x$
$(x)=\cos x$	$F(x)=\sin x$

- **Formules générales**

orme f	Une primitive de f	exemple
$'u$	$\frac{u^2}{2}$	$f(x)=\frac{1}{x}\times\ln x \Rightarrow F(x)=\frac{(\ln x)^2}{2}$
$'u^2$	$\frac{u^3}{3}$	$f(x)=4(4x+1)^2 \Rightarrow F(x)=\frac{(4x+1)^3}{3}$
$'u^3$	$\frac{u^4}{4}$	$f(x)=2x(x^2+1)^3 \Rightarrow F(x)=\frac{(x^2+1)}{4}$
$\frac{'}{2}$ $(x)\neq 0)$	$-\frac{1}{u}$	$f(x)=\frac{3x^2}{(x^3+1)^2} \Rightarrow F(x)=-\frac{1}{x^3+1}$
$\frac{'}{3}$ $(x)\neq 0)$	$-\frac{1}{2u^2}$	$f(x)=\frac{7}{(7x+1)^3} \Rightarrow F(x)=\frac{-1}{2(7x+1)^2}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$ $u(x)>0)$	$2\sqrt{u}$	$f(x)=\frac{3}{\sqrt{3x+2}} \Rightarrow F(x)=2\sqrt{3x+2}$
$'\sin u$	$-\cos u$	$f(x)=2x\sin(x^2+1) \Rightarrow F(x)=-\cos(x^2+1)$
$'\cos u$	$\sin u$	$f(x)=4\cos(4x+5) \Rightarrow F(x)=\sin(4x+5)$

De façon générales pour tout réel α différent de 1, 1 on a : une primitive de $u'u^\alpha$ est la fonction $\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.

- **Recherche pratique d'une primitive**

Pour les fonctions usuelles, on utilise directement es formules.

Pour les autres fonctions, il faut d'abord identifier a forme qui ressemble plus à la fonction. Si on a la orme exacte, on utilise directement la formule correspondante. Dans le cas contraire, on fait apparaître la forme exacte et on utilise la formule correspondante.

➢ Exemple : Soit f définie sur $]2;+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{1}{(3x+6)^2}.$$

Posons $u(x)=3x+6; u'(x)=3$ on a donc

$f(x)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{(3x+6)^2}=\frac{1}{3}\times\frac{u'(x)}{u^2(x)}$ par suite une primitive de f sur $]2;+\infty[$ est la fonction F définie sur $]2;+\infty[$ par : $F(x)=\frac{1}{3}\times\frac{-1}{(3x+6)}$

III. Fonctions logarithme népérien et exponentielle

a)Existence

- $\ln x$ n'existe que lorsque x>0
- e^x existe pour tout nombre réel x

➢ Exemple

Soit la fonction f définie par $f(x)=\ln(x^2-1)$

$f(x)$ existe lorsque $x^2-1>0$ c'est-à-dire lorsque $x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ donc $D_f=]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

b) Lien entre $\ln x$ et e^x

- $\boxed{y=e^x \Leftrightarrow \ln y=x}$
- $\boxed{\ln(e^x)=x\ ;\ e^{\ln x}=x(\text{pour } x>0)}$

c) Valeurs particulières

- $\boxed{\ln 1=0;\ \ln e=1}$
- $e^0=1\ ;\ e^1=e\ ;\ e^{-1}=\frac{1}{e}$

d) Propriétés algébriques

- Si $\boxed{a>0 \text{ et } b>0}$ alors

$$\boxed{\ln(ab)=\ln a+\ln b;\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b}$$

- Pour tout

$$\boxed{n\in\mathbb{Z}; a>0\ \ \ln(a^n)=n\ln a;\ \ \ln\sqrt{a}=\frac{1}{2}\ln a}$$

- Pour tous réels a et b,

$$\boxed{e^a\times e^b=e^{a+b};\frac{1}{e^a}=e^{-a};\frac{e^a}{e^b}=e^{a-b}}$$

- Pour tout $\boxed{n\in\mathbb{Z};(e^a)^n=e^{na}}$

e) Signe de $\ln x$ et de e^x

- Signe de $\ln x$

Si $0<x<1$ alors $\ln x$ est strictement négatif

Si $x>1$ alors $\ln x$ est strictement positif

- Signe de e^x

Pour tout réel x e^x est strictement positif

f) Equations et inéquations

Si $a>0$ et $b>0$ alors $\begin{cases}\ln a=\ln b \Leftrightarrow a=b\\ \ln a<\ln b \Leftrightarrow a<b\\ \ln a\leq\ln b \Leftrightarrow a\leq b\end{cases}$

Scanned by CamScanner

$e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$
$e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$
$e^a \leq e^b \Leftrightarrow a \leq b$

$\ln x = a \Leftrightarrow x = e^a$
$\ln x < a \Leftrightarrow 0 < x < e^a$
$\ln x > a \Leftrightarrow x > e^a$

; Si $a > 0$ alors $\begin{cases} e^x = a \Leftrightarrow \ln a \\ e^x < a \Leftrightarrow x < \ln a \\ e^x > a \Leftrightarrow x > \ln a \end{cases}$

➢ *Remarques*

Pour les équations et inéquations avec logarithme, ne pas oublier de commencer par définir les conditions d'existence (les expressions contenues dans un logarithme doivent être strictement positives).

➢ *Exemples d'équations et d'inéquations*

Condition d'existence

$$\ln x + \ln 2 = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln(2x) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 2x = e^5 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{e^5}{2} \text{ d'où}$$

$S = \left\{\frac{e^5}{2}\right\}$

Condition d'existence

On fait l'intersection des deux intervalles

$$\ln(x+2) \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 > 0 \\ x+2 \leq e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x \leq e-2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < x \leq e-2$$

$S =]-2; e-2]$

$$e^{2x} + 2e^x - 3 = 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 + 2e^x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X^2 + 2X - 3 = 0 \\ X = e^x \end{cases}$$

Résolvons l'équation $X^2 + 2X - 3 = 0$

$\Delta = 16$; $X = -1$ ou $X = 3$ d'où

Exponentielle est toujours positive

$e^x = -1$ (impossible) *ou* $e^x = 3$

$e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln 3$ par suite $S = \{\ln 3\}$

$$e^x < 5e^{-x} \Leftrightarrow e^5 < \frac{5}{e^x} \Leftrightarrow e^{2x} < 5 \left(\text{car } e^x > 0\right) \Leftrightarrow 2x < \ln 5$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{\ln 5}{2}$$

$S = \left]-\infty; \frac{\ln 5}{2}\right[$

g) Limites

- Situation en $+\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$;

Pour tout entier $n > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^n}{\ln x} = +\infty$

(on dit que x^n est plus fort que e^x en $+\infty$)

Pour tout entier $n > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$

(On dit que e^x est plus fort que x^n en $+\infty$;
on déduit que e^x est aussi plus fort que $\ln x$ en $+\infty$)

Méthode générale en cas de Forme indéterminée en $+\infty$: *Mettre le plus fort en ... en haut et en bas*

➢ Exemples

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x - x = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\frac{\ln x}{x} - 1\right) = -\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} 3e^x - x^2 = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2\left(\frac{e^x}{x^2} - 1\right) = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x - \ln x}{x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} \times \frac{\left(1 - \frac{\ln x}{e^x}\right)}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{e^x} = 0$ (le plus fort fort est en bas)

Situation en 0

- $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$
- Pour tout entier $n > 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^n \ln x = 0$

Méthode générale en cas de forme indéter... en 0 avec logarithme : *On essaie de faire apparaître* $x^n \ln x$

➢ Exemples

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} + \ln x = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \times \left(1 + x^2 \ln x\right) = +\infty$

car $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \ln x = 0$

Situation en $-\infty$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$

Méthode générale en cas de forme indéter... en $-\infty$ avec exponentielle : *Faire apparaître*

➢ Exemple

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x\left(x^2 + 1\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 e^x + e^x = 0$ (On a développé)

car $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Scanned by CamScanner

mites usuelles

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^{\alpha}}=0$ Si $\alpha>0$: $\lim\limits_{x\to0}x^{\alpha}\ln x=0$ si $\alpha>0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}}{x^{\alpha}}=+\infty$ si $\alpha>0$
- $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}=1$
- $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x}-1}{x}=1$

Dérivées et Primitives

$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$; $(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}(u>0)$

$(e^{x})'=e^{x}$; $(e^{u})'=u'e^{u}$

➢ Exemples

$\left(\ln\left(3x^{2}+1\right)\right)'=\dfrac{6x}{3x^{2}+1}$; $\left(e^{x^{2}+1}\right)'=2xe^{x^{2}+1}$

imitives

$u>0$, une primitive $\dfrac{u'}{u}$ est $\ln u$

$u<0$, une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ est $\ln(-u)$

Une primitive de $u'e^{u}$ est e^{u}

➢ Exemples

it f la fonction définie sue $]2;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{4x-8}$.

herchons une primitive de f pour cela posons
x) = 4x – 8, on a u'(x) = 4. On a pour tout
$\in]2;+\infty[$, $f(x)=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ donc une primitive F de f

t définie sur $]2;+\infty[$ par $F(x)=\dfrac{1}{4}\ln(4x-8)$ car
$\in]2;+\infty[$, $4x-8>0$

Exercices de synthèse

oblème 1

it la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$x)=\dfrac{ax^{2}+bx+c}{x}$ où a, b et c sont des réels et (C) sa
urbe représentative dans le plan muni d'un
père orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ unité graphique : 1 cm.

Déterminer les réel a, b et c pour que (C) passe
r les points A(1 ;8), B(2 ;7) et admette au point B
e tangente parallèle à l'axe des abscisses.

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$
r $f(x)=\dfrac{x^{2}+3x+4}{x}$.

Déterminer les limites de f aux bornes de son
tervalle de définition et en déduire une droite
ymptote à (C).

b) Montrer que la droite (D) d'équation y = x + 3 est asymptote à (C) et étudier la position relative de (C) par rapport à (D).

3) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variations.

4) Déterminer une équation de la tangente (T_1) à (C) en A. Existe-t-il un point de (C) en lequel la tangente à (C) est perpendiculaire à (T_1) ?

5) Tracer (D), (T_1) et (C)

6) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x)\le 8$. Retrouver ce résultat par le calcul.

Problème 2

On considère la fonction f définie pour tout réel x appartenant à $]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$ par

$f(x)=\dfrac{3x^{2}+4x-3}{x^{2}-1}$. On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Partie A

1) Montrer que pour tout x de $IR/\{-1;1\}$

$f(x)=\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{2}{x+1}+3$.

2) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

3) Etudier le sens de variations de f et dresser son tableau de variations.

4) Calculer $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et $f(0)$. Préciser les asymptotes à (C).

5) a) Déterminer une équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 0.

b) Tracer (T), (C) et ses asymptotes dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité : 1 cm).

c) Montrer que la courbe (C) a pour centre de symétrie le point I(0 ;3)

Partie B (On pourra utiliser certains résultats établis dans la partie A)

1) Résoudre dans IR :

a) l'équation $\cos 2x-1=0$

b) l'équation $\cos 2x+1=0$

c)l'inéquation $\sin 2x>0$.

2) Justifier qu'on peut définir sur $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ une fonction en posant $g(x)=f(\cos 2x)$.

3) Calculer $g\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$; $g\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ et $g\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$.

4) Déterminer $\lim\limits_{x\to0^{+}}g(x)$ et $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^{-}}g(x)$.

5) Démontrer que g est dérivable sur $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Scanned by CamScanner

6) a) Calculer g'(x) et justifier que g'(x)>0 pour tout x de $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

b) Dresser le tableau de variations de g.

7) Démontrer que l'équation g(x) = 1 admet une unique solution α dans $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}\right]$.

Problème 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*_+$ par :

$f(x)=\frac{\ln x+xe}{x^2}$

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère$(O;\vec{u},\vec{v})$, unité graphique 2 cm.

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*_+$ par : $g(x) = -2\ln x - xe + 1$.

1. Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$.
2. Etudier le sens de variation de g.
3. a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}^*_+$

b) montrer que $0,5 < \alpha < 1$

4. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B : Etude de la fonction f

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Etudier le sens de variation de f.
3. Montrer que $f(\alpha)=\frac{1+\alpha e}{2\alpha^2}$ et en donner une valeur approchée à 10^{-1} près.
4. Donner le tableau de variation de f.
5. Tracer (C).

On donne $\alpha = 0,67$; $f(\alpha) = 3,2$ $e = 2,7$, $\ln(0,5) = -0,7$

Problème 4

Partie A :

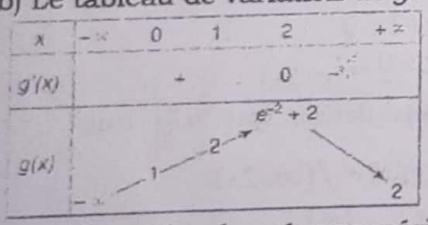
Soient a, b et c des nombres réels.

On définit une fonction g sur $\mathbb{R}$ par :

$g(x)=(ax+b)e^{-x}+c$.

a) Calculer $g'(x)$.

b) Le tableau de variation de g est le suivant :



En utilisant les données numériques de ce tableau, trouver a, b et c.

Partie B :

Soit : $h(x)=(x-1)e^{-x}+2$.

1) a) Montrer que l'équation $h(x)=0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[-1;0]$.

On note α cette solution.

b) Déterminer un encadrement au dixième d

2) Etudier le signe de $h(x)$ pour x appartena

Partie C :

Soit f la fonction définie sur IR par.

$f(x)=2x+1-xe^{-x}$

1) a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b) Déterminer la limite de f en $-\infty$.

2) a) Soit f' la fonction dérivée de f. Montrer

$f'(x)=h(x)$.

b) Dresser, en le justifiant, le tableau de var de f sur IR.

3) Dans le plan muni d'un repère orthonorm $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ on appelle C la représentation graph de f et D la droite d'équation $y=2x+1$.

a) Démontrer que D est asymptote à C en $+\infty$

b) Etudier la position de C par rapport à D.

4) Tracer une ébauche de la courbe et son asymptote.

Données numériques et formules :

x	-0,4	-0,39	-0,38	-0,37	-0,36	-0
$h(x)$	-0,089	-0,053	-0,018	0,017	0,051	0

-0,34	-0,33	-0,32	-0,31	-0,3
0,117	0,150	0,182	0,214	0,245

$f(\alpha)\approx 0,8$

Problème 5

I. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ p

$f(x)=x\left(1+e^{2-x}\right)$

On note (C) sa courbe représentation dans u repère orthonormé$\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$. (Unité : 2 cm).

1) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$h(x)=1+(1-x)e^{2-x}$

a) Etudier les variations de h (on ne détermin pas de limites aux bornes de D_h

b) En déduire le signe de h(x) sur $\mathbb{R}$.

2) a) Etudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$

b)Préciser la nature de la branche infinie de f

c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]$, puis interpréter le résultat obtenu.

d) Préciser la position de (C) par rapport à la $(\Delta): y=x$

3) a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Montrer que f admet une bijection réciproq notée f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$

c) f^{-1} est elle dérivable en 4 ?

Scanned by CamScanner

Etudier la position de (C) par rapport à sa ngente au point d'abscisse 2.
Construire (C) (On tracera la tangente à (C) au int d'abscisse 2.
Construire (C) courbe de f^{-1} dans le repère écédent.
Soit λ un réel strictement positif. R_λ Est la gion du plan délimitée par les droites d'équations spectives x = 0 et $x=\lambda$ et les courbes équations respectives : $y=f(x)$ et $y=x$.
oit $a(\lambda)$ l'aire de R_λ en cm^2
Calculer $a(\lambda)$ en fonction de λ
Déterminer $a=\lim\limits_{\lambda\to+\infty} a(\lambda)$ .Interpréter aphiquement le résultat obtenu.

oblème 6

RTIE A

oit f la fonction de la variable réelle x définie par :

$x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}-\ln\left(1+e^x\right)$

a) Etudier les variations de f.
Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-1+x\right]$
ue peut-on en déduire pour la courbe présentative de f ? Tracer cette courbe(Unité :2 n).
Montrer que f réalise une bijection de $]-\infty;+\infty[$ sur $\infty;0[$
soit g la fonction de la variable réelle x définie ur : $g(x)=e^{-x}\ln\left(1+e^x\right)$
démontrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$
Montrer que quel que soit le réel x,
$'(x)=e^{-x}f(x)$
Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=1$
Etudier les variations de g et tracer sa courbe présentative dans le repère précédent.
a) Montrer que $\dfrac{1}{1+e^x}=\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$
A tout réel λ , on associe le réel $I(\lambda)=\int_0^\lambda g(x)dx$.
ustifier l'existence de $I(\lambda)$. Calculer $I(\lambda)$ à l'aide une intégration par parties.
Calculer $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} I(\lambda)$

ARTIE B

) Montrer que g est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un tervalle J à préciser.
) a) Calculer g(0).
) Montrer que g^{-1} est dérivable au point ln2.
c) Déterminer l'équation de la tangente à $\left(C_{g^{-1}}\right)$ au point d'abscisse ln2.

Problème 7

A. On considère la fonction :

$u:[0;+\infty[\to\mathbb{R}$
$x\mapsto\ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|-\dfrac{2x}{x^2-1}$

1) déterminer l'ensemble de définition de u ;
Calculer u(0) et $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)$
2) Etudier les variations de u.
Dresser son tableau de variations ; (Il n'est pas nécessaire de calculer la limite de u en 1)
3) Déduire des résultats précédents que :
a) $\forall x\in[0;1[\,;u(x)\geq 0$
b) $\forall x\in]1;+\infty[\,;u(x)<0$

B) Soit g la fonction définie par :

$g:[0;+\infty[\to\mathbb{R}$
$x\mapsto x\ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|-1$

1) Déterminer D_g (le domaine de définition de g) ;
Puis étudier la limite de g en 1.
2) vérifier que $\dfrac{x+1}{x-1}=1+\dfrac{2}{x-1}$
Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{2}\ln\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)=1$
b) En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$
Interpréter géométriquement ce résultat.
c) Dresser le tableau de variation de g.
d) Montrer qu'il existe un réel α unique appartenant à $]0,1[$ tel que $g(\alpha)=0$
Donner un encadrement d'ordre 1 de α
3) Tracer la courbe $\left(C_g\right)$ de g dans le plan rapporté à un repère ortho normal (unité = 2 cm)

C. Soit f la fonction définie par $f(x)=\left(x^2-1\right)\ln\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

1) Montrer que f est dérivable sur $[0;1[$ et que $f'(x)=g(x),\forall x\in[0;1[$
2) Déterminer l'aire du domaine plan limité par la courbe $\left(C_g\right)$; l'axe des abscisses ; l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x=\alpha$

Problème 8

Partie A : Résolution de l'équation différentielle (1) : $y'-2y=xe^x$

1...Résoudre l'équation différentielle (2) : $y'-2y=0$ où y désigne une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Soient a et b deux réels et soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x)=(ax+b)e^x$

Scanned by CamScanner

3. Déterminer a et b pour que u soit solution de l'équation (1).
4. Montrer que v est une solution de l'équation (2) si et seulement si u +v est solution de (1).
5. En déduire l'ensemble des solutions de (1).
6. Déterminer la solution de (1) qui s'annule en 0.

- **Partie B : Etude d'une fonction auxiliaire**

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2e^x - x - 2$

1. Déterminer la limite de g en - ∞ et la limite de g en+∞.
2. Etudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation.
3. On admet que l'équation g(x) = 0 a exactement deux solutions réelles.
a) Vérifier que 0 est l'une de ces solutions.
b) L'autre solution est appelée α. Montrer que $-1,6 \le \alpha \le -1,5$.
c) Déterminer le signe de g(x) suivant les valeurs du réel x.

- **Partie C : Etude de la fonction principale**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$

1. Déterminer la limite de f en -∞ et la limite de f en +∞.
(On pourra mettre e^{2x} en facteur)
2. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.
Etudier le sens de variation de f.
3. Montrer que : $f(\alpha) = -\frac{\alpha^2+2\alpha}{4}$ où α est défini dans la partie **B**.
En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ (On rappelle que $-1,6 \le \alpha \le -1,5$).
4. Etablir le tableau de variation de f.
5. Tracer la courbe (C) représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal
(unité graphique2 cm)

- **Partie D : Calcul d'aire**

1. Soit m un réel négatif. Interpréter graphiquement l'intégrale $\int_m^0 f(x)dx$
(On justifiera la réponse)
2. Calculer $\int_m^0 xe^x dx$ à l'aide d'une intégration par parties.
2. En déduire $\int_m^0 f(x)dx$
3. Calculer la limite de $\int_m^0 f(x)dx$ lorsque m tend vers $-\infty$.

Problème 9

L'unité étant le centimètre, le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J) tel que OI = 4 et OJ = 1.

Partie A

On considère la fonction f : $x \mapsto \frac{e^{2x} - 7e^x + 16}{e^x - 3}$

sa courbe représentative dans le repère (O,
1. Déterminer l'ensemble de définition D_f
2. Pour tout x appartenant à D_f vérifier l'é

$f(x) = e^x - 4 + \frac{4}{e^x - 3}$.

3. a. Déterminer les limites de aux bornes ensemble de définition.

b. Calculer $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiq ce résultat.

c. Déterminer les équations des asymptotes
4. a. Démontrer que f'(x) peut s'écrire : pou de D_f, $f'(x) = \frac{e^x(e^x-1)(e^x-5)}{(e^x-3)^2}$.

b. Etudier le signe de f'(x) puis dresser le t de variation de f.
5. Déterminer les coordonnées du point d'intersection A de (C) avec l'asymptote par l'axe des abscisses.
6. Déterminer une équation de la tangente au point B d'abscisse ln4.
7. Tracer la tangente (T) et la courbe (C)

Partie B

1. Pour tout x appartenant à D_f, vérifier l'é

$f(x) = e^x - \frac{16}{3} + \frac{4e^x}{3(e^x-3)}$.

2. t étant un nombre réel strictement néga calculer l'aire A (t) de la partie du plan limi la courbe (C), l'asymptote parallèle à l'axe d abscisses et les droites d'équations x =0 et
3. Calculer $\lim_{t \to -\infty} A(t)$

Problème 10

Première partie

A/ Soit la fonction i définie sur]0;+∞[par i (x) = $e^{x-1} - x$.
1. Calculer la dérivée i' (x).
2. Étudier les variations de la fonction sur et en déduire que pour tout réel x strictem positif on a : $e^{x-1} \ge x$.

B/ Soit la fonction j définie sur]0;+∞[par

j (x)= $-\frac{1}{x} + 2 - x$

1. Calculer la dérivée j'(x).
2. Étudier les variations de la fonction j sur et en déduire que pour tout réel x strictem positif on a : $-\frac{1}{x} + 2 \le x$.

C) Déduire des questions précédentes que $e^{x-1} + \frac{1}{x} - 2$ est positif sur]0;+∞[.

D) On pose g(x)= e^{x-1}+ln x-2x+1, pour x > 0
1.Étudier le signe de la dérivée g'(x).

Scanned by CamScanner

Déterminer les limites de g(x) en 0 et en $+\infty$.
Dresser le tableau de variations complet de la ıction g.
Calculer g (1), et étudier le signe de g(x) pour > 0.

uxième partie

ı définit maintenant la fonction f par
x) = e^{x-1} + ln x, pour x > 0
Déterminer les limites de f(x) en 0 et en $+\infty$.
On note (C_f), la courbe représentative de f dans repère ortho normal $(o, \vec{i}, \vec{j})$.
elle propriété de la courbe (C_f) peut-on déduire résultat de la question précédente ?
Étudier les variations de f et dresser son bleau de variations.
Soit A le point d'abscisse 1 sur (Cf).
terminer l'équation de la tangente (T_A) à la urbe (C_f) au point A.
Utiliser le résultat de la question de la première rtie, D 4) pour déterminer la position de (C_f) par pport à (T_A)
Dans le repère $(0 ; \vec{i}, \vec{j})$, tracer (T_A) et (C_f), en ıant compte de toutes les informations résultant s questions précédentes.

oblème 11

plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) nité : 2 cm).

Partie A

n considère la fonction g, définie, continue et rivable sur lR, par : $g(x) = x + 1 - e^x$.
Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
Calculer g'(x) pour tout x élément de lR.
Etudier suivant les valeurs de x, le signe de g'(x) puis dresser le tableau de variations de g.
En déduire le signe de g(x), suivant les valeurs de x

Partie B

On considère la fonction f, définie, continue et érivable sur lR, par : $f(x) = 3(x^2+x)e^{-x}$ et (C) sa ourbe représentative dans le repère (O, I, J).

. a. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$

c. Interpréter graphiquement les résultats de a. t b.

a. Démontrer que, pour tout élément x de lR, $f'(x) = 3(-x^2+x+1)e^{-x}$

Etudier suivant les valeurs de x, le signe de f(x), is dresser son tableau de variations de f. On ne erchera pas à calculer $f(\frac{1-\sqrt{5}}{2})$ et $f(\frac{1+\sqrt{5}}{2})$.

. a. Déterminer une équation de la tangente (T) à C) au point d'abscisse 0.

b. Démontrer que, pour tout élément x de lR : $f(x) - 3x = 3xe^{-x}g(x)$.

c. Déduire de la partie A les positions relatives de (T) et de (C).

4. Tracer avec précision, la tangente (T) et la courbe (C).

On donne $\sqrt{5} \approx 2,2$; $f(\frac{1-\sqrt{5}}{2}) \approx -1,3$ et $f(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) \approx 2,5$

Partie C

1. Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (ax + bx + c)e^{-x}$ où a, b, et c sont des nombres réels. Déterminer a, b, et c pour que la fonction F soit une primitive de f sur lR.
2. t étant un nombre réel strictement positif, calculer l'aire A (t) de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives x = 0 et x = t.
3. Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} A(t)$

Problème 12

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x + 3)e^{-x} + x - 1$.
On appelle (C) sa courbe représentative dans un plan P rapporté à un repère ortho normal $(o, \vec{i}, \vec{j})$

A/Étude d'une fonction auxiliaire.

Soit φ la fonction définie sur IR par $\varphi(x) = e^x - 2x - 1$

1. Étudier le sens de variation de φ (l'étude des limites n'est pas demandée).
2. On donne $\ln 2 \approx 0,69$ et $\varphi(2) \approx 2,39$. Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet dans IR deux solutions 0 et α, où α est un nombre réel appartenant à l'intervalle [ln2 ; 2].

En calculant $\varphi(1)$ montrer que α appartient à l'intervalle [1 ; 2].

3. Donner le signe de $\varphi(x)$ en fonction de x.

B/ Étude de la fonction f.

1. Étudier la limite de f quand x tend vers $-\infty$.
En écrivant $f(x) = 2xe^{-x} + 3e^{-x} + x - 1$, Déterminer la limite de f quand x tend vers $+\infty$.
2. Montrer que, pour tout nombre réel x, on a $f'(x) = e^{-x}\varphi(x)$, où φ est la fonction définie en A.
3. Établir le tableau de variations de f (on ne demande pas le calcul de $f(\alpha)$).
4. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe (C).
Étudier la position relative de la courbe, par rapport à son asymptote. Donner les coordonnées du point A commun à la courbe (C) et à son asymptote (Δ).
5. Placer la droite (Δ), les tangentes à (C) aux points d'abscisses 0 et α, le point A, et donner une allure de la courbe (C).

On donne $\alpha \approx 1,25$ et $f(\alpha) \approx 1,82$.

C/ Calcul d'aire.

Scanned by CamScanner

Soit D la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des ordonnées, la droite d'équation x = 2 et la droite (Δ).

A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'aire du domaine D.

Problème 13

Première Partie

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x+1)^2 e^{-x}$

Soit (C) la courbe représentative de g dans un repère ortho normal $(0;\vec{i};\vec{j})$

A/ Calculer la dérivée g' de g. Montrer que g' (x) est du signe de $(1-x^2)$. En déduire les variations de g.

B/ Montrer que :

1/ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

2/ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

C/ Tracer la courbe (C) dans le repère $(0;\vec{i};\vec{j})$. On placera en particulier les points de la courbe d'abscisses – 2 ; -1 ; 0 ; 1 et 3.

D/ Étude d'une équation.

1/ Par une lecture graphique, indiquer, suivant les valeurs du nombre réel positif ou nul k, le nombre de solutions de l'équation g(x) = k.

2/ a/ Prouver par une démonstration que l'équation g(x) = 2 admet sur IR une solution α et une seule.

b) Démontrer que α appartient à l'intervalle $[-2;-1]$

3/ Démontrer que α vérifie la relation $\alpha = -1-\sqrt{2}e^{\frac{\alpha}{2}}$.

Deuxième partie

On appelle f la fonction sur l'intervalle $I = [-2;-1]$ par : $f(x) = -1-\sqrt{2}e^{\frac{x}{2}}$.

A/Étude de f.

1/ Étudier les variations de f sur I.

2/ En déduire que pour tout élément x de I, f(x) appartient à I.

3/Montrer que pour tout élément x de I, $|f'(x)| \le \frac{1}{\sqrt{2e}}$

4/ : On rappelle que $f(\alpha) = \alpha$. En utilisant le théorème de l'inégalité des accroissements finis, montrer que, pour tout élément x de I, on a :

$|f(x)-\alpha| \le \frac{1}{2}|x-\alpha|$

B/ Approximation de α à l'aide d'une suite. Soit (u_n) la suite d'éléments de I définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout entier naturel n.} \end{cases}$$

1/ Démontrer que pour tout entier naturel n on a :

$|u_{n+1}-\alpha| \le \frac{1}{2}|u_n-\alpha|$

2/ En déduire que pour tout entier naturel n

$|u_n-\alpha| \le \frac{1}{2^{n+1}}$

3/ Prouver que la suite (u_n) converge, préciser sa limite et déterminer un entier n_0 tel que u_{n_0} soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près. Calculer une valeur approchée de u_{n_0}

Problème 14

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Toutes les représentations graphiques demandées seront effectuées sur le même graphique, dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par

$$\begin{cases} f(x) = x\ln\frac{x+2}{x} \text{ si } x \in]0;+\infty[\\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1) a) Montrer que f est continue en o

b) f est elle dérivable en 0 ?

c) En posant $h = \frac{2}{x}(x>0)$ trouver la limite de f en $+\infty$

2) a) Pour tout $x \in]0;+\infty[$, calculer f'(x) et vérifier que $f'(x) = -\frac{4}{x(x+2)^2}$

b) Etudier le sens de variation de f' et montrer que la limite de f' en + ∞ est nulle.

En déduire le signe de f'(x)

c) Dresser le tableau de variation de f

3) On appelle (C) la représentation graphique de f dans le plan rapporté au repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

Tracer (C) en indiquant la tangente au point d'abscisse 0 et au point A d'abscisse 2

4) Soit u la fonction numérique définie sur $[0;+\infty[$ par $u(x) = \frac{2x}{x+2}$ et (H) sa représentation graphique dans le plan.

a) Dresser le tableau de variation de u

b) vérifier que, pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f(x)-u(x) = xf'(x)$

En déduire la position relative de (C) et de (H)

Tracer (H) en indiquant le point B d'abscisse 0

c) λ étant un réel strictement positif montrer que la tangente à (C) au point d'abscisse λ rencontre l'axe des ordonnées au point d'ordonnée $u(\lambda)$

En déduire à l'aide du tracé de (H) la détermination de la tangente à (C) au point d'abscisse λ

Tracer de cette façon la tangente à (C) au point O

Partie B

On se propose de déterminer l'ensemble (E) des fonctions g, définies et dérivables dur $]0;+\infty[$ possédant la propriété P suivante : Pour tout

Scanned by CamScanner

$\in]0;+\infty[, g(x) - xg'(x) = \frac{2x}{x+2}$, g étant une

nction définie et dérivable sur $]0;+\infty[$, on pose

our tout $x \in]0;+\infty[, G(x) = \frac{g(x)}{x}$

Montrer que g possède la propriété P si, et

ulement si pour tout $x \in]0;+\infty[; G'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x}$

Montrer que E est l'ensemble des fonctions g lles que pour tout

$]0;+\infty[, g(x) = f(x) + kx$ avec $k \in \mathbb{R}$

roblème 15

On considère la fonction f définie pour tout réel x

ar $f(x) = \frac{4(1-e^x)}{1+e^x}$ et on note (C) sa représentation

raphie dans un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$

nité graphique 1 cm)

artie A

Etudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$ et

nterpréter graphiquement les résultats obtenus.

Dresser le tableau de variations de f

Donner une équation de la tangente (T) à la urbe (C) au point d'abscisse nulle.

On considère la fonction γ définie pour tout réel par $\gamma(x) = f(x) + 2x$

Démontrer que $\gamma''(x) = \frac{8e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3}$

En déduire le sens de variation et le signe de γ', uis le sens de variation et le signe de γ

Quelle est la position relative de la courbe (C) par pport à sa tangente (T) ?

Démontrer que f est une fonction impaire

Construire (C) et (T) dans le même repère

artie B

Calculer l'intégrale $I = \int_{-3}^{0} \frac{e^x}{1+e^x} dx$

Vérifier que, pour tout réel x, $f(x) = 4 - \frac{8e^x}{1+e^x}$

Déduire des questions précédentes l'aire en cm² e al partie du plan comprise entre l'axe des bscisses, la courbe (C) et les droites d'équations x -3 et x = 0

onner une valeur décimale approchée à 10^{-2} près e cette aire.

On considère ici la région du plan comprise entre courbe (C), la tangente (T) et les droites équations x = -3 et x = 0

alculer en cm² l'aire de cette région.

onner une valeur décimale approchée à 10^{-2} près e cette aire.

Partie C

Résolution de l'équation $f(x) = \alpha$ où α est un nombre réel donné.

1) Déterminer graphiquement le nombre de solution de l'équation $f(x) = \alpha$ suivant les valeurs de α

2) a) Résoudre l'équation f(x) = 2.

b) Résoudre l'équation $f(x) = \alpha$ pour α quelconque dans IR et retrouver ainsi les résultats du C) 1)

Partie D

On se propose d'étudier l'existence des solutions sur IR de l'équation $f(x) + x = 0$

1) A partir de la représentation graphique de f, indiquer le nombre de solutions de cette équation

2) Soit φ la fonction définie sur IR par $\varphi(x) = f(x) + x$

a) Déterminer les limites de φ en ∞ et en $+\infty$

b) Vérifier que pour tout réel x on a $\varphi'(x) = \frac{e^{2x} - 6e^x + 1}{(1+e^x)^2}$

c) En déduire les variations de φ (on pourra commencer par résoudre l'équation $X^2 - 6X + 1 + 0$)

3) a) Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ a une solution unique dans $]0;+\infty[$

b) Retrouver ainsi de manière rigoureuse les résultats trouvés dans la parti D) 1.

Problème 16

A. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (x-1)e^{-x} + 2$

1. Étudier les variations de h sur IR.
2. Déterminer les limites de h en $-\infty$ et en $+\infty$.
3. Démontrer que h s'annule une seule fois sur IR en un réel α vérifiant $-1 < \alpha < 0$ et donner le signe de h sur IR.
4. A l'aide d'une calculatrice donner un encadrement de α d'amplitude 0,01.

B. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$.

On notera (C) sa courbe représentative dans un repère ortho normal du plan (unité graphique : 2cm).

1. Étudier les variations de f et les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Démontrer que la droite (D) d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote à (C). Préciser la position de (C) par rapport à (D).
3. Déterminer l'équation de la tangente (Δ) à (C) au point d'abscisse 0 puis celle de la tangente $(\Delta)'$ à (C) au point d'abscisse 1.
4. Tracer (D), (Δ) et (Δ') et (C) dans le repère donné.

Scanned by CamScanner

5. En utilisant une intégration par parties, calculer l'intégrale $\int_o^\lambda xe^{-x}dx$ où λ est un nombre réel strictement positif.

6. Déterminer l'aire en cm² A (λ) de la partie du plan délimitée par (C), (D) et les droites d'équations x =0 et x = λ (λ >o). Quelle est la limite de A (λ) lorsque λ tendons +∞ ?

Problème 17

Soit la fonction f définie sur IR par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^x} \text{ si } x \le 0 \\ f(x) = x - x\ln x \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ unité 2 cm.

Partie A

1) Etudier la continuité de f.

2) Etudier la dérivabilité de f en 0 (on rappelle que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$) et interpréter graphiquement le résultat.

3) a) Etudier les variations de f.

b) dresser le tableau de variation de f.

4) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus puis tracer (C).

5) a) Soit h la restriction de f à l'intervalle $[1;+\infty[$. Montrer que h réalise une bijection de $[1;+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Construire la courbe (Γ) de h^{-1} dans le même repère que (C)

Partie B

Soit α un réel tel que $0<\alpha\le e$. On pose

$I(\alpha) = \int_\alpha^e f(x)dx$

1) a) A l'aide d'une intégration par parties calculer :

$\int_\alpha^e x\ln x\,dx$

b) En déduire I(α).

2) a) Donner une interprétation graphique de I(α).

b) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} I(\alpha)$

3) En déduire en cm² l'aire de la partie délimitée par la courbe (C), les axes du repère et la droite d'équation : x = e.

4) Soit (E) l'ensemble des points M(x ;y) tels que :

$$\begin{cases} -1\le x\le 0 \\ f(x)\le y\le 0 \end{cases}$$

Calculer en cm³ le volume du solide engendré par la rotation complète de (E) autour de l'axe des abscisses.

Partie C

Dans le plan rapporté à un repère orthonorm $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$, on considère la courbe (Γ) dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x(t) = \ln(\cos t) \\ y(t) = \dfrac{\cos^2 t - 1}{\cos t} \end{cases} \quad avec \quad t\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$$

Montrer que (Γ) est une partie de (C).

Problème 18

Partie A

On considère la fonction numérique f, de la réelle x, définie sur ℝ par :

$f(x) = e^{-x}\sin x$

On appelle (C_f) la courbe d'équation y = f(x) le plan rapporté à un repère orthogonal $(O;\vec{i}$

On prendra 2 cm pour 1 unité sur l'axe des ordonnées, et 6 cm pour π unités sur l'axe d abscisses.

1. Montrer que, pour tout réel x,

$-e^{-x}\le f(x)\le e^{-x}$

En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et l'existence d'une asy pour la courbe (C_f).

2. Montrer que la fonction dérivée de f vérifie $f'(x)=\sqrt{2}e^{-x}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ pour tout x élément de

3. On étudie la fonction f sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};\right.$

Recopier et compléter le tableau suivant :

x	$-\frac{\pi}{2}$	π
$x+\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	
Signe de $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$		

En déduire le tableau de variation de la fonct sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};\pi\right]$.

4. Représenter la fonction f sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}\right.$ ainsi que les courbes (C_1) et (C_2) d'équations et $y=-e^{-x}$.

5. Déterminer algébriquement sur ℝ, puis su $\left[-\frac{\pi}{2};\pi\right]$, les coordonnées des points commun

a) (C_f) et l'axe des abscisses.

b) (C_f) et (C_1).

c) (C_f) et (C_f).

Scanned by CamScanner

Déterminer un réel α tel que, pour tout $x \geq \alpha$, on t $|f(x)| \leq 10^{-2}$

rtie B

e but de cette partie est de déterminer une imitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

En calculant les dérivées successives de la nction f jusqu'à l'ordre 4 (on rappelle que x) = $e^{-x}\sin x$), trouver une relation entre la nction f et sa dérivée d'ordre 4 notée $f^{(4)}$.

En déduire qu'on peut choisir

$(x) = -\frac{1}{4}f^{(3)}(x)$

On pose $I = \int_0^{\pi} e^{-x}\sin x dx$

ontrer que $I = \frac{e^{-\pi}+1}{2}$

rtie C

our tout entier naturel n, on pose :

$= \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} f(x)dx$

Vérifier que $I_0 = I$ et interpréter I_0 comme l'aire un domaine plan. Hachurer ce domaine.

Montrer que, pour tout naturel n,

$= \frac{e^{-2n\pi}}{2}\left(e^{-\pi}+1\right)$

Prouver que la suite $(I_n)_{n\in IN}$ est une suite ométrique. Calculer sa raison.

Prouver que la suite $(I_n)_{n\in IN}$ converge et calculer limite.

roblème 19

ARTIE A

tude de la fonction $g : x \mapsto \ln\left(\frac{3+x}{3-x}\right)$

oit la fonction g définie sur]-3 ;3[par

$(x) = \ln\left(\frac{3+x}{3-x}\right)$

Etudier la parité de la fonction g.

a) Calculer les limites de g en -3 et en 3.

Etudier le sens de variation de g sur [0 ;3[. resser son tableau de variation sur]-3 ;3[.

Soit $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ un repère orthonormal d'unité raphique 4 centimètres. Soit (C) la courbe présentative de la fonction g dans ce repère.

Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) u point d'abscisse 0.

Tracer dans le repère la courbe (C) et sa ngente, (T).

Etudier le signe de g(x) suivant les valeurs de x.

a) Calculer la dérivée de la fonction :

$\mapsto xg(x)$

b) Calculer l'aire, exprimée en cm², de la portion de plan délimitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation x = 0et x = 1. On donnera la valeur exacte de cette aire.

PARTIE B

Etude d'une courbe paramétrée

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ d'unité graphique 4 centimètres. Soit la courbe paramétrée (Γ) définie par :

$\begin{cases} x(t) = t(3-t^2) \\ y(t) = tg(t) \end{cases}$ pour tout $t \in [-2;2]$

où g désigne la fonction étudiée dans la partie A.

On note M(t) le point de coordonnées $(x(t);y(t))$

1.a) Comparer d'une part x(t) et x(-t) et d'autre part y(t) et y(-t).

b) Par quelle transformation peut-on passer de M(t) à M(-t)? En déduire que (Γ) admet un axe de symétrie que l'on précisera.

2. Etudier la fonction $t \mapsto t\left(3-t^2\right)$ et dresser son tableau de variation sur [0 ;2]

3. En utilisant la partie A, montrer que la fonction $t \mapsto y(t)$ est strictement croissante sur l'intervalle $[0;2]$.

4. Dresser le tableau des variations conjointes des fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sur [0 ;2].

5. Pour quelles valeurs de t l'abscisse de M(t) est-elle nulle ? Préciser alors les ordonnées des points correspondants de (Γ).

6.Tracé de (Γ)

a) Placer, dans le repère $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$, les points M(0), M(1), M($\sqrt{3}$) et M(2) qui correspondent respectivement aux valeurs 0, 1, $\sqrt{3}$ et 2 du paramètre t.

b) Préciser un vecteur directeur des tangentes à (Γ) aux points M(0) et M(1) et tracer ces tangentes. Tracer (Γ).

Problème 20

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

L'unité graphique est 4 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = \left(2+\cos x\right)e^{1-x}$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1. Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$: f(x) >0

2. Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$:

Scanned by CamScanner

$\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos x+\sin x$

3. En déduire que, pour tout x de $\mathbb{R}$:
$2+\cos x+\sin x>0$
4. Montrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$
.
5. Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$:
$e^{1-x}\le f(x)\le 3e^{1-x}$
6. En déduire les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
7. Interpréter géométriquement le résultat obtenu lors du calcul de la limite de f en $+\infty$.
8. Montrer que, sur l'intervalle $[0;\pi]$, l'équation f(x) = 3 admet une solution unique α.
9. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
Représenter la courbe C sur $[0;4]$.

Partie B

On veut calculer l'aire, A, exprimée en unités d'aire, du domaine limité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation x = 1.

1. Montrer que : $A=2e-2+\int_0^1(\cos t)e^{1-t}dt$

2. On pose : $I=\int_0^1(\cos t)e^{1-t}dt$ et $J=\int_0^1(\sin t)e^{1-t}dt$

3.À l'aide de deux intégrations par parties, montrer que : $I=-\cos 1+e-J$ et $J=-\sin 1+I$
4. En déduire la valeur de I.
5. Déterminer la valeur exacte de A en unités d'aire, puis donner une valeur approchée de A à 10^{-2} près par défaut.

Partie C

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x)=1-\frac{\sin x}{2+\cos x}$

1. Montrer que la fonction h admet des primitives sur $\mathbb{R}$.
Calculer la primitive H de la fonction h, qui prend en 0 la valeur (1 + ln3).
2. Déterminer ln(f(x)) pour tout x de $\mathbb{R}$.
3.Étudier le sens de variation de la fonction H.
4. Déterminer le tableau de variation de H.
5. On appelle Γ la courbe représentative de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x\mapsto 1-x+\ln(2+\cos x)$
(On ne demande pas de représenter (Γ). On appelle Δ la droite d'équation $y=-x+1$
6.Étudier la position relative de Γ et de Δ.
7. Déterminer les abscisses des points communs à Γ et Δ.
8 Établir une équation de la tangente T à Γ au point d'abscisse 0.
9.Étudier la position relative de Γ et T.
10. Montrer que la courbe Γ est contenue dans une bande du plan limitée par deux droites parallèles dont on donnera des équations.

Problème 21

On considère la fonction numérique f
$]-\infty;1[$ par : $f(x)=\frac{2}{(x-1)^2}e^{\frac{x+1}{x-1}}$

On désigne par Γ la courbe représen
dans le plan rapporté à un repère or
$(O;\vec{i};\vec{j})$, l'unité graphique étant 2 cm

I

a. Soit X = $\frac{2}{x-1}$. Prouver l'égalité : $\frac{}{(x-}$
En déduire la limite de f quand x ten
b.Déterminer la limite de f en $-\infty$.
c. En déduire une asymptote à la cou
d. Soit v la fonction numérique défin
par : $v(x)=e^{\frac{x+1}{x-1}}$; Calculer v'(x).

e. Démontrer que $f'(x)=\frac{-4x}{(x-1)^4}e^{\frac{x+1}{x-1}}$
1. Etudier les variations de f.
2. Tracer la courbe Γ.

II

1. Déterminer une primitive de f sur
2. Soit α réel tel que $0<\alpha<1$, déter
$g(\alpha)=\int_{-\alpha}^{\alpha}f(x)dx$
3. Quelle est la limite de g(α) quand
4. Quelle est l'aire en cm² du domain
courbe de f, l'axe des abscisses, les
d'équations respectives
x = -α et x = α .

III

a. Démontrer que l'équation f(x) = $\frac{1}{2}$
solutions dont l'une est -1. On note
solution.
b. Donner un encadrement de large
c. Soit a un élément de $]-\infty;1[$. Déter
graphiquement, en fonction de a, le
solutions de l'équation
f(x) = f(α) .

Scanned by CamScanner

SUITES NUMERIQUES

I. Généralités sur les suites

1. raisonnement par récurrence

Principe

Pour montrer q'une propriété dépendant d'un entier n est vraie pour tout $n \geq n_0$

- On vérifie que la propriété est vraie au rang n_0
- On suppose que la propriété est vraie au rang p (en traduisant ce que cela signifie) et on montre qu'alors la propriété est vraie au rang $p+1$
- On conlut en disant que la propriété est donc vraie pout tout $n \geq n_0$

➢ Exemple

Montrons par récurrence que la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ est positive et majorée par 2.

Soit P la propriété : « $\forall n \geq 0, 0 \leq u_n \leq 2$ »

On a $u_0 = 1$ par suite $0 \leq u_0 \leq 2$ donc P est vraie au rang 0

Supposons P vraie au rang k c'est-à-dire que $0 \leq u_k \leq 2$.

On a alors

$2 \leq 2+u_k \leq 4 \Rightarrow \sqrt{2} \leq \sqrt{2+u_k} \leq 2 \Rightarrow 0 \leq\leq u_{k+1} \leq 2$ la propriété est alors vraie au rang $k+1$. D'où la suite (u_n) est positive et majorée par 2.

. Comment étudier le sens de variation d'une suite.

Méthode 1

On étude le signe de $u_{n+1} - u_n$

- Si pour tout n $u_{n+1} - u_n$ est positif alors la suite est roissante.
- Si pour tout n $u_{n+1} - u_n$ est négatif alors la suite est écroissante.

➢ Exemple

oit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2n$

our tout n $u_{n+1} - u_n = 2n \geq 0$. Donc (u_n) est croissante.

Méthode 2(uniquement pour les suites dont tous les ermes sont strictement positifs)

On compare $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1

- Si pour tout n, $u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est supérieur à 1 alors la uite est croissante.
- Si pour tout n, $u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est inférieur à 1 alors la uite est décroissante.

➢ Exemple

oit la suite (u_n) définie par $u_n = 3^n$

our tout n, $u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 3 > 1$ donc la suite (u_n) est roissante.

Méthode 3

Pour les suites explicites définies par $u_n = f(n)$: on utilise les variations de la fonction f sur $[0;+\infty[$

- Si f est croissante sur $[0;+\infty[$ alors la suite est croissante
- Si f est décroissante sur $[0;+\infty[$ alors la suite est décroissante.

➢ Exemple

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = e^{\frac{1}{n+1}}$

On a $u_n = f(n)$ avec f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = e^{\frac{1}{1+x}}$

Pour tout $x \geq 0, f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} e^{\frac{1}{x+1}} < 0$ donc f est décroissante sur $[0;+\infty[$ par conséquent (u_n) est décroissante.

Méthode 4 on se sert du raisonnement par récurrence

- Si on montre par récurrence que $u_{n+1} \leq u_n$ alors la suite est décroissante
- Si on montre par récurrence que $u_{n+1} \geq u_n$ alors la suite est croissante

➢ Exemple

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = e$ et $u_{n+1} = \ln(u_n)$.

Montrons par récurrence que la suite (u_n) est décroissante 'est-à –dire que pour tout n, $u_{n+1} \leq u_n$

$u_0 = e$; $u_1 = 1$ on a $u_1 \leq u_0$ donc la propriété est vraie au rang 0

Supposons la propriété vraie au rang p c'est-à-dire $u_{p+1} \leq u_p$. La fonction ln étant croissante sur $]0;+\infty[$ on a alors $\ln(u_{p+1}) \leq \ln(u_p)$ soit $u_{p+2} \leq u_{p+1}$. La propriété est alors vraie au rang p + 1, donc pour tout n, la suite (u_n) est décroissante.

3. majorant et minorant d'une suite

La suite (u_n) est majorée par un réel M si, pour tout n, $u_n \leq M$

Méthodes possibles pour montrer que M est un majorant

- On peut étudier le signe de $u_n - M$ et montrer que $u_n - M$ est négatif ou nul.
- On peut utiliser un raisonnement par récurrence pour montrer que u_n est inférieur à M
- Pour les suites explicites définie par $u_n = f(n)$, on peut utiliser les variations de la fonction f. Si pour tout $x \geq 0$, $f(x) \leq M$ alors la suite (u_n) est majorée par M

La suite (u_n) est minorée par un réel m si,pour tout n, $u_n \geq m$

Méthodes possibles pour montrer que M est un majorant

- On peut étudier le signe de $u_n - m$ et montrer que $u_n - m$ est positif ou nul.
- On peut utiliser un raisonnement par récurrence pour montrer que u_n est supérieur à m

Scanned by CamScanner

• Pour les suites explicites définie par $u_n = f(n)$, on peut utiliser les variations de la fonction f. Si pour tout $x \geq 0$, $f(x) \geq m$ alors la suite (u_n) est minorée par m.

4. limites de suites

•La suite (u_n) est dite convergente s'il existe un réel ℓ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

•La suite est dite divergente si elle n'admet de limite ou si $\lim\limits_{x\to\infty} u_n = +\infty$.

Remarque : Les théorèmes sur les opérations de limites de fonctions restent toujours valables pour les suites.

Pour les suites définies par $u_n = f(n)$; si f admet une limite en $+\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Exemple

$$\lim_{n\to+\infty} n - \ln n = \lim_{n\to+\infty} n\left(1 - \frac{\ln n}{n}\right) = +\infty \text{ car } \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$$

Limite de suite de terme général q^n

•si $|q| < 1$ c'est-à-dire $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$

• si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$

• si $q \leq -1$ alors la suite de terme général q^n n'admet pas de limite

Exemples

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^n = +\infty \text{ car } \frac{4}{3} > 1;\ \lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{3}{4}\right)^n = 0 \text{ car } \left|-\frac{3}{4}\right| < 1$$

Théorèmes de comparaison

◦ si $\forall n \geq n_0, u_n \geq v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

◦ si $\forall n \geq n_0, u_n \leq t_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

◦ si $\forall n \geq n_0, v_n \leq u_n \leq t_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} t_n = \ell (\ell \in \mathbb{R})$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$

Exemple Pour $n \geq 1$,

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\cos n}{n} \leq \frac{1}{n} \text{ et } \lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} \frac{\cos n}{n} = 0$$

Convergences des suites monotones

◦ Toute suite croissante et majorée converge vers un réel ℓ

◦ Toute suite décoissante et minorée converge vers un réel ℓ

Remarque importante.

Détermination de ℓ dans le cas des suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$.

Si pour tout $x \in [a;b]$, $f(x) \in [a;b]$; f est continue sur $[a;b]$ pour tout $n, u_n \in [a;b]$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$

D'où la limite ℓ vérifie l'équation $\ell = f(\ell)$

II. Suite arithmétique

Définition

Une suite (u_n) est une suite arithmétique s'il existe un que pour tout entier naturel $n, u_{n+1} = u_n + a$

Remarque Pour les suites arithmétiques, on passe terme au terme suivant en ajoutant toujours le mê nombre a.

Terme général.

Si (u_n) est une suite arithmétique de premier ter et de raison a alors le terme général de la suite es donné par $u_n = u_0 + na$

Remarque

◦ $\forall p \leq n$, on a $u_n = u_p + (n-p)a$

◦ Si $u_{n+1} - u_n =$ constante alors la suite (u_n) est suite arithmétique de raison la constante.

Somme des termes consécutifs.

Si (u_n) est une suite arithmétique alors

$$u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = (n-p+1) \times \frac{u_p + u_n}{2}$$

Remarque

◦ La somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale au

(Nombre de termes) $\times \frac{1^{er} \text{ terme} + \text{dernier term}}{2}$

◦ Si la raison a est positive, la suite est croissant

◦ Si la raison a est négative, la suite est décroiss

◦ Si trois réels a, b et c suivent dans cet une prog arithmétique alors $b = \frac{a+c}{2}$

III. Suite géométrique

Définition

Une suite (u_n) est une suite géométrique s'il existe un réel q tel que pour tout entier naturel $n, u_{n+1} = qu_n$

Remarque Pour les suites géométriques, on passe terme au terme suivant en multipliant toujours même nombre q.

Terme général.

Si (u_n) est une suite géométrique de premier ter et de raison q alors le terme général de la suite e donné par $u_n = q^n \times u_0$

Remarque

◦ $\forall p \leq n$, on a $u_n = u_p \times q^{(n-p)}$

◦ Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} =$ constante alors la suite (u_n) est une géométrique de raison la constante.

Somme des termes consécutifs.

Scanned by CamScanner

Si (u_n) est une suite géométrique alors

$$\boxed{u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = u_p \times \frac{1-q^{(n-p+1)}}{1-q} \text{ pour } q \neq 1}$$

Si $q = 1$ alors $\boxed{u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = u_p \times (n-p+1)}$

Remarque

- La somme des termes consécutifs d'une suite géométrique est égale au

$$(\text{Premier terme}) \times \frac{1 - \text{raison}^{(\text{nombre de termes})}}{1 - \text{raison}}.$$

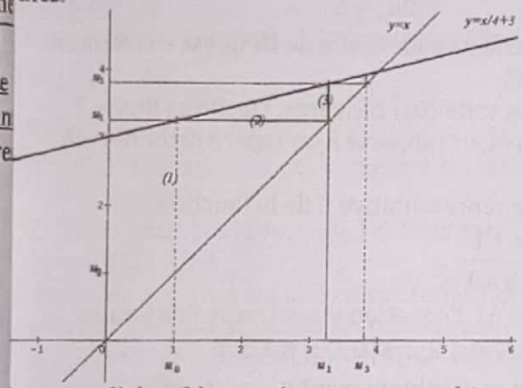
- Si trois réels a, b et c suivent dans cet une progression géométrique alors $\boxed{b^2 = ac}$
- Pour étudier le sens de variation de la suite géométrique (u_n) on calcule $u_{n+1} - u_n$ et on factorise

Si $q < 0$ la suite n'est croissante ni décroissante.

Exemple d'étude de suite récurrente définie par $u_{n+1} = f(u_n)$

Soit la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{4} + 3$

a)Représenter graphiquement les premiers termes de la suite.



On trace d'abord la représentation graphique de la fonction f définissant la relation de récurrence (ici on a $f(x) = \frac{x}{4} + 3$) et la droite d'équation $y = x$.

On part de u_0 en abscisse : l'ordonnée du point de la courbe correspondant à cette abscisse nous donne u_1 (1) sur le graphique).

Pour déterminer $u_2 = f(u_1)$ il nous faut rabattre u_1 sur l'axe des abscisses.((2) sur le graphique) en utilisant la droite d'équation $y = x$.

Dès u_2 est l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse u_1 ((3) sur le graphique).

Pour poursuivre la construction, on répète le procédé en rabattant u_2 sur l'axe des abscisses.....

b) Montrer par récurrence que pour tout n, $0 \leq u_n \leq 4$

Soit la propriété : « $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 4$ »

$u_0 = 1$ Donc $0 \leq u_0 \leq 4$ d'où la propriété est vraie au rang 0.

Supposons la propriété vraie au rang p et démontrons qu'elle est vraie eu rang p + 1.

Par hypothèse $0 \leq u_p \leq 4$ on a alors

$0 \leq \frac{u_p}{4} \leq 1 \Rightarrow 3 \leq \frac{u_p}{4} + 3 \leq 4 \Rightarrow 0 \leq \frac{u_p}{4} + 3 \leq 4$ soit

$0 \leq u_{p+1} \leq 4$ ainsi la propriété est vraie au rang p + 1.

D'où pour tout entier naturel n $0 \leq u_n \leq 4$.

c) Montrer que la suite est croissante et conclure sur sa convergence.

Pour tout n,

$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{4} + 3 - u_n = \frac{3}{4}(4 - u_n) \geq 0$ car $u_n \leq 4$. La suite (u_n) est donc croissante. Comme en plus elle est majorée alors elle converge.

d) Déterminer la limite de la suite.

La suite converge vers un réel ℓ et la fonction $f(x) = \frac{x}{4} + 3$ est continue sur $[0;4]$ donc ℓ vérifie l'équation $f(\ell) = \ell$

$f(\ell) = \ell \Rightarrow \frac{\ell}{4} + 3 = \ell \Rightarrow \ell = 4$. On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 4$

Exercices de synthèse

Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1} \end{cases}$$

1.a. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 4 - \frac{6}{u_n + 1}$

b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq 2$

c. Etudier la monotonie de la suite (u_n)

2. Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 1}$

Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$.

Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

3. soit la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $w_n = u_n - 2$

a. Justifier que suite (u_n) est minorée par $\frac{3}{2}$ puis montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{2}{u_n + 1} \leq \frac{4}{5}$

b. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, |w_n| \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$

Scanned by CamScanner

c. Calculer $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n$. En déduire $\lim_{n\to\infty} w_n$, puis $\lim_{n\to\infty} u_n$

Exercice 2

On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = a$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = u_n(2-u_n)$ où a est un réel donné tel que $0 < a < 1$.

1. On suppose dans cette question que $a = \frac{1}{8}$.

a) Calculer u_1 et u_2.

b) Dans un repère orthonormal (unité graphique 8 cm), tracer, sur l'intervalle [0,2], la droite (d) d'équation $y = x$ et la courbe (Γ) représentative de la fonction : $f : x \mapsto x(2-x)$

c) Utiliser (d) et (Γ) pour construire sur l'axe des abscisses les points A_1, A_2, A_3 d'abscisses respectives u_1, u_2, u_3.

2. On suppose dans cette question que a est un réel quelconque de l'intervalle]0,1[.

a) Montrer par récurrence que, pour tout entier n, $0 < u_n < 1$

b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

c) Que peut-on en déduire ?

3. On suppose à nouveau dans cette question que $a = \frac{1}{8}$.

On considère la suite numérique (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = 1 - u_n$

Exercice 3

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 6}{u_n + 2} \text{ pour tout entier n} \geq 1. \end{cases}$$

A/ Montrer que la suite (un) est constante pour deux valeurs de $u_1 \neq -3$ et $u_1 \neq 2$.

On admettra qu'alors tous les u_n sont différents de – 3 et de 2. Démontrer que :

$$\frac{u_{n+1}+3}{u_{n+1}-2} = -4\frac{u_n+3}{u_n-2}$$

C/ On pose $v_n = \frac{u_n+3}{u_n-2}$

1/ Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison q et le premier terme v.

2/ Démontrer que $\lim_{n\to+\infty}|v_n| = +\infty$. En déduire la limite de un lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 4

On considère la suite (u_n) définie sur IN par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence

$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{14}{3}$

1. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que la suite (u_n) croissante.

2.a. Résoudre dans IR l'équation $x = \frac{1}{3}x + \frac{14}{3}$

b. Si la suite (u_n) converge, quelle est sa limite ?

3. On pose : pour tout n de IN $v_n = u_n - 7$

Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. En déduire l'expression de v_n, puis celle de u_n, en fonction de n.

La suite (u_n) est –elle convergente ?

Exercice 5

Soient u_0 un réel et (u_n) la suite définie sur IR par premier terme u_0 et la relation de récurrence

$u_{n+1} = \frac{u_n}{2+u_n^2}$

1. Démontrer : pour tout n de IN, $|u_{n+1}| \leq \frac{|u_n|}{2}$

2. En déduire : pour tout n de IN $|u_n| \leq \frac{|u_0|}{2^n}$. Qu

est la limite de la suite (u_n) ?

Exercice 6

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et la relation d récurrence $u_{n+1} = \frac{u_n+2}{2u_n+1}$.

1. a. Justifier : pour tout n de IN u_n est strictem positif.

b. Si la suite (u_n) converge. Quelle sa limite ?

2. Le plan étant rapporté à un repère orthonorm tracer

- la courbe représentative C de la fonction

$f : x \mapsto \frac{x+1}{2x+1}$

- la droite (Δ) d'équation $y = x$ (on se limitera au cadrage $0 \leq x \leq 2{,}2$ et $0 \leq y \leq 1{,}5$).

Représenter graphiquement u_1, u_2, u_3 et u_4.

Que peut –on conjecturer au sujet de la converge la suite ?

1. Pour démontrer la conjecture, on considère (v_n) définie : pour tout n de IN :

$V_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$

a. Démontrer que (v_n) est une suite géométriq que est sa limite ? Exprimer v_n en fonction

b. Exprimer u_n en fonction de v_n ; en déduire l de (u_n). Enfin, exprimer u_n en fonction de n

Exercice 7

On considère la suite (u_n) définie sur IN par $u_0 = 1{,}5$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 3$

1. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
2. a. On suppose dans cette question que la su converge vers un réel l. Donner alors une éq du second degré vérifiée par l.
   c. En déduire que la suite (u_n) est divergente
   d.

Scanned by CamScanner

Exercice 8

On considère la suite (u_n) définie sur IN* par

: $u_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

1. Démontrer : pour tout x de $]-1;+\infty[$, $\ln(x+1)\le x$ (on pourra étudier le sens de variation de la fonction f : $x\mapsto \ln(x+1)-x$)
2. En déduire : pour tout k de IN* $\ln(1+k)-\ln k\le\frac{1}{k}$, puis pour tout n de IN* $\ln(n+1)\le u_n$

Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

Exercice 9

Soit $(u_n)_{n\in IN}$ et $(v_n)_{n\in IN}$ deux suites définies par :

$u_n=\frac{2^n-4n+3}{2}$ et $v_n=\frac{2^n+4n-3}{2}$

1. Démontrer que (u_n+v_n) est une suite géométrique.
2. Démontrer que (u_n-v_n) est une suite arithmétique.
3. Déduire de ce qui précède $u_0+u_1+\ldots+u_n$ d'une part et $v_0+v_1+\ldots+v_n$ d'autre part.

Exercice 10

On considère la suite (u_n) à termes positifs définie par :

$\begin{cases}(u_{n+1})^2=4u_n\\ u_1=1\end{cases}$

1. Calculer u_2, u_3, u_4 et u_5 , donner les résultats sous la forme 2^α .
2. On considère la suite (v_n) définie par $v_n=\ln(u_n)-\ln 4$ Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la la raison et le premier terme .
3. Exprimer v_n en fonction de n. En déduire u_n . Calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$
4. Pour quelles valeurs a-t-on $u_n>3{,}96$.

Exercice 11

1. Soit (U_n) la suite du terme général $U_n = 2n-3$, $n\in IN$;

a. Montrer que (U_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme U_o

b. La suite (U_n) est-elle croissante ou décroissante ? Calculer $S_n = U_0+U_1+\ldots+U_n$

2. On définit sur IN une suite (V_n) par $V_n = 3^{-U_n}$

a. Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme V_0 .

b. Calculer $S'_n = V_0+V_1+\ldots+V_n$. En déduire la limite de S'_n quand n tend vers l'infini.

Exercice 12

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in IN}$ définie par son premier terme $u_o = 2$ et la relation de récurrence :

$u_{n+1}=\frac{4u_n+3}{u_n+2}$.

1. Calculer les trois premiers termes de cette suite
2. On pose pour tout entier naturel n : $v_n=\frac{u_n-3}{u_n+1}$

Montrer que la suite (v_n) est géométrique ; préciser la raison q ainsi que le premier terme v_o

3. Exprimer le terme en fonction de n
4. Trouver la limite de $(v_n)_{n\in IN}$ lorsque n tend vers $+\infty$; en déduire la limite de $(u_n)_{n\in IN}$
5. n étant un entier naturel non nul , montrer que : $S_n = 1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$
6. A l'aide de la suite $(v_n)_{n\in IN}$ on définie
7. $Pn = v_0\times v_1\times v_2\times\ldots\times v_n$.

Exprimer P_n en fonction de n.

Exercice 13

Soit un réel α . Soit la suite (a_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels IN par : $a_o=\alpha$ et pour tout entier naturel n , $a_{n+1}=\frac{\alpha}{1+a_n}$.

On se propose d'étudier la suite (a_n) pour $\alpha = 2$, puis pour $\alpha = -\frac{1}{4}$.

1. On pose $\alpha = 2$. On étudie alors la suite (a_n) à termes positifs, telle que $a_o = 2$ et pour tout entier naturel n , $a_{n+1}=\frac{2}{1+a_n}$.

Soit la suite (w_n) définie, pour tout n élément de IN , par : $w_n=\frac{a_n-1}{a_n+2}$

a. Démontrer que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$ et calculer sa limite éventuelle.

b.E n déduire l'expression de a_n en fonction de w_n puis calculer la limite de la suite (a_n).

2. On pose $\alpha=\frac{-1}{4}$ .On étudie alors la suite (a_n) telle que : $a_o=\frac{-1}{4}$ et pour tout n de IN, $a_{n+1}=\frac{-1}{4+4a_n}$.

a.Démontrer par récurrence que : pour tout n de IN , $a_n\neq\frac{-1}{2}$

b.On considère la suite (v_n) définie pour tout n élément de IN, par : $v_n=\frac{1}{a_n+\frac{1}{2}}$.

Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison et calculer le premier terme v_o.

a. Pour tout n élément de IN, exprimer a_n en fonction v_n , puis a_n en fonction de n

b. En déduire la limite de le suite (a_n).

Scanned by CamScanner

Intégration

1. Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenant a et b. on appelle intégrale de a à b de f, le réel noté $\int_a^b f(x)dx$.

Si F est une primitive quelconque de f sur I alors

$$\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

Dans tout ce qui on supposera que f est continue sur l'intervalle considéré.

2. Propriétés

Même borne	$\int_a^a f(x)dx = 0$
Inversion des bornes	$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
Relation de Charles	$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
Linéarité	$\int_a^b \left[\alpha f(x) + \beta g(x)\right]dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx$
Fonction paire	$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx = 2\int_{-a}^0 f(x)dx$
Fonction impaire	$\int_{-a}^0 f(x)dx = -\int_0^a f(x)dx$ et $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$
Fonction périodique de période T	$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$
Signe de l'intégrale	Si f est positive sur $[a;b]$ $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ Si f est négative sur $[a;b]$ $\int_a^b f(x)dx \leq 0$
Monotonie	Si $f \leq g$ sur $[a;b]$ alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_b^a g(x)dx$
Inégalité de la moyenne	Si $m \leq f \leq M$ sur $[a;b]$ alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$
	Si $\lvert f\rvert \leq m$ sur $[a;b]$ alors $\left\lvert\int_a^b f(x)dx\right\rvert \leq m\lvert b-a\rvert$
Valeur moyenne	La valeur moyenne de f sur l'intervalle $[a;b]$ est $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$
Inégalité triangulaire	$\left\lvert\int_a^b f(x)dx\right\rvert \leq \int_a^b \lvert f(x)\rvert dx$

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. $a \in I$, la fonction F définie par $F(x) = \int_a^x f(t)$ est une primitive de f sur I qui s'annule en

Méthode

D'après le théorème précédent pour calcule primitive d'une fonction f qui s'annule en a ; il suffit de calculer $\int_a^x f(t)dt$

▷ Exemple

Trouvons la primitive de la fonction g défin $g(x) = \frac{\ln x}{x}$ qui s'annule en e.

Soit G cette primitive, on a

$$G(x) = \int_e^x g(t)dt = \int_e^x \frac{\ln t}{t}dt$$

$$\int_e^x \frac{\ln t}{t} = \left[\frac{1}{2}\ln^2(t)\right]_e^x = \frac{1}{2}\left(\ln^2(x) - 1\right) \text{ d'où}$$

$$G(x) = \frac{1}{2}\left(\ln^2 x - 1\right)$$

3. Méthodes d'intégration

1. Utilisation des primitives

Soit f une fonction continue sur I et F une primitive de f sur I.

$$\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

▷ Exemple

Calculons $\int_1^3 \left(x^2 - \frac{1}{x}\right)dx$

Une primitive de $x \mapsto x^2 - \frac{1}{x}$ est $x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - \ln$

$$\int_1^3 \left(x^2 - \frac{1}{x}\right)dx = \left[\left(\frac{1}{3}x^3 - \ln x\right)\right]_1^3$$

$$= \left(\frac{1}{3}\times 3^3 - \ln 3\right) - \left(\frac{1}{3}\times 1^2 - \ln 1\right) = \frac{26}{3} -$$

$$\int_1^3 \left(x^2 - \frac{1}{x}\right)dx = \frac{26}{3} - \ln 3$$

2. Intégration par parties

Il y a des fonctions dont les primitives ne peuvent pas être déterminées avec les théo généraux, il nous faut utiliser une autre méthode d'où l'intégration par parties.

Soient u et v deux fonctions dérivables sur que leurs dérivés premières soient continu I, on a :

$$\int_a^b u(x)\times v'(x)dx = \left[u(x)\times v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)\times v(x)d$$

Remarque

En général, le but de la manœuvre est de s débarrasser du terme qui gêne la recherche d'une primitive. Si l'expression que l'on veu intégrer est de la forme

$P(x)e^x$ ou $P(x)\sin x$ ou $P(x)\cos x$ où $P(x)$ est u polynôme, il est conseillé de prendre $u(x) =$

en revanche si l'expression à intégrer est de

Scanned by CamScanner

forme $P(x)\ln x$, il est conseillé de prendre

$u(x)=\ln x$

▹ Exemples

Calculons

$\int_0^{\pi}(2x+3)\cos x dx$; $\int_0^1\left(x^2+3x+2\right)e^x dx$ et $\int_1^e(x-2)\ln x dx$

.Intégrons par parties $\int_0^{\pi}(2x+3)\cos x dx$

Posons $u(x)=2x+3$ et $v'(x)=\cos x$ on a

$u'(x)=2$ et $v(x)=\sin x$ donc

$$\int_0^{\pi}(2x+3)\cos x dx=\left[(2x+3)\sin x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}2\sin x dx$$

$$=0-\left[-2\cos x\right]_0^{\pi}=-(-2\cos\pi+2\cos 0)=-4$$

.Intégrons par parties $\int_0^1\left(x^2+3x+2\right)e^x dx$

Posons $u(x)=x^2+3x+2$ et $v'(x)=e^x$ on a

$u'(x)=2x+3$ et $v(x)=e^x$ donc

$$\int_0^1\left(x^2+3x+2\right)e^x dx=\left[\left(x^2+3x+2\right)e^x\right]_0^1-\int_0^1(2x+3)e^x dx$$

$$=6e-2-\int_0^1(2x+3)e^x dx$$

Intégrons par parties $\int_0^1(2x+3)e^x dx$

posons $u(x)=2x+3$ et $v'(x)=e^x$, on a

$u'(x)=2$ et $v(x)=e^x$ donc

$$\int_0^1(2x+3)e^x dx=\left[(2x+3)e^x\right]_0^1-\int_0^1 2e^x dx$$

$$=5e-3-\left[2e^x\right]_0^1=3e-1$$

d'où $\int_0^1\left(x^2+3x+2\right)e^x dx=6e-2-3e+1=3e-1$

.Intégrons par parties $\int_1^e(x-2)\ln x dx$

Posons $u(x)=\ln x$ et $v'(x)=x-2$, on a

$u'(x)=\frac{1}{x}$ et $v(x)=\frac{1}{2}x^2-2x$ donc

$$\int_1^e(x-2)\ln x dx=\left[\left(\frac{1}{2}x^2-2x\right)\ln x\right]_1^e-\int_1^e\left(\frac{1}{2}x^2-2x\right)\times\frac{1}{x}dx$$

$$=\frac{1}{2}e^2-2e-\frac{1}{2}+2-\int_1^e\left(\frac{1}{2}x-2\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}e^2-2e+\frac{3}{2}-\left[\frac{1}{4}x^2-2x\right]_1^e$$

$$=\frac{1}{2}e^2-2e+\frac{3}{2}-\frac{1}{4}e^2+2e+\frac{1}{4}-2$$

$$=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}$$

d'où $\int_1^e(x-2)\ln x dx=\frac{1}{2}\left(e^2-1\right)$

4. Calcul d'aires et de Volume

Calcul d'aire

f et g sont deux fonctions continues sur $[a;b]$

• si pour tout $x\in[a;b]$, $f(x)\le g(x)$ alors l'aire de la partie du plan limitée par les courbes de f et g et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est égale à

$\int_a^b[g(x)-f(x)]dx$ u.a

(" intégrale de la plus grande moins la plus petite")

• si pour tout $x\in[a;b]$, $f(x)\ge 0$ alors l'aire de la partie du plan limitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation

$x=a$ et $x=b$ est égale à $\int_a^b f(x)dx$ u.a

• si pour tout $x\in[a;b]$, $f(x)\le 0$ alors l'aire de la partie du plan limitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation

$x=a$ et $x=b$ est égale à $\int_a^b -f(x)dx$ u.a

Remarques

- u.a = unité en abscisse × unité en ordonnée
- Pour déterminer 'aire entre une courbe et l'axe

des abscisses, il faut d'abord étudier le signe de la fonction sur l'intervalle en question.

- Pour déterminer l'aire entre deux courbes, il

faut d'abord étudier leur position relative sur l'intervalle en question.

Calcul de volume

Le solide engendré par la rotation de la courbe de f autour de l'axe des abscisses sur l'intervalle $[a;b]$ a pour volume $\pi\int_a^b f^2(x)dx\times u.v$

$u.v=$ (unité en abscisse)^3

Exercices de synthèse

Exercice 1

Déterminer une primitive F sur l'intervalle I de la fonction f proposée :

1. $x\mapsto\cos(5x-\frac{\pi}{4})$; I = IR ;
2. $x\mapsto \text{Sin}^2x\cos x$; I= IR;
3. $x\mapsto\frac{4x^3+8x}{(x^4+4x^2+2)^3}$ I = IR
4. $x\mapsto(x^2+1)(x^3-1)$; I = IR
5. $x\mapsto x^5\cos x+5x^4\sin x$; I = IR
6. $x\mapsto\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$; I= $]0;+\infty[$
7. $x\mapsto\tan x$; I = $\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$
8. $x\mapsto\frac{\ln x}{x}$; I = $]0;+\infty[$

Exercice 2

1. Déterminer la primitive G sur $]0;+\infty[$ de la fonction f : $x\mapsto\frac{-5}{x^3}$ qui vérifie G(2) = 1

Scanned by CamScanner

2. Démontrer que la fonction F : $x \mapsto \frac{2}{3}x\sqrt{x}$ est une primitive de $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0;+\infty[$

Exercice 3

Calculer les intégrales proposées

$A = \int_1^2 \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$; $B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx$

$C = \int_{-1}^0 \frac{4x^3+8x}{(x^4+4x^2+2)^3} dx$; $D = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$

$E = \int_0^2 (1-|1-t|)^3 dx$; $F = \sum_{k=1}^{5} \int_k^{k+1} \sqrt{t} dt$

Exercice 4

1. Vérifier que la fonction : $x \mapsto \cos 3x \sin x$ est impaire et périodique de période π
2. calculer l'intégrale suivante :

$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \cos 3x \sin x dx$

Exercice 5

1. Soit x un nombre réel ; en utilisant la relation : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ prouver : $\cos^5 x = \cos x - 2\cos x \sin^2 x + \cos x \sin^4 x$. En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx$
2. Calculer les intégrales A et B suivantes

$A = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^3 2x dx$; $B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^5 x dx$

Exercice 6

1. Démontrer que pour tout x de lR

$\cos^3 x \sin^2 x = \frac{-1}{16}\cos 5x - \frac{1}{16}\cos 3x + \frac{1}{8}\cos x$

2. Calculer le nombre réel $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 x \sin^2 x dx$

3. Calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx$.

Exercice 7

On considère les intégrales $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$,

$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^4 x}$

1. a. Quelle est la dérivée de la fonction tangente ?
   b. Calculer I
2. a. Soit la fonction f : $\left[0;\frac{\pi}{4}\right] \to lR$

$x \mapsto \frac{\sin x}{\cos^3 x}$

Démontrer que f est dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ et que pour tout x appartenant à cet intervalle

$f'(x) = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}$

b. Déduire du calcul précédent une relation entre I et J puis calculer J .

Exercice 8

Calculer les intégrales proposées à laide d intégration par parties

$A = \int_0^{\pi} x \sin x dx$, $B = \int_1^e \ln t dt$,

$C = \int_{-1}^0 (2x+1)e^{-x} dx$, $D = \int_0^{\pi} (x-1)\sin 3x dx$,

$E = \int_1^e x^2 \ln x dx$, $F = \int_1^2 x\sqrt{-x+3} dx$,

$G = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} x\cos 2x dx$, $H = \int_e^{2e} x \ln x^3 dx$

$I = \int_{-1}^0 (1+x)^2 e^{-x} dx$.

Exercice 9

Soit la fonction f définie sur lR par $f(x) =$ [illegible]

la fonction g définie sur lR par

$g(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$

1. Calculer $I_1 = \int_0^1 f(x) dx$
2. Soit $I_2 = \int_0^1 g(x) dx$. Calculer $I_1 + I_2$ et en déduire la valeur de I_2.

Exercice 10

On considère la fonction f : $x \mapsto f(x) =$ [illegible]

montrer qu'il existe deux réels a et b tels q pour tout x de lR-$\left(\frac{3}{2}\right)$, $f(x) = \frac{a}{(2x-3)^2} - \frac{b}{2x-}$

Calculer $I = \int_0^1 f(x) dx$

Exercice 11

1. Soit f la fonction numérique de variabl réelle définie pour $x \neq 1$ par :

$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + x}{1-x}$

a. Déterminer a, b , c et d tels que l'on a pour tout $x \neq 1$

$f(x) = ax^2 + bx + c + \frac{d}{1-x}$.

b. Calculer $I = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx$.

2. Calculer à l'aide d'une intégration par parties $J = \int_0^{\frac{1}{2}} (3x^2 - 6x + 1)\ln(1-x) dx$

Scanned by CamScanner

Exercice 12

1. Déterminer les réels a , b ;,c tels que pour tout réel u $\neq \frac{1}{2}$, $\frac{u^2-1}{2u-1} = au+b+\frac{c}{2u-1}$
2. Calculer $\int_{-1}^{0} \frac{x^2-1}{2x-1}dx$
3. Calculer $\int_{\frac{-\pi}{6}}^{0} \frac{\cos^3 x}{1-2\sin x}dx$

Exercice 13

Calculer les intégrales suivantes :

a. $I = \int_{\frac{-1}{2}}^{0} (4x+1)e^{2x^2+x}dx$

b. $I = \int_{2}^{3} \frac{2x+1}{x^2+x-1}dx$

c. $I = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{0} \cos x(\sin x + \sin^3 x)dx$

d. $I = \int_{\sqrt{e}}^{e} \frac{\ln x}{x}dx$, e. $I = \int_{0}^{1} x^2 e^x dx$,

f. $I = \int_{0}^{\pi} e^x \sin x dx$

Exercice 14

1) Déterminer deux constantes a et b telles que : $\frac{1}{t(t+1)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t+1}$

Calculer alors J = $\int_{1}^{2} \frac{dt}{t(t+1)}$

Calculer I = $\int_{1}^{2} \frac{\ln(1+t)}{t^2}dt$

Exercice 15

1) Montrer que la fonction $x \mapsto \ln(\cos x - \sin x)$ est dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right[$; calculer sa dérivée

2) On pose $A(\alpha) = \int_{0}^{\alpha} \frac{\sin x}{\cos x - \sin x}dx$ et

$B(\alpha) = \int_{0}^{\alpha} \frac{\cos x}{\cos x - \sin x}dx$ où $\alpha \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right[$

Calculer B(α) – A(α), B(α) + A(α), puis Aα) et B(α)

Exercice 16

1 a) Montrer,que, pour tout réel x, on

$\frac{1}{(e^x+1)^2} = 1 - \frac{e^x}{e^x+1} - \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$

b) Calculer l'intégrale I = $\int_{0}^{1} \frac{1}{(e^x+1)^2}dx$

2 a) Déterminer une primitive de la fonction

$x \mapsto \frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^3}$

b) Calculer à l'aide d'une intégration par parties J= $\int_{0}^{1} \frac{xe^x}{\left(e^x+1\right)^3}dx$.

Exercice 17

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $u_n = \int_{n}^{n+1} e^{\frac{t}{n}}dt$, calculer u_n ; puis déterminer la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 18

Pour tout entier naturel n , on :

$I_n = \int_{0}^{1} t^n e^t dt$

1. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer : pour tout n de lN*
2. , $I_n = e - nI_{n-1}$.
3. Calculer I_0 , puis I_1, I_2 , I_3
4. Démontrer que la suite (I_n) est décroissante.
5. Soit n un entier naturel et pour tout $t \in [0,1]$, montrer que $0 \leq t^n e^t \leq et^n$ puis en déduire :

$0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$

Quelle est la limite de la suite (I_n).

Exercice 19

On pose A = $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x dx$; B = $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2 x dx$.

1. Calculer A +B.
2. Calculer A – b à l'aide d'une intégration par parties.
3. Déduire des questions précédentes les valeurs de A et B.

Exercice 20

On considère la fonction f définie sur lR par :
$f(x) = e^{-x}\sin x$
On note (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé..
1.a. Calculer les dérivées successives de f jusqu'à l'ordre 4 ; trouver une relation enter f et sa dérivée d'ordre 4 notée $f^{(4)}$.
b. En déduire une primitive F de f sur lR .
2. Pour tout n de lN , on pose

$I_n = \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} f(x)dx$.

a. Calculer I_0 ; interpréter I_0 comme l'aire d'un domaine du plan .
b. Démontrer que pour tout n de lN

$I_n = \frac{e^{-2n\pi}}{2}(e^{-\pi}+1)$

c. Prouver que la suite (I_n) est géométrique et préciser sa raison. En déduire la limite de (I_n).

Exercice 21

Scanned by CamScanner

On pose : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{e^x} dx$, $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{e^x} dx$,

$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \cos 2x dx$

1. Calculer I + J
2. A l'aide de deux intégrations par parties, démontrer que : $K = \frac{1+e^{\frac{-\pi}{2}}}{5}$
3. En déduire la valeur de I – J.
4. Calculer I et J.

Exercice 22

L'objectif est de calculer les intégrales suivantes.

$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$; $J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} dx$; $K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2} dx$

1) Calcul I

Soit la fonction f définie sur [0 ;1] par $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+2}\right)$

a) Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+2}$

b) En déduire la dérivée f' de f.

c) Calculer la valeur de I

2) Calcul de J et K

a) Sans calculer explicitement J et K, vérifier que J + 2I = K

b) A l'aide d'une intégration par parties portant sur l'intégrale K, montrer que $K = \sqrt{3} - J$

d) En déduire les valeurs de J et K.

Exercice 23

Pour tout entier naturel n, on considère les intégrales $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \sin x dx$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \cos x dx$

1) Calculer I_0 et J_0

2) On suppose $n \geq 1$

a) En intégrant par parties I_n, puis J_n, montrer que $\begin{cases} I_n + nJ_n = 1 \\ -nI_n + J_n = e^{-\frac{n\pi}{2}} \end{cases}$

b) En déduire les expressions de I_n et J_n en fonction de n.

3) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} J_n$.

Exercice 24

Soit la fonction f de la variable réelle x définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = (\ln x)^2$ où lnx désigne le logarithme népérien de x.

1) Etudier la fonction f, tracer la courbe représentative (Γ) de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(o;\vec{i};\vec{j})$ (unité 2 cm)

2) a) A l'aide d'une double intégration par parties, calculer $\int_1^{\lambda} f(x) dx$ où λ est réel strictement positif.

b) Déterminer en cm² de l'aire A de al partie plan, ensemble des points M de coordonnées (x ; y) tels que : $\begin{cases} 1 \leq x \leq e \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$

c) λ étant un réel dans]0 ;1[, déterminer en l'aire $A(\lambda)$ de la portion du plan, ensemble des points M de coordonnées (x ; y) tels que : $\begin{cases} \lambda < x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$

$A(\lambda)$ admet – elle une limite lorsque λ tend 0 ? Interpréter graphiquement.

Scanned by CamScanner

Equations différentielles

1. Equation du type y' – ay = 0

Les solutions de cette équation différentielles sont les fonctions f définies sur IR par $f(x) = ke^{ax}$ ($k \in IR$)

2. Equation du type y'' – ω²y = 0

Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions f définies sur IR par $f(x) = \lambda\cos\omega x + \mu\sin\omega x$.

Exercices de synthèse

Exercice 1 Dans chacun des cas déterminer la fonction f dérivable sur IR telle que :

a) $f'+2f=0;\quad f(1)=3$

b) $2f'=f;\quad 2f(-1)=3$

c) $3f'-2f=0;\quad f(3)=-1$

d) $f-2f'=0;\quad f(0)=3$

Exercice 2 f est une fonction définie et dérivable sur IR telle que $4f'-3f=0$ et $f(0)=1$

Répondre par vrai ou faux à chacune aux affirmations suivantes :

a) La courbe représentative de f passe par le point $A\left(1,\frac{3}{4}\right)$

b) La courbe représentative de f a au point d'abscisse 0 une de coefficient directeur 1

c) f est une fonction croissante sur IR

d) f est solution de l'équation différentielle $6y''-9y=0$

Exercice 3 Un fil conducteur parcouru par un courant électrique d'intensité constante s'échauffe par effet joule et sa température en degré Celsius est une fonction θ du temps t exprimé en seconde.

On choisit l'instant de mise sous tension comme origine des temps (t = 0) et à cet instant la température du conducteur est égale à 0^0C.

Dans les conditions de l'expérience la fonction θ est telle que : $\theta'(t)+0,1\theta(t)=2$

a) Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(t)=\theta(t)-20$

Montrer que f est une solution de l'équation différentielle (E) : $y'+0,1y=0$

b) Résoudre l'équation différentielle (E)

c) En déduire l'expression de $\theta(t)$

d) Quelle température atteint le conducteur au bout de 10 secondes de, 30 secondes, d'une minute ?

e) Calculer $\lim_{t\to+\infty}\theta(t)$.

Exercice 4 On considère l'équation différentielle (E) : $y'+2y=3x^2-1$

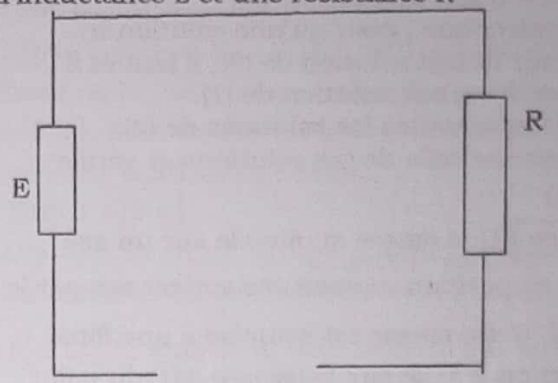
1) Démontrer qu'il existe une et une fonction polynôme du second degré p solution de (E)

2) Donner l'ensemble des solutions de l'équation (E') : $y'+2y=0$.

3) Démontrer qu'une fonction g est solution de (E) si, et seulement si (g – p) est solution de (E')

4) En déduire l'ensemble des solutions de (E)

Exercice 5 Un circuit comprend en série un générateur de force électromoteur E, une bobine d'inductance L et une résistance R



L'intensité du courant électrique i, exprimée en ampères, est fonction du temps t, exprimé en secondes, et est solution de l'équation différentielle (E) : $Li'(t)+Ri(t)=E$

L est exprimée en henrys, R en ohms et E en volts. On donne L = 0,2 H, R = 100Ω, E = 10V

1) Ecrire l'équation différentielle (E)

2) Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(t)=i(t)-\frac{E}{R}$

Montrer que f est solution de l'équation différentielle (E') : $Lf'(t)+Rf(t)=0$

3) Résoudre l'équation différentielle (E')

4) En déduire l'expression de i(t) en sachant qu'à l'instant t = 0 l'intensité du courant est nulle.

Exercice 6 a) Donner l'ensemble des solutions dans IR de l'équation différentielle : $9y''+4y=0$

b) Déterminer la solution particulière f, dont la courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ passe par le point $A\left(\frac{\pi}{2};\sqrt{3}\right)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur $-\frac{2}{3}$

c) Montrer que pour tout x de IR, on a $f(x)=2\cos\left(\frac{2}{3}x-\frac{\pi}{6}\right)$.

d) Résoudre l'intervalle $[-\pi;\pi]$ l'équation f(x) = 0.

Exercice 7 Dans tout l'exercice n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2

Scanned by CamScanner

1) Résoudre l'équation différentielle (1) :

$y' - \frac{1}{n}y = 0$

2) On considère l'équation différentielle

(2) : $y' - \frac{1}{n}y = -\frac{x+1}{n(n+1)}$

Déterminer deux réel a et b, tels que la fonction affine g définie sur IR par
g(x) = ax + b soit solution de (2).

3) a) montrer que , pour qu'une solution h définie sur IR soit solution de (2), il faut et il suffit que h – g soit solution de (1).

b) En déduire toutes les solutions de (2).

c) Déterminer celle de ces solutions φ vérifie $\varphi(0) = 0$.

Exercice 8 Une masse m, mobile sur un axe $(O;\vec{i})$ a sa position représentée sur cet axe par le point M. Cette masse est soumise à une force d'attraction $\vec{F}$ telle que l'abscisse $y(t)$ du point M exprimée comme fonction du temps t, vérifie l'équation différentielle : $y'' + \frac{9\pi^2}{4}y = 0$.

1) Donner la solution générale de cette équation différentielle.

2) a) Montrer que la solution vérifiant les conditions initiales $y(0) = 1 et \quad y'(0) = -\frac{3\pi}{2}$, s'exprime pour $t \geq 0$ par

$y(t) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}t\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{2}t\right)$.

b) Déterminer le nombre réel α compris entre 0 et 1 tel que, pour tout $t \geq 0$

$y(t) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{2}(t+\alpha)\right)$

3) En utilisant la question 2) b)

a) donner la valeur de t pour laquelle le point M passe pour la première fois au point O.

b) Combien de fois le point M passe t-il en O dans l'intervalle de temps [0 ; 4].

Scanned by CamScanner

Plan d'étude d'une courbe paramétrée

➢ **Domaine de définition**

Le point M(t) est défini si, et seulement si x(t) et y(t) sont définis.

➢ **Réduction du domaine d'étude**

Rappelons d'abord l'effet de quelques transformations géométriques usuelles sur le point M(x ;y) où x et y désignent les coordonnées de M dans un repère orthonormé $(o;\vec{i};\vec{j})$.

Translation de vecteur $\vec{u}(a;b)$:

➢ $t_{\vec{u}}(M(x;y)) = M'(x+a;y+b)$

Symétrie orthogonale d'axe (Ox)

➢ $S_{ox}(M(x;y)) = M'(x;-y)$

Symétrie orthogonale d'axe (Oy)

➢ $S_{oy}(M(x;y)) = M'(-x;y)$

Symétrie centrale de centre O

➢ $S_O(M(x;y)) = M'(-x;-y)$

Symétrie centrale de centre I(a ;b)

➢ $S_I(M(x;y)) = M'(2a-x;2b-y)$

Symétrie orthogonale d'axe (D) : y = x

➢ $S_D(M(x;y)) = M'(y;x)$

Symétrie orthogonale d'axe (D') : y = - x

➢ $S_{D'}(M(x;y)) = M'(-y;-x)$

On utilise entre autres ces résultats pour réduire le domaine d'étude d'une courbe paramétrée.

Exemple 1

Déterminons le domaine d'étude de l'arc paramétré $\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = 1 - \cos t \end{cases} t \in \mathbb{R}$

.Pour $t \in \mathbb{R}$

$M(t+2\pi) = (t+2\pi-\sin(t+2\pi);1-\cos(t+2\pi))$

$= (t+2\pi-\sin t;1-\cos t) = (x(t)+2\pi;y(t))$

$= (x(t);y(t))+(2\pi;0) = t_{\vec{u}}(M(x(t);y(t)))$ où $\vec{u}(2\pi;0)$

Donc on étudie et on construit le support de l'arc sur un intervalle d'amplitude 2π au choix comme $[-\pi;\pi]$, puis on obtient la courbe complète par translation de vecteur $\vec{u}$

.Pour $t \in [-\pi;\pi]$

$M(-t) = (-t-\sin(-t);1-\cos(-t)) = (-t+\sin t;1-\cos t)$

$= (-x(t);y(t)) = S_{Oy}(M(x(t);y(t)))$

Donc on étudie et on construit un support de l'arc sur $[0;\pi]$, puis on construit la courbe complète par symétrie orthogonale d'axe (Oy) puis par translation de vecteur $\vec{u}$

Exemple 2

Déterminons le domaine d'étude de l'arc paramétré : $\begin{cases} x(t) = \sin 2t \\ y(t) = \sin 3t \end{cases} t \in \mathbb{R}$

Pour $t \in \mathbb{R}$

$M(t+2\pi) = (\sin(2t+4\pi);\sin(3t+6\pi)) = (\sin(2t);\sin(3t)) = M(t)$

Donc onc on obtient la courbe complète quand t varie sur un intervalle d'amplitude 2π soit $[-\pi;\pi]$

Pour $t \in [-\pi;\pi]$

$M(t) = (x(-t);y(-t)) = (-x(t);-y(t)) = S_O(M(t))$

Donc on étude et on construit la courbe pour t $\in [0;\pi]$, puis on obtient la courbe complète par symétrie centrale de centre O

Pour $t \in [0;\pi]$

$M(\pi-t) = (x(\pi-t);y(\pi-t)) = (-x(t);y(t)) = S_{Oy}(M(x(t);y(t)))$

On étudie et on construit la courbe pour t $\in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, puis on obtient la courbe complète par symétrie orthogonale d'axe (Oy) puis par symétrie centrale de centre O.

Remarque

Dans notre réduction successive de l'intervalle d'étude, nous avons adopté l'attitude systématique qui consiste à couper l'intervalle d'étude en deux par l'utilisation de la symétrie par rapport au milieu de l'intervalle : En effet pour $t \in [-\pi;\pi]$; -t est le symétrique de t par rapport à O et pour $t \in [0;\pi]$; $\pi - t$ est le symétrique de t par rapport à $\frac{\pi}{2}$. C'est d'ailleurs pour cette raison que nous nous sommes placés initialement sur $[-\pi;\pi]$ et non sur $[0;2\pi]$.

➢ Etude des variations des fonctions x et y sur le domaine d'étude

1. Dériver les fonctions x et y et étudier les variations de celles-ci sur l'intervalle d'étude
2. Reporter les résultats dans un tableau de variations conjointes. L'ordre des lignes est une question de goût . On peut vouloir voir évoluer les fonctions x et y cote à cote et d'autre part, vouloir que le signe de x' soit accolé aux variations de x de même pour y. Cela donne

Scanned by CamScanner

t	
x'(t)	
x	
y	
y'(t)	

➢ Construction de la courbe

On place dans le repère les points importants avec leurs tangentes. On n'hésitera pas à écrire sur les axes les coordonnées des points importants s'il n'y en a pas trop. Tout est alors en place pour la construction et on peut tracer la courbe grâce aux règles suivantes :

- ➢ ***Si x croit et y croit, on va vers la droit et vers le haut***
- ➢ ***Si x croit et y décroît, on va vers la droite et vers le bas***
- ➢ ***Si x décroît et y croit, on va vers la gauche et vers le haut***
- ➢ ***Si x décroît et y décroît, on va vers la gauche et vers le bas..***

Exercices de synthèse

Exercice 1

E plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ $(\|\vec{i}\|=1cmet\ \|\vec{j}\|=3cm)$.

On considère la courbe (C) dont une représentation paramétrique est :

$\begin{cases}x(t)=t-2\sin t\\ y(t)=\cos t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$

A tout instant t, M(t) est le point de (C) de coordonnées $\left(x(t),y(t)\right)$.

1) Montrer que le point M$(t+2\pi)$ est l'image du point M(t) par une translation dont on précisera le vecteur de translation.

2) Montrer que M(t) et M(-t) sont symétriques par rappurt à l'axe des ordonnées.

3) Calculer x'(t) et montrer que

$\begin{cases}x'(t)\le 0\ pour\ t\in\left[0;\frac{\pi}{3}\right]\\ x'(t)\ge 0\ pour\ t\in\left[\frac{\pi}{3};\pi\right]\end{cases}$

4) Etudier les variations de x et y et donner leurs variations dans un tableau commun, pour t$\in[0;\pi]$.

5) Tracer la partie (C_1) de (C) correspondant à t$\in[-\pi;\pi]$

6) Dire comment à partir de (C_1), on peut obtenir la partie (C_2) de (C) correspondant $\in[-\pi;3\pi]$. On donne $\frac{\pi}{2}-2=-0,4;\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}=-2$

Exercice 2

Le plan P est rapporté au repère orthonor direct$\left(o;\vec{u};\vec{v}\right)$. On prendra 4 cm comme un les deux axes. On considère l'application plan dans lui-même qui, à tout point m, d z, associe le point M d'affixe $\frac{1}{2}z^2-z$

L'objet de cet exercice est de tracer la cou décrite par M lorsque m décrit le cercle C centre O et de rayon 1.

Soit t un réel de $[-\pi;\pi]$ et m le point de C d'affixe $z=e^{it}$.

1Montrer que l'image M de m par F est le de coordonnées :

$\begin{cases}x(t)=\frac{1}{2}\cos 2t-\cos t\\ y(t)=\frac{1}{2}\sin 2t-\sin t\end{cases}$

Ces relations constituent une représenta paramétrique de la courbe Γ.

2. Comparer x(-t)et x(t) d'une part, y(-t) e d'autre part. En déduire que Γadmet un symétrie que l'on précisera.

3. Montrer que x'(t) = $\sin t(1-\cos t)$. Étudi variations de x sur $[0;\pi]$

4. Montrer que y'(t) = $(\cos t-1)(1+2\cos t)$. les variations de y sur. $[0;\pi]$

5. Dans un même tableau faire figurer le variations de x et y sur $[0;\pi]$.

6. Placer les points de Γcorrespondant a valeurs 0, $\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}$, et πdu paramètre t et t tangentes en ces points (on admettra qu = 0 la tangente à Γ'est horizontale). Trace partie de Γobtenue lorsque t décrit $[0;\pi]$ tracer Γcomplètement.

Exercice 3

A tout réel t de l'intervalle$[-1;2]$, on asso point M(t) de coordonnées : x(t) = $2t^3-3t^2$ y(t) = $4t-t^2$

On note (C) la courbe, ensemble des point obtenus lorsque t décrit $[-1;2]$.

a. Etudier les variations des fonctions x e $[-1;2]$

Résumer les résultats dans un tableau.

b. Préciser l'équation des tangentes aux p M(-1), M(0), M(1), M(2).

c. Construire ces tangentes et la courbe

Exercice 4 (courbe de Lissajous)

Scanned by CamScanner

Soit la courbe C définie par ses équations paramétriques

$\begin{cases} x(t) = 2\cos t \\ y(t) = 3\sin 2t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

a. Indiquer la position des points M(t) et M(t + 2 π)

b. Indiquer la position des points M(t) et M(-t) . On précisera la symétrie de la courbe. En déduire un intervalle d'étude

c. Indiquer la position des points M($\pi - t$) et M(t). En déduire un intervalle d'étude I.

d .Etudier les variations de x et y sur I

e. Tracer la courbe C

Exercice 5

Soit la courbe C définie par ses équations paramétriques

$\begin{cases} x(t) = \sin 3t \\ y(t) = \cos 2t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

a. Indiquer la position des points M(t) et M($\pi - t$)

b. Indiquer la position des points M(t) et M(-t) . On précisera la symétrie de la courbe. En déduire un intervalle d'étude I.

c. Etudier les variations de x et y sur I

d. Tracer la courbe C

Exercice 6 (**La néphroide**)

Soit la courbe C, appelée néphroide, définie par les équations paramétriques :

$\begin{cases} x(t) = 3\cos t - \cos 3t \\ y(t) = 3\sin t - \sin 3t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

a. Comparer les positions des points M(t) et M(t + 2 π) .Comparer les positions des points M(t) et M(-t) ; puis celles des points M(t) et M($\pi - t$) En déduire deux symétries de la néphroide. Préciser un intervalle d'étude I.

b. Etudier les variations de x et y sur I .On pourra utiliser les formules :

$\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$

$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$

c. Tracer la néphroide. On admettra qu'aux points S(2 ;0) et R(-2 ;0)la tangente est horizontale.

Exercice 7

Soit l'équation différentielle $y'' + 4y = 0$ (E)

Déterminer les solutions f et g de équations (E) telles que $f(0) = 5$ et $f'(0) = 0$

g(0) = 0 et g'(0) = 8

a. On désigne par C la courbe d'équations paramétriques : $\begin{cases} x(t) = f(t) \\ y(t) = g(t) \end{cases}$ $t \in [0;\pi]$

Etudier les variations de x et y.

Tracer la courbe C.

Exercice 7

Soit la courbe C définie par les équations paramétriques : $\begin{cases} x(t) = \cos^2 t - \cos t + 1 \\ y(t) = \cos t \sin t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

a Indiquer la position des points M(t) et M(t + 2 π)

b. Indiquer la position des points M(t) et M(-t). On précisera alors la symétrie de la courbe. En déduire un intervalle d'étude

c. Etudier les variations de x et y sur I.

d. Tracer la courbe C

Exercice 8

Soit la courbe C définie par les équations paramétriques : $\begin{cases} x(t) = \sin^3 t \\ y(t) = 1 + \cos t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

aIndiquer la positions des points M(t) et M (t + 2 π)

En déduire un intervalle d'étude.

b.Indiquer la position des points M(t) et M(-t). On précisera alors la symétrie de la courbe En déduire un intervalle d'étude I

c. Etudier les variations de x et y sur I

d. Tracer la courbe C

Exercice 9

Soit la courbe C définie par le système d'équations paramétriques : $\begin{cases} x(t) = t\cos t - \sin t \\ y(t) = t\sin t + \cos t \end{cases}$

$t \in [-2\pi : 2\pi]$

a. En étudiant la parité des fonctions x et y, préciser un axe de symétrie de la courbe C et en déduire l'intervalle d'étude I = $[0;2\pi]$.

b. Etudier les variations de x et y sur I

c. Tracer l'arc de courbe correspondant à l'intervalle I . On placera avec soin les points de paramètres 0; $\frac{\pi}{2}$; π ; $\frac{3\pi}{2}$ et 2π et on tracera les tangentes à la courbe C en ces points. On admettra que la tangente au point de paramètre 0 a pour vecteur directeur $\vec{j}$

d. Compléter la courbe C

Exercice 10

Soit la courbe C définie par ses équations paramétriques : $\begin{cases} x(t) = t^3 - 3t \\ y(t) = t^4 - 4t^2 \end{cases}$ $t \in [-2;2]$

a.Indiquer la position des points M(t) et M(-t) On précisera alors la symétrie de al courbe. En déduire un intervalle d'étude I

b. Etudier les variations de x et y sur l'intervalle I

c. Calculer les coordonnées des points d'intersection de la courbe C et de l'axe des ordonnées

d. Tracer la courbe C.

Exercice 11 (**La deltoïde**)

Scanned by CamScanner

Soit la courbe C définie par ses équations paramétriques : $\begin{cases} x(t) = 2\cos t + \cos 2t \\ y(t) = 2\sin t - \sin 2t \end{cases} t \in \mathbb{R}$

a.Comparer les positions des points M(t) et M(t + 2 π) . Comparer les positions des points M(t) et M(-t). En déduire une symétrie de la courbe
En déduire un intervalle d'étude I
b. Etudier les variations de x et y sur I.
c. Donner les coordonnées du de la courbe tel que t = $\frac{\pi}{2}$. Donner les coordonnées d'un vecteur directeur de la tangente en ce point.
c.Tracer la courbe C. On admettra qu'aux points de vecteur de dérivé nul , la tangente passe par 0.

Exercice 12

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(0;\vec{i};\vec{j}\right)$ (unité graphique : 2 cm)

On désigne par C la courbe de représentation paramétrique : $\begin{cases} x(t) = \sin t\left(\cos t + 2\sqrt{2}\right) \\ y(t) = \sin t\left(\cos t - 2\sqrt{2}\right) \end{cases} t \in \mathbb{R}$

a. Calculer $x(t+2\pi)$ et $y(t+2\pi)$; x(-t) et y(-t) ; $x(\pi - t)$ et $y(\pi - t)$.
En déduire que la courbe C admet un centre de symétrie et un de symétrie que l'on précisera
a. Soit Γ l'arc de la courbe C correspondant à $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Montrer que l'on peut construire C à partir de Γ à l'aide des transformations géométriques simples.

b. Etudier les variations de x et y sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

Tracer Γ, puis C. On précisera les tangentes à Γ aux points de paramètres respectifs t = 0 et t = $\frac{\pi}{2}$.

Scanned by CamScanner

Produit Vectoriel

. Définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace orienté, on appelle produit vectoriel des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le vecteur noté $\vec{u}\wedge\vec{v}$ tel que :

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$;
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires alors :
  - $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$,
  - $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est tel que la base $(\vec{u};\vec{v};\vec{u}\wedge\vec{v})$ est directe ;
  - $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est de norme $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times|\sin(\vec{u};\vec{v})|$

. Propriétés

$\wedge\vec{v}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

$\wedge\vec{v}=-(\vec{v}\wedge\vec{u})$; $(k\vec{u})\wedge\vec{v}=\vec{u}\wedge(k\vec{v})=k(\vec{u}\wedge\vec{v})$;

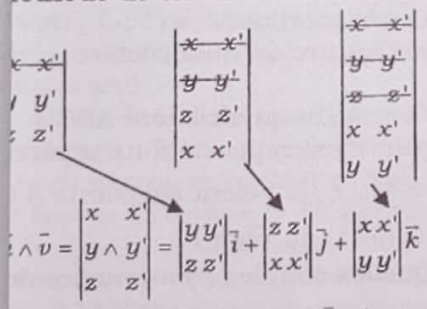
$\wedge(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\wedge\vec{v}+\vec{u}\wedge\vec{w}$;

, B et C sont alignés $\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

. Calcul des coordonnées de $\vec{u}\wedge\vec{v}$

oit $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ un repère orthonormé direct de espace. Soient $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$ deux ecteurs de l'espace. Le vecteur $\vec{u}\wedge\vec{v}$ a pour oordonnées $\begin{pmatrix}yz'-zy'\\zx'-z'x\\xy'-x'y\end{pmatrix}$

Méthode de calcul des coordonnées de $\vec{u}\wedge\vec{v}$



$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\\ z & z'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y & y'\\ z & z'\end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix}z & z'\\ x & x'\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=(yz'-zy')\vec{i}+(zx'-xz')\vec{j}+(xy'-yx')\vec{k}$$

. Applications

- Calcul de l'équation d'un plan

oit (ABC) un plan et M un point du plan, équation du plan (ABC) est donné par la elation $\overrightarrow{AM}\bullet(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})=0$

- Distance d'un point de l'espace à une droite

a distance d'un point M de l'espace à la droite D) (qui passe par un point A et de vecteur irecteur $\vec{u}$) est $d(M;(D))=\dfrac{\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$

- Distance d'un point d'espace à un plan

Soit (ABC) un plan ; la distance d'un point M de l'espace au plan (ABC) est

$$d(M;(ABC))=\frac{|\overrightarrow{AM}\bullet(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})|}{\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|}$$

- Aire d'un triangle

L'aire du triangle ABC est $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|$

- Volume d'un tétraèdre

Le volume du tétraèdre ABCD est $\frac{1}{6}|\overrightarrow{AD}\bullet(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})|$

Exercices de synthèse

Exercice 1

l'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

1.Soient les points $A(1;0;0)$, $B(1;\sqrt{2};0)$ et $C(0;0;1)$

a. Montrer que ABC est un triangle rectangle

b. Calculer $\overrightarrow{CB}\bullet\overrightarrow{CA}$. En déduire une mesure de l'angle géométrique $\widehat{ACB}$, puis la nature exacte du triangle ABC.

2. a. Soit le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. Montrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal du plan (ABC)

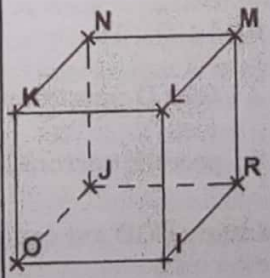
b. Soit le point $H(2;0;-1)$. Montrer que H appartient au plan (ABC).

c. soit le point $M(2+m;0;-1+m)$ où m est un réel. Montrer que (HM) est perpendiculaire au plan (ABC).

d. Déterminer les valeurs de m pour que la distance du point M au plan (ABC) soit égal à $\sqrt{2}$

Exercice 2 L'espace est rapporté à un repère orthonormal de sens direct $(0;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OK})$

On considère le cube de sommets O, I, K, J, N, K, L, M dont une représentation est donnée ci-dessous.



On note A le milieu de l'arête $[JL]$ et B le point défini par $\overrightarrow{KB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{KN}$.

On appelle P le point passant par les points O, A et B.

Scanned by CamScanner

1)a) Préciser les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$

2) a) En déduire que l'aire du triangle OAB vaut $\frac{\sqrt{14}}{6}$.

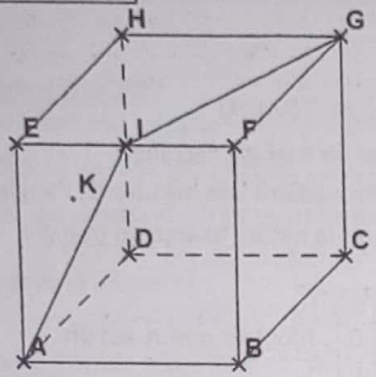
b) Le point $C\left(1;\frac{1}{3};1\right)$ appartient à P ? Justifier votre réponse.

3) on considère le tétraèdre OABK

a) Prouver que son volume vaut $\frac{1}{9}$

b) En déduire la distance du point K au plan P.

Exercice 3



Soit ABCDEFGH représenté par la figure ci-dessus. L'espace est orienté par le repère orthonormal direct $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$.

On désigne par i le milieu de [EF] et par K le centre du carré ADHE.

1) a) Vérifier que $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA}$

b) En déduire l'aire du triangle IGA.

2) Calculer le volume du tétraèdre ABIG et en déduire la distance du point B au plan (AIG).

Exercice 4 Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ on donne les points A (3 ; 2 ;-1) et H (1 ;-1 ; 3)

1) Calculer la hauteur AH.

2) Déterminer une équation du plan (P) passant par H et orthogonal à la droite (AH)

3) On donne les points : B (-6 ; 1 ; 1), C (4 ;-3 ; 3) et D (-1 ;-5 ;-1)

a) Démontrer que les points A ; C et D appartient au plan (P)

b) Calculer les coordonnées du produit vectoriel $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}$

c) Démontrer que l'aire du triangle BCD est égale à $5\sqrt{29}$

d) Démontrer que le volume du tétraèdre ABCD est égale à $\frac{145}{3}$.

4) a) Calculer l'aire du triangle ABC.

b) Calculer la distance du point D au plan (ABC).

Exercice 5 1) Soit A, B, C trois points non alignés de l'espace

Déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

2) Soient (Δ) et (Δ') deux droites de même vecteur directeur $\vec{u}$ et H un point de (Δ). On désigne par H' le projeté orthogonal de H

a) Démontrer que pour tout point A de (Δ) et tout point A' de (Δ') $\overrightarrow{AA'} \wedge \vec{u} = \overrightarrow{HH'} \wedge \vec{u}$

b) En déduire que : $HH' = \frac{\left\|\overrightarrow{AA'} \wedge \vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}$

c) Application numérique : Soient A (-1, 2,5) et A' (4,-1,9)

Soient (Δ) et (Δ').les droites de vecteur directeur $\vec{u}(-2,2,1)$

Exercice 6 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, on considère points A(1 ;0 ;0) B(0 ;2 ;0) C(0 ;0 ;3).

1) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$

Soit I le point de coordonnées (1 ; 2 ; 3).

2) Calculer la distance de I au plan (ABC) points A, B, C et I sont-ils coplanaires ?

3) a) Calculer A_1 l'aire du triangle ABC et d'aire.

b) Déterminer le volume V (en unité de volume) de la pyramide de sommet I et de le triangle ABC.

4) Soit D le point de coordonnées (1 ;-2

a) Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

b) Calculer l'aire A_2du quadrilatère AB

Exercice 7 Le plan P est rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soient les points 3,1), B (-2,5) et C (0,-1) du plan P.

a) Soit $\vec{k} = \vec{i} \wedge \vec{j}$ .Quelles sont les coordonnées points A, B et dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$?

b) Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. En déduire l'aire du triangle ABC.

Exercice 8 On munit l'espace d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

Soit les points A, B et C tels que $\overrightarrow{OA} = 3\vec{i} + 2$ $\overrightarrow{OB} = -\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$ $\overrightarrow{CO} = -2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

a) Déterminer une équation cartésienne (ABC).

b) Calculer la distance du point H (3, 1, plan (ABC).

Scanned by CamScanner

I) Série statistique à deux variables

On suppose que, suite à une étude faite, on s'intéresse à deux caractères quantitatifs (c'est-à-dire deux variables numériques) sur une population donnée.

A chaque individu de cette population, on associe donc un couple $(x_i ; y_i)$ de nombres réels où la variable x_i est la valeur de la première variable pour l'individu considéré et la variable y_i est la valeur de la seconde variable.

L'ensemble de ces couples forme une série statistique à deux variables ou encore série statistique double.

Les résultats peuvent être résumés dans un tableau :

Valeur x_i	x_1	x_2	...	x_n
Valeur y_i	y_1	y_2	...	y_n

2) Nuage de points

Nuage de points

Dans un repère orthogonal bien choisi, l'ensemble des points M_i de coordonnées $(x_i ; y_i)$, avec $1 \leq i \leq n$, est appelé *le nuage de points* associé à cette série statistiques à deux variables.

Point moyen

Notons $\bar{x}$ la moyenne des valeurs x_i et $\bar{y}$ la moyenne des valeurs y_i. On a :

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \text{ et } \bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n}$$

Le point G de coordonnées $(\bar{x} ; \bar{y})$ est appelé *le point moyen* du nuage de points associé à cette série statistique à deux variables.

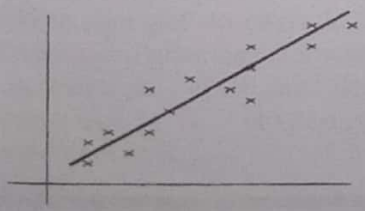
Remarque :

Le **choix des unités** sur les axes du repère est important. Il faut obtenir une représentation qui ne soit ni trop resserrée, ni trop grande.

La **forme** de ce **nuage de points** est essentielle. Si les points sont proches d'une courbe d'équation $y = f(x)$, cela peut sous-entendre que X et Y sont liées et que la valeur de X permet d'estimer celle de Y en lui appliquant la fonction f. On se limite souvent au cas de figure où le lien entre X et Y est « affine ». Lorsqu'on parvient à établir ce lien fonctionnel entre les deux variable X et Y , on dit que l'on réalise un **ajustement.**

Si le nuage de points est à peu près aligné, on peut effectivement penser que X et Y sont liées par une **fonction affine** du type : $y = ax + b$.

Ajustement affine



Ajustement par une droite (ou affine)

On admettra qu'une droite est une droite d'ajustement du nuage de point lorsqu'on la représente dans un repère contenant le nuage, elle passe près de tous les points.

Plusieurs questions se posent. En premier lieu, quelles sont les différentes méthodes pour obtenir un ajustement affine ? Comment utiliser cet ajustement pour déterminer des valeurs de Y en connaissant des valeurs de X ?

Méthode d'ajustemnt affine: La méthode de Mayer.

La méthode de Mayer est une méthode permettant de donner une droite d'ajustement.

Le principe est le suivant:

- On ordonne les données suivant les abscisses croissantes et on partage la série en deux paquets de même effectif(ou un paquet aura un effectif de plus s'il y a un nombre impair de données.
- On calcule les coordonnées des points moyens G_1 et G_2 de chaque paquet.
- On considère alors l'équation de la droite (G_1G_2) comme équation de la droite d'ajustement.

***Utilités* de l'ajustement**

Pour une valeur donnée x_0 de la variable x, l'ajustement permet de prévoir approximativement la valeur correspondante de y et vice versa.

EXERCICES

Exercice1 E tableau suivant donne le prix, en milliers de francs CFA, du mètre carré de logements neufs achetés entre 1976 et 1983 selon l'année d'achat.

Année	1976	1977	1978	1979	1950	1981
Rang de l'année	1	2	3	4	5	6
Prix du mètre carré	240	268	291	321	356	394

1982	1986
7	8
429	465

On désigne par x la variable égale au rang de l'année et par y la variable égale au prix du mètre carré.

1) Représenter le nuage de points associé à cette série (x,y) dans un repère orthogonal ;

- Sur l'axe des abscisses, choisir 1 cm pour représenter une année
- Sur l'axe des ordonnées, placer 240 à l'origine, puis choisir 1 cm pour représenter 20 unités (une unité égale 1000 FCFA).

2) a) Un ajustement linéaire du nuage de points parait-il possible ? Justifier.

b) Déterminer les coordonnées des points moyens partiels G_1 et G_2 correspondant respectivement aux quatre premiers points et aux quatre derniers.

Trouver l'équation de la droite (G_1G_2) sous la forme

Scanned by CamScanner

$y = ax + b$.où a et b sont des paramètres à déterminer. Tracer cette droite.

3) On suppose pour la suite que la tendance des prix se maintient encore pendant 5 ans à partir de l'an 8.

a) A l'aide du graphique exprimer le prix du mètre carré en 1986

b) Par un calcul algébrique donner le prix du mètre carré en 1986.

Exercice 2

Le tableau suivant donne la consommation bourkinabè en tonnes d'une certaine matière première M pour la période de 1996 à 2003.

Année	1996	1997	1998	1999	2000
Consommation en tonnes	7740	7800	7880	7900	7920

2001	2002	2003
8000	8020	8060

On appelle x_i le rang de l'année à partir de 1996 et y_i la consommation bourkinabè en tonnes de la matière M.

1) Représenter le nuage de points de coordonnées $(x_i ; y_i)$.

ON choisira un repère orthogonal avec 2 cm 1 unité en abscisses et 1 cm pour 20 unités en ordonnées.

2) Dans le but de prévoir la consommation de la matière M pour les années suivantes, on décide de procéder à un ajustement affine de la série statistique $(x_i ; y_i)$.

On appelle G_1 le point moyen du sous nuage formé par les points d'abscisses 1, 2, 3 et 4 et G_2 le point moyen du sous nuage formé par les autres points.

a) Calculer les coordonnées de G_1 et G_2.

b) Donner une équation de la droite (G_1G_2) sous la forme $y = ax + b$

c) Tracer la droite (G_1G_2) sur le dessin précédent. On admettra que cette droite (appelée droite de Mayer)représente un ajustement affine de la série.

d) Calculer, en utilisant cet ajustement, une valeur approchée, à une tonne près, de la consommation bourkinabè de la matière M prévisible pour 2010.

Exercice 3

En prévision du lancement d'un nouveau produit, une société a effectué une enquête auprès de clients éventuels pour fixer le prix de la vente de ce produit. Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous

Prix x_i de la vente en CFA	9	10	11	12	14	15	16	17
Nbre y_i d'acheteur éventuels	180	160	150	130	100	90	80	70

1) Représenter graphiquement le nuage de points $M_i(x_i ; y_i)$: unité 1 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 10 unités sur l'axe des ordonnées.

2) a)Calculer les coordonnées du point moyen G_1des quatre premier points, puis les coordonnées du point moyen G_2 des quatre derniers points.

Placer ces points sur le graphique et tracer la droite (G_1G_2).

b) On admet que la droite (G_1G_2) est une droite d'ajustement du nuage de points.

Estimer graphiquement le prix maximum pour qu'il y ait au moins 50 acheteurs potentiels.

3) a) Justifier qu'une équation de la droite (G_1G_2) est $y = -14x + 302$.

b) En déduire :

- Le nombre d'acheteurs que l'on peut prévoir si le prix de vente est fixé à 13 FCFA.
- Le prix de vente pour que le nombre d'acheteurs potentiels soit supérieur ou égal à 250.

Scanned by CamScanner

Sujet 1

Exercice 1

1.On dispose d'une urne U_1 contenant trois boules rouges et sept boules noires.
On extrait simultanément deux boules de cette urne ; on considère que tous les tirages sont équiprobables.
a.Quelle est la probabilité p_1 que les deux boules tirées soient rouges ?
b.Quelle est la probabilité p_2 que les deux boules tirées soient noires ?
c.Quelle est la probabilité p_3 que les deux boules tirées soient de même couleur ?
d.Quelle est la probabilité p_4 que les deux boules tirées soient de couleurs différentes ?
2.On dispose aussi d'une deuxième urne U_2 contenant quatre boules rouges et six boules noires.
On tire maintenant deux boules de l'urne U_1 et une boule de l'urne U_2 ; on suppose que tous les tirages sont équiprobables.
On considère les événements suivants :
R : « Les boules tirées sont rouges » ;
D : « Les trois boules tirées ne sont pas toutes de la même couleur »
B : « La boule tirée dans l'urne U_2 est rouge « .
a. Calculer la probabilité de l'événement R.
b.Quelle est la probabilité de tirer trois boules de même couleur ?
c. Calculer la probabilité conditionnelle $p_D(B)$ de l'événement B sachant que l'événement D est réalisé.

Exercice 2

On considère le polynôme

$P(z) = z^4 + 17z^2 - 28z + 260$

où z est un nombre complexe.

1. Déterminer deux nombres réels a et b tels que : $P(z) = (z^2 + az + b)(z^2 + 4z + 20)$
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation P(z) = 0.
3. Placer dans un repère orthonormal direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, les images M, N, P et Q des nombres complexes respectifs
$m = -2 + 4i$, $n = -2 - 4i$, $p = 2 + 3i$ et $q = 2 - 3i$
4.a .Déterminer le nombre complexe z vérifiant $\frac{z-p}{z-m} = i$
Placer son image K.
b. En déduire que le triangle MPK est isocèle rectangle en K.
5.a. Déteminer par le calcul l'affixe du point L, quatrième sommet du carré MKPL.
b. Déterminer l'abscisse du point d'intersection de la droite (KL) et de l'axe des abscisses.
c.Montrer que M, N, P et Q sont sur un même cercle de centre R.

Problème

On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$

On désigne par C sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$; unité graphique : 4 cm.

Partie A

*** Étude d'une fonction auxiliaire**

Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = x + 2 - e^x$

1.Étudier le sens de variation de g sur $[0 ; +\infty[$ et déterminer la limite de g en $+\infty$.
a. Montrer que l'équation g(x) = 0 admet une solution et une seule dans $[0 ; +\infty[$.
On note α cette solution.
b. Prouver que $1{,}14 < \alpha < 1{,}15$
2.En déduire le signe de g(x) suivant les valeurs de x.

Partie B

*** Étude de la fonction f et tracé de la courbe C**

a. Montrer que, pour tout x appartenant à $[0 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2}$

b.En déduire le sens de variation de la fonction f sur $[0 ; +\infty[$.

4.a. Montrer que pour tout réel positif x, $f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$

b. En déduire la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat trouvé.

c. Établir que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 1}$

d.En utilisant l'encadrement de α établi dans la question **A.2.**, donner un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 10^{-2}.

5. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe C au point d'abscisse 0.

a. Établir que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$,

$f(x) - x = \frac{(x+1)u(x)}{xe^x + 1}$ avec $u(x) = e^x - xe^x - 1$

b. Étudier le sens de variation de la fonction u sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$. En déduire le signe de u(x).

c. Déduire des questions précédentes la position de la courbe C par rapport à la droite (T).

6. Tracer C et (T).

Partie C

*** Calcul d'aire et étude d'une suite**

7. Déterminer une primitive F de f sur $[0 ; +\infty[$; on pourra utiliser l'expression de f(x) établie dans la question **B.2.**

8. On note D le domaine délimité par la courbe C, la tangente (T) et les droites d'équations x = 0

Scanned by CamScanner

et x = 1.
Calculer, en cm², l'aire A du domaine D.
Donner une valeur décimale au mm² près de l'aire A.

9. Pour tout entier naturel n, on pose

$$v_n = \int_n^{n+1} f(x)dx$$

a. Calculer v_0, v_1 et v_2.
On donnera des valeurs décimales approchées à 10^{-2} près de v_0, v_1 et v_2.
b.Interpréter graphiquement v_n.
c. Montrer que, pour tout n ≥2,

$$f(n+1) \le \int_n^{n+1} f(x)dx \le f(n)$$

En déduire la monotonie de la suite (v_n) à partir de n = 1.
d. Déterminer la limite de la suite (v_n).

Sujet 2

Exercice 1

Le plan complexe P est rapporté à un repère direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, ayant comme unité graphique 3 cm. Les nombres complexes z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 et z_6 que l'on va calculer dans cet exercice seront tous exprimés sous forme algébrique **et** sous forme exponentielle ($\rho e^{i\theta}$).

1. Résoudre dans ℂ l'équation : $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$

On pose : $z_1 = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$ et $z_2 = \dfrac{\sqrt{3}-i}{2}$

Exprimer z_1 et z_2 sous forme exponentielle et placer les points M_1 et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2 dans le plan P.

2. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$

Calculer l'affixe z_3 du point $M_3 = r(M_2)$.
Placer M_3 sur la figure précédente.

3. Soit t la translation dont le vecteur $\vec{w}$ a pour affixe $-\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$

Calculer l'affixe z_4 du point $M_4 = t(M_2)$.
Placer M_4 sur la figure précédente.

4. Soient $z_5 = \dfrac{i}{2}(1 + i\sqrt{3})$ et $z_6 = \dfrac{2}{i-\sqrt{3}}$

Exprimer z_5 et z_6 sous forme algébrique et sous forme exponentielle.
Placer les points M_5 et M_6 d'affixes respectives z_5 et z_6 sur la figure.

5.a .Calculer z_k^6 pour k ∈{1, 2, 3, 4, 5, 6}.
b.Ecrire z^6+1 sous forme d'un produit de trois polynômes du second degré à coefficients réels. Justifier cette écriture.

Exercice 2

Les questions 1 et 2 sont indépendantes. $\mathbb{N}^*$ *est l'ensemble des entiers strictement positifs.*
Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on considère l'intégrale : $I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$

1.a. Démontrer que pour tout x dans l'int
]1, e[et pour tout entier naturel n, on a
$(\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} > 0$
b. En déduire que la suite (I_n) est décrois
2.. Calculer I_1 à l'aide d'une intégration p
parties.
a. Démontrer à l'aide d'une intégration pa
parties que, pour tout n ∈ $\mathbb{N}^*$: $I_{n+1} = e - (n+$
b. En déduire I_2, I_3 et I_4. Donner les valeu
exactes, exprimées en fonction de e et les
valeurs approchées à 10^{-3} près par défau
3. a. Démontrer que, pour tout n ∈ $\mathbb{N}^*$: 1
b. Démontrer que, pour tout n ∈ $\mathbb{N}^*$:(n+
c. En déduire la limite de I_n.
d. Déterminer la valeur de $nI_n + (I_n + I_{n+1})$
déduire la limite de nI_n.

Problème

Partie A

Soit la fonction g, définie sur ℝ, qui, à t
associe : $g(x) = e^x(x+1) + x^2$
1.a.Montrer que la dérivée de la fonction
ℝest : $g'(x) = x(e^x + 2)$
b. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et
c. Étudier le signe de g '(x) sur ℝ, et dre
tableau de variation de g sur ℝ.
2. Montrer que l'équation g(x) = 0 adm
solution α et une seule sur l'intervalle
Montrer que αest dans l'intervalle I =

Partie B

Soit la fonction f définie sur [0 ; +∞ [

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + x}$$

1. Montrer que les équations f(x) = x et g
sont équivalentes sur [0 ; +∞ [, et que, p
suite, l'équation f(x) = x admet α pour so
unique sur I.
2.a. Calculer la dérivée de f et en déduire
de variation de f sur [0 ; +∞ [.
b. Déterminer la limite de f en +∞[.
c. Dresser le tableau de variation de f.
d. Construire la courbe représentative C
[0 ; +∞ [dans un repère orthonormal (u
cm). On indiquera en particulier les tang
C aux points d'abscisses 0 et 1.

Partie C

1.Montrer que, pour tout x appartenant
f(x) appartient à I.
2.Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_n = f(u_{n-1}) \text{ pour tout } n>1 \end{cases}$$

a. Montrer que, pour tout n ∈ $\mathbb{N}^*$, $u_n \in$
b. Montrer que, pour tout x∈ I, $|f'(x)| \le$

Scanned by CamScanner

c. En appliquant le théorème de l'inégalité des accroissements finis, démontrer que :

Pour tout n>1, $|u_n-\alpha|\le\frac{1}{2}|u_{n-1}-\alpha|$

d. En déduire, par un raisonnement par récurrence, que : Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $|u_n-\alpha|\le\left(\frac{1}{2}\right)^n$

e. En déduire que (u_n) converge vers α

f. A priori, combien suffit-il de calculer de termes de la suite pour obtenir une valeur approchée de α à 10^{-7} près ?

3. En utilisant la décroissance de f, montrer que α est compris entre deux termes consécutifs quelconques de la suite. En déduire un encadrement de α d'amplitude 10^{-7}.

Sujet 3

EXERCICE 1

Le plan P est rapporté au repère ortho normal direct $(O;\vec{u};\vec{v})$. On prendra 4 cm comme unité sur les deux axes. On considère l'application F du plan dans lui-même qui, à tout point m, d'affixe z, associe le point M d'affixe $\frac{1}{2}z^2-z$

L'objet de cet exercice est de tracer la courbe Γ décrite par M lorsque m décrit le cercle C de centre O et de rayon 1.

Soit t un réel de $[-\pi;\pi]$ et m le point de C d'affixe $z=e^{it}$

1. Montrer que l'image M de m par F est le point de coordonnées :

Ces relations constituent une représentation paramétrique de la courbe Γ.

2. Comparer x(-t) et x(t) d'une part, y(-t) et y(t) d'autre part. En déduire que Γ admet un axe de symétrie que l'on précisera.

3. Montrer que x'(t) = sin t(1 – 2cost). Étudier les variations de x sur $[0;\pi]$.

4. Montrer que $y(t)=(\cos t-1)(1+2\cos t)$

Étudier les variations de y sur $[0;\pi]$.

5. Dans un même tableau faire figurer les variations de x et y sur $[0;\pi]$.

6. Placer les points de Γ correspondant aux valeurs 0, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$ et π du paramètre t et tracer les tangentes en ces points (on admettra que pour t = 0 la tangente à Γ est horizontale). Tracer la partie de Γ obtenue lorsque t décrit $[0;\pi]$ puis tracer Γ complètement.

EXERCICE 2

Dans cet exercice, n est un entier naturel non nul. On considère la suite (u_n) définie par :

$u_n=\int_0^2\frac{2t+3}{t+2}e^{\frac{t}{n}}dt$

1. a Soit φ la fonction définie sur $[0;2]$ par $\varphi(t)=\frac{2t+3}{t+2}$

Étudier les variations de φ sur $[0;2]$. En déduire que, pour tout réel t dans $[0;2]$, $\frac{3}{2}\le\varphi(t)\le\frac{7}{4}$

b. Montrer que, pour tout réel t dans $[0;2]$, on a : $\frac{3}{2}e^{\frac{t}{n}}\le\varphi(t)e^{\frac{t}{n}}\le\frac{7}{4}e^{\frac{t}{n}}$

c. Par intégration en déduire que :

$\frac{3}{2}n\left(e^{\frac{2}{n}}-1\right)\le u_n\le\frac{7}{4}n\left(e^{\frac{2}{n}}-1\right)$

d. On rappelle que $\lim\limits_{h\to0}\frac{e^h-1}{h}=1$

Montrer que, si (u_n) possède une limite L, alors $3\le L\le\frac{7}{2}$

2. a. Vérifier que pour tout t dans $[0,2]$, on a $\frac{2t+3}{t+2}=2-\frac{1}{t+2}$

En déduire l'intégrale $I=\int_0^2\frac{2t+3}{t+2}dt$

b. Montrer que, pour tout t dans $[0;2]$, on a $1\le e^{\frac{t}{n}}\le e^{\frac{2}{n}}$ En déduire que $I\le u_n\le e^{\frac{2}{n}}I$

c. Montrer que (u_n) est convergente et déterminer sa limite L.

Problème

Dans tout le problème le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$: on prendra 2 cm comme unité sur les deux axes et on placera l'axe des abscisses au milieu de la feuille et l'axe des ordonnées sur le bord gauche de la feuille millimétrée.

Partie A: Étude d'une fonction f et de sa courbe représentative C.

On considère la fonction f, définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x-2)$

et on désigne par C sa courbe représentative relativement au repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et 0.

2. Montrer que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et calculer f'(x).

3. Soit u la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $u(x)=\ln x+x-3$

a. Étudier les variations de u.

b. Montrer que l'équation u(x) = 0 possède une solution unique α dans l'intervalle $[2;3]$. Montrer que 2, 20 < α < 2, 21.

Scanned by CamScanner

c. Étudier le signe de u(x) sur $]0;+\infty[$.

4. a.Étudier les variations de f.

b. Exprimer $\ln\alpha$ comme polynôme en α.

Montrer que $f(\alpha)=\dfrac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$

En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 2×10^{-2}.

5. a.Étudier le signe de f(x) .

b. Tracer C.

Partie B :Étude d'une primitive de f sur $]0;+\infty[$

Soit F la primitive de f sur $]0;+\infty[$ qui s'annule pour x = 1. On appelle Γ la courbe représentative de F relativement au repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

1.a Sans calculer F(x), étudier les variations de F sur $]0;+\infty[$.

b. Que peut-on dire des tangentes à Γ en ses points d'abscisses 1 et e^2?

b.Calcul de F(x).

c. x étant un réel strictement positif, calculer l'intégrale $\int_1^x \ln t\,dt$

(on pourra faire une intégration par parties).

d. Montrer que, pour tout x strictement positif :

$$f(x)=\ln x-\frac{\ln x}{x}+\frac{2}{x}-2$$

e.En déduire l'expression de F(x) en fonction de x

2. a.Montrer que $\lim\limits_{x\to0} x\ln x = 0$. En déduire la limite de F en 0.

b. Montrer que, pour x strictement supérieur à 1, $F(x)=x\ln x\left(1-\frac{1}{2}\times\frac{\ln x}{x}+\frac{2}{x}-\frac{3}{\ln x}\right)+3$

En déduire la limite de F en $+\infty$

C .Dresser le tableau de variation de F .

d. Tracer Γ sur le même graphique que C.

3. Calcul d'une aire.

Calculer, en cm^2, l'aire du domaine limité par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 1 et $x = e^2$.

Sujet 4

Session de 2009(1er tour)

Exercice 1

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(o;\vec{u};\vec{v})$ d'unité graphique : 2 cm.

Soit (Γ) la courbe de paramètres définie par :

$$\begin{cases}x(t)=t(3-t^2)\\ y(t)=t\ln\left(\dfrac{3+t}{3-t}\right)\end{cases}\quad t\in[-2;2]$$

1.Comparer M(t) et M(- t) pour $t\in[-2;2]$ et en déduire que l'on peut restreindre le domaine d'étude de (Γ) à $[0;2]$.

2. Etudier le sens de variations de x sur

3.a) Montrer que pour tout $t\in[0;2]$, $\ln\left(\frac{3+t}{3-t}\right)$

b) Etudier le sens de variations de y sur

4. Dresser le tableau de variation con x et y.

5. Déterminer les points d'intersection avec l'axe des ordonnées.

6.Tracer. (Γ)

Exercice 2

Dans le plan complexe P muni d'un repè orthonormal direct $(o;\vec{u};\vec{v})$, on considère l points A, B, C, D d'affixes respectives $z_A=-2i : z_B=4-2i; z_c=4+2i; z_D=1$

1) a) Placer les points A, B, C, D

b) Calculer $\dfrac{z_A-z_B}{z_C-z_B}$ et en déduire la natu exacte du triangle ABC.

2) On désigne par f l'application qui à tou $M\neq A$ d'affixe z de P associe le point M' d $z'=\dfrac{z-4-2i}{z+2i}$

a) Déterminer les images B' et C' des p et C par f.

b) Ecrire l'affixe $z_{B'}$ de B'sous trigonom

c) Déterminer et construire l'ensemble points m d'affixe z tel que $|z'|=1$

3) a) Montrer que pour tout complexe z d de −2i, $(z'-1)(z+2i)=-4-4i$

b) Montrer que pour tout $M\neq A$

(i) $M'\neq D$

(ii) $DM'\times AM=4\sqrt{2}$

(iii) $(\vec{u};\overrightarrow{DM'})+(\vec{u};\overrightarrow{AM})=\dfrac{5\pi}{4}$

Problème

On considère la fonction f définie sur [0 ; par $f(x)=\dfrac{e^x-1}{xe^x+1}$

On désigne par C sa courbe représentati le plan rapporté à un repère orthonormal ; unité graphique : 4 cm.

Partie A

*** Étude d'une fonction auxiliaire**

Soit la fonction g définie sur l'intervalle [0 par $g(x)=x+2-e^x$

1.Étudier le sens de variation de g sur [0 [et déterminer la limite de g en $+\infty$.

a. Montrer que l'équation g(x) = 0 admet solution et une seule dans [0 ; $+\infty$ [.

On note α cette solution.

b. Prouver que $1,14<\alpha<1,15$

Scanned by CamScanner

. En déduire le signe de g(x) suivant les valeurs e x.

artie B

Étude de la fonction f et tracé de la courbe

a. Montrer que, pour tout x appartenant à ; +∞ [, $f'(x)=\frac{e^x g(x)}{\left(xe^x+1\right)^2}$

En déduire le sens de variation de la fonction sur [0 ; +∞ [.

.a. Montrer que pour tout réel positif x, $(x)=\frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$

En déduire la limite de f en +∞. Interpréter raphiquement le résultat trouvé.

c. Établir que $f(\alpha)=\frac{1}{\alpha+1}$

En utilisant l'encadrement de α établi dans la uestion **A.2.**, donner un encadrement de f(α) amplitude 10^{-2}.

Déterminer une équation de la tangente (T) à courbe C au point d'abscisse 0.

Établir que, pour tout x appartenant à ntervalle [0 ; +∞ [, $x)-x=\frac{(x+1)u(x)}{xe^x+1}$ avec $u(x)=e^x-xe^x-1$

Étudier le sens de variation de la fonction u r l'intervalle [0 ; +∞ [. En déduire le signe de x).

Déduire des questions précédentes la position la courbe C par rapport à la droite (T).

Tracer C et (T).

rtie C

Calcul d'aire et étude d'une suite

Déterminer une primitive F de f sur [0 ; +∞ [; pourra utiliser l'expression de f(x) établie ns la question **B.2.**

On note D le domaine délimité par la courbe la tangente (T) et les droites d'équations x = 0 x = 1.

alculer, en cm², l'aire A du domaine D. nner une valeur décimale au mm² près de ire A.

Pour tout entier naturel n, on pose $=\int_n^{n+1} f(x)dx$

Calculer v_0, v_1 et v_2.

n donnera des valeurs décimales approchées à $)^{-2}$ près de v_0, v_1 et v_2.

Interpréter graphiquement v_n.

Montrer que, pour tout n ≥ 2, $f(n+1)\le\int_n^{n+1} f(x)dx\le f(n)$

n déduire la monotonie de la suite (v_n) à partir n = 1.

Déterminer la limite de la suite (v_n).

Sujet 5

Session 2009 (second tour)

Exercice 1

L'espace est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, unité graphique 2 cm.

Soient les points $A(-2;1;-4), B(2;3;1), C(2;2;-1)$ et $D(-3;-1;3)$.

Soient les points E, F, G et H tel que ABCDEFGH soit un parallélépipède.

1) Déterminer les coordonnées du point F.
2) Calculer $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$. En déduire l'aire du parallélogramme ABFC et du triangle ABC en cm².
3) Calculer la distance d du point D au plan (ABC).
4) Calculer en cm^3 le volume V de la pyramide de sommet D et de base ABFC.
5) Calculer le volume V' du parallélépipède ABCDEFGH.

Exercice 2

Le tableau suivant donne le montant des prêts octroyés par une banque à des associations féminines entre 2002 et 2007.

Année	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Rang de l'année x	1	2	3	4	5	6
Montant des prets en millions de francs CFA y	4.5	5	5.2	5.8	6.3	7.1

1) Représenter le nuage de points $M_i(x_i;y_i)$ associé à cette série statistique dans un repère orthogonal. On prendra 1 cm pour une unité en abscisse et 1 cm pour un million en ordonnée.
2) Soit (Δ) la droite d'ajustement de Mayer obtenue par regroupement des trois premiers points et des trois derniers points du nuage. Soit G_1 le point moyen des trois premiers points et G_2 celui des trois derniers points.
   a) Calculer les coordonnées de G_1 et de G_2.
   b) Construire la droite (Δ)
   c) Déterminer l'équation réduite de (Δ)
3) On suppose que l'évolution du montant des prêts faits aux associations féminines reste la même au cours des années à venir

A partir de quelle année le montant des prêts sera-t-il strictement supérieur au double de celui de 2009.

Problème

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

Partie A

Scanned by CamScanner

Soit g la fonction numérique définie sur $]-\pi;0[$ par $g(x)=\cos^2 x+\cos x-1$

1) a) Montrer que g est dérivable sur $]-\pi;0[$ **et** $g'(x)=-\sin x(2\cos x+1)$

b) En déduire que $g'(x)\le 0$ pour tout $x\in\left]-\pi;-\frac{2\pi}{3}\right]$ et que $g'(x)\ge 0$ pour tout $x\in\left[-\frac{2\pi}{3};0\right[$

c) Dresser le tableau de variation de g.

2)a) Montrer que l'équation g(x) = 0 admet une unique solution $\beta\in]-\pi;0[$ et que $\beta\in\left]-\frac{\pi}{3};-\frac{\pi}{4}\right[$

b) En déduire le signe de g sur $]-\pi;0[$.

Partie B

Soit f la fonction numérique définie sur $]-\pi;+\infty[$ par

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{2\sin 2x}{1+\cos x}+\dfrac{1}{2} \text{ si } x\in]-\pi;0] \\ f(x)=2-\dfrac{3}{e^{3x}+1} \text{ si } x>0 \end{cases}$$

On note (C_f) la courbe représentative de f.

1) Etudier la continuité de f en 0.
2) Etudier la dérivabilité de f en 0 et en déduire une interprétation géométrique des résultats obtenus.
3) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b) Montrer que pour tout $x\in]-\pi;0[$ on a $f'(x)=\dfrac{4\sin x\cos x(1-\cos x)}{1-\cos^2 x}+\dfrac{1}{2}$ et en déduire que $\lim\limits_{x\to-\pi} f(x)=+\infty$

c) En déduire les asymptotes de la courbe (C_f)

4) a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in]0;+\infty[$ et en déduire le sens de variation de f sur $]0;+\infty[$

b) Montrer que $f'(x)=\dfrac{4g(x)}{1+\cos x}$ pour tout $x\in]-\pi;0[$ et en déduire le sens de variations de f sur $]-\pi;0[$

c) Dresser le tableau de variation de f sur $]-\pi;+\infty[$

5) Construire (C_f), ses asymptotes et ses demi Tangentes au point d'abscisse 0.

Partie C

On admet que pour tout $x\in[1.5;2], 0\le f'(x)\le\frac{1}{2}$ (e)

1)Soit h la fonction définie sur [1.5 ;2] par $h(x)=f(x)-x$

Etudier les variations de h et en déduire que l'équation f(x) = x admet une unique solution $\alpha\in[1.5;2]$.

2)Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0=1.5$ et $u_{n+1}=f(u_n)$, pour tout $n\in IN$.

a) Montrer par récurrence que pour tout $u_n\in[1.5;2]$ en utilisant (e).

b) Montrer que pour tout $n\in IN^*, |u_n-\alpha|\le\frac{1}{2}|u_{n-1}-\alpha|$ et que $|u_n-\alpha|\le\frac{1}{2^n}|u_0-\alpha|\le\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ pour tout n de IN

c) En déduire que la suite (u_n) est conv

d) Déterminer l'entier naturel n_0 tel que une valeur approchée de α à 10^{-3} pr

On donne $h(1.5)=0.46$, $h(2)\simeq-0.007$

sujet 6

Session de2010 (1er tour)

Exercice 1

Soit $P(z)=z^3-(1-i)z^2+z-1+i$, $z\in\mathbb{C}$

1. démontrer que P(z) admet deux racin imaginaires pures.
2. Résoudre l'équation P(z) = 0, puis don solutions sous forme exponentielle.
3. Le plan est muni d'un repère orthon $(O;\vec{u};\vec{v})$. On donne a = -i, b = i et c = 1-i et c sont les affixes respectives des poin et C.

a) Faire une figure que l'on complétera à mesure.

b) Calculer $\frac{a-b}{a-c}$, puis préciser la nature triangle ABC.

c) Soit C l'image du point D par la trans de vecteur $\overrightarrow{AB}$. Calculer l'affixe du point

d) E est l'image du point D par la rotati centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Déterminer l'affix

e) Pour quelles valeurs de n, c^n est il rée

Exercice 2

Une urne contient dix boules : quatre ro six blanches.

1. On extrait simultanément trois boules l'urne. Soit X la variable aléatoire qui pr pour valeur le nombre de boules rouges extraites. Déterminer la loi de probabilit calculer l'espérance mathématique de X.

2 .On répète n fois l'épreuve précédente chaque tirage les trois boules sont remi l'urne.

a) On suppose n = 5.
Calculer la probabilité que l'on obtienne fois un tirage de trois boules rouges.

b) On prend maintenant n = 2.
On note S l'événement « le nombre total boules rouges obtenues après les deux est 3 ». Calculer la probabilité de S.

Problème

Scanned by CamScanner

Le plan est muni_ d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$, $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$.

Partie A

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x+1)^2e^{-x}$ et $g(x)=e^{-x}$. On désigne par (C_f) la courbe représentative de f et (C_g) celle de g.

1. a) Calculer la limite de f en $+\infty$. Que peut on en déduire pour (C_f) ? Calculer la limite de f en $-\infty$

b) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.

c) En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variations.

2. a) Calculer les limites de g en $+\infty et\ en -\infty$.

b) Calculer $g'(x)$, étudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variations.

3. a) Etudier le signe de f(x) – g(x) et en en déduire la position relative des courbes (C_f) et (C_g).

b) Montrer que les tangentes en A(0;1) aux courbes (C_f) et (C_g) sont perpendiculaires.

. Tracer les courbes (C_f) et (C_g) et leurs tangentes au point A.

Partie B

. Déterminer les réels a, b et c pour que la fonction qui à t associe $(at^2+bt+c)e^{-t}$ soit une primitive de la fonction qui à t associe $(t^2+2t)e^{-t}$

. Soit α un réel positif.

a) Calculer l'aire $A(\alpha)$ en centimètres carrés de la région du plan compris entre les courbes (C_f) et (C_g), l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x=\alpha$

b Calculer $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} A(\alpha)$

. Calculer en centimètres carrés, l'aire de la région du plan comprise entre les courbes (C_f) et (C_g), la droite d'équation x = -2 et l'axe des ordonnées.

Partie C

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}/\{0\}$ par $u_n=\ln[f(n)]$ où ln désigne le logarithme népérien.

. Justifier que la suite (u_n) est décroissante.

. On désigne par S_n la somme des n premiers termes de la suite (u_n) : $S_n=u_1+u_2+...+u_n$

) Montrer que $u_n=-n+2\ln(n+1)$.

) Démontrer que : $S_n=2\ln\left[(n+1)!\right]-\frac{n(n+1)}{2}$

On donne $e^{-1}\approx 0,4$

Sujet 7

Session de 2010 (2nd tour)

Exercice 1

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormal $(o;\vec{u},\vec{v})$; unité graphique : 2 cm. On désigne par A, B et C les points dont les affixes respectives sont : 2i, -1 et i. Soit f l'application de (P)/$\{A\}$ dans (P) qui, à tout point M d'affixe $z(z\neq 2i)$ associe le point M' d'affixe z' telle que $z'=\frac{z+1}{z-2i}$

1. Placer les points A, B et C. On complètera la figure dans la suite.
2. Déterminer l'affixe de C', image de C par f. Quelle est la nature du quadrilatère ACBC' ?
3. Montrer que le point C admet un unique antécédent C'' par f. Quelle la nature du triangle BCC'' ?
4. Donner une interprétation géométrique de $|z'|$ et arg(z').
5. Déterminer les ensembles suivants :

a) l'ensemble (E) des points M dont l'image par f a pour affixe un réel strictement négatif

b) l'ensemble (F) des points M dont l'image par f a pour affixe un imaginaire pur non nul

c) l'ensemble (D) des point M dont l'image par f a pour affixe un nombre complexe de module 1.

6. Construire ACBC', BCC'', (E) , (F), (D) dans la figure 1.

Exercice 2

Une entreprise fabrique des vêtements. Dans le tableau suivant, on a indiqué pour les sept premiers mois de l'année 2008 la production journalière moyenne de pulls.

mois	jan	févr	mar	avr	mai	Juin	juil
Rang du mois xi	1	2	3	4	5	6	7
Production journalière yi	200	210	260	265	270	300	615

La direction devra fermer l'atelier de fabrication de pulls si la production moyenne journalière n'atteint pas 350 pulls à la fin de l'année 2008.

On considère le nuage de points $M_i(x_i;y_i)$ associe au tableau ci dessus relativement à un repère orthonormal $(o;\vec{i},\vec{j})$; prendre pour unité : en abscisse :1 cm par rang de mois ; en ordonnée : 1 cm pour 20 pulls.

1. a) Représenter le nuage de points dans le repère $(o;\vec{i},\vec{j})$.

b) Calculer les coordonnées du point moyen G et placer ce point.

2. a) Calculer les coordonnées du point moyen G_1 associé aux quatre premiers points du tableau, puis celles du point G_2 associe aux trois derniers points.

Scanned by CamScanner

b) Déterminer une équation de la droite (G_1G_2) et la tracer.

3. On admet que (G_1G_2) réalise un ajustement un ajustement du nuage de points.

a) Déterminer par le calcul la production journalière moyenne de pulls en décembre 2008.

b) Comment peut on retrouver graphiquement ce résultat ?

4. L'atelier de fabrication de pulls a-t-il été fermé en fin décembre 2008 ? Justifier votre réponse.

Problème

Partie A

Soit u la fonction numérique définie par $u(x)=1-xe^{-x}$

1. Etudier le sens de variation de u(on ne demande pas ni limites ni le tableau de variations)

2. En déduire le signe de u(x).

Partie B

On considère la fonction f de la variable réelle définies par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{-4\ln(-x)}{x} \text{ si } x\in]-\infty;-1[\\ f(x)=(x+1)\left(1+e^{-x}\right) \text{ si } x\in[-1;+\infty[\end{cases}$

et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère rapporté à un repère orthonormal $(o;\vec{i};\vec{j})$ (unité : 2 cm).

1. a) Vérifier que f est continue en -1.

b) Etudier la dérivabilité de f en -1. Interpréter graphiquement le résultat.

c) Calculer la limite de f aux bornes de son ensemble de définition. Préciser les éventuelles asymptotes à (C).

d) Montrer que la droite (D) d'équation : $y=x+1$ est asymptote à (C). Etudier la position relative de (C) et (D) sur l'intervalle $[-1;+\infty[$.

2. a) Vérifier que pour $x<-1, f'(x)=\dfrac{4\left(\ln(-x)-1\right)}{x^2}$.

b) Etudier les variations de f sur $]-\infty;-1[$, puis sur $]-1;+\infty[$ et dresser le tableau de variations de f.

c) Montrer qu'il existe un unique point d'abscisse supérieur à -1 où la tangente (T) à (C) est parallèle à la droite (D).

3. a) Montrer que la courbe (C) est située au dessus de l'axe des abscisses.

b) Tracer la courbe (C) et ses asymptotes puis la tangente (T) à (C).

Partie C

1. Soit λ un nombre réel supérieur ou égal à -1.

a) Calculer les intégrales $I=\int_{-e}^{-1}\frac{\ln(-x)}{x}dx$

$J(\lambda)=\int_{-1}^{\lambda}(x+1)e^{-x}dx$.

b) On note A(λ) l'aire en cm², de la par plan au dessus de l'axe des abscisses, par la courbe (C), l'asymptote (D) et les d'équation: $x=-e$ et $x=\lambda$. Montrer que $A(\lambda)=8+4e-4(\lambda+2)e^{-\lambda}$

2.Calculer la limite de $A(\lambda)$ lorsque λ te $+\infty$

Partie D

Soit ((Γ) la courbe dont une représenta paramétrique est donnée par le système suivant : $\begin{cases} x(t)=-e^{-t} \\ y(t)=4te^{t}\ (t<0) \end{cases}$

1. Montrer que (Γ) est l'image d'une par par symétrie orthogonale d'axe $(o;\vec{i})$.

2. Construire (Γ) en pointillés dans le repère que (C).

Sujet 8 (BAC 2011-1er tour)

Exercice 1

Dans le tableau suivant figurent les rés d'une enquête réalisée dans un magasi déterminer le nombre d'acheteurs poten d'un modèle de chaussures en fonction prix de vente.

Prix en frs : x_i	350	400	450	500	55
Nombre d'acheteurs potentiels	140	120	100	90	80

1) Représenter le nuage de points M_i(correspondant à cette série statistique repère orthogonal $(o;\vec{i};\vec{j})$ tel que 1 cm représente 100francs sur l'axe des abs 1 cm représente 20 acheteurs sur l'axe ordonnées.

2) On appelle G_1 et G_2 les points moyens nuages de points constitués d'une part trois premiers points d'autre part les tr derniers points.

a) calculer les coordonnées de G_1 et G_2

b) placer G_1 et G_2 sur la figure et trace droite (G_1G_2).

c) déterminer une équation de la forme $y=mx+p$ de la droite (G_1G_2).

3) déduire du 2-c) une estimation :

a) du nombre d'acheteurs potentiels d modèle de chaussures vendu 650 franc

Scanned by CamScanner

b) du prix d'un modèle dont le nombre d'acheteurs potentiels est 15.

Exercice 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(o;\vec{u};\vec{v})$. Soient les nombres complexes : $a=\frac{\sqrt{3}+1}{4}+\frac{i(\sqrt{3}-1)}{4}$ et $z_0=6+6i$.

On note A_0 le point d'affixe z_0 et pour tout n, entier naturel non nul, on désigne par A_n le point d'affixe z_n définie par : $z_n=a^n z_0$.

1)a) Exprimer z_1 et a^2 sous forme algébrique. Ecrire z_1 sous forme exponentielle et montrer que $a=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$.

b) Exprimer z_3 et z_7 en fonction de z_1 et a^2 ; en déduire l'expression de z_3 et z_7 sous forme exponentielle.

2) Pour tout entier naturel n, on pose $|z_n|=r_n$.

a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $r_n=12\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}$.

b) En déduire que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

c) déterminer la limite de la suite (r_n) et interpréter géométriquement le résultat obtenu.

Problème

Soit f la fonction numérique définie par $f(x)=\frac{e^x}{1+e^x}$ et de courbe représentative (C) dans un repère orthonormé $(o;\vec{i};\vec{j})$ du plan (unité graphique : 4 cm).

Partie A

1)a) Déterminer l'ensemble de définition de f.

b) Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

3) Soit A le point de (C) d'abscisse 0.

a) Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à (C) en A.

b) Montrer que le point a est un centre de symétrie pour (C).

4) Tracer (T) et (C) dans le repère $(o;\vec{i};\vec{j})$.

Partie B

Soit n un entier naturel. On désigne par D_n le domaine du plan limité par la courbe (C) et les droites y = 1 ; x = 0 et x = n. A_n désigne l'aire de la région D_n exprimée en unité d'aire.

1) Hachurer la région D_2 sur le graphique (pour n = 2).

2) Montrer que $A_n=\ln 2-\ln\left(1+e^n\right)+n$.

3) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n$.

Partie C

1) Déterminer les nombres a et b tels que $\frac{e^{2x}}{\left(1+e^x\right)^2}=\frac{ae^x}{1+e^x}+\frac{be^x}{\left(1+e^x\right)^2}$.

2) Soit α un réel négatif. On note $V(\alpha)$ le volume du solide engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses de la portion de la courbe (C) obtenue pour $\alpha\le x\le 0$. $V(\alpha)$ est exprimer en unité de volume.

a) Exprimer $V(\alpha)$ en fonction de α.

b) Déterminer la limite d$V(\alpha)$ lorsque α tend vers $-\infty$

Partie D

Soit (Γ) la courbe paramétrée de représentation paramétrique : $\begin{cases}x(t)=\ln t\\ y(t)=\frac{1}{1+t}-1\end{cases}$ $t\ge 1$.

1) Déterminer une équation cartésienne de (Γ)

2) Expliquer comment à partir de (C) on obtient (Γ).

Construire (Γ) en pointillés.

On donne $f\left(\frac{1}{2}\right)=0,62;\ f(1)=0,73;\ f(2)=0,88$

Sujet 9 (BAC 2011 second tour)

Exercice 1

On considère la suite (I_n) définie par $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx,\ n\in\mathbb{N}$

1) Calculer I_0, I_0+I_1 et en déduire I_1.

2) Calculer I_n+I_{n+1} en fonction de n.

3) Montrer que la suite (I_n) est décroissante et positive.

4) Montrer que $I_n\le\frac{1}{n+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

5) En déduire que la suite (I_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 2

L'espace étant rapporté au repère orthonormé direct $(o;\vec{i};\vec{j},\vec{k})$ unité de longueur 1 cm, on considère les points : A(3 ;2 ;4) ; B(0 ;3 ;5) ; C(0 ;2 ;1) ; D(3 ;1 ;0) et F(1 ;2 ;3).

1) Démontrer que ABCD est un parallélogramme.

2) Soit E le point défini par $\overline{AE}=\frac{1}{3}\overline{AB}\wedge\overline{AD}$.

Calculer les coordonnées de E.

3) Calculer l'aire A en cm² du parallélogramme ABCD.

Scanned by CamScanner

4) Calculer le volume V en cm³ du prisme droit de base ABCD et de hauteur $[AE]$.

5) Le point F appartient-il à la droite (AB) ? Justifier la réponse.

Problème

Dans tout le problème, le plan est rapporté à un repère orthonormé $(o;\vec{i};\vec{j})$ et l'unité est 2 cm.

Partie A

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\left(2-\frac{2}{x}\right)(\ln x-1)$. (C) désigne sa courbe représentative relative au repère $(o;\vec{i};\vec{j})$

1) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$

2) Montrer que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ puis calculer $f'(x)$.

3) Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=2\ln x+2x-4$.

a) Etudier le sens de variation de g sur $]0;+\infty[$ puis dresser son tableau de variation.

b) Montrer que l'équation g(x) = 0 admet une unique solution α dans $[1;2]$.

c) En déduire le signe de g sur $]0;+\infty[$.

4) a) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation sur $]0;+\infty[$.

b) Montrer que $f(\alpha)=\frac{-2(\alpha-1)^2}{\alpha}$

c) Calculer $f(1)$ et $f(e)$.

5) a) Etudier le signe de f sur $]0;+\infty[$

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ et donner une interprétation du résultat obtenu.

c) Construire (C). On prendra $\alpha=1,75$ et $f(\alpha)=-0,6$.

6) Soit h la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x)=-f(x)$, (C') désigne sa courbe représentative.

Sans étudier h, construire (C') dans le repère précédent. Justifier la construction.

Partie B

Soit F la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $F(x)=\int_1^x f(t)dt$. (Γ) Désigne sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) a) Que représente F pour f.

b) Sans calculer F(x), donner le sens de variation de F.

c) Que peut-on dire des tangentes de (Γ) aux points d'abscisses 1 et e ? (on pourra 4-c) de la partie A)

2) a) Le nombre réel x étant strictement... calculer $\int_1^x \ln t\,dt$ (on pourra utiliser une intégration par parties).

b) Montrer que pour tout réel x>0, on a... $f(x)=2\ln x-2\frac{\ln x}{x}+\frac{2}{x}-2$.

c) En déduire l'expression de F(x) en fo... x.

3) Calculer l'aire A en cm² du domaine limité par (C), (C') et les droites x = 1 et... On donne $\ln 2\approx 0,7$ et $\ln 3\approx 1,1$

sujet 10 (Bac 2012 1er tour)

Exercice 1

On considère les équations différentiell... suivantes : $(E_1): y''+4y=0$ et $(E_2): y''+y=...$

1.Déterminer la solution de l'équation ... la courbe représentative dans un repè... orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ passe par le point A... admet en ce point une tangente horizo...

2. Déterminer la solution g de l'équatio... vérifiant $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$ et $g'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$.

3. Soit (C) la courbe définie par le syst... d'équations paramétriques : $\begin{cases}x(t)=-2\cos...\\y(t)=\cos t\end{cases}$

a) déterminer la période commune des ... x et y ; comparer la position des points ... $M(t+\pi)$ puis en déduire un élément de ... de (C). Justifier le choix de $[0;\pi]$ comme ... ensemble d'étude.

b) Etudier les fonctions x et y sur $[0;\pi]$ ... le tableau de variations conjoint.

c) représentation la courbe (C) dans un ... orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité graphique : 2 ...

On précisera les tangentes particulières ... que les tangentes en O. $\sqrt{2}\approx 1,4$

Exercice 2

On lance un dé tétraédrique dont les q... faces portent les nombres 1, 2, 3 et 4. ... s'intéresse au nombre porté par la face ... Pour $k\in\{1,2,3,4\}$, on note P_k la probabil... d'obtenir le nombre k sur la face cachée ... est déséquilibré de telle sorte que les n... P_1, P_2, P_3 et P_4 dans cet ordre forment une ... progression arithmétique.

1. Sachant que $P_4=0,4$; montrer que $P_1=0,1$; $P_2=0,2$ et $P_3=0,3$

2. On lance le dé trois (3) fois de suite ... suppose que les lancers sont deux à deux ... indépendants.

Scanned by CamScanner

a) Quelle est la probabilité d'obtenir dans l'ordre les nombres1, 2, 4 ?
b) Quelle est la probabilité d'obtenir trois nombres distincts rangés dans l'ordre croissant?
3. On lance dix(10) fois de suite le dé. On suppose les lancers deux à deux indépendants. On note X la variable aléatoire qui décompte le nombre de fois où le chiffre 4 est obtenu.
a) Pour $0 \le i \le 10$, exprimer en fonction de i la probabilité de l'événement (X = i).
b) Calculer l'espérance mathématique de X. Interpréter le résultat obtenu.
c) Calculer la probabilité de l'événement $(X \ge 1)$. On donnera une valeur arrondie au millième.
4. On lance n fois le dé, les lancers sont supposés indépendants. On désigne par u_n la probabilité d'obtenir pour la première fois le nombre 4 au $n^{ième}$ lancer.
a) Montrer que (u_n) est une suite géométrique et quelle converge.
b) calculer $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$ en fonction de n puis étudier la convergence de la suite (S_n)
c) déterminer le plus petit entier n tel que $S_n \ge 0,999$.

NB on donn

$(0,6)^{10} = 0,00604; \ln(0,001) = -6,90; \ln(0,6) = -0,51$

Problème

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}/\{1\}$ par :

$f(x) = \dfrac{x + \ln|1-x|}{1-x}$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unité graphique : 2 cm.

Partie A

1.Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. En déduire les asymptotes de (C).
2) Soit f' la fonction dérivée de f, calculer $f'(x)$ puis étudier son signe. En déduire le sens de variation de f
3.Dresser le tableau de variations de f
4. Montrer que lepoint I (1 ; -1) est un centre de symétrie pour (C)
5. Tracer (C) et les asymptotes.

Partie B

Soit les fonctions u et v définies sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par : $u(x) = \dfrac{-1}{1-x}$ et $v(x) = \dfrac{\ln(x-1)}{x-1}$

1.déterminer une primitive de chacune des fonctions u et v sur $]1;+\infty[$.
2. vérifier que pour tout réel x>1 ;
$-1 - f(x) = u(x) + v(x)$
3. calculer, en cm^2 la valeur exacte de l'aire S du domaine plan compris entre (C) et les droites d'équations y = -1, x = 2 et x = 3.

Partie C

On considère la suite (u_n) définie sur IN par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 4 - e^{-u_n} \text{ pour tout } n \in IN \end{cases}$$

1.Montrer, par récurrence que pour tout entier non nul, $3 < u_n < 4$
2. a) Montrer que, pour tout entier n non nul, $u_{n+1} - u_n$ et $u_n - u_{n-1}$ sont de même signe.
b) Etudier le sens de variation de la suite (u_n)
3. Etudier la convergence de la suite (u_n).

On donne $e^{-3} \approx 0,05$ et $e^{-4} \approx 0,02$

sujet 11 (Bac 2012 2nd tour)

Exercice 1

1.On considère le polynôme P défini par :
$P(z) = z^3 - 6z^2 + 12z - 16$.
a.Soit $z_0 \in \mathbb{C}$.Montrer que si $P(z_0) = 0$ alors $P(\overline{z_0}) = 0$
b. Calculer $P(1+i\sqrt{3})$ puis factoriser $P(z)$
b. En déduire les solutions de l'équation : P (z) = 0.
2. Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ tel que : $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$ = 2 cm.
Soient A, B, C les points d'affixes respectives :
$a = 4,\ b = 1 + i\sqrt{3},\ c = 1 - i\sqrt{3}$
a. Placer les points A, B, C sur une figure que l'on complètera tout au long de l'exercice.
b. Quelle est la nature exacte du triangle ABC ?
3. Soit K le point d'affixe $k = -\sqrt{3} + i$
On appelle F l'image de K par la rotation de centre O et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{3}$ et G l'image de K par la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$.
a. Quelles sont les affixes respectives de F et de G ?
b. Montrer que les droites (OC) et (OF) sont perpendiculaires.
4. Soit H le quatrième sommet du parallélogramme COFH
a. Calculer l'affixe du point H puis montrer que le parallélogramme COFH est un carré.
b . Quelle est la nature du triangle AGH ?
on donne $\sqrt{3} = 1.7$

Exercice 2

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. On donne A (2, 0, 0) ; B (0, 3, 0) et C (0, 0, 2).
1. Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ défini par $\vec{u} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

Scanned by CamScanner

2. Soit H(a, b, c) le projeté de O sur le plan (ABC).

a) Que peut-on dire des vecteurs $\overline{AH}$ et $\vec{u}$? En déduire que : $3a+2b-3c-6=0$

b) Que peut-on dire des vecteurs $\overline{OH}$ et $\vec{u}$?

En déduire qu'il existe un réel t tel que : $\begin{cases} a=-6t \\ b=-4t \\ c=6t \end{cases}$

c)Déterminer la valeur de t puis donner les coordonnées de H.

d) Calculer la distance du point O au plan (ABC).

3. Calculer le volume du tétraèdre de base ABC et de sommet O.

Problème

On considère la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$f(x)=\dfrac{-\ln|x|}{x}+x-2$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

Partie A

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$g(x)=-x^2+1-\ln|x|$

1.Etudier les variations de la fonction g et dresser son tableau de variation.

2. Calculer g(-1) et g(1) puis déduire le signe de g(x) suivant les valeurs de x.

Partie B

1.Calculer les limites de f aux de son ensemble de définition. En dédiure que la courbe (C) admet une asymptote verticale.

2. a) montrer que la droite (D) d'équation y = x – 2 est une asymptote à (C).

b) Etudier les positions relatives de (C) par rapport à (D).

3. a) calculer $f'(x)$ et exprimer $f'(x)$ en fonction de g(x) et en déduire le sens de variations de f.

b) dresser le tableau de variation de f.

4. a) Montrer que le point I, intersection des deux asymptotes est un centre de symétrie pour la courbe (C).b) Construire la courbe (C) ainsi que ses asymptote.

5. Discuter graphiquement et en fonction du paramètre m, le nombre de solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ $f(x)=m$ avec $(m\in\mathbb{R})$.

Partie C

Soit α un réel tel que $-1\le\alpha<0$ et soit (Δ) la région du plan délimitée par la courbe (C), les droites d'équations respectives x = -1 ; x = α ; y = x – 2.

1.a) Calculer en fonction de α l'aire $A(\alpha)$ de (Δ).

b) Calculer $\lim\limits_{\alpha\to 0^-} A(\alpha)$ et interpréter graphiquement ce résultat.

2. a) On donne la suite définie pour tout $n>0$ par $u_n=\int_1^n f(x)dx$.

a) calculer u_n en fonction de n.

b) La suite (u_n) est-elle convergente, Ju

Sujet 12 (BAC 2013-1er tour)

Exercice 1

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(o,\vec{i},\vec{j})$. Soient $A(1,2,3)$, $B(3,0,3)$ et $C(3,2,1)$.

1. Calculer AB ; BC et $\overline{AB}.\overline{BC}$

2. Soit D le point tel que $\overline{AD}=\overline{BC}$. Trou coordonnées de D. Quelle est la nature quadrilatère ABCD ?

En déduire que $\overline{AC}\perp\overline{BD}$

3. Déterminer la distance séparant le p quadrilatère ABCD.

4. Soit I le milieu de $[AC]$. Calculer OI, déduire que I est le projeté orthogonal le plan $(ABCD)$

5. Démontrer que les plans (OAC) et (orthogonaux.

6. Déterminer l'aire du quadrilatère AB

7. Déterminer le volume de la pyramide sommet O et de base, le quadrilatère A

Exercice 2

On considère la suite de terme général défini par : $u_n=\dfrac{3u_{n-1}-1}{u_{n-1}}; n\ge 3$ et par son p terme $u_2=3$.

1. Calculer u_3, u_4 et en déduire que la su n'est ni arithmétique, ni géométrique.

2. a) Montrer que (u_n) est minorée par 1

b) Montrer que (u_n) est décroissante.

c) En déduire que (u_n) est convergente déterminer sa limite.

3. On pose $v_n=\dfrac{u_n+1}{u_n-1}$

a) Montrer que (v_n) est une suite arith dont on précisera la raison et le premier (On pourra exprimer v_n et v_{n-1} en fonction de u_{n-1}

b) Exprimer v_n, puis u_n en fonction de

c) Déterminer la limite de (u_n).

Problème

Scanned by CamScanner

On considère la fonction f fonction sur IR par : $\begin{cases} f(x) = xe^{\frac{1}{x}} \text{ si } x < 0 \\ f(x) = x\ln(x+1) \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$

On désigne par (C) la courbe de f dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$, unité graphique2 cm.

Partie A

1. Soit g la fonction définie par $g(x) = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1}$ si $x \geq 0$

Déterminer le sens de variation de g sur $[0;+\infty[$ et en déduire son signe sur $[0;+\infty[$.

2. a) Etudier la continuité de f en 0

b) Etudier la dérivabilité de f en 0

3. a) Calculer $f'(x)$ suivant les valeurs de x et vérifier que pour tout $x \geq 0; f'(x) = g(x)$

b) Montrer que pour tout x<0, on a $f'(x) > 0$

c) Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a $f'(x) > 0$

d) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

e) Dresser le tableau de variation de $= 0$ et $x = e-1$.

4. a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} \left[x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)\right]$, $\left(\text{on pourra poser } X = \frac{1}{x}\right)$

c) Montrer que la droite (D) d'équation : $y = x+1$ est une asymptote oblique à (C) en $-\infty$.

d) Préciser la position de (C) par rapport à (D) pour $x < 0$ $\left(\text{on admettra que } x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) < 1 \text{ pour } x < 1\right)$

5. Tracer $(\Delta): y = x; (D): y = x+1; (C)$ dans le repère $(o,\vec{i},\vec{j})$, unité graphique 2cm.

Partie B

1. a) Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout $x \in IR^+$, on a $\frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}$

b) Déduire au moyen d'une intégration par parties le calcul de $\int_0^{e-1} f(x)dx$.

2. Calculer en cm², l'aire A de la partie du plan limitée par (Δ) ; (C) et les droites d'équation $= 0$ et $x = e-1$.

3. Soit h la restriction de f à l'intervalle $[0;+\infty[$.

a) Montrer que h réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur un intervalle I que l'on précisera.

b) Construire la courbe (C') de h^{-1} dans le repère $(o,\vec{i},\vec{j})$

4. Quelle est l'aire A' en cm² de la boucle délimitée par (C) et (C').

Partie C

On considère la courbe (Γ) dont une représentation paramétrique est :

$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{\ln(-t)} \\ y(t) = \frac{t}{\ln t} \end{cases}$ avec $t \in]-1;0[$

1. Déterminer une équation cartésienne de (Γ).

2. Comment obtient-on la courbe (Γ) à partir de la courbe (C) de f

3. Construire (Γ) en pointillés dans le repère $(o,\vec{i},\vec{j})$

sujet 13 Second tour (*BAC 2013*)

Exercice 1

1.Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher, dont quatre portent le chiffre 1 et six portent le chiffre 5.
On tire simultanément deux de ces boules.
Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
A : « tirer deux boules portant chacune le chiffre 1 »
B : « tirer deux boules portant chacune le chiffre 5 »
C : « tirer deux boules portant des chiffres différents ».

2.On suppose maintenant que l'urne contient a boules portant le chiffre 1 et b boules portant le chiffre 5 avec $a+b=10$ $(1 \leq a \leq 9)$ et $(1 \leq b \leq 9)$
Soit X la variable aléatoire égale au total des points marqués sur les deux boules tirées simultanément.
a)Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X
b)Déterminer l'espérance mathématique E(X) en fonction de a.
c)Pour quelles valeurs de a, a-t-on $6 < E(X) < 8$?

Exercice 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(o;\vec{u};\vec{v})$, unité graphique : 2 cm.

1.Soit le nombre complexe $z_0 = 1+i$
a)Montrer que ... est solution de l'équation (E) définie par $z^3 - (7+i)z^2 + 2(8+3i)z - 10(1+i) = 0$
b)Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexe C.
2.On considère les points A,B et C du plan, d'affixes respectives $1+i$, $3+i$ et $3-i$

Scanned by CamScanner

a)Calculer et écrire sous forme exponentielle $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$

b)En déduire la nature du triangle ABC

c)Placer les points A,B et C dans le repère $(o;\vec{u};\vec{v})$ et compléter la figure au fur et à mesure.

d)Soit (Γ) le cercle circonscrit au triangle BAC. Déterminer l'affixe du centre G et le rayon r du cercle.

3.Soit (Δ) l'ensemble des points M du plan d'affixe z vérifiant la relation $|z-1-i|=|z-3+i|$

a)Caractériser géométriquement l'ensemble (Δ)

b)Justifier que le point F d'affixe $4+2i$ appartient à (Δ)

c)Déterminer l'affixe du point E de (Δ) situé sur l'axe des ordonnées.

4.Quelle est la nature exacte du quadrilatère CEAF, justifier votre réponse.

Problème

Partie A

Considère l'équation différentielle (E) définie par : $(E):\frac{1}{2}y'+y=3e^{-2x}+2$

1.Déterminer le réel a, tel que la fonction v définie par $v(x)=axe^{-2x}+2$ soit une solution de l'équation (E)

2.Donner les solutions de l'équation $(E'):\frac{1}{2}y'+y=0$

3.a)Montrer que u est solution de (E) si et seulement si v – u est solution (E')

b) En déduire les solutions de (E)

4.Déterminer la solution particulière h de l'équation (E) vérifiant $h(0)=0$

Partie B

On note la fonction f sur IR par :

$$f(x)=\begin{cases}2(3x-1)e^{-2x}+2 \text{ si } x\le 0\\ \frac{x\ln x}{1+x} \text{ si } x>0\end{cases}$$

On note (C_f) sa courbe respective dans un repère orthonormal $(o,\vec{i},\vec{j})$

Unité graphique : 4 cm

I) Etude d'une fonction auxiliaire

On définie la fonction g sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=1+x+\ln x$

a) Calculer les limites de g en 0 et en $+\infty$
b) Déterminer le sens de variations de g
c) Dresser le tableau de variations de g
1) Montrer que l'équation l''équation $g(x)=0$ admet une solution unique dans $]0;+\infty[$ Montrer que α appartient à l'intervalle $]0,2;0,3[$
2) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x

II)Etude et représentation graphique de f

1) Etudier la continuité de f en 0
2) Etudier la dérivabilité de f en 0 une interprétation graphique
3) Etudier les limites de f en $-\infty$ et
4) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ et interpréter résultat obtenu
5) Etudier le sens de variation de f

(On montrera que pour tout $x>0, f'(x)$

6) Montrer que $f(\alpha)=-\alpha$ et déterm point d'intersection de (C_f) avec l'axe
7) Dresser le tableau de variations
8) Construire (C_f)

Partie C

Soit $\lambda<0$ on note $A(\lambda)$ l'aire de la part délimitée par les droites d'équations : $x=\lambda, x=0$ et $y=0$ et la courbe (C_f)

1) On pose F(x) $=(ax+b)e^{-2x}$ Déter b pour que $F'(x)=(3x-1)e^{-2x}$
2) Calculer $A(\lambda)$ en cm^2
3) Calculer $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}A(\lambda)$

On donne ln2 = 0,70 ;ln3 = 1,10 ; ln5 =

sujet 14 BAC 2014 1er tour

Exercice 1

Le plan complexe P est rapporté au rep orthonormal $(O;\vec{u};\vec{v})$; unité : 2cm. On l'application f définie sur $\mathbb{C}^*$ par $f(z)=$ l'application du plan P privé de O dans même qui à tout point M d'affixe z, ass point M' d'affixe $z'=f(z)$.

1.On pose $z=re^{i\theta}$, $r\in IR^{*+}$ et $\theta\in IR$. Exprimer le module et un argument de fonction de r et θ.

2. On pose $z=x+iy$ et $Z=X+iY$ où Z et du milieu I de $[MM']$; x,y,X,Y sont des a) Exprimer X et Y à l'aide de x et y. b) Déterminer et représenter l'ensemble points M tels que I appartienne à l'axe c) Déterminer et représenter l'ensemble points M tels que I appartienne à l'axe

3. On suppose $|z|=1$. On pose donc IR.

a) Calculer Z en fonction de θ.

Scanned by CamScanner

) Caractériser géométriquement la restriction le F au cercle de centre O et de rayon 1.

xercice 2

'instant t = 0, un corps à la température $_0 = 60°C$ est placé dans l'air ambiant à la empérature $\theta_1 = 20°C$.

u bout de 10 minutes, la température du corps st de 50°C. Sa température à la date t exprimée n minutes, est solution de l'équation ifférentielle : $\frac{d\theta(t)}{dt} = -k(\theta(t) - \theta_1)$ où k est une onstante réelle. On pose $\Phi(t) = \theta(t) - \theta_1$

.a) Quelle est l'équation différentielle vérifie par ?

) Déterminer Φ.

) En déduire $\theta(t)$ en fonction de k.

) Déterminer la constante k puis, en déduire expression définitive de $\theta(t)$.

. a) Au bout de combien de minutes la empérature du corps diminuera-t-elle de oitié ?

) Quelle sera la température du corps au bout 'une heure ?.

n donne $ln2 \simeq 0{,}70$; $ln\frac{3}{2} \simeq -0{,}29$

roblème

n considère la fonction f définie sur IR par

$f(x) = (1-x)e^x$ si $x \leq 1$

$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$ si $x > 1$

n note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans n repère orthonormal direct $\mathcal{R} = (O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$; unité raphique : 2cm.

artie A.

.a) Etudier la continuité de f en $x_0 = 1$.

) f est-elle dérivable en $x_0 = 1$? Interpréter éométriquement le résultat obtenu.

. a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

) Soit f' la dérivée de . Calculer $f'(x)$ et étudier signe f'.

) Dresser le tableau de variations de f.

. Montrer que la droite (Δ) d'équation y = x + 1 st asymptote à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$

. Déterminer une équation de la tangente (T) à $\mathcal{C}$) au point d'abscisse -1

n donne : $\frac{1}{e} \approx 0{,}36$)

. Tracer (Δ), (T) et $(\mathcal{C})$

. a) Montrer que la restriction de f à $]1;+\infty[$ alise une bijection de $]1;+\infty[$ sur un intervalle que l'on précisera.

) On note $(\mathcal{C}')$ la courbe représentative de cette ijection réciproque dans le repère $\mathcal{R} = (O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. onstruire$(\mathcal{C}')$.

artie B

)Soit $\propto$ un réel strictement négatif.

) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $x) = \int_{\propto}^{0} xe^x dx$.

) On désigne par $D_\propto$ le domaine plan délimité ar $(\mathcal{C})$, (Ox) et les droites d'équation$x = \propto$ et $x =$ Calculer, en cm², la valeur de l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ du domaine $D_\propto$.

c) Calculer $\lim_{\alpha \to -\infty} \mathcal{A}(\alpha)$

2) a) Déterminer les réels a, b et c tels que la fonction F définie sur IR par $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{2x}$ soit une primitive sur IR de $x \mapsto (x^2 - 2x + 1)e^{2x}$

b) Calculer, en cm³ le volume $\mathcal{V}(\alpha)$ du solide $S(\alpha)$ engendré par la rotation complète du domaine $D_\propto$ autour de l'axe (Ox).

Partie C

On considère la courbe (Γ) dont une représentation paramétrique est :

$\begin{cases} x(t) = \frac{2}{cost} - 1 \\ y(t) = 2tant \end{cases}$ $t \in]0;\frac{\pi}{2}[$

1. Donner une équation cartésienne de (Γ)

2. En déduire que (Γ) est une partie de $(\mathcal{C})$ que l'on précisera.

sujet 15 Session 2014 2nd tour

Exercice 1

On considère la courbe (C) dont une représentation paramétrique est :

$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin 2t \end{cases}, t \in IR$

1)Etudier la position relative de :

a) M(t) et $M(t+2\pi)$

b) M(t) et $M(-t)$

c) M(t) et $M(\pi - t)$

2) a) Montrer que si $t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ alors $\pi - t \in \left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$

b) En déduire qu'il suffit d'étudier (C) pour $t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

3) On désigne par (C_1) la partie de (C) correspondant à $t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

a) Etudier les fonctions : $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et dresser un tableau de variations conjoint.

b) Tracer (C_1), puis (C) en utilisant les résultats du 1)

Exercice 2

L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. On donne les points $A(-1;0;2)$, $B(0;1;3)$, $C(1;3;0)$ et $D(-1;-1;1)$

1) Calculer l'aire du triangle ABC.

2) a) Calculer la distance du point D au plan (ABC)

b) Les points A, B, C et D sont-ils coplanaires ?

3) Calculer le volume du tétraèdre DABC

4) a) Déterminer les coordonnées du point E tel que ABDE soit un parallélogramme.

b) Calculer l'aire du parallélogramme ABDE.

Problème

Scanned by CamScanner

On considère la fonction f définie sur IR par : $f(x)=x+1+(x+1)e^{-2x}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$ unité : 2 cm.

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur IR par : $g(x)=e^{2x}-2x-1$

1) Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$

2) a) Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variations.

b) En déduire le signe de $g(x)$ pour tout réel x.

Partie B : Etude de f et construction de (C)

1) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

2) Démontrer que la droite (Δ) d'équation : $y=x+1$ est une asymptote à (C) en $+\infty$. Préciser la position relative de (C) et de (Δ).

3) a) Calculer $f'(x)$ et l'exprimer à l'aide de $g(x)$. En déduire le signe de $f'(x)$.

b) Dresser le tableau de variations de f.

4) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

5) a) Monter que f réalise une bijection de IR sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Construire dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, (C), (Δ) et la courbe (Γ) de f^{-1}, réciproque de f.

Partie C : Calcul d'aire et de volume.

1) Soit α un réel strictement supérieur à -1.

a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer en cm², l'aire $A(\alpha)$ du domaine plan limité par (C), (Δ) et les droites d'équations : $x=-1$ et $x=\alpha$.

b) Calculer $\lim\limits_{\alpha\to-\infty}A(\alpha)$.

2) On désigne par (D) le domaine plan limité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=-1$ et $x=0$ et par V le volume en cm³ du solide S engendré par la rotation complète de (D) autour de l'axe des abscisses.

a) Montrer que $[f(x)]^2=(x+1)^2\left(1+2e^{-2x}+e^{-4x}\right)$

b) Soit H la fonction définie sur IR par :

$H(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2+x-\left(x^2+3x+\frac{5}{2}\right)e^{-2x}-\frac{1}{32}\left(8x^2+20x+13\right)e^{-4x}$

Calculer $H'(x)$ et l'exprimer à l'aide de $f(x)$.

d) En déduire V.

sujet 16 Session 2015 1er tour

Exercice 1

Soit le polynôme $P(z)=z^3-(1+2i)z^2-3z+2i-1$ $z\in\mathbb{C}$

1)Montrer que le polynôme $P(z)$ admet une racine réelle z_0 que l'on déterminera.

2) Déterminer trois nombres complexes a, b et c tels que $P(z)=(z-z_0)\left(z^2+bz+c\right)$

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z)=0$

4) Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$ (unité : 2 cm), on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives i; $2+i$ et -1.

a) Placer les points A. B et C.

b) Soit D l'image de A par la translation de vecteur $\vec{BC}$. Calculer l'affixe de D.

c) Calculer le nombre complexe $Z=\dfrac{z_A}{z_A-z_B}$

Déterminer le module et un argument de Z. En déduire la nature du triangle OAB.

Exercice 2

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, on donne les points

$A(-2;-1;2)$, $B(6;-5;3)$, $C(-1;3;10)$ et le vecteur $\vec{u}$

1.a) Calculer $\vec{AB}\wedge\vec{AC}$ et $\vec{AB}.\vec{AC}$.

b) Interpréter géométriquement ces résultats.

c) Calculer les distances AB et AC.

d) En déduire la nature exacte du triangle ABC.

2) Démontrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{AB}\wedge\vec{AC}$ sont colinéaires.

3) Montrer que $\left\|\vec{AB}\wedge\vec{AC}\right\|=9\left\|\vec{u}\right\|$ et en déduire l'aire du triangle ABC en fonction de la norme de $\vec{u}$.

4) Soit $D(1;1;1)$ un point de l'espace.

a) Les points A, B, C, D sont-ils coplanaires ?

b) Calculer $d(D,(ABC))$ et en déduire le volume en unité de volume, de la pyramide de sommet D et de base le triangle ABC.

Problème

Partie A

On considère la fonction g définie sur IR par $g(x)=(1-x)e^x-1$

1) Etudier les variations de g

2) Calculer $g(0)$. En déduire que pour tout $x\neq0$ on a $g(x)<0$

Partie B

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases}f(x)=\dfrac{x}{e^x-1}+2 \text{ et } x\neq0\\ f(0)=3\end{cases}$$

Scanned by CamScanner

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ unité graphique : 2 cm)

On admettra que f est dérivable en 0 et que $f'(0)=-\frac{1}{2}$

a) Déterminer la limite de f en $-\infty$

) Etablir que $\frac{x}{e^x-1}=\frac{x}{e^x}\times\frac{1}{1-e^{-x}}$ puis déterminer a limite de f en $+\infty$.

En déduire que (C) admet une asymptote orizontale en $+\infty$ dont on donnera l'équation.

. Monter que la droite (D) d'équation $y=-x+2$ st asymptote oblique à la courbe (C) en $-\infty$.

. Calculer pour tout $x\neq 0$, $f'(x)$ et montrer que $f'(x)=\frac{g(x)}{(e^x-1)^2}$.

a) Donner le sens de variation de f

) Dresser le tableau de variations de f

. Soit (T) la tangente à (C) au point d'abscisse ulle, écrire l'équation de (T).

. Tracer (D), (T) et (C).

artie C

oit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=f(x)-x$

. Montrer que l'équation $h(x)=0$ admet une olution unique α et que $\alpha\in]2;2,5[$

. On pose $I=[2;2,5]$

) Démontrer que pour tout $x\in I$, on a $g(x)>-20$ t $(e^x-1)^2\geq 40$

) En déduire que si $x\in I$, $-\frac{1}{2}\leq f'(x)\leq 0$

. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $_0=2$ et $u_{n+1}=f(u_n)$

) Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $_n\in I$

) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{2}|u_n-\alpha|$ et que $|u_n-\alpha|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

) En déduire que suite (u_n) converge vers α

) Déterminer le plus petit entier n_0 tel que pour out $n\geq n_0$, on ait $|u_n-\alpha|\leq 10^{-3}$

n donne : $\ln 2=0,69;\ln 10=2,3;e^2=7,39;e^{2,5}=12,18$

$\frac{1}{^2-1}=0,15$; $\frac{1}{e^{2,5}-1}=0,09$; $(e^2-1)^2=40,83$;

$e^{2,5}-1)^2=125$

sujet 17 Session 2015 2ad tour

Exercice 1

Soit l'équation différentielle (E): $9y''+49y=0$

1 Résoudre (E).

2. Déterminer la solution f de (E) qui vérifie $f(0)=\sqrt{3}$ et $f'(0)=7$

3. Montrer que pour tout réel x, $f(x)=2\sqrt{3}\cos\left(\frac{7}{3}x-\frac{\pi}{3}\right)$

4. Résoudre dans $]0;2\pi[$, l'équation $f(x)=\sqrt{6}$

5. Calculer la valeur moyenne v de la fonction f sur l'intervalle $\left[\frac{3\pi}{14};\frac{3\pi}{7}\right]$

Exercice 2

1. Une urne contient 3 boules jaunes, 2 boules rouges et 5 boules noires. On extrait simultanément 2 boules de l'urne.
Quel est le nombre de résultats possibles.

2. Le tirage d'une boule jaune fait gagner 2 points, celui d'une boule rouge fait gagner 1 point, celui d'une boule noire fait perdre 3 points. On note X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de points obtenus à l'issue d'un tirage simultané de 2 boules.
Déterminer l'ensemble des valeurs que peut prendre X.

3. En supposant tous les tirages équiprobables, déterminer la loi de probabilité de X.

4. Calculer l'espérance mathématique de X.

5. Calculer la variance de X.

N B. On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

Problème

Partie A

On considère l'équation différentielle (E): $y'-3y=\frac{-3e}{(1+e^{-3x})^2}$

On donne une fonction φ dérivable sur IR et la fonction f définie sur IR par $f(x)=e^{-3x}\times\varphi(x)$

1. a) Montrer que f est dérivable sur IR.

b) Exprimer $f'(x)$ en fonction de $\varphi(x)$ et de $\varphi'(x)$

2. Sachant que φ est une solution de (E).

a) Exprimer $f'(x)$ en fonction de x.

b) Déterminer l'expression de $f(x)$ en fonction de x si $f(0)=\frac{e}{2}$.

Partie B

Soit la fonction h définie sur IR par $h(x)=\frac{e^{1-3x}}{1+e^{-3x}}$

Scanned by CamScanner

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité :2cm)

1. Déterminer les limites de h en $-\infty$ et en $+\infty$
   En déduire que (C) admet deux asymptotes dont on donnera des équations.
2. a) Calculer h'(x) en fonction de x.
   b) Déterminer le signe de h'(x). En déduire le sens de variations de h.
   Dresser son tableau de variations.
3. Tracer (C) et ses asymptotes.
4. Pour tout réel $\alpha > 0$, on pose $I_\alpha = \int_0^\alpha h(x)dx$

a) Donner une interprétation graphique de I_α.

b) Calculer I_α en fonction de α.

Déterminer $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} I_\alpha$.

Partie C

Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$U_n = \int_0^1 h(x)e^{\frac{x}{n}}dx$ où h est la fonction définie dans la partie B.

1. a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n > 0$
   b) Etudier le sens de variations de (U_n)
   c) La suite (U_n) est-elle convergente ?
2. a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_1 \le U_n \le e^{\frac{1}{n}}.I_1$
   b) En déduire la limite de la suite (U_n).

On donne $e = 2,7$; $e^3 = 20$.

Sujet 18 2016 1er tour

Exercice 1

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = z^4 - 4(1+i)z^3 + 12iz^2 + 8(1-i)z - 20$

1)a) Ecrire sous forme algébrique $(1-i)^2$ puis en déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 = -2i$

b) Déterminer les nombres b et c pour que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ on ait $P(z) = (z^2+2i)(z^2+bz+c)$.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): P(z) = 0$.

3) le plan est rapporté à un repère orthonormé $(o;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = 1-i$; $z_B = -1+i$; $z_C = 1+3i$ et $z_D = 3+i$.

a) Faire une figure.

b) On pose $Z = \frac{z_{\overrightarrow{BA}}}{z_{\overrightarrow{BC}}}$. Ecrire Z sous la forme algébrique.

c) Interpréter géométriquement le module et un argument de Z.

d) Quelle est la nature exacte du triangle ABC, du quadrilatère ABCD.

Exercice 2

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, on considère les points A(-1 ;1 ;-3) B(-2 ;3 ;-3) C(-2 ;1 ;0).

1) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2) Soit I le point de coordonnées (-1 ; 3 ; 0). Calculer la distance de I au plan (ABC). Les points A, B, C et I sont-ils coplanaires ?
3) a) Calculer A_1 l'aire du triangle ABC en unité d'aire.
   b) Déterminer le volume V (en unité de volume) de la pyramide de sommet I et de base le triangle ABC.

Problème

On considère la fonction numérique Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, on considère les points A(1 ;0 ;0) B(0 ;2 ;0) C(0 ;0 ;3).

1) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$. Soit I le point de coordonnées (1 ; 2 ; 3).
2) Calculer la distance de I au plan (ABC). Les points A, B, C et I sont-ils coplanaires ?
3) a) Calculer A_1 l'aire du triangle ABC en unité d'aire.
   b) Déterminer le volume V (en unité de volume) de la pyramide de sommet I et de base le triangle ABC.

Problème

On considère la fonction numérique f défi

$\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{1+x} & \text{si } x \ge 1 \\ e^{\frac{1}{x-1}} & \text{si } x < 1 \end{cases}$

On note (C) la courbe représentative de f da plan muni d'un repère orthogonal $(o;\vec{i};\vec{j})$ tel $\|\vec{i}\| = 1$ cm et $\|\vec{j}\| = 2$ cm

Partie A

Soit g la fonction définie sur $I = [1;+\infty[$ par $g(x) = 1 + x - x\ln x$.

1) Calculer les limites de g aux bornes de I.
2) Etudier le sens de variation de g et dresse tableau de variation.
3) Démontrer que 'équation $g(x) = 0$ admet u unique solution α sur I. Vérifier que $\alpha \in]3,5$
4) Déduire de ce qui précède le signe de g su

Partie B

1) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2) Etudier la dérivabilité de f en 1. Interpré graphiquement le résultat obtenu.

Scanned by CamScanner

3) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}-\{1\}$ et vérifier que pour tout $x \in I, f'(x) = \dfrac{g(x)}{x(1+x)^2}$.

4) En déduire le signe de $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}-\{1\}$ puis dresser le tableau de variation de f.

5) Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha}$.

6) Construire (C), ses tangentes et ses asymptotes.

Partie C

On pose $J_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1)Calculer J_0

2) Montrer que $J_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) Montrer que (J_n) est décroissante.

4) Montrer que (J_n) est convergente.

5) En utilisant une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n :

$3J_{N+1} + (n+1)J_n = e^3$

6) Déduire les valeurs exactes de J_1 et J_2.

Sujet 19 2016 2nd tour

Exercice 1

Les documents paléontologiques confirmant l'idée d'évolution sont. Parmi les mieux connus figurent les ossements fossiles des ancêtres du cheval actuel. Les longueur du crâne et de la face pour une série d'animaux représentatifs de la lignée des ancêtres du cheval actuel sont consignés dans le tableau suivant

Nom	Longueur du crâne (x_i) en cm	Longueur de la face (y_i) en cm
Eohippus	7,5	10,7
Mesohippus	11	12,8
Merychippus	14,5	18,5
Pliohippus	15,5	22,8
Cheval	21,5	31,2

1)Représenter le nuage de points associé à cette série $(x_i; y_i)$ dans un repère orthonormé $(o;\vec{i};\vec{j})$ unité graphique 0,5 cm)

2) a) Un ajustement affine du nuage de point paraît-il possible ?

b) Déterminer les coordonnées des points moyens partiels G_1 et G_2 correspondant respectivement aux trois premiers points et aux deux derniers.

c) Donner l'équation de la droite (G_1G_2) sous la forme $y = ax + b$ où a et b sont des paramètres à déterminer. Racer cette droite.

3) Estimer la longueur de la face d'un descendant du cheval qui aurait dans des millions d'années, une longueur de 23,2 cm.

Exercice 2

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(o;\vec{i};\vec{j})$.

On considère la courbe paramétrée (Γ) définie par

$\begin{cases} x(t) = t + \ln(1-t) \\ y(t) = te^t \end{cases}, t \in]-\infty;0]$

a)Etudier le sens de variations des fonctions coordonnées x et y sur l'intervalle $]-\infty;0]$.

b) Dresser un tableau de variation conjoint de x et y.

2) a) Déterminer les équations des tangentes à (Γ) aux points $M(0)$ et $M(-1)$; M(t) étant le point de coordonnées $(x(t);y(t))$

b) L'unité étant 2 cm , tracer les tangentes précédentes et la courbe (Γ) dans le repère.

Problème

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = x\left(1+e^{2-x}\right)$

On note (C) sa courbe représentation dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. (Unité : 2 cm).

1) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$h(x) = 1+(1-x)e^{2-x}$

a) Etudier les variations de h (on ne déterminera pas de limites h).

b) En déduire le signe de h(x) sur $\mathbb{R}$.

2) a) Etudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu

c) Soit (Δ) : la droite d'équation $y = x$

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-x]$, puis interpréter le résultat obtenu.

d) Préciser la position de (C) par rapport à la droite (Δ)

3) a) Déterminer $f'(x)$ puis étudier son signe.

b) En déduire les variations de f puis dresser son tableau de variation.

c) Montrer que f réalise une bijection de IR sur un intervalle J à déterminer. On notera f^{-1} la bijection réciproque de f

d) f^{-1} est elle dérivable en 4 ? Dresser le tableau de variation de f^{-1}

e) Construire (C) et (Δ) puis en déduire la courbe (Γ) de f^{-1} dans le même repère.

Partie B

Scanned by CamScanner

1) Calculer $A(\lambda)$ de la partie du plan limitée par la courbe (C) ; la droite (Δ) et les droites d'équations respectives x = 0 et $x = \lambda$, $\lambda \in IR_+^*$

2) Calculer $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} a(\lambda)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu. $e = 2,7$

Sujet 20 2017 1er tour

Exercice 1

1a écrire sous la forme algébrique le complexe $\left(1+i\sqrt{3}\right)^2$

b résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$z^2 + 2z + 19 - 18i\sqrt{3} = 0$

2 résoudre dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ le système suivant :

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = -2 \\ z_1^2 - z_2^2 = -4 + \dfrac{4i\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

3 dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal $(o;\vec{u};\vec{v})$, on désigne par A, B, C et D les points d'affixes respectives a, b, c et d telles que $a = 2 + 3i\sqrt{3}; b = \frac{1}{9}(\bar{a} - 2); c = -a - 2$ et $d = a - b + c$ (où $\bar{a}$ est le conjugué de a).

a)Déterminer les nombres complexes b, c et d puis place les points A, B, C et Ddans le plan complexe.(unité graphique : 2 cm et $\sqrt{3} \approx 1,7$)

b) Comparer $a + c$ et $b + d$. En déduire la nature du quadrilatere ABCD

c) Calculer et interpréter géométriquement un argument et un module du nombre complexe $Z = \dfrac{c-a}{d-b}$ Préciser alors la nature exacte de ABCD.

Exercice 2

Une urne contient 12 boules numérotés de 1 à 12. Tous les boules ont la même probabilité d'être tirées. On tire simultanément 3 boules de l'urne.

1)D »terminer le nombre de tirages possibles.

2) Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

A : ''Les nombres portés par ces trois boules sont tous des nombres premiers''

B :'' 'Les nombres portés par ces trois boules sont tous divisibles par 3''

C :''Deux boules portent un numéro divisible par 3''

D :''Les trois numéros sont multiples de 2''

E :''les trois nombres portés par ces boules, convenablement rangés forment trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 3''

Problème

On considère la fonction numérique f de IR par : $\begin{cases} f(x) = x\sqrt{3-x} + 1 \text{ si } x \leq 3 \\ f(x) = e^{3-x} + x - 3 \text{ si } x > 3 \end{cases}$

On désigne par (C) la courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(o;\vec{i};\vec{j})$ $(o;\vec{i};\vec{j})$ (Unité graphique :2 cm)

Partie A

1)a)Etudier la continuité de f en 3

b)Etudier la dérivabilité de f en et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

b) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{f(x)}{x}\right)$. Que peut-on en déduire pour la courbe (C)?

3) a) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est une asymptote à (C) en $+\infty$. Préciser la position de (C) par rapport à (D) dans $[3;+\infty[$

b) Etudier la position de (C) par rapport à (Δ) d'équation $y = x + 1$ sur $[0;2]$

4) a) Calculer $f'(x)$ pour tous $x \neq 3$ et étudier son signe.

b) En déduire le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.

5) a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans IR une unique solution α. Vérifier que $-1 < \alpha < 0$

b) Construire la courbe (C), les droites (Δ) et les demi-tangentes au point d'abscisse 3

Partie B

1)Calculer l'aire A en cm², de la partie du plan délimitée par la courbe (C), la droite (Δ) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$ (on pourra faire une intégration par parties)

2) On considère un point mobile M dont les coordonnées sont données en fonction du temps t par : $\begin{cases} x(t) = 3 - e^{2t} \\ y(t) = 3e^{t} - 3e^{3t} + 1 \end{cases}, t \geq 0$

Montrer que la trajectoire de M est une partie de (C) que l'on précisera.

Sujet 21 2017 2nd tour

Exercice 1

On considère la suite numérique (U_n) définie dans $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = \dfrac{1}{2} \\ U_{n+1} = \dfrac{3U_n}{1 + 2U_n} \end{cases}$

On admet $U_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Scanned by CamScanner

)Démontrer par récurrence que pour tout entier aturel $n, U_n < 1$

) Démontrer que (U_n) est croissante et convergente

) On pose $V_n = \frac{U_n}{1-U_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

) Démontrer que (V_n) est une suite géométrique ont on précisera la raison et le premier terme.

) Exprimer V_n en fonction de n. en déduire que $V_n = \frac{3^n}{1+3^n}$

) Calculer la limite de (U_n)

xercice 2

ans le plan muni d'un repère orthonormal $(o;\vec{i};\vec{j})$ unité graphique 6 cm, on considère la courbe (C) e représentation paramétrique :

$x(t) = \cos t$

$y(t) = \frac{\sin^2 t}{2+\sin t}$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$

)On note M(t) le point de coordonnées $(x(t);y(t))$

Comparer les points M(t) et M$(\pi - t)$

En déduire que l'on peut restreindre le domaine étude de (C) à $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

a) Montrer que $y'(t) = \frac{\sin t \cos t(4+\sin t)}{(2+\sin t)^2}$

Etudier le sens de variation de x et y sur $\left[\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]$

Dresser le tableau de variation conjoint de x et y r $\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]$

Tracer (C) après avoir placé les points marquables avec les tangentes associées.

roblème

n considère la fonction numérique f définie sur par : $f(x) = \begin{cases} (x+1)e^{1-x} \text{ si } x \le 1 \\ \frac{2}{x} - \ln x \text{ si } x > 1 \end{cases}$

n note (C) la courbe représentative de f dans le an muni d'un repère orthonormal $(o;\vec{i};\vec{j})$. (Unité aphique : 2 cm)

rtie A

a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)$. Que peut-on en déduire pour lacourbe (C).

c) Etudier la continuité de f en 1

2) a) On pose $X = 1 - x$

Démontrer que pour tout $x < 1$,

$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -2\left(\frac{e^X - 1}{X}\right) + e^X$

b) On pose $X = x - 1$

démontrer que pour tout $x < 1$,

$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{-2}{X+1} - \frac{\ln(X+1)}{X}$

c) Etudier la dérivabilité de f en 1. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3) a) D »termine $f'(x)$ pour tout $x \neq 1$, puis étudier son signe.

b) En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

4) a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]1;+\infty[$

Vérifier que $2,3 < \alpha < 2,4$

b) Résoudre dans $]-\infty;1]$, l' équation $f(x) = 0$

5) Construire la courbe (C) et ses demi-tangentes

Partie B

1)Calculer l'intégrale $\int_1^\alpha \ln x dx$ à l'aide d'une intégration par parties

2) Soit l'aire en cm² du domaine plan délimité par les droites d' équations $x = 1; x = \alpha$, l'axe des abscisses et la courbe (C).

Démontrer que :

a) $A = (8 - 4\alpha)\ln\alpha + 4\alpha - 4$

b) $A = 4\alpha + \frac{16}{\alpha} - 12$

3) On considère un point mobile M dont les coordonnées sont données en fonction du parmètre t par : $\begin{cases} x(t) = e^t \\ y(t) = -t + 2e^{-t} \end{cases}, t \ge 0$

Montrer que la trajectoire de M est une partie de (C) que l'on préciséra.

Données numériques :

$e = 2,7; \frac{2}{2,3} = 0,87; \frac{2}{2,4} = 0,83; \ln(2,3) = 0,83$ et $\ln(2,4) = 0,88$

Scanned by CamScanner

Exercice 1

1. Ecrivons a sous la forme algébrique.

$$a=\frac{5+3i\sqrt{3}}{2\left(1-2i\sqrt{3}\right)}=\frac{\left(5+3i\sqrt{3}\right)\left(1+2i\sqrt{3}\right)}{2\left(1^2+4\times3\right)}=\frac{5+10i\sqrt{3}+3i\sqrt{3}-18}{26}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$$

D'où $\boxed{a=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}$

2. Vérifions que $a^2=\overline{a}$

$$a^2=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=\overline{a}$$

D'où $a^2=\overline{a}$

En déduisons a^3

$$a^2=\overline{a}\Leftrightarrow a^3=\overline{a}a=\left[\mathrm{Re}(a)\right]^2+\left[\mathrm{Im}(a)\right]^2=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1\ ;$$

d'où $a^3=1$

Montrons que $1+a+a^2=0$

$a^2=\overline{a}$ donc

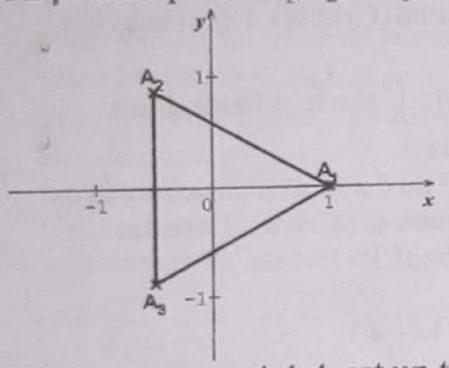
$$1+a+a^2=1+a+\overline{a}=1+2\times\mathrm{Re}(a)=1+2\left(-\frac{1}{2}\right)=1-1=0$$

D'où $1+a+a^2=0$

3. a. Coordonnées de $A_1;A_2$ et A_3

$A_1(1;0);A_2\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $A_3\left(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Plaçons les points $A_1;A_2$ et A_3 dans le repère.



b. Montrons que $A_1A_2A_3$ est un triangle équilatéral.

$$A_1A_2=|1-a|=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}}=\sqrt{\frac{12}{4}}=\sqrt{3}$$

$$A_1A_3=\left|1-a^2\right|=\left|1-\overline{a}\right|=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}}=\sqrt{\frac{12}{4}}=\sqrt{3}$$

$$A_2A_3=\left|a-\overline{a}\right|=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{3}$$

On a $A_1A_2=A_1A_3=A_2A_3$ donc $A_1A_2A_3$ est un triangle équilatéral

Exercice 2

1. Pour $z=\frac{1+i}{2}$. Ecrivons Z sous la forme algébrique.

$$Z=\frac{z}{z-1}=\frac{\frac{1+i}{2}}{\frac{1+i}{2}-1}=\frac{1+i}{-1+i}=\frac{(1+i)(-1-i)}{2}=\frac{-2i}{2}$$

Pour $z=\frac{1+i}{2}$; $Z=-i$

b. Montrons que si Z est réel alors z est réel.

Z réel $\Leftrightarrow Z=\overline{Z}$;

$$Z=\overline{Z}\Leftrightarrow\frac{z}{z-1}=\overline{\left(\frac{z}{z-1}\right)}\Leftrightarrow\frac{z}{z-1}=\frac{\overline{z}}{\overline{z}-1}$$

$$\frac{z}{z-1}=\frac{\overline{z}}{\overline{z}-1}\Leftrightarrow z\left(\overline{z}-1\right)=\overline{z}\left(z-1\right)\Leftrightarrow z\overline{z}-z=z\overline{z}-\overline{z}$$

soit $z=\overline{z}$ ce qui signifie z est réel. D'où si Z réel alors z est aussi réel.

2. Montrons que $X=\frac{x^2+y^2-x}{(x-1)^2+y^2}$ et $Y=\frac{-y}{(x-1)^2+y^2}$

$$Z=\frac{z}{z-1}\Leftrightarrow X+iY=\frac{x+iy}{x+iy-1}=\frac{(x+i2y)(x-1-iy)}{(x-1)^2+y^2}$$

$$=\frac{x^2-x-ixy+ixy-iy+y^2}{(x-1)^2+y^2}=\frac{x^2+y^2-x}{(x-1)^2+y^2}+i\frac{-y}{(x-1)^2+y^2}$$

D'où $X=\frac{x^2+y^2-x}{(x-1)^2+y^2}$ et $Y=\frac{-y}{(x-1)^2+y^2}$

3. Déterminons l'ensemble (D)

Z est réel $\Leftrightarrow Y=0$

$$Y=0\Leftrightarrow\frac{-y}{(x-1)^2+y^2}=0\Leftrightarrow y=0\text{ et }x-1\neq0$$

Donc l'ensemble (D) est la droite d'équa privé du point de coordonnées $(1;0)$

Déterminons l'ensemble (C)

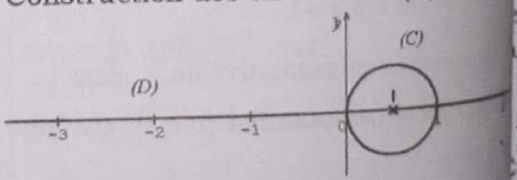
Z est imaginaire pur $\Leftrightarrow X=0$

$$X=0\Leftrightarrow\frac{x^2+y^2-x}{(x-1)^2+y^2}=0\Leftrightarrow x^2+y^2-x=0\text{ et }x-1\neq0$$

$$x^2+y^2-x=0\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2-\frac{1}{4}=0\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+$$

Donc l'ensemble (C) est le cercle de cent et de rayon $\frac{1}{2}$ privé du de coordonnées

Construction des ensembles (D) et (C)



Scanned by CamScanner

Exercice 3

a. $z = 1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

$z^2 = 4e^{-i\frac{2\pi}{3}} = -2 - 2i\sqrt{3}$, $z^3 = 8e^{-i\frac{3\pi}{3}} = -8$.

Comme on tourne à chaque fois de 60°, tous les exposants multiples de 3 ramèneront sur l'axe réel (un coup positif, un coup négatif) ; tous les multiples de 3 +1 (comme 1, 4, 7, ...) seront sur la droite issue de O et passant par z, enfin tous les multiples de 3 + 2 seront sur la droite issue de O passant par z^2.

1992 est un multiple de 6 (3x332), on a $z^{1992} = 2^{1992}e^{-332i\pi} = 2^{1992}$, et

$z^{1994} = 2^{1994}e^{-i\frac{2\pi}{3}} = 2^{1994}(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})$.

b. $z^3 + 8 = 0$ a comme racine évidente −2 ; on factorise z + 2 : $z^3 + 8 = (z+2)(az^2 + bz + c)$ ce qui donne en développant et identifiant les coefficients : $z^3 + 8 = (z+2)(z^2 - 2z + 4)$.

Les autres racines sont alors :

$z_1 = 1 + i\sqrt{3}, z_2 = 1 - i\sqrt{3}$.

Pour résoudre $(iz-1)^3 + 8 = 0$ on reprend l'équation précédente avec le changement d'inconnue $Z = iz - 1$, ce qui donne les solutions en Z ; on revient en arrière pour les solutions en z.

$Z = iz - 1 \Leftrightarrow iz = Z + 1 \Leftrightarrow z = \dfrac{Z+1}{i} = -iZ - i$ d'où les trois solutions :

$z_0 = -i(-2) - i = i$, $z_1 = -i(1 + i\sqrt{3}) - i = \sqrt{3} - 2i$ et

$z_2 = -i(1 - i\sqrt{3}) - i = -\sqrt{3} - 2i$.

Exercice 4

1. Soit on développe brutalement en utilisant le binôme de Newton, soit on calcule d'abord $(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$, ce qui donne $(1+i)^6 = (2i)^3 = -8i$. Une autre possiblité était de mettre 1 + i sous forme trigonométrique :

$1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ d'où $(1+i)^6 = \sqrt{2}^6 e^{i6\frac{\pi}{4}} = 8e^{i\frac{3\pi}{2}} = -8i$.

2. a. Comme $(1+i)^6 = -8i$, on a $\left[(1+i)^3\right]^2 = -8i$ — donc $(1+i)^3$ est une solution. On peut développer et trouver −2 + 2i.

b. D'une manière générale l'équation $z^2 = u$ a les deux solutions $z = \sqrt{u}$ et $z = -\sqrt{u}$, soit ici l'autre racine $z = -(1+i)^3 = -(1+i)^2(1+i) = -2i(1+i) = 2 - 2i$.

3. De la même manière on peut écrire $(1+i)^6 = \left[(1+i)^2\right]^3$ donc $(1+i)^2$ est une solution de (E') (on peut simplifier et trouver 2i).

4. a. La définition de r donne : $z \to z' = e^{i\frac{2\pi}{3}}z$, soit avec 2$i$: $b = 2ie^{i\frac{2\pi}{3}} = 2i\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3} - i$; puis pour C :

$c = be^{i\frac{2\pi}{3}} = 2ie^{i\frac{2\pi}{3}}e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2ie^{i\frac{4\pi}{3}} = 2i\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3} - i$.

b. En utilisant la forme trigonométrique on a :

$b^3 = \left(2ie^{i\frac{2\pi}{3}}\right) = -8ie^{i\frac{6\pi}{3}} = -8i$ et la même chose pour c.

5. a. b. c. : La rotation de centre O d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ transforme A en B, B en C et C en A donc le triangle ABC est équilatéral de centre O qui est donc son centre de gravité.

Exercice 5

a.

$$z^2 = \left(-\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2$$
$$= 2 + \sqrt{2} - 2i\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2-\sqrt{2}} + i^2(2-\sqrt{2})$$
$$= 2 + \sqrt{2} - 2i\sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} - 2 + \sqrt{2}$$
$$= 2\sqrt{2} - 2i\sqrt{4-2} = 2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}.$$

b. $z^2 = 2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2} = 4\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

c.

$$z^2 = 4e^{-i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow |z^2| = |z|^2 = 4 \Leftrightarrow |z| = 2, \arg(z^2) = -\frac{\pi}{4}[2\pi]$$
$$\Leftrightarrow 2\arg(z) = -\frac{\pi}{4}[2\pi] \Leftrightarrow \arg(z) = -\frac{\pi}{8}[\pi]$$

Sur $[-\pi ; \pi[$, on aurait soit $z_1 = 2e^{-i\frac{\pi}{8}}$, soit $z_2 = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{8}+\pi\right)} = 2e^{i\frac{7\pi}{8}}$.

Le signe de la partie réelle et de la partie imaginaire de z donné dans l'énoncé nous donne $z = z_2 = 2e^{i\frac{7\pi}{8}}$.

Exercice 6

1. $z^2 - 8z\sqrt{3} + 64 = 0$: $\Delta = 64.3 - 4.64 = -64 = (8i)^2$ d'où $z_1 = \dfrac{8\sqrt{3} + 8i}{2} = 4\sqrt{3} + 4i$ ou $z_2 = 4\sqrt{3} - 4i$.

2. a. $a = 4\sqrt{3} - 4i = 8\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right) = 8e^{-i\frac{\pi}{6}}$ et $b = 4\sqrt{3} + 4i$.

$b = 4\sqrt{3} + 4i = 8\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right) = 8e^{i\frac{\pi}{6}}$.

b. Il est immédiat que $OA = OB = 8$; $AB = |b - a| = |4\sqrt{3} + 4i - 4\sqrt{3} + 4i| = |8i| = 8$. OAB est équilatéral.

Scanned by CamScanner

3.

$r : z \to z' = e^{-i\frac{\pi}{3}} z \Rightarrow d = e^{-i\frac{\pi}{3}}(-\sqrt{3}+i) = e^{-i\frac{\pi}{3}} 2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$

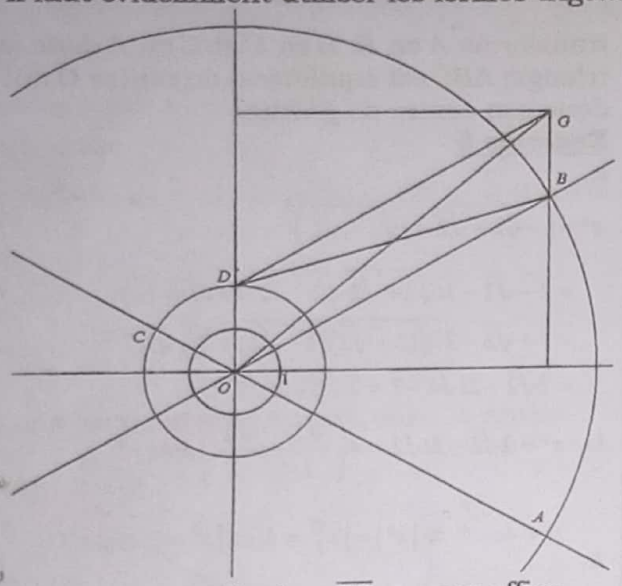
$= 2e^{-i\frac{\pi}{3}} e^{i\frac{5\pi}{6}} = 2e^{i\frac{3\pi}{6}} = 2i$

(on peut le faire évidemment en utilisant les coordonnées cartésiennes).

4. a. G : barycentre de $(O\,;-1)$, $(D\,;+1)$, $(B\,;+1)$ existe car la somme des coefficients n'est pas nulle. Son affixe est

$z_G = \frac{1}{-1+1+1}(-1.z_O + 1.z_D + 1.z_B) = d + b = 2i + 4\sqrt{3} + 4i = 4\sqrt{3} + 6i$

b. Il faut évidemment utiliser les formes trigo...



c. C, D et G sont alignés : $\overline{CD}$ a pour affixe $d-c = 2i-(-\sqrt{3}+i) = \sqrt{3}+i$ et $\overline{DG}$ a pour affixe $g-d = 4\sqrt{3}+6i-2i = 4\sqrt{3}+4i = 4(d-c)$ donc $\overline{DG} = 4\overline{CD}$.

d. Appelons K le milieu de $[BD]$, alors G est le barycentre de $(O\,;-1)$, $(K\,;2)$ d'où

$\overline{OG} = \frac{2}{-1+2}\overline{OK} \Leftrightarrow \overline{OG} = 2\overline{OK}$, donc K est le milieu de $[OG]$. Mêmes milieux donc parallélogramme.

Exercice 7

1. a. iy solution de l'équation $P(z) = 0$, soit $P(iy) = 0$, soit

$-iy^3 - (1-i\sqrt{2})y^2 + (74 - i\sqrt{2})iy - 74i\sqrt{2} = 0$

$\Leftrightarrow (y^2 + \sqrt{2}y) + i(-y^3 + \sqrt{2}y^2 + 74y - 74\sqrt{2}) = 0$

Ceci donne le système

$\begin{cases} y^2 + \sqrt{2}y = 0 \\ -y^3 + \sqrt{2}y^2 + 74y - 74\sqrt{2} = 0 \end{cases}$; la première ligne donne comme solutions $y = 0$ qui ne convient pas dans la seconde ligne et $y = -\sqrt{2}$ qui convient.

b.

$P(z) = (z - i\sqrt{2})(z^2 + az + b) = (z - i\sqrt{2})(z$

c. $P(z) = 0$: $z^2 + z + 74 = 0$,

$\Delta = 1 - 296 = -295 = i^2 \times 5 \times 59$ d'où les ra

$z_1 = i\sqrt{2}$, $z_2 = \frac{-1+i\sqrt{295}}{2}$, $z_3 = \frac{-1-i}{2}$

2. b. $z' = e^{i\frac{\pi}{4}} z_J = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) i\sqrt{2} = -1+i$.

c. $ABCN$ est un parallélogramme si

$\overline{AB} = \overline{NC} \Leftrightarrow z_N = z_A - z_B + z_C = 7 + 5i - 7 + 5$

d. Calculer

$Z = \frac{z_A - z_C}{z_D - z_B} = \frac{-7+5i-1-i}{1+11i+7+5i} = \frac{-8+4i}{8+16i} = \frac{(-2+i}{4}$

$= \frac{10i}{20} = \frac{1}{2}$

On a donc $(\overline{BD}, \overline{CA}) = \frac{\pi}{2}$ donc les droit

(BD) sont perpendiculaires ; comme A un parallélogramme, c'est un losange.

Exercice 8

Partie A

1. $\begin{cases} z_1\sqrt{3} - z_2 = -2 \\ z_1 - z_2\sqrt{3} = -2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1\sqrt{3} - z_2 = -2 \\ -z_1\sqrt{3} + z_2 3 = 2\sqrt{3}i \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2z_2 = -2 + 2i\sqrt{3} \\ z_1\sqrt{3} - z_2 = -2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} z_2 = -1 + i\sqrt{3} \\ z_1 = \frac{-3+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3} + i \end{cases}$

2. $z_A = -\sqrt{3} + i = 2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ et

$z_B = -1 + i\sqrt{3} = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

3. $\frac{z_A}{z_B} = \frac{2e^{i\frac{5\pi}{6}}}{2e^{i\frac{2\pi}{3}}} = e^{i\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{2\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{\pi}{6}}$ donc modu

argument $\frac{\pi}{6}$.

Le triangle ABO est isocèle en O puisqu

$|z_A| = |z_B|$ et $(\overline{OA}, \overline{OB}) = \arg\frac{z_B}{z_A} = -\frac{\pi}{6}$.

4. On doit avoir $\overline{AC} = \overline{OB}$, soit

$z_C - z_A = z_B - Z_O \Leftrightarrow z_C = z_A + z_B = -1 - \sqrt{3} + i($

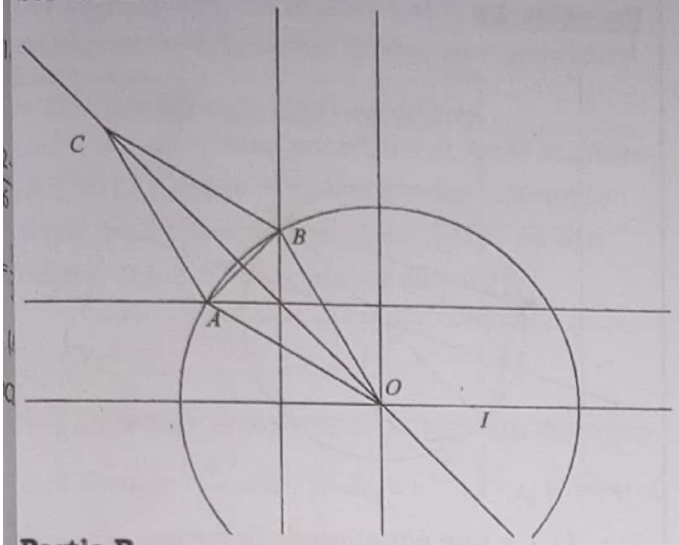
$= (\sqrt{3}+1)(-1+$

L'aire du triangle ABC est :

Scanned by CamScanner

$$\frac{AB}{2}\times\frac{OC}{2}=\frac{1}{4}|z_B-z_A||z_C-z_O|$$
$$=\frac{1}{4}\left|-1+i\sqrt{3}+\sqrt{3}-i\right|\left|\left(\sqrt{3}+1\right)(-1+i)\right|$$
$$=\frac{1}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)|1+i|\left(\sqrt{3}+1\right)|-1+i|$$
$$=\frac{1}{4}\times 2\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}=1,$$

soit 16 cm².



Partie B

1. $z'=e^{-i\frac{\pi}{6}}z$: rotation de centre O, d'angle $-\frac{\pi}{6}$.

2. $z_{A'}=z_B$, $z_{B'}=2i$, $z_{C'}=\left(\sqrt{3}+1\right)\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
$=\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)e^{i\frac{3\pi}{4}}$

3. L'aire du triangle $A'B'C'$ est évidemment la même que celle de ABC...

Exercice 9

1. $(1-\sqrt{2})^2=1-2\sqrt{2}+2=3-2\sqrt{2}$.

2. $z^2-(1+\sqrt{2})z+\sqrt{2}=0$:
$\Delta=(1+\sqrt{2})^2-4\sqrt{2}=1+2\sqrt{2}+2-4\sqrt{2}=1-2\sqrt{2}+2=(1-\sqrt{2})^2$

d'où $z_1=\frac{1+\sqrt{2}+1-\sqrt{2}}{2}=1$ et $z_2=\frac{1+\sqrt{2}-1+\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$.

3. (1) : $z+\frac{1}{z}=1\Leftrightarrow z^2-z+1=0$, soit

$z_1'=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, $z_2'=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$;

(2): $z+\frac{1}{z}=\sqrt{2}\Leftrightarrow z^2-\sqrt{2}z+1=0$ soit

$z_1''=\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}$, $z_2''=\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}$.

4. $P(z)=z^4-(1+\sqrt{2})z^3+(2+\sqrt{2})z^2-(1+\sqrt{2})z+1$; on développe

$$\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-(1+\sqrt{2})\left(z+\frac{1}{z}\right)+\sqrt{2}$$
$$=z^2+2z\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-(1+\sqrt{2})z-(1+\sqrt{2})\frac{1}{z}+\sqrt{2}$$

on met au même dénominateur et on simplifie :

$$\frac{z^4+2z^2+1-(1+\sqrt{2})z^3-(1+\sqrt{2})z+\sqrt{2}z^2}{z^2}$$
$$=\frac{z^4-(1+\sqrt{2})z^3+(2+\sqrt{2})z^2-(1+\sqrt{2})z+1}{z^2}$$

En faisant le changement de variable $z+\frac{1}{z}=Z$ on a l'équation $Z^2-(1+\sqrt{2})Z+\sqrt{2}=0$ qui a donc les solutions $Z_1=1, Z_2=\sqrt{2}$. Il reste à revenir sur z, ce qui donne les deux équations du 3. et donc les quatre solutions z_1', z_2', z_1'', z_2''.

Exercice 10

1. On remplace z par i, soit $-1+3-2=0$. Ok. $z=i$ est solution de (E) donc on factorise par $(z-i)$ et on obtient $z^2-3iz-2=(z-i)(z-2i)$.

2. $M(z)$ est invariant, si et seulement si :
$$z=\frac{z+2}{z+1-3i}\Leftrightarrow z(z+1-3i)=z+2$$
$$\Leftrightarrow z^2+z-3iz=z+2$$
$$\Leftrightarrow z^2-3iz-2=0\Leftrightarrow z=i \text{ ou } z=2i$$
Les points $M_1(i)$ et $M_2(2i)$ sont invariants par f.

3. Dire que M' appartient au cercle de centre 0 et de rayon 1 est équivalent à écrire $|z'|=1$.
$$|z'|=1\Leftrightarrow\left|\frac{z+2}{z+1-3i}\right|=1\Leftrightarrow|z+2|=|z+1-3i|\Leftrightarrow BM=AM$$
car $|z+2|=|z-(-2)|=|z-z_B|=BM$ et
$|z+1-3i|=|z-(-1+3i)|=|z-z_A|=AM$.
Cela revient donc à chercher l'ensemble des points M tels que $BM=AM$, ce sont les points équidistants de A et de B, c'est-à-dire la médiatrice du segment $[AB]$.

4.
$$z'=\frac{z+2}{z+1-3i}=\frac{x+iy+2}{x+iy+1-3i}=\frac{x+2+iy}{x+1+i(y-3)}$$
$$=\frac{(x+2+iy)(x+1-i(y-3))}{(x+1)^2+(y-3)^2}$$
$$=\frac{x^2+x-ix(y-3)+2x+2-2i(y-3)+ixy+iy+y(y-3)}{(x+1)^2+(y-3)^2}$$
$$=\frac{x^2+x+2x+2+y(y-3)}{(x+1)^2+(y-3)^2}+i\frac{-x(y-3)-2(y-3)+xy+y}{(x+1)^2+(y-3)^2}$$

Soit pour la partie imaginaire :
$$\frac{-x(y-3)-2(y-3)+xy+y}{(x+1)^2+(y-3)^2}=\frac{-xy+3x-2y+6+xy+y}{(x+1)^2+(y-3)^2}$$
$$=\frac{3x-y+6}{(x+1)^2+(y-3)^2}$$

Scanned by CamScanner

M appartient à l'axe des abscisses, si et seulement si la partie imaginaire de z est nulle, c'est-à-dire $3x-y+6=0$ (avec $(x\,;\,y)\neq(-1\,;\,3)$), ou encore M appartient à la droite d'équation $y=3x+6$ privée du point de coordonnées $(-1\,;\,3)$.

5. a. Avant de commencer le calcul, il est impératif de se familiariser avec les valeurs z_C et $\overline{z}_C$.

$$z_C=-\frac{3-3i}{2}=\frac{-3+3i}{2} \text{ et } \overline{z_C}=-\frac{3+3i}{2}=\frac{-3-3i}{2}.$$

$$\frac{z+2}{z+1-3i}=-\frac{\overline{z}+2}{\overline{z}+1+3i}\Leftrightarrow(z+2)(\overline{z}+1+3i)=-(\overline{z}+2)(z+1-3i)$$
$$\Leftrightarrow z\overline{z}+z(1+3i)+2\overline{z}+2(1+3i)=-z\overline{z}-\overline{z}(1-3i)-2z-2(1-3i)$$
$$\Leftrightarrow 2z\overline{z}+z(1+3i+2)+\overline{z}(2+1-3i)+2(1+3i+1-3i)=0$$
$$\Leftrightarrow 2z\overline{z}+z(3+3i)+\overline{z}(3-3i)+4=0$$
$$\Leftrightarrow z\overline{z}+z\left(\frac{3+3i}{2}\right)+\overline{z}\left(\frac{3-3i}{2}\right)+2=0$$
$$\Leftrightarrow z\overline{z}-z\times\left(\frac{-3-3i}{2}\right)-\overline{z}\left(\frac{-3+3i}{2}\right)+2=0$$
$$\Leftrightarrow z\overline{z}-z\times\overline{z_C}-\overline{z}\times z_C+2=0.$$

Raisonnons avec le deuxième membre de l'équivalence de départ :

$$(z-z_C)(\overline{z-z_C})=\frac{5}{2}\quad\Leftrightarrow(z-z_C)(\overline{z}-\overline{z_C})=\frac{5}{2}$$
$$\Leftrightarrow z\overline{z}-z\times\overline{z_C}-\overline{z}\times z_C+z_C\times\overline{z_C}=\frac{5}{2}$$

Il ne reste à montrer que $z_C\times\overline{z_C}-\frac{5}{2}=2$:

on peut calculer

$$z_C\times\overline{z_C}=|z_C|^2=\left(\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)=\left(\frac{9}{4}+\frac{9}{4}\right)=\frac{9}{2}$$ d'où

l'égalité : $z_C\times\overline{z_C}-\frac{5}{2}=\frac{9}{2}-\frac{5}{2}=2$.

b. On remarque que $z'=\frac{z+2}{z+1-3i}$ et donc que

$$\overline{z'}=\overline{\left(\frac{z+2}{z+1-3i}\right)}=\frac{\overline{z+2}}{\overline{z+1-3i}}=\frac{\overline{z}+2}{\overline{z}+1+3i}.$$

$$\frac{z+2}{z+1-3i}=-\frac{\overline{z}+2}{\overline{z}+1+3i}\Leftrightarrow z'=-\overline{z'}\Leftrightarrow z'+\overline{z'}=0\Leftrightarrow x'=0.$$

En effet, si $z'=x'+iy'$, alors

$$z'+\overline{z'}=x'+iy'+x'-iy'=2x'$$

L'équivalence devient donc :

z' est un imaginaire pur équivaut à

$(z-z_C)(\overline{z-z_C})=\frac{5}{2}$, autrement dit

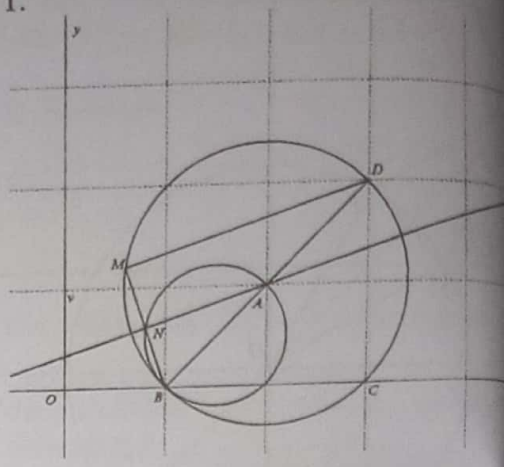
$$z_{\overrightarrow{CM}}\times\overline{z_{\overrightarrow{CM}}}=\frac{5}{2}\Leftrightarrow\left|z_{\overrightarrow{CM}}\right|^2=\frac{5}{2}\Leftrightarrow\left|z_{\overrightarrow{CM}}\right|=\sqrt{\frac{5}{2}}\Leftrightarrow CM=\sqrt{\frac{5}{2}}.$$

M appartient donc au cercle de centre C de rayon $\sqrt{\frac{5}{2}}$ (privé de A). En effet

$$AC=\left|z_{\overrightarrow{AC}}\right|=|z_C-z_A|=\left|-\frac{3-3i}{2}+1-3i\right|$$
$$=\left|\frac{-3+3i+2-6i}{2}\right|=\left|\frac{-1-3i}{2}\right|$$
$$=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{9}{4}}=\sqrt{\frac{5}{2}}.$$

Exercice 11

1.



2. a. (Γ) a une équation de la forme

$(x-2)^2+(y-1)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2=2$.

$$M(x\,;y)\in(\Gamma)\cap(O\,;\vec{u})\Leftrightarrow\begin{cases}(x-2)^2+(y-1)^2\\ y=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-2)^2=1\\ y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\ y=0\end{cases}$$

Par conséquent, les affixes des points d'intersection de (Γ) et de l'axe $(O\,;\vec{u})$ sont respectivement 1 et 3.

b. D est diamétralement opposé à B sur (Γ) donc $\overline{AD}=\overline{BA}$, d'où $z_D-z_A=z_A-z_B$, soit $z_D=2z_A-z_B=2(2+i)-1=3+2i$.

D a pour affixe $3+2i$.

3.a $$\frac{z_D-z_M}{z_B-z_M}=\frac{(3+2i)-\left(\frac{3}{5}+\frac{6}{5}i\right)}{1-\left(\frac{3}{5}+\frac{6}{5}i\right)}=\frac{\frac{2}{5}(6+2i)}{\frac{2}{5}(1-3i)},$$

$$=\frac{(6+2i)(1+3i)}{1^2+3^2}=\frac{20i}{10}=2i$$

d'où $\frac{z_D-z_M}{z_B-z_M}=2i$.

b. Un argument de $\frac{z_D-z_M}{z_B-z_M}$ est une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MD}\right)$.

$\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MD}\right)=\arg(2i)=\frac{\pi}{2}+2k\pi\ \ (k\in\mathbb{Z})$; le triangle BMD est rectangle en M ; M appartient

Scanned by CamScanner

cercle de diamètre $[BD]$, le point M appartient au cercle (Γ).

4. a. Comme N appartient au cercle (Γ'), le triangle ANB est rectangle en N, les droites (AN) et (BM) sont donc orthogonales.
De plus les droites (MD) et (BM) sont orthogonales d'après la question précédente.
Par conséquent, les droites (AN) et (MD), orthogonales à la même droite, sont parallèles entre elles.

b. Dans le triangle BMD les droites (AN) et (MD) sont parallèles et A est le milieu de $[BD]$; d'après le théorème des milieux la droite (AN) coupe le segment $[MB]$ en son milieu. Donc N est le milieu de $[MB]$,

$$z_N = \frac{z_B + z_M}{2} = \frac{1+\left(\frac{3}{5}+\frac{6}{5}i\right)}{2} = \frac{4}{5}+\frac{3}{5}i .$$

5. a L'écriture complexe de la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ est : $z'-z_B = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z-z_B)$, c'est-à-dire $z' = -iz+1+i$. Alors

$$z_{M'} = -i\left(\frac{3}{5}+\frac{6}{5}i\right)+1+i = \frac{11}{5}+\frac{2}{5}i .$$

b.
$$\overline{AM'}\,\overline{BM'} = \left(\frac{11}{5}-2\right)\left(\frac{11}{5}-1\right)+\left(\frac{2}{5}-1\right)\left(\frac{2}{5}-0\right)$$
$$= \frac{1}{5}\times\frac{6}{5}+\left(-\frac{3}{5}\right)\times\frac{2}{5} = \frac{6}{25}-\frac{6}{25} = 0$$

Le triangle ABM' est rectangle en M' et est inscrit dans le cercle de diamètre $[AB]$. Par conséquent, le point M' appartient au cercle (Γ').

Exercice 12

1. $M=f(M)$, soit $z = \frac{z-1}{z+1} \Leftrightarrow z^2+z = z-1 \Leftrightarrow z^2 = -1 \Leftrightarrow z = +i$ ou $z = -i$. Il y a donc deux points invariants : (0;1) et (0;-1)

2. a.
$$(z'-1)(z+1) = \left(\frac{z-1}{z+1}-1\right)(z+1) = \frac{z-1-z-1}{z+1}(z+1) = -2$$
pour tout nombre z différent de -1.

b. En passant la relation précédente au module, on a : $|z'-1||z+1| = |-2| \Leftrightarrow |z'-1| = \frac{2}{|z+1|}$; de même en passant à l'argument :
$\arg(z'-1)+\arg(z+1) = \arg(-2) = \pi$
$\Leftrightarrow \arg(z'-1) = \pi - \arg(z+1)$

c. Ceci se traduit par : $AM' = \frac{2}{BM}$ et $(\vec{u};\overrightarrow{AM'})+(\vec{u};\overrightarrow{BM}) = \pi$.

3. Si M appartient au cercle (C) de centre B et de rayon 2, alors $BM = 2$ d'où $AM' = \frac{2}{BM} = \frac{2}{2} = 1$ (d'après la question 2.c)) donc $AM' = 2$ donc M' appartient au cercle (C') de centre A et de rayon 1.

4. a. $p+1 = -1+i\sqrt{3} = 2\left(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

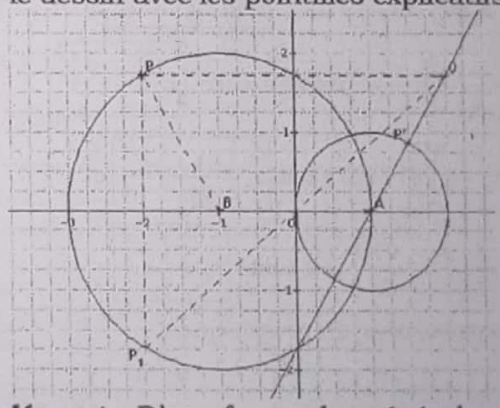
b. On a $|p+1| = 2$ car $|e^{i\theta}| = 1$ donc P appartient au cercle (C). (on se sert du 4.a. évidemment)

c. $q = -\overline{p} = -\left(-2-i\sqrt{3}\right) = 2+i\sqrt{3} \Rightarrow q+1 = 3+i\sqrt{3}$; par ailleurs comme P appartient au cercle (C) donc son image P' appartient au cercle (C') d'après la question 3. (ou encore $AP' = 1$).

D'autre part : $(\vec{u};\overrightarrow{AP'}) = \pi-(\vec{u};\overrightarrow{BP}) = \pi-\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$ et $AP' = \frac{2}{2} = 1$; donc $p'-1 = \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow p' = \frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $q-1 = 1+i\sqrt{3}$. On a donc

$$p'-1 = \frac{1}{2}(q-1) \Leftrightarrow \overrightarrow{AP'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AQ} .$$

d. Pour ceux qui ont cherché le rapport de proportionnalité entre les deux vecteurs (avec la méthode ci-dessus ou une autre) on peut dire que P' est le milieu de $[AQ]$. Il faut placer P, Q et P' sur le dessin avec les pointillés explicatifs.



Complément : D'une façon plus générale, en partant d'un point P sur le cercle (C) $z = 2e^{i\theta}$, pour construire son image P' on commencera par faire le symétrique de P par rapport à l'axe des ordonnées (le point Q) ; Le point Q se construit en deux étapes : d'abord P_1 symétrique de P par rapport à l'axe des abscisses pour le conjugué, puis Q symétrique de P_1 par rapport à l'origine pour faire l'opposé) ou directement symétrique par rapport à (Oy).
Puis on placera P' sur le cercle (C') à l'intersection avec le segment [AQ]. Il faudrait

Scanned by CamScanner

faire la démonstration dans le cas général (cas général de P sur le cercle (C)) pour le rapport de proportionnalité et vérifier qu'il est toujours positif sinon le point P' serait le deuxième point d'intersection de la droite (AQ) et de (C').

Exercice 13

1. $\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \left(\frac{1}{2}i\right)^{n+1}\left(1+i\sqrt{3}\right)$, $z_{n+1} = \frac{1}{2}i\left(\frac{1}{2}i\right)^{n}\left(1+i\sqrt{3}\right)$

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{1}{2}iz_n}$

$(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}i$ et de premier terme $z_0 = 1+i\sqrt{3}$. Par suite

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, z_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^{n} z_0}$

$\boxed{z_0 = 1+i\sqrt{3}}$ soit $z_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $\boxed{z_0 = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}}$

$z_1 = \left(\frac{1}{2}i\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)$ soit

$\boxed{z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i}$ et $\boxed{z_1 = e^{i\frac{5\pi}{6}}}$

$z_2 = \left(\frac{1}{2}i\right)^{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)$ soit $\boxed{z_2 = -\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}}$ et

$z_2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ d'où $\boxed{z_2 = \frac{1}{2}e^{i\frac{4\pi}{3}}}$

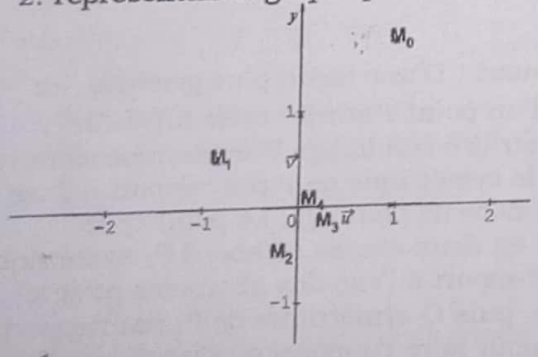
$z_3 = \left(\frac{1}{2}i\right)^{3}\left(1+i\sqrt{3}\right)$ soit $\boxed{z_3 = -\frac{1}{8}i+\frac{\sqrt{3}}{8}}$ et

$z_3 = \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)$ c'est-à-dire $\boxed{z_3 = \frac{1}{4}e^{-i\frac{\pi}{6}}}$

$z_4 = \left(\frac{1}{2}i\right)^{4}\left(1+i\sqrt{3}\right)$ soit $\boxed{z_4 = \frac{1}{16}+i\frac{\sqrt{3}}{16}}$ et

$z_4 = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ cest-à-dire $\boxed{z_4 = \frac{1}{8}e^{i\frac{\pi}{3}}}$

2. représentation graphique



3. $\forall n \in \mathbb{N}, OM_n = |z_n|\ OM_n = \left|\frac{1}{2}i\right|^{n}\left|1+i\sqrt{3}\right|$ or

donc $OM_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \times 2$ soit $\boxed{OM_n = \frac{1}{2^{n-1}}}$

4. a)

$$\forall n \in \mathbb{N}, M_nM_{n+1} = |z_{n+1}-z_n| = \left|\left(\frac{1}{2}i\right)z_n - z_n\right| = |z_n| \times \left|-1+\frac{1}{2}i\right| = \frac{1}{2^{n-1}} \times \sqrt{\frac{1}{4}+1} = \frac{1}{2^{n-1}}\sqrt{\frac{5}{4}}$$

Soit $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, M_nM_{n+1} = \frac{1}{2^{n}} \times \sqrt{5}}$

b) $L_n = \sum_{k=0}^{n} M_kM_{k+1}$ avec $M_kM_{k+1} = \frac{\sqrt{5}}{2^{n}}$. On a

$$L_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{\sqrt{5}}{2^{k}} = \sqrt{5} \times \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k} = \sqrt{5} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2\sqrt{5}\left(1-\left[\frac{1}{2}\right]^{n+1}\right)$$

d'où

$\boxed{L_n = 2\sqrt{5}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]}$, $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$ car $0 <$

$\boxed{\lim_{n\to+\infty} L_n = 2\sqrt{5}}$

5. Une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OM_0};\overrightarrow{OM_n}\right)$ est par un argument du nombre complexe

$$\left(\overrightarrow{OM_0};\overrightarrow{OM_n}\right) = \left(\vec{u};\overrightarrow{OM_n}\right) - \left(\vec{u};\overrightarrow{OM_0}\right)[2\pi] = \arg(z_n) - \arg(z_0)[2\pi]$$

par : $= \arg\left(\frac{z_n}{z_0}\right) = \arg\left[\left(\frac{1}{2}i\right)^{n}\right](2\pi)$

$= n\arg\left(\frac{1}{2}i\right) = \frac{n\pi}{2}(2\pi)$

$\boxed{\left(\overrightarrow{OM_0};\overrightarrow{OM_n}\right) = n\frac{\pi}{2}(2\pi)}$

O, M_0 et M_n sont alignés si, et seulement

$\frac{n\pi}{2} = k\pi$ c'set-à-dire $n = 2k$ soit $\boxed{n \text{ pair}}$

Scanned by CamScanner

rcice 1

et B incompatibles donc $A \cap B = \varnothing$ d'où

$A \cup B) = P(A) + P(B) \Rightarrow P(B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$.

t B indépendants :

$A \cap B) = P(A)P(B) \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{5} + P(B) - \frac{1}{5}P(B)$

$\Rightarrow \frac{4}{5}P(B) = \frac{3}{10} \Rightarrow P(B) = \frac{3}{8}$

ne peut être réalisé que si B est réalisé : tous les nements de A sont dans B,

$\cap B) = P(A) \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{5} + P(B) - \frac{1}{5} \Rightarrow P(B) = \frac{1}{2}$.

rcice 2

anque $P(5) = 1 - 3 \times \frac{1}{8} - 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.

faut avoir des résultats comme (x, 6) ou (6, x) avec x ou 6 ; on a donc la probabilité $2 \times \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

enlève 1/4 pour ne pas compter (6, 6) deux fois).

à c'est simplement (6, x), soit $\frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$.

rcice 3

univers comporte C_{20}^6 tirages simultanés de 6 objets ni 20, il y a C_{12}^6 manières de tires les 6 doses, soit une babilité de :

$$\frac{\frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7}{6!}}{\frac{20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16 \times 15}{6!}} \approx 0,024$$

n cherche 1 – [Probabilité (0 dose herbicide) + (1 herbicide)], soit

$$) = \frac{C_8^6}{C_{20}^6} = \frac{C_8^2}{C_{20}^6} = \frac{\frac{8 \times 7}{2}}{\frac{20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16 \times 15}{6!}} \approx 0,0007.$$

$$) = \frac{C_{12}^1 \times C_8^5}{C_{20}^6} = \frac{12 \times \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{5!}}{C_{20}^6}$$

$$= \frac{12 \times 8 \times 7}{\frac{20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16 \times 15}{6!}} \approx 0,0017$$

babilité recherchée $= 100 - (0,07 + 0,17) = 0,9976$.

rcice 4

y a $C_{14}^2 = 91$ manières de tirer 2 boules

ultanément parmi les 14 boules de la boîte, $C_4^2 = 6$ nières de tirer 2 rouges parmi les 4 rouges, $C_3^2 = 3$ nières de tirer 2 vertes parmi les 3 vertes et $C_7^2 = 21$ nières de tirer 2 jaunes parmi les 7 jaunes.

babilité recherchée $= \frac{6 + 3 + 21}{91} = 0,3297$.

omme on tire deux boules, l'événement contraire de boules de même couleur » est « 2 boules de couleurs érentes ». La probabilité est donc $1 - 0,3297 = 0,6703$.

Exercice 5

Préliminaire : il y a $C_8^3 = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2} = 8 \times 7 = 56$ éventualités, c'est-à-dire 56 façons de tirer les 3 cubes.

1. Obtenir des cubes de couleur différente revient à obtenir 1 rouge et 1 vert et 1 jaune, c'est-à-dire obtenir un rouge parmi les 4, et 1 vert parmi les 3 et le jaune :

$p(A) = \frac{C_4^1 \times C_3^1 \times 1}{C_8^3} = \frac{4 \times 3 \times 1}{56} = \frac{3}{14}$.

Obtenir au plus un petit cube c'est n'en obtenir aucun ou en obtenir un seul.

$p(B) = \frac{C_3^3}{C_8^3} + \frac{C_5^1 \times C_3^2}{C_8^3} = \frac{1}{56} + \frac{5 \times 3}{56} = \frac{16}{56} = \frac{2}{7}$.

En effet, n'obtenir aucun cube, c'est prendre les 3 gros, et il n'y a qu'une possibilité (3 parmi les 3) OU n'en prendre qu'un (parmi les 5) ET prendre 2 gros cubes (parmi les 3).

2. a. La variable aléatoire donne le nombre de petits cubes rouges tirés ; il y en en trois en tout, on peut donc en tirer 0, 1, 2 ou 3.

- Aucun petit cube rouge:

$$p(X = 0) = \frac{C_3^0 \times C_5^3}{C_8^3} = \frac{1 \times \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2}}{56} = \frac{10}{56} = \frac{5}{28}.$$

- Un seul petit cube rouge

$$p(X = 1) = \frac{C_3^1 \times C_5^2}{C_8^3} = \frac{3 \times \frac{5 \times 4}{2}}{56} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28},$$

- Deux petits cubes $p(X = 2) = \frac{C_3^2 \times C_5^1}{C_8^3} = \frac{3 \times 5}{56} = \frac{15}{56}$.

- Trois petits cubes rouges

$$p(X = 3) = \frac{C_3^3 \times C_5^0}{C_8^3} = \frac{1 \times 1}{56} = \frac{1}{56}.$$

Loi de probabilité :

$x_k = (X = k)$	0	1	2	3
$p_k = p(X = k)$	$\frac{5}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{56}$

2.b.

$$E(X) = \sum_{k=0}^{3} x_k \times p_k = 0 \times \frac{5}{28} + 1 \times \frac{15}{28} + 2 \times \frac{15}{56} + 3 \times \frac{1}{56}$$

$$= \frac{15}{28} + \frac{15}{28} + \frac{3}{56} = \frac{9}{8}$$

3. Les événements sont indépendants. Il s'agit d'un schéma de Bernouilli. avec :

- Succès : "Obtenir au plus un petit cube."
- $p = p(S) = \frac{2}{7}$ (Voir question 1.)
- Il y a 5 épreuves.
- On obtient k succès lors des n épreuves.

$$p(Y = k) = \binom{5}{k} p^k (1-p)^{5-k} = \binom{5}{k} \left(\frac{2}{7}\right)^k \left(\frac{5}{7}\right)^{5-k}.$$

Scanned by CamScanner

a. On veut obtenir au moins un succès lors des 5 épreuves. On appelle Y la variable aléatoire qui donne le nombre de succès lors des 5 épreuves. Il s'agit de calculer $p(Y \geq 1)$ ou encore $1 - p(Y = 0)$:

$$p(Y \geq 1) = 1 - p(Y = 0) = 1 - C_5^0 p^0 (1-p)^{5-0}$$
$$= 1 - \left(\frac{5}{7}\right)^5 = \frac{13682}{16807} \approx 0{,}8141$$

b.

$$p(Y = 3) = C_5^3 p^3 (1-p)^{5-3}$$
$$= C_5^3 \times \left(\frac{2}{7}\right)^3 \times \left(\frac{5}{7}\right)^2 = \frac{2000}{16807} \approx 0{,}1190$$

Exercice 6

1. a) Un tirage est constitué d'une suite de trois boules distinctes choisies parmi 8. Le nombre de tirages possibles est donc : $A_8^3 = 336$ (tous équiprobables).

b) La probabilité d'obtenir trois boules rouges est : $\frac{A_3^3}{A_8^3} = \frac{1}{56}$.

c) La probabilité d'obtenir deux boules rouges est :
Le nombre de façons de tirer successivement deux boules rouges distinctes est A_3^2

Le nombre de façons de tirer une boule blanche est A_5^1.
Le nombre de façons de placer deux boules rouges parmi trois positions est C_3^2.

Donc, la probabilité cherchée est : $\frac{A_3^2 \times A_5^1 \times C_3^2}{A_8^3} = \frac{15}{56}$.

2. a) Un tirage revient à prendre trois éléments dans un ensemble à 8 éléments. Le nombre de tirages possibles est donc le nombre de parties à 3 éléments dans un ensemble à 8 éléments, c'est-à-dire C_8^2.
Il y a donc 56 tirages possibles (tous équiprobables).

b) La probabilité d'obtenir trois boules rouges est : $\frac{C_3^2 \times C_5^1}{C_8^3} = \frac{15}{56}$.

c) La probabilité d'obtenir deux boules rouges est : $\frac{C_3^2 \times C_5^1}{C_8^3} = \frac{15}{56}$.

(Où C_3^2 correspond au nombre de façons de tirer simultanément deux boules rouges et C_5^1 correspond au nombre de façons de tirer une boule blanche parmi 5 boules).
On peut remarquer que les résultats obtenus sont les mêmes que ceux de la question 1.

exercice 7

Épreuve : tirage simultané de 3 boules dans une urne comportant 6 boules.
Les boules étant indiscernables au toucher, nous sommes dans l'hypothèse d'équiprobabilité.
Il s'ensuit : $card\Omega = C_6^3 = 20$

1. a) Soit A l'événement : « les trois boules sont de la même couleur ». A se traduit par : « les trois vertes ».

Donc $p(A) = \frac{C_3^3}{20} = \frac{1}{20}$.

b) Soit B l'événement : « les trois boules sont différentes ». B se traduit par : « une boule boule rouge et une boule noire ».

Donc, $p(B) = \frac{C_3^1 \times C_2^1 \times C_1^1}{20} = \frac{3}{20}$.

c) Soit C l'événement : « deux boules et deux sont de la même couleur ». C s'écrit : $C = \overline{A}$
$p(C) = 1 - p(A \cup B)$ avec A et B incompatibles

Donc : $p(C) = 1 - (p(A) + p(B)) = \frac{13}{20}$.

2. a) $X(\Omega) = \{0{,}5 ; 10 ; a ; 5 + a ; 10 + a\}$ non nul, différent de 5 et de 10.

$p(X = 0) = p(A) = \frac{1}{20}$;

$p(X = 5) = p(2 \text{ vertes et } 1 \text{ rouge}) = \frac{C_3^2 \times C}{20}$

$p(X = 10) = p(1 \text{ verte et } 2 \text{ rouges}) = \frac{C_3^1 \times}{20}$

$p(X = a) = p(2 \text{ vertes et } 1 \text{ noire}) = \frac{C_3^2 \times C}{20}$

$p(X = 5 + a) = p(B) = \frac{3}{10}$;

$p(X = 10 + a) = p(2 \text{ rouges et } 1 \text{ noire}) =$

D'où la loi de X :

x_i	0	5	10	a	5+a	10
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{10}$	

Remarquons que $p(X = 0) + p(X = 5) + p($
$= a) + p(X = 5+a) + p(X = 10 + a)$ est bie
b) $E(X) = 0 \times p(X = 0) + 5 \times p(X = 5) + 1$
$+ a \times p(X = a) + (5+a) \times p(X = 5+a) + (1$
$10 + a) = 5 + \frac{1}{2}a$.

c) $E(X) = 20$ si, et seulement si $a = 30$.

Exercice 8

1) Soit Ω l'univers associé à cette épreuve.
Désignons par F_k

L'événement « obtenir une fille en terminale $k \in \{A, C, D\}$. D'après les hypothèses faites l'épreuve

$$p(F_A) = \frac{20}{100} = 0{,}2, \; p(F_D) = \frac{40}{100} = 0{,}4$$

et $p(F_C) = \frac{60}{100} = 0{,}6$

a) Déterminons la loi de probabilité de X

Scanned by CamScanner

valeurs prises par X sont : 0, 1, 2, 3.

$=0)=0,8\times0,6\times0,4=0,192$

$=1)=0,2\times0,4\times0,6+0,8\times0,4\times0,4$
$+0,8\times0,6\times0,6=0,464$

$=2)=0,2\times0,4\times0,4+0,2\times0,6\times0,6$
$+0,8\times0,4\times0,6=0,296$

$=3)=0,2\times0,4\times0,6=0,048$

la loi de probabilité de X

	0	1	2	3
$X=x)$	0,192	0,464	0,296	0,048

alcul de l'espérance mathématique et de l'écart type

$X)=0\times0,192+1\times0,464$
$+2\times0,296+3\times0,048$

$X)=1,2$

$)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{E(X^2)-(E(x))^2}$

$^2)=0^2\times0,192+1^2\times0,464$
$+2^2\times0,296+3^2\times0,048$
$=2,08$

$)=\sqrt{2,08-(1,2)^2}$

$)=0,8$

Calcul de la probabilité pour qu'un élève choisi soit
rminale A

p_a cette probabilité. $p_a=\frac{1}{3}$

cul de la probabilité pour que l'élève choisi soit une

n l'effectif des élèves de chacune des trois classes de
inales. Le nombre total d'élèves dans la cour de
blissement est 3n. D'après les hypothèses faites sur
euve le nombre total d'élèves filles est :

$n+\frac{40}{100}n+\frac{60}{100}n=1,2n$

ésignant par p_b la probabilité demandée, on a

$\frac{1,2n}{3n}=0,4$ $p_b=0,4$

cice 9

lculons la probabilité de l'événement A
des pièces est égal à 10

$)=\frac{C_4^3}{C_{10}^3}=\frac{4}{120}=\frac{1}{30}$

$4)=\frac{1}{30}$

Les valeurs prises par x sont : 0, 1, 2, 3

$p(X=0)=\frac{C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{20}{120}=\frac{1}{6}$, $p(X=1)=\frac{C_4^1\times C_6^2}{C_{10}^3}=\frac{60}{120}=\frac{1}{2}$,

$p(X=2)=\frac{C_4^2\times C_6^1}{C_{10}^3}=\frac{36}{120}=\frac{3}{10}$, $p(x=3)=\frac{C_4^3}{C_{10}^3}=\frac{4}{120}=\frac{1}{30}$

x_i	0	1	2	3
$p(X=x_i)$	$\frac{20}{120}$	$\frac{60}{120}$	$\frac{36}{120}$	$\frac{4}{120}$

b) $E(X)=\sum_{i=0}^{3}x_i p_i$ donc

$E(X)=0\times\frac{20}{120}+1\times\frac{60}{120}+2\times\frac{36}{120}+3\times\frac{4}{120}$ D'où $E(X)=\frac{3}{4}$

$\sigma(X)=\sqrt{\sum_{i=0}^{3}(x_i)^2\,p_i-\left[E(X)\right]^2}$ Donc

$\sigma(X)=\sqrt{0,56}\approx0,75$

3)
On a ici une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre
$n=5$ et $p=\frac{1}{30}$

Soit Y cette variable aléatoire $p(Y=3)=C_5^3\left(\frac{1}{30}\right)^3\left(\frac{29}{30}\right)^2$,

$p(Y=3)\approx3,4610^{-4}$

Exercice 10

1/ On tire simultanément 3 cartes d'un jeu de 32 cartes. L'ensemble des éventualités est l'ensemble des cartes à 3 éléments de l'ensemble des cartes.

Donc $Card\Omega=C_{32}^3=4960$

A « les cartes sont des as »

$CardA=C_4^3=4$

$p(A)=\frac{CardA}{Card\Omega}=\frac{4}{4960}$ $p(A)=\frac{1}{1240}$

B : « Il y a au moins 2 couleurs parmi ces 3 cartes »

On a $\overline{B}$ c'est l'événement « les 3 cartes sont de même couleur »

$Card\overline{B}=4\times C_8^3=224$ $p(\overline{B})=\frac{224}{4960}=\frac{7}{155}$

$p(B)=1-p(\overline{B})=\frac{148}{155}$

Donc $p(B)=0,95$

C :« Il y a pas d'as parmi les 3 cartes »

$CardC=C_8^3=3276$ $p(C)=\frac{CardC}{Card\Omega}=\frac{3276}{4960}$ Donc

$p(C)=0,66$

2/ On tire successivement avec remise 3 cartes du jeu
Les valeurs prises par X sont : 0, 1, 2, 3.
La loi de la probabilité de X

Scanned by CamScanner

On a

$p(X=0)=\frac{24^3}{32^3}=\frac{27}{64}$

$p(X=1)=\frac{3\times 8\times 24^2}{32^3}=\frac{27}{64}$

$p(X=2)=\frac{3\times 8\times 8\times 24}{32^3}=\frac{9}{64}$

$p(X=3)=\frac{8\times 8\times 8}{32^3}=\frac{1}{64}$

D'où la loi de probabilité de X

x_i	0	1	2	3
$p(X=x_i)$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

Espérance mathématique de X :

$E(X)=0\times\frac{27}{64}+1\times\frac{27}{64}+2\times\frac{9}{64}+3\times\frac{1}{64}$

$\boxed{E(X)=\frac{3}{4}}$

Exercice 11

1)a) Montrons que $p_1=\frac{1}{12}$

On sait que $\sum_{i=1}^{6} p_i=1$. Comme $(p_i)_{1\le i\le 6}$ est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{30}$ alors $\sum_{i=1}^{6} p_i=\frac{6}{2}(p+p_6)$ or $p_6=p_1+\frac{5}{30}$ par suite

$\sum_{i=1}^{6} p_i=\frac{6}{2}(p_1+p_6)=3\left(p_1+p_1+\frac{5}{30}\right)=6p_1+\frac{1}{2}$ En conséquence $6p_1+\frac{1}{2}=1$ d'où $\boxed{p_1=\frac{1}{12}}$

b) Déduisons p_2, p_3, p_4, p_5, p_6

$p_2=p_1+\frac{1}{30}\Leftrightarrow\boxed{p_2=\frac{7}{60}}$, $p_3=p_1+\frac{2}{30}\Leftrightarrow\boxed{p_2=\frac{3}{20}}$

$p_4=p_1+\frac{3}{30}\Leftrightarrow\boxed{p_4=\frac{11}{60}}$, $p_5=p_1+\frac{4}{30}\Leftrightarrow\boxed{p_5=\frac{13}{60}}$

$p_6=p_1+\frac{5}{60}\Leftrightarrow\boxed{p_6=\frac{1}{4}}$

2) Déterminons la loi de probabilité de X.

Les valeurs prises par X sont : 0, 2, 3

X suit la loi binomiale de paramètres 3 et $\frac{11}{30}$ (car la probabilité d'un succès est $p_2+p_4+p_6$)

b) Déterminons E(X) et $\sigma(X)$

$\boxed{E(X)=3\times\frac{11}{20}=\frac{33}{20}}$ Car X suit une loi binom

paramètres 3 et $\frac{11}{30}$

$\sigma(X)=\sqrt{3\times\frac{11}{20}\times\frac{9}{20}}=\frac{3}{20}\sqrt{33}$

$\boxed{\sigma(X)=\frac{3}{20}\sqrt{33}}$

3) Déterminons la loi de probabilité de S.

Les valeurs prises par S sont 1, 2, 3, 4, 5.

$p(S=1)=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$; $p(S=2)=\frac{4}{15}$; $p(S=3)=$

$p(S=4)=\frac{2}{15}$; $p(S=5)=\frac{1}{15}$. D'où la loi de

S.

s_i	1	2	3	4	5
$p(S=s_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$

Exercice 12

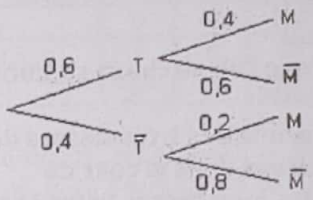
On note T l'événement « le client achète et M l'événement « le client achète un mag

L'énoncé fournit $p(T)=0,6$ (donc $p(\overline{T})=$

$p_T(M)=0,4$ (Donc $p_T(\overline{M})=1-0,4=$

$p_{\overline{T}}(M)=0,2$ (donc $p_{\overline{T}}(\overline{M})=1-0,2=$

Ce que l'on peut traduire par l'arbre de pro



1) En appliquant la formule de définition d probabilité conditionnelle, dans sa « versio multiplicative »,

$p_T(M)=\frac{p(T\cap M)}{p(T)}\Leftrightarrow p(T\cap M)=p_T(M)\times$

$=0,6\times 0,4=$

2) En appliquant la formule des probabilité

$p(M)=p(T\cap M)+p(\overline{T}\cap M)$

$=p(T)\times p_T(M)+p(\overline{T})\times p_{\overline{T}}(M)$

$=0.6\times 0.4+0.4\times 0.2=0.32$

3) On demande $p_M(T)=\frac{p(M\cap T)}{p(M)}=\frac{0,24}{0,32}$

4) Puisque $p(M)=0,32$, on a $p(\overline{M})=1-0$

Puisque $p_M(T)=0,75$, on a $p_M(\overline{T})=1-0$

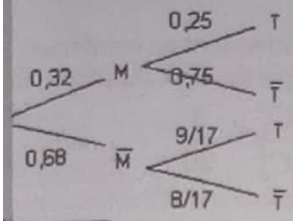
Scanned by CamScanner

calcule de la même manière qu'à la question 3),

$$\tau(T)=\frac{p(\overline{M}\cap T)}{p(\overline{M})}=\frac{0.6\times0.6}{0.68}=\frac{9}{17}$$

nc $p_{\overline{M}}(\overline{T})=1-\frac{9}{17}=\frac{8}{17}$

peut donc « inverser » l'arbre de probabilité :



ercice 13

peut consigner les résultats dans le tableau suivant :

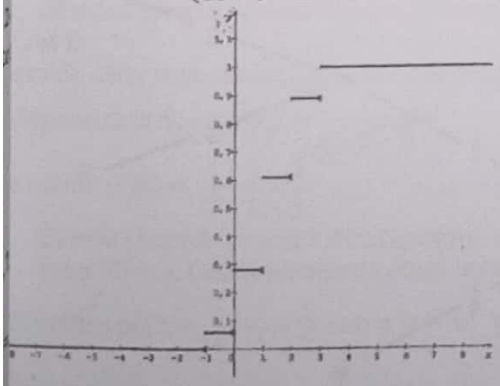
Dé vert / Rouge	0	1	1	1	2	2
	-1	0	0	0	1	1
	-1	0	0	0	1	1
	0	1	1	1	2	2
	0	1	1	1	2	2
	1	2	2	2	3	3
	1	2	2	2	3	3

Si on note X la somme des points obtenus, on a donc X) = {-1;0;1;2;3}, avec

	-1	0	1	2	3
(=x_i)	$\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$	$\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$	$\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$	$\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$	$\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$

On définit ainsi la fonction de répartition de X par :

$$x)=p(X=x)=\begin{cases}0 \text{ si } x<-1\\ \frac{1}{18} \text{ si } -1\le x<0\\ \frac{1}{18}+\frac{2}{9}=\frac{5}{18} \text{ si } 0\le x<1\\ \frac{1}{18}+\frac{2}{9}+\frac{1}{3}=\frac{11}{18} \text{ si } 1\le x<2\\ \frac{1}{18}+\frac{2}{9}+\frac{1}{3}+\frac{5}{18}=\frac{8}{9} \text{ si } 2\le x<3\\ \frac{1}{18}+\frac{2}{9}+\frac{1}{3}+\frac{5}{18}+\frac{1}{9}=1 \text{ si } x\ge 3\end{cases}$$



Exercice 14

a) Les valeurs prises par X sont : 0, 1, 2, 3
Donnons l'espérance mathématique de

$$P(X=0)=\frac{7^3}{10^3},\ p(X=1)=\frac{3\times7^2}{10^3},$$

$$p(X=2)=\frac{3^2\times7}{10^3},\ p(X=3)=\frac{3^3}{10^3} \text{ d'où}$$

$$E(X)=0\times\frac{7^3}{10^3}+1\times\frac{3\times7^2}{10^3}+2\times\frac{3^2\times7}{10^3}+3\times\frac{3^3}{10^3}$$
$$=0{,}354$$

b) Calculons la probabilité des événements :
A ; « les 3 boules tirées sont de même couleur »
B : « les 3 boules tirées sont de couleurs différentes »
C : « les 2 boules sont d'une couleur, la troisième d'une autre couleur »
D ; « 2 boules au moins sont de la même couleur »

$$P(A)=\frac{C_3^3+C_5^3}{C_{10}^3}=\frac{11}{120},$$

$$p(B)=\frac{C_3^1C_2^1C_5^1}{C_{10}^3}=\frac{1}{4},$$

$$p(C)=\frac{C_3^2C_2^1+C_3^2C_5^1+C_2^2C_3^1+C_2^2C_5^1+C_5^2C_2^1+C_5^2C_3^1}{C_{10}^3},$$

$$=\frac{79}{120}$$

$$p(D)=\frac{11}{120}+\frac{79}{120}=\frac{3}{4}$$

Exercice 15

A) Nombre d'élèves ne s'intéressant ni à la musique ni au jeu d'échecs.
Calculons d'abord le nombre d'élèves s'intéressant à la fois à la musique et au jeu d'échecs
Soit N_o ce nombre
$N_o = 15+8-3 = 20$
Le nombre d'élèves N ne s'intéressant ni à la musique ni au jeu d'échecs : $N = 25-20 = 5$
B) Calculons les probabilités des événements suivants :
1) l'élève s'intéresse à la musique

$$p(\text{« l'élève s'intéresse à la musique : »})=\frac{15}{25}=0{,}6$$

2) p (« l'élève s'intéresse à la musique ou au jeu d'échecs : ») $=\frac{4}{5}$

C) Calcule la probabilité des événements
1) p («4 élèves s'intéressent à la musique : ») =

$$\frac{A_{15}^4}{A_{25}^4}=\frac{273}{1265}$$

2) p («3 élèves s'intéressent à la musique») =

$$\frac{(15\times14\times13\times10)\times4}{A_{25}^4}=\frac{91}{253}$$

Scanned by CamScanner

3) Soit A l'événement « 3 élèves exactement s'intéressent à la musique et 1 élève exactement s'intéresse au jeu d'échecs »

$$p(A) = \frac{4(A_{15}^3 \times A_8^1)}{A_{25}^4} = \frac{364}{1265}$$

Exercice 16

A .1. Déterminons la loi de X

Les valeurs pries par X sont 0, 1, 20, 50 ou 100.

$$P(X=0) = \frac{C_6^4}{C_{10}^4} = \frac{1}{14}, \; p(X=1) = \frac{4C_6^3}{C_{10}^4} = \frac{8}{21},$$

$$p(X=20) = \frac{C_4^2 C_6^2}{C_{10}^4} = \frac{3}{7}$$

$$P(X=50) = \frac{4C_6^1}{C_{10}^4} = \frac{4}{35}, \; p(X=100) = \frac{C_4^4}{C_{10}^4} = \frac{1}{210}$$

D'où la loi de probabilité de X

x	0	1	20	50	100
P(X=x)	$\frac{1}{14}$	$\frac{8}{21}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{1}{210}$

2) Déduisons le gain moyen de Alain

Calculons l'espérance mathématique de X

$$E(X) = 0\times\frac{1}{14} + 1\times\frac{8}{21} + 20\times\frac{3}{7} + 50\times\frac{4}{35} + 100\times\frac{1}{210} \approx 15{,}14 \text{ F}$$

Le gain moyen d'Alain vaut donc 15,14 – 15 soit 0,14F

B) Etude du gain d'Alain avec de nouvelles règles de jeu

1) Si la mise est de 16F le gain moyen d'Alain vaut 15,14-16 = -0,86F : le jeu est favorable à Bernard.

2) S'il y a une boule noire de plus, la loi de X devient

x	0	1	20	50	100
P(X=x)	$\frac{7}{66}$	$\frac{14}{33}$	$\frac{21}{55}$	$\frac{14}{165}$	$\frac{1}{330}$

On obtient alors une espérance mathématique

$$E(X) = \frac{416}{33} \approx 12{,}60F$$

Le gain moyen pour Alain est de 12,60-15 = -2,39F

On en déduit que la solution 1) est moins désavantageuse pour Alain

Exercice 17

A) Le nombre de tirages possibles

Les boules étant numérotées elles sont toutes différentes. Le tirage étant simultanés on ne peut pas tirer deux fois la même boule et l'ordre des trois boules tirées n'intervient pas, l'univers est donc l'ensemble de toutes les parties à trois éléments d'un ensemble à six éléments, il y a C_6^3 soit 20 tirages possibles

B) Calculs des probabilités

$$P(A) = \frac{C_4^3}{C_6^3} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5};$$

$$p(B) = \frac{C_2^1 \times C_4^2}{C_6^3} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$$

A) 1) Déterminons la loi de probabilité de X

Les valeurs prises par X sont : 2, 3, 4 et 5

-Calcul p(X=2)

Les tirages donnant X = 2 s'obtiennent en co tirage du numéro 2 et les tirages de deux nu 0 et 1 donc

$$p(X=2) = \frac{C_2^2}{20} = \frac{1}{20}$$

-Calcul de p(X=3)

Les tirages donnant X= 3 s'obtiennent en co tirage du numéro 3 et les tirages de deux nu 0, 1 et 2 on a donc $p(X=3) = \frac{C_3^2}{C_6^3} = \frac{3}{20}$

-Calcul de p(X=4)

Les tirages donnant X= 4 s'obtiennent en co tirage du numéro 4 et les tirages de deux nu 0, 1, 2 et 3 on a donc $p(X=4) = \frac{C_4^2}{20} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

-Calcul de p(X=5)

L Les tirages donnant X=5 s'obtiennent en tirage du numéro 5 et les tirages de deux nu 0, 1, 2 ,3 et 4 on a donc $p(X=5) = \frac{C_5^2}{20} = \frac{1}{2}$

probabilité de X :

x	2	3	4	5
P(X=x)	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$

2) Calcul de la probabilité pour que X prenn strictement supérieure à 3

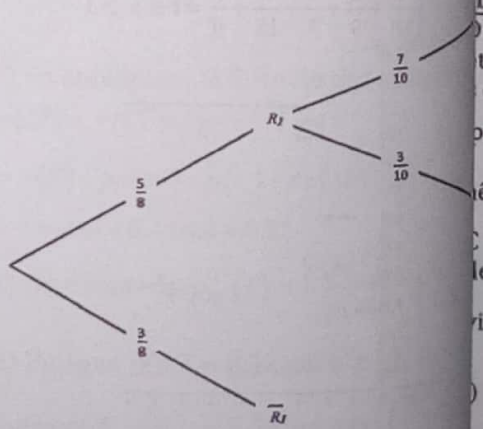
$$p(X>3) = 1 - p(X\leq 3) = 1 - \frac{1}{20} - \frac{3}{20} = \frac{4}{5}$$

Donc cette probabilité vaut $\frac{4}{5}$

Exercice 18

1. Construisons un arbre pondéré de cette e aléatoire

R_1 l'événement : « une boule rouge est obte premier tirage » et R_2 l'événement : « une bo obtenue au deuxième tirage »



2. D'après l'arbre

Scanned by CamScanner

$(R_1 \cap R_2) = p(R_1) \times p(R_2/R_1) = \frac{5}{8} \times \frac{7}{10} = \frac{7}{16}$

onc la probabilité de tirer deux boules rouges est $\frac{7}{16}$

D'après l'arbre $p(R_1 \cap \bar{R}_2) = p(R_1) \times p(\bar{R}_2/R_1)$

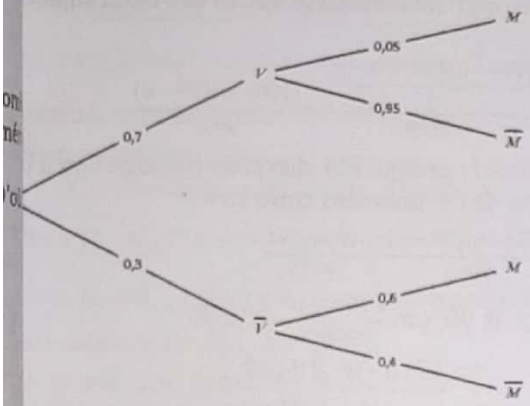
$= \frac{5}{8} \times \frac{3}{10} = \frac{3}{16}$ donc la

obabilité de tirer une boule rouge et une boule noire

t $\frac{3}{16}$

ercice 19

nstruisons l'arbre pondéré de cette expérience en tant V l'événement : « l'individu choisi est vacciné », M vénement : « l'individu choisi est malade »



Calculons la probabilité pour qu'un individu pris au sard dans la population ait été touché par la maladie. après l'arbre pondéré on a

$M) = p(V \cap M) + p(\bar{V} \cap M) = p(V) \times p(M/V) + p(\bar{V}$

$\times p(M/\bar{V}) = 0,7 \times 0,05 + 0,3 \times 0,6 = 0,215$, donc p(M) 0,215

Calculons la probabilité pour qu'un individu ait été ccciné, sachant qu'il a été atteint par la maladie

$V/M) = \frac{p(M \cap V)}{p(M)} = \frac{p(V) \times p(M/V)}{p(M)} = \frac{0,7 \times 0,05}{0,215} = \frac{7}{43}$

$p(V/M) = \frac{7}{43}$

ercice 20

Déterminons la probabilité des événements A, B, C et D

ors de deux naissances, les sexes des enfants sont

dépendants donc $p(A) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

e même $p(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

C est la réunion : « avoir deux garçons » et « avoir deux filles ». Ces événements étant incompatibles il

vient : $p(C) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$; on a $D = \bar{C}$ donc

$(D) = p(\bar{C}) = 1 - p(C)$ d'où $p(D) = \frac{1}{2}$

2. a. X est le nombre de succès : « l'enfant est une fille » lors de la répétition de trois épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de paramètre $\frac{1}{2}$: Par conséquent :

-les seules valeurs prises par X sont 0, 1, 2, 3

-pour un entier k compris entre 0 et 3 on a

$p(X = k) = C_3^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{3-k} = C_3^k \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} C_3^k$ donc

$p(X = 0) = p(X = 3) = \frac{1}{8}$, $p(X = 1) = p(X = 2) = \frac{3}{8}$ d'où la loi de probabilité de X

k	0	1	2	3
P(X=k)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$E(X) = 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$

Calculons la variance de X

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{3}{4}$ et $\sigma(X) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice 21

A) Calculs de probabilités

1) Soit E l'événement « les deux verres cassés sont du même type : »

$P(E) = \frac{3A_{10}^2}{A_{30}^2} = \frac{27}{87}$

2) Soit F l'événement « il y a au moins un verre du type A : »

Notons a un verre du type A ; b un verre du type B et c un verre du type C.

L'événement F est constitué de tous les couples de la forme $(a,b) ou$ (b, a) ou (a, c) ou (c, a) ou (a, a).

Il y a 100couples de type (a, b), 100couples de type (b, a), 100couples de type (a, c), 100couples de type (c, a) et 90 couples de type (a, a)

Donc $p(F) = \frac{490}{870}$.

3) Soit G l'événement « il a cassé un verre du type B et un verre du type C : »

L'événement contient les couples (b, c) ou (c, b) soit 200 éléments donc

$p(G) = \frac{200}{870}$

B) Déterminons la loi de probabilité de X

Les prises par X sont : 0, 1, 2.

On a $p(X=0) = \frac{100+100+90+90}{870} =$

$\frac{38}{87}\{couples(b,c),(c,b),(c,c),(b,b)\}$

$P(X=1) = \frac{4 \times 100}{870} = \frac{40}{87}\{couples(a,b),(b,a),(a,c),(c,a)\}$

$P(X=2) = \frac{10 \times 9}{870} = \frac{9}{87}$

D'où la loi de probabilité de X

x	0	1	2
P(X=x)	$\frac{38}{87}$	$\frac{40}{87}$	$\frac{9}{87}$

Scanned by CamScanner

2) Calculons l'espérance mathématique de X et sa variance

$E(X)= 0\times\frac{38}{87}+1\times\frac{40}{87}+2\times\frac{9}{87}=\frac{2}{3}$

$V(X)=\frac{40}{87}\times1+\frac{9}{87}\times4-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{112}{261}$

Exercice 22

A) Calcul de la probabilité p pour que les deux éléments soient simultanément hors service

$P = p(A_1\cap A_2)=p(A_1)\times p(A_2)=0,05\times0,08=0,004$

B) Probabilité p' pour que la machine M soit en panne.
La machine M sera en panne si A_1 ou A_2 est réalisé, cela donne

$p' = p(A_1\cup A_2)=p(A_1)+p(A_2)-p(A_1\cap A_2)$
$=0,08+0,05-0,004=0,126$

C) Etude de la variable aléatoire X
1) Loi de probabilité de X
La variable aléatoire X peut prendre comme valeurs 0 ; 1 ; 2
-Calculons p(X=0)

L'événement « X = 0 : » correspond à $\bar{A}_1\cap\bar{A}_2$ où l'on a désigné par $\bar{E}$ le contraire de E

$P(X=0)=p(\bar{A}_1\cap\bar{A}_2)=p(\overline{A_1\cup A_2})$
$=1-p(A_1\cup A_2)=1-0,126=0,874$

-La question A) montre que $p(X=2)=0,004$
On en déduit de ce qui précède que
$p(X=1)=1-0,004-0,874=0,122$
D'où la loi de probabilité de X

x	0	1	2
P(X=x)	0,874	0,122	0,004

2) Espérance mathématique de X
E(X) = 0,13 D'où le résultat.

Exercice 23

1)a) Les valeurs prises par X sont : 0 ; 1 ; 2 ; 3
b) Loi de probabilité de X.

x	0	1	2	3
P(X=x)	$\frac{9}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$

2) Espérance mathématique de X.

$E(x)=\frac{2}{3}$

3) Calcul de probabilité
Probabilité du succès

$P(S)=P[X=1]+P[X=2]+P[X=3]=\frac{2}{5}$

Il s'agit donc de la loi binomiale $B(10;\frac{2}{5})$

$P(X=7)=C_{10}^7\left(\frac{2}{5}\right)^7\left(\frac{3}{5}\right)^3=2^{10}\times3^4\times5^{-9}$

Exercice 24

I- 1) Le candidat doit donc tirer 2 sujets parmi les 50 qu'il ne connaît pas. Comme nous sommes dans un cas d'équiprobabilité et que le tirage s'effectue simultané, on a : $p_1=\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$

I- 2) De même, il suffit de tirer 2 sujets parmi connus, d'où $p_2=\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$

I- 3) Il faut tirer un sujet parmi les 50 connus les 50 non connus : $p_3=\frac{C_{50}^1\times C_{50}^1}{C_{100}^2}=\frac{50}{99}$

I- 4) On utilise l'évènement contraire qui est connaître aucun sujet, d'où $p_4=1-p_1=\frac{14}{19}$

II- 1) Le candidat ne connaît pas $(100-n)$ probabilité qu'il ne connaisse aucun des de donc :

$\frac{C_{100-n}^2}{C_{100}^2}=\frac{\frac{(100-n)(100-n-1)}{2}}{4950}=\frac{(100-n)(99-n)}{9900}$

On en déduit la probabilité cherchée puisq probabilité de l'évènement contraire :

$p_n=1-\frac{(100-n)(99-n)}{9900}=\frac{199n-n^2}{9900}$

II- 2) $p_n\geq0,95\Leftrightarrow\frac{199n-n^2}{9900}\geq0,95$

$\Leftrightarrow 199n-n^2\geq9405$

$\Leftrightarrow -n^2+199n-9405\geq0$

Le trinôme $-n^2+199n-9405$ a pour racine

$n_1=\frac{199}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1981}\approx121,75$ et

$n_2=\frac{199}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1981}\approx77,246.$

Ce trinôme est positif si et seulement si n a $[n_2;n_1]$. Comme n est un entier positif, les cherchées sont donc les valeurs entières ap l'intervalle $[78;121]$.

Scanned by CamScanner

Problème 1

1. Déterminons a, b et c

(C) passe par A(1 ;8) donc $f(1)=8$ soit $a+b+c=8$

(C) passe par B(2 ;7) donc $f(2)=7$ soit $4a+2b+c=14$

(C) admet au point B une tangente parallèle à l'axe des abscisses donc $f'(2)=0$,

$\forall x\in]0;+\infty[, f'(x)=\dfrac{ax^2-c}{x^2}$ par suite $f'(2)=0$ équivaut à $4a-c=0$. On obtient ainsi le système suivant $\begin{cases}a+b+c=8\\4a+2b+c=14\\4a-c=0\end{cases}$

On trouve $\boxed{a=1;b=3;c=4}$

2. a) $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$, $\boxed{\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty}$

b) $\forall x\in]0,+\infty[, f(x)=x+3+\dfrac{4}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x}=0$ on en déduit que la droite (D) d'équation $y=x+3$ est une asymptote à (C).

- Position relative de (D) par rapport à (C).

$\forall x\in]0;+\infty[, f(x)-(x+3)=\dfrac{4}{x}$ or $\forall x\in]0;+\infty[, \dfrac{4}{x}>0$ donc $\forall x\in]0;+\infty[, f(x)>x+3$ par conséquent (C) est situé au dessus de (D) sur $]0;+\infty[$

3. f est une fonction rationnelle définie sur $]0;+\infty[$, elle y est dérivable et

$\forall x\in]0;+\infty[, f'(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2}$

$\forall x\in]0;+\infty[, f'(x)$ est du signe de x^2-4 car $x^2>0$.

Ainsi $\forall x\in]0;2[, f'(x)<0$ et f est strictement décroissante sur $]0;2]$. $\forall x\in]2;+\infty[, f'(x)>0$ et f est strictement croissante sur $[2;+\infty[$

4. Equation de la tangent à (C) en A

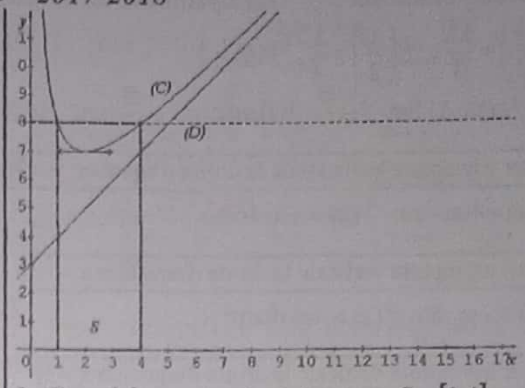
$y=f'(1)(x-1)+f(1)$; $f'(1)=-3$ et $f(1)=8$ Donc

$\boxed{(T_1): y=-3x+11}$

S'il existe un point de (C) en lequel la tangente est perpendiculaire à (T_1) alors on a $f'(x)=\dfrac{1}{3}$

Résolvons dans $]0;+\infty[$ l'équation $f'(x)=\dfrac{1}{3}$. On trouve $x=\sqrt{6}$. Par conséquent en le point de coordonnées $\left(\sqrt{6};\dfrac{5\sqrt{6}}{3}+3\right)$ (C) admet une tangent perpendiculaire à (T_1)

5. tracé de la courbe



6. Graphiquement on trouve $S=[1;4]$

Problème 2

1. pour tout x réel tel que $x\neq-1$ et $x\neq1$, on a

$\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{2}{x+1}+3=\dfrac{2(x+1)+2(x-1)+3(x+1)(x-1)}{(x-1)(x+1)}$

$=\dfrac{3x^2+4x-3}{x^2-1}$

Donc pour tout $\boxed{x\in\mathbb{R}/\{-1,1\}, f(x)=\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{2}{x+1}+3}$

2. on a

$\lim\limits_{x\to-\infty} x-1=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x+1=-\infty$

donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{x-1}=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{x+1}=0$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=3}$

Par le même raisonnement on montre que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3}$

$\lim\limits_{x\to-1} x-1=-2$ et $\lim\limits_{x\to-1^-} x+1=0^-$ donc $\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{2}{x-1}=-1$;

$\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{2}{x+1}=-\infty$

$\boxed{\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=-\infty}$

Par un raisonnement analogue on montre que $\boxed{\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=+\infty}$, $\boxed{\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=-\infty}$, $\boxed{\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=+\infty}$

3. f est une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}/\{-1,1\}$, elle est dérivable sur $\mathbb{R}/\{-1,1\}$, on a

$f(x)=\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{2}{x+1}+1$ donc $\boxed{f'(x)=\dfrac{-2}{(x-1)^2}+\dfrac{-2}{(x+1)^2}}$

pour tout $x\in\mathbb{R}/\{-1,1\}$

Un carré étant toujours positif on a $x\in\mathbb{R}/\{-1,1\}$, $f'x(x)<0$ et f est strictement décroissante sur $]-\infty,-1[$, sur $]-1,1[$ et sur $]1,+\infty[$.

Dressons le tableau de variation de f

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$		$-$	
$f(x)$	3	$\searrow$	$+\infty$	$\searrow$	$+\infty$	$\searrow$	3
		$-\infty$		$-\infty$			

Scanned by CamScanner

4. $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{17}{3}$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}$, $f(0)=3$

5. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=3$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$ donc

(C) a pour asymptote horizontale la droite d'équation $y=3$

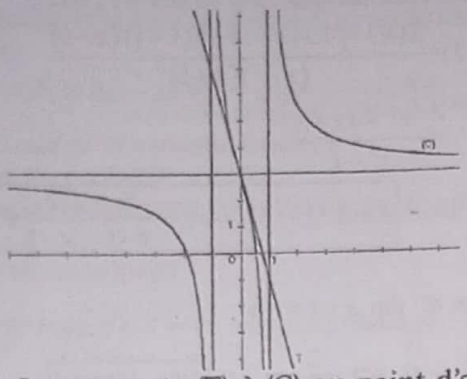
$\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=+\infty$ donc

(C) a pour asymptote verticale la droite d'équation $x=-1$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=+\infty$ donc

(C) a pour asymptote verticale la droite d'équation $x=1$

Traçons la courbe de f



6. La tangente (T) à (C) au point d'abscisse x = 0 a pour équation $y=f'(0)(x-0)+f(0)$, on a

$f'(0)=-4$ et $f(0)=3$ donc

(T) a pour équation $y=-4x+3$

7. Démontrons que (C) a pour centre de symétrie le point I(0,3).

$\forall x\in\mathbb{R}/\{-1,1\}$,

$f(2\times0-x)+f(x)=f(-x)+f(x)=6=2\times3$ donc

(C) a pour centre de symétrie le point $I(0,3)$.

Autre méthode : on peut définir un nouveau repère $(I,\vec{i},\vec{j})$ et montrer que f y est impaire.

Partie B

1.a)

$\cos2x-1=0\Leftrightarrow\cos2x=1\Leftrightarrow2x=0+2k\pi\Leftrightarrow x=k\pi;k\in\mathbb{Z}$

donc $S=\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$

b)

$\cos2x+1=0\Leftrightarrow\cos2x=-1\Leftrightarrow2x=\pi+2k\pi$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi;k\in\mathbb{Z}$

donc $S=\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$

c) $\sin2x>0\Leftrightarrow 2x$ appartient à un intervalle de la forme $]2k\pi;(2k+1)\pi[$ avec $k\in\mathbb{Z}$ donc x appartient à un intervalle de la forme $\left]k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ avec $k\in\mathbb{Z}$

donc l'équation $\sin2x>0$ a pour ensemble de solution la réunion des intervalles de la forme $\left]k\pi;\frac{\pi}{2}+k\theta\right[$ avec

2. D'après la question précédente lorsque x appartient à $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, $\cos2x\neq-1$ et $\cos2x\neq1$ par conséquent $\cos2x\in\mathbb{R}/\{-1,1\}$ c'est-à-dire que est dans l'ensemble de définition de f et que $f(\cos2x)$ existe.

On peut donc définir sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ une fonction g telle que $g(x)=f(\cos2x)$

3. $g\left(\frac{\pi}{6}\right)=f\left(\cos\frac{2\pi}{6}\right)=f\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}$ donc

$g\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{3}$ (d'après la partie A),

$g\left(\frac{\pi}{4}\right)=f\left(\cos\frac{2\pi}{4}\right)=f\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)=f(0)=3$ donc

$g\left(\frac{\pi}{4}\right)=3$

$g\left(\frac{\pi}{3}\right)=f\left(\cos\frac{2\pi}{3}\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{17}{3}$ donc $g\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{17}{3}$

4. $\lim\limits_{x\to0^+}2x=0^+$ et $\lim\limits_{x\to0^+}\cos x=1^-$ donc $\lim\limits_{x\to0^+}\cos2x=1$

d'autre part $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to0^+}f(\cos2x)=-\infty$

c'est-à- dire $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}2x=\pi^-$ $\lim\limits_{x\to\pi^-}\cos x=-1^+$ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\cos2x=-1^+$ par

ailleurs $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-1^+}f(\cos2x)=+\infty$

c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}g(x)=+\infty$

5. g est la composée de la fonction f et de la fonction $x\mapsto\cos2x$, la fonction $x\mapsto\cos2x$ est définie et dérivable sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ et elle prend ses valeurs dans l'intervalle $]-1;1[$, f étant dériv sur $]-1;1[$ on en déduit que g est dérivable su $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

En appliquant la formule de la dérivation des fonctions composées on obtient

$\forall x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, $g'(x)=4\sin2x\left(\frac{1}{(\cos2x-1)^2}+\frac{1}{(\cos2x+1)^2}\right)$

Scanned by CamScanner

D'après B) 1.c) $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ étant de la forme $\left]k\pi;(2k+1)\frac{\pi}{2}\right[$ pour tout $x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, $\sin 2x>0$, d'autre part $\left(\frac{1}{(\cos 2x-1)^2}+\frac{1}{(\cos 2x+1)^2}\right)>0$ donc

$$g'(x)>0,\forall x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$$

6. g est strictement croissante sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

Dressons le tableau de variation de g.

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

7. g est continue et strictement croissante sur $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}\right]$ donc g est une bijection de $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}\right]$ sur $\left[g\left(\frac{\pi}{6}\right);g\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]=\left[\frac{1}{3};3\right]$ or $1\in\left[\frac{1}{3};3\right]$ par conséquent l'équation

$$g(x)=1 \text{ admet une unique solution dans } \left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}\right]$$

Problème 3

A. 1. $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-2\ln x-xe+1)$
$=-2\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x-e\lim\limits_{x\to+\infty}x+1=-\infty$,

$\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim\limits_{x\to 0}(-2\ln x-xe+1)=-2\lim\limits_{x\to 0}\ln x-e\lim\limits_{x\to 0}x+1=+\infty$

.

2. $g'(x)=-2\times\frac{1}{x}-e=\frac{-2-ex}{x}$ du signe de $-2-ex$; $-2-ex>0 \Leftrightarrow x<-2/e$ ce qui est impossible puisque x est positif. La fonction g' est donc négative quel que soit x positif. Donc la fonction g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*_+$.

3. $g(0,5)\approx 1,027$ et $g(1)\approx -1,718$ (à la calculatrice). La fonction g est continue, strictement décroissante, et change de signe sur l'intervalle [0,5 ; 1] donc il existe une valeur unique α de cet intervalle telle que $g(\alpha)=0$. A la calculatrice : $\alpha\approx 0,67$.

4. On en déduit que, quel que soit $x<\alpha$ on a $g(x)$ positif, et $x>\alpha$, $g(x)$ négatif.

B. 1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x+xe}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e}{x}=0$

car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\times\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e}{x}=0$.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\ln x+xe}{x^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{x\left(\frac{\ln x}{x}+e\right)}{x^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\frac{\ln x}{x}+e}{x}=-\infty$$

.

2. f est dérivable sur son domaine de définition.

$$f(x)=\frac{\ln x+xe}{x^2}=\frac{\ln x}{x^2}+\frac{e}{x},$$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x^2-\ln x\times 2x}{x^4}-\frac{e}{x^2}$$
$$=\frac{x-2x\ln x-ex^2}{x^4}$$
$$=\frac{1-2\ln x-ex}{x^3}=\frac{g(x)}{x^3}$$

f' est donc du signe de g car x^3 est strictement positif sur $\mathbb{R}^*_+$.

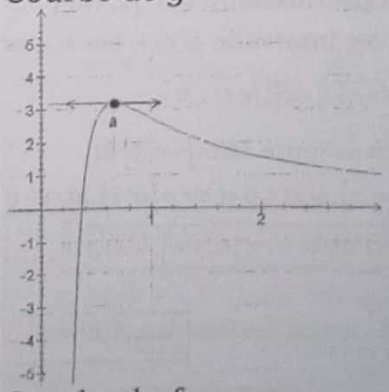
Par conséquent, f' est positive quel que soit x inférieur à α et négative ailleurs et donc f croissante sur $]0\ ;\ \alpha[$ et décroissante sur $]\alpha\ ;\ +\infty[$.

3. On sait que $g(\alpha)=0$ c'est-à-dire que $1-2\ln\alpha-e\alpha=0$ ou encore $\ln\alpha=\frac{1-e\alpha}{2}$, soit

$$f(\alpha)=\frac{\ln\alpha+e\alpha}{\alpha^2}=\frac{\frac{1-e\alpha}{2}+e\alpha}{\alpha^2}=\frac{1+\alpha e}{2\alpha^2}\approx 3,165\approx 3,2.$$

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$f(\alpha)$	↘ 0

Courbe de g



Courbe de f

Problème 4

Partie A

a)calculons g'(x)

Scanned by CamScanner

$g'(x)=(-ax-b+a)e^{-x}$

b) Trouvons a, b et c

D'après le tableau de variation de g on a

$$\begin{cases} g(0)=1 \\ g'(2)=0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=2 \end{cases}$$

$g(0)=1 \Leftrightarrow b+c=1$, $g'(2)=0 \Leftrightarrow -a-b=0$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(axe^{-x}+be^{-x}+c\right)=c$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=2$ donc $\boxed{c=2}$

$b+c=1 \Leftrightarrow \boxed{b=-1}$, $a+b=0 \Leftrightarrow \boxed{a=1}$

Partie B

D'après A) b) h(x) = g(x) donc h a le même tableau de variation que g.

Tableau de variations

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$e^{-2}+2$	↘	2

h est continue et strictement décroissante sur $[2;+\infty[$ donc h est une bijection de $[2;+\infty[$ sur $]2;e^{-2}+2]$ or $0\in]2;e^{-2}+2]$ par conséquent l'équation h(x) = 0 n'admet pas de solution dans $[2;+\infty[$

h est continue et strictement croissante sur $]-\infty;2]$ donc h est une bijection de $]-\infty;2]$ sur $]-\infty;e^{-2}+2]$; $0\in]-\infty;e^{-2}+2]$ par conséquent l'équation h(x) = 0 admet une unique solution α dans $]-\infty;2]$. Par ailleurs on a $h(-1)=-2e+2<0$ et h(0)= 1>0 par suite l'équation h(x) = 0 admet une unique solution α dans $[-1;0]$

.

b) D'après les données numériques

$h(-0,4)\times h(-0,3)<0$ d'où $\boxed{-0,4<\alpha<-0,3}$

2. h est strictement décroissante sur $[2;+\infty[$ donc pour tout réel x de cet intervalle $h(x)>\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ or $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=2>0$ soit $\forall x\in[2;+\infty[, h(x)>0$.

h est strictement croissante sur $]-\infty;2]$ et $h(\alpha)=0$ donc $\forall x\in]-\infty;\alpha], h(x)\le 0$ et $\forall x\in[\alpha;2], h(x)\ge 0$.

Ainsi $\boxed{\forall x\in]-\infty;\alpha], h(x)\le 0 \text{ et } \forall x\in[\alpha;+\infty], h(x)\ge 0}$

Partie C

1.a) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x+1=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}=0$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(2+\frac{1}{x}-e^{-x}\right)=+\infty$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty}$

2. a) $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=(x-1)e^{-x}+2=h(x)$

b) Donnons le tableau de variation de f sur IR.

$\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=h(x)$ donc d'après B. 2)

$\forall x\in]-\infty;\alpha], f'(x)\le 0$ et f est décroissante sur $]-\infty;\alpha]$

$\forall x\in[\alpha;+\infty[, f'(x)\ge 0$ et f est croissante sur $[\alpha;$

D'où le tableau de variation de f

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

3.a) $f(x)=2x+1-xe^{-x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}=0$ donc la dro

(D) d'équation y = 2x + 1 est une asymptote à (C).

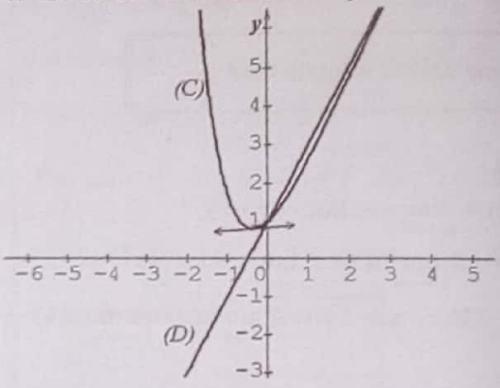
b) Etudions le signe de $f(x)-(2x+1)$

$\forall x\in\mathbb{R}, f(x)-(2x+1)=-xe^{-x}$ or $\forall x\in\mathbb{R}, e^{-x}>0$ par suite $f(x)-(2x+1)$ a le même signe que $-x$ don

$\forall x\in]-\infty;0], f(x)-(2x+1)\ge 0$ et

$\forall x\in[0;+\infty[, f(x)-(2x+1)\le 0$. En conséquence (C) est située au dessus de (D) sur l'intervalle $]-\infty$ et (C) est située au dessous de (D) sur l'interv $[0;+\infty[$

4. tracé de la courbe de f



Problème 5

I. $f(x)=x\left(1+e^{2-x}\right)$

1) $h(x)=1+(1-x)e^{2-x}$

a) Etudions le sens de variations de h

$D_h=\mathbb{R}$

H est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$

$h'(x)=-e^{2-x}+(x-1)e^{2-x}=(x-2)e^{2-x}$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
h		↘	0	↗	

b) $h(2)=1-e^0=0$

H(x)>0, pour $x\in\mathbb{R}/\{2\}$ et h(2) = 0

Scanned by CamScanner

2) a) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

b) $\frac{f(x)}{x}=1+e^{2-x}$ $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$

(C) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction (oy)

c) $f(x)-x=xe^{2-x}$, $f(x)-x=\frac{x}{e^x}\times e^2$ donc

$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x)=0$

d) $f(x)-x=xe^{2-x}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-x$	$-$	0	$+$

$x\in]-\infty;0]$, (C) en dessous de (Δ) ; $x\in[0;+\infty[$, (C) en dessus de (Δ)

(C) et (Δ) se coupent en l'origine O

3) a) $f'(x)=1+e^{2-x}+x(-e^{2-x})$;

$f'x)=1+(1-x)e^{2-x}$

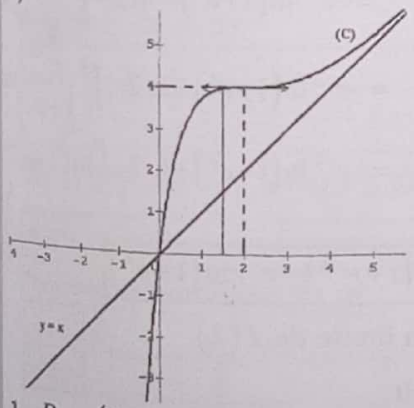
x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	1	$+\infty$

b) f continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc f bijective de $\mathbb{R}$ sur lui même

c) $f(2)=4\Leftrightarrow f^{-1}(4)=2$ et $f'(2)=0$ donc f^{-1} non dérivable en 4

d) $(T): y=4$ pour $x\le 2$, $f(x)\le 4$ pour $x\ge 2$, $f(x)\ge 4$

e)



1. $R_\lambda=\{M(x;y), 0\le x\le\lambda \text{ et } x\le y\le f(x)\}$;

$a(\lambda)=\int_0^\lambda (f(x)-x)dx$u.a

$a(\lambda)=4\int_0^\lambda xe^{2-x}dx$; $u(x)=x$ et $v'(x)=e^{2-x}$ On a $u'(x)=1$ et $v(x)=-e^{2-x}$

$a(\lambda)=4\left(\left[-xe^{2-x}\right]_0^\lambda+\int_0^\lambda e^{2-x}dx\right)$,

$a(\lambda)=4\left[-xe^{2-x}-e^{2-x}\right]_0^\lambda$, $a(\lambda)=4\left[(x+1)e^{2-x}\right]_\lambda^0$

$\boxed{a(\lambda)=4e^2-4(\lambda+1)e^{2-\lambda}}$

2. $a(\lambda)=4e^2-4\lambda e^{2-\lambda}-4e^{2-\lambda}$ donc

$\boxed{a=\lim_{\lambda\to+\infty} a(\lambda)=4e^2cm^2}$

Problème 6

Partie A :

1) $f(x)=\frac{e^x}{1+e^x}-\ln(1+e^x)$

a) Etude des variations de f.

F(x) existe si et seulement si $1+e^x>0$ or $1+e^x>0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

Donc $\boxed{D_f=\mathbb{R}}$

$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x)=0}$, $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty}$ la fonction $x\mapsto\frac{e^x}{1+e^x}$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x\mapsto 1+e^x$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $1+e^x>0$ pour tout x $\in\mathbb{R}$

Donc $x\mapsto\ln(1+e^x)$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ d'où f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme différence de deux fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}$, pour tout x de $\mathbb{R}$,

$f'(x)=\frac{-e^{2x}}{(1+e^x)^2}$; $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)<0$ donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

b) $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-1+x]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{e^x}{1+e^x}-\ln(1+e^x)-1+x\right]$

$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{e^x}{1+e^x}-1+\ln e^x-\ln(1+e^x)\right]$

$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{e^x}{1+e^x}-1+\ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)\right]$

$=0$

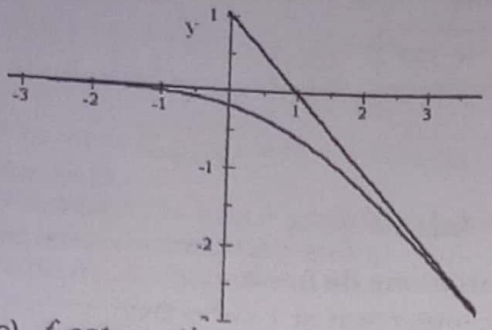
$\boxed{\lim_{x\to+\infty}[f(x)-1+x]=0}$ On en déduit que la droite d'équation $y=1-x$ est asymptote à (C) d en $+\infty$

Tableau de, variation de f

Scanned by CamScanner

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
f	0 ↘	$-\infty$

Courbe de f



c) f est continue strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

Donc f réalise une bijection de $]-\infty;+\infty[$ sur l'image de $\mathbb{R}$ par f qui est égale à $]-\infty;0[$

2) $g(x)=e^{-x}\ln(1+e^{x})$

a) pour tout $x\in\mathbb{R}, 1+e^{x}>0$ donc $\ln\left(1+e^{x}\right)$ est définie

D'où $\boxed{D_g=\mathbb{R}}$

La fonction $x\mapsto 1+e^{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et strictement positive.

Donc la fonction $x\mapsto \ln\left(1+e^{x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ or la fonction $x\mapsto e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

D'où g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

$$b)\ \forall x\in\mathbb{R}, g'(x)=-e^{-x}\ln\left(1+e^{x}\right)+e^{-x}\times\frac{e^{x}}{1+e^{x}}$$

$$=e^{-x}\left[\frac{e^{x}}{1+e^{x}}-\ln\left(1+e^{x}\right)\right]$$

D'où $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}, g'(x)=e^{-x}f(x)}$

$$c)\ \lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}e^{-x}\ln\left(1+e^{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(1+e^{-x}\right)\frac{\ln\left(1+e^{x}\right)}{1+e^{x}}=0$$

Car $\lim_{x\to+\infty}\left(1+e^{x}\right)=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ donc

$\boxed{\lim_{x\to+\infty}g(x)=0}$

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}e^{-x}\ln\left(1+e^{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(1+e^{x}\right)}{e^{x}}=\lim_{X\to 0}\frac{\ln(1+X)}{X}=1$$

En posant $X=e^{x}$ donc $\boxed{\lim_{x\to-\infty}g(x)=1}$

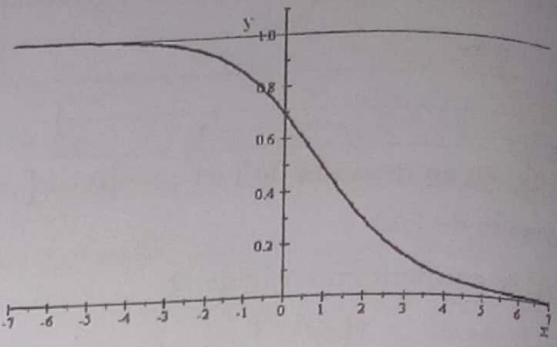
d) on a $g'(x)=e^{-x}f(x)$ or d'après 2) c) on a $f(x)<0$ pour tout $\forall x\in\mathbb{R}$

D'où $g'(x)<0$ sur $\mathbb{R}$

Tableau de variation de g

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	
g	1 ↘	0

Courbe de g :



3) a) $\frac{1}{1+e^{x}}=\frac{e^{-x}}{e^{-x}\left(1+e^{x}\right)}=\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$

b) $\lambda\in\mathbb{R}, I(\lambda)=\int_0^{\lambda}g(x)dx$ g est continue sur $[0;\lambda]$ donc $I(\lambda)$ existe

$I(\lambda)=\int_0^{\lambda}g(x)dx=\int_0^{\lambda}e^{-x}\ln\left(1+e^{x}\right)dx$ On pose

$u'(x)=e^{-x}$ et $v(x)=\ln(1+e^{x})$

On obtient $u(x)=-e^{-x}$ et $v(x)=\frac{e^{x}}{1+e^{x}}$

$$donc\ \int_0^{\lambda}e^{-x}\ln\left(1+e^{x}\right)dx=\left[-e^{-x}\ln\left(1+e^{x}\right)\right]_0^{\lambda}-\int_0^{\lambda}\frac{-e^{-}}{1+}$$

$$=-e^{-\lambda}\ln\left(1+e^{\lambda}\right)+\ln 2+\int_0^{\lambda}\frac{1}{1+}$$

$$=-e^{-\lambda}\ln\left(1+e^{\lambda}\right)+\ln 2+\int_0^{\lambda}\frac{e^{-}}{1+}$$

$$=-e^{-\lambda}\ln\left(1+e^{\lambda}\right)+\ln 2-\left[\ln\left(1+\right.\right.$$

$\boxed{I(\lambda)=2\ln 2-\ln\left(1+e^{-\lambda}\right)-e^{-\lambda}\ln\left(1+e^{\lambda}\right)}$

c) déterminons la limite de $I(\lambda)$

$\lim_{\lambda\to+\infty}\ln\left(1+e^{-\lambda}\right)=0$,

$\lim_{\lambda\to+\infty}e^{-\lambda}\ln\left(1+e^{\lambda}\right)=\lim_{\lambda\to+\infty}g(\lambda)=0$

D'où $\boxed{\lim_{\lambda\to+\infty}I(\lambda)=2\ln 2}$

partie B :

1) g est continue et strictement décroissante $\mathbb{R}$

Scanned by CamScanner

Donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $J = g(\mathbb{R}) =]0;1[$

2) a) $g(0) = e^0 \ln\left(1+e^0\right) = \ln 2$

b) montrons que g^{-1} est dérivable au point ln2

g est dérivable en 0 et $g'(0) \neq 0$ ($g'(x) < 0$ sur $\mathbb{R}$)

Alors g^{-1} est dérivable au point $\ln 2 = g(0)$

c) équation de la tangente à $\left(C_{g^{-1}}\right)$ au point d'abscisse ln2

$y = \left(g^{-1}\right)'(\ln 2)(x - \ln 2) + g^{-1}(\ln 2)$

$\left(g^{-1}\right)'(\ln 2) = \dfrac{1}{g(0)} = \dfrac{1}{\frac{1}{2} - \ln 2} = \dfrac{2}{1-2\ln 2}$ Donc

$$\boxed{y = \frac{2}{1-2\ln 2}(x - \ln 2)}$$

Problème 7

$u : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow \ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right| - \dfrac{2x}{x^2-1}$

1) $u(x)$ existe lorsque $x \geq 0$ et $\dfrac{x+1}{x-1} \neq 0$ donc

$D_u = [0;1[\cup]1;+\infty[$

$\boxed{u(0) = 0}$ Pour $x > 1, u(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) - \dfrac{2x}{x^2-1}$ on a

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x\to 1} \ln x = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{x^2-1} = 0$ donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} u(x) = 0}$$

2) Calcul de u'(x)

$$\boxed{\forall x \in [0;1[\cup]1;+\infty[, u'(x) = \frac{4}{\left(x^2-1\right)^2}}$$

$\forall x \in [0;1[\cup]1;+\infty[, u'(x) > 0$ Donc

$\boxed{u \text{ est strictement croissante sur } [0;1[\text{ et sur }]1;+\infty[}$

Tableau de variation de u

x	0	1	$+\infty$
$u'(x)$	+	+	
u	0 ↗	‖ ↗	0

3) a) la fonction u strictement croissante sur $[0;1[$ et u(0) = 0 donc pour tout x de $[0;1[$ on a $u(x) \geq u(0)$ d'où $\boxed{u(x) \geq 0, \forall x \in [0;1[}$

b) la fonction u strictement croissante sur $]1;+\infty[$ or $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = 0$ donc $\boxed{u(x) < 0, \forall x \in]1;+\infty[}$

B)

1) g(x) existe $x \geq 0$ et $\dfrac{x+1}{x-1} \neq 0$ donc

$D_g = [0;1[\cup]1;+\infty[$

$\lim\limits_{x\to 1} g(x) = +\infty$ Car

$\lim\limits_{x\to 1}\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right| = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ donc

$$\boxed{\lim_{x\to 1} g(x) = +\infty}$$

2) a) $1 + \dfrac{2}{x-1} = \dfrac{x-1+2}{x-1} = \dfrac{x+1}{x-1}$ posons $t = \dfrac{2}{x-1}$ si $x \to +\infty$ alors $t \to 0$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1}{2}\ln\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\ln(1+t)}{t} = 1$

b) sur $]1;+\infty[$, $g(x) = x\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) - 1$ or

$\dfrac{x+1}{x-1} = 1 + \dfrac{2}{x-1}$ donc $g(x) = x\ln\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right) - 1$

On a $g(x) = 2\dfrac{x}{2}\ln\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right) - 1$ or

$\dfrac{x}{2} = \left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{1}{2}$ donc

$g(x) = 2\left(\dfrac{x-1}{2}\right)\ln\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right) + \ln\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right) - 1$ or

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right) = 0$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-1}{2}\right)\ln\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right) = 1$ d'où

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = 2 - 1 = 1}$$

La courbe de g admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote horizontale

D'équation y = 1

c) calcul de g'(x)

D'abord sur $[0;1[$ et sur $]1;+\infty[$ la fonction $x \mapsto \dfrac{x+1}{x-1}$ est dérivable et est strictement positive

Donc $x \mapsto \ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|$ dérivable sur $[0;1[$ et sur $]1;+\infty[$ par produit $x \mapsto x\ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|$.

dérivable sur $[0;1[$ et sur $]1;+\infty[$ d'où g est dérivable sur $[0;1[$ et sur $]1;+\infty[$

Scanned by CamScanner

$\forall x \in [0;1[\cup]1;+\infty[, g'(x) = \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + \frac{-2x}{x^2-1} = u(x)$

Or u(x)>0 sur $[0;1[$ et u(x)<0 sur $]1;+\infty[$ donc g est croissante sur $[0;1[$ et décroissante sur $]1;+\infty[$

Tableau de variation de g

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	+		‖	−	
g	−1	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

On a g(0) = -1

d) la fonction g continue et strictement croissante sur $]0;1[$ donc g est une bijection de $]0;1[$ sur $\left]g(0); \lim_{x\to+\infty} g(x)\right[=]-1;+\infty[$ donc g bijections $]0;1[$ sur $]-1;+\infty[$ de plus $0 \in]-1;+\infty[$ ainsi l'équation g(x) = 0admet une solution unique $\alpha \in]0;1[$

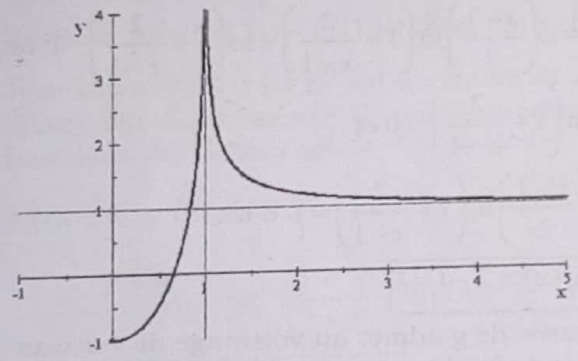
Encadrement de α

On a :

x	0	0,5	0,6	0,7
g(x)	-1	-0,45	-0,17	0,21

Donc $\boxed{0,6 < \alpha < 0,7}$

3) Courbe de g



C)

1) dérivabilité de f sur $[0;1[$?

Sur $]-1;1[$, $x \mapsto \frac{x+1}{1-x}$ est dérivable et strictement positive donc $x \mapsto \ln\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}$ est dérivable sur cet intervalle ce qui entraine que $x \mapsto (x^2-1)\ln\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}$ est dérivable sur cette intervalle d'où f est dérivable sur $[0;1[$

Et on a $f(x) = (x^2-1)\ln\sqrt{\frac{x+1}{1-x}} = \frac{(x^2-1)}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

$\forall x \in [0;1[, f'(x) = x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \frac{x^2-1}{2} \times \frac{-2}{1-x^2}$

$= x\ln\frac{1+x}{1-x} - 1 = g(x)$

D'où $\boxed{\forall x \in [0;1[, f'(x) = g(x)}$

2) Déterminons l'aire A du domaine plan limité par la courbe (C_g), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \alpha$

$A = \int_\alpha^0 g(x)dx \times 4cm^2$;

$A = \int_\alpha^0 f'(x)dx \times 4cm^2 = 4\left[f(x)\right]_\alpha^0 = 4\left(f(0) - f(\alpha)\right)$

$A = -4f(\alpha) = 4(1-\alpha)\ln\frac{1+\alpha}{1-\alpha}$ Or $g(\alpha)$ donc

$\alpha\ln\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right) - 1 = 0$ soit $\ln\left(\frac{\alpha+1}{1-\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha}$ d'où

$\boxed{A = \frac{4(1-\alpha^2)}{\alpha}cm^2}$

Problème 8

Partie A

1. La solution générale de l'équation différentielle $y' - 2y = 0$, équivalente à $y' = 2y$, est $y = ke^{2x}, k \in \mathbb{R}$.

2. (a) u est solution de (1) signifie que pour tout réel x, $ae^x - (ax+b)e^x - 2(ax+b)e^x = xe^x$

Soit, après réduction et simplification par le réel non nul e^x : pour tout réel x,

$-(a+1)x + a - b = 0$ On en déduit donc a + 1 = 0 et a – b = 0. Soit a = -1 et b = -1 : u est donc définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = -(x+1)e^x$

(b) u + v est solution de (1) si et seulement si pour tout x réel,

$u'(x) + v'(x) - 2[u(x) + v(x)] = xe^x$ Or u est solution de (1) c'est à dire $u'(x) = 2u(x) = xe^x$

Il en résulte que u + v est solution de (1) si et seulement si $v'(x) - 2v(x) = 0$ soit v est solution de (2).

(c) Il résulte de ce qui précède que les solutions de (1) sont du type u + v où v est solution de (2) c'est à dire les fonctions w_k définies sur $\mathbb{R}$ par $w_k(x) = -(x+1)e^x + ke^{2x}$ avec k réel quelconque

3. La solution de (1) nulle en 0 satisfait à la condition $w_k(0) = 0$. Or $w_k(0) = -1 + k$. Donc $w_k(0) = 0$ si et seulement si k = 1. Cette solution particulière notée w_0 est définie sur $\mathbb{R}$ par $w_0(x) = -(x+1)e^x + e^{2x}$

Partie B

Scanned by CamScanner

1.On a :
$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x\to-\infty}(-x-2) = +\infty$ donc $\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$

pour x non nul, $g(x) = x\left[2\frac{e^x}{x} - 1\right] - 2$ Or

$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} x\left[2\frac{e^x}{x} - 1\right] = +\infty$

et par suite $\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty}$

2. $\forall x \in \mathbb{R}; g'(x) = 2e^x - 1$ donc $g'(x) \le 0$ si et seulement si $e^x \le \frac{1}{2}$ c'est à dire si et seulement si $x \le -\ln 2$; $g'(x) \ge 0$ si et seulement si $e^x \ge \frac{1}{2}$ c'est à dire si et seulement si $x \ge -\ln 2$.
Le sens de variation de g s'en déduit : g est décroissante sur $]-\infty; -\ln 2]$, croissante sur $[-\ln 2; +\infty[$. D'où le tableau de variation deg:

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$-1+\ln 2$	↗	$+\infty$

3. a) g(0) = 0donc 0 est bien solution de l'équation g(x) = 0.
b) $g(-1,6) \ge 0$ et $g(-1,5) \le 0$
donc $-1,6 \le \alpha \le -1,5$.
c)On déduit des variations de g et des deux résultats précédents que : $g(x) \ge 0$ sur $]-\infty;\alpha] \cup [0;+\infty[$; $g(x) \le 0$ sur $[\alpha, 0]$.

Partie C

1. $f(x) = e^{2x} - xe^x - e^x$. Or
$\lim_{x\to-\infty} 2x = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ donc $\lim_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$;
$\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$

Par suite $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$; $f(x) = e^{2x}\left(1 - \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right)$

Or $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ donc

$\lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x} = 1$ De plus $\lim_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$ Par suite $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

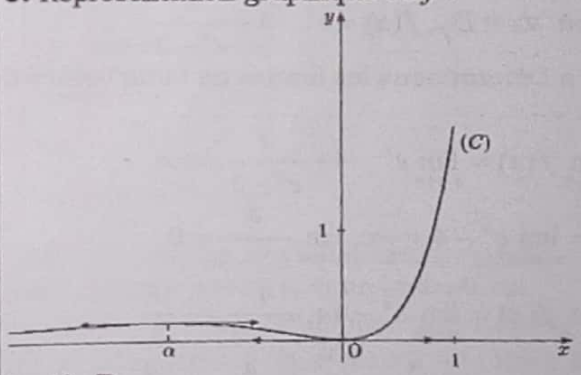
2.
$\forall x \in \mathbb{R}; f'(x) = 2e^{2x} - e^x - (x+1)e^x = 2e^{2x} - (x+2)e^x$
. En factorisant e^x on obtient
$f'(x) = e^x\left[2e^x - (x+2)\right]$ Soit $f'(x) = e^x g(x)$. Le signe de $f'(x)$ est donc celui de g(x).
Le sens de variation de f se déduit des résultats précédents :
f est croissante sur $]-\infty;\alpha]$ et sur $[0;+\infty[$; f est décroissante sur $[\alpha;0]$.

3. $f(\alpha) = e^{2\alpha} - (\alpha+1)e^\alpha$; $g(\alpha) = 0$ donc
$2e^\alpha - \alpha - 2 = 0$ et par suite $e^\alpha = \frac{\alpha+2}{2}$ On en déduit $f(\alpha) = \left(\frac{\alpha+2}{2}\right)^2 - \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{2}$ Soit après développement
$f(\alpha) = \frac{\alpha^2 4\alpha + 4 - 2(\alpha^2+2\alpha+2)}{4}$ Et après réduction $f(\alpha) = -\frac{\alpha^2+2\alpha}{4}$
De l'encadrement $-1,6 \le \alpha \le -1,5$ on déduit $(1,5)^2 \le \alpha^2 \le (1,6)^2$ et $-3,2 \le 2\alpha \le -3$.
Donc $-\frac{0,95}{4} \le \frac{\alpha^2+2\alpha}{4} \le -\frac{0,44}{4}$
et par suite $\boxed{0,1100 \le f(\alpha) \le 0,2375}$

4. Tableau de variation de f :

x	$+\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	$f(\alpha)$	↘	0	↗	$+\infty$

5. Représentation graphique de f :



Partie D

1.Sur l'intervalle $[m;0]$ la fonction est à valeurs positives : l'intégrale $\int_m^0 f(x)dx$ exprime en unités d'aire l'aire de la portion de plan comprise entre la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = m et x = 0..

2.a) Posons u(x) = x et $v(x) = e^x$. Ces fonctions sont deux fois dérivables. Le théorème

Scanned by CamScanner

d'intégration par parties s'applique donc.

$u'(x)=1$ et $v'(x)=e^x$ donc

$\int_m^0 xe^x dx=\left[xe^x\right]_m^0-\int_m^0 e^x dx=\left[xe^x\right]_m^0-\left[e^x\right]_m^0$ Soit

$\int_m^0 xe^x dx=e^m-me^m-1$

b) $f(x)=e^{2x}-xe^x+e^x$. Donc

$\int_m^0 f(x)dx=\frac{1}{2}\left[e^{2x}\right]_m^0-\left(e^m-me^m-1\right)-\left[e^x\right]_m^0$

Soit après calculs $\int_m^0 f(x)dx=me^m-\frac{1}{2}e^{2m}+\frac{1}{2}$

3. Enfin, $\lim\limits_{m\to-\infty} me^m=0$; $\lim\limits_{m\to-\infty} 2m=0$ et $\lim\limits_{m\to-\infty} e^m=0$

donc $\lim\limits_{m\to-\infty} e^{2m}=0$

Par suite $\boxed{\lim\limits_{m\to-\infty}\int_m^0 f(x)dx=\frac{1}{2}}$

Problème 9

Partie A

1. Déterminons l'ensemble de définition D_f de f

f est définie si, et seulement si $e^x-3\neq 0$ c'est-à-dire

$x\neq \ln 3$, donc $D_f=\mathbb{R}\setminus\{\ln 3\}$

2. Pour tout x de D_f, vérifions l'égalité

$f(x)=e^x-4+\frac{4}{e^x-3}$

$\forall x\in D_f, e^x-4+\frac{4}{e^x-3}=\frac{(e^x-4)(e^x-3)+4}{e^x-3}$

$=\frac{e^{2x}-7e^x+12+4}{e^x-3}=\frac{e^{2x}-7e^x+16}{e^x-3}$

$=f(x)$

D'où $\forall x\in D_f, f(x)=e^x-4+\frac{4}{e^x-3}$

3. a Déterminons les limites de f aux bornes de D_f

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^x-4+\frac{4}{e^x-3}=+\infty$

car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x-4=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{e^x-3}=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} e^x-4+\frac{4}{e^x-3}=-\frac{16}{3}$

car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x-4=-4$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4}{e^x-3}=-\frac{4}{3}$

$\lim\limits_{x\to\ln 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to\ln 3^-} e^x-4+\frac{4}{e^x-3}=-\infty$

car $\lim\limits_{x\to\ln 3} e^x-4=-1$, $\lim\limits_{x\to\ln 3^-} e^x-3=0^-$

$\lim\limits_{x\to\ln 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to\ln 3^+} e^x-4+\frac{4}{e^x-3}=+\infty$

car $\lim\limits_{x\to\ln 3} e^x-4=-1$, $\lim\limits_{x\to\ln 3^+} e^x-3=0^+$

b. Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}-\frac{4}{x}+\frac{1}{x}\times\frac{4}{e^x-3}=+\infty$

car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{4}{x}+\frac{1}{x}\times\frac{4}{e^x-3}\right)=0$

Interprétation graphique du résultat

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ alors la courbe (C) admet une branche parabolique de direction (OJ) au voisinage de $+\infty$

c. Déterminons les équations des asymptotes à (C)

De $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\frac{16}{3}$, $\lim\limits_{x\to\ln 3}|f(x)|=+\infty$, il vient que les droites d'équations $x=-\frac{16}{3}$ et $y=\ln 3$ sont des asymptotes à (C)

4. a Démontrons que f'(x) peut s'écrire pour tout x de D_f,

$f'(x)=\frac{e^x(e^x-1)(e^x-5)}{(e^x-3)^2}$

f est dérivable sur D_f, et pour tout x de D_f

$f'(x)=e^x-\frac{4e^x}{(e^x-3)^2}=\frac{e^x(e^x-3)^2-4e^x}{(e^x-3)^2}$

$=e^x\times\frac{(e^x-3)^2-4}{(e^x-3)^2}=\frac{e^x(e^x-3-2)(e^x-3+2)}{(e^x-3)^2}$

D'où pour tout x de D_f, $f'(x)=\frac{e^x(e^x-1)(e^x-5)}{(e^x-3)^2}$

b. Etudions le signe de f'(x)

$\forall x\in D_f, \frac{e^x}{(e^x-3)^2}>0$, Donc f'(x) est du signe de $(e^x-1)(e^x-5)$

Pour tout x de D_f

$f'(x)=0\Leftrightarrow(e^x-1)(e^x-5)=0\Leftrightarrow e^x-1=0$ ou $e^x-5=0$

$\Leftrightarrow x=0$ ou $x=\ln 5$

Tableau de signe

x	$-\infty$	0		$\ln 3$		$\ln 5$	$+\infty$
e^x-1	-	0	+		+		+
e^x-5	-		-		-	0	+
f'(x)	+	0	-		-	0	+

Pour tout x de $]-\infty;0[\cup]\ln 5;+\infty[$, $f'(x)>0$ donc f est strictement croissante sur $]-\infty;0]\cup[\ln 5;+\infty[$, et pour tout x de $]0;\ln 3[\cup]\ln 3;\ln 5[$, $f'(x)<0$ donc f est strictement décroissante sur $[0;\ln 3[\cup]\ln 3$

Tableau de variation de f

Scanned by CamScanner

x	$-\infty$		0		$\ln 3$		$\ln 5$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\frac{16}{3}$	↗	-5	↘	$-\infty$	$+\infty$	↘	3	↗ $+\infty$

5. Déterminons les coordonnées du point d'intersection A de (C) avec l'asymptote parallèle à l'axe des abscisses c'est-à-dire la droite d'équation $y = -\frac{16}{3}$ Pour tout x de D_f, $f(x) = -\frac{16}{3}$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow \frac{e^{2x}-7e^x+16}{e^x-3} = -\frac{16}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3e^{2x}-21e^x+48 = -16e^x+48$$

$$\Leftrightarrow 3e^{2x}-5e^x = 0$$

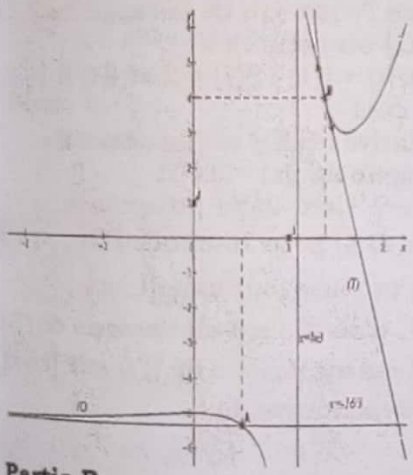
$$\Leftrightarrow 3e^x-5 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \ln\frac{5}{3}$$

Le point A a pour coordonnées $(\ln\frac{5}{3}; -\frac{16}{3})$

6. Déterminons une équation de (T) en B
(T) : $y = f'(\ln 4)(x - \ln 4) + f(\ln 4)$, on a $f'(\ln 4) = -12$ et $f(\ln 4) = 4$ d'où (T) : $y = -12(x - \ln 4) + 4$

7. Traçons la courbe (C)



Partie B

1. Pour tout x de D_f, vérifions l'égalité

$$f(x) = e^x - \frac{16}{3} + \frac{4e^x}{3(e^x-3)}$$

Pour tout x de D_f

$$e^x - \frac{16}{3} + \frac{4e^x}{3(e^x-3)} = \frac{3(e^x-3)(e^x-\frac{16}{3})+4e^x}{3(e^x-3)}$$

$$= \frac{3e^{2x}-16e^x-9e^x+48+4e^x}{3(e^x-3)}$$

$$= \frac{3(e^{2x}-7e^x+16)}{3(e^x-3)} = f(x)$$

D'où pour tout x de D_f, $f(x) = e^x - \frac{16}{3} + \frac{4e^x}{3(e^x-3)}$

2. Pour $t<0$ la courbe (C) est au dessus de l'asymptote d'équation $y = -\frac{16}{3}$ d'après le tableau de variation de f. D'où

$$A(t) = \int_t^0 \left(f(x)+\frac{16}{3}\right)dx = \int_t^0 \left(e^x + \frac{4}{3}\times\frac{e^x}{e^x-3}\right)dx$$

$$= \left[e^x + \frac{4}{3}\times\ln|e^x-3|\right]_t^0$$

$$= 1 - e^t + \frac{4}{3}\ln 2 - \frac{4}{3}\ln(3-e^t)$$ (car pour $t<0$ $e^t<0$ donc $|e^t-33| = 3-e^t$)

3. $\lim\limits_{t\to-\infty} A(t) = 1 + \frac{4}{3}\ln 2 - \frac{4}{3}\ln 3 = 1 + \frac{4}{3}\ln\frac{2}{3}$

Problème 10

Première partie

A) 1) Calculons la dérivée de i'(x)
Pour $x>0$, $i'(x) = e^{x-1} - 1$

2) Etudions les sens de variations de la fonction i sur $]0;+\infty[$

Pour $x>0$ on a, $i'(x) = e^{x-1} - 1$; $i'(x) = 0$ équivaut à $e^{x-1} - 1 = 0$ c'est-à-dire $x = 1$, donc pour tout x de $]0;1]$, $i'(x) \leq 0$ par suite i est décroissante sur $]0;1]$ et pour tout x de $[1;+\infty[$, $i'(x) \geq 0$ donc i est croissante sur $[1;+\infty[$

Tableau de variation de i

x	0		1		$+\infty$
$i'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$i(x)$	‖	↘	0	↗	

En 1, i' s'annule en changeant de signe (négative puis positive) donc i admet un minimum en 1, par suite pour tout x de $]0;+\infty[$, $i(x) \geq i(1)$ or $i(1) = 0$ donc pour $x>0$, $i(x) \geq 0$ .on en déduit que alors que pour tout $x>0$, $e^{x-1} \geq x$

A) 1) Calculons la dérivée de j
.j est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout x élément de $]0;+\infty[$ $j'(x) = \frac{1}{x^2} - 1$

3) Etudions les variations de j sur $]0;+\infty[$

Pour $x>0$, $j'(x) = \frac{1-x^2}{x^2}$; pour tout x de $]0;+\infty[$, $j'(x)$ est du signe de $1-x^2$ qui est un trinôme

Scanned by CamScanner

dont -1 et 1 sont les racines, on en déduit que quel que soit x de $]0;1]$,

j'(x) ≥ 0 donc j est croissante sur $]0;1]$ et quel que soit x de $[1;+\infty[$, j'(x) ≤0 donc j est décroissante sur $[1;+\infty[$

Tableau de variation de j

x	0	1	$+\infty$
$j'(x)$	+	0	−
$j(x)$		0	

En 1, j' s'annule en changent de signe (positive puis négative) donc pour tout x>0, j admet un maximum en 1, par suite pour tout x> 0, j(x) ≤ j(1) or j(1) = 0 donc pour tout x >0 , j(x) ≤0 ; on en déduit alors que pour tout x élément de $]0;+\infty[$, $-\frac{1}{x}+2\le x$.

B) D'après A) 1 pour tout x>0, $e^{x-1} \ge x$ (1) et d'après

B) 1, $\frac{1}{x}+2\le x$ donc $\frac{1}{x}-2\ge -x$ (2) ; en additionnant membre à membre les inégalités (1) et (2) il vient que pour tout x>0 ,

$e^{x-1}+\frac{1}{x}-2\ge 0$ d'où le résultat

C) 1) Etudions le signe de dérivée g'(x)

g est dérivable sur $]0;+\infty[$ car somme de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$ et pour tout x >0,

g'(x) = $e^{x-1}+\frac{1}{x}-2$; d'après C) quel que soit x>0 , $e^{x-1}+\frac{1}{x}-2\ge 0$ donc g'(x) ≥0 pour x > 0

2) Déterminons les limites de g(x) en 0 et en $+\infty$

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0} e^{x-1}+\ln x-2x+1=-\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} g(x)=\lim_{x\to +\infty} e^{x-1}+\ln x-2x+1$$

$$=\lim_{x\to +\infty} x\left(\frac{e^{x-1}}{x}+\frac{\ln x}{x}-2+\frac{1}{x}\right)=+\infty$$

1) Dressons le **tableau de variation de g**

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

4) Calculons g(1)

g(1) = 0

Etudions le signe de g(x) pour x >0 ; g est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et g(1) = 0 donc on en déduit que quel que soit x élément de $]0;1]$, g(x) ≤0 et quel que soit x élément de $[1;+\infty[$,

g(x) ≥0

Deuxième partie

A) Déterminons les limites de f(x) en 0 et en $+\infty$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} e^{x-1}+\ln x=-\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty} e^{x-1}+\ln x=+\infty$$

A) La limite trouvée en 0 montre que (C_f) admet l'axe (oy) comme asymptote verticale au voisinage de zéro

B) Etudions les variations de f et dressons le tableau de variations

Pour tout x >0, f'(x) = $e^{x-1}+\frac{1}{x}$, on en déduit que pour x>0 f'(x) >0 par suite f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

Tableau de variation de f

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

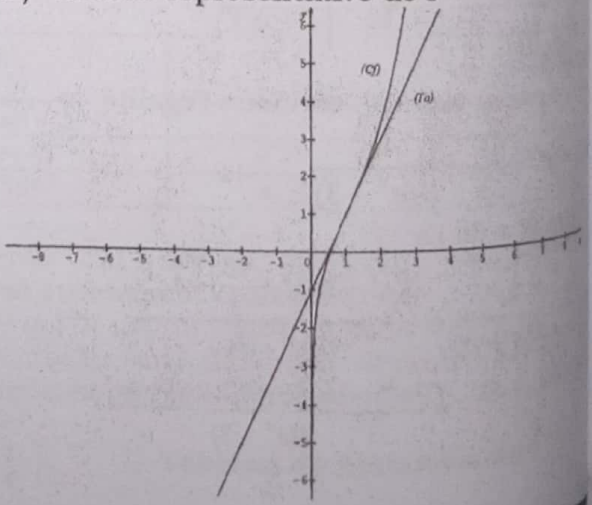
C) Déterminons l'équation de la tangente (T_A) à la courbe (C_f) au point A

(T_A) : y = f'(1)(x-1) + f(1) ; f'(1) = 2 et f(1) = 1 donc (T_A) : y = 2x-1

D) Position relative de (C_f) et (T_A) , on a à étudier le signe de f(x) =(2x-1)

.f(x) – (2x-1) = e^{x-1} +lnx -2x+1 ; d'après la première partie D 4) pour tout x de $]0;1]$, f(x) –(2x-1) ≤0 et pour tout x de $[1;+\infty[$, f(x) –(2x-1) ≥0 , d'où (C_f) est au dessous de (T_A) sur $]0;1]$ et (C_f) est au dessus de (T_A) sur $[1;+$

E) Courbe représentative de f



Scanned by CamScanner

Problème 11

Partie A

1. Calculons $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} g(x)$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) =$

$\lim_{x\to+\infty} x+1-e^x = \lim_{x\to+\infty} x\left(1+\frac{1}{x}-\frac{e^x}{x}\right) = -\infty$

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} x+1-e^x = -\infty$

2. Calculons g'(x) pour tout x réel

g est dérivable sur IR et pour tout x réel, g'(x) = $1-e^x$

3. Etudions le signe de g(x)

Pour tout x de IR, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 1-e^x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\forall x \in]-\infty\ ;\ 0[$, g'(x) >0 donc g est strictement croissante sur$]-\infty\ ;\ 0]$ et $\forall x \in]\,0\ ;\ +\infty[$, g'(x) <0 donc g est strictement décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$

Tableau de variation de g

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	−
$g(x)$	$-\infty$ ↗	0	↘ $-\infty$

g, étant strictement croissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$ et strictement décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$, admet en 0 un maximum qui est g(0) = 0. Donc pour tout réel x g(x) est négatif ou nul c'est-à-dire $\forall x \in$ IR, $g'(x) \leq 0$

Partie B

1. a Calculons $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

$\forall x \in$ IR, $f(x) = \frac{3x^2}{e} + \frac{3x}{e^x}$;

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2}{e^x}+\frac{3x}{e^x}\right) = 0$

b. Calculons $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ **et** $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 3(x^2+x)e^{-x} = +\infty$

car $\lim_{x\to-\infty} 3(x^2+x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} 3(x+1)e^{-x} = -\infty$

c. Interprétation graphique des résultats a et b

De $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ on déduit que la droite d'équation y = 0 c'est-à-dire l'axe des abscisses est asymptote à (C)

De $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$, on déduit que (C) admet une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des ordonnées

2. a Démontrons que, pour tout x de IR, $f'(x) = 3(-x^2+x+1)e^{-x}$

f est dérivable sur IR et pour tout x de IR,

$f'(x) = 3(2x+1)e^{-x} - 3(x^2+x)e^{-x}$

$= 3(-x^2+2x-x+1)e^{-x}$

$= 3(-x^2+x+1)e^{-x}$

D'où quel que soit x de IR, $f'(x) = 3(-x^2+x+1)e^{-x}$

. Etudions le sens de variation de f

f'(x) est du sig,ne de $-x^2+x+1$ car e^{-x} est strictement positif pour tout réel x

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2+x+1 = 0$, calculons le discriminant de $-x^2+x+1$: $\Delta = 1+4 = 5$, d'où

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ou $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; on en déduit que pour tout x de $\left]\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right[$, f'(x) >0 donc f est strictement croissante sur $\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$ et pour tout x de $\left]-\infty;\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right[\cup \left]\frac{1+\sqrt{5}}{2};+\infty\right[$ f'(x)<0 donc f est strictement décroissante sur $\left]-\infty;\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]$ et sur $\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2};+\infty\right[$

Tableau de variation de f

x	$-\infty$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	−	0	+ 0	−
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(\frac{1-\sqrt{5}}{2})$ ↗	$f(\frac{1+\sqrt{5}}{2})$ ↘	$-\infty$

3. a Déterminons une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0

(T) : y = f'(0)(x – 0) + f(0) ; f'(0) = 3 et f(0) = 0 par suite (T) : y = 3x

b. Démontrons que, pour tout élément x de IR

$f(x) - 3x = 3xe^{-x}g(x)$

Pour tout réel x, on a

$f(x) - 3x = 3(x^2+x)e^{-x} - 3x = 3(x^2+x)e^{-x} - 3xe^{-x} \times e^x$

$= 3xe^{-x}(x+1-e^x)$

D'où pour tout x réel, $f(x) - 3x = 3xe^{-x}g(x)$

c. Positions relatives de (C) et de (T)

Le signe de f(x) – 3x est celui de xg(x) car e^{-x} est strictement positif pour tout x de IR

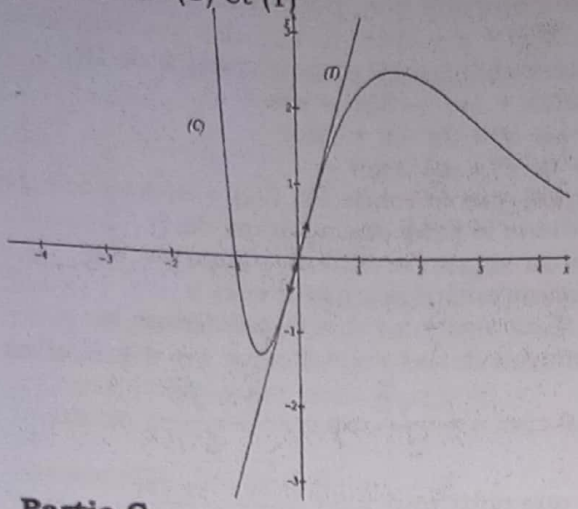
D'après A 3) g(x) <0 pour tout x de IR, on en déduit que :

Scanned by CamScanner

*si $x \geq 0$, alors $f(x) - 3x \leq 0$ donc (C) est au dessous de (T) sur $[0 ; +\infty[$

* si $x \leq 0$ alors $f(x) - 3x \geq 0$ donc (C) est au dessus de (T) sur $]-\infty ; 0]$

4. Traçons (C) et (T)



Partie C

1. Déterminons les réels a, b et c pour que la fonction F soit une primitive de f sur IR

Pour tout réel x,

$F'(x) = (2ax + b)e^{-x} - (ax^2 + bx + c)e^{-x}$

$= [-ax^2 + x(2a - b) + b - c]e^{-x}$

F est une primitive de f sur IR, si, et seulement si

$F'(x) = f(x)$

$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow F'(x) = 3(x^2 + x)e^{-x}$ donc par identification on a $\begin{cases} -a = 3 \\ 2a - b = 3 \\ b - c = 0 \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} a = -3 \\ b = -9 \\ c = -9 \end{cases}$

d'où $F(x) = ((-3x^2 - 9x - 9)e^{-x}$

2. Calculons A (t)

$A(t) = \int_0^t f(x)dx$ u.a car f est continue et positive sur $[0 ; t]$ $(t>0)$

$$A(t) = \int_0^t F'(x)dx \times 4cm^2 = 4[F(x)]_0^t$$

$$= 4F(t) - 4F(0) = 4(9 - (3t^2 * 9t + 9)e^{-t}cm^2$$

3. Calculons la limite de A (t)

$$\lim_{t \to +\infty} A(t) = \lim_{x \to +\infty} 36 - \frac{12t^2}{e^t} - \frac{36t}{e^t} - \frac{36}{e^t} = 36$$

Problème 12

A) Etude d'une fonction auxiliaire

1) Etudions le sens de variation de φ

φ est une fonction dérivable sur IR et pour tout x de IR, $\varphi'(x) = e^x - 2$

$\varphi'(x) = 0$ équivaut à $e^x = 2$ c'est-à-dire $x = \ln 2$

x	$-\infty$	$ln2$	$+\infty$
$ex-2$	+	0	−

On en déduit que quel que soit x élément de $[\ln 2;+\infty[$ $\varphi'(x) \geq 0$ donc φ est croissante sur $[\ln 2;+\infty[$ et quel que soit x élément de $]-\infty;\ln 2]$ $\varphi'(x) \leq 0$ donc φ est décroissante sur $]-\infty;\ln 2]$ d'où le tableau de variation suivant

x	$-\infty$	$ln2$	$+\infty$
$\phi'(x)$	−	0	+
$\phi(x)$	$+\infty$ ↘	$-2ln2$	↗ $+\infty$

2) $\ln 2 \approx 0{,}69$ et $\varphi(2) \approx 2{,}39$. Montrons que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet dans IR deux solutions 0 et α où $\alpha \in [\ln 2;2]$; 1-2ln2 est strictement négatif et $\varphi(2)$ est positif .La fonction φ est dérivable sur $[\ln 2;2]$, sa dérivée est négative sur cet intervalle , φ est donc décroissante et continue sur $[\ln 2;2]$; on en déduit que φ réalise une bijection de $[\ln 2;2]$ sur $[\varphi(2);\varphi(\ln 2)]$, or 0 appartient à $[\varphi(2);\varphi(\ln 2)]$, donc l'équation $\varphi(x) = 0$ admet sur l'intervalle $[\ln 2;2]$ une unique solution α . D'autre part on a , $\varphi(0) =$, En outre ,φ réalise une bijection de $]-\infty;\ln$ sur $\left[\varphi(\ln 2); \lim_{x \to -\infty} \varphi(x)\right[$ et 0 appartient à $]-\infty;\ln 2]$; φ réalise une bijection de $[\ln 2;+$ sur $\left[\varphi(\ln 2); \lim_{x \to +\infty} \varphi(x)\right[$ et α appartient à $[\ln 2;+\infty[$; donc l'équation $\varphi(x) = 0$ n'admet pas d'autre solution dans IR , on conclut que $\varphi(x) = 0$ admet sur IR deux solutions 0 et α avec α appartenant à $[\ln 2;2]$

Calculons $\varphi(1)$; $\varphi(1) = e-1-2 = e-3$ et $e-3 < 0$ donc $\varphi(1) \times \varphi(2) < 0$ d'où $\alpha \in [1;2]$

3) Donnons le signe de $\varphi(x)$ en fonction de La question A 1) donne le sens de variation φ et la question A 2) donne les valeurs de x pour lesquelles $\varphi(x)$ s'annule, on en déduit signe de $\varphi(x)$, donné dans le tableau suivant

x	$-\infty$	0		α	$+\infty$
ϕ	+	0	−	0	−

B) Etude de la fonction f

1) Etudions la limite de f quand x tend vers ∞

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (2x+3)e^{-x} + x - 1 = -\infty$$

4) Montrons que, pour tout nombre réel x, a

$f'(x) = e^{-x}\varphi(x)$

Scanned by CamScanner

.f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 2e^{-x} - (2x+3)e^{-x}$

.$f'(x) = -e^{-x} - 2xe^{-x} + 1 = e^{-x}(-1-2x+e^{x}) = e^{-x}\varphi(x)$,

d'où $f'(x) = e^{-x}\varphi(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$

3) Etablissons le tableau de variation de f

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^{-x}\varphi(x)$; pour x élément de $\mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $\varphi(x)$. D'après A 3) on en déduit que quel que soit x élément de $]-\infty;0]\cup[\alpha;+\infty[$, $f'(x) \geq 0$donc f est croissante sur $]-\infty;0]$et sur $[\alpha;+\infty[$ et quel que soit x élément de $[0;\alpha]$, $f'(x) \leq 0$ donc f est décroissante sur $[0;\alpha]$; on obtient donc le tableau de variation suivant

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

5) Montrons que la droite (Δ) d'équation y = x-1 est asymptote à la courbe (C)

.$f(x) - (x-1) = (2x+3)e^{-x}$, cette expression tend vers zéro quand x tend vers $+\infty$,cela prouve que (Δ) est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$

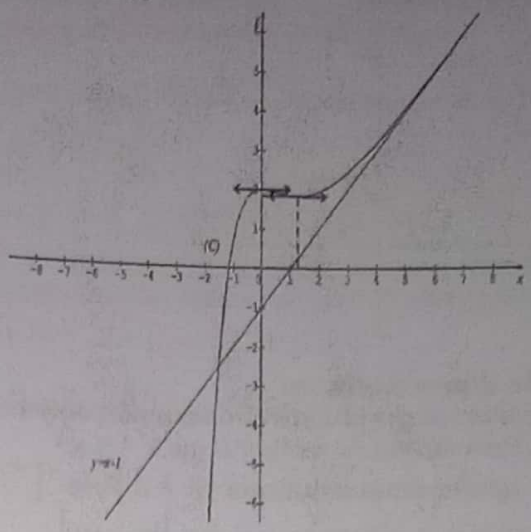
Etudions la position relative de la courbe (C) par rapport à (Δ) , on a à étudier le signe de $f(x) - (x-1)$;

$f(x) - (x-1) = (2x+3)e^{-x}$; $f(x) - (x-1)$ est du signe de $2x+3$ car pour tout x de $\mathbb{R}$ $e^{-x} > 0$, on en déduit que quel que soit x de $\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]$, $f(x) \leq x-1$ donc sur $\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]$ (C) est au dessous de (Δ) et quel que soit x de $\left[-\frac{3}{2};+\infty\right[$, $f(x) \geq x-1$ donc sur $\left[-\frac{3}{2};+\infty\right[$ (C) est au dessus de (Δ)

Donnons les coordonnées du point A commun à la courbe (C) et à son asymptote (Δ) ; cela revient à résoudre l'équation f(x) =) x-1

.$f(x) = x-1$ équivaut à $(2x+3)e^{-x} = 0$ c'est-à-dire $x = -\frac{3}{2}$ donc $A\left(-\frac{3}{2};-\frac{5}{2}\right)$

5) Plaçons A, (Δ) ,les tangentes à (C) et (C)



C) Calcul D'aire

La fonction f étant positive sur $[0,2]$, cette aire vaut $\int_0^2 [f(x)-(x-1)]dx = \int_0^2 (2x+3)e^{-x}dx$; une intégration par parties donne

$$\int_0^2 (2x+3)e^{-x}dx = \left[-(2x+3)e^{-x}\right]_0^2 + 2\int_0^2 e^{-x}dx$$

$$= (5-9e^{-2})cm^2$$

Problème 13

Première partie

A) Calculons la dérivée g' de g

.$g'(x) = 2(x+1)e^{-x} - (x+1)^2e^{-x} = (1-x^2)e^{-x}$

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$ donc g'(x) est du signe de $1-x^2$ qui est un trinôme dont les racines sont -1 et 1 ; on en déduit donc que quel que soit x de $]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[$, $g'(x) \leq 0$ donc g est décroissante sur $]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[$ et quel que soit x de $[-1;1]$, $g'(x) \geq 0$ donc g est croissante sur $[-1;1]$

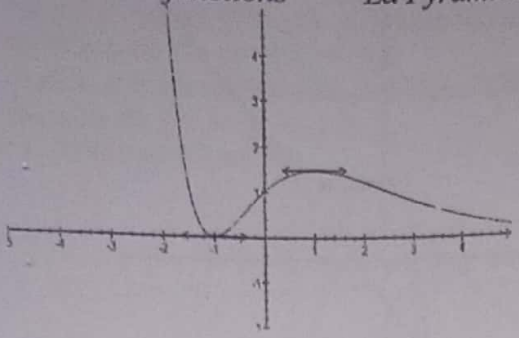
B) 1) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x+1)^2e^{-x} = +\infty$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(x+1)^2}{e^x} = 0$; on en déduit le tableau de variation suivant

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	4	↘	0

A) Traçons la courbe (C)

Scanned by CamScanner



D) Etude d'une équation

1) Par lecture graphique ci-dessus on obtient les résultats suivants :si k = 0 ou k = 4 e^{-1}

f(x) = k admet deux solutions ;si $k \in]0,4e^{-1}[$

f(x) = k admet 3 solutions ; si $k \in]4e^{-1};+\infty[$

f(x) = k admet une seule solution

2. a) Prouvons que g(x) = 2 admet sur lR une solution et une seule

*g est continue et strictement décroissante sur $]-\infty;-1]$ donc g réalise une bijection de $]-\infty;-1]$ sur $[0;+\infty[$ (cf B.1.) ; or $2 \in [0;+\infty[$ donc l'équation

g(x) = 2 admet une unique solution α dans $]-\infty;-1]$

* g est continue et strictement croissante sur $[-1;1]$ donc g définit une bijection de $[-1;1]$ sur $[0;4e^{-1}]$, or $2 \notin [0;4e^{-1}]$, on en déduit que l'équation g(x) = 2 n'admet pas de solution dans $[-1;1]$

* g est continue et strictement décroissante sur $[1;+\infty[$, donc g est une bijection de $[1;+\infty[$ sur $]0;4e^{-1}]$, or $2 \notin [0;4e^{-1}]$, on en déduit que l'équation g(x) = 2 n'admet pas de solution dans $[1;+\infty[$ .Finalement : l'équation

g(x) = 2 admet une unique solution α sur lR

b) Démontrons que α appartient à l'intervalle $[-2;-1]$

.$g(-2) = e^2 > 2$ et g(-1) = 0 <2 ; le théorème de la bijection montre que α appartient bien à $[-2;-1]$

3) Démontrons que α vérifie la relation :

$\alpha = -1 - \sqrt{2}e^{\frac{\alpha}{2}}$

On a $g(\alpha) = 2 \Leftrightarrow (\alpha+1)^2 e^{-\alpha} = 2 \Leftrightarrow e^{\alpha} = \frac{(\alpha+1)^2}{2}$

d'où $e^{\frac{\alpha}{2}} = -\frac{\alpha+1}{\sqrt{2}}$ et l'on tire $\alpha = -1 - \sqrt{2}e^{\frac{\alpha}{2}}$

Deuxième partie

A) Etude de f

1) Etudions les variations de f sur

La dérivée de f est définie par : $f'(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{x}{2}}$,

cette dérivée est négative pour tout x réel, ce qui montrons que f est strictement décroissante sur I

2) D'après 1) f est strictement décroissante sur I donc quel que soit x de I, on a :

$f(-1) \le f(x) \le f(-2)$ or $f(-2) = -1-\frac{\sqrt{2}}{e} < -1$ et

$f(-1) = -1-\sqrt{\frac{2}{e}} \approx -1,85 > -2$ donc $\forall x \in I$

$-2 < f(x) < -1$ d'où pour tout x de I, f(x) appartient à I

3) Montrons que pour tout élément de I, $|f'(x)| \le \frac{1}{\sqrt{2e}}$

On sait $|f'(x)| = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{x}{2}}$ Pour $x \in I$, on a $x < -1$

donc $e^{\frac{x}{2}} < e^{\frac{-1}{2}}$, soit $e^{\frac{x}{2}} \le \frac{1}{\sqrt{e}}$ 'd'où $\forall x \in I$,

$|f'(x)| \le \frac{1}{\sqrt{2e}}$

4) .f(α) = α , montons que pour tout élément de I , on a $|f(x)-\alpha| \le \frac{1}{2}|x-\alpha|$

. f est dérivable sur I et $\forall x \in I$, $|f'(x)| \le \frac{1}{\sqrt{2e}}$

c'est-à-dire $|f'(x)| \le \frac{1}{2}$, donc d'après l'inégalité des accroissements finis , on a :

$|f(x)-f(\alpha)| \le \frac{1}{2}|x-\alpha|$ c'est-à-dire

$|f(x)-\alpha| \le \frac{1}{2}|x-\alpha|$

B) Approximation de α à l'aide d'une suite

1) Démontrons que pour tout entier naturel n on a, $|U_{n+1}-\alpha| \le \frac{1}{2}|U_n-\alpha|$

Comme par hypothèse $U_n \in I$, pour tout entier naturel n, il vient, en remplaçant x par U_n dans A4) , que : $|U_{n+1}-\alpha| \le \frac{1}{2}|U_n-\alpha|$

2) On a $\forall n \in lN$, $|U_{n+1}-\alpha| \le \frac{1}{2}|U_n-\alpha|$ donc

$|U_1-\alpha| \frac{1}{2}|U_0-\alpha|$

$|U_2-\alpha| \le \frac{1}{2}|U_1-\alpha|$

.

.

.

$|U_n-\alpha| \le \frac{1}{2}|U_{n-1}-\alpha|$

Scanned by CamScanner

En multipliant membre à membre ces inégalités et après simplification, on obtient :

$|U_n-\alpha|\le\left(\frac{1}{2}\right)^n|U_0-\alpha|$, or -2<α<-1 soit 1<-α<2 et

$-\frac{3}{2}+1<-\frac{3}{2}-\alpha<-\frac{3}{2}+2$ c'est-à-dire

$-\frac{1}{2}<U_0-\alpha<\frac{1}{2}, et, |U_0-\alpha|\le\frac{1}{2}$, d'où $\forall n\in\mathbb{N}$, $|U_n-\alpha|\le\frac{1}{2^{n+1}}$

3) Prouvons que (U_n) converge et calculons sa limite

Comme $\frac{1}{2^{n+1}}$ tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini alors la majoration ci-dessus montre que (U_n) converge et a pour limite α

Déterminons n_0 , on aura $|U_n-\alpha|\le 10^{-3}$ dès que l'on aura $\frac{1}{2^{n+1}}\le 10^{-3}$, soit

$2^{n+1}\ge 1000, et, n\ge\frac{\ln 1000}{\ln 2}-1\approx 8{,}96$ on prendra donc n = 9 ; donc $U_9\approx -1{,}626$

Problème 14

1) a) Montrons que f est continue en 0

Pour $x\in]0;+\infty[$, on a $x>0$ et $x+2>0$, on peut écrire $f(x)=x\ln(x+2)-x\ln x$

On a $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln(x+2)=0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=0$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0=f(0)$ par suite f est continue en 0

b) Etudions la dérivabilité de f en 0

On étudie la dérivabilité en 0 en cherchant $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\ln\frac{x+2}{x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\ln\frac{x+2}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\ln(x+2)-\ln x=+\infty$$ on

(x>0 et x + 2>0)

en déduit que f n'est pas dérivable en 0

c)Trouvons la limite de f en $+\infty$

Posons $h=\frac{2}{x}$, alors quand x tend vers $+\infty$ h tend vers $0^+ et$ et on a $x=\frac{2}{h}$

On peut alors écrire

$f(x)=x\ln(1+\frac{2}{x})=\frac{2}{h}\ln(1+h)=2\times\frac{\ln(1+h)}{h}$

On sait que $\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{\ln(1+h)}{h}=1$ on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$

2) a) Pour tout $x\in]0;+\infty[, f(x)=x\ln(x+2)-x\ln x$

F est la somme, le produit et la composée de fonctions dérivables, donc f est dérivable sur $]0;+\infty[$

$$\forall x\in]0;+\infty[, f'(x)=\ln\frac{x+2}{x}+\frac{x-x-2}{x+2}$$
$$=\ln\frac{x+2}{x}-\frac{2}{x+2}$$

$$\forall x\in]0;+\infty[, f'(x)=\ln\frac{x+2}{x}-\frac{2}{x+2}$$

f' est elle dérivable sur $]0;+\infty[$, et

$$f''(x)=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x}+\frac{2}{(x+2)^2}$$
$$=\frac{x(x+2)-(x+2)^2+2x}{x(x+2)^2}$$
$$=\frac{x^2+2x-x^2-4x-4+2x}{x(x+2)^2}$$

$$f''(x)=-\frac{4}{x(x+2)^2}\ \text{pour tout}\ x\in]0;+\infty[$$

b) Etudions le sens de variation de f et montrons que la limite de f' en $+\infty$ est nulle

Pour x >0, on a $-\frac{4}{x(x+2)^2}<0$ donc

f' est décroissnate sur $]0;+\infty[$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\frac{x+2}{x}=0$

d'autre part $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x+2}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$

f' est décroissante sur $]0;+\infty[$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$ donc

f' est positive sur $]0;+\infty[$

c) Dressons le tableau de variation de f

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0 ↗	2

3) Traçons la courbe (C)

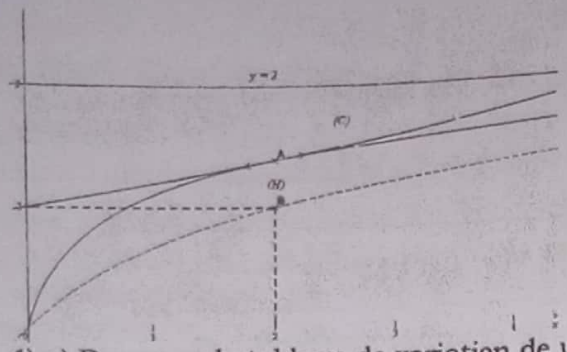
Scanned by CamScanner

On a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$ donc (C) a pour asymptote horizontale la droite d'équation y = 2

D'autre part $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = +\infty$ donc

(C) a une demi tangente verticale en O

Le point A d'abscisse 2 de (C) a pour ordonnée 2ln2



4) a) Dressons le tableau de variation de u

u est une fonction rationnelle définie sur $[0;+\infty[$, elle est donc dérivable sur $[0;+\infty[$

$\forall x \in [0;+\infty[, u'(x) = \frac{4}{(x+2)^2}$ donc u'(x)>0 pour tout $x \in [0;+\infty[$ on a u(0) = 0 et

$\lim_{x\to+\infty} u(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x+2} = 2$

On peut alors donner le tableau de variation de u

x	0	$+\infty$
$u'(x)$	+	
$u(x)$	0 ↗	2

b) pour $x \in]0;+\infty[$ on a

$f(x)-u(x) = x\ln\frac{x+2}{x} - \frac{2x}{x+2} = x\left(\ln\frac{x+2}{x} - \frac{2}{x+2}\right)$

donc $\boxed{f(x)-u(x) = xf'(x)}$

$\forall x \in]0;+\infty[, f'(x) > 0$ donc xf'(x)>0 et alors

f(x) ≥ u(x) pour tout x $\in]0;+\infty[$

D'autre part f(0) = 0 et u(0) = 0 donc $f(0) \geq u(0)$

On peut donc en déduire que

La courbe (H) est au dessous de la courbe (C)

$\lim_{x\to+\infty} u(x) = 2$, donc (H) a pour asymptote horizontale la droite d'équation y = 2 On a d'autre part u'(0) = 0

(H) a donc une tangente de coefficient directeur 1 en 0

Le point B d'abscisse 2 de (H) a pour ordonnée u(2) = 1

c) λ étant un réel strictement positif, la tangente à (C) au point d'abscisse λ a pour équation $y = f'(\lambda)(x-\lambda)+f(\lambda)$ soit

$y = \left[\ln\frac{\lambda+2}{\lambda} - \frac{2}{\lambda+2}\right](x-\lambda) + \lambda\ln\frac{\lambda+2}{\lambda}$

Le point d'intersection de cette tangente avec l'axe des ordonnées est d'abscisse 0 et d'ordonnée

$y = \left[-\ln\frac{\lambda+2}{\lambda} - \frac{2}{\lambda+2}\right](-\lambda) + \lambda\ln\frac{\lambda+2}{\lambda}$

$= \frac{2\lambda}{\lambda+2} = u(\lambda)$

D'où **La tangente à (C) au point d'abscisse λ rencontre l'axe Oy au point d'ordonnée u(**

Pour déterminer la tangente (T) à (C) au point d'abscisse λ, il suffit de déterminer le point de la courbe (H) d'abscisse λ, puis de projeter ce point sur l'axe des ordonnées.

D'après ce que l'on vient de démontrer, ce projeté est le point d'intersection de (T) avec (

. On obtient ainsi deux points de (T) ce qui permet de tracer

Partie B

1) a) g étant dérivable sur $]0;+\infty[$, G est aussi dérivable sur $]0;+\infty[$

On a $G'(x) = \frac{xg'(x)-g(x)}{x^2}$ et par conséquent

$x^2G'(x) = xg'() - g(x)$ pour tout $x \in]0;+\infty[$

g possède la proriété P $\Leftrightarrow g(x)-xg'(x) = \frac{2x}{x+2}$

$\Leftrightarrow -x^2G'(x) = \frac{2x}{x+2}$

$\Leftrightarrow G'(x) = \frac{-2}{x(x+2)}$

$\Leftrightarrow G'(x) = \frac{x-(x+2)}{x(x+2)}$

$\Leftrightarrow G'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x}$

donc **g possède la propriété P si, et seulement si pour tout $x \in]0;+\infty[, G'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x}$**

Scanned by CamScanner

2) Sur $]0;+\infty[$ $x \mapsto \frac{1}{x+2}-\frac{1}{x}$ a pour primitives $x \mapsto \ln(x2)-\ln x+k, k \in \mathbb{R}$ c'est-à-dire $x \mapsto \ln\frac{x+2}{x}+k, k \in \mathbb{R}$ alors $\forall x \in]0;+\infty[$

g possède la propriété P $\Leftrightarrow G'(x)=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x}$

$\Leftrightarrow G(x)=\ln\frac{x+2}{x}+k, k \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \frac{g(x)}{x}=\ln\frac{x+2}{x}+k, k \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow g(x)=x\ln\frac{x+2}{x}+kx,$

$\Leftrightarrow g(x)=f(x)+kx, k \in \mathbb{R}$

E est l'ensemble des fonctions g telles que pour tout $x \in]0;+\infty[, g(x)=f(x)+kx, k \in \mathbb{R}$

Problème 15

Parti A

1) Etudions les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$ et interprétons graphiquement ces résultats.

$\lim_{x\to-\infty} e^x=0$ donc $\lim_{x\to-\infty} 1-e^x=1$ et $\lim_{x\to-\infty} 1+e^x=1$

alors $\lim_{x\to-\infty} f(x)=4$

La droite d'équation y = 4 est une asymptote horizontale à (C)

Pour tout x réel on peut écrire

$$f(x)=\frac{4e^x\left(e^{-x}-1\right)}{e^x\left(e^{-x}+1\right)}=\frac{4\left(e^{-x}-1\right)}{e^{-x}+1}$$

$\lim_{x\to+\infty} e^{-x}=0$ donc $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}-1=-1et$

$\lim_{x\to+\infty} e^{-x}+1=1$ alors $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-4$

La doite d'équation y = - 4 est une asymptote à (C)

2) Dressons le tableau de variation de f

la fonction $x \mapsto e^x$ est définie et dérivable sur IR, d'autre part $1 + e^x \neq 0$ pour tout réel x

Donc f est définie et dérivable sur IR.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x)=\frac{-8e^x}{\left(1+e^x\right)^2}$$

$E^x > 0$ pour tout x réel donc f'(x)<0 pour tout réel x et f est strictement décroissante sur IR

Tableau de variation de f

x	$-\infty$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	4 ↘ -4

3) Equation de la tangente (T) au point d'abscisse nulle

La tangente au point d'abscisse 0 a pour équation $y=f'(0)(x-0)+f(0)$

F'(0) = -2 et f(0) = 0

La tangente au point d'abscisse 0 a pour équation y = -2x

4) a) φ est la somme de deux fonctions dérivables sur IR donc elle est dérivable sur IR et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x)=f'(x)+2=\frac{-8e^x}{\left(1+e^x\right)^2}+2$$

φ' étant somme et quotient de fonctions dérivables sur IR alors φ' est dérivable sur IR et

$$\forall x \in IR, \varphi''(x)=\frac{-8e^x+8e^{2x}}{\left(1+e^x\right)^3}=\frac{8e^x\left(e^x-1\right)}{\left(1+e^x\right)^3}$$ d'où le résultat

b) Donnons le sens de variation de φ', puis le sens de variation et le signe de φ

$e^x > 0$ pour tout réel x on en déduit que φ'' est du signe de e^x-1 c'est-à-dire

$\varphi''(x)<0$ pour $x<0$; $\varphi''(x)>0$ pour $x>0$

La fonction φ' est décoissante sur $]-\infty;0]$ *et* croissnte sur $[0;+\infty[$

Donc φ' a un minimum en 0 et ce minimum est $\varphi'(0)=0$, on en déduit que

φ' est positive sur IR et φ est croissnte sur IR

Comme

$\varphi(0)=f(0)+2\times0=0$ on en déduit que

$\varphi(x) \leq 0$ pour $x \leq 0$ et $\varphi(x) \geq 0$ pour $x \geq 0$

c) Position relative de (C) par rapport à (T)

Pour étudier la position relative de (C) par rapport à (T), il faut comparer f(x) et -2x

Pour $x \in]-\infty;0]$ on a $\varphi(x) \leq 0$ donc $f(x) + 2x \leq 0$ c'est à dire $f(x) \leq -2x$

Pour $x \in [0;+\infty[$, on a $\varphi(x) \geq 0$ donc $f(x)+2x \geq 0$ c'est à dire que $f(x) \geq -2x$

Sur $]-\infty;0]$ (C) est au dessous de (T) et sur $[0;+\infty[$ (C) est au dessus de (T)

5) Démontrons que f est une fonction impaire

La fonction f est définie sur IR, son ensemble de définition est donc bien symétrique par rapport à 0

Scanned by CamScanner

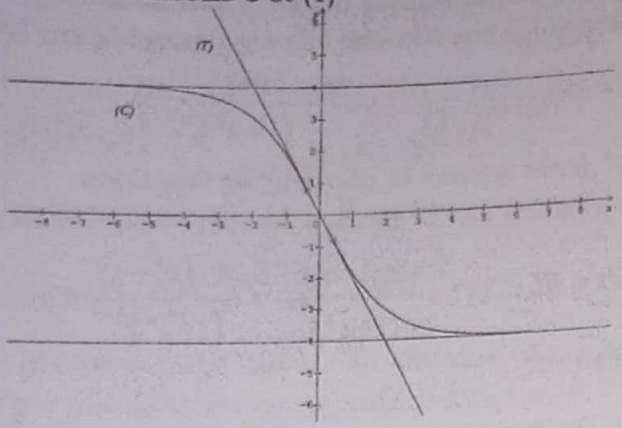
Pour tout x réel on a

$$f(-x)=\frac{4\left(1-e^{-x}\right)}{1+e^{-x}}=\frac{4e^{-x}\left(e^{x}-1\right)}{e^{-x}\left(e^{x}+1\right)}-\frac{4\left(1-e^{x}\right)}{1+e^{x}}$$

$$=-f(x)$$

f est donc une fonction impaire

6) Construisons c et (T)



Partie B

1) Calculons l'intégrale I

$$I=\int_{-3}^{0}\frac{e^{x}}{1+e^{x}}dx=\left[\ln\left(1+e^{x}\right)\right]_{-3}^{0}=\ln 2-\ln\left(1+e^{-3}\right)$$

$$I=\ln\frac{2}{1+e^{-3}}$$

2) Pour tout réel x on a

$$4-\frac{8e^{x}}{1+e^{x}}=\frac{4\left(1+e^{x}\right)-8e^{x}}{1+e^{x}}=\frac{4-4e^{x}}{1+e^{x}}=\frac{4\left(1-e^{x}\right)}{1+e^{x}}$$

donc $f(x)=4-\frac{8e^{x}}{1+e^{x}}$

3) pour tout $x\in[-3;0]$ $f(x)\geq 0$

L'aire de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe (C) et les droites d'équations x = - 3 et x = 0 est donc donnée en

$$A=\int_{-3}^{0}f(x)dx=\int_{-3}^{0}\left(4-\frac{8e^{x}}{1+e^{x}}\right)dx$$

u.a par $=\int_{-3}^{0}4dx-8\int_{-3}^{0}\frac{e^{x}}{1+e^{x}}dx=\left[4x\right]_{-3}^{0}-8I$

$$A=12-8\ln\frac{2}{1+e^{-3}}\text{cm}^2 \text{ donc A} \approx 6{,}84 \text{ cm}^2$$

4) On a vu que pour tout $x\in]-\infty;0]$ (C) est au dessous de (T).

'aire de la région du plan comprise entre la courbe (C), la droite (T) et les droites d'équations x = - 3 et x = 0 est donc donnée en cm² par

$$A'=\int_{-3}^{0}\left(-2x-f(x)\right)dx=\int_{-3}^{0}-2xdx-\int_{-3}^{0}f(x)dx$$

$=9-A$ alors

$$A'=-3+8\ln\frac{2}{1+e^{-3}}cm^2 \text{ donc A'} \approx 2{,}16 \text{ cm}^2$$

Partie C

1) es solutions de l'équation $f(x)=\alpha$ sont les abscisses des points d'intersection de le courbe (C) et de la droite d'équation $y=\alpha$. On observe graphiquement que

Pour $\alpha\in]-4;4[$ l'équation f(x) = α a une et une seulesolution

Pour $\alpha\in]-\infty;-4]\cup[4;+\infty[$ l'équation f(x) = α n'a aucune solution

2)a) Résolvons l'équation $f(x)=2$

$$f(x)=2\Leftrightarrow\frac{4\left(1-e^{x}\right)}{1+e^{x}}=2\Leftrightarrow 4\left(1-e^{x}\right)=2\left(1+e^{x}\right)$$

$$\Leftrightarrow -6e^{x}=-2\Leftrightarrow x=-\ln 3$$

L'équation f(x) = 2 a donc une solution unique qui est –ln3

b) Résolvons l'équation $f(x)=\alpha$

$$f(x)=\alpha\Leftrightarrow\frac{4\left(1-e^{x}\right)}{1+e^{x}}=\alpha\Leftrightarrow 4\left(1-e^{x}\right)=\alpha\left(1+e^{x}\right)$$

$$\Leftrightarrow e^{x}\left(-4-\alpha\right)=\alpha-4$$

Lorsque $\alpha=-4$ l'équation s'écrit $0\times e^{x}=-8$ cette équation n'a aucune solution

Lorsque $\alpha\neq-4$ l'équation s'écrit

$$e^{x}=\frac{\alpha-4}{-4-\alpha}=\frac{4-\alpha}{4+\alpha}$$

Si $\frac{4-\alpha}{4+\alpha}$ est négatif ou nul c'est-à-dire $\alpha\in]-\infty;-4[\cup[4;+\infty[$ l'équation n'a aucune solution

Si $\frac{4-\alpha}{4+\alpha}$ est strictement positif c'est-à-dire $\alpha\in]-4;4[$ on peut écrire

$$e^{x}=\frac{4-\alpha}{4+\alpha}\Leftrightarrow x=\ln\frac{4-\alpha}{4+\alpha}$$

Partie D

1) Les solutions de l'équation f(x) + x = 0 c'est à dire f(x) = -x sont les abscisses des points d'intersection de la courbe (C) et de la droite d'équation y = - x on en déduit que l'équation f + x = 0 admet trois solutions

2) a) Déterminons les limites de φ en $-\infty$ et en $+\infty$

Scanned by CamScanner

$\lim_{x\to-\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)+x=-\infty$ car $\lim_{x\to-\infty}f(x)=4$

$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)+x=+\infty$ car $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-4$

b) φ est la somme de deux fonctions dérivables sur IR donc φ est dérivable sur IR et on a

$$\forall x\in\mathbb{R},\varphi'(x)=f'(x)+1=\frac{-8e^x}{\left(1+e^x\right)^2}+1$$

$$=\frac{e^{2x}-6e^x+1}{\left(1+e^x\right)^2}$$

D'où le résultat

c) En déduisons le sens de variations de φ

Résolvons l'équation $X^2-6X+1+0$

Calculons le discriminant Δ

$\Delta=32$, $\Delta>0$ donc l'équation a deux solutions réelles qui sont $X_1=3-2\sqrt{2}$ et $X_2=3+2\sqrt{2}$ on peut alors écrire

$$\varphi'(x)=\frac{\left(e^x\right)^2-6e^x+1}{\left(1+e^x\right)^2}=\frac{\left(e^x-3+2\sqrt{2}\right)\left(e^x-3-2\sqrt{2}\right)}{\left(1+e^x\right)^2}$$

On sait que $\left(1+e^x\right)$ est strictement positif, on peut alors étudier le signe de $\varphi'(x)$ en remarquant que $3-2\sqrt{2}$ et $3+2\sqrt{2}$ sont strictement positifs et que ln est une fonction strictement croissante donc

$e^x-3+2\sqrt{2}>0\Leftrightarrow e^x>3-2\sqrt{2}\Leftrightarrow x>\ln\left(3-2\sqrt{2}\right)$ On

$e^x-3-2\sqrt{2}>0\Leftrightarrow x>\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)$

obtient alors le tableau de variation de φ

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$ex-x_1$		−		+		+	
$ex-x_2$		−		−		+	
$\varphi'(x)$		+	0	−	0	+	
$\varphi(x)$	$-\infty$	↗	$\varphi(x_1)$	↘	$\varphi(x_2)$	↗	$+\infty$

$x_1=\ln\left(3-2\sqrt{2}\right)\approx-1,76$

$x_2=\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)\approx1,76$

3) a) φ est strictement décroissante sur $[x_1;x_2]$, $0\in[x_1;x_2]$ et $\varphi(0)=0$ donc l'équation $\varphi(x)=0$ n'a pas de solution sur $]-\infty;x_1]$ et $\varphi(x_1)<0$

φ est continue et strictement croissante sur $[x_2;+\infty[$ et $\varphi(x_2)<0$ donc l'équation $\varphi(x)=0$ a une solution unique α dans $[x_2;+\infty[$. On peut donc en déduire que

l'équation $\varphi(x)=0$ a une solution unique α dans $]0;+\infty[$

b) On peut remarquer que la fonction φ est impaire car son ensemble de définition est symétrique par rapport à 0 et pour tout réel x, $\varphi(-x)=f(-x)+(-x)=-\varphi(x)$

$\varphi(x)=0$ ayant une solution unique dans $]0;+\infty[$, elle a aussi une solution unique dans $]-\infty;0[$

Sachant que $\varphi(0)=0$, on peut conclure que :

l'équation $\varphi(x)=0$ a trois solutions.

Problème 16

A. Pour tout x de lR, on définit la fonction h par :

$h(x)=(x-1)e^{-x}+2$

1) Etudions les variations de h sur lR

. h est dérivable sur lR et pour tout x de lR ; $h'(x)=-(x-1)e^{-x}+e^{-x}=(2-x)e^{-x}$. Pour tout x de lR, $e^{-x}>0$ donc h'(x) est du signe de 2-x ; par conséquent pour tout x de $]2;+\infty[$, $h'(x)<0$ donc h est strictement décroissante sur $[2;+\infty[$ et pour tout x de $]-\infty;2[$, $h'(x)>0$ donc h est strictement croissante sur $]-\infty;2]$.

2) Déterminons les limites de h en $-\infty$ et en $+\infty$

$\lim_{x\to-\infty}h(x)=\lim_{x\to-\infty}(x+-1)e^{-x}+2=-\infty$

Car $\lim_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty$, et, $\lim_{x\to-\infty}x-1=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}(x-1)e^{-x}+2=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}-\frac{1}{e^x}+2=2$

3) Démontrons que h s'annule une seule fois sur lR

D'après 1)

- h est continue et strictement décroissante sur $[2;+\infty[$ donc h réalise une bijection de $[2;+\infty[$ sur $\left]\lim_{x\to+\infty}h(x);h(2)\right]$, c'est-à-dire sur $\left]2;e^{-2}+2\right]$; or

$0\notin\left]2;e^{-2}+2\right]$ donc h ne s'annule pas sur $[2;+\infty[$

- h est continue et strictement croissante sur $]-\infty;2]$ donc h définit une bijection de $]-\infty;2]$ sur $\left]\lim_{x\to+\infty}h(x);h(2)\right]$ c'est-à-dire sur $\left]-\infty;e^{-2}+2\right]$

Scanned by CamScanner

or $0 \in]-\infty; e^{-2}+2]$ par conséquent l'équation h(x) = 0 admet une et une solution dans $]-\infty,2]$. Finalement on a démontré que h s'annule une seule fois sur IR en un réel α. De plus
h(-1) = -2e+2 =2(1-e)<0 et
h(0) = -1+2 =1 >0 , ainsi h(-1)*h(0) <0 et en conséquence -1<α<0
Le signe de h est donné par le tableau suivant

x	$-\infty$	α	2	$+\infty$
$h(x)$		0 ↗	$h(2)$ ↘	
signe de $h(x)$	−	0	+	+ 2

4) Encadrement de α à 10^{-2} près
h(-0,38) ≈ -0,017 et h(-0,37) ≈0,016 il en résulte : -0,38<α<-0,37

B. On a pour tout x de lR, f(x) = 2x+1-xe^{-x}

1. Etudions les variations de f
f est dérivable sur lR (car elle une somme de fonctions dérivables sur lR) ; pour tout x de IR
f'(x) = 2-e^{-x} +xe^{-x} c'est-à-dire
f'(x) = (x-1)e^{-x} +2 = h(x) , d'après donc A. 3) pour tout x de $]-\infty;\alpha]$, f'(x) ≤0 par conséquent f est décroissante sur $]-\infty;\alpha]$ et pour tout x de $[\alpha;+\infty[$, f'(x) ≥0 donc f est croissante sur $[\alpha;+\infty[$
Calculons les limites de f

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 2x+1-xe^{-x} = \lim_{x\to-\infty} x\left(2+\frac{1}{x}-e^{-x}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2x+1-xe^{-x} = +\infty, car, \lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$$

2) Démontrons que la droite (D) d'équation y = 2x +1 est une asymptote à (C)
Pour cela étudions la limite de f(x) −(2x+1) en l'infini
.f(x) −(2x+1) = 2x+1-xe^{-x} -2x-1 = -xe^{-x} or 1
$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$ donc $\lim_{x\to+\infty} f(x)-(2x+1) = 0$ par suite on en déduit que (D) est une asymptote à (C)
Précisons la position de (C) par rapport à (D) ; étudions donc le signe de f(x) − (2x+1)
On a .f(x) − (2x+1) = 2x+1-xe^{-x} -2x-1 = -xe^{-x} , pour tout x de lR ,e^{-x} >0 donc f(x) −(2x+1) est du signe de
−x , par conséquent f(x) −(2x+1) <0 pour x élément de $[0,+\infty[$ et f(x) −(2x+1) >0 pour x élément de $]-\infty;0]$, il en résulte que (C) est au dessus de (D) sur $]-\infty;0]$ et au dessous de (D) sur $[0,+\infty[$

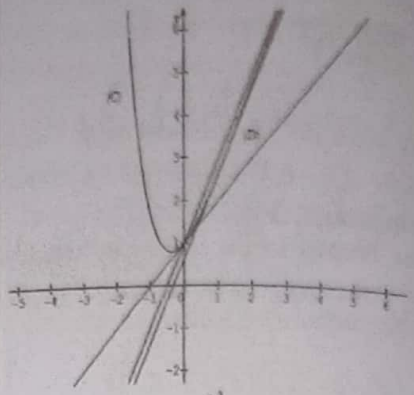
3) Déterminons les équations des tangentes (Δ) et (Δ')

(Δ) : y = f'(0) x +f(0) ; f'(0) = 1 et f(0) = 1 donc y = x+1

: (Δ') y = f'(1)(x-1) +f(1) ; f'(1) = 2 et f(1) = 1

donc (Δ') : $y = 2(x-1) + \frac{3e-1}{e}$

4) traçons (C) , (D) , (Δ) et (Δ')



5) Calculons $\int_0^\lambda xe^{-x}dx$

Intégrons par parties en posant u(x) = x , u'(x) = 1 , v'(x) = e^{-x} et v(x) = -e^{-x} , on a donc

$$\int_0^\lambda xe^{-x}dx = \left[-xe^{-x}\right]_0^\lambda - \int_0^\lambda -e^{-x}dx = \left[-xe^{-x}\right]_0^\lambda - \left[e^{-x}\right]_0^\lambda$$

$$= -\lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + 1 = -e^{-\lambda}(\lambda+1)+1$$

6) Déterminons l'aire en cm² A(λ)
On a f(x) − (2x+1) = -xe^{-x} est négative sur $[0;+\infty[$ en particulier sur $[0;\lambda[$ donc

$$A(\lambda) = \int_0^\lambda \left[(2x+1)-f(x)\right]dx u.a = \int_0^\lambda xe^{-x}dx u.a$$

suite A(λ) = $(1-\frac{\lambda+1}{e^\lambda})$*4cm²

$$\lim_{x\to+\infty} A(\lambda) = 4cm^2 \text{ Car } \lim_{x\to+\infty} \frac{\lambda+1}{e^\lambda} = 0$$

Problème 17

Partie A

1) Etude de la dérivabilité de f en 0.

On a $\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} \frac{e^{2x}-1}{e^x} = 0$ et

$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} (x - x\ln x) = 0$ et $f(0) = 0$

d'où $\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^+} f(x) = f(0) = 0$ donc f est continu en 0.

2) Dérivabilité f en 0

$$\lim_{x\to0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to0^-} \frac{e^{2x}-1}{xe^x} = \lim_{x\to0^-} \frac{e^{2x}-1}{x} \times \frac{1}{e^x}$$

$$\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to0^+} \frac{x(1-\ln x)}{x} = +\infty$$

Par suite, la fonction f n'est pas dérivable en 0 (C) admet deux demi tangentes, une demi tangente verticale à droite de 0 et une demi

Scanned by CamScanner

...ente de coefficient directeur 2 à gauche de

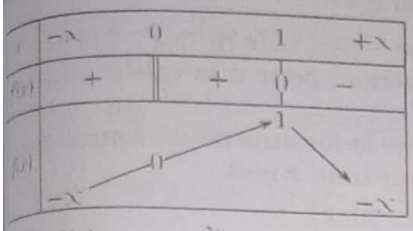
...) Etude des variations de f.

...ur tout $x \in]-\infty;0[$, $f'(x) = \frac{e^{3x}+e^{x}}{e^{2x}} = \frac{e^{2x}+1}{e^{x}}$

...0 $f'(x) > 0$ et f est strictement croissante ...r $]-\infty;0[$; Pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = -\ln x$ ...el que soit x élément]0 ;1[, f'(x) >0 et f est ...ctement croissante sur]0 ;1[...el que soit x élément de $]1;+\infty[$, f'(x)<0 et f est ...ctement décroissante sur $]1;+\infty[$

Tableau de variations

...n $f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{2x}-1}{e^{x}} = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$



$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{2x}-1}{xe^{x}} = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

...erprétation

...courbe (C) admet une branche parabolique ...axe $(O;\vec{j})$.

...) a) Montrons que h réalise une bijection de [1 ; ...∞[vers J.

...fonction h est définie, continue et strictement ...croissante sur [1 ; +∞[; par conséquent h ...alise une bijection de [1 ;+ ∞[vers f([1 ;+ ∞[) = ...∞ ;1] = J.

...) Construction de la courbe (Γ) de h^{-1}(voir fin ...du problème).

...artie B

...) a) Calcul de $\int_{\alpha}^{e} x\ln x\,dx$

...(x) = lnx et v'(x) = x ; on a donc u'(x) = $\frac{1}{x}$ et ...(x) = $\frac{x^2}{2}$

$$\int_{\alpha}^{e} x\ln x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_{\alpha}^{e} - \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{e} x\,dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\times\frac{x^2}{2}\right]_{\alpha}^{e}$$

$$= \frac{e^2}{4} - \frac{\alpha^2}{2}\ln\alpha + \frac{1}{4}\alpha^2$$

...) Déduction de I(α)

...(α) = $\int_{\alpha}^{e} f(x)dx = \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{4}\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2}\ln\alpha$

2) a) Interprétation graphique de I(α).
I(α) est l'aire en u.a du domaine plan limité par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations : x = α et x = e.

b) Calcul de $\lim_{\alpha\to0^+} I(\alpha)$

$\lim_{\alpha\to0^+} I(\alpha) = \frac{1}{4}e^2$

3) Déduction d'aire.

$A = 4cm^2 \times \lim_{\alpha\to0^+} I(\alpha) = e^2 cm^2$

4) Calcul de volume

$$V = \pi\int_{-1}^{0} f(x)dx \times u.v = \pi\left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}e^{-2} - 2\right)$$

$$= 4\pi\left(e^2 - e^{-2} - 4\right)cm^3$$

Partie C

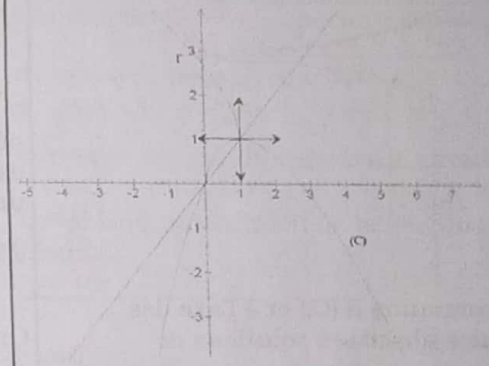
Montrons que (Γ) est une partie de (C)

$$\begin{cases} x(t) = \ln(\cos t) \\ y(t) = \dfrac{\cos^2 t - 1}{\cos t}, \quad t \in \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[\end{cases}$$

$x = \ln(\cos t) \Leftrightarrow \cos t = e^{x}$ d'où $y = \frac{e^{2x}-1}{e^{x}}$

$\lim_{t\to0^+} \ln(\cos t) = 0$ et $\lim_{t\to\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t) = -\infty$ avec $x \in]-\infty;0[$

(Γ) est donc une partie de (C) pour x<0.



Problème 18

Partie A

1. Pour tout x réel, on a puisque $e^{-x} > 0$:

$-1 \le \sin x \le 1 \Rightarrow -e^{-x} \le f(x) \le e^{-x}$

Comme $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$

le théorème des gendarmes prouve que :

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

ce qui établit que la courbe représentative de f admet une asymptote horizontale d'équation y = 0.

2. f est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$f'(x) = \left(-e^{-x}\right)\sin x + e^{-x}\cos x = e^{-x}\left(\cos x - \sin x\right)$

Scanned by CamScanner

Il reste à remarquer que :

$$\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\cos x\cos\frac{\pi}{4}-\sin x\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\cos x-\sin x$$

ce qui établit bien pour tout x réel l'égalité :

$$f'(x)=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)e^{-x}$$

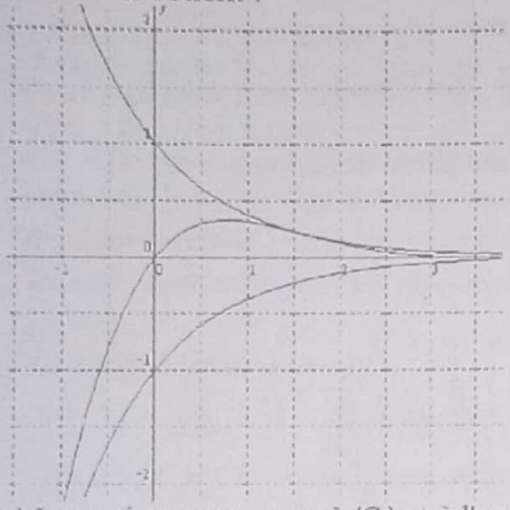
3. Le tableau complété est le suivant :

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{4}$		π
$x+\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{4}$
Signe de $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	+	0	−	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Le tableau de variation est alors :

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{4}$		π
$f'(x)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	+	0	−	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$f(x)$	$e^{\frac{\pi}{2}}$	↗	$\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}$	↘	0

4. On obtient :



a) Les points communs à (C_f) et à l'axe des abscisses ont des abscisses solutions de l'équation :

$e^{-x}\sin x=0\Leftrightarrow\sin x=0\Leftrightarrow x=k\pi$ avec k dans $\mathbb{Z}$

Les solutions dans $\left[-\frac{\pi}{2};\pi\right]$ sont alors 0 et π.

Les coordonnées des points d'intersection sont (0 ;0) et $(\pi;0)$

b) Les points communs à (C_f) et à (C_1) ont des abscisses solutions de l'équation :

$e^{-x}\sin x=-e^{-x}\Leftrightarrow\sin x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ avec k dans $\mathbb{Z}$

. La solution dans $\left[-\frac{\pi}{2},\pi\right]$ est alors $-\frac{\pi}{2}$. Les coordonnées du point d'intersection est $\left(-\frac{\pi}{2},-e^{\frac{\pi}{2}}\right)$.

c) Les points communs à (C_f) et à (C_2) ont des abscisses solutions de l'équation :

$e^{-x}\sin x=e^{-x}\Leftrightarrow\sin x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ avec k dans $\mathbb{Z}$

. La solution dans $\left[-\frac{\pi}{2},\pi\right]$ est alors $\frac{\pi}{2}$. Les coordonnées du point d'intersection est $\left(\frac{\pi}{2},e^{\frac{\pi}{2}}\right)$.

5. La condition

$$|f(x)|\le 10^{-2}\Leftrightarrow\left|e^{-x}\sin x\right|\le 10^{-2}$$

est réalisée dès que $e^{-x}\le 10^{-2}$ car

$\left|e^{-x}\sin x\right|\le e^{-x}|\sin x|\le e^{-x}$

Il suffit donc que : $-x\le -2\ln 10\Rightarrow x\ge 2\ln 10$

On peut donc prendre pour α la valeur $2\ln 10$.

PARTIE B

Par application de la formule de dérivation d'un produit, on a pour tout x réel :

$f'(x)=e^{-x}(\cos x-\sin x)$

$f^{(2)}(x)=-2(\cos x)e^{-x}$

$f^{(3)}(x)=2e^{-x}(\sin x+\cos x)$

$f^{(4)}(x)=-4(\sin x)e^{-x}$

On remarque que pour tout x réel, on a:

$f^{(4)}(x)=-4f(x)$

1. Les primitives de f sur R vérifient donc :

$f^{(3)}(x)=-4F(x)+k$

où k est une constante réelle. On peut par exemple choisir 0 pour cette constante, donc une primitive F de f est donnée par :

$$F(x)=-\frac{1}{4}f^{(3)}(x)=-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)$$

On a évidemment : $I=F(\pi)-F(0)=\frac{e^{-\pi}+1}{2}$

PARTIE C

q.Il suffit de remplacer n par 0. Comme f est à valeurs positives sur $[0;\pi]$, on peut interpréter I_0 comme l'aire du domaine plan compris entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de f et les deux droites verticales d'équation x = 0 et $x=\pi$.

2.On a évidemment :

$$I_n=F((2n+1)\pi)-F(2n\pi)=\frac{e^{-2n\pi}\left(e^{-\pi}+1\right)}{2}$$ car

$\cos 2n\pi=1$; $\sin 2n\pi=0$

$\cos((2n+1)\pi)=-1$; $\sin((2n+1)\pi)=0$

1.Comme I_n ne s'annule pas, formons pour tout n de $\mathbb{N}$:

Scanned by CamScanner

$\frac{e^{2(n+1)x}}{e^{2nx}} = e^{-2x}$

On a donc démontré que la suite (I_n) est une suite géométrique de raison e^{-2x}.

Comme $0 < e^{-2x} < 1$

la suite (I_n) converge vers 0 d'après les résultats du cours.

Problème 19

Partie A

1. Pour tout réel x de]-3 ;3[, -x ∈]-3;3[et

$g(-x) = \ln\frac{3-x}{3+x} = -\ln\frac{3+x}{3-x} = -g(x)$

Par suite g est impaire.

2. a. On obtient facilement :

$\lim_{x\to 3^-}\frac{3+x}{3-x} = 0^+ \Rightarrow \lim_{x\to 3^-} g(x) = -\infty$

De même : $\lim_{x\to 3^-}\frac{3+x}{3-x} = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to 3^-} g(x) = +\infty$

b. g est du type lnu de dérivée $\frac{u'}{u}$. Or $u(x) = \frac{3+x}{3-x}$

donc $u'(x) = \frac{6}{(3-x)^2}$ et par suite

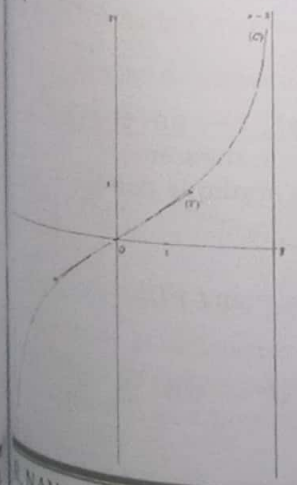
$g'(x) = \frac{6}{(3+x)(3-x)}$

Comme g'(x)>0 sur [0 ;3[, il en résulte que g est strictement croissante sur cet intervalle et donc sur l'intervalle]-3 ;3[puisque cette fonction est impaire. D'où son tableau de variation

x	−3		3
$g(x)$	‖ −∞	↗	‖ +∞

3. a. La tangente (T) a pour équation y – g(0) = g'(0)*x. Soit $y = \frac{2}{3}x$.

b. Représentations graphiques de (C) et (T) à l'échelle 1/2:



4. La fonction g est croissante sur]-3 ;3[, g(0) = 0, donc $g(x) \le 0$ sur]-3 ;0] et $g(x) \ge 0$ sur [0 ;3[.

5. a. La fonction $x \mapsto xg(x)$ a pour dérivée première $x \mapsto g(x) + xg'(x)$. Soit $x \mapsto g(x) + \frac{6x}{9-x^2}$

b. Soit A l'aire, exprimée en cm ^{2}, à calculer.

$A = 16\times\int_0^1 g(x)dx\,cm^2$

Or d'après **a.** ci-dessus

$g(x) = \left[xg(x)\right]' - xg'(x) = \left[xg(x)\right]' + 3\times\left[\frac{-2x}{9-x^2}\right]$

Une primitive de $x \mapsto \frac{-2x}{9-x^2}$ est $x \mapsto \ln(9-x^2)$,

donc

$A = 16\left[xg(x) + 3\ln(9-x^2)\right]_0^1\,cm^2$

Par suite $A = 32(5\ln 2 - 3\ln 3)cm^2$, soit

$A \approx 5,44cm^2$ par excès.

Partie B

1. a. $x(-t) = -t(3-t^2) = -x(t)$; $y(-t) = -tg(-t)$

et comme g est impaire, y(-t) = tg(t) = y(t)..

b. Il résulte du **a.** ci-dessus que les points M(-t) et M(t) ont même ordonnée et des abscisses opposées : on passe donc du point M(t) au point M(-t) par la symétrie

par rapport à $\left(O,\vec{v}\right)$ qui constitue donc un axe de symétrie pour la courbe Γ.

2. $x'(t) = 3 - t^2 - 2t^2 = 3(1+t)(1-t)$.

Par suite x'(t) est du signe de 1 - t sur [0 ;2], soit $x'(t) \le 0$ sur [0 ;1] et $x'(t) \ge 0$ sur [1 ;2].

Le tableau de variation de la fonction x en résulte :

t	0		1		2
$x(t)$	0	↗	2	↘	−2

3. y'(t) = g(t) + tg'(t). Or d'après **A.2.a.**, g'(t) sur]-3 ;3[donc sur [0 ;2], et d'après **A.4.**, $g(t) \ge 0$ sur [0 ;3[donc sur [0 ;2].

Il en résulte que $y'(t) \ge 0$ sur [0 ;2], avec y'(t) = 0 seulement pour t = 0. Donc y est strictement croissante sur [0 ;2]

Scanned by CamScanner

4. Tableau des variations conjointes de x et y:

t	0		1		2
$x(t)$	0	↗	2	↘	-2
$y(t)$	0	↗	$\ln 2$	↗	$2\ln 5$

5. x(t) = 0ssi t =0 ou $3 - t^2 = 0$. Donc x(t) = 0 ssi $t \in \left\{-\sqrt{3}; 0; \sqrt{3}\right\}$.

Les points M($\sqrt{3}$) et $M(-\sqrt{3})$ ont même ordonnée $\sqrt{3}\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$(cf. la symétrie de($\Gamma$) :. Le point M(0) a pour ordonnée 0.

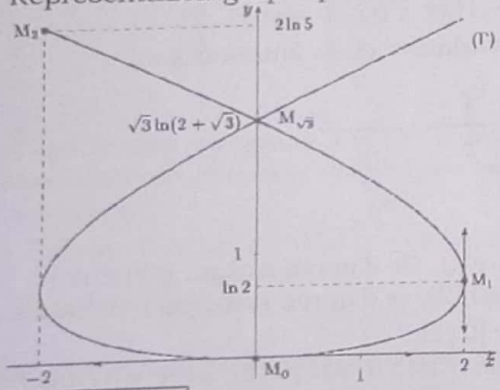
6. a. Les points M(0), M(1),M($\sqrt{3}$) et M(2) sont construits sur le graphique de Γ.

b. Lorsque $x'(t) \neq 0$ ou $y'(t) \neq 0$ un vecteur directeur de la tangente en M(t) à Γ a pour coordonnées (x'(t) ;y'(t)).

x'(0) = 3 et y'(0) = 0 donc en M(0) un vecteur directeur de la tangente à Γ a pour coordonnées (3 ;0), vecteur colinéaire à $\vec{u}(1;0)$; x'(1) = 0 et y'(1) = $\ln 2 + \frac{3}{4}$ donc en M(1) un vecteur directeur de la tangente à Γ a pour coordonnées $(0\ ;\ \ln 2 + \frac{3}{4})$, vecteur colinéaire à $\vec{v}(0;1)$.

Ces tangentes apparaissent sur le graphique de Γ.

Représentation graphique de Γ à l'échelle 1/2:



Problème 20

Partie A

1. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $2+\cos x \geq 1$ donc $2+\cos x \geq 0$, et $e^{1-x} > 0$. Par suite pour tout x de $\mathbb{R}$, f(x) >0.

2. a. On développe :

$$\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos x\cos\frac{\pi}{4} - \sin x\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \cos x - \sin x$$

b. Il résulte de la question précédente que pour tout xde $\mathbb{R}$,

$\cos x + \sin x \geq -\sqrt{2}$ Donc $2+\cos x+\sin x \geq 2-\sqrt{2}$ soit $2+\cos x+\sin x > 0$

c. Pour tout x de $\mathbb{R}$,

$f'(x) = -\sin x e^{1-x} - (2+\cos x)e^{1-x}$

$= e^{1-x}(-2-\sin x-\cos x)$

Or pour tout x de $\mathbb{R}$, $e^{1-x} > 0$ et $(2-\cos x-\sin x) < 0$. Donc f'(x)<0 sur $\mathbb{R}$ Par suite f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

3. a. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $2 + \cos(x) \in [1;3]$.

Par suite $e^{1-x} \leq f(x) \leq 3e^{1-x}$

b. On a :

$\lim\limits_{x\to-\infty} 1-x = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-x} = +\infty$

Comme $f(x) \geq e^{1-x}$, il en résulte que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

De manière évidente : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{1-x} = 0$

Par suite de l'encadrement de f(x) établi en a., $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

c. Il résulte de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ que la droite d'équation y = 0 est asymptote à la courbe C au voisinage de $+\infty$.

4. a. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0;\pi]$, strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0;\pi]$.

$f(0) = 3e > 3$; $f(\pi) = e^{1-\pi}$.

Il résulte des conditions précédentes que l'équation f(x) = 3 admet donc sur l'intervalle $[0;\pi]$ une solution unique.

b. Une calculatrice donne facilement $\alpha \in]0{,}87;0{,}88[$.

5. Tracé de la représentation graphique de f : voir en fin de corrigé.

Partie B

1. Sur l'intervalle [0 ;1] f est à valeur positive donc, en unités d'aires, $A = \int_0^1 f(x)dx$

soit $A = \int_0^1 2e^{1-x}dx + \int_0^1 \cos x e^{1-x}dx$

$= \left[-2e^{1-x}\right]_0^1 + \int_0^1 \cos x e^{1-x}dx$

$= -2 + 2e + \int \cos x e^{1-x}dx$

2. a. Les fonctions $t \mapsto \cos t$, $t \mapsto \sin t$ et $t \mapsto e^{1-t}$ sont deux fois dérivables : le théorème d'intégration par parties s'applique donc.

Calcul de I :

posons :

$u(t) = \cos t$ $v(t) = e^{1-t}$ $u'(t) = -\sin t$ $v'(t) = -e^{1-t}$

On a :

$I = \left[-\cos t e^{1-t}\right]_0^1 - \int_0^1 \sin t e^{1-t}dt = -\cos 1 + e - J$

Calcul de J :

Scanned by CamScanner

Posons : $u(t)=\sin t$ $v(t)=e^{1-t}$ $u'(t)=\cos t$ $v'(t)=-e^{1-t}$

$J=\left[-\sin t e^{1-t}\right]_0^1+\int_0^1 \cos t e^{1-t}dt=-\sin 1+I$

b. A l'aide des deux relations précédentes on déduit :

$I=-\cos 1+e+\sin 1-I \Rightarrow 2I=e+\sin 1-\cos 1$

D'où $I=\frac{1}{2}(e+\sin 1-\cos 1)$

3. Par suite $A=2e-2+\frac{1}{2}(e+\sin 1-\cos 1)$

Soit, en unités d'aire,

$A=\frac{5}{2}e-2+\frac{1}{2}(\sin 1-\cos 1)\approx 4,94$

Partie C

1. a. La fonction h est la somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$: la première comme fonction constante ; la deuxième comme rapport de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, la fonction dénominateur n'étant pas nulle sur $\mathbb{R}$. Il en résulte que h admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

b. La fonction $x\mapsto\frac{-\sin x}{2+\cos x}$

du type $\frac{u'}{u}$, avec u>0 sur $\mathbb{R}$, admet comme primitives sur $\mathbb{R}$ $x\mapsto\ln(2+\cos x)$. Par suite les primitives de h sur $\mathbb{R}$ sont du type

$x\mapsto -x+\ln(2+\cos x)+k$

Celle qui prend en 0 la valeur 1 + ln3 satisfait à ln3 + k = 1 + ln3. D'où k = 1. Par suite

H(x) = $-x+\ln(2+\cos t)+1$

2. D'après **A 1**, f(x)>0. D'où pour tout x de $\mathbb{R}$,

$\ln(f(x))=\ln(2+\cos x)+1-x=H(x)$

3. On a évidemment $H'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$

Or Pour tout x de $\mathbb{R}$, f'(x)<0 et f(x)>0, donc H'(x)>0: la fonction H est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

4. On trouve

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\ln(f(x))=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$; $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\ln(f(x))=-\infty$

D'où le tableau de variation :

x	$-\infty$		$+\infty$
H(x)	$+\infty$	↘	$-\infty$

5. Posons $\delta(x)=1-x+\ln(2+\cos x)-(-x+1)$ représentant la différence des ordonnées entre deux points de même abscisse situés l'un sur Γ et l'autre sur Δ. La position relative de Γ et Δ est donnée par le signe de $\delta(x)$ Après réduction.

$\delta(x)=\ln(2+\cos x)$

Or $1\le 2+\cos x\le 3$ et ln est croissante sur [1 ;3], donc $\delta(x)\in[0,\ln 3]$. Soit $\delta(x)\ge 0$ Γ est donc au-dessus de Δ.

6. Les points communs à Γ et Δ ont des abscisses solutions de $\delta(x)=0$. Or

$\delta(x)=0 \Leftrightarrow 2+\cos x=1 \Leftrightarrow \cos x=-1$.

Par suite les points communs à Γ et Δ ont pour abscisses $\pi+2k\pi$.

7. a. T a pour équation $y=H'(0)\times x+H(0)$

Soit $y=-x+1+\ln 3$

b. La position relative de Γ et T est donnée par le signe de

$\theta(x)=1-x+\ln(2+\cos x)-(1-x+\ln 3)$

Après réduction $\theta(x)=\ln\frac{2+\cos x}{3}$

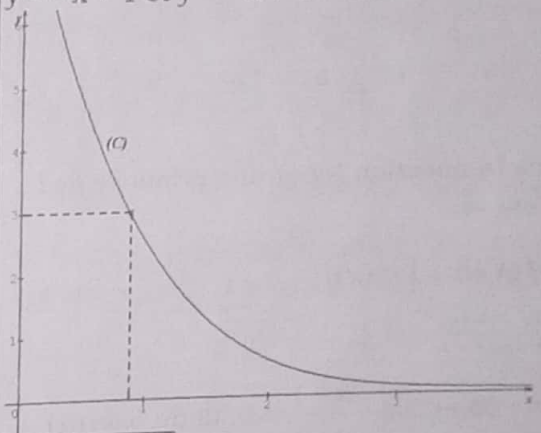
Or $\frac{1}{3}\le\frac{2+\cos x}{3}\le 1$ ln est croissante sur $\left[\frac{1}{3};1\right]$ donc

$-\ln 3\le\theta(x)\le 0$

Soit $\theta(x)\le 0$: T est au-dessus de Γ.

8. Il résulte des questions **3.** et **4.** que Γ est contenue entre les droites parallèles Δ et T d'équations respectives

y = - x + 1 et y = - x + 1 + ln3.



Problème 21

I- a. $X=\frac{2}{x-1}\Leftrightarrow x-1=\frac{2}{X}\Leftrightarrow x=1+\frac{2}{X}$, donc

$\frac{2}{(x-1)^2}e^{\frac{x+1}{x-1}}=\frac{2}{4}e^{\frac{2}{X}\left(1+\frac{2}{X}\right)}=\frac{X^2}{2}e^{X+1}=\frac{eX^2}{2}e^X$

Quand x tend vers 1 (par valeurs inférieures), X tend vers $-\infty$. Comme $\lim\limits_{X\to-\infty}X^2e^X=0$

on a donc $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{X\to-\infty}\frac{X^2}{2}e^X=0$.

Scanned by CamScanner

b. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ car $\lim_{x\to-\infty} \frac{2}{(x-1)^2} = 0$ et

$\lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} e^{\frac{x+1}{x-1}} = e$

c .L'axe des abscisses est donc une asymptote à la courbe Γ.

d. Pour tout x de $]-\infty;1[$:

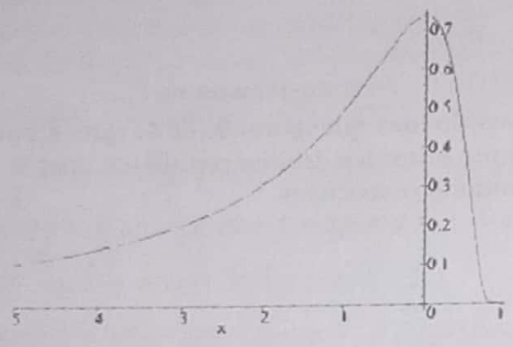
$$v'(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)' e^{\frac{x+1}{x-1}} = -\frac{2}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}}$$

e. Pour tout x de $]-\infty;1[$:

$$f'(x) = \left(\frac{2}{(x-1)^2}\right)' e^{\frac{x+1}{x-1}} + \frac{2}{(x-1)^2} v'(x) = -\frac{4x}{(x-1)^4} e^{\frac{x+1}{x-1}}$$

2. Le signe de f'(x) est celui de(-4x), donc f est croissante $]-\infty;0[$ et décroissante sur $]0;1[$.

3.la courbe représentative de f est :



II- 1.D'après la question I-2)a) une primitive de f sur $]-\infty;1[$ est -v.

$$g(\alpha) = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = [-v(x)]_{-\alpha}^{\alpha}$$

$$= e^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}} - e^{\frac{-\alpha+1}{-\alpha-1}}$$

3. $\lim_{\alpha\to1} \frac{\alpha+1}{\alpha-1} = -\infty$ et $\lim_{\alpha\to1} \frac{-\alpha+1}{-\alpha-1} = 0$, donc $\lim_{\alpha\to1} g(\alpha) = 1$.

4.La fonction f étant à valeurs positives, l'aire A est égale en cm^2 :

$$A = 4\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 4\left(-e^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}} + e^{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}}\right)$$

III- a. Sur $]-\infty;0[$ f est dérivable et strictement croissante. Elle définit donc une bijection de $]-\infty;0[$ sur $]0;2e^{-1}[$ qui contient $\frac{1}{2}$. Donc l'équation

$f(x) = \frac{1}{2}$ a une unique solution sur cet intervalle.

Comme $f(-1) = \frac{1}{2}$, on a déterminé cette solution.

Sur $]0;1[$, f est dérivable et strictement décroissante. Elle définit donc une bijection de $]0,1[$ sur $]0,2e^{-1}[$ qui contient $\frac{1}{2}$. Donc l'équation

$f(x) = \frac{1}{2}$ a une unique solution β sur cet intervalle.

b.f(0,5) ≈0, 398 3 et f(0,4) ≈0, 538 73 donc 0, 4 < β < 0, 5

f(0,43) ≈0, 500 88 et f(0,44) ≈0, 487 41 donc 0, 43 < β < 0, 44

3.Si a est un élément de $]-\infty;1[$, alors f(a) appartient à $\left]0;\frac{2}{e}\right[$. La courbe représentative de f coupe donc la droite horizontale d'équation y = f(a) en deux points, sauf pour $f(a) = \frac{2}{e}$, c'est à dire lorsque a = 0. En conclusion, il y a deux solutions pour tout a non nul, et une seule solution si a = 0.

Scanned by CamScanner

ercice 1

Vérifions que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 4 - \frac{6}{u_n + 1}$

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1} = \frac{4(u_n + 1) - 4 - 2}{u_n + 1} = 4 - \frac{6}{u_n + 1}$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 4 - \frac{6}{u_n + 1}$

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \le u_n \le 2$

isonnons par récurrence

oit P la propriété : « $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \le u_n \le 2$ »

our $n = 0$, on a $u_0 = \frac{3}{2}$ et $1 \le \frac{3}{2} \le 2$ soit $1 \le u_0 \le 2$; par

onséquent la propriété P est vraie pour n = 0.

Supposons la propriété vraie à l'ordre k et

émontrons qu'elle est vraie à l'ordre k + 1.

Par hypothèse $1 \le u_k \le 2$

$1 \le u_k \le 2 \Leftrightarrow 2 \le u_k + 1 \le 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \le \frac{1}{u_k + 1} \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 \le \frac{6}{u_k + 1} \le 3$

$\frac{6}{u_k + 1} \le 3 \Leftrightarrow -3 \le -\frac{6}{u_k + 1} \le -2$

$\Leftrightarrow 1 \le 4 - \frac{6}{u_k + 1} \le 2 \Leftrightarrow 1 \le u_k + 1 \le 2$

insi la propriété est vraie à l'ordre k + 1. D'où

$\forall n \in \mathbb{N}, 1 \le u_n \le 2$.

Etudions la monotonie de (u_n)

$u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1} - u_n = \frac{4u_n - 2 - u_n^2 - u_n}{u_n + 1}$

$\frac{-u_n^2 + 3u_n - 2}{u_n + 1} = \frac{-(u_n^2 - 3u_n + 2)}{u_n + 1} = \frac{-(u_n - 1)(u_n - 2)}{u_n + 1}$

En remarquant que $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$

D après b) $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \le u_n \le 2$, on en déduit que

$(u_n - 1)(u_n - 2) \le 0$ et $u_{n+1} - u_n \ge 0$. D'où la suite (u_n) est

roissante.

Montrons que la suite (v_n) est géométrique

$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} - 1} = \frac{\frac{4u_n - 2}{u_n + 1} - 2}{\frac{4u_n - 2}{u_n + 1} - 1} = \frac{4u_n - 2 - 2u_n - 2}{4u_n - 2 - u_n - 1}$

$\frac{2u_n - 4}{3u_n - 3} = \frac{2(u_n - 2)}{3(u_n - 1)} = \frac{2}{3} \times \frac{u_n - 2}{u_n - 1} = \frac{2}{3} v_n$

On a donc $v_{n+1} = \frac{2}{3} v_n$; d'où la suite (v_n) est une suite

géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$.

Exprimons v_n en fonction de n.

(v_n) étant une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$ et de

premier terme $v_0 = -1$ on a $v_n = -\left(\frac{2}{3}\right)^n$

Exprimons u_n en fonction de n.

$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 1} \Leftrightarrow v_n(u_n - 1) = u_n - 2 \Leftrightarrow v_n u_n - v_n = u_n - 2$

$\Leftrightarrow u_n(v_n - 1) = v_n - 2 \Leftrightarrow u_n = \frac{v_n - 2}{v_n - 1}$

Donc $u_n = \frac{-\left(\frac{2}{3}\right)^n - 2}{-\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 2}{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}$

3.a. Justifions que la suite (u_n) est minorée par $\frac{3}{2}$

Comme la suite (u_n) est croissante alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \ge u_0$

or $u_0 = \frac{3}{2}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \ge \frac{3}{2}$. D'où la suite (u_n) est

minorée par $\frac{3}{2}$.

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{2}{u_n + 1} \le \frac{4}{5}$

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \ge \frac{3}{2} \Leftrightarrow u_n + 1 \ge \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{u_n + 1} \le \frac{2}{5}$

$\Leftrightarrow \frac{2}{u_n + 1} \le \frac{4}{5}$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{2}{u_n + 1} \le \frac{4}{5}$

b. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, |w_n| \le \left(\frac{4}{5}\right)^n$

Soit la propriété P : « $\forall n \in \mathbb{N}, |w_n| \le \left(\frac{4}{5}\right)^n$ »

Pour n = 0 $w_0 = u_0 - 2 = \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2}; |w_0| = \frac{1}{2} \le 1 = \left(\frac{4}{5}\right)^0$

d'où $|w_0| \le \left(\frac{4}{5}\right)^0$ et la propriété P est vraie pour n = 0

Supposons la propriété P vraie à l'ordre k et

démontrons que la propriété P est vraie à l'ordre k + 1

$w_{k+1} = u_{k+1} - 2 = 4 - \frac{6}{u_k + 1} - 2 = 2 - \frac{6}{u_k + 1}$

$w_{k+1} = \frac{2u_k + 2 - 6}{u_k + 1} = \frac{2u_k - 4}{u_k + 1} = \frac{2(u_k - 2)}{u_k + 1} = \frac{2w_k}{u_k + 1}$

$|w_{k+1}| = \frac{2}{u_k + 1}|w_k|$ or par hypothèse $|w_k| \le \left(\frac{4}{5}\right)^k$ et

$\frac{2}{u_k + 1} \le \frac{4}{5}$ donc on en déduit que $|w_{k+1}| \le \left(\frac{4}{5}\right)^k \left(\frac{4}{5}\right)$ soit

$|w_{k+1}| \le \left(\frac{4}{5}\right)^{k+1}$; la propriété est donc vraie à l'ordre

$k + 1$. D'où $\forall n \in \mathbb{N}, |w_n| \le \left(\frac{4}{5}\right)^n$

c. Calculons $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n$

Scanned by CamScanner

$\frac{4}{5} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n = 0$

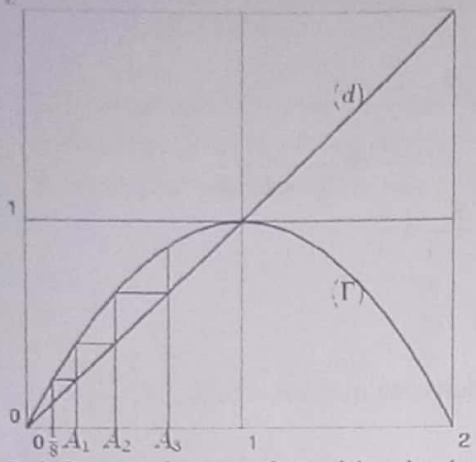
$\forall n \in \mathbb{N}, |w_n| \le \left(\frac{4}{5}\right)^n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$

$w_n = u_n - 2 \Leftrightarrow u_n = w_n + 2$

$u_n = w_n + 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$

Exercice 2 1.a) $u_1 = \frac{15}{64} \approx 0,23$ et $u_2 = \frac{1695}{4096} \approx \simeq 0,41$.

b) Etudions sommairement la fonction f sur [0, 2]. On a $f'(x) = 2(1 - x)$, et donc f est croissante sur [0, 1] et décroissante sur [1, 2]. La figure suivante répond aux ques tions (b) et (c).



2.a) On prend comme hypothèse de récurrence à l'ordre n la propriété P(n) : $0 < u_n < 1$.

- P(0) est vrai, puisque comme $u_0 = a$, on a bien $0 < u_0 < 1$.
- On suppose que P(n) est vraie. On remarque que la fonction f est strictement croissante sur [0, 1], et donc que :

$0 < u_n < 1 \Rightarrow f(0) < f(u_n) < f(1) \Rightarrow 0 < u_{n+1} < 1$ ce qui établit bien P(n + 1) et achève la démonstration par récurrence.

b) Formons pour tout entier n :

$u_{n+1} - u_n = u_n(2 - u_n) - u_n = u_n(1 - u_n)$

D'après la question précédente, comme u_n appartient à l'intervalle]0, 1[, cette différence est positive, et donc la suite (u_n) est croissante.

c) La suite (u_n) est croissante et majorée par 1. Elle est donc convergente.

3.a) il vient $v_{n+1} = 1 - u_{n+1} = 1 - u_n(2 - u_n) = 1 - 2u_n + u_n^2$

$= (1 - u_n)^2 = v_n^2$

b) A l'aide d'une récurrence évidente, on établit que pour tout entier n, on a $v_n = v_0^{2n}$. Comme $v_0 = \frac{7}{8}$, on a $v_n = \left(\frac{7}{8}\right)^{2n}$

c) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n = +\infty$ et que $0 < \frac{7}{8} < 1$, on peut dire que la suite (v_n) converge vers 0, et donc que la suite (u_n) converge vers 1.

Exercice 3

A. Montrons que la suite (U_n) est constante pour deux valeurs de U_1

(U_n) sera constante lorsque l'on aura $U_n = \frac{U_n + 6}{U_n + 2}$

tout entier naturel n, et en particulier $U_1 = \frac{U_1 + 6}{U_1 + 2}$

$U_1 = \frac{U_1 + 6}{U_1 + 2}$ amène une équation du second degré

$U_1^2 + 2U_1 - U_1 - 6 = 0$ c'est-à-dire

$U_1^2 + U_1 - 6 = 0$. Le discriminant de cette équation est

$\Delta = 1 + 24 = 25$, les solutions sont donc

$U_1 = \frac{-1-5}{2} = -3$ et $U_1 = \frac{-1+5}{2} = 2$

D'où (U_n) est constante pour $U_1 = -3$ et $U_1 = 2$

B. Démontrons que $\frac{U_{n+1} + 3}{U_{n+1} - 2} = -4\frac{U_n + 3}{U_n - 2}$

on a : $\frac{U_{n+1} + 3}{U_{n+1} - 2} = \frac{\frac{U_n + 6}{U_n + 2} + 3}{\frac{U_n + 6}{U_n + 2} - 2} = \frac{\frac{4U_n + 12}{U_n + 2}}{\frac{2 - U_n}{U_n + 2}} = \frac{4U_n + 12}{2 - U_n}$.

$= \frac{-4(-U_n - 3)}{2 - U_n} = -4 \times \frac{U_n + 3}{U_n + 2}$

d'où le résultat

C. On pose $V_n = \frac{U_n + 3}{U_n - 2}$

1. Démontrons que la suite (V_n) est une suite géométrique

$V_{n+1} = \frac{U_{n+1} + 3}{U_{n+1} - 2}$, d'après la question précédente on a

$\frac{U_{n+1} + 3}{U_{n+1} - 2} = -4\frac{U_n + 3}{U_n - 2}$ donc on en déduit :

$V_{n+1} = -4\frac{U_n + 3}{U_n - 2}$ c'est-à-dire $V_{n+1} = -4V_n$ d'où (V_n) est

suite géométrique de raison -4 et de premier terme

$V_1 = \frac{U_1 + 3}{U_1 + 2} = -4$

2. Démontrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} |V_n| = +\infty$

On a $V_n = V_1(-4)^{n-1} = -4(-4)^{n-1} = (-4)^n$, $|V_n| = |-4|^n$ or

$\lim\limits_{n\to+\infty} 4^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |V_n| = +\infty$

Calculons la limite de la suite (U_n)

$V_n = \frac{U_n + 3}{U_n - 2} \Leftrightarrow V_n(U_n - 2) = U_n + 3 \Leftrightarrow U_n(V_n - 1) = 2V_n$

$\Leftrightarrow U_n = \frac{2V_n + 3}{V_n - 1}$

(car $V_n \neq 1$ pour $n \geq 2$)

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{V_n(2 + \frac{3}{V_n})}{V_n(1 - \frac{1}{V_n})} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2 + \frac{3}{V_n}}{1 - \frac{1}{V_n}} = 2$

car $\lim\limits_{n\to+\infty} |V_n| = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{V_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{V_n} = 0$

Exercice 4

$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + \frac{14}{3} \end{cases}$

Scanned by CamScanner

Démontrons par récurrence que pour tout entier
turel n , $U_n<U_{n+1}$
$=1$ et $U_1=5$, donc $U_0<U_1$
pour tout entier naturel p quelconque $U_p<U_{p+1}$ alors
$<\frac{1}{3}U_{p+1}$ ce qui implique $\frac{1}{3}U_p+\frac{14}{3}<\frac{1}{3}U_{p+1}+\frac{14}{3}$
$_{+1}<U_{p+2}$,
st-à-dire $U_{p+1}<U_{p+2}$.
propriété « $U_n<U_{n+1}$ » est donc vraie pour n = 0 et
tout p de IN , si elle est vraie pour p alors elle est
aie pour p+1 , donc la propriété est vraie pour tout
ier naturel n , autrement dit pour tout entier naturel
$_{+1}$ d'où (U_n) est une suite croissante
a. Pour tout réel x,
$=\frac{1}{3}x+\frac{14}{3}\Leftrightarrow\frac{2}{3}x=\frac{14}{3}\Leftrightarrow x=7$ donc 7 est la seule
ution de l'équation $x=\frac{1}{3}x+\frac{14}{3}$

b. Par définition de la suite (U_n) , pour tout n de IN ,
$=\frac{1}{3}U_n+\frac{14}{3}$; si la suite (U_n) converge , en notant l le
el qui est sa limite , on obtient par passage à la limite
$=\frac{1}{3}l+\frac{14}{3}$ donc d'après la question précédente $l=7$
On a ainsi établi que si la suite (U_n) converge, alors sa
mite est 7
$V_n=U_n-7$; pour tout n de IN $V_{n+1}=U_{n+1}-7$ donc
$_{+1}=\frac{1}{3}U_n+\frac{14}{3}-7=\frac{1}{3}U_n-\frac{7}{3}=\frac{1}{3}(U_n-7)$ d'où pour
out n de IN , $V_{n+1}=\frac{1}{3}V_n$ ce qui prouve que la suite (V_n)
st géométrique de raison $\frac{1}{3}$ on en déduit que pour tout
n de IN $V_n=V_0\times\left(\frac{1}{3}\right)^n=(U_0-7)\left(\frac{1}{3}\right)^n=-6\left(\frac{1}{3}\right)^n=-\frac{2}{3^{n-1}}$ et
$_n=7-\frac{2}{3^{n-1}}$. Enfin il est clair que la suite (V_n) a pour
mite 0 et que la suite (U_n) est convergente, de limite 7

Exercice 5

$_{+1}=\frac{U_n}{2+U_n^2}$

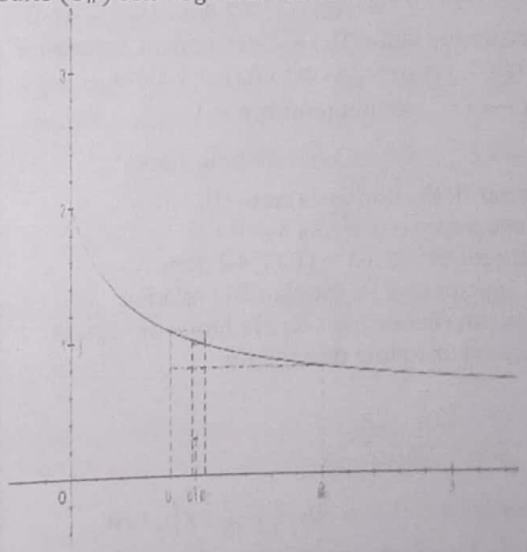
pour tout entier naturel n : $|U_{n+1}|=\left|\frac{U_n}{2+U_n^2}\right|=\frac{|U_n|}{2+U_n^2}$ de
$\text{s } 2+U_n^2\geq 2$ donc $|U_{n+1}|\leq\frac{|U_n|}{2}$
Démontrons par récurrence que pour tout n de IN ,
$_n|\leq\frac{|U_0|}{2^n}$
$\frac{|U_0|}{2^0}=|U_0|$ Donc $|U_0|\leq\frac{|U_0|}{2^0}$. La proposition « $|U_n|\leq\frac{|U_0|}{2^n}$ »
ue vraie pour n = 0
soit p un entier naturel quelconque, supposons
$_p|\leq\frac{|U_0|}{2^p}$ d'après la question 1° $|U_{p+1}|=\frac{|U_p|}{2}$ donc
d'après l'hypothèse de récurrence $|U_{p+1}|\leq\frac{1}{2}\times\frac{|U_0|}{2^p}$ ce qui
implique $|U_{p+1}|\leq\frac{|U_0|}{2^{p+1}}$ donc pour tout n de IN $|U_n|\leq\frac{|U_0|}{2^n}$
, on a pour tout n de IN la suite : $n\mapsto\left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge vers
0 on en déduit que la suite (U_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=0$

exercice 6

$U_0=2$ et $U_{n+1}=\frac{U_n+2}{2U_n+1}$

1. a. Une récurrence élémentaire prouve : pour tout n de IN $U_n>0$
En effet $U_0=2$ donc $U_0>0$ et pour tout entier naturel p il est clair que si $U_p>0$ alors $\frac{U_p+2}{2U_p+1}>0$ c'est-à-dire $U_{p+1}>0$

b. Supposons que la suite (U_n) converge , soit alors l le réel qui est sa limite ; la suite (U_n) étant à termes positifs : $l>0$ de plus
$\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n+2)=l+2, et, \lim\limits_{n\to+\infty}(2U_n+1)=2l+1$ et $2l+1\neq 0$
donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{U_n+2}{2U_n+1}=\frac{l+2}{2l+1}$ et bien sur $\lim\limits_{n\to+\infty}U_{n+1}=l$, par passage à la limite dans la relation définissant (U_n) on obtient $l=\frac{l+2}{2l+1}$
Enfin $l=\frac{l+2}{2l+1}\Leftrightarrow 2l^2+l=l+2\Leftrightarrow l^2=1$ ce qui implique, sachant que le réel l est positif $l=1$ d'où si la suite (U_n) converge alors sa limite est $1=1$



Le graphique invite à conjecturer la suite (U_n) est convergente

1. Pour tout n de IN $Vn=\frac{U_n-1}{U_n+1}$

a. La suite (U_n) étant à termes positifs, la suite (V_n) est définie sur IN , pour tout n de IN $V_{n+1}=\frac{U_{n+1}-1}{U_{n+1}+1}$ donc

Scanned by CamScanner

$V_{n+1} = \frac{U_n + 2 - (2U_n + 1)}{U_n + 2 + (2U_n + 1)} = \frac{-U_n + 1}{3U_n + 3} = -\frac{1}{3} \times \frac{U_n - 1}{U_n + 1}$ et

finalement $V_{n+1} = -\frac{1}{3} V_n$ ce qui prouve que (V_n) est une

suite géométrique de raison $-\frac{1}{3}$ on en déduit :, la raison

de (V_n) étant strictement comprise entre -1 et 1 ,

$\lim_{n \to +\infty} V_n = 0$ et pour tout n de IN ,

$V_n = V_0 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n = \frac{U_0 - 1}{U_0 + 1}\left(-\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$

b.Pour tout n de IN , $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 1}$ et ,

$V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 1} \Leftrightarrow (U_n + 1) V_n = U_n - 1$

$\Leftrightarrow (1 - V_n) U_n = 1 + V_n$

De plus $|V_n| < 1$ d'où $1 - V_n \neq 0$ donc $U_n = \frac{V_n + 1}{1 - V_n}$,

$\lim_{n \to +\infty} V_n = 0$ donc $\lim_{n \to +\infty} U_n = 1$

Enfin pour tout n de IN

$Un = \frac{1 + \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{1 + \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}}{1 - \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}}$ d'où $U_n = \frac{3^{n+1} + (-1)^n}{3^{n+1} - (-1)^n}$

Exercice 7

$U_0 = 1{,}5$ et $U_{n+1} = U_n^2 - U_n + 3$

1. Pour tout n de IN, $U_{n+1} - U_n = (U_n^2 - 2U_n + 1) + 2$

$= (U_n - 1)^2 + 2$ donc $U_{n+1} - U_n > 0$

ce qui) prouve que la suite (U_n) est strictement croissante

2. a. Si la suite (U_n) converge vers un réel l alors

- la suite $n \mapsto U_{n+1}$ admet pour limite l ,

- la suite $n \mapsto U_n^2 - U_n + 3$ admet pour limite

$l^2 - l + 3$, donc par définition de la suite (U_n) on a

$l^2 - l + 3 = l$ c'est-à-dire que $l^2 - 2l + 3 = 0$

b. Pour tout réel l, $l^2 - 2l + 3 = (l-1)^2 + 2$ donc

$l^2 - 2l + 3 \neq 0$; aucun réel ne satisfait à la relation

$l^2 - 2l + 3 = 0$, aucun réel ne peut être la limite de la suite

(U_n) donc (U_n) est une suite divergente

exercice 8

. $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

1. $f : x \mapsto \ln(x+1) - x$, $D_f =]-1;+\infty[$; f est

dérivable sur $]-1;+\infty[$ et pour tout x de $]-1;+\infty[$

$f'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{-x}{x+1}$; pour tout x de $]-1;+\infty[$ $x + 1 > 0$

donc $f'(x)$ est du signe de $-x$ par suite

$\begin{cases} f'(0) = 0 \\ f'(x) > 0, si, -1 < x < 0 \\ f'(x) < 0; si; x > 0 \end{cases}$ ce qui implique que f est

strictement croissante sur $]-1;0]$ et strictement

décroissante sur $[0;+\infty[$, le maximum de f sur $]-1;+\infty[$

est donc f(0) c'est-à-dire 0 , on en déduit que pour tout x

de $]-1;+\infty[$ $\ln(x+1) - x \leq 0$ ce qui permet de conclure

que pour tout x de $]-1;+\infty[$ $\ln(x+1) \leq x$

2. soit k un entier naturel non nul on a

$\ln(k+1) - \ln k = \ln \frac{1+k}{k} = \ln(1 + \frac{1}{k})$ or $\frac{1}{k} > 0$ et à fortiori

appartient à $]-1;+\infty[$ donc d'après la question 1° $\ln(1+$

$\frac{1}{k}) \leq \frac{1}{k}$ on en déduit :

Pour tout k de IN* $\ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$

- soit n un entier naturel non nul, en sommant membre à

membre les n inégalités obtenues en faisant varier l'entier

k de 1 à n on obtient :

$(\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + \ldots + \ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$

c'est à dire après simplification $\ln(n+1) \leq U_n$ on a ainsi

établi : pour tout n de IN* , $\ln(n+1) \leq U_n$ on a

$\lim_{n \to +\infty} \ln(n+1) = +\infty$ donc $\lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty$

Exercice 9

1. Démontrons que $(U_n + V_n)$ est une suite géométrique

$U_n + V_n = \frac{2^n - 4n + 3}{2} + \frac{2^n + 4n - 3}{2} = \frac{2 \times 2^n}{2} = 2^n$

$U_{n+1} + V_{n+1} = 2^{n+1} = 2 \times 2^n = 2(U_n + V_n)$ donc $(U_n + V_n)$

est une suite géométrique de raison 2

2. Démontrons que $(U_n - V_n)$ est une suite arithmétique

$U_n - V_n = \frac{2^n - 4n + 3 - 2^n - 4n + 3}{2} = \frac{-8n + 6}{2} = -4n + 3$

$U_{n+1} - V_{n+1} = -4(n+1) + 3 - 4n + 3 - 4 = U_n - V_n - 4$ donc $(U_n - V_n)$ est une suite arithmétique de raison -4

3. Calculons les sommes

$U_0 + U_1 + \ldots + U_n$; $V_0 + V_1 + \ldots + V_n$

D'après ce qui précède on a $U_n + V_n = 2^n$ et

$U_n - V_n = -4n + 3$ donc

$U_0 + V_0 + U_1 + V_1 + \ldots + U_n + V_n = \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = \frac{1 - 2^{n+1}}{-1} = 2^{n+1} - 1$

et $U_0 - V_0 + U_1 - V_1 + \ldots + U_n - V_n = \frac{(6 - 4n)(n+1)}{2}$ on en

déduit que $2\sum_{k=0}^{n} U_k = 2^{n+1} - 1 + \frac{(6 - 4n)(n+1)}{2}$ c'est-à-

dire $\sum_{k=0}^{n} U_k = \frac{2^{n+1} - 1}{2} + \frac{(6 - 4n)(n+1)}{2}$ et

$2\sum_{k=0}^{n} V_k = 2^{n+1} - 1 - \frac{(6 - 4n)(n+1)}{2}$ c'est-à-dire

$\sum_{k=0}^{n} V_k = \frac{2^{n+1} - 1}{2} - \frac{(6 - 4n)(n+1)}{4}$

Scanned by CamScanner

ercice 10

ar définition de la suite (U_n) , ses termes sont donc sitifs

Calculons U_2, U_3, U_4, U_5

$U_2^2 = 4U_1 \Leftrightarrow U_2^2 = 4 \Leftrightarrow U_2 = 2$ (car (U_n) est à termes sitifs)

$U_3^2 = 4U_2 \Leftrightarrow U_3^2 = 8 \Leftrightarrow U_3 = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow U_3 = 2^{\frac{3}{2}}$

$U_4^2 = 4U_3 \Leftrightarrow U_4^2 = 32 \Leftrightarrow U_4 = 2^{\frac{7}{4}}$; $U_5^2 = 4U_4 \Leftrightarrow U$

$= 128 \Leftrightarrow U_5 = 2^{\frac{15}{8}}$

On considère la suite (V_n) définie par

$= \ln U_n - \ln 4$

Montrons (V_n) est une suite géométrique

$V_{n+1} = \ln U_{n+1} - \ln 4 = \ln 2\sqrt{U_n} - \ln 4$

$= \ln 2 + \frac{1}{2}\ln U_n - \ln 4$

$= \frac{1}{2}\ln U_n - \ln 2 = \frac{1}{2}(\ln U_n - \ln 4)$

$V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n$ d'où (V_n) est une suite géométrique de

ison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $V_1 = -\ln 4$

xprimons V_n en fonction de n

$V_n = -\ln 4 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{-\ln 4}{2^{n-1}}$

ar définition de la suite (V_n) on a

$\frac{U_n}{4} = e^{V_n} \Leftrightarrow U_n = 4e^{V_n}$; on en déduit que $U_n = 4e^{\frac{-\ln 4}{2^{n-1}}}$

alculons $\lim_{n\to+\infty} U_n$

$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} 4e^{\frac{-\ln 4}{2^{n-1}}} = 4$

$U_n > 3.96 \Leftrightarrow 4e^{\frac{-\ln 4}{2^{n-1}}} > 3.96 \Leftrightarrow e^{\frac{-\ln 4}{2^{n-1}}} > \frac{3,96}{4}$

$\Leftrightarrow \frac{-\ln 4}{2^{n-1}} > \ln\left(\frac{3,96}{4}\right) \Leftrightarrow \frac{2^{n-1}}{-\ln 4} < \frac{1}{\ln\left(\frac{3,96}{4}\right)}$

$V_n > 3.96 \Leftrightarrow 2^{n-1} > \frac{-\ln 4}{\ln\left(\frac{3,96}{4}\right)} \Leftrightarrow (n-1)\ln 2 > \ln\left(\frac{-\ln 4}{\ln\left(\frac{3,96}{4}\right)}\right)$

$U_n > 3,96 \Leftrightarrow n > \frac{\ln\left(\frac{-\ln 4}{\ln\left(\frac{3,96}{4}\right)}\right)}{\ln 2} + 1 \Leftrightarrow n > 8,10$ d'où

pour tout $n > 8$ $U_n > 3,96$.

Exercice 11

1. a Pour tout entier naturel n,

$U_{n+1} - U_n = 2(n+1) - 3 - 2n + 3 = 2$

La différence $U_{n+1} - U_n$ étant constante, la suite (U_n) est une suite arithmétique de raison 2 et le premier terme est $U_0 = -3$

b. La raison étant positive , la suite (U_n) est croissante . La somme S_n est donnée par la relation

$Sn = (n+1)\frac{U_0 + U_n}{2}$; il en découle que

$S_n = (n+1)\frac{2n-6}{2} = (n+1)(n-3)$

2. a. Pour tout entier naturel n $\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{3^{-U_{n+1}}}{3^{-U_n}} = \frac{1}{3^{U_{n+1}-U_n}}$

D'après la question 1°

$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$ Ce rapport étant constant, la suite (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{9}$ et le premier terme $V_0 = 27$

b. La raison étant différente de 1,

$S_n = V_0 \frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{9}} = \frac{243}{8}\left(1 - \frac{1}{9^{n+1}}\right)\frac{1}{2}$ .Lorsque n tend vers $+\infty$, $\frac{1}{9^{n+1}}$ tend vers 0. On en déduit que la suite (S_n) converge et que sa limite est $\frac{243}{8}$

Exercice 12

1. Calculons les trois premiers termes de la suite

$U_1 = \frac{4\times 2+3}{2+2} = \frac{11}{4}, U_2 = \frac{4\times 11+4\times 3}{11+2\times 4} = \frac{56}{19}$,

$U_3 = \frac{4\times 56+19\times 3}{56+19\times 2} = \frac{281}{94}$

2. Montrons que la suite (V_n) est géométrique

Pour tout entier naturel n, V_{n+1}

$\frac{U_{n+1}-3}{U_{n+1}+1} = \frac{4U_n+3-3(U_n+2)}{4U_n+3+U_n+2} = \frac{U_n-3}{5(U_n+1)} = \frac{1}{5}\times\frac{U_n-3}{U_n+1}$

d'où $V_{n+1} = \frac{1}{5}V_n$ et par suite la suite (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme

$V_0 = \frac{U_0-3}{U_0+1} = -\frac{1}{3}$

3. Exprimons le terme V_n en fonction de n

Il en découle de la question précédente que :

$V_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n \times \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{5^n\times 3}$

4. Trouvons la limite de (V_n).

Comme la valeur absolue de la raison de la suite (V_n) est strictement inférieur à 1 alors, la suite (V_n) converge vers zéro

5. Montrons que $Sn = 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$

(voir cours)

Scanned by CamScanner

6 Exprimons P_n en fonction de V_0, de la raison de la suite (V_n) et de n

$$P_n = V_0 \times \left(\frac{1}{5}\right) \times V_0 \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 \times V_0 \times \ldots \times \left(\frac{1}{5}\right)^n \times V_0$$

$$= (V_0)^{n+1} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{(1+2+3+\ldots+n)} = V_0^{n+1} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{S_n}$$

D'après la question 5. $P_n = V_0^{n+1} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$ et d'après la question 3. $P_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} \times \frac{1}{5^{\frac{n(n+1)}{2}}}$.

Exercice 13

1. a Pour tout entier naturel n ,

$W_n = \frac{a_{n+1}-1}{a_{n+1}+2} = \frac{\frac{2}{1+a_n}-1}{\frac{2}{1+a_n}+2}$ (par définition de la suite (a_n))

$W_n = \frac{2-1-a_n}{2+2+2a_n} = \frac{1-a_n}{4+2a_n}$; $W_n = \frac{-(a_n-1)}{2(a_n+2)} = -\frac{1}{2}W_n$

(W_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$; $\left|-\frac{1}{2}\right| \leq 1$;

(W_n) est une suite de limite nulle

b. Expression de a_n en fonction de W_n

Pour tout entier naturel n ,

$$w_n = \frac{a_n-1}{a_n+2} \Leftrightarrow w_n(a_n+2) = a_n - 1 \Leftrightarrow w_n a_n + 2w_n = a_n - 1$$

$$\Leftrightarrow a_n(1-w_n) = 1 + 2w_n$$

(w_n) étant une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$ et de premier terme $\frac{1}{4}$, on en déduit que $w_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+2}$; W_n étant différent de 1 , on en déduit que $a_n = \frac{1+2w_n}{1-w_n}$

Calculons la limite de (a_n)

Comme la limite de suite (w_n) est nulle d'après a) , on en déduit que la limite de (a_n) est 1

2 a. On a $a_0 = \frac{1}{4}$. , d'où $a_0 \neq -\frac{1}{2}$. La propriété est vraie au rang 0

Supposons qu'elle soit vraie au rang n et démontrons qu'elle est vérifiée au rang n+1,

c'est-à- dire a $a_{n+1} \neq -\frac{1}{2}$

$$a_n \neq -\frac{1}{2} \Rightarrow 4a_n \neq -2 \Rightarrow 4 + 4a_n \neq 2 \Rightarrow \frac{1}{4+4a_n} \neq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{4+4a_n} \neq -\frac{1}{2}$$

D'où pour tout entier naturel n ; $a_n \neq -\frac{1}{2}$

b. Pour tout entier naturel n,

$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{a_{n+1}+\frac{1}{2}} - \frac{1}{a_n+\frac{1}{2}}$ or $a_{n+1} = -\frac{1}{4+4a_n} + \frac{1}{2}$

$$= \frac{-1+2+2a_n}{4+4a_n} = \frac{1+2a_n}{4+4a_n} \quad \text{D'où}$$

$v_{n+1} - v_n = \frac{4+4a_n}{1+2a_n} - \frac{2}{1+2a_n} = \frac{4+4a_n-2}{1+2a_n} = \frac{2(1+2a_n)}{1+2a_n} = 2$

La suite (v_n) est donc une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme 4

c Exprimons a_n en fonction de v_n

Pour tout entier naturel n,

$$v_n = \frac{1}{a_n+\frac{1}{2}} \Leftrightarrow v_n(a_n+\frac{1}{2}) = 1 \Leftrightarrow v_n a_n + \frac{1}{2}v_n = 1$$

$$\Leftrightarrow 2v_n a_n = 2 - v_n \Leftrightarrow a_n = \frac{2-v_n}{2v_n}$$

(car $v_n \neq 0$)

Exprimons a_n en fonction de n

(v_n) étant une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme 4 d'après 2.b , alors pour tout entier naturel n , $v_n = 2n + 4$; on en déduit que

$a_n = \frac{2-(2n+4)}{2(2n+4)} = -\frac{n+1}{2n+4}$

d. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty}(-\frac{n+1}{2n+4}) = -\frac{1}{2}$

Scanned by CamScanner

Exercice 1

$f : x \mapsto \cos(5x - \frac{\pi}{4})$

La fonction sinus est une primitive sur IR de la fonction cosinus, il en résulte qu'une primitive de f sur IR est la fonction $F : x \mapsto \sin(5x - \frac{\pi}{4})$

2. $f : x \mapsto \sin^2 x \cos x$

On peut écrire $f = \sin^2 \sin'$ donc une primitive de f sur IR est la fonction $F : x \mapsto \frac{1}{3}\sin^3 x$

3. $f : x \mapsto \frac{4x^3 + 8x}{(x^4 + 4x^2 + 2)^3}$

Posons $u(x) = x^4 + 4x^2 + 2$ alors $u'(x) = 4x^3 + 8x$

donc $f = \frac{u'}{u^3} = u' u^{-3}$

Le polynôme $u : x \mapsto x^4 + 4x^2 + 2$ ne s'annule pas sur IR

donc $\frac{u^{-2}}{-2}$ est une primitive de $u' u^{-3}$ sur IR ; on en déduit une primitive de f sur IR est la fonction

$f : x \mapsto \frac{-1}{2(x^4 + 4x^2 + 2)^2}$

4. $f : x \mapsto (x^2+1)(x^3 - 1)$

Une écriture développée du polynôme f est $x \mapsto x^5 + x^3 - x^2 - 1$, on en déduit qu'une primitive F de f sur IR est le polynôme $x \mapsto \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x$

5. $f : x \mapsto x^5 \cos x + 5x^4 \sin x$

On peut écrire $f = uv' + v'u$, u étant la fonction $x \mapsto x^5$ et v la fonction sinus, or une primitive de $uv' + u'v$ sur IR est uv donc une primitive F de f sur IR est : $x \mapsto x^5 \sin x$

6. $f : x \mapsto \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$

Posons $u(x) = \frac{1}{x}$ alors $u'(x) = \frac{-1}{x^2}$ donc pour tout réel x non nul $f(x) = -u'(x) e^{u(x)}$ donc une primitive de f sur $]0;+\infty[$ est la fonction de $]0;+\infty[$ dans IR définie par : $F(x) = -e^{\frac{1}{x}}$

7. $f : x \mapsto \tan x$

$f = -\frac{\cos'}{\cos}$ et la fonction cosinus est à valeurs positives sur $]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$; on en déduit qu'une primitive F de f sur $]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ est la fonction de $]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ dans IR définie par $F(x) = \ln(\cos x)$

8. $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$

On peut écrire , pour tout x de $]0;+\infty[$ $f(x) = \ln' x (\ln x)$ donc la fonction $F : x \mapsto \frac{1}{2}\ln^2 x$ est une primitive de f sur $]0;+\infty[$

exercice 2

1. $f : x \mapsto \frac{-5}{x^3}$ Pour tout réel x non nul $f(x) = -5x^{-3}$ donc une primitive de f sur $]0;+\infty[$ est la fonction F, de $]0;+\infty[$ dans IR , définie par

$F(x) = -5\frac{x^{-3+1}}{-3+1} = \frac{5}{2x^2}$

Parmi toutes les primitives de f sur $]0;+\infty[$, celle qui prend la valeur 1 en 2 est la fonction $x \mapsto F(x) + k$, où le réel k vérifie , $F(2) + k = 1$ c'est-à-dire $k = \frac{3}{8}$ on en déduit que la primitive G de f sur $]0;+\infty[$ telle que : $G(2) = 1$ est la fonction , de $]0;+\infty[$ dans IR , définie par : $G(x) = \frac{5}{2x^2} + \frac{3}{8}$

2. $F : x \mapsto \frac{2}{3}x\sqrt{x}$ F a pour ensemble de définition $[0;+\infty[$

Comme produit des fonctions $x \mapsto \frac{2}{3}x$ dérivable sur IR et $x \mapsto \sqrt{x}$ dérivable sur $]0;+\infty[$; F est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout x de $]0;+\infty[$

$F'(x) = \sqrt{x}$ De plus , pour tout réel h strictement positif :

$\frac{F(h) - F(0)}{h} = \frac{2}{3} \times h \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{2}{3}\sqrt{h}$ donc $\lim_{x \to 0} \frac{F(h) - F(0)}{h} = 0$

ce qui prouve que F est dérivable en 0 et $F'(0) = 0$.

Finalement F est dérivable sur $[0;+\infty[$ et pour tout réel x positif . $F'(x) = \sqrt{x}$ autrement dit F est une primitive de $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0;+\infty[$

Iexercice 3

$A = \int_1^2 \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx = \left[-e^{\frac{1}{x}}\right]_1^2 = -e^{\frac{1}{2}} + e = e - \sqrt{e}$

$B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx = \left[\frac{1}{3}\sin^3 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}$,

$C = \int_1^0 \frac{4x^3 + 8x}{(x^4 + 4x^2 + 2)^3} dx = \left[\frac{-1}{2(x^4 + 4x^2 + 2)^2}\right]_1^0 = \frac{-45}{392}$

$D = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \left[\frac{1}{2}\ln^2 x\right]_1^e = \frac{1}{2}$;

$E = \int_0^2 (1 - |1 - t|)^3 dt$, remarquons d'abord que la fonction $t \mapsto (1 - |1 - t|)^3$ est continue sur IR et que l'on a pour tout réel t : $|1 - t| = 1 - t$ si $t \le 1$ et $|1 - t| = t - 1$ si $t \ge 1$ on est ainsi conduit à écrire , en utilisant la relation de Chasles

Page M. NANA 71749507/76448475

Scanned by CamScanner

$E = \int_0^1 \left(1-|1-t|\right)^3 dx + 1\int^2 \left(1-|1-t|\right)^3 dx$ donc

$E = \int_0^1 \left(1-(1-t)\right)^3 dx + \int_1^2 \left(1-(1-t)\right)^3 dx$ d'où

$E = \left[\frac{t^4}{4}\right]_0^1 + \left[-\frac{(2-t)^4}{4}\right]_1^2 = \frac{1}{2}$;

$F = \sum_{k=1}^{5}\int_k^{k+1} \sqrt{t}dt$ La fonction racine carrée est continue sur $[0;+\infty[$, donc F existe bien et on peut écrire

$F = \int_1^2 \sqrt{t}dt + \int_2^3 \sqrt{t}dt + \int_3^4 \sqrt{t}dt + \int_4^5 \sqrt{t}dt + \int_5^6 \sqrt{t}dt$ donc d'après la relation de Chasles :

$F = \int_1^6 \sqrt{t}dt$ De plus, une primitive de $t \mapsto \sqrt{t}$ sur $[0;+\infty[$ est la fonction $t \mapsto \frac{2}{3}t\sqrt{t}$ donc $F = \left[\frac{2}{3}t\sqrt{t}\right]_1^6$ et finalement

$F = \frac{2}{3}(6\sqrt{6}-1)$

Exercice 4

1. Notons f la fonction $x \mapsto \cos 3x \sin x$, pour tout réel x :
$f(-x) = \cos(-3x)\sin(-x) = \cos 3x(-\sin x)$
$= -\cos 3x \sin x = -f(x)$ donc est la fonction f est impaire
$f(x+\pi) = \cos(3x+3\pi)\sin(x+\pi)$
$= \cos(3x+\pi)\sin(x+\pi) = (-\cos 3x)(-\sin x)$
$= \cos 3x \sin x = f(x)$
donc la fonction f est périodique de période π

2. Calculons $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \cos 3x \sin x dx$

$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \cos 3x \sin x dx = \int_0^{\pi} \cos 3x \sin x dx = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x \sin x dx = 0$

Egalités 1 et 2 : la fonction $x \mapsto \cos 3x \sin x$ est continue sur IR et π-périodique ; de plus les segments $\left[\frac{\pi}{3};\frac{4\pi}{3}\right], [0,\pi], \left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ ont tous trois pour longueur π

Egalité 3 : la fonction $x \mapsto \cos 3x \sin x$ est impaire et $\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ est symétrique par rapport à 0

Exercice 5

1 Pour tout réel x ; $\cos^5 x = \cos x(\cos^2 x)^2$
$= \cos x(1-\sin^2 x)^2$
$= \cos x(1-2\sin^2 x + \sin^4 x)$ donc $\cos^5 x = \cos x - 2\cos x \sin^2 x + \cos x \sin^4 x$; on en déduit qu'une primitive sur de la fonction $\cos^5$ est :

$x \mapsto \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x$ donc

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx = \left[\sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{15}$

$2A = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^3 2x dx$

Pour tout réel x :
$\sin^3 2x = \sin 2x \sin^2 2x = \sin 2x(1-\cos^2 2x)$
$= \sin 2x - \cos^2 2x \sin 2x$, il vient

$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^3 2x dx = \left[\frac{-1}{2}\cos 2x + \frac{1}{6}\cos^3 2x\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{5}{48}$ d'où

$A = \frac{5}{48}$

$B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^5 x dx$

D'après la question 1) , pour tout réel x :
$\sin^2 x \cos^5 x = \sin^2 x(\cos x - 2\cos x \sin^2 x + \cos x \sin^4 x)$
$= \cos x \sin^2 x - 2\cos x \sin^4 x + \cos x \sin^6 x$
d'où l'on déduit

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^5 x dx = \left[\frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$
$= \frac{8}{105}$ et finalement $B = \frac{8}{105}$

Exercice 6

1. Pour tout réel x :
$\cos^3 x \sin^2 x = \cos x(\frac{1+\cos 2x}{2})(\frac{1-\cos 2x}{2}) = \cos x\frac{1-\cos^2 2x}{4}$
$\cos^3 x \sin^2 x = \frac{1}{4}\cos x - \frac{1}{4}\cos x\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)$
$= \frac{1}{4}\cos x - \frac{1}{8}\cos x - \frac{1}{8}\cos x \cos 4x$
$= \frac{1}{8}\cos x - \frac{1}{8}\left(\frac{\cos(4x+x)+\cos(4x-x)}{2}\right)$
$= \frac{1}{8}\cos x - \frac{1}{16}(\cos 5x + \cos 3x)$

d'où $\cos^3 x \sin^2 x = -\frac{1}{16}\cos 5x - \frac{1}{16}\cos 3x + \frac{1}{8}\cos x$

2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 x \sin^2 x dx = \left[\frac{-1}{5\times 16}\sin 5x - \frac{1}{16\times 3}\sin 3x + \frac{1}{8}\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$
$= \frac{7\sqrt{2}}{120}$

3. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx$

Intégrons par parties : posons $u'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ alors
$u(x) = \tan x$, $v(x) = x$ alors $v'(x) = 1$
Donc

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx = \left[x\tan x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = \frac{\pi}{4} - \left[\ln\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= \frac{\pi}{4} - \ln\frac{\sqrt{2}}{2}$

Finalement $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx = \frac{\pi}{4} - \ln\frac{\sqrt{2}}{2}$

Scanned by CamScanner

Exercice 7

1.a. Pour tout réel x différent de $\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in Z$,

on a $\tan'x = \frac{1}{\cos^2 x}$

b. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = [\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1$

2.a. Démontrons que f est dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$

La fonction $x \mapsto \sin x$ est dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ et la fonction $x \mapsto \cos x$ est dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ et pour tout x de $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ cosx est strictement positif donc la fonction $f: x \mapsto \frac{\sin x}{\cos^3 x}$ est dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ et pour tout x de $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ $f'(x) = \frac{\cos^4 x + 3\sin^2 x\cos^2 x}{\cos^6 x}$,

$f'(x) = \frac{\cos^4 x + 3(1-\cos^2)\cos^2 x}{\cos^6 x}$

$= \frac{3\cos^2 x - 2\cos^4 x}{\cos^6 x} = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}$

d'où $f'(x) = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}$

b. On a : $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x)dx = 3\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^4 x} - 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$,

Par suite $[f(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} = 3J - 2I$ et $\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3} = 3J - 2I$

Donc 2 = 3J-2I .On en déduit : $J = \frac{2+2I}{3}$ or I = 1 donc $J = \frac{3}{4}$

Exercice 8

$A = \int_0^{\pi} x\sin x dx = \int_0^{\pi} u(x)v'(x)dx$ avec pour tout x de $[0,\pi]$ u(x) =x donc u'(x) = 1 ,

v'(x) = sinx et par exemple v(x) =-cosx on en déduit en intégrant par parties

$A = [-x\cos x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(-\cos x)dx = \pi + [\sin x]_0^{\pi}$

Par suite $A = \pi$

$B = \int_1^e \ln t dt$

Posons pour tout t de $[1;e]$ u(t) = lnt donc $u'(x) = \frac{1}{t}$;

v'(t) = 1 et v(t) = t . On en déduit en intégrant par parties

$B = [t\ln t]_1^e - \int_1^e t\times\frac{1}{t}dt = e - [t]_1^e$

$= e - (e-1) = 1$ donc B = 1

$C = \int_{-1}^{0}(2x+1)e^{-x}dx$

En posant u(x) = 2x+1 ; u'(x) = 2

V'(x) = e^{-x} ; v(x) = $-e^{-x}$

On en déduit en intégrant par parties

$C = \left[-(2x+1)e^{-x}\right]_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} 2e^{-x}dx$

$= -1 - e - 2\left[e^{-x}\right]_{-1}^{0}$ donc $C = =e-3$

$D = \int_0^{\pi}(x-1)\sin 3x dx$

Posons u(x) = x – 1 , u'(x) = 1

v'(x) = sin3x ; $v(x) = \frac{-1}{3}\cos 3x$

on en déduit en intégrant par parties

$D = \left[-(x-1)\times\times\frac{1}{3}\cos 3x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\frac{1}{3}\cos 3x dx$

$= \frac{\pi-1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}\sin 3x\right]_0^{\pi} = \frac{\pi-1}{3}$ d'où

$D = \frac{\pi-1}{3}$

$E = \int_1^e x^2 \ln x dx$

Posons u(x) = lnx ; $u'(x) = \frac{1}{x}$

v'(x) = x² ; $v(x) = \frac{1}{3}x^3$ on en déduit en intégrant par parties :

$E = \left[\frac{1}{3}x^3\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x}\times\frac{1}{3}x^3 dx$

$= \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^e = \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{9}e^3$

Donc $E = \frac{2}{9}e^3$

$F = \int_1^2 x\sqrt{-x+3}dx$

Posons u(x) = x ; u'(x) =1 et $v'(x) = (3-x)^{\frac{1}{2}}$,

$v(x) = \frac{-(3-x)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{-(3-x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$

On en déduit en intégrant par parties :

Scanned by CamScanner

$$F=\left[-x\times\frac{2(3-x)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_1^2-\int_1^2\frac{2}{3}(3-x)^{\frac{3}{2}}dx$$

$$F=\frac{-4}{5}+\frac{4\sqrt{2}}{3}+\frac{2}{3}\left[\frac{2}{5}(3-x)^{\frac{5}{2}}\right]_1^2 \text{ après calcul on obtient}$$

$$F=\frac{4}{3}(\sqrt{2}-1)+\frac{4}{15}(1-4\sqrt{2})$$

$$G=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}x\cos 2x dx$$

Posons u(x) =x ; u'(x) = 1 et v'(x) = cos2x ;

$v(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$ on en déduit en intégrant par parties

$$G=\left[x\times\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{1}{2}\sin 2x dx$$

$$=\frac{-\pi}{2}-\frac{1}{2}\left[\frac{-1}{2}\cos 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \text{ d'où } G=\frac{-\pi}{2}$$

$$H=\int_e^{2e}x\ln x^3 dx$$

Pour tout x de $[e;2e]$ x>0 donc $\ln x^3 = 3\ln x$ par suite

$$H=\int_e^{2e}3x\ln x dx$$

Posons u(x) = lnx ; u'(x) = $\frac{1}{x}$ et v'(x) = x ;

$v(x)=\frac{1}{2}x^2$ on en déduit en intégrant par

parties $H=\left[\frac{3}{2}x^2\ln x\right]_e^{2e}-\frac{3}{2}\int_e^{2e}x dx$

$=\left[\frac{3}{2}x^2\ln x\right]_e^{2e}-\frac{3}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_e^{2e}$ après calcul on

obtient $H=3e^2(\frac{3}{4}+2\ln 2)$

$$I=\int_{-1}^{0}(1+x)^2e^{-x}dx$$

Posons u(x) = $(1+x)^2$, u'(x) = 2(1 + x) et v'(x) = e^{-x} ;

$v(x)=-e^{-x}$ En intégrant par parties on en déduit :

$I=\left[-(1+x)^2e^{-x}\right]_{-1}^{0}+\int_{-1}^{0}2(1+x)e^{-x}dx$

Intégrons par parties l'intégrale $\int_{-1}^{0}2(1+x)e^{-x}dx$

Posons u(x) = 2(1+x) ; u'(x) = 2 et v'(x) = e^{-x} ;

v(x) = $-e^{-x}$ donc

$\int_{-1}^{0}2(1+x)e^{-x}dx=\left[-2(1+x)e^{-x}\right]_{-1}^{0}+2\int_{-1}^{0}e^{-x}dx$ d'où

$I=\left[-(1+x)^2e^{-x}\right]_{-1}^{0}+\left[-2(1+x)e^{-x}\right]_{-1}^{0}+\left[-2e^{-x}\right]_{-1}^{0}$

et I = -5+2e

Exercice 9

. $f(x)=\frac{x}{1+x^2}; g(x)=\frac{x^3}{1+x^2}$

1 $I_1=\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx$ posons u(x) = 1 + x² alors

u'(x) = 2x donc $f(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}\times\frac{1}{2}$ par suite pour tout x de

IR, une primitive de f est la fonction $x\mapsto\frac{1}{2}\ln|u(x)|$

Comme $x\mapsto 1+x^2$ est positive pour tout x de IR, on en

déduit $I_1=\left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1$ c'est-à-dire

$I_1=\frac{1}{2}\ln 2$

$I_2=\int_0^1\frac{x^3}{1+x^2}dx$ Calculons I_1+I_2

$I_1+I_2=1\int_0^1\frac{x+x^3}{1+x^2}dx=\int_0^1\frac{x(1+x^2)}{1+x^2}dx=\int_0^1 x dx$

car pour tout x de IR 1 + x² est non nul donc

$I_1+I_2=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{1}{2}$ d'où $I_1+I_2=\frac{1}{2}$

Finalement $I_2=\frac{1}{2}(1-\ln 2)$

Exercice 10

Soit $f(x)=\frac{x-2}{(2x-3)^2}$

Montrons qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout x

de IR-$\left\{\frac{3}{2}\right\}$ $f(x)=\frac{a}{(2x-3)^2}-\frac{b}{2x-3}$

Pour tout x de IR-$\left\{\frac{3}{2}\right\}$

$\frac{a}{(2x-3)^2}-\frac{b}{2x-3}=\frac{a+3b-2bx}{(2x-3)^2}$ = f(x)

donc par identification

$\begin{cases}a+3b=-2\\-2b=1\end{cases}$ C'est-à-dire $a=\frac{-1}{2}$ et $b=\frac{-1}{2}$

d'où pour tout x de IR-$\left\{\frac{3}{2}\right\}$ $f(x)=\frac{-1}{2(2x-3)^2}+\frac{1}{2(2x-3)}$

Calculons $I=\int_0^1 f(x)dx$

$I=\int_0^1\frac{-1}{2(2x-3)^2}+\frac{1}{2(2x-3)}dx$

$=\frac{-1}{2}\int_0^1\frac{1}{(2x-3)^2}dx+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{2x-3}dx$

Scanned by CamScanner

$$= -\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}(2x-3)^{-1}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\ln(3-2x)\right]_0^1$$

$$I = -\frac{1}{6} - \frac{1}{4}\ln 3$$

Exercice 11

1. Pour tout x différent de 1 posons $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + x}{1-x}$

a. Déterminons a ,b ,c et d tels que pour x différent de 1 on a $f(x) = ax^2+bx+c+\frac{d}{1-x}$

Pour tout x différent de 1

$$ax^2+bx+c+\frac{d}{1-x} = \frac{-ax^3 + x^2(a-b) + x(b-c) + c + d}{1-x}$$

$$= f(x)$$

Par indentification on a a = -1 et a-b = -3 et b-c = 1 et c+d = 0 c'est-à-dire a = -1 ; b = 2 ; c = 1 , d = -1 d'où pour tout x différent de 1

$$f(x) = -x^2+2x+1-\frac{1}{1-x}$$

b. Calculons $I = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}}(-x^2 + 2x + 1 - \frac{1}{1-x})dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x + \ln(1-x)\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{17}{24} - \ln 2 \quad I = \frac{17}{24} - \ln 2$$

2. Calculons à l'aide d'une intégration par parties

$$J = \int_0^{\frac{1}{2}}(3x^2 - 6x + 1)\ln(1-x)dx$$

Posons u(x) =ln (1-x) , alors u'(x) = $-\frac{1}{1-x}$ et v'(x) = $3x^2-6x+1$, v(x) =x^3-3x^2+x on en déduit

$$J = \left[(x^3 - 3x^2 + x)\ln(1-x)\right]_0^{\frac{1}{2}} + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^3 - 3x^2 + x}{1-x}dx$$

c'est-à-dire $J = (-\frac{1}{8} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2})\ln 2 + I$ et donc $J = \frac{-7}{8}\ln 2 + \frac{17}{4}$

Exercice 12

1. Déterminons les réels a, b , c tels que pour tout x différent de $\frac{1}{2}$; $\frac{u^2-1}{2u-1} = au + b + \frac{c}{2u-1}$;

$$au+b+\frac{c}{2u-1} = \frac{2au^2 + u(2b-a) - b + c}{2u-1}$$

Donc par indentification on a $\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ 2b - a = 0 \\ c - d = -1 \end{cases}$ c'est-à-dire

$$a = \frac{1}{2}; b = \frac{1}{4}; c = -\frac{3}{4}$$

2. Calculons $\int_{-1}^{0} \frac{x^2-1}{2x-1}dx$

$$\int_{-1}^{0} \frac{x^2-1}{2x-1}dx = \int_{-1}^{0}(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{3}{4(2x-1)})dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{8}\ln|2x-1|\right]_{-1}^{0}$$

$$= \frac{-1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{3}{8}\ln 3$$

$$\int_{-1}^{0} \frac{x^2-1}{2x-1}dx = \frac{3}{8}\ln 3$$

3. Calculons $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0} \frac{\cos^3 x}{1-2\sin x}dx$

$\cos^3 x = \cos x (1-\sin^2 x)$ donc

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0} \frac{\cos^3 x}{1-2\sin x}dx = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{0} \cos x \frac{\sin^2 x - 1}{2\sin x - 1}dx$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{0} \cos x(\frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{4} - \frac{3}{4(2\sin x - 1)})dx$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{0} \frac{1}{2}\cos x \sin x dx + \int_{-\frac{\pi}{6}}^{0} \frac{1}{4}\cos x dx - \frac{3}{4}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0} \frac{\cos x}{2\sin x - 1}dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}\sin^2 x\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{0} + \left[\frac{1}{4}\sin x\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{0} - \frac{3}{8}\left[\ln|2\sin x - 1|\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{0}$$

Après calcul on obtient $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0} \frac{\cos^3 x}{1-2\sin x}dx = \frac{1}{16} + \frac{3}{8}\ln 3$

Exercice 13

Calculons les intégrales suivantes

a) $I = \int_{-\frac{1}{2}}^{0}(4x+1)e^{2x^2+x}dx$;

Posons $u(x) = 2x^2+x$ on a $u'(x) = 4x+1$ donc $(4x+1)e^{2x^2+x} = u'(x)e^{u(x)}$ par suite

$$I = \int_{-\frac{1}{2}}^{0}(4x+1)e^{2x^2+x}dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} u'(x)e^{u(x)}dx \text{ et donc}$$

$$I = \left[e^{2x^2+x}\right]_{-\frac{1}{2}}^{0} = 1 - 1 = 0$$

Finalement I = 0

b) $I = \int_2^3 \frac{2x+1}{x^2+x-1}dx$

posons $u(x) = x^2+x-1$ on a

$u'(x) = 2x+1$ par suite $I = \int_2^3 \frac{u'(x)}{u(x)}dx$

Et donc $I = \left[\ln|x^2+x-1|\right]_2^3 = \left[\ln(x^2+x-1)\right]_2^3$

car pour tout x de $[2;3]$ $x^2+x-1>0$

par conséquent $I = \ln\frac{11}{5}$

c) $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos x(\sin x + \sin^3 x)dx$

Scanned by CamScanner

$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos x \sin x dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos x \sin^3 x dx$

$= \left[\frac{1}{2}\sin^2 x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + \left[\frac{1}{4}\sin^4\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}$

$= -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}$

$I = -\frac{3}{4}$

d) $=I = \int_{\sqrt{e}}^{e} \frac{\ln x}{x} dx$

Posons u(x) = lnx alors u'(x) $= \frac{1}{x}$ et v'(x) $= \frac{1}{x}$;

v(x) = lnx on en déduit en intégrant par parties

$I = \left[\ln^2 x\right]_{\sqrt{e}}^{e} - \int_{\sqrt{e}}^{e} \frac{\ln x}{x} dx = 1 - \frac{1}{4} - I$

par suite $2I = \frac{3}{4}$ d'où $I = \frac{3}{8}$

e) $I = \int_0^1 x^2 e^x dx$ posons $u(x) = x^2$ alors

$u'(x) = 2x$

et $v'(x) = e^x$; $v(x) = e^x$ on en déduit en intégrant par parties

$I = \left[x^2 e^x\right]_0 - \int_0^1 2xe^x dx = e - 2\int_0^1 xe^x dx$

Intégrons par parties $\int_0^1 xe^x dx$ pour cela posons

t(x) = x alors t'(x) = 1 et s'(x) = e^x ,

$S(x) = e^x$ donc

$\int_0^1 xe^x dx = \left[xe^x\right]_0 - \int_0^1 e^x dx = e - \left[e^x\right]_0 = 1$

d'où I = e-2

f) $= I = \int_0^{\pi} e^x \sin x dx$ posons u(x) = sinx alors

u'(x) = cosx et v'(x) = e^x ; v(x) = e^x on en déduit en intégrant par parties

$I = \left[\sin x e^x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \cos x dx = -\int_0^{\pi} e^x \cos x dx$

Posons à nouveau u(x) = cosx alors u'(x) = -sinx et v'(x) = e^x ; v(x) = e^x on en déduit en intégrant par parties

que $I = -\left[\cos x e^x\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} -\sin x e^x dx$ donc

$I = -(-e^{\pi} - 1) - I$ c'est-à-dire

$2I = e^{\pi} + 1$ d'où $I = \frac{e^{\pi} + 1}{2}$

Exercice 14

1) Déterminons deux constantes a et b telles que

$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t+1}$

On a, pour tout $t \neq 0$ et $t \neq -1$

$\frac{a}{t} + \frac{b}{t+1} = \frac{at + a + bt}{t(t+1)} = \frac{(a+b)t + a}{t(t+1)}$, par

identification il vient : $\begin{cases} a+b=0 \\ a=1 \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$

Calculons l'intégrale J

$J = \int_1^2 \frac{1}{t(t+1)} dt$ comme pour t différent de 0 e -1 on a

$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}$, on en déduit alors

$J = \int_1^2 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) dt = \int_1^2 \frac{1}{t} dt - \int_1^2 \frac{1}{t+1} dt$

$= \left[\ln t\right]_1^2 - \left[\ln(t+1)\right]_1^2$

$= \ln 2 - \ln 3 + \ln 2 = 2\ln 2 - \ln 3$

J = 2ln2-ln3

2) Calculons $I = \int_1^2 \frac{\ln(t+1)}{t^2} dt$

Intégrons I par parties en posant u(t) = ln(t+1),

u' (t) $= \frac{1}{t+1}$,

v'(t) $= \frac{1}{t^2}$ et v(t) $= -\frac{1}{t}$; on a alors

$I = \left[-\frac{\ln(t+1)}{t}\right]_1^2 - \int_1^2 -\frac{1}{t} \times \frac{1}{t+1} dt$

$= \left[-\frac{\ln(t+1)}{t}\right]_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{t(t+1)} dt$

$= -\frac{\ln 3}{2} + \ln 2 + J$

Donc finalement tout calcul fait on a $I = 3\ln 2 - \frac{3\ln 3}{2}$

Exercice 15

1) Montrons que la fonction

$x \mapsto \ln(csox - \sin x)$ est dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right[$

On a : pour tout x de $\left[0; \frac{\pi}{4}\right[$

$\cos x - \sin x = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right)$

$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x - \sin\frac{\pi}{4}\sin x\right)$

$= \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

La fonction $x \mapsto \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ est dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right[$

Scanned by CamScanner

...as pour tout x de $\left[0;\frac{\pi}{4}\right[$ $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)>0$ donc par ...position il vient que pour tout x de $\left[0;\frac{\pi}{4}\right[$ la fonction $x\to\ln(\cos x-\sin x)$ est dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right[$

...alculons sa dérivée

...our tout x de $\left[0;\frac{\pi}{4}\right[$,

$f'(x)=\frac{-\sin x-\cos x}{\cos x-\sin x}=-\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}$

...alculons B(α)-A(α)

$B(\alpha)-A(\alpha)=\int_0^\alpha\frac{\cos x}{\cos x-\sin x}dx-\int_0^\alpha\frac{\sin x}{\cos x-\sin x}dx$

$=\int_0^\alpha\frac{\cos x-\sin x}{\cos x-\sin x}dx=\int_0^\alpha dx=[x]_0^\alpha=\alpha$

...r suite $B(\alpha)-A(\alpha)=\alpha$

...Calculons B (α) + A (α)

$B(\alpha)-A(\alpha)=\int_0^\alpha\frac{\cos x}{\cos x-\sin x}dx+\int_0^\alpha\frac{\sin x}{\cos x-\sin x}dx$

$=\int_0^\alpha\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}dx$

...r d'après 1) pour tout x de $\left[0;\frac{\pi}{4}\right[$

$f'(x)=\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}$

Donc $B(\alpha)+A(\alpha)=-\int_0^\alpha f'(x)dx$

...ar conséquent

$B(\alpha)-A(\alpha)=-[f(x)]_0^\alpha=-[\ln(\cos x-\sin x)]_0^\alpha$

$=-\left[\ln(\sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4})\right]_0^\alpha=-\ln(\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$

Finalement $B(\alpha)-A(\alpha)=-\ln\left[\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\right]$

Calculons A(α) et B(α)

On a : $B(\alpha)-A(\alpha)=\alpha$ (1) ;

$B(\alpha)+A(\alpha)=-\ln\left[\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\right]$ (2)

En additionnant (1) et (2) on obtient

$2B(\alpha)=\alpha+\ln\left[\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\right]$ c'est-à-dire

$B(\alpha)=\frac{1}{2}\left(\alpha+\ln(\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

En utilisant la relation : $B(\alpha)-A(\alpha)=\alpha$, il vient :

$A(\alpha)=B(\alpha)-\alpha$ c'est-à-dire

$A(\alpha)=\frac{1}{2}\left(-\alpha+\ln(\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\right)$

Exercice 16

1 a) Montrons que pour tout réel x, on a

$\frac{1}{(e^x+1)^2}=1-\frac{e^x}{e^x+1}-\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$

Pour tout x réel, on a

$1-\frac{e^x}{e^x+1}-\frac{e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{(e^x+1)^2-e^x(e^x+1)-e^x}{(e^x+1)^2}$

$=\frac{e^{2x}+2e^x+1-e^{2x}-e^x-e^x}{(e^x+1)^2}$

$=\frac{1}{(e^x+1)^2}$ d'où le résultat

b) Calculons l'intégrale $I=\int_0^1\frac{1}{(e^x+1)^2}dx$

En utilisant la relation établie en a), on a

$I=\int_0^1\left(1-\frac{e^x}{e^x+1}-\frac{e^x}{(e^x+1)^2}\right)dx$

$=\int_0^1dx-\int_0^1\frac{e^x}{e^x+1}dx-\int_0^1\frac{e^x}{(e^x+1)^2}dx$

par suite

$I=[x]_0^1-\left[\ln(e^x+1)\right]_0^1-\left[-\frac{1}{e^x+1}\right]_0^1$

$=1-\ln(e+1)+\ln 2+\frac{1}{e+1}-\frac{1}{2}$,

$=\frac{1}{2}+\ln\left(\frac{2}{e+1}\right)+\frac{1}{e+1}$

Finalement on a $I=\frac{e+3}{2(e+1)}+\ln\left(\frac{2}{e+1}\right)$

2 a) Déterminons une primitive de la fonction

$x\mapsto\frac{e^x}{(e^x+1)^3}$

Posons $u(x)=e^x+1$, on a $u'(x)=e^x$ donc

$\frac{e^x}{(e^x+1)^3}=e^x(e^x+1)^{-3}=u'(x)\times u^{-3}(x)$

on en déduit qu'une primitive de la fonction

$x\mapsto\frac{e^x}{(e^x+1)^3}$ est la fonction $x\mapsto-\frac{1}{2}u^{-2}(x)$

c'est-à-dire $x\mapsto-\frac{1}{2}(e^x+1)^{-2}$

ou encore $x\mapsto-\frac{1}{2}\times\frac{1}{(e^x+1)^2}$

b) Calculons J à l'aide d'une intégration par parties

Posons $u(x)=x$, $u'(x)=1$,

$v'(x)=\frac{e^x}{(e^x+1)^3}$, et, $v(x)=-\frac{1}{2(e^x+1)^2}$

on a donc en intégrant par parties

Scanned by CamScanner

$$J=\left[-x\times\frac{1}{2(e^x+1)^2}\right]_0^1+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{(e^x+1)^2}dx$$

$$=\left[-\frac{x}{2(e^x+1)^2}\right]_0^1+\frac{1}{2}I$$

$$=-\frac{1}{2(e+1)^2}+\frac{1}{2}I$$

Finalement

$$J=\frac{1}{2}\left[\frac{e+3}{2(e+1)}+\ln\left(\frac{2}{e+1}\right)-\frac{1}{(e+1)^2}\right]$$

Exercice 17

$U_n=\int_n^{n+1}e^{\frac{t}{n}}dt$

Pour tout entier naturel n non nul

$U_n=\left[ne^{\frac{t}{n}}\right]_n^{n+1}=n(e^{\frac{n+1}{n}}-e)=ne(e^{\frac{1}{n}}-1)$ donc

$U_n=ne(e^{\frac{1}{n}}-1)$ on en déduit : pour tout n de IN*

$U_n=e\times\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}$ de plus $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ et $\lim_{h\to0}\frac{e^h-1}{h}=1$

Donc $\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=1$

ce qui permet de conclure $\lim_{n\to+\infty}U_n=e$

Exercice 18

$I_n=\int_0^1t^ne^t dt$ Pour tout n de IN ; $t\mapsto t^ne^t$ est continue sur IR , donc sur $[0;1]$; ce qui prouve que la suite (I_n) est bien définie sur IN

1. Soit n un entier naturel non nul , en posant pour tout t de $[0;1]$ $u(t)=t^n$; $v'(t)=e^t$

$u'(t)=nt^{n-1}$; $v(t)=e^t$

on en déduit en intégrant par parties :

$$\int_0^1t^ne^t dt=\left[t^ne^t\right]_0^1-\int_0^1nt^{n-1}e^t dt=e-n\int t^{n-1}e^t dt$$

c'est à dire $I_n=e-nI_{n-1}$

2. on a $I_0=\int_0^1e^t dt=\left[e^t\right]_0^1=e-1$

- A l'aide de la relation de récurrence établie à la question 1) on obtient successivement

$I_1=e-I_0=e-(e-1)=1$;

$I_2=e-2I_1=e-2$,

$I_3=e-3I_2=6-2e$

1. Pour tout entier naturel n

$$I_{n+1}-I_n=\int_0^1t^{n+1}e^t dt-\int_0^1t^ne^t dt$$

$$=\int_0^1(t^{n+1}e^t-t^ne^t)dt$$

donc $I_{n+1}-I_n=\int_0^1(t-1)t^ne^t dt$ de plus pour tout t de $[0;1]$

$t-1\le0$, $t^n\ge0$, $e^t>0$ donc

$(t-1)t^ne^t\le0$ ce qui implique que

$\int_0^1(t-1)t^ne^t dt\le0$ C'est-à-dire

$I_{n+1}-I_n\le0$ d'où la suite (I_n) est décroissante

4. Soit n un entier naturel :

- on a $\int_0^1t^n dt=\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}$

- pour tout t de $[0;1]$, $0\le t^n$ et $1\le e^t\le e$ donc

$0\le t^ne^t\le et^n$ ce qui implique $0\le\int_0^1t^ne^t dt\le\int_0^1et^n dt$

autrement dit

$0\le\int_0^1t^ne^t dt\le\frac{e}{n+1}$ Finalement on a établi

Pour tout n de IN $0\le I_n\le\frac{e}{n+1}$ on sait que

$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0$

donc d'après le théorème des gendarmes $\lim_{n\to+\infty}I_n=0$

Exercice 19

$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos^2x dx,\ B=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin^2x dx$

Les fonctions $x\mapsto x\cos^2x$ et $x\mapsto x\sin^2x$ sont continues sur IR,

donc sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$; les intégrales A et B existent bien

1) $A+B=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x\cos^2x+x\sin^2x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x dx$

$$=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{8}$$

donc $A+B=\frac{\pi^2}{8}$

1. De même

$$A-B=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x\cos^2x-x\sin^2x)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x(\cos^2x-\sin^2x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos 2x dx$$

En posant pour tout x de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

$u(x)=x$; $v'(x)=\cos2x$

Scanned by CamScanner

$u'(x) = 1$; $v(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$

On en déduit en intégrant par parties que

$A - B = \left[\frac{1}{2}x\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin 2x dx$

$= \left[\frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}$

donc $A - B = \frac{-1}{2}$

Des égalités $\begin{cases} A + B = \frac{\pi^2}{8} \\ A - B = -\frac{1}{2} \end{cases}$

on déduit $A = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{4}$ et $B = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}$

Exercice 20

$f(x) = e^{-x}\sin x$

a. on obtient successivement pour tout réel x :

$f'(x) = -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x = e^{-x}(\cos x - \sin x)$

$f''(x) = -2e^{-x}\cos x$

$f'''(x) = 2e^{-x}(\cos x + \sin x)$

$f^{(4)}(x) = -4e^{-x}\sin x$

b. On en déduit : pour tout réel x ;

$f^{(4)}(x) = -4f(x)$ autrement dit $(f''')' = -4f$

Ce qui équivaut à $\left(\frac{-1}{4}f'''\right)' = f$

Cette dernière égalité prouve que $-\frac{1}{4}f'''$ est une primitive de f sur IR , ce qui permet de conclure : la fonction $F : x \mapsto -\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x + \sin x)$ est une primitive de f sur IR

2. $I_n = \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} f(x)dx$

a. Par définition de la suite (I_n) ,

$I_0 = \int_0^{\pi} f(x)dx$ d'autre part, F est une primitive de f sur IR, donc

$I_0 = [F(x)]_0^{\pi} = F(\pi) - F(0) = \frac{1}{2}(e^{-\pi} + 1)$

D'où $I_0 = \frac{1}{2}(e^{-\pi} + 1)$

$I_0 = \int_0^{\pi} e^{-x}\sin x dx$ et :

- la fonction f est continue sur IR , donc sur $[0;\pi]$
- de plus pour tout réel x $e^{-x} > 0$, pour tout x de $[0;\pi]$ sinx ≥ 0 donc : pour tout x de $[0;\pi]$ $\sin x \geq 0$ autrement f est positive sur $[0;\pi]$;

on en déduit que I_0 est l'aire (en unités d'aire) du domaine plan limité par C, la droite des abscisses et les droites d'équations x = 0 et $x = \pi$

b Pour tout n de IN

$I_n = \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} f(x)dx = f((2n+1)\pi) - F(2n\pi)$ et

$f((2n+1)\pi) = \frac{1}{2}e^{-2n\pi} \times e^{-\pi}$,

$F(2n\pi) = -\frac{1}{2}e^{-2n\pi}$ donc

$I_n = \frac{1}{2}e^{-2n\pi} \times e^{-\pi} + -\frac{1}{2}e^{-2n\pi}$ d'où

$I_n = \frac{e^{-2n\pi}}{2}(e^{-\pi} + 1)$

c. D'après la question précédente, on peut écrire pour tout n de IN .

$I_n = (e^{-2\pi})^n \times \frac{e^{-\pi} + 1}{2} = (e^{-2\pi})^n I_0$

ce qui prouve que (I_n) est une suite géométrique de raison $e^{-2\pi}$

$-2\pi < 0$ donc $0 < e^{-2\pi} < 1$, par suite la suite (I_n) converge vers 0 c'est-à-dire $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$.

Exercice 21

1. calculons I+J

$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{e^x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{e^x} dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{e^x} dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{e^x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} dx = \left[-e^{-x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$I+J = 1 - e^{-\frac{\pi}{2}}$

2. Démontrons que $K = \frac{1 + e^{-\frac{\pi}{2}}}{5}$

Posons $u(x) = \cos 2x$, $v'(x) = e^{-x}$; on a

$u'(x) = 2\sin 2x$ et $v(x) = -e^{-x}$

En intégrant par partie on a :

$K = \left[-\cos 2x e^{-x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\sin 2x dx$;

intégrons $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\sin 2x dx$ en posant $u(x) = \sin 2x$,

$v'(x) = e^{-x}$,

$u'(x) = -2\cos 2x$ et $v(x) = -e^{-x}$ on a donc

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\sin 2x dx = \left[-\sin 2x e^{-x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\cos 2x dx$

$= -2K$ par suite

$K = e^{-\frac{\pi}{2}} + 1 - 4K$

Scanned by CamScanner

c'est-à-dire $5K = e^{-\frac{\pi}{2}} + 1$

d'où $K = \frac{1+e^{-\frac{\pi}{2}}}{5}$

3. Calculons la valeur de I – J

$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\cos^2 x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\sin^2 x dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}(\cos^2 x - \sin^2 x)dx$$

or $\cos^2x - \sin^2x = \cos 2x$ donc

$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}coos2xdx = K$ on en déduit que

$I - J = \frac{1+e^{-\frac{\pi}{2}}}{5}$

4. Calculons I et J

On a : $I + J = 1 - e^{-\frac{\pi}{2}}$ et $I - J = \frac{1+e^{-\frac{\pi}{2}}}{5}$ on déduit :

$2I = \frac{5-5e^{-\frac{\pi}{2}}+e^{-\frac{\pi}{2}}+1}{5}$ c'est-à-dire

$I = \frac{3-2e^{-\frac{\pi}{2}}}{5}$ et $J = \frac{2-3e^{-\frac{\pi}{2}}}{5}$

Exercice 22

1) f est définie sur [0 ;1] par $f(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+2})$

a) La fonction définie par $u(x) = x^2 + 2$ est strictement positive sur IR c'est une fonction polynôme, elle donc dérivable sur IR et on a u'(x) = 2x, donc la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+2}$ a pour dérivée la fonction

$x \mapsto \frac{2x}{2\sqrt{x^2+2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$

b) La fonction définie sur [0 ;1] par $u(x) = x + \sqrt{x^2+2}$ est dérivable, car elle est la somme de deux fonctions dérivables

Pour tout x de {0 ;1], on a $x \geq 0 et \quad \sqrt{x^2+2} > 0$, on peut alors en déduire que $x \mapsto x + \sqrt{x^2+2} > 0$ pour tout x de [0 ;1].

La fonction u est donc strictement positive sur [0 ;1].

Alors f définie sur [0 ;1] par $f(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+2})$ est dérivable sur [0 ;1] et sa dérivée est donnée par

$$f'(x) = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}}{x+\sqrt{x^2+2}} = \frac{\sqrt{x^2+2}+x}{\sqrt{x^2+2}} \times \frac{1}{x+\sqrt{x^2+2}}$$

Donc $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$ pour tout x de [0 ;1].

c) Le résultat précédent permet de dire que f est primitive sur [0 ;1] de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$, l'intégrale I existe donc on a $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}dx = [f(x)]_0^1$ c'est-à-dire

$I = \ln(1+\sqrt{3}) - \ln(0+\sqrt{2})$ soit $I = \ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

2) a) $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$; $J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx$;

$K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}dx$

Ces intégrales existent car les fonctions $x \mapsto \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}$ et $x \mapsto \sqrt{x^2+2}$ ont des primitives sur [0 ;1] (car elles sont continues sur [0 ;1])

On peut alors écrire

$$J + 2I = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx + 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} + \frac{2}{\sqrt{x^2+2}}\right)dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+2}}dx = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}dx \text{ donc}$$

J + 2I = K.

b) $K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}dx$ Intégrons par parties K en posant u(x) $= \sqrt{x^2+2}$ et v'(x) = 1

$$u'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} \text{ et } v(x) = x$$

On a alors $K = \left[x\sqrt{x^2+2}\right]_0^1 - \int_0^1 x \times \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}dx$

$$= \sqrt{3} - \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx = \sqrt{3} - J$$

Donc $K = \sqrt{3} - J$

c) On a vu que J + 2I = K et $K = \sqrt{3} - J$ donc $J + 2I = \sqrt{3} - J$ c'est-à-dire $2J = \sqrt{3} - 2I$

on sait d'après la question 1) c) que $I = \ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

on en déduit que $2J = \sqrt{3} - 2\ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$ donc

$J = \frac{\sqrt{3}}{2} - \ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$. Comme $K = \sqrt{3} - J$ on en déduit

Scanned by CamScanner

Donc $K = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$ soit

$K = \frac{\sqrt{3}}{2} + \ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$

Exercice 23

Pour tout entier naturel n, on a

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \sin x dx$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \cos x dx$

1) $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$ donc $\boxed{I_0 = 1}$

$J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$ donc $\boxed{J_0 = 1}$

2) a) Pour $n \geq 1$ intégrons par parties

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \sin x dx$ en posant $u(x) = e^{-nx}$ $v'(x) = \sin x$

$u'(x) = -ne^{-nx}$ $v(x) = -\cos x$

On obtient

$I_n = \left[-e^{-nx} \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} ne^{-nx} \cos x dx = 1 - nJ_n$

On en déduit alors que $I_n + nJ_n = 1$

Pour $n \geq 1$ intégrons par parti

$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \cos x dx$ en posant $u(x) = e^{-nx}$ $v'(x) = \cos x$

$u'(x) = -ne^{-nx}$ $v(x) = \sin x$

On obtient $I_n = \left[e^{-nx} \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -ne^{-nx} \sin x dx = e^{-\frac{n\pi}{2}} + nI_n$

On en déduit alors que $-nI_n + J_n = e^{-\frac{n\pi}{2}}$

On a démontré finalement que

$$\boxed{\begin{cases} I_n + nJ_n = 1 \\ -nI_n + J_n = e^{-\frac{n\pi}{2}} \end{cases} \text{ pour tout } n \geq 1}$$

b) En multipliant la deuxième équation du système par n, on

obtient $\begin{cases} I_n + nJ_n = 1 \\ -n^2 I_n + nJ_n = ne^{-\frac{n\pi}{2}} \end{cases}$

En soustrayant les égalités on a

$(1+n^2) I_n = 1 - ne^{-\frac{n\pi}{2}}$ donc $\boxed{I_n = \frac{1 - ne^{-\frac{n\pi}{2}}}{1+n^2} \text{ pour } n \geq 1}$

En multipliant la première équation du système par n on a

$\begin{cases} nI_n + n^2 J_n = n \\ -nI_n + J_n = e^{-\frac{n\pi}{2}} \end{cases}$, en soustrayant les égalités on a

$(1+n^2) J_n = n + e^{-\frac{n\pi}{2}}$ donc $\boxed{J_n = \frac{n + e^{-\frac{n\pi}{2}}}{1+n^2} \text{ pour } n \geq 1}$

3) On peut écrire $I_n = \frac{1}{n^2+1} - \frac{n}{n^2+1} e^{-\frac{n\pi}{2}}$ pour $n \geq 1$

$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2+1} = 0$ et $\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$ d'autre part

$\lim_{n \to +\infty} -\frac{n\pi}{2} = -\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ donc $\lim_{n \to +\infty} e^{-\frac{n\pi}{2}} = 0$

On en déduit alors que $\boxed{\lim_{n \to +\infty} I_n = 0}$

De même on peut écrire

$I_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+1} e^{-\frac{n\pi}{2}}$ pour $n \geq 1$ donc $\boxed{\lim_{n \to +\infty} J_n = 0}$

Scanned by CamScanner

Exercice 1

a) L'équation différentielle $y'+2y=0$ a pour solutions les fonctions f définie sur IR par $f(x)=ke^{-2x}$ avec $k\in\mathbb{R}$.

Sachant que f(1) = 3 on en déduit $ke^{-2}=3\Leftrightarrow k=3e^{2}$

on a donc $f(x)=3e^{2}\times e^{-2x}$ c'est-à-dire

$f(x)=3e^{-2x+2}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

b) L'équation différentielle

$3y'-2y=0$ peut aussi s'écrire $y'-\frac{2}{3}y=0$

Cette équation différentielle a pour solutions les fonctions f définie sur IR par $f(x)=ke^{\frac{2}{3}x}$ avec $k\in\mathbb{R}$. Sachant que f(3) = -1 on en déduit : $ke^{2}=-1\Leftrightarrow k=-e^{-2}$

on a donc $f(x)=-e^{-2}\times e^{\frac{2}{3}x}$ c'est-à-dire

$f(x)=-e^{\frac{2}{3}x-2}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

c) L'équation différentielle

$2y'=y$ peut aussi s'écrire $y'-\frac{1}{2}y=0$

Cette équation différentielle a pour solutions les fonctions f définie sur IR par $f(x)=ke^{\frac{1}{2}x}$ avec $k\in\mathbb{R}$. Sachant que 2 f(-1) = 3 on en déduit : $2ke^{-\frac{1}{2}}=3\Leftrightarrow k=\frac{3}{2}e^{\frac{1}{2}}$

on a donc $f(x)=\frac{3}{2}e^{\frac{1}{2}}\times e^{\frac{1}{2}x}$ c'est-à-dire

$f(x)=\frac{3}{2}e^{\frac{1}{2}(x-1)}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

d) L'équation différentielle

$y-2y'=0$ peut aussi s'écrire $y'-\frac{1}{2}y=0$

Cette équation différentielle a pour solutions les fonctions f définie sur IR par $f(x)=ke^{\frac{1}{2}x}$ avec $k\in\mathbb{R}$. Sachant que f(0) = 0 on en déduit : $ke^{0}=3\Leftrightarrow k=3$

on a donc $f(x)=3\times e^{\frac{1}{2}x}$ c'est-à-dire

$f(x)=3e^{\frac{1}{2}x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

Exercice 2 a) L'équation différentielle

$4y'-3y=0$ peut aussi s'écrire $y'-\frac{3}{4}y=0$

Cette équation différentielle a pour solutions les fonctions f définie sur IR par $f(x)=ke^{\frac{3}{4}x}$ avec $k\in\mathbb{R}$. Sachant que f(0) = 1 on en déduit : $ke^{0}=1\Leftrightarrow k=1$

on a donc $f(x)=e^{\frac{3}{4}x}$ pour tout x de IR

Donc $f(1)=e^{\frac{3}{4}}$

Le point d'abscisse 1 de la courbe de f a donc pour ordonnée $e^{\frac{3}{4}}$

Faux

b) On a $4f'-3f=0$ donc $4f'(0)-3f(0)=0$ sachant que f(0) = 1 on en déduit $f'(0)=\frac{3}{4}$. La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 a pour coefficient directeur $\frac{3}{4}$

Faux

c) On a vu que f est définie par $f(x)=e^{\frac{3}{4}x}$ pour tout x de IR donc f est une fonction croissante sur IR *Vrai*

d) f est telle que $4f'-3f=0$ donc $f'=\frac{3}{4}f$ en dérivant on en déduit que $f''=\frac{3}{4}f'$ donc $f''=\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}f=\frac{9}{16}f$ donc $16f''-9f'=0$

Vrai

Exercice 3 1) f est définie sur $[0;+\infty[$ par $f(t)=\theta(t)-20$

Un a $f'(t)=\theta'(t)$ donc

$f'(t)+0.1f(t)=\theta'(t)+0.1[\theta(t)-20]=\theta'(t)+0.1\theta(t)-2$ on sait que la fonction θ est telle que $\theta'(t)+0.1\theta(t)=2$ on a donc $f'(t)+0.1f(t)=0$ pour tout $t\in[0;+\infty[$, f est une solution de l'équation différentielle (E) : $y'+0.1y=0$

2) on sait que l'équation différentielle $y'+0.1y=0$ a pour ensemble de solutions l'ensemble des fonctions y définies par $y(t)=ke^{-0.1t}$ avec $k\in\mathbb{R}$

3) f étant solution de l'équation différentielle (E) on a donc $f(t)=ke^{-0.1t}$ avec $k\in\mathbb{R}$. On sait que $f(t)=\theta(t)-20$ donc $\theta(t)=f(t)+20$ par suite $\theta(t)=ke^{-0.1t}+20$ avec $k\in\mathbb{R}$. De plus à l'instant t = 0 la température du conducteur est égale à $0^{0}C$ un a donc $\theta(0)=0$ ainsi $ke^{0}+20=0$ et k = -20. Par conséquent $\theta(t)=-20e^{-0.1t}+20$ c'est-à-dire que

$\theta(t)=20\left(1-e^{-0.1t}\right)$ pour tout $t\in[0;+\infty[$

4) On a $\theta(10)=20\left(1-e^{-0.1\times10}\right)=20\left(1-e^{-1}\right)$. Au bout de 10 secondes la température en degrés Celsius est $\theta(10)=20\left(1-e^{-1}\right)$ soit environ 12.6^{0} C

On a $\theta(30)=20\left(1-e^{-0.1\times30}\right)=20\left(1-e^{-3}\right)$. Au bout de 30 secondes la température en degrés Celsius est

Scanned by CamScanner

$\theta(30) = 20\left(1-e^{-3}\right)$ soit environ 19° C. On a $\theta(60) = 20\left(1-e^{-0.1\times60}\right) = 20\left(1-e^{-6}\right)$. Au bout de 60 secondes la température en degrés Celsius est $\theta(60) = 20\left(1-e^{-6}\right)$ soit environ 19.95° C

On sait que $\lim_{t\to-\infty} e^{t} = 0$ donc $\lim_{t\to+\infty} e^{-0.1t} = 0$ on en déduit $\lim_{t\to-\infty} \theta(t) = 20$.

Exercice 4 1) Soit p définie par $p(x) = ax^2+bx+c$ une fonction polynôme du second degré. On a

$p'(x) = 2ax+b$

p est solution de (E) $\Leftrightarrow$ $p'(x)+2p(x) = 3x^2-1$

$\Leftrightarrow 2ax+b+2(ax^2+bx+c) = 3x^2-1$

$\Leftrightarrow 2ax^2+(2b+2a)x+2c+b = 3x^2-1$

Pour tout réel x. Par identification on a

$$\begin{cases} 2a = 3 \\ 2b+2a = 0 \\ 2c+b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ 2b = -3 \\ 2c = -1-b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = -\frac{3}{2} \\ c = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Il existe donc une et une seule fonction polynôme du second degré p solution de (E) p est définie par

$p(x) = \frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}$ pour tout réel x.

2) l'équation (E') $y'+2y = 0$ a pour ensemble de solutions l'ensemble des fonctions f définies par

$f(x) = ke^{-2x}$ avec $k \in \mathbb{R}$

3) Soit g une fonction de (E), alors g est dérivable sur IR et on a et on a $g'(x)+2g(x) = 3x^2-1$ pour tout réel x. on sait d'autre part que p est solution de (E) donc $p'(x)+2p(x) = 3x^2-1$ pour tout réel x , on en déduit, par soustraction que

$g'(x)-p'(x)+2g(x)-2p(x) = 0$ c'est-à-dire

$(g-p)'(x)+2(g-p)(x) = 0$ pour tout réel x donc

$(g-p)$ est solution de (E')

Réciproquement supposons que g est une fonction telle que $(g-p)$ soit solution de (E').

Alors $(g-p)$ est dérivable et on a

$(g-p)'(x)+2(g-p)(x) = 0$ pour tout réel x.

Par suite $g'(x)-p'(x)+3g(x)-2p(x) = 0$ pour tout réel x c'est-à-dire $g'(x)+2g(x) = p'(x)+2p(x)$ or on sait que p est solution de (E) on a donc $p'(x)+2p(x) = 3x^2-1$. Ainsi pour tout réel x $g'(x)+2g(x) = 3x^2-1$ on en déduit que g est solution de (E).

Ainsi on a démontré que g est solution de (E) si, et seulement si (g – p) est solution de (E').

4) g est solution de (E) équivaut à (g – p) est solution de (E') donc pour tout réel x,

$(g-p)(x) = ke^{-2x}$ avec $k \in \mathbb{R}$ soit

$g(x) = ke^{-2x}+p(x)$ et $g(x) = ke^{-2x}+\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}$

L'ensemble des solutions de l'équation (E) est donc l'ensemble des fonctions f définies sur IR par

$f(x) = ke^{-2x}+\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}$ avec $k \in \mathbb{R}$

Exercice 5 1) Ecrivons l'équation différentielle (E)

(E) : $Li'(t)+Ri(t) = E \Leftrightarrow 0.2i(t)+100i(t) = 10$

2) Montrons que f est solution de l'équation différentielle

(E') : $0.2f'(t)+100f(t) = 0$

f est définie sur $[0,+\infty[$ par $f(t) = i(t)-\frac{10}{100}$

f'(t) = i'(t) on a

$$0.2f'(t)+100f(t) = 0.2i'(t)+100\left[i(t)-\frac{10}{100}\right]$$

$$= 0.2i'(t)+100i(t)-10$$

on sait que $0.2i'(t)+100i(t) = 10$ donc

$0.2f'(t)+100f(t) = 0$ pour tout $t \in [0,+\infty[$ d'où f est solution de l'équation différentielle (E')

3) Résolvons l'équation différentielle (E') L'équation $0.2f'(t)+100f(t) = 0$ peut s'écrire

$f'(t)+500f(t) = 0$

f étant solution de l'équation différentielle de (E') on a donc $f(t) = ke^{-500t}$ avec $k \in \mathbb{R}$

4) En déduisons l'expression de i(t)

Sachant $f(t) = i(t)-\frac{10}{100} \Leftrightarrow i(t) = f(t)+\frac{1}{10}$

Donc $i(t) = ke^{-500t}+0.1, k \in \mathbb{R}$. De plus à l'instant t = o l'intentensité du courant est nulle on a donc i(0) = 0 $i(0) = 0 \Leftrightarrow ke^{0}+0.1 = 0 \Leftrightarrow k = -0.1$

D'où $i(t) = -0.1i(t)+0.1$ pour tout $t \in [0,+\infty[$ c'est-à-dire $\boxed{i(t) = 0.1\left[1-e^{-500t}\right], t \in [0,+\infty[}$

Exercice 6 a) L'équation différentielle $9y'+4y = 0$ peut s'écrire $y'+\frac{4}{9}y = 0 \Leftrightarrow y'+\left(\frac{2}{3}\right)^2 y = 0$

l'ensemble des solutions dans IR de l'équation différentielle $9y'+4y = 0$ est l'ensemble des fonctions f définies sur IR par

$f(x) = A\cos\frac{2}{3}x+B\cos\frac{2}{3}x, (A;B) \in \mathbb{R}^2$

b) Déterminons la solution particulière f dont la courbe représentative passant par le point $A\left(\frac{\pi}{2},\sqrt{3}\right)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur $-\frac{2}{3}$

Scanned by CamScanner

On a $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{3}$ et $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{2}{3}$ donc

$$\begin{cases} f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{3} \\ f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}A+\frac{\sqrt{3}}{2}B=\sqrt{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3}A+\frac{1}{3}B=-\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+\sqrt{3}B=2\sqrt{3} \\ -\sqrt{3}A+B=-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3}A+3B=6 \\ -\sqrt{3}A+B=-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 4B=4 \Leftrightarrow B=1$$

$$A+\sqrt{3}B=2\sqrt{3} \Leftrightarrow A+\sqrt{3}=2\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow A=\sqrt{3}$$

D'où $f(x)=\sqrt{3}\cos\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}\sin\frac{2}{3}x, \forall x\in\mathbb{R}$

c) Montrons que pour tout x de IR on a

$$f(x)=2\cos\left(\frac{2}{3}x-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$f(x)=\sqrt{3}\cos\frac{2}{3}x+\sin\frac{2}{3}x$$

$$=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}\sin\frac{2}{3}x\right)$$

$$=2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{2}{3}x+\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{2}{3}x\right)$$

$$=2\cos\left(\frac{2}{3}x-\frac{\pi}{6}\right)$$

D'où $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=2\cos\left(\frac{2}{3}x-\frac{\pi}{6}\right)}$

d) Résolvons l'équation f(x) = 0 dans $[-\pi;\pi]$

$$f(x)=0 \Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{2}{3}x-\frac{\pi}{6}\right)=0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{2}{3}x-\frac{\pi}{6}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2k\pi \\ ou \\ \frac{2}{3}x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{2}+2k\pi \end{cases} k\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi \\ ou \\ \frac{2}{3}x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi \end{cases} k\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\pi+3k\pi \\ ou \\ x=-\frac{\pi}{2}+3k\pi \end{cases} k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=\pi \text{ ou } x=-\frac{\pi}{2}$$

D'où $S=\left\{\pi;;-\frac{\pi}{2}\right\}$

Exercice 7 1) Résolvons l'équation différentielle

(1) : $y'-\frac{1}{n}y=0$

Cette équation différentielle admet comme ensemble de solutions les fonctions y définies par

$y(x)=ke^{\frac{1}{n}x}$ avec $k\in\mathbb{R}$

2) (2) : $y'-\frac{1}{n}y=\frac{x+1}{n(n+1)}$

Déterminons les réels a et b.

$g(x)=ax+b, g'(x)=a$

g est solution de (2) signifie

$$g'(x)-\frac{1}{n}g(x)=\frac{x+1}{n(n+1)}$$

$$\Leftrightarrow a-\frac{1}{n}ax-\frac{1}{n}b=\frac{x+1}{n(n+1)}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{n}ax+a-\frac{1}{n}b=\frac{x}{n(n+1)}+\frac{1}{n(n+1)}$$

Par identification on a

$$\begin{cases} -\frac{1}{n}a=\frac{1}{n(n+1)} \\ a-\frac{1}{n}b=\frac{1}{n(n+1)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{n+1} \\ -\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}b=\frac{1}{n(n+1)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{n+1} \\ -\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}b=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{n+1} \\ -\frac{1}{n}b=\frac{1}{n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{n+1} \\ b=-1 \end{cases}$$

D'où $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}, g(x)=-\frac{1}{n+1}x-1}$

3) a) Supposons h solution de (2), alors

$$h'(x)-\frac{1}{n}h(x)=\frac{x+1}{n(n+1)}$$

g est solution de (2) donc $g'(x)-\frac{1}{n}g(x)=\frac{x+1}{n(n+1)}$

on en déduit, par soustraction que

$h'(x)-g'(x)-\frac{1}{n}h(x)+\frac{1}{n}g(x)=0$ c'est-à-dire

$(h-g)'(x)-\frac{1}{n}(h-g)(x)=0$ pour tout réel x.

donc h – g est solution de (1).

Réciproquement supposons que h est une fonction telle que h – g soit solution de (1).

Scanned by CamScanner

$-g)'(x)-\frac{1}{n}(h-g)'(x)=0$ c'est à dire

$(x)-\frac{1}{n}h(x)+g'(x)-\frac{1}{n}g(x)=0$

g est solution de (2) donc $g'(x)-\frac{1}{n}g(x)=\frac{x+1}{n(n+1)}$

ar suite pour tout réel x, $h'(x)-\frac{1}{n}h(x)=\frac{x+1}{n(n+1)}$ d'où

est solution de (2).

insi on a démontré que pour qu'une fonction h soit olution de (2) il faut et il suffit que h – g soit solution de

En déduisons les solutions de (2)

est solution de (2) équivaut à h –g est solution de (1) donc

$-g)(x)=ke^{\frac{1}{n}x}$ avec $k\in\mathbb{R}$ soit

$(x)=ke^{\frac{1}{n}x}+g(x)$ d'où l'ensemble des solutions de (2) nt les fonctions h définies sur IR par

$(x)=ke^{\frac{1}{n}x}-\frac{1}{n+1}-1$.

Exercice 8 $y''+\frac{9\pi^2}{4}y=0$

Donnons la solution générale de cette équation fférentielle.

$''+\frac{9\pi^2}{4}y=0\Leftrightarrow y''+\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2y=0$

nsemble des solutions de cette équation différentielle est nsemble des fonctions y définies sur IR par

$(t)=A\cos\frac{3\pi}{2}t+B\sin\frac{3\pi}{2}t,(A;B)\in\mathbb{R}^2$

a) $y(0)=1$ et $y'(0)=-\frac{3\pi}{2}$

$(0)=A\Leftrightarrow A=1$

$'(x)=-\frac{3\pi}{2}A\sin\frac{3\pi}{2}t+\frac{3\pi}{2}\cos\frac{3\pi}{2}t$ donc

$(0)=\frac{3\pi}{2}B\Leftrightarrow\frac{3\pi}{2}B=-\frac{3\pi}{2}\Leftrightarrow B=-1$

où pour $t\geq0$ $y(t)=\cos\frac{3\pi}{2}t-\sin\frac{3\pi}{2}t$

$y(t)=\cos\frac{3\pi}{2}t-\sin\frac{3\pi}{2}t$

$=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{3\pi}{2}t-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{3\pi}{2}t\right)$

$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{3\pi}{2}t=\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{3\pi}{2}t\right)$

$=\sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{2}t+\frac{\pi}{4}\right)$

d'où $y(t)=\sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{2}\left(t+\frac{1}{6}\right)$ et $\boxed{\alpha=\frac{1}{6}}$

3) a) Donnons la valeur de t pour laquelle le point M passe pour la première fois en O.

$y(t)=0\Leftrightarrow\sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{2}t+\frac{\pi}{4}\right)=0$

$\Leftrightarrow\cos\left(\frac{3\pi}{2}t+\frac{\pi}{4}\right)=0$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{3\pi}{2}t+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+2k\pi\\ ou\\ \frac{3\pi}{2}t+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}+2k\pi\end{cases}\quad k\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow t=\frac{1}{6}+\frac{4}{3}k$

Donc pour $t=\frac{1}{6}$ le mobile M passe pour la première fois en O.

b) $t=\frac{1}{6}+\frac{4}{3}k$

$0\leq t\leq4\Leftrightarrow0\leq\frac{1}{6}+\frac{4}{3}k\leq4\Leftrightarrow-\frac{1}{8}\leq k\leq\frac{23}{8}$

$\Leftrightarrow-0.125\leq k\leq2.87$

On a k = 0, k = 1 et k = 2

Le mobile M passe 3 fois en O dans l'intervalle de temps [0 ; 4].

Scanned by CamScanner

Exercice 1

$\begin{cases} x(t) = t - 2\sin t \\ y(t) = \cos t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

1) Montrons que le point $M(t+2\pi)$ est l'image de M(t) par une translation dont on précisera le vecteur de translation.

$\begin{cases} x(t+2\pi) = t + 2\pi - 2\sin t \\ y(t+2\pi) = \cos t \end{cases}$ soit $\begin{cases} x(t+2\pi) = 2\pi + x(t) \\ y(t+2\pi) = y(t) \end{cases}$

Ainsi $M(t+2\pi)$ est l'image de M(t) par la translation de vecteur $\vec{u} = 2\pi\vec{i}$

2) Montrons que M(t) et M(-t) sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

On a $\begin{cases} x(-t) = -t + 2\sin t \\ y(-t) = \cos t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(-t) = -x(t) \\ y(-t) = y(t) \end{cases}$

Ainsi M(t) et M(-t) sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

3) Calculons x'(t) et montrons que

$\begin{cases} x'(t) \le 0 \text{ pour } t \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right] \\ x'(t) > 0 \text{ pour } t \in \left]\frac{\pi}{3}; \pi\right] \end{cases}$

$\forall t \in [0, \pi]$, $x'(t) = 1 - 2\cos t$; $1 - 2\cos t = 0 \Leftrightarrow \cos t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{3}$

Tableau de signe

t	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$1-2\cos t$		$-$	0	$+$	

Donc $\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$, $x'(t) \le 0$ et $\forall t \in \left]\frac{\pi}{3}; \pi\right]$, $x'(t) > 0$

4) Etudions les variations de x et de y et donnons leurs variations dans un tableau commun.

Variations de x

D'après 3)

$\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$, $x'(t) \le 0$ donc x est décroissante sur $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ et

$\forall t \in \left]\frac{\pi}{3}; \pi\right]$, $x'(t) > 0$ donc x est strictement sur $\left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$

Variations dey

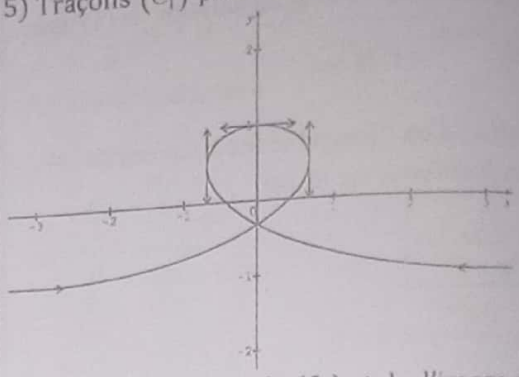
$\forall t \in [0; \pi]$, $y'(t) = -\sin t$ or $\forall t \in [0; \pi]$, $\sin t > 0$ donc

$y'(t) \le 0$ et y est décroissante sur $[0; \pi]$

Tableau de variations

t	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$x'(t)$	-1	$-$	0	$+$	3
$x(t)$	0	↘	$\frac{\pi}{3} - \sqrt{3}$	↗	π
$y'(t)$	1	↘	$\frac{1}{2}$	↘	-1
$y(t)$	0	$-$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-$	0

5) Traçons (C_1) partie de (C) correspondant à $t \in [-\pi, \pi]$



6) (C_2) est la réunion de (C_1) et de l'image de (C_1) par la translation de vecteur $\vec{u} = 2\pi\vec{i}$

Exercice 2

1.Montrons que l'image de M par F a pour coordonnées

$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}\cos 2t = \cos t \\ y(t) = \frac{1}{2}\sin 2t - \sin t \end{cases}$

Soit $Z = x + yi$ l'affixe de l'image de M par M.

On a $Z = \frac{1}{2}z^2 - z$ c'est-à-dire

$x + yi = \frac{1}{2}(\cos 2t + i\sin 2t) - (\cos t + i\sin t)$ soit

$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}\cos 2t = \cos t \\ y(t) = \frac{1}{2}\sin 2t - \sin t \end{cases}$ d'où l'mage de M par a pour coordonnées $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}\cos 2t = \cos t \\ y(t) = \frac{1}{2}\sin 2t - \sin t \end{cases}$.

$2\,x(-t) = \frac{1}{2}\cos(-2t) - \cos(-t)$

$= \frac{1}{2}\cos 2t - \cos t = x(t)$

$y(-t) = \frac{1}{2}\sin(-2t) - \sin(-t)$

$= -\frac{1}{2}\sin 2t + \sin t = -y(t)$

Scanned by CamScanner

on en déduit que Γ admet l'axe des abscisses pour axe de métrie.

$x'(t) = -\sin 2t + \sin t = -2\cos t \sin t + \sin t = \sin t(1 - 2\cos t)$

udions les variations de x sur $[0;\pi]$

$(t) = \sin t(1-2\cos t)$ or $\forall t \in [0;\pi], \sin t \geq 0$ donc x'(t) est même signe que 1 – 2cost.

$-2\cos t = 0 \Leftrightarrow \cos t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{3}$

où pour tout t de $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ x't) ≤ 0 et x est décroissante

ur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$. Pour tout t de $\left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$ $x'(t) \geq 0$ et x est

oissante sur $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$.

montrons que $y'(t) = (\cos t - 1)(1 + 2\cos t)$

$(t) = \cos 2t - \cos t \cos^2 t - \sin^2 t - \cos t = 2\cos^2 t - 1 - \cos t$

$\cos^2 t - 1 + \cos^2 t - \cos t = (\cos t - 1)(\cos t + 1) + \cos t(\cos t - 1)$

$(\cos t - 1)(1 + 2\cos t)$

où le résultat

udions les variations de y sur $[0;\pi]$

$(t) = 0 \Leftrightarrow \cos t - 1 = 0$ ou $1 + 2\cos t = 0$

$= (t = 0 ou \quad t = \pi)$ ou $t = \frac{2\pi}{3}$

Tableau de signe de y'

t	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$\cos(t)-1$		−		−	
$1+2\cos(t)$		+	0	−	
$y'(t)$		−	0	+	

où pour tout t de $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$ $y'(t) \leq 0$ et y est décroissante

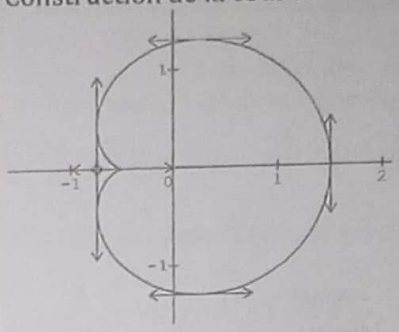
ur $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$. Pour tout t de $\left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$ $y'(t) \geq 0$ et y est

oissante sur $\left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$

Dressons le tableau de variation conjoint de x et y sur $[0;\pi]$.

t	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$x'(t)$	1	−	0	+	$\sqrt{3}$	+	0
$x(t)$	$-\frac{1}{2}$	↘	$-\frac{3}{4}$	↗	$\frac{1}{4}$	↗	$\frac{3}{2}$
$y(t)$	0	↘	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	↘	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↗	0
$y'(t)$	0	−	−1	−	0	+	2

Construction de la courbe



Exercice 3

a. Etudions les variations de x et y sur $[-1;2]$.

$\forall t \in [-1;2]$ $x'(t) = 6t^2 - 6t = 6t(t-1)$

$X'(t) = 0 \Leftrightarrow t =$ ou $t = 1$, donc pour tout t de $[-1;0] \cup [1;2]$ $x'(t) \geq 0$ par suite x est croissante sur [-1 ;0] et sur [1 ;2].

Pour tout t de [0 ;1] $x'(t) \leq 0$ donc x est décroissante sur [0 ;1].

$\forall t \in [-1;2]$ $y'(t) = 4 - 2t$, $y'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$ donc pour tout t de [-1 ;2] $y'(t) \geq 0$ et y est croissante sur [-1 ;2].

Tableau de variation de x et de y

t	−1		0		1		2
$x'(t)$	12	+	0	−	0	+	12
$x(t)$	−5	↗	0	↘	−1	↗	4
$y(t)$	−5	↗	0	↗	3	↗	4
$y'(t)$	6	+	4	+	2	+	0

b) Equations des tangentes en :

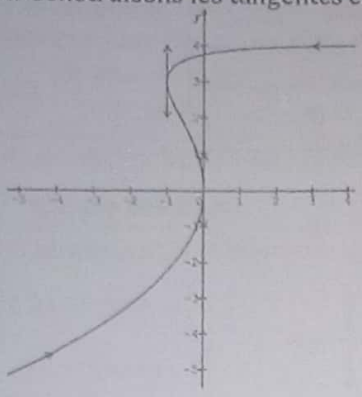
Scanned by CamScanner

M(0) la tangente est dirigée par le vecteur $4\vec{j}$ d'où une équation de al tangente est $x = 0$ M(-1)(-5 ;-5) ; la tangente est dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix}12\\6\end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ d'où l'équation de la tangente est : $(x + 5) - 2(y + 5) = 0$ soit $x - 2y - 5 = 0$.

M(1) la tangente est dirigée par le vecteur $4\vec{j}$ soit son équation est : $x = -1$.

M(2) la tangente est dirigée par le vecteur $12\vec{i}$ soit son équation est $y = 4$

c. Construisons les tangentes et la courbe (C)



Exercice 4

a. $x(t+2\pi) = 2\cos(t+2\pi) = 2\cos(t) = x(t)$

$y(t+2\pi) = 2\sin(2t+4\pi) = 2\sin(2t) = y(t)$

M$(t+2\pi)$ et M(t) sont confondus

b. x(-t) = 2cos(-t) = 2cos(t) = x(t)

y(-t) = 2sin(-2t) = -2sin(2t) = - y(t)

M(-t) et M(t) sont symétries par rapport à l'axe des abscisses.

M(t) et M$(t+2\pi)$ sont confondus donc le domaine d'étude peut se limiter à un intervalle d'amplitude 2π par exemple $[-\pi;\pi]$.

M(-t) et M(t) sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses donc le domaine d'étude peut se limiter sur l'intervalle $[0;\pi]$.

c. $x(\pi - t) = 2\cos(\pi - t) = -2\cos(t) = -x(t)$

$y(\pi - t) = 2\sin(2\pi - 2t) = -2\sin(2t) = -y(t)$

M$(\pi - t)$ et M(t) sont symétriques par rapport à l'origine du repère. Donc le domaine d'étude peut se limiter à l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.On complètera la courbe par symétrie par rapport à l'origine du repère puis par rapport à l'axe des abscisses.

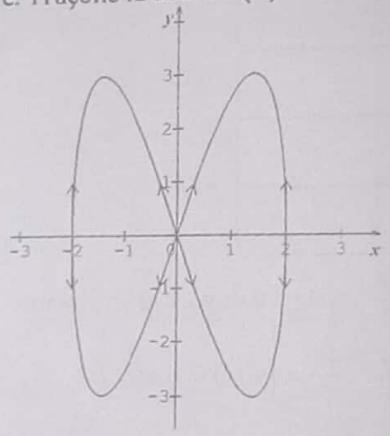
d. Etudions les variations de x et y sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Pour tout t de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ x'(t) = -2sint or pour tout t de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ sint≥ 0 donc x'(t)≤ 0 et par conséquent x est décroissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Pour tout t de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ y'(t) = 6cos2t ; cos(2t) = 0 $\Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4}$, donc pour tout t de $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ y'(t)≥ 0 et y est croissante sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ et pour tout de t $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$ y'(t) ≤ 0 donc y est décroissante sur $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$

Tableau de variation de x et y

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	0	$-\sqrt{2}$	-2
$x(t)$	2	$\sqrt{2}$	-2
$y(t)$	0	3	0
$y'(t)$	6 +	0	− −6

e. Traçons la courbe (C)



Exercice 5

a. $x(\pi - t) = \sin(3\pi - 3t) = \sin(3t) = x(t)$

$y(\pi - t) = \cos(2\pi - 2t) = \cos(2t) = y(t)$

M$(\pi - t)$ et M(t) sont confondus

b. x(-t) = sin(-3t) = -sin(3t) =- x(t)

y(-t) = cos(-2t) = cos(2t) = -y(t)

M(-t) et M(t) sont symétries par rapport à l'axe des ordonnées.

M(t) et M$(\pi - t)$ sont confondus donc le domaine d'étude peut se limiter à un intervalle d'amplitude π par exemple $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Scanned by CamScanner

M(-t) et M(t) sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées donc le domaine d'étude peut se limiter sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. On complètera la courbe par rapport à l'axe des ordonnées.

Etudions les variations de x et y sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Pour tout t de $[0;\pi]$ x'(t) = 3cos(3t),

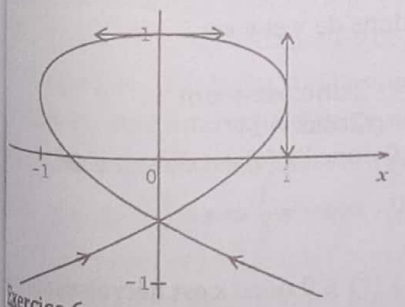
$x'(t)=0 \Leftrightarrow \cos 3t = 0 \Leftrightarrow t=\frac{\pi}{6}$ ou $t=\frac{\pi}{2}$. Onc pour tout t de $\left[0;\frac{\pi}{6}\right]$ x'(t) ≥ 0 et x est croissante sur $\left[0;\frac{\pi}{6}\right]$. Pour tout t de $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$ x'(t) ≤ 0 donc x est décroissante sur $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$.

Variation de y. Pour tout t de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ y'(t) = -2sin2t.

$y'(t)=0 \Leftrightarrow \sin 2t = 0 \Leftrightarrow t=0 \text{ ou } t=\frac{\pi}{2}$ donc pour tout t de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ y'(t) ≤ 0 et y est décroissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Tableau de variation de x et de y

t	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
x'(t)	3	+	0	−	0
x(t)	0	↗	1	↘	−1
y(t)	1	↘	$\frac{1}{2}$	↘	−1
y'(t)	0	−	$-\sqrt{3}$	−	0

Et traçons la courbe



Exercice 6

1. $x(t+2\pi)=3\cos(t+2\pi)-\cos(3t+6\pi)$
$=3\cos t-\cos 3t = x(t)$
$y(t+2\pi)=3\sin(t+2\pi)-\sin(3t+6\pi) \quad =3\sin t-\sin 3t = y(t)$
M(t) et $M(t+2\pi)$ sont confondus. Donc le domaine d'étude peut se limiter sur un intervalle d'amplitude 2π par exemple l'intervalle $[-\pi;\pi]$.

b. $x(-t)=3\cos(-t)-\cos(-3t)=3\cos t-\cos 3t = x(t)$
$y(-t)=3\sin(-t)-\sin-3t)=-3\sin(t)+\sin 3t = -y(t)$ M(-t) et M(t) sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses donc l'axe des abscisses est un axe de symétrie pour la courbe et ainsi le domaine d'étude peut se limiter à l'intervalle $[0;\pi]$

$x(\pi-t)=3\cos(\pi-t)-\cos(3\pi-3t) \quad =-3\cos t+\cos 3t = -x(t)$
$y(\pi-t)=3\sin(\pi-t)-\sin(3\pi-3t) \quad =3\sin t-\sin 3t = y(t)$
M (t) et $M(\pi-t)$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées donc l'axe des ordonnées est un de symétrie pour la courbe. On peut ainsi réduire le domaine d'étude sur l'intervalle $I=\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et compléter par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées puis par sym étrie par rapport à l'axe des abscisses.

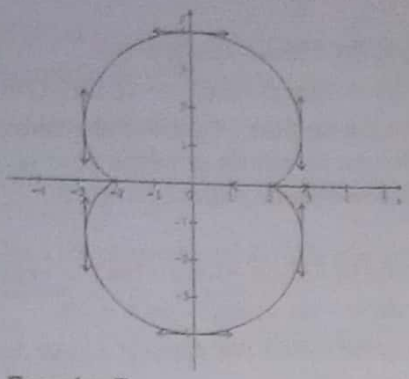
2. Etudions les variations de x et de y sur I
$\forall t \in I$, x'(t) = -3sint + 3sin3t
= 3(sin3t-sint) = 6sintcos2t
$\forall t \in I$, sint ≥ 0 donc le signe de x'(t) est du signe de cos2t. $\cos 2t = 0 \Leftrightarrow t=\frac{\pi}{4}$ donc pour tout t de $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ x'(t) ≥ 0 et x est croissante sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ et pour tout t de $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ x'(t) ≤ 0 donc x est décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$

Variation de y
$\forall t \in I$, y'(t) = 3cost − 3cos3t = 3(cost − cos3t)
= 6sin2tsint
Pour tout t de I sin2t ≥ 0 et sint ≥ 0 donc y'(t) ≥ 0 et y est croissante sur I.
Tableau de variation de x et de y

t	0		$\frac{\pi}{4}$		π
x'(t)	0	+	0	−	−6
x(t)	2	↗	$2\sqrt{2}$	↘	0
y(t)	0	↗	$\sqrt{2}$	↗	4
y'(t)	0	+	$3\sqrt{2}$	+	0

3. Construisons la courbe.

Scanned by CamScanner



Exercice 7

$y'' + 4y = 0$ (E)

a déterminons les fonctions f et g de l'équation (E) telles que $f(0) = 5$ et

$f'(0) = 0$; $g(0) = 0$ et $g'(0) = 8$

Les solutions de (E) sont les fonctions définies par : $x \mapsto a\cos 2t + b\sin 2t$; $(a;b) \in \mathbb{R}^2$.

$f(0) = 5$ et $f'(0) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 0 \end{cases}$. Soit $f(t) = 5\cos 2t$

$g(0) = 0$ et $g'(0) = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 4 \end{cases}$. Soit $g(t) = 4\sin 2t$

On a ainsi $\begin{cases} x(t) = 5\cos 2t \\ y(t) = 4\sin 2t \end{cases} t \in [0;\pi]$

Etudions les variations de x et y sur $[0;\pi]$.

Pour tout t de $[0;\pi]$ $x'(t) = -10\sin 2t$.

$\sin 2t = 0 \Leftrightarrow t = 0 ou \quad t = \frac{\pi}{2}$. Pour tout t de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$;

$x'(t) \leq 0$ donc x est décroissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et pour tout t de $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ $x'(t) \geq 0$ donc x est croissante sur $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$.

Pour tout t de $[0;\pi]$ $y'(t) = 8\cos 2t$.

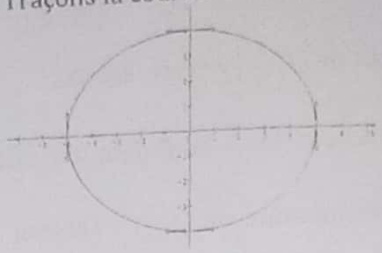
$\cos 2t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} ou \quad t = \frac{3\pi}{4}$ donc pour tout t de $\left[0;\frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4};\pi\right]$ $y'(t) \geq 0$ et y est croissante sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right] et \quad sur \left[\frac{3\pi}{4};\pi\right]$

Pour tout t de $\left[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$ $y'(t) \leq 0$ et y est décroissante sur $\left[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$.

Tableau de variation de x et de y.

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$x'(t)$	0	$-$	-10	$-$	0	$+$	10	$+$	0
$x(t)$	5	↘	0	↘	-5	↗	0	↗	5
$y(t)$	0	↗	4	↘	0	↘	-4	↗	0
$y'(t)$	8	$+$	0	$-$	-8	$-$	0	$+$	8

Traçons la courbe



Exercice 8

a) $x(t + 2\pi) = \cos^2(t + 2\pi) - \cos(t + 2\pi) + 1$

$= \cos^2 t - \cos t + 1 = x(t)$

$y(t + 2\pi) = \cos(t + 2\pi)\sin(t + 2\pi) = \cos t \sin t = y(t)$

$M(t + 2\pi)$ et $M(t)$ sont confondus.

b) $x(-t) = x(t)$ (car la fonction cos est paire).

$Y(-t) = costsin(-t) = - costsint = - y(t)$

$M(-t)$ et $M(t)$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. Comme $M(t + 2\pi)$ et $M(t)$ sont confondus. Alors le domaine d'étude peut se limiter à un intervalle d'amplitude 2π soit $[-\pi;\pi]$. $M(-t)$ et $M(t)$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscissesdonc le domaine d'étude peut se limiter à l'intervalle $I = [0;\pi]$

c) Etudions les variations de x et y sur I

Variations de x

Pour tout t de I $x'(t) = - 2sintcost + sint$

$= sint(-2cost + 1)$

Pour tout t de I $sint \geq 0$ donc I $x'(t)$ est du signe de $1 - 2cost$. $1 - 2\cos t = 0 \Leftrightarrow \cos t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{3}$

Pour tout t de $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$ $x'(t) \leq 0$ donc x est décroissante sur $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$

Pour tout t de $\left[\frac{\pi}{3};\pi\right]$ $x'(t) \geq 0$ donc x est croissante sur $\left[\frac{\pi}{3};\pi\right]$

Scanned by CamScanner

ariations de y.

our tout t de l $y'(t) = \cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t$

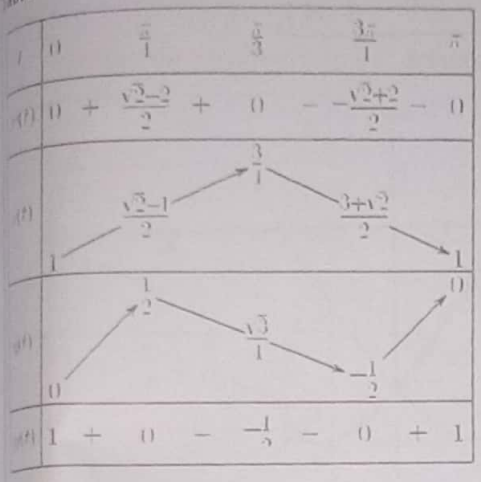
$\cos 2t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4}; \quad t = \frac{3\pi}{4}$

$\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}; \pi\right]$ $y'(t) \geq 0$ donc y est croissante

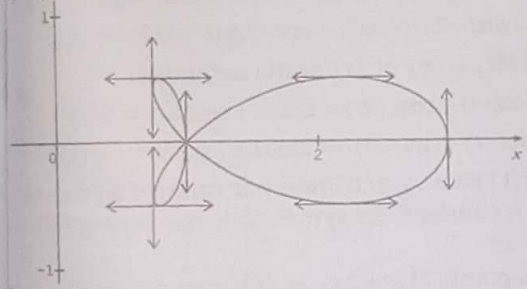
$\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ et sur $\left[\frac{3\pi}{4}; \pi\right]$. $\forall t \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$ $y'(t) \leq 0$ donc y

st décroissante sur $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$

ableau de variation de x et y



) Traçons la courbe



Exercice 9

$x(t+2\pi) = \sin^3(t+2\pi) = \sin^3 t = x(t)$

$y(t+2\pi) = 1 + \cos(t+2\pi) = 1 + \cos t = y(t)$

$M(t+2\pi)$ et $M(t)$ sont confondus donc on peut endre comme intervalle d'étude un intervalle amplitude 2π par exemple l'intervalle $[-\pi; \pi]$

$x(-t) = \sin^3(-t) = -\sin^3 t = -x(t)$

$y(-t) = 1 + \cos(-t) = 1 + \cos t = y(t)$

M(-t) et M(t) sont symétriques par rapport à l'axe des rdonnée. Donc le domaine d'étude peut se limiter à intervalle $[0; \pi]$ puis on complétera la courbe par ymétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

Etudions les variations de x et y sur $[0; \pi]$

ariations de x

$\forall t \in [0; \pi]$, $x'(t) = 3\cos t \sin^2 t$, $\forall t \in [0; \pi]$ $\sin t \geq 0$,

$\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ $\cos t \geq 0$ c'est-à-dire $x'(t) \geq 0$ x est

croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. $\forall t \in \left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$ $\cos t \leq 0$ c'est-à-dire

$x'(t) \leq 0$ donc x est décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$

Variations de y

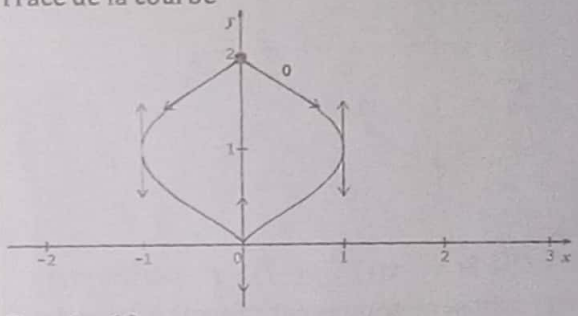
$\forall t \in [0; \pi]$ $y'(t) = -\sin t$, $\forall t \in [0; \pi]$, $-\sin t \leq 0$ donc $y'(t) \leq 0$

et y est décroissante sur $[0; \pi]$

Tableau de variations de x et de y

t	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$x'(t)$	0	+	0	−	0
$x(t)$	0	↗	1	↘	0
$y(t)$	2		↘		0
$y'(t)$	0	−	−1	−	0

Tracé de la courbe



Exercice 10

a)

$x(-t) = -t\cos(-t) - \sin(-t) = -t\cos(t) + \sin t = -x(t)$

$y(-t) = -t\sin(-t) + \cos(-t) = t\sin t + \cos t = y(t)$ donc

l'axe des ordonnées est un de symétrie de la courbe C ainsi le domaine d'étude peut se limiter à l'intervalle $[0; 2\pi]$ puis on complétera la courbe par symétrie à l'axe des ordonnées.

b) Etudions les variations de x et y

Variations de x

$\forall t \in [0; 2\pi]$ $x'(t) = \cos t - t\sin t - \cos t = -t\sin t$

$\forall t \in [0; \pi]$ $-\sin t \leq 0$ *donc* $x'(t) \leq 0$ par suite x est

décroissante sur $[0; \pi]$

$\forall t \in [\pi, 2\pi]$ -sint ≥ 0 donc x'(t) ≥ 0 et x est croissante

sur $[\pi, 2\pi]$

Variations de y

Scanned by CamScanner

$\forall t \in [0;2\pi]\ y'(t) = \sin t + t\cos t - \sin t = t\cos t$

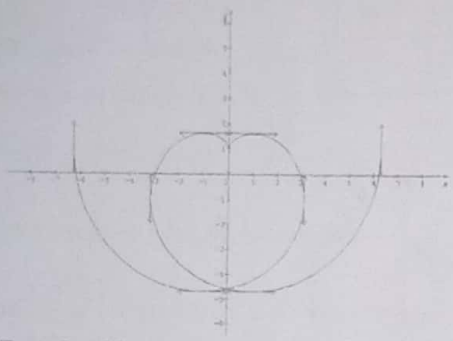
$\cos t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{3} ou \quad t = \frac{3\pi}{2}\ \forall t \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$;

$y'(t) \geq 0$ donc y est croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et sur $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

Tableau de variations de x et y

t	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$x'(t)$	0	$-$	$-\frac{\pi}{2}$	$-$	0	$+$	$\frac{3\pi}{2}$	$+$	2π
$x(t)$	0	↘	-1	↘	$-\pi$	↗	1	↗	2π
$y(t)$	1	↗	$\frac{\pi}{2}$	↘	-1	↘	$-\frac{3\pi}{2}$	↗	1
$y'(t)$	0	$+$	0	$-$	$-\pi$	$-$	0	$+$	2π

Tracé de la courbe



Exercice 11

a) $x(-t) = -t^2 + 3t = -x(t)\ ;\ y(-t) = t^4 - 4t^2 = y(t)$

M(-t) et M(t) sont symétriques par rapport à l'axes des ordonnées donc l'axe des ordonnées est un axe de symétrie de la courbe C. Ainsi le domaine d'étude peut se limiter à l'intervalle $[0;2]$ puis on complétera par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

b) Etudions les variations de xd de y sur $[0;2]$

variations de x

$\forall t \in [0;2],\ x'(t) = 3t^2 - 3,\ x'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$

$\forall t \in [0;1], x'(t) \leq 0$ donc x est décroissante sur $[0;1]$

$\forall t \in [1;2], x'(t) \geq 0$ donc x est croissante sur $[1;2]$

Variations de y

$\forall t \in [0;2], y'(t) = 4t^3 - 4t \quad ;\ y'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0 ou \quad t = 1$

$\forall t \in [0;1], y'(t) \leq 0$ *donc* y est décroissante sur $[0;1]$

$\forall t \in [1;2], y'(t) \geq 0$ *donc* y est croissante sur $[1;2]$

c) Calculons les coordonnées des points d'intersection de C avec l'axe des abscisses

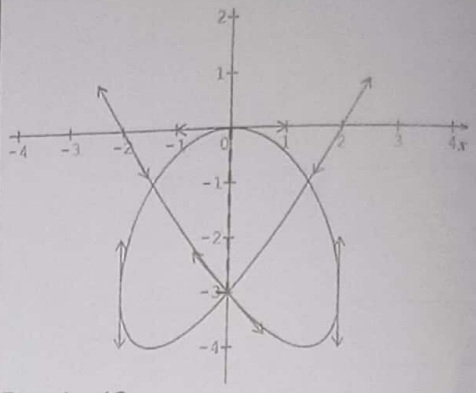
$x(t) = 0 \Leftrightarrow t^3 - 3t = 0 \Leftrightarrow t = 0, t = -\sqrt{3}, t = \sqrt{3}$

$C \cap (Ox) = \{(0;0);(0-3)\}$

Tableau de variations de x et de y

t	0		1		2
$x'(t)$	$-3-$		0	$+$	9
$x(t)$	0	↘	-2	↗	2
$y(t)$	0	↘	-3	↗	0
$y'(t)$	0	$-$	0	$+$	24

Tracé de la courbe



Exercice 12

$x(t+2\pi) = 2\cos(t+2\pi) + \cos(2t+4\pi) = 2\cos t + \cos 2t = x(t)$

$y(t+2\pi) = 2\sin(t+2\pi) - \sin(2t+4\pi) = 2\sin t - \sin 2t = y(t)$

les points $M(t+2\pi)$ et (t) sont confondus

$x(-t) = 2\cos(-t) + \cos(-2t) = 2\cos t + \cos(2t) = x(t)$

$y(-t) = 2\sin(-t) - \sin(-2t) = -2\sin t + 2\sin 2t = -y(t)$

M(-t) et M(t) sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. A courbe C est symétrique par rapport à l'axe des abscisses

Comme les points $M(t+2\pi)$ et (t) sont confondus alors le domaine d'étude peut se limiterà un intervalle d'amplitude 2π soit l'intervalle $[-\pi;\pi]$. Les points M(-t) et M(t) sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses le domaine d'étude se limiter sur l'intervalle $[0;\pi]$ puis on complétera la courbe par symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

b) Etudions les variations de x et dey

Variations de x

$\forall t \in [0;\pi], x'(t) = -2\sin t - 2\sin 2t$

$= -2\sin t - 4\cos t \sin t = -2\sin t(1 + 2\cos t)$

$\forall t \in [0;\pi], x'(t) = 0 \Leftrightarrow \sin t = 0 ou \quad 1 + 2\cos t = 0$

$\Leftrightarrow t = 0, t = \pi, t = \frac{2\pi}{3}$

$\forall t \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right], x'(t) \leq 0$ Donc x est décroissante sur $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$

Scanned by CamScanner

$\forall t \in \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right], x'(t) \geq 0$ donc x est croissante sur $\left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$

Variations de y

$\forall t \in [0, \pi], y'(t) = 2\cos t - 2\cos 2t = 2(1-\cos t)(2\cos t + 1)$

$\forall t \in [0, \pi], 1-\cos t \geq 0$; $2\cos t + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos t = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \frac{2\pi}{3}$

$\forall t \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right], 2\cos t + 1 \geq 0$ donc $y'(t) \geq 0$ et y est croissante

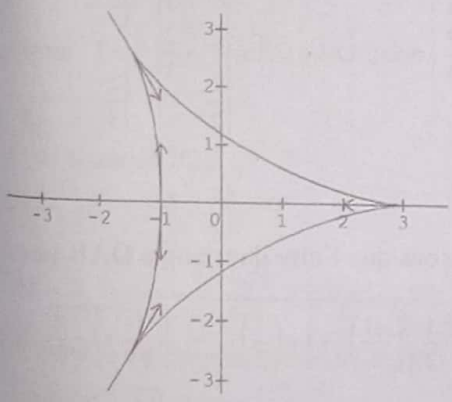
sur $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$. $\forall t \in \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right], 2\cos t + 1 \leq 0$ donc $y'(t) \leq 0$ et y

est décroissante sur $\left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$

➢ Tableau de variations de x et de y

t	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$x'(t)$	0	−	0	+	0
$x(t)$	3	↘	$-\frac{3}{2}$	↗	-1
$y'(t)$	0	↗	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	↘	0
$y(t)$	3	+	0	−	-1

Tracé de la courbe



Scanned by CamScanner

Exercice 1

1.a Montrons que ABC est un triangle rectangle

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$

On a $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -1\times 0+0\times\sqrt{2}+1\times 0 = 0$. On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux et par conséquent les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires. Donc le triangle ABC est rectangle en A.

Autre méthode

Calculer les distances AB , AC et BC et utiliser la réciproque du théorème de Pythagore.

b. Calcul de $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA}$

$\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA} = 1\times 1+0\times\sqrt{2}+(-1)\times(-1) = 1+1 = 2$

En déduisons une mesure de l'angle géométrique $\widehat{ACB}$

$\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA} = CB\times CA\cos\left(\widehat{ACB}\right) \Leftrightarrow 2 = \sqrt{2}\times 2\cos\left(\widehat{ACB}\right)$

$\Leftrightarrow \cos\left(\widehat{ACB}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4}$

Donc une mesure de l'angle géométrique $\widehat{ACB}$ est $45°$

Nature exacte du triangle ABC

$\widehat{ACB}+\widehat{BAC}+\widehat{ABC} = 180°$ or $\widehat{ACB} = 45°$ et $\widehat{BAC} = 90°$ donc $\widehat{ABC} = 45°$. Par conséquent le triangle ABC est rectangle et isocèle en A.

2. a. Montrons que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC)

$\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0\times 1+0\times\sqrt{2}+0\times 1 = 0$ donc les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux.

$\vec{n}.\overrightarrow{AC} = -1\times 1+0\times 0+1\times 1 = 0$ donc les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux.

Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC). Donc le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (ABC).

b. Montrons que H appartient au plan (ABC)

$d(H;(ABC)) = \frac{\left|\overrightarrow{AH}.\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\right|}{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|} = \frac{\left|\overrightarrow{AH}.\vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|}$ car le vecteur $\vec{n}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

$d(H;(ABC)) = \frac{\left|\overrightarrow{AH}.\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\right|}{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|} = \frac{\left|\overrightarrow{AH}.\vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|} = \frac{1-1}{\sqrt{2}} = 0$

$d(H;(ABC)) = 0$ donc H appartient au plan (ABC).

c. Montrons que (HM) est perpendiculaire au plan (ABC).

$\overrightarrow{HM}\begin{pmatrix}m\\0\\m\end{pmatrix}$; on a $\overrightarrow{HM} = m\times\vec{n}$ donc $\overrightarrow{HM}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires et comme le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (ABC) on en déduit que le vecteur $\overrightarrow{HM}$ est orthogonal au plan (ABC). D'où la droite (HM) est perpendiculaire au plan (ABC)

d. Déterminons les vecteurs de m pour que la distance du point M au plan (ABC) soit égal $\sqrt{2}$

(HM) est perpendiculaire au plan (ABC) et H appartient au plan (ABC) donc H est le projeté orthogonal de M sur le plan (ABC) , par conséquent

$d(M;(ABC)) = HM = \sqrt{2m^2} = |m|\sqrt{2}$

$HM = \sqrt{2} \Leftrightarrow |m|\sqrt{2} = \sqrt{2} \Leftrightarrow |m| = 1 \Leftrightarrow m = 1$ ou $m = -1$

Les valeurs de m cherchées sont 1 et -1.

Exercice 2

1.a) Précisons les coordonnées des points O, A et B

A étant le milieu de l'arête [IL] du cube, on a

$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{OI}+\frac{1}{2}\overrightarrow{IL} = \overrightarrow{OI}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OK}$

Donc $\boxed{A\left(1;0;\frac{1}{2}\right)}$ B est défini par $\overrightarrow{KB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{KN}$ donc

$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OK}+\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{OK}+\frac{2}{3}\overrightarrow{KN} = \overrightarrow{OK}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OJ}$ on a déduit alors que $\boxed{B\left(0;\frac{2}{3};1\right)}$

b) Précisons les coordonnées du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}1\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}0\\\frac{2}{3}\\1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix}1&0\\0&\frac{2}{3}\\\frac{1}{2}&1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-\frac{1}{3}\\-1\\\frac{2}{3}\end{vmatrix}$ ainsi on a $\vec{u}\left(-\frac{1}{3};-1;\frac{2}{3}\right)$.

2) a) En déduisons que l'aire du triangle OAB vaut $\frac{\sqrt{14}}{6}$

$A(OAB) = \frac{1}{2}\|\vec{u}\| = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{-1}{3}\right)^2+1+\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{9}+1+\frac{4}{9}}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{14}{9}} = \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{14}}{3}$

D'où $\boxed{A(OAB) = \frac{\sqrt{14}}{6}}$

c) Si C appartient à P alors le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est orthogonal au vecteur $\vec{u}$ c'est-à-dire $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$ $\overrightarrow{AC}\left(0;-\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)$ on a

$\vec{u}\cdot\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\1\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{3}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix} = 0\times\left(-\frac{1}{3}\right)+1\times\left(-\frac{1}{3}\right)+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2} = -\frac{1}{3}+\frac{1}{3} = 0$

on déduit que $\overrightarrow{AC}$ est orthogonal à $\vec{u}$ par conséquent C appartient à P.

Scanned by CamScanner

1) a) Prouvons que le volume du tétraèdre OABK vaut $\frac{1}{9}$

Soit V ce volume

$V = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}\right) \cdot \overrightarrow{OK}\right| = \frac{1}{6}\left|\left(\frac{1}{3}, 1, \frac{2}{3}\right) \cdot (0;0;1)\right|$ =

$\left|0 \times \left(-\frac{1}{3}\right) + 0 \times 1 + 1 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{9}\right.$ d'où $\boxed{V = \frac{1}{9}}$

b) En déduisons la distance de K au plan P.

Soit H le projeté orthogonal de K sur le plan P, KH est la distance de K au plan P, elle est aussi hauteur issue de K.

On sait que $V = \frac{1}{3} S_{OAB} \times KH$ or $V = \frac{1}{9}$ et $S_{OAB} = \frac{\sqrt{14}}{6}$ on

en déduit que $\boxed{KH = \frac{\sqrt{14}}{7}}$

Exercice 3

1) a) Vérifions que $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA}$

Calculons les coordonnées des points A, B, I, G, K

A(0,0,0), B(1,0,0), $I\left(\frac{1}{2},0,1\right)$, G(1,1,1), $K\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

$\begin{pmatrix} 0-1 \\ \frac{1}{2}-0 \\ \frac{1}{2}-0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{BK}\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{IG}\begin{pmatrix} 1-\frac{1}{2} \\ 1-0 \\ 1-1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{IG}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \wedge 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-0 \\ 0+\frac{1}{2} \\ 0+\frac{1}{2} \end{vmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA}\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ donc

$\boxed{\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA}}$

b) Aire du triangle IGA

$A(IGA) = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{BK}\right\|$

$A(IGA) = \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$; $\boxed{A(IGA) = \frac{\sqrt{6}}{4}}$

c) Calculons le volume du tétraèdre ABIG

$V = \frac{1}{6} \times \left|\left(\overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA}\right) \cdot \overrightarrow{IB}\right|$, $\overrightarrow{IB}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$V = \frac{1}{6} \times \left|\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6} u.v$; $\boxed{V = \frac{1}{6}}$

d) En déduisons la distance de B au pla (AIG)

$V = \frac{1}{3} S_{AIG} \times h_B$ où h_B est la hauteur relative à B au plan

(AIG). Donc $\frac{1}{6} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{6}}{4} \times h_B \Leftrightarrow h_B = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$; $\boxed{h_B = \frac{\sqrt{6}}{3}}$

Exercice 4

1) Calculons la longueur AH On a $\overrightarrow{AH}(-2,-3,4)$ donc

$AH = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2 + (4)^2} = \sqrt{4+9+16}$; $\boxed{AH = \sqrt{29}}$

2) déterminons une équation du plan P passant par H et orthogonal à la droite (AH)

$\overrightarrow{AH}$ est un vecteur directeur de la droite (AH) , soit un point M(x,y,z) $\in$ P on a donc $\overrightarrow{HM}$ orthogonal à $\overrightarrow{AH}$, ainsi $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HM} = 0$

$\overrightarrow{HM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \\ z-3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ donc

$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HM} = 0 \Leftrightarrow -2(x-1) - 3(y+1) + 4(z-3) = 0$

$\Leftrightarrow -2x + 2 - 3y - 3 + 4z - 12 = 0$

$\Leftrightarrow -2x - 3y + 4z - 13 = 0$

$\boxed{(P) : -2x - 3y + 4z - 13 = 0}$

3) a) Démontrons que les points B, C, D appartiennent à (P).

Il suffit de vérifier que les coordonnées de B, C, D vérifient l'équation de (P).

- B(-6,1,1)

-2(-6) -3(1) +4(1) -13 = 12 – 3 + 4 – 13 = 13 – 13 = 0

Donc B $\in$ (P)

- C(4,-3,3)

-2(4) – 3(-3) + 4(3) – 13 = -8 + 9 +12 – 13 = 13 -13 = 0

Donc C $\in$ (P)

- D(-1,-5,-1)

-2(-1) – 3(-5) + 4(-1) – 13 = 2 +15 – 4 -13= 13 – 13= 0

Donc D $\in$ (P)

b) Calculons les coordonnées de $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}$

$\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} = \begin{vmatrix} 10 & & 5 \\ -4 & \wedge & -6 \\ 2 & & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 20 \\ 30 \\ -40 \end{vmatrix}$

$\boxed{\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} = 20\vec{i} + 30\vec{j} - 40\vec{k}}$

c) Démontrons que l'aire do triangle BCD est égale à $5\sqrt{29}$ Calculons $\left\|\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}\right\|$

$\left\|\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}\right\| = \sqrt{20^2 + 30^2 + (40)^2} = \sqrt{2900} = 10\sqrt{29}$

$\boxed{\left\|\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}\right\| = 10\sqrt{29}}$

$A(BCD) = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}\right\| = \frac{1}{2} \times 10\sqrt{29}$

$\boxed{A(BCD) = 5\sqrt{29}}$ d'où le résultat

d) Démontrons que que le volume du tétraèdre ABCD est égale à $\frac{145}{3}$

la base du tétraèdre est le parallélogramme ABCD.

$A(ABCD) = 2\,A(ABCD) = 10\sqrt{29}$

Le volume du tétraèdre est

$v' = \frac{A(ABCD) \times AH}{6} = \frac{10\sqrt{29} \times \sqrt{29}}{6} = \frac{290}{6} = \frac{145}{3}$ d'où le résultat.

Scanned by CamScanner

4) a) Calculons l'aire du triangle ABC

$A(ABC)=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-9\\-1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-5\\4\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}-9 & 1\\-1 & -5\\2 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6\\38\\46\end{vmatrix}$ Donc

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=6\vec{i}+38\vec{j}+46\vec{k}$

$\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|=\sqrt{6^2+38^2+46^2}=\sqrt{3596}=2\sqrt{899}$

On déduit l'aire de ABC :

A(ABC) = $\sqrt{899}$

b) Calculons la distance du point D au plan (ABC) le plan (ABC) a pour équation $3x+19y+23z-24=0$

donc $d(D,(ABC))=\frac{|-3-95-23+24|}{\sqrt{(-3)^2+(19)^2+(23)^2}}=\frac{97}{\sqrt{889}}$

$$\boxed{d(D,(ABC))=\frac{97}{\sqrt{899}}}$$

Exercice 5

1) déterminons l'ensemble des points tels que

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$

An B et C étant non alignés on a $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ équivaut à $\overrightarrow{AB}\wedge\left(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AC}\right)=\vec{o}$ soit

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{CM}=\vec{o}$ $c'est-a-dire,\overrightarrow{CM}$ colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

L'ensemble qui caractérise cette relation est la droite passant par C et parallèle à la droite (AB)

2) a) Démontrons que $\overrightarrow{AA'}\wedge\vec{u}=\overrightarrow{HH'}\wedge\vec{u}$.

D'une part A et H étant deux points de (D) qui admet $\vec{u}$ comme vecteur directeur, alors $\overrightarrow{HA}$ est colinéaire à $\vec{u}$ donc $\overrightarrow{HA}\wedge\vec{u}=\vec{o}$. (1) D'autre part, A' et H' appartiennent à (D') qui admet $\vec{u}$ pour vecteur directeur donc $\overrightarrow{H'A'}$ est colinéaire à $\vec{u}$ ainsi $\overrightarrow{H'A'}\wedge\vec{u}=\vec{0}$ (2)

De l'égalité (1) on a $\left(\overrightarrow{HH'}+\overrightarrow{H'A'}+\overrightarrow{A'A}\right)\wedge\vec{u}=\vec{o}$ c'est-à-dire $(\overrightarrow{HH'}+\overrightarrow{A'A})\wedge\vec{u}+\overrightarrow{H'A'}\wedge\vec{u}=\vec{o}$, l'égalité (2) permet d'écrire $\left(\overrightarrow{HH'}+\overrightarrow{A'A}\right)\wedge\vec{u}=\vec{o}$ c'est-à-dire

$\overrightarrow{HH'}\wedge\vec{u}=-\overrightarrow{A'A}\wedge\vec{u}$ soit $\boxed{\overrightarrow{HH'}\wedge\vec{u}=\overrightarrow{AA'}\wedge\vec{u}}$

b) Déduisons que $HH'=\frac{\left\|\overrightarrow{AA'}\wedge u\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}$

Le point H' étant le projeté orthogonal de H sur la droite (D'), alors la droite (HH') est perpendiculaire à (D') soit $\overrightarrow{HH'}$ est orthogonal à $\vec{u}$ donc

$\left\|\overrightarrow{HH'}\wedge\vec{u}\right\|=HH'\times\left\|\vec{u}\right\|\times\sin\left(\overrightarrow{HH'},\vec{u}\right)$ Ainsi

$\left\|\overrightarrow{HH'}\wedge\vec{u}\right\|=HH'\times\left\|\vec{u}\right\|\times\sin\frac{\pi}{2}=HH'\times\left\|\vec{u}\right\|$

D'où $\boxed{HH'=\frac{\left\|\overrightarrow{AA'}\wedge\vec{u}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}}$

c) application numérique

$\overrightarrow{AA'}\begin{pmatrix}5\\-3\\4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AA'}\wedge\vec{u}=\begin{vmatrix}5 & -2\\-3 & 2\\4 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3-8\\-8-5\\10-6\end{vmatrix}$

$\overrightarrow{AA'}\wedge\vec{u}(-11,-13,4)$ $\left\|\overrightarrow{AA'}\wedge\vec{u}\right\|=\sqrt{306}$, $\left\|\vec{u}\right\|=\sqrt{9}=3$ donc

$\boxed{HH'=\sqrt{34}}$

Exercice 6

1) Calculons les coordonnées de $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}$ donc $\boxed{\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\3\\2\end{pmatrix}}$

2) Calculons la distance du point I au plan (ABC)

$d(I,(ABC))=\frac{\left|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\overrightarrow{IA}\right|}{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|}$

On a $\overrightarrow{IA}\begin{pmatrix}0\\-2\\-3\end{pmatrix}$. $\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\overrightarrow{IA}=-6-6=-12$

$\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|=\sqrt{36+9+4}=7$ $d'où$ $\boxed{d(I,(ABC)=\frac{\left|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\overrightarrow{IA}\right|}{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|}=}$

D(I,(ABC) $\neq 0$ $donc$ $I\notin(ABC)$; les points I, A, B, C ne sont pas coplanaires.

3) a) Calculons l'aire du triangle ABC

$A_1=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|=\frac{7}{2}u.a$ $\boxed{A_1=\frac{7}{2}u.a}$

b) Calculons V le volume

$V=\frac{1}{3}\times A_1\times d(I,(ABC))=\frac{1}{3}\times\frac{7}{2}\times\frac{12}{7}=2u.v$; $\boxed{V=2u.v}$

4) a) Nature du quadrilatère ABCD

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix},\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ donc ABCD est un parallélogramme.

b) Calculons le volume du quadrilatère ABCD.

$A(ABCD)=\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|=7u.a;$ $\boxed{A(ABCD)=7u.a}$

Exercice 7

a) Déterminons les coordonnées des points A,B,C dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

La troisième coordonnée des points A, B, C est le produit vectoriel des deux premières coordonnées.

Ainsi pour le point A, on a $z_A=\begin{vmatrix}-3 & 0\\0 & 1\end{vmatrix}=-3\times1-0\times0=-3$

$\boxed{A(-3,1,-3)}$

Scanned by CamScanner

De même $z_B = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -2\times 5 - 0\times 0 = -10$; $\boxed{B(-2,5,-10)}$

$= \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 0\times -1 - 0\times 0 = 0$; $\boxed{D(0,-1,0)}$

Calculons $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$

$\begin{pmatrix} -2+3 \\ 5-1 \\ -10+3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 0+3 \\ -1-1 \\ 0+3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & \wedge -2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12-14 \\ -24 \\ -2-12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 \\ -24 \\ -14 \end{vmatrix}$

Ainsi $\boxed{\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} = -2\vec{i} - 24\vec{j} - 14\vec{k}}$

Déduisons l'aire du triangle ABC.

$\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$

$= \frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+(-24)^2+(-14)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{776} = \sqrt{194}$

$\boxed{\mathcal{A}(ABC) = \sqrt{194}}$ unités d'aires

Exercice 8

Déterminons une équation cartésienne du plan (ABC)

A(3 ;2 ;-1), B (-1 ;4 ;-2) et C(2 ;-1 ;-1)

Déterminons un vecteur normal au plan (ABC). Soit $\vec{n}$ ce vecteur

$= \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$

$\begin{pmatrix} -1-3 \\ 4-2 \\ -2+1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 2-3 \\ -1-2 \\ -1+1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 2 & \wedge -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\times 10 - (-1)\times(-3) \\ (-1)\times(-1) - 0\times -4 \\ (-3)\times(-4) - 2\times(-1) \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} -3 \\ 1 \\ 14 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \vec{n}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 14 \end{pmatrix}$

Soit M(x, y, z) appartenant au plan (ABC) alors on a

$\overrightarrow{AM}$ orthogonal à $\vec{n}$

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-3 \\ y-2 \\ z+1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \vec{n}\cdot\overrightarrow{AM} = 0$

$\Leftrightarrow -3(x-3) + (y-2) + 14(z+1) = 0$

$\Leftrightarrow -3x + 9 + y - 2 + 14z + 14 = 0$

Ainsi $\boxed{(ABC) : -3x + y + 14z + 21 = 0}$

Calculons la distance du point H(3 ;1 ;1) au plan (ABC).

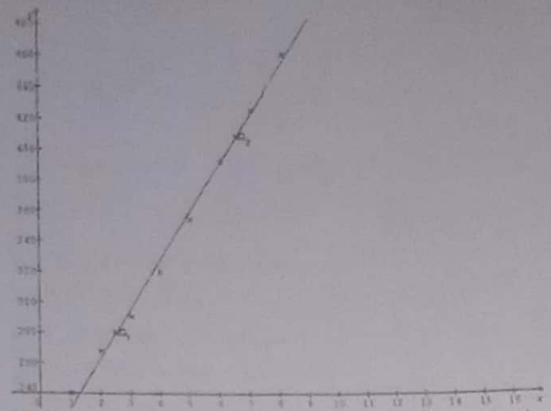
$d(H,(ABC)) = \frac{\left|-3(3)+1+14+21\right|}{\sqrt{3^2+1^2+14^2}} = \frac{25}{\sqrt{206}}$

$\boxed{d(H;(ABC)) = \frac{25}{\sqrt{206}}}$

Scanned by CamScanner

Exercice 1

1) Représentons le nuage de points



2) a) Les points semblent être alignés donc un ajustement affine est possible.

b) Déterminons les coordonnées des points moyens G_1 et G_2.

$$x_{G1} = \frac{1+2+3+4}{4} = 2.5$$

$$y_{G1} = \frac{240+268+291+321}{4} = 280$$

$$\boxed{G_1(2.5;280)}$$

$$x_{G2} = \frac{5+6+7+8}{4} = 6.5$$

$$y_{G2} = \frac{356+394+429+465}{4} = 411$$

$$\boxed{G_2(6.5;411)}$$

Trouvons l'équation de la droite (G_1G_2)

Le coefficient directeur de la droite (G_1G_2) est

$$a = \frac{280-411}{2.5-6.5} = 32.75$$

L'équation de la droite est donc de la forme $y = 32.75x + b$. Sachant que la droite passe par G_1 on a

$280 = 32.75 \times 2.5 + b \Leftrightarrow b = 198.125$

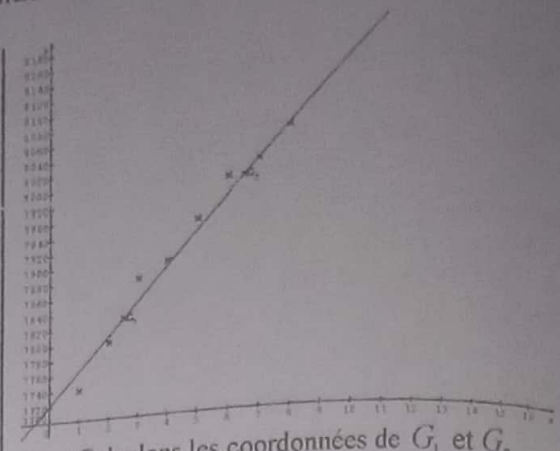
D'où $\boxed{(G_1G_2) : y = 32.75x + 198.125}$

3) a) A l'aide du graphique le prix du mètre carré en 1986 est estimé à $\boxed{558}$.

b) Par calcul algébrique le prix du mètre carré en 1986 est estimé à $\boxed{558.375}$

Exercice 2

1) Représentons le nuage de points.



2) a) Calculons les coordonnées de G_1 et G_2

$$x_{G1} = \frac{1+2+3+4}{4} = 2.5$$

$$y_{G1} = \frac{7740+7800+7880+7900}{4} = 7830$$

$$\boxed{G_1(2.5;7830)}$$

$$x_{G2} = \frac{5+6+7+8}{4} = 6.5$$

$$y_{G2} = \frac{7920+8000+8020+8060}{4} = 8000$$

$$\boxed{G_2(6.5;8000)}$$

b) Le coefficient directeur de (G_1G_2) est

$$a = \frac{8000-7830}{6.5-2.5} = 42.5$$

L'équation de cette droite est de la forme $y = 42.5x + b$

Sachant que la droite passe par G_1 on a

$7830 = 42.5 \times 2.5 + b \Leftrightarrow b = 7723.75$

D'où $\boxed{(G_1G_2) : y = 42.5x + 7723.75}$

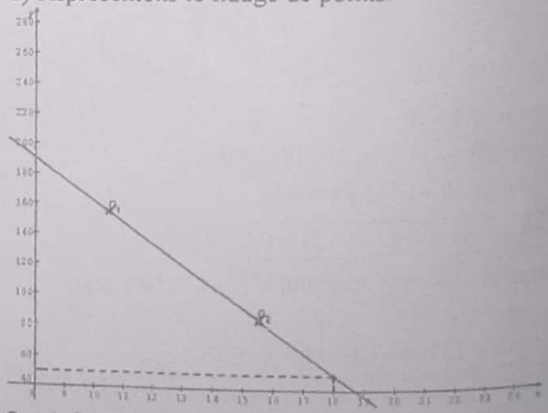
d) L'année 2010 est l'année de rang 15

On a $y = 42.5 \times 15 + 7723.75 = 8361.25$

La consommation de matière M prévisible pour 2010 est donc de 8361 tonnes à 1 tonne près.

Exercice 3

1) Représentons le nuage de points.



2_ a) Calculons les coordonnées de G_1 et G_2.

On a

Scanned by CamScanner

$= \frac{9+10+11+12}{4} = 10.5$

$= \frac{180+160+150+130}{4} = 155$

$x_{G_2} = \frac{14+15+16+17}{4} = 15.5$

$G_1(10.5;155)$ et

$y_{G_2} = \frac{100+90+80+70}{4} = 85$

$G_2(15.5;85)$

place ces points sur le graphique et on trace la droite (G_2)

n observe graphiquement que l'abscisse du point de la (G_1G_2) d'ordonnée 50 est environ 18. On en déduit le prix maximum pour qu'il ait au moins 50 acheteurs de 18 FCFA.

Le coefficient directeur de la droite (G_1G_2) est

$= \frac{85-155}{15.5-10.5} = -14$

quation de la droite (G_1G_2) est de la forme

$= -14x + b$

chant que cette droite passe par G_1 on a

$5 = -14 \times 10.5 + b \Leftrightarrow b = 302$

nc l'équation de la droite (G_1G_2) est : $y = -14x + 302$

Pour x = 13 on a y = 120

Si le prix est fixé 13FCFA, le nombre d'acheteurs prévu est de 120

$y \geq 250 \Leftrightarrow -14x + 302 \geq 250 \Leftrightarrow x \leq \frac{26}{7}$

chant que $\frac{26}{7} \approx 3.71$, on en déduit

e nombre d'acheteurs potentiels est supérieur u égal à 250 si le prix est inférieur à 3.71Frs

Scanned by CamScanner

Sujet 1

Exercice1

1. L'image M de m par F est le point d'affixe :

$$\frac{1}{2}\left(e^{it}\right)^2 - e^{it} = \frac{1}{2}e^{2it} - e^{it}$$
$$= \frac{1}{2}(\cos 2t + i\sin 2t) - (\cos t + i\sin t)$$
$$= \left(\frac{1}{2}\cos 2t - \cos t\right) + i\left(\frac{1}{2}\sin 2t - \sin t\right)$$

1. En séparant les parties réelles et les parties imaginaires, on trouve bien que :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}\cos 2t - \cos t \\ y(t) = \frac{1}{2}\sin 2t - \sin t \end{cases}$$

2. $x(-t) = \frac{1}{2}\cos(-2t) - \cos(-t) = \frac{1}{2}\cos 2t - \cos t$
$= x(t)$ car la fonction cosinus est paire.

$y(-t) = \frac{1}{2}\sin(-2t) - \sin(-t) = -\frac{1}{2}\sin 2t + \sin t$
$= -y(t)$ car la fonction sinus est impaire.

On peut en déduire que pour tout t de $[-\pi;\pi]$, les points de paramètre t et (-t) sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses, et donc que Γ admet comme axe de symétrie cette droite.

3. $x'(t) = -\frac{2\sin 2t}{2} + \sin t$
$= -2\sin t\cos t + \sin t$
$= \sin t(1 - 2\cos t)$ car $\sin 2t$
$= 2\sin t\cos t$.

Sur $[0;\pi[$, $\sin t \geq 0$, donc le signe de $x'(t)$ est celui de $1 - 2\cos t$. On a :

$1 - 2\cos t \geq 0 \Leftrightarrow \cos t \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow t \in \left[\frac{\pi}{3};\pi\right]$.

$1 - 2\cos t \leq 0 \Leftrightarrow \cos t \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow t \in \left[0;\frac{\pi}{3}\right]$.

En conclusion, x est décroissante sur $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{\pi}{3};\pi\right]$.

4. $y'(t) = \frac{2\cos 2t}{2} - \cos t = 2\cos^2 t - 1 - \cos t$ car $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$. Comme $(\cos t - 1)(1 + 2\cos t) = 2\cos^2 t - \cos t - 1$ on en déduit bien l'égalité cherchée. Remarquons que $\cos t - 1 \leq 0$, puis que

$1 + 2\cos t \geq 0 \Leftrightarrow \cos t \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow t \in \left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$.

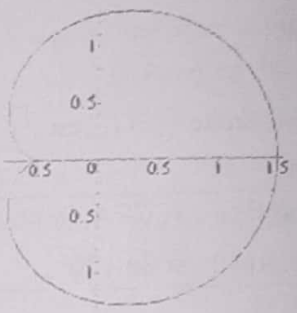
$1 + 2\cos t \leq 0 \Leftrightarrow \cos t \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow t \in \left[\frac{2\pi}{3};\pi\right]$

En conclusion, y est décroissante sur $\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{2\pi}{3};\pi\right]$.

6. On obtient le tableau de variations :

t	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$x'(t)$	0	$-$	0	$+$	$\sqrt{3}$	$+$	0
$x(t)$	$-\frac{1}{2}$	↘	$-\frac{3}{4}$	↗	$\frac{1}{4}$	↗	$\frac{3}{2}$
$y(t)$	0	↘	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	↘	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↗	0
$y'(t)$	0	$-$	(-1)	$-$	0	$+$	2

7. On trace la restriction de Γ obtenue pour $t \in [0;\pi]$, puis on effectue la réflexion par rapport à l'axe des abscisses pour obtenir toute la courbe.



EXERCICE 2

a. $\varphi(t) = \frac{1}{(t+2)^2} > 0$, donc φ est croissante $[0;2]$, ce qui implique en particulier que $\varphi(0) \leq \varphi(t) \leq \varphi(2) \Rightarrow \frac{3}{2} \leq \varphi(t) \leq \frac{7}{4}$

b. Il suffit de multiplier l'inégalité précédente par $e^{\frac{t}{n}} > 0$.

c. Comme $0 \leq 2$, on peut intégrer cette inégalité, ce qui donne : $\int_0^2 \frac{3}{2}e^{\frac{t}{n}}dt \leq \int_0^2 \varphi(t)e^{\frac{t}{n}}dt \leq \int_0^2 \frac{7}{4}e^{\frac{t}{n}}dt$

Comme $\int_0^2 e^{\frac{t}{n}}dt = \left[ne^{\frac{t}{n}}\right]_0^2 = ne^{\frac{2}{n}} - n = n\left(e^{\frac{t}{n}} - 1\right)$, on obtient : $\frac{3}{2}n\left(e^{\frac{2}{n}} - 1\right) \leq u_n \leq \frac{7}{4}n\left(e^{\frac{2}{n}} - 1\right)$

Scanned by CamScanner

on utilise le changement de variable défini par h
en remarquant que si n tend vers $+\infty$ alors h tend

s 0. On a alors : $\lim_{n\to+\infty} n\left(e^{\frac{2}{n}}-1\right)=\lim_{h\to 0}\frac{2}{h}\left(e^{h}-1\right)=2$

$\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{2}n\left(e^{\frac{2}{n}}-1\right)=3$ et $\lim_{n\to+\infty}\frac{7}{1}n\left(e^{\frac{2}{n}}-1\right)=\frac{7}{2}$

(u_n) admet une limite L, alors en utilisant le
orème des gendarmes, on a bien $3\le L\le\frac{7}{2}$

our tout t dans $[0;2]$, on a

$\frac{1}{t+2}=\frac{2(t+2)}{t+2}-\frac{1}{t+2}=\frac{2t+3}{t+2}$

on déduit que : $I=\int_0^2 2-\frac{1}{t+2}dt=\left[2t-\ln(t+2)\right]_0^2=4-\ln 2$

our tout t dans $[0;2]$, on a $0\le\frac{t}{n}\le\frac{2}{n}$, et la
ssance de la fonction exponentielle établit
galité demandée.

multiplie l'inégalité précédente par $\frac{2t+3}{t+2}$ qui est

sitif pour $t\in[0;2]$. Il vient : $\frac{2t+3}{t+2}\le\frac{2t+3}{t+2}e^{\frac{t}{n}}\le\frac{2t+3}{t+2}e^{\frac{2}{n}}$

ntégration, on obtient :

$\frac{2t+3}{t+2}dt\le\int_0^2\frac{2t+3}{t+2}e^{\frac{t}{n}}dt\le\int_0^2\frac{2t+3}{t+2}e^{\frac{2}{n}}dt$

ste à remarquer que $\int_0^2\frac{2t+3}{t+2}e^{\frac{2}{n}}dt=e^{\frac{2}{n}}\int_0^2\frac{2t+3}{t+2}dt=e^{\frac{2}{n}}I$

qui établit l'inégalité.

$e^{\frac{1}{n}}=1$, donc $\lim_{n\to+\infty}e^{\frac{2}{n}}I=I$. Le théorème des
darmes établit donc que (u_n) est convergente et
qui sa limite vaut I.

blème

tie A

$\lim\left(1-\frac{1}{x}\right)=1=1$ et $\lim_{x\to+\infty}(\ln x-2)=+\infty$, donc
$\lim f(x)=+\infty$

$\left(1-\frac{1}{x}\right)=-\infty$ et $\lim_{x\to 0^+}(\ln x-2)=-\infty$, donc
$\lim f(x)=+\infty$

est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme produit de fonctions
rivables. On trouve que

$=\frac{1}{x^2}(\ln x-2)+\left(1-\frac{1}{x}\right)\times\frac{1}{x}=\frac{\ln x+x-3}{x^2}$

pliquant la formule de dérivation d'un produit.
est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $u'(x)=\frac{1+x}{x}>0$

donc u est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

b.Sur $[2;3]$ la fonction u est dérivable, strictement croissante, et u(2) et u(3) sont de signes contraires. Donc l'équation $u(x)=0$ possède une solution unique α dans l'intervalle $[2;3]$. Comme $u(2,20)\approx -1,15\times10^{-2}<0$ et $u(2,21)\approx 2,99\times10^{-3}>0$, le réel α appartient à l'intervalle $[2,20;2,21]$

c. u est croissante et s'annule en α, donc sur $]0;\alpha[$ u(x) est négatif et sur $]\alpha;+\infty[$ u(x) est positif.

d.On remarque que $f'(x)=\frac{u(x)}{x^2}$, et donc que f'(x) est du signe de u(x). Donc f est décroissante sur $]0;\alpha[$ et croissante sur $]\alpha;+\infty[$

e.$u(\alpha)=0$ équivaut à $\ln\alpha+\alpha-3=0$, qui fournit $\ln\alpha=3-\alpha$

On a en reportant cette valeur dans l'expression de $f(\alpha)$:

$f(\alpha)=\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)((3-\alpha)-2)=\frac{2\alpha-\alpha^2-1}{\alpha}=\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$

Comme $2,20<\alpha<2,21$, on a $1,20^2<(\alpha-1)^2<1,21^2$ et $\frac{1}{2,21}<\frac{1}{\alpha}<\frac{1}{2,20}$

Par multiplication de ces deux inégalités, on a :

$\frac{1,20^2}{2,21}<\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}<\frac{1,21^2}{2,20}$

Passant à l'opposé, on en déduit finalement que :

$\frac{1,21^2}{2,20}<f(\alpha)<\frac{1,20^2}{2,21}$

L'application numérique fournit $-\frac{(1.21)^2}{2.20}\approx -0,665$ et $-\frac{(1.20)^2}{2.21}\approx -0,651$, ce qui permet d'obtenir

$-0,67<f(\alpha)<-0,65$

1.a. Le signe de $f(x)=\frac{(x-1)(\ln x-2)}{x}$ est sur $]0;+\infty[$ celui du produit $(x-1)(\ln x-2)$ Il reste à faire un tableau de signes :

x	0		1		e^2		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\ln x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

En conclusion, f(x) est négatif sur $[1,e^2]$, et positif sur $[0,1]\cup[e^2;+\infty[$

b. Voir le graphique en fin d'épreuve.

Partie B

1...a.Comme F est une primitive de f sur $]0;+\infty[$, on a $F'(x)=f(x)$

Scanned by CamScanner

Connaissant le signe de f(x) d'après la question précédente, on peut dire que F est décroissante sur $[1;e^2]$ et croissante sur $]0;1[\cup[e^2;+\infty[$

b. Comme $F'(1)=f(1)=0$ et $F'(e^2)=f(e^2)=0$, les tangentes à Γ en ses points d'abscisses 1 et e^2 sont donc horizontales.

4. a. Posons $u(t)=\ln t$ et $v'(t)=1$, d'où $u'(t)=\frac{1}{t}$ et $v(t)=t$ puis appliquons la célèbre formule :

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt=\left[u(t)v(t)\right]_a^b-\int_a^b u'(t)v(t)dt$$

On obtient alors : $\int_1^x \ln t\,dt=\left[t\ln t\right]_1^x-\int_1^x 1\,dt=x\ln x-x+1$

b. $f(x)=\ln x-2-\frac{1}{x}\ln x+\frac{2}{x}$ après développement.

c. On a puisque F est la primitive de f qui s'annule en 1 :

$$F(x)=\int_1^x f(t)dt=\int_1^x\left(\ln t-2-\frac{1}{t}\ln t+\frac{2}{t}\right)dt$$

$$=\int_1^x \ln t\,dt+\left[-2t-\frac{(\ln t)^2}{2}+2\ln t\right]_1^x$$

$$=x\ln x-3x-\frac{1}{2}\ln^2 x+2\ln x+3$$

d. On peut aussi déduire de la question précédente qu'une primitive de $x\mapsto \ln x$ est $x\mapsto(x\ln x-x)$, ce qui permet de trouver comme primitives de f les fonctions :

$$x\mapsto x\ln x-x-\frac{(\ln x)^2}{2}+2\ln x-2x+k$$

e. Il reste à utiliser le fait que $F(1)=0\Rightarrow k=3$, et l'on retrouve bien le résultat précédemment obtenu.

2. a. On pose $X=\frac{1}{x}$. Si x tend vers 0 par valeurs supérieures, alors X tend vers $+\infty$. On a donc :

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x=\lim_{X\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{1}{X}\right)}{X}=\lim_{X\to+\infty}-\frac{\ln X}{X}=0$$

d'après le formulaire de baccalauréat.

On en déduit que $\lim_{x\to 0^+} F(x)=-\infty$, car $\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$

b. On développe l'expression donnée pour x strictement supérieur à 1, et on établit facilement l'égalité.

$\lim_{x\to+\infty} F(x)=+\infty$ car $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2}\times\frac{\ln x}{x}+\frac{2}{x}-\frac{3}{\ln x}\right)=1$

et $\lim_{x\to+\infty} x\ln x=+\infty$

c. On récapitule les résultats précédents :

x	0		1		e^2		$+\infty$
$F'(x)$		+	0	−	0	+	
$F(x)$		↗	0	↘	$5-e^2$	↗	$+\infty$
	$-\infty$						

d. On obtient :



3. La fonction f est dérivable et à valeurs négatives sur $[1;e^2]$, donc l'aire en unités d'aires est égale à $-\int_1^{e^2} f(x)dx$

L'unité d'aire valant 4 cm², on a donc l'aire A cherchée qui est égale à :

$$A=-4\int_1^{e^2} f(x)dx=-4\left[F(x)\right]_1^{e^2}$$
$$=4F(1)-4F(e^2)$$
$$=4e^2-20$$

Sujet 2

Correction session 2009

Exercice 1

1) Pour tout $t\in[-2;2]$ $x(-t)=(-t)(3-(-t)^2)=-t(3-t^2)$
$=-x(t)$

$$y(-t)=(-t)\ln\left(\frac{3-t}{3+t}\right)=t\ln\left(\frac{3+t}{3-t}\right)$$
$$=y(t)$$

donc les points M(t) et M(-t) sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

Si $t\in[0;2]$ alors $t\in[-2;0]$ donc on peut étudier (Γ) sur $[0;2]$ et compléter la courbe par la symétrie d'axe (oy)

2) Pour tout si $t\in[0;2]$ $x'(t)=3(1-t^2)=3(1-t)(1+t)$

si $t\in[0;1]; x'(t)\geq 0$ si $t\in[1;2], x'(t)\leq 0$ donc x est croissante sur $[0;1]$ et décroissante $[1;2]$

3) a) Pour tout $t\in[0;2]$, $3+t\geq 3$ et $1\leq 3-t\leq 3$ donc $\frac{3+t}{3-t}\geq\frac{3}{3}=1$ par suite $\ln\left(\frac{3+t}{3-t}\right)\geq 0$

b) $\forall t\in[0;2], y(t)=t\ln\left(\frac{3+t}{3-t}\right)$

$$y'(t)=\ln\left(\frac{3+t}{3-t}\right)+\frac{6t}{(3-t)(3+t)}$$

$\forall t\in[0;2], \ln\left(\frac{3+t}{3-t}\right)\geq 0$

et, $\frac{6t}{(3-t)(3-t)}\geq 0$

donc $y'(t)\geq 0$ et y est croissante sur $[0;2]$

4) Tableau de variation conjoint de x et y

Scanned by CamScanner

t	0		1		2
$y'(t)$	3	$+$	0	$-$	-9
$y(t)$	0	↗	2	↘	$-2\ln 5$
$A(t)$	0	↗	$\ln 2$	↗	$\ln 5$
$y'(t)$	0	$+$	$\frac{3}{1}+\ln 2$		$\frac{12}{5}+\ln 5$

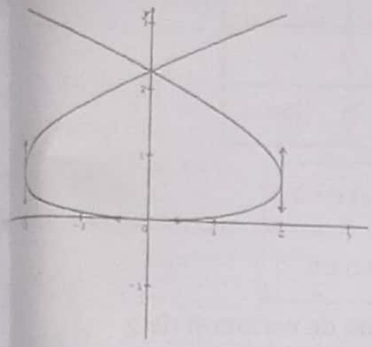
s sur $y'(t)=0 \Leftrightarrow t(3-t^2)=0$

$f(x)$ $\Leftrightarrow t=0$ ou $t=\sqrt{3}$ ou $t=-\sqrt{3}$

chée $y=0$; $y(\sqrt{3})=y(-\sqrt{3})=\sqrt{3}\ln(2+\sqrt{3})$

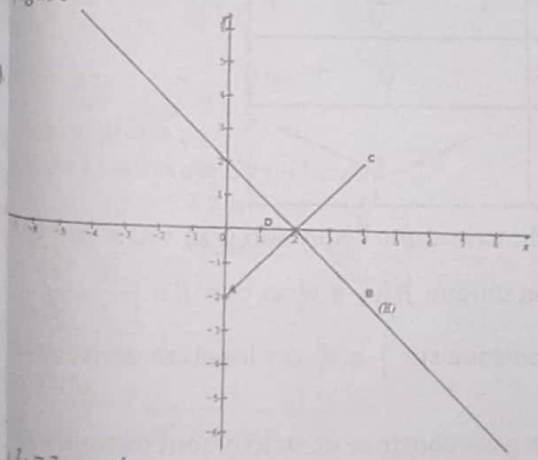
points d'intersection de (Γ) avec l'axe des nnées sont les points d'ordonnées 0 et $\ln(2+\sqrt{3})$

racer (Γ)



exercice 2

figure



$\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}=\frac{-4}{4i}=i$

déduit que $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA})=\frac{\pi}{2}$ et

CB donc isocèle et rectangle en B.

$z_{B'}=\frac{z_B-4-2i}{z_B+2i}=\frac{4-2i-4-2i}{4-2i+2i}=i$; $\boxed{z_{B'}=i}$

$z_{C'}=\frac{z_C-4-2i}{z_C+2i}=\frac{4+2i-4-2i}{4+4i}=0$; $\boxed{z_{C'}=0}$

b) $z_E=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

c) $|z|=1 \Leftrightarrow \left|\frac{z-z_C}{z-z_A}\right|=1 \Leftrightarrow \frac{|z-z_C|}{|z-z_A|}=1$

$\Leftrightarrow \frac{CM}{AM}=1 \Leftrightarrow AM=CM$ donc (E) est la médiatrice de $[AC]$

3)a) Pour tout $z\neq -2i$

$z'-1=\frac{-4-4i}{z+2i}$ donc $(z'-1)\times(z+2i)=-4-4i$

b) (i) $M'=D \Leftrightarrow z'-1=0 \Leftrightarrow (z'-1)(z+2i)=0$

$(car\ z\neq 2i)$

$(z'-1)(z+2i)=0$ est absurde car $(z'-1)(z+2i)=-4-4i$

Donc $M'\neq D$

(ii) $(z'-1)(z+2i)=-4-4i \Rightarrow |z'-1|\times|z+2i|=|-4-4i|$

$\Rightarrow DM'\times AM=4\sqrt{2}$

(iii) $(z'-1)(z+2i)=-4-4i$ pour tout $z\neq -2i$

$(z'-1)(z+2i)=-4-4i \Rightarrow \arg(z'-1)+\arg(z+2i)=\arg(-4-4i)$

$\Rightarrow (\vec{u};\overrightarrow{DM'})+(\vec{u};\overrightarrow{AM})=\frac{5\pi}{4}(2\pi)$

(Pour correction du problème voir sujet 2 type BAC)

Sujet 14

sujet 3

Session 2009 (2nd tour)

Exercice 1

1) Coordonnées de F

ABFC est un parallélogramme donc $\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AB}$ d'où

$\boxed{F(6;4;4)}$

2) Calculons $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}(4,2,5)$; $\overrightarrow{AC}(4,1,3)$; $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}4&4\\2&1\\5&3\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}1\\8\\-4\end{pmatrix}$

$\boxed{\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(1,8,-4)}$

Déduisons l'aire du parallélogramme ABFC

$A=\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|u.a=4\sqrt{1^2+8^2+(-4)^2}cm^2$; $\boxed{A=36cm^2}$

Aire du triangle ABC

$A_{ABC}=\frac{1}{2}A=\frac{1}{2}\times 36cm^2$

$\boxed{A_{ABC}=18cm^2}$

3) Calculons $d=d(D;(ABC))$

$d=\frac{\left|\overrightarrow{AD}.\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\right|}{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|}$; $\overrightarrow{AD}(-1,-2,7)$ $\overrightarrow{AD}.\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)=-45$

d'où $d=\frac{45}{9}=5$; $\boxed{d=5(u.l)}$

4) Volume V de la pyramide de sommet D et de base ABFC.

Scanned by CamScanner

$V = \frac{1}{3} d \times \left\| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \right\| u.v = \frac{1}{3} \times 5 \times 9 \times 8 cm^3$

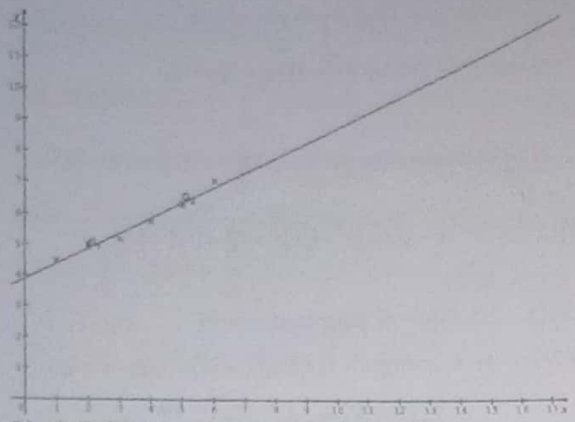
$V = 120 cm^3$

5) Volume V' du parallélépipède ABCDEFGH.

$V' = d \times \left\| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \right\| = 5 \times 9 \times 8 cm^3$ $V' = 360 cm^3$

Exercice 2

Représentons le nuage de points associé à cette série statistique.



2) a) Calculons les coordonnées de G_1 et G_2

$x_{G1} = \frac{1+2+3}{3} = 2$ et $y_{G1} = \frac{4.5+5+5.2}{3} = 4.9$

$x_{G2} = \frac{4+5+6}{3} = 5$ $y_{G2} = \frac{5.8+6.3+7.1}{3} = 6.4$

d'où $G_1(2;4.9)$ et $G_2(5;6.4)$

b) Construisons la droite (Δ) (voir figure)

c) Déterminons l'équation réduite de (Δ)

(Δ) a pour équation de la forme $y = ax + b$ avec $(a;b) \in \mathbb{R}$

$G_1 \in (\Delta)$ et $G_2 \in (\Delta)$ donc $a = \frac{6.4-4.9}{5-2} = 0.5$ et

$4.9 = 0.5 \times 2 + b \Leftrightarrow b = 3.9$ Ainsi $(\Delta) y = 0.5x + 3.9$

3) Montant des prêts en 2009

Le rang de 2009 et $x = 8$ ainsi le montant de 2009 est

$y = 0.5 \times 8 + 3.9 = 7.9 (millons)$

$y > 2 \times 7.9 \Rightarrow 0.5x + 3.9 > 7.9 \Rightarrow 0.5x > 11.9$
$\Rightarrow x > 23.8$ Comme x est un entier naturel alors $x \geq 24$

Soit A l'année d'indice 24 on a $A = 2001 + 24 = 2025$

C'est donc à partir de 2025 que le montant des prêts sera strictement supérieur au double du montant de 2009

Problème

Partie A

$g(x) = \cos^2 x + \cos x + 1$ pour $x \in]-\pi;0[$

1)a) Montrons que g est dérivable sur $]-\pi;0[$ et que $g'(x) = \sin x(2\cos x + 1)$

g est la somme de fonctions dérivables sur $]-\pi;0[$ donc

g est dérivable sur $]-\pi;0[$ et

$\forall x \in]-\pi;0[, g'(x) = -2\sin x \cos x - \sin x$
$= -\sin x(2\cos x + 1)$

d'où $\forall x \in]-\pi;0[, g'(x) = \sin x(2\cos x + 1)$

b) En déduisons que

$g'(x) \leq 0$ pour $x \in \left]-\pi; -\frac{2\pi}{3}\right]$ et que $g'(x) \geq 0$ pour $x \in \left[-\frac{2\pi}{3};0\right[$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x(2\cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$ ou $2\cos x + 1 = 0$

$\sin x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\pi \\ ou \\ x = 0 \end{cases}$

$2\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{2\pi}{3}$

On a le tableau de signe suivant

x	$-\pi$		$-\frac{2\pi}{3}$		0
$-\sin x$	$+$	$+$			
$2\cos x+1$	$-$		0	$+$	
$g'(x)$	$-$		0	$+$	

d'où $\forall x \in \left]-\pi; -\frac{2\pi}{3}\right], g'(x) \leq 0$ et $\forall x \in \left[-\frac{2\pi}{3};0\right[, g'(x) \geq 0$

c) Dressons le tableau de variation de g

x	$-\pi$		$-\frac{2\pi}{3}$		0
$g'(x)$	$-$		0	$+$	
$g(x)$	-1	↘	$-\frac{5}{4}$	↗	1

2) a) Montrons que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\beta \in]-\pi;0[$ et que $\beta \in \left]-\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{4}\right[$

g est continue sur $]-\pi;0[$ car fonction dérivable sur $]-\pi;0[$

Comme g est continue et strictement décroissante sue sur $\left]-\pi; -\frac{2\pi}{3}\right]$ alors g réalise une bijection de $\left]-\pi; -\frac{2\pi}{3}\right]$ sur $g\left(\left]-\pi; -\frac{2\pi}{3}\right]\right) = \left[-\frac{5}{4}; -1\right[$ $0 \notin \left[-\frac{5}{4}; -1\right[$ donc l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution dans $\left]-\pi; -\frac{2\pi}{3}\right]$ (i)

Scanned by CamScanner

me g est continue et strictement croissante sur
$\frac{2\pi}{3};0\left[$ alors g réalise une bijection de $\left[-\frac{2\pi}{3};0\right[$ sur
$-\frac{2\pi}{3};0\left[\right)=\left[-\frac{5}{4};1\right[$ or $0\in\left[-\frac{5}{4};1\right[$ donc l'équation g(x) =
dmet une unique solution dans $\left[-\frac{2\pi}{3};0\right[$ (ii)

alement (i) et (ii) montrent que

quation g(x) = 0 admet une unique solution β dans $]-\pi;0[$

trons que $\beta\in\left]-\frac{\pi}{3};-\frac{\pi}{4}\right[$

$g\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{4}<0$ et $g\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}-1}{2}>0$ donc

$\frac{\pi}{3}\right)\times g\left(-\frac{\pi}{4}\right)<0$ d'où $\boxed{\beta\in\left]-\frac{\pi}{3};-\frac{\pi}{4}\right[}$

éduisons le signe d »e g

près le tableau de variation on a

$\in]-\pi;\beta[\ g(x)<0,\forall x\in]\beta;0[\ g(x)>0\ g(\beta)=0$

ie B

$=\frac{2\sin 2x}{1+\cos x}+\frac{1}{2}$ si $x\in]-\pi;0]$

$=2-\frac{3}{e^{3x}+1}$ si $x>0$

diions la continuité de f en 0

$f(x)=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{2\sin 2x}{1+\cos x}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$

$f(x)=\lim_{x\to0^+}2-\frac{3}{e^{3x}+1}=\frac{1}{2}$

$\lim\frac{3}{e^{3x}+1}=\frac{3}{2}$

$f(x)=\lim_{x\to0^+}f(x)=\frac{1}{2}=f(0)$

f est continue en 0.

diions la dérivabilité de f en 0

$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{2\sin 2x}{1+\cos x}}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{2\sin 2x}{x(1+\cos x)}$

$\frac{4\sin 2x}{2x}\times\frac{1}{1+\cos x}=2$

$\lim\frac{\sin 2x}{2x}=1\ \lim_{x\to0^-}\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1}{2}$

$\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{2-\frac{3}{e^{3x}+1}-\frac{1}{2}}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{3e^{3x}+3-6}{e^{3x}+1}}{x}$

$=\lim_{x\to0^+}\frac{3e^{3x}-3}{x(e^{3x}+1)}=\lim_{x\to0^+}9\frac{e^{3x}-1}{3x}\times\frac{1}{e^{3x}+1}=\frac{9}{2}$

$\frac{f(x)-f(0)}{x}\neq\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}$ Donc f n'est dérivable

prétons géométriquement les résultats

Comme $\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=2$ alors (C) admet une demi tangente à gauche de zéro de coefficient directeur 2

Comme $\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{9}{2}$ alors (C) admet à droite en zéro une demi tangente de coefficient directeur $\frac{9}{2}$

3) a) Calculons $\lim_{x\to+\infty}f(x)$

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}2-\frac{3}{e^{3x}+1}=2$ car $\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{e^{3x}+1}=0$

$\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=2}$

b) Montrons que

$\forall x\in]-\pi;0]$ on a $f(x)=\frac{4\sin x\cos x(1-\cos x)}{1-\cos^2x}+\frac{1}{2}$

$\forall x\in]-\pi;0],f(x)=\frac{2\sin 2x}{1+\cos x}+\frac{1}{2}=\frac{4\sin x\cos x}{1+\cos x}+\frac{1}{2}$

$=\frac{4\sin x\cos x(1-\cos x)}{1-\cos^2x}+\frac{1}{2}$

donc $\boxed{\forall x\in]-\pi;0],f(x)=\frac{4\sin x\cos x(1-\cos x)}{1-\cos^2x}+\frac{1}{2}}$

Déduisons que $\lim_{x\to-\pi^+}f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to-\pi^+}f(x)=\lim_{x\to-\pi^+}\frac{4\sin x\cos x(1-\cos x)}{1-\cos^2x}+\frac{1}{2}$

$=\lim_{x\to-\pi^+}\frac{4\sin x\cos x(1-\cos x)}{\sin^2x}+\frac{1}{2}$

$=\lim_{x\to-\pi^+}\frac{4\cos x(1-\cos x)}{\sin x}+\frac{1}{2}=+\infty$

car $\lim_{x\to-\pi}\cos x(1-\cos x)=-2$, $\lim_{x\to-\pi^+}\sin x=0^-$

$\boxed{\lim_{x\to-\pi^+}f(x)=+\infty}$

c) En déduisons les asymptotes de la courbe.

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=2$ donc la droite d'équation $y=2$ est une asymptote horizontale à (C).

$\lim_{x\to-\pi^+}f(x)=+\infty$ donc la droite d'équation $x=-\pi$ est une asymptote verticale à (C)

4) a) Calculons $f'(x)$ pour tout $x\in]0;+\infty[$ et en déduisons le sens de variation de f sur cet intervalle.

f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\forall x\in]0;+\infty[,f'(x)=\frac{9e^{3x}}{(1+e^{3x})^2}$

f'(x) >0 donc f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

b) Montrons que $f'(x)=\frac{4g(x)}{1+\cos x},\forall x\in]-\pi;0[$

f est dérivable sur $]-\pi;0[$ comme quotient de fonctions dérivable sur $]-\pi;0[$

$\forall x\in]-\pi;0[,f'(x)=\frac{4\cos 2x(1+\cos x)+2\sin x\sin 2x}{(1+\cos x)^2}$

Scanned by CamScanner

$$= \frac{4(2\cos^2 x-1)(1+\cos x)+4\sin^2 x\cos x}{(1+\cos x)^2}$$

$$= \frac{4(2\cos^2 x-1)(1+\cos x)+4(1-\cos^2 x)\cos x}{(1+\cos x)^2}$$

$$= \frac{4(1+\cos x)\left[2\cos^2 x-1+(1-\cos x)\cos x\right]}{(1+\cos x)^2}$$

$$= \frac{4(\cos^2 x+\cos x-1)}{1+\cos x} = \frac{4g(x)}{1+\cos x}$$

D'où $\boxed{\forall x \in]-\pi;0[, f'(x) = \frac{4g(x)}{1+\cos x}}$

En déduisons le sens de variation de f.

Pour $x \in]-\pi;0[, 1+\cos x > 0$. Donc le signe de f'(x) est celui de g(x).donc

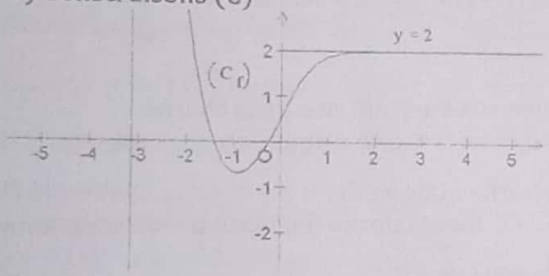
$\forall x \in]-\pi;\beta], f'(x) \le 0$ et f est décroissante sur $]-\pi;\beta]$.

$\forall x \in [\beta;0[, f'(x) \ge 0$ et f est croissante sur $[\beta;0[$

c) Dressons le tableau de variation de f.

x	$-\pi$		β		0		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\parallel$	0	$+$	$\parallel$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\beta)$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	2

5) Construisons (C)



Partie C

1) Etudions les variations de h.

h est dérivable sur [1.5 ;2] car somme de fonctions dérivables sur [1.5 ;2]

$\forall x \in [1.5;2], h'(x) = f'(x) - 1;\ 0 \le f'(x) \le 0.5 \Leftrightarrow -1 \le f'(x) - 1 \le -\frac{1}{2}$

Soit $h'(x) < 0$ et h est strictement décroissante sur [1.5 ;2].

En déduisons que l'équation f(x) = x admet une unique solution dans [1.5 ;2]. $f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0 \Leftrightarrow h(x) = 0$

h est continue et strictement décroissante sur [1.5 ;2] donc h réalise une bijection de [1.5 ;2] sur $[h(2);h(1.5]$

or $h(2) \approx 0.46 > 0$, $h(1.5) \approx -0.007 < 0$ d'où $0 \in [h(2);h(1.5)]$

par suite l'équation h(x) = 0 c'est-à-dire

$\boxed{\text{l'équation } f(x) = x \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ dans } [1.5;2]}$

2)a) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in [1.5;2]$ en utilisant (e)

Soit la propriété P « $u_n \in [1.5;2]; \forall n \in \mathbb{N}$ »

On a $u_0 = 1.5 \in [1.5;2]$ donc la propriété P est vraie pour n = 0

Supposons la propriété vraie à l'ordre n et démontrons qu'elle est vraie à l'ordre $n+1$

Supposons $u_n \le \alpha$

Comme $\alpha \in [1.5;2], u_n \in [1.5;2]$ et $\forall x \in [1.5;2], 0 \le f'(x) \le \frac{1}{2}$

alors on obtient $0 \le \int_{u_n}^{\alpha} f'(x)dx \le \int_{u_n}^{\alpha} \frac{1}{2}dx$ et

$0 \le f(\alpha) - f(u_n) \le \frac{1}{2}(\alpha - u_n)$

$0 \le f(\alpha) - f(u_n) \le \frac{1}{2}(\alpha - u_n) \Rightarrow 0 \le \alpha - u_{n+1} \le \frac{1}{2}(\alpha - u_n)$

$\Rightarrow \frac{1}{2}(u_n + \alpha) \le u_{n+1} \le \alpha \le 2$

On a

$\left.\begin{matrix} 1.5 \le u_n \le 2 \\ 1.5 \le u_n \le 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3 \le u_n + \alpha \le 4$

$\Rightarrow 1.5 \le \frac{1}{2}(u_n + \alpha) \le 2$

On a donc

$u_n \in [1.5;2] \Rightarrow \frac{1}{2}(u_n + \alpha) \le u_{n+1} \le \alpha \le 2$

$\Rightarrow 1.5 \le u_{n+1} \le 2 \Rightarrow u_{n+1} \in [1.5;2]$

D'où $u_n \in [1.5;2] \Rightarrow u_{n+1} \in [1.5;2] (i)$

Supposons maintenant $u_n \ge \alpha$

De manière analogue on montre que $u_{n+1} \in [1.5;2] (ii)$

(i) et (ii) montrent que la propriété est vraie à l'ordre n + 1 et par suite $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [1.5;2]}$

b) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \le \frac{1}{2}|u_{n-1} - \alpha|$

$\forall x \in [1.5;2] 0 \le f'(x) \le \frac{1}{2} \Rightarrow |f'(x)| \le \frac{1}{2}$

En appliquant l'inégalité de la moyenne à α et à u_{n-1} avec f' on a $|f(u_{n-1}) - f(\alpha)| \le \frac{1}{2}|u_{n-1} - \alpha|$ or $f(u_{n-1}) = u_n$ et $f(\alpha) = \alpha$. Donc

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n - \alpha| \le \frac{1}{2}|u_{n-1} - \alpha|}$

Montrons que $|u_n - \alpha| \le \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha| \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n - \alpha| \frac{1}{2}|u_{n-1} - \alpha|$

On a donc

Scanned by CamScanner

$|u_1-\alpha| \le \frac{1}{2}|u_0-\alpha|$

$|u_2-\alpha| \le \frac{1}{2}|u_1-\alpha|$

$|u_n-\alpha| \le \frac{1}{2}|u_{n-1}-\alpha|$

...sant le produit des ces n inégalités membre à ...bre et après simplification on obtient

$$|u_n-\alpha| \le \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0-\alpha|$$

$1.5 \le \alpha \le 2$ et $u_0 = 1.5 \Rightarrow -\frac{1}{2} \le \alpha - u_0 \le 0$

$$\Rightarrow |u_0-\alpha| \le \frac{1}{2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n-\alpha| \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

...déduisons la convergence de (u_n)

$\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$ par suite (u_n) est une ...onvergente.

...erminons l'entier naturel n_0 tel que u_{n_0} soit une ...approchée de α à 10^{-3} près.

...oir $|u_n-\alpha| \le 10^{-3}$ il suffit d'avoir $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \le 10^{-3}$

$\le 10^{-3} \Leftrightarrow (n+1)\ln\frac{1}{2} \le -3\ln 10 \Leftrightarrow n+1 \ge \frac{3\ln 10}{\ln 2}$

$\Leftrightarrow n \ge \frac{3\ln 10}{\ln 2} - 1 \Leftrightarrow n \ge 8.86$

...tient $\boxed{n_0 = 9}$.

...t 4 Session 2010

...rcice 1

...ontrons que P(z) admet deux solutions ...gnaires pures.

$z_0 = ai$, $a \in \mathbb{R}$ une racine imaginaire pure, on a

$P(z_0) = 0$

$P(z_0) = 0 \Leftrightarrow -ia^3 + (1-i)a^2 + ia - 1 + i = 0$

$\Leftrightarrow -ia^3 - ia^2 + ia + i + a^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow -i\left(a^3 + a^2 - a - 1\right) + a^2 - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 1 = 0 (1) \\ a^3 + a^2 - a - 1 = 0 (2) \end{cases}$$

...(1) on a a = 1 ou a = -1. Les réels 1 et -1 sont ...tions de l'équation (2) donc

...) admet deux solutions imaginaires pures -i et i

...ésolvons l'équation P(z) = 0

$P(z) = (z-i)(z+i)(z+b), b \in \mathbb{C}$,

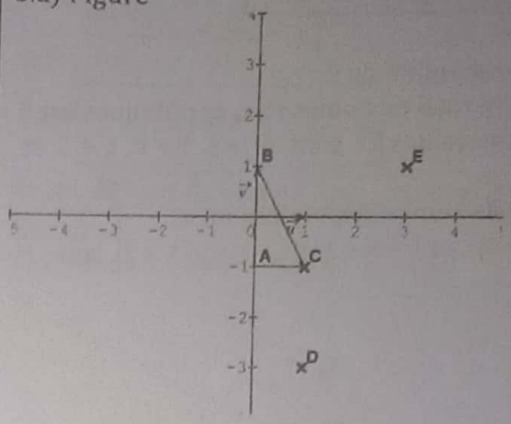
$P(z) = (z^2+1)(z+b) = z^3 + bz^2 + z + b$ par suite par ...dentification on a $b = -1+i$ et

$P(z) = (z-i)(z+i)(z-1+i)$ d'où P(z) = 0 équivaut à $z = i$ ou $z = -i$ ou $z = 1-i$. Ainsi $\boxed{S = \{i, -i, 1-i\}}$

Donnons les solutions sous forme exponentielle

$$\boxed{i = e^{i\frac{\pi}{2}}; -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}; 1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}$$

3.a) Figure



b) Calculons le rapport $\frac{a-b}{a-c}$

$\frac{a-b}{a-c} = \frac{-i-i}{-i-1+i} = 2i$ donc $\boxed{\frac{a-b}{a-c} = 2i}$

➢ Nature de ABC

$\frac{a-b}{a-c} \in i\mathbb{R}$ donc **Le triangle ABC est rectangle en A**

c) Soit $C = t_{\overrightarrow{AB}}(D) \Leftrightarrow \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow z_C - z_D = z_B - z_A$ c'est-à-dire $\boxed{z_D = 1-3i}$

d) $E = R\left(O; \frac{\pi}{2}\right)(D) \Leftrightarrow z_E = e^{i\frac{\pi}{2}} z_D$ soit $\boxed{z_E = 3+i}$

e) $c = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow c^n = \left(\sqrt{2}\right)^n e^{-i\frac{n\pi}{4}}$;

$c^n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{n\pi}{4} = k\pi \Leftrightarrow \boxed{n = 4k}$

Exercice 2

1) Déterminons la loi de probabilité de X et calculons son espérance mathématique de X

Le s valeurs prises par X sont : 0, 1, 2, 3

$p(X=0) = \frac{C_4^0 \times C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$; $p(X=1) = \frac{C_4^1 \times C_6^2}{C_{10}^3} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$

$p(X=2) = \frac{C_4^2 \times C_6^1}{C_{10}^3} = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}$; $p(X=3) = \frac{C_4^3 \times C_6^0}{C_{10}^3} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$

D'où la loi de probabilité de X

X	0	1	2	3
P(X= x	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

Calculons l'espérance mathématique

$E(X) = 0\times\frac{1}{6} + 1\times\frac{1}{2} + 2\times\frac{3}{10} + 3\times\frac{1}{30} = \frac{6}{5}$; $\boxed{E(X) = \frac{6}{5}}$

2) a) n = 5

Scanned by CamScanner

Calculons la probabilité pour que l'on obtienne exactement deux fois un tirage de trois boules rouges Pour chaque tirage on a une épreuve de Bernoulli. Soit S :« Obtenir 3 boules rouges » et E l'événement contraire ; on a $p(S)=\frac{1}{30}$ et $p(E)=\frac{29}{30}$

$$p(S=2)=C_5^2\left(\frac{1}{30}\right)^2\left(\frac{29}{30}\right)^3=\frac{10\times 29^3}{30^5}$$

b) n = 2

Calculons la probabilité de S

Si S « le nombre total de boules rouges obtenues est 3 » alors les cas favorables à S sont : 0 +3, 3 + 0, 1 + 2 et 2 +1.

Les deux tirages étant indépendant on a :

$p(S)=2p(X=0)\times p(X=3)+2p(X=1)\times p(X=2)$ soit

$$p(S)=\frac{14}{45}$$

Problème

Partie A

On considère $f(x)=(x+1)^2e^{-x}$ et $g(x)=e^{-x}$

1) a) Calculons les limites f en $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x+1)^2e^{-x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty} x^2e^{-x}+2xe^{-x}+e^{-x}$$

$=0$ car $\lim_{x\to+\infty} x^2e^{-x}=\lim_{x\to+\infty} xe^{-x}=\lim_{x\to+\infty} e^{-x}=0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$. On en déduit que la droite d'équation y = 0 c'est-à-dire l'axe des abscisses est une asymptote à (C_f) en $+\infty$.

Calculons la limite de f en $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x+1)^2e^{-x}=+\infty$$

car $\lim_{x\to-\infty}(x+1)^2=+\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$

Donc $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

b) Calculons $f'(x)$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=(x+1)(1-x)e^{-x}$

- Signe de $f'(x)$

Pour tout réel x $e^{-x}>0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $(x+1)(1-x)$

$(x+1)(1-x)\le 0 \Leftrightarrow x\in]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[, f'(x)\le 0$

$(x+1)(1-x)\ge 0 \Leftrightarrow x\in[-1;1], f'(x)\ge 0$

c) En déduisons les variations de f et dressons le tableau de variations $\forall x\in]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[, f'(x)\le 0$ Donc

f est décroissante sur les intervalles $]-\infty;-1]$ et $[1;+\infty[$

Tableau de variation.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{4}{e}$	↘	0

$f(-1)=0$ et $f(1)=\frac{4}{e}$

2) a) Calculons les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$

$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$, $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} e^{-x}=0$

$\lim_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$

b) Calculons g'(x) , étudions le sens de variation de g et dressons le tableau de variation de g.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $g'(x)=-e^{-x}$

- Variations de g

$\forall x\in\mathbb{R}, g'(x)<0$ Donc

g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

- Tableau de variation de g

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	0

3) a) Signe de $f(x)-g(x)$

$f(x)-g(x)=x(x+2)e^{-x}$ on a $e^{-x}>0$ donc le signe de $f(x)-g(x)$ est celui de x(x + 2) pra suite

- $\forall x\in]-\infty;-2]\cup[0;+\infty[, f(x)-g(x)\le 0$ et (C_f) est située au dessous de (C_g) sur les intervalles $]-\infty;-2]$ et $[0;+\infty[$
- $\forall x\in[-2;0], f(x)-g(x)\ge 0$ donc (C_f) est située au dessus de (C_g) sur l'intervalle $[-2;0]$

b) Montrons que les tangentes en A(0 ;1) aux courbes (C_g) et (C_f) sont perpendiculaires.

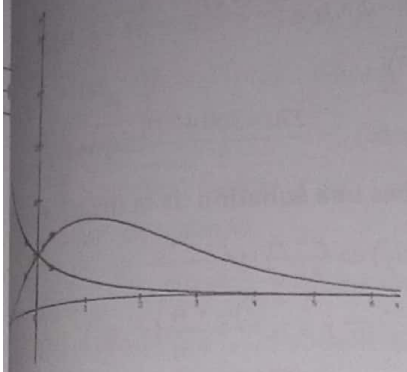
Le coefficient directeur de la tangente à (C_f) en A est $f'(0)=1$

Le coefficient directeur de la tangente à (C_g) en A est $g'(0)=-1$; $f'(0)\times g'(0)=-1$ donc

les deux tangentes sont perpendiculaires en A

4) Tracer des courbes de f et g

Scanned by CamScanner



...rminons les réels a, b et c pour que
$(...+bt+c)e^{-t}$ soit une primitive de $t \mapsto (t^2+2t)e^{-t}$

$\left[(at^2+bt+c)e^{-t}\right]' = (t^2+2t)e^{-t}$ soit

$\left[(2a-b)t+b-c\right]e^{-t} = (2t^2+2t)e^{-t}$ par identification

$$\begin{cases} -a=1 \\ 2a+b=2 \\ b-c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} a=-1 \\ b=-4 \\ c=-4 \end{cases}}$$

...fonction $t \mapsto -(t^2+4t+4)e^{-t}$ est une primitive de
...on $t \mapsto (t^2+2t)e^{-t}$

...culons l'aire $A(\alpha)$

$\int_0^\alpha [f(t)-g(t)]dt = 4\int_0^\alpha (t^2+2t)e^{-t}dt$

$\left[(-t^2-4t-4)e^{-t}\right]_0^\alpha$

$\left[(-\alpha^2-4\alpha-4)e^{-\alpha}+4\right]$

$\boxed{A(\alpha)=16-(\alpha+2)^2e^{-\alpha}cm^2}$

...lons $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} A(\alpha)$

$...\alpha) = \lim\limits_{\alpha\to+\infty} 16-(\alpha+2)e^{-\alpha} = 16cm^2$ car

$...+2)^2e^{-\alpha} = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{\alpha\to+\infty} A(\alpha)=16cm^2}$

$...=\ln(f(n))$

...ions que la suite (u_n) est décroissante.

$...n<n+1$ donc $f(n)>f(n+1)$ et

$...>\ln(f(n+1))$ soit $u_n>u_{n+1}$ par suite (u_n) est
...sante.

...ontrons que $u_n=-n+2\ln(n+1)$

$...f(n))=\ln\left[(n+1)^2e^{-n}\right]$

$...(n+1)+\ln e^{-n} = -n+2\ln(n+1)$

$\boxed{...=-n+2\ln(n+1)}$

b) Démontrons que $S_n = 2\ln\left[(n+1)!\right]-\frac{n(n+1)}{2}$

On a $S_n = u_1+u_2+...+u_n$ c'est-à-dire

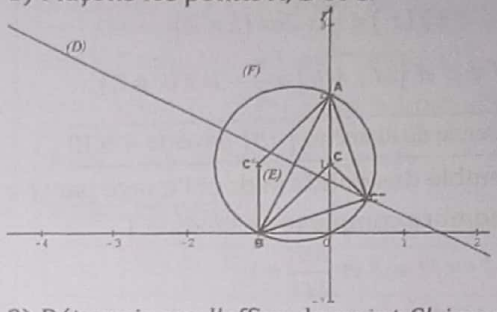
$$\begin{aligned} S_n &= (-1+2\ln 2)+(-2+2\ln 3)+\ +(-n+2\ln(n+1)) \\ &= -(1+2+...+n)+2[\ln 2+\ln 3+...+\ln(n+1)] \\ &= -\frac{n(n+1)}{2}+2\ln(2\times 3\times ...\times(n+1)) \\ &= -\frac{n(n+1)}{2}+2\ln\left[(n+1)!\right] \end{aligned}$$

d'où $\boxed{S_n = 2\ln\left[(n+1)!\right]-\frac{n(n+1)}{2}}$

sujet 5 Sujet du second tour : Session 2010

Exercice1

1) Plaçons les points A, B et C.



2) Déterminons l'affixe du point C', image de C par f

On a à calculer z' pour z = i soit $z' = \frac{i+1}{i-2i}$ c'est-à-dire

$z' = i(i+1)$ ainsi $\boxed{l'affixe \text{ du point C' est } -1+i}$

➢ Nature du quadrilatère ACBC'

On a $z_C - z_A = i-2i = -i$ et $z_B - z_{C'} = -1-(-1+i) = -i$.

Ainsi $z_C - z_A = z_B - z_{C'}$ soit $\overline{AC} = \overline{C'B}$ ce qui signifie que

$\boxed{ACBC' \text{ est un parallélogramme}}$

3) Montrons que le point C admet un unique antécédent C'' par f.

On a à résoudre l'équation $i = \frac{z+1}{z-2i}$

$i = \frac{z+1}{z-2i} \Leftrightarrow i(z-2i) = z+1 \Leftrightarrow z = \frac{1}{2}(1+i)$ Ainsi

$\boxed{C \text{ admet un unique ancêtre C'' d'affixe } \frac{1}{2}(1+i)}$

➢ Nature du triangle BCC''

On a $\arg\left(\frac{z_B-z_C}{z_{C''}-z_C}\right) = \left(\overrightarrow{CC''};\overrightarrow{CB}\right)$ et

$\arg\left(\frac{z_B-z_C}{z_{C''}-z_C}\right) = \arg(-2i) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$ donc $\left(\overrightarrow{CC''};\overrightarrow{Cb}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$

d'où $\boxed{\text{le triangle BCC'' est rectangle en C}}$

4) Donnons une interprétation géométrique de $|z'|$ et $\arg(z')$

Scanned by CamScanner

On a $z'=\dfrac{z+1}{z-2i}$ donc $\boxed{|z'|=\left|\dfrac{z+1}{z-2i}\right|=\dfrac{|z+1|}{|z-2i|}=\dfrac{MB}{MA}}$ et

$\boxed{\arg(z')=\arg\left(\dfrac{z+1}{z-2i}\right)=\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)[2\pi]}$

5) Déterminons les ensembles :

a) (E) est l(ensemble des points M dont l'image par f a pour affixe un réel négatif.

$M\in(E)\Leftrightarrow z'\in\mathbb{R}_-^*\Leftrightarrow z'\neq 0$ et $\arg(z')=\pi+2k\pi$

$\Leftrightarrow M\neq A$ et $M\neq B$ et $\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)=\pi+2k\pi$

Donc $\boxed{(E)\text{ est le segement }]Ab[}$

b) (F) est l'ensemble des points M dont l'image par f a pour affixe un imaginaire pure non nul.

$M\in(F)\Leftrightarrow z'\neq 0$ et $\arg(z')=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow M\neq A$ et $M\neq B$ et $\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$

donc $\boxed{(F)\text{ est le cercle de diamètre }[AB]\text{ privé de A et B}}$

c) (D) est l'ensemble des points M dont l'image par f a pour affixe un nombre complexe de module 1.

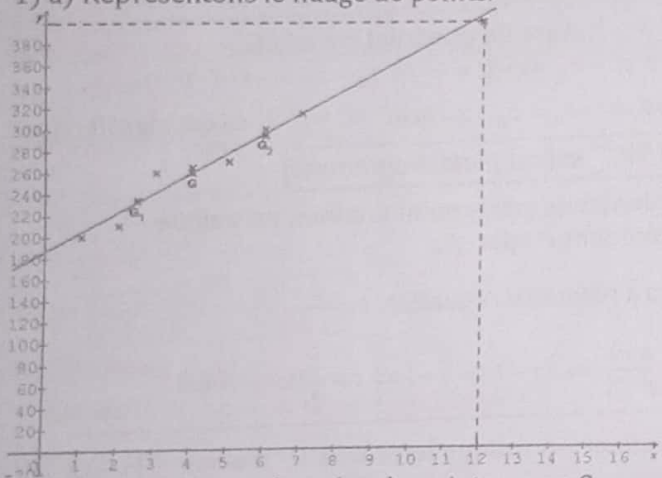
$M\in(D)\Leftrightarrow|z'|=1\Leftrightarrow M\neq A$ et $\dfrac{MB}{MA}=1$

$\Leftrightarrow M\neq A$ et $MA=MB$

Donc $\boxed{(D)\text{ est la médiatrice de }[AB]}$

Exercice 2

1) a) Représentons le nuage de points.



b) Calculons les coordonnées du point moyen G

$x_G=\dfrac{1+2+3+4+5+6+7}{7}=\dfrac{28}{7}=4$

$y_G=\dfrac{200+210+260+265+270+300+315}{7}=260$

don c $\boxed{G(4;260)}$

2) a) Calculons les coordonnées du point G_1 associé aux quatre premiers points du tableau, puis celle de G_2 associé aux derniers points.

$x_1=\dfrac{1+2+3+4}{4}=2.5; y_1=\dfrac{200+210+260+265}{4}=233.75$

$\boxed{G_1(2.5;233.75)}$

$x_2=\dfrac{5+6+7}{3}=6; y_2=\dfrac{270+300+315}{3}=295; \boxed{G_2(6;295)}$

b) Déterminons une équation de la droite (G_1G_2)

$M(x;y)\in(G_1G_2)\Leftrightarrow\dfrac{y-y_1}{x-x_1}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$\Leftrightarrow y=y_1+\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

$\Leftrightarrow y=233.75+17.5(x-2.5)$

$\boxed{(G_1G_2)\text{ a pour équation }y=17.5x+190}$

3) On admet que (G_1G_2) réalise un ajustement du nuage de points

a) Déterminons par le calcul la production journalière moyenne de pulls en décembre 2008.

Si x = 12 alors on a $y=17.5\times12+190=400$. En décembre 2008, la production journalière est de $\boxed{400\text{ pulls}}$

b) On retrouve graphiquement ce résultat par la détermination de l'ordonnée du point d'abscisse 12 de la droite (G_1G_2). On trouve $\boxed{y=400}$..

4) En décembre 2008, la production moyenne journalière était de 400 pulls et 400>350. Donc l'atelier de fabrication du pulls $\boxed{n'a\text{ été fermé}}$ fin décembre 2008 car son objectif est atteint.

Problème

Partie A

Soit la fonction u définie par $u(x)=1-xe^{-x}$.

1) Etudions le sens de variation de u.

u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x

$u'(x)=(x-1)e^{-x}$. $\forall x\in\mathbb{R}, e^{-x}>0$ donc le signe de u'(x) est celui de x – 1 par suite $\forall x\in]-\infty;1], u'(x)\leq 0$ et

$\boxed{u\text{ est décroissante sur }]-\infty;1]}$

$\forall x\in[1;+\infty[, u'(x)\geq 0$ et $\boxed{u\text{ est croissante sur }[1;+\infty[}$

2)En déduisons le signe de u(x) suivant les valeurs de x.

u est décroissante $]-\infty;1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$ donc u admet un minimum en 1 par suite $\forall x\in\mathbb{R}, u(x)\geq u(1)$ or $u(1)=1-e^{-1}>0$ d'où $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}, u(x)>0}$

Partie B

1) a) Vérifions que f est continue en -1.

$\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{-4\ln(-x)}{x}=0$

Scanned by CamScanner

$f(x) = \lim_{x\to -1^-} (x+1)\left(1+e^{-x}\right) = 0$, $f(-1) = 0$. On a :

$f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1) = 0$ donc

est continue en -1

Etudions la dérivabilité de f en -1 et interprétons phiquement ce résultat

$\frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{-4\ln(-x)}{x(x+1)}$ posons t = -x quand x vers -1 t tend vers 1. On obtient donc

$\frac{-4\ln(-x)}{x(x+1)} = \lim_{t\to 1} \frac{-4}{t} \times \frac{\ln t}{t-1} = -4$ car $\lim_{t\to 1} \frac{\ln t}{t-1} = 1$

$\frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to -1^+} \left(1+e^{-x}\right) = 1+e$

$\frac{f(x)-f(-1)}{x+1} \neq \lim_{x\to -1^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$ donc

n'est pas dérivable en -1.

prétation graphique

(C) admet au point de coordonnées (-1;0) une demi tangente à gauche de coefficient directeur -4 une demi tangente à droite de coefficient directeur 1+e

Calculons les limites de f aux de son domaine de finition. f est définie sur $\mathbb{R}$

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{-4\ln(-x)}{x} = \lim_{t\to +\infty} \frac{4\ln t}{t} = 0$ $\boxed{\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0}$

$\lim_{x\to +\infty} (x+1)\left(1+e^{-x}\right) = +\infty$ car $\lim_{x\to +\infty} e^{-x} = 0$

$\boxed{\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty}$

mptotes

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$ donc

droite d'quation y = 0 (axe des abscisses) est asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$

Montrons que (D) : y = x + 1 est asymptote à (C).

$\lim_{x\to +\infty} [f(x)-(x+1)] = \lim_{x\to +\infty} (x+1)e^{-x} = \lim_{x\to +\infty} xe^{-x} + e^{-x}$

$= 0$ car $\lim_{x\to +\infty} xe^{-x} = 0$ et $\lim_{x\to +\infty} e^{-x} = 0$

la droite (D) est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$

dions la position relative de (C) et de (D) sur ntervalle $[-1;+\infty[$. $\forall x \in [-1;+\infty[, f(x)-(x+1) = (x+1)e^{-x}$ o

$x \in [-1;+\infty[, x+1 \geq 0$ et $e^{-x} > 0$ donc

$f(x) \geq x+1$ et par suite (C) est située au dessus de (D) sur $[-;+\infty[$

a) Vérifions que pour x<-1, $f'(x) = \frac{4\left[\ln(-x)-1\right]}{x^2}$

$\forall x \in]-\infty;-1[, f'(x) = -4\frac{\frac{1}{x}\times x - \ln(-x)}{x^2} = \frac{4\left[\ln(-x)-1\right]}{x^2}$

D'où $\boxed{\forall x < -1 \quad f'(x) = \frac{4\left[\ln(-x)-1\right]}{x^2}}$

b) Etudions les variations de f sur $]-\infty;-1[$, puis sur $[-1;+\infty[$ et dressons le tableau de variations de f

$\forall x < -1, f'(x) = \frac{4\left[\ln(-x)-1\right]}{x^2}$, le signe de $f'(x)$ est celui de $4\left[\ln(-x)-1\right]$ or $\ln(-)-1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln(-x) \geq 1 \Leftrightarrow -x \geq e \Leftrightarrow x \leq -e$ donc

$\boxed{\begin{array}{l}\forall x \in]-\infty,-e], f'(x) \geq 0 \text{ et } f \text{ est croissante sur }]-\infty,-e] \\ \forall \in x[-e,-1[, f'(x) \leq 0 \text{ et } f \text{ est décroissnate sur } [-e,-1[\end{array}}$

$\forall x \in [-1;+\infty[, f'(x) = 1+e^{-x}-e^{-x}(x+1) = 1-xe^{-x}$ or

$\forall x \in [-1;+\infty[, 1-xe^{-x} = u(x) > 0$ donc $f'(x) > 0$ par suite

$\boxed{f \text{ est croissante sur } [-1;+\infty[}$

Tableau de variation

x	$-\infty$		$-e$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{4}{e}$	↘	0	↗	$+\infty$

c) Montrons qu'il existe un unique point de (C) d'abscisse supérieur à -1 où la tangente (T) est parallèle à (D).

$(T) \parallel (D)$ et $x > -1 \Leftrightarrow f'(x) = 1$ et $x > -1$

$\Leftrightarrow 1-xe^{-x} = 1 \Leftrightarrow x = 0$

Donc l'unique point est de coordonnées (0 ;2)

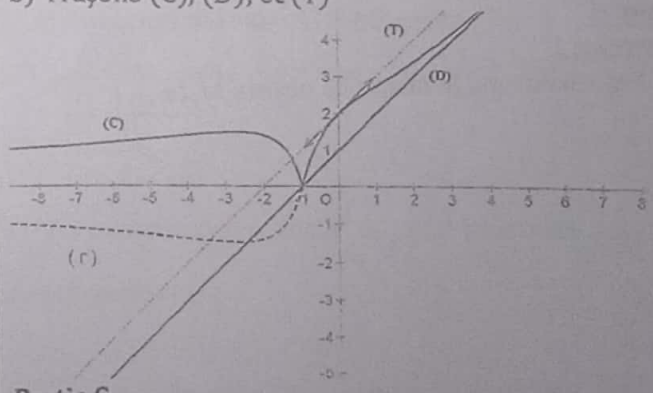
3) a) Montrons que (C) est située au dessus de (Ox).

$\forall x < -1, \ -x > 1, \ \ln(-x) > 0, \ \frac{-4}{x} > 0$ donc

$-\frac{4\ln(-x)}{x} > 0, \forall x < -1 \ \forall x \geq -1, \ x+1 \geq 0, \ 1+e^{-x} > 0$ donc

$\forall x \in [-1;+\infty[, (x+1)\left(1+e^{-x}\right) \geq 0$ Ainsi pour tout x réel, $f(x) > 0$ d'où $\boxed{(C) \text{ est située au dessus de (Ox)}}$

b) Traçons (C), (D), et (T)



Partie C

Scanned by CamScanner

1) a) Calculons I et $J(\alpha)$

$$I=\int_{-e}^{-1}\frac{\ln(-x)}{x}dx=\int_{-e}^{-1}\frac{1}{x}\times\ln(-x)dx=\left[\frac{1}{2}\ln^2(-x)\right]_{-e}^{-1}=-\frac{1}{2}$$

$$\boxed{I=-\frac{1}{2}}$$

$J(\lambda)=\int_{-1}^{\lambda}(x+1)e^{-x}dx$. Intégrons par parties.

Posons u(x) = x + 1 et v'(x) = e^{-x} on a u'(x) = 1 et v(x) = $-e^{-x}$ Ainsi

$$J(\lambda)=\left[-(x+1)e^{-x}\right]_{-1}^{\lambda}+\int_{-1}^{\lambda}e^{-x}dx$$

$$=\left[-(x+1)e^{-x}\right]_{-1}^{\lambda}+\left[-e^{-x}\right]_{-1}^{\lambda}=-(\lambda+1)e^{-\lambda}-e^{-\lambda}+e$$

D'où $\boxed{J(\lambda)=-(\lambda+2)e^{-\lambda}+e}$

b) Calculons l'aire $A(\lambda)$ en cm^2

$$A(\lambda)=4\left[\int_{-e}^{-1}f(x)dx+\int_{-1}^{\lambda}\left[f(x)-(x+1)\right]dx\right]$$

$$=4\left[\int_{-e}^{-1}-\frac{4\ln(-x)}{x}dx+\int_{-1}^{\lambda}(x+1)e^{-x}dx\right]=4\left[-4I+J(\lambda)\right]$$

$\boxed{A(\lambda)=8+4e-4(\lambda+2)^2e^{-\lambda}cm^2}$

2) Limite de $A(\lambda)$

$\lim\limits_{\lambda\to+\infty}A(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left(8+4e-4(\lambda+2)e^{-\lambda}\right)=8+4e$ car

$\lim\limits_{\lambda\to+\infty}(\lambda+2)e^{-\lambda}=0$; $\boxed{\lim\limits_{\lambda\to+\infty}A(\lambda)=8+4e}$

Partie D

Soit $(\Gamma):\begin{cases}x(t)=-e^{-t}\\y(t)=4te^{t}\end{cases}(t<0)$

1) Montrons que (Γ) est l'image d'une partie de © par la symétrie orthogonale d'axe (Ox).

$t<0\Leftrightarrow -t>0\Leftrightarrow e^{-t}>1\Leftrightarrow -e^{-t}<-1$

donc x<-1 $x(t)=-e^{-t}\Leftrightarrow t=-\ln(-x)$ d'où

$$y(t)=4te^{t}\Leftrightarrow y=-4\ln(-x)\times\frac{1}{-x}=\frac{4\ln(-x)}{x}=-f(x)$$

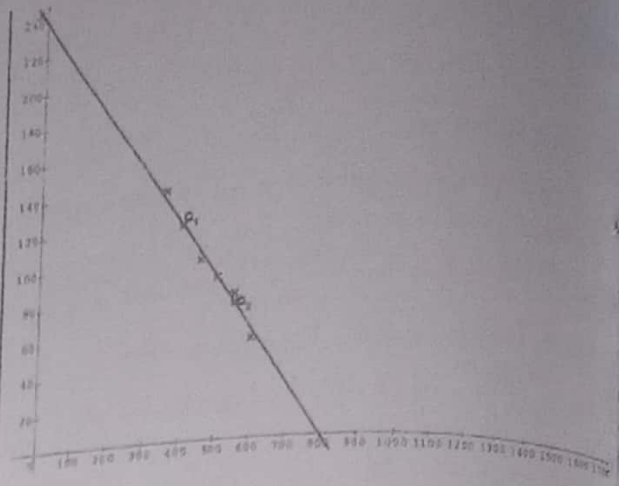
Ainsi $\begin{cases}y=-f(x)\\x<-1\end{cases}$ d'où la courbe (Γ) est le symétrique de la courbe (C) restreinte à $]-\infty;-1[$

2) Construction de (Γ) (voir figure)

Sujet 6

Exercice 1

1) Représentons le nuage de points $M_i(x_i,y_i)$



2)a) Calculons les coordonnées de G_1 et G_2

$$\bar{x}_1=\frac{350+400+450}{3}=400$$

$$\bar{y}_1=\frac{140+120+100}{3}=120$$

D'où $\boxed{G_1(400;120)}$

$$\bar{x}_2=\frac{500+550+600}{3}=550$$

$$\bar{y}_2=\frac{90+80+55}{3}=75$$

D'où $\boxed{G_2(550;75)}$

b) Plaçons les G_1 et G_2 sur la figure et traçons (G_1G_2).

2) Déterminons une équation de forme $y=mx+p$ de la droite (G_1G_2).

On a : $\begin{cases}120=400m+p\\75=550m+p\end{cases}$

En résolvant le système on obtient $\boxed{m=-0,3 \text{ et } p=240}$ d'où $\boxed{(G_1G_2):y=-0,3x+240}$

3) a) on a x = 650 donc $y=-0,3\times650+240=45$ par suit

$\boxed{45}$ personnes sont des acheteurs potentiels des chaussures vendues à 650 francs.

b) on a y = 150 donc $-0,3x+240=150\Leftrightarrow x=300$ par suite $\boxed{300 \text{ francs}}$ est le prix du modèle de chaussures dont le nombre d'acheteurs potentiels est 150.

Exercice 2

1)a) Exprimons z_1 et a^2 sous forme algébrique

$$z_1=z\omega_0=\left(\frac{\sqrt{3}+1}{4}+\frac{i\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}\right)(6+6i)\quad\boxed{z_1=3+i3\sqrt{3}}$$

$$a^2=\left(\frac{\sqrt{3}+1}{4}+\frac{i\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}\right)^2\quad\boxed{a^2=\frac{\sqrt{3}}{4}+i\frac{1}{4}}$$

Ecrivons z_1 sous forme exponentielle

Scanned by CamScanner

a $|z_1|=6$ donc $z_1=6\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=6\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ d'où

$z_1=6e^{i\frac{\pi}{3}}$

ontrons que $a^2=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$.

a $|a^2|=\frac{1}{2}$ alors $a^2=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ d'où

$a^2=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$

Exprimons z_3 et z_7 en fonction de z_1 et a^2

$=a^3z_0=a^2\times az_0=a^2z_1$ Ainsi $\boxed{z_3=a^2z_1}$

$=a^7z_0=a^6\times az_0=\left(a^2\right)^3z_1$ Ainsi $\boxed{z_7=\left(a^2\right)^3z_1}$

éduisons l'expression de z_3 et z_7 sous frome ponentielle.

$=a^2z_1=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}\times6e^{i\frac{\pi}{3}}=3e^{i\frac{\pi}{2}}$ Donc $\boxed{z_3=3e^{i\frac{\pi}{2}}}$

$=\left(a^2\right)^3z_1=\left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^2\times6e^{i\frac{\pi}{6}}=\frac{3}{4}e^{i\frac{5\pi}{6}}$ Donc $\boxed{z_7=\frac{3}{4}e^{i\frac{5\pi}{6}}}$

) a) Montrons que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $r_n=12\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}$

Pour tout n entier naturel,

$r_n=|z_n|\Leftrightarrow r_n=\left|a^nz_0\right|=\left|a^n\right|\times|z_0|$

n a $|a^2|=\frac{1}{2}$ donc $|a|=\frac{\sqrt{2}}{2}$. On a aussi $|z_0|=6\sqrt{2}$

insi $r_n=\left|a^n\right|\times|z_0|\Leftrightarrow r_n=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\times6\sqrt{2}=12\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$

uit

où $\boxed{r_n=12\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}}$

Déduisons que la suite (r_n) est une suite métrique.

méthode

r tout $n\in\mathbb{N}$, $\frac{r_{n+1}}{r_n}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc (r_n) est une suite métrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de premier me $r_0=6\sqrt{2}$.

méthode

Pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$r_n=12\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}=6\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n=r_0\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$ ainsi r_n est de forme $r_n=q^nr_0$ terme général d'une suite géométrique d'où (r_n) est un suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de premier terme $r_0=6\sqrt{2}$.

c) Déterminons la limite de suite (r_n)

$\lim\limits_{n\to+\infty}r_n=\lim\limits_{n\to+\infty}12\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}=0$ car $0<\frac{\sqrt{2}}{2}<1$

Interprétation géométrique du résultat

On a $r_n=|z_n|=OA_n$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}r_n=0$ traduit le fait que les points A_n convergent vers le point O, origine du repère.

Problème

Partie A

1)a) Ensemble de définition de f

$f(x)$ existe lorsque $1+e^x\neq0$ soit $e^x\neq-1$ ce qui pour tout réel x. Donc $\boxed{D_f=\mathbb{R}}$

b) limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+e^x\right)=1$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0}$

Posons $X=e^x$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}X=\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ par suite

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{X}{1+X}=\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{X}{X}=1$ d'où $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1}$

2) sens de variation de f

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=\frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}$.

On a pour tout $x\in\mathbb{R}$, $e^x>0$ et $\left(1+e^x\right)^2>0$ donc $f'(x)>0$ d'où f est croissante sur $\mathbb{R}$

Tableau de variation de f

x	$-\infty$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	0 ↗ 1

3) a) Equation réduite de la tangente (T).

$(T):y=f'(0)(x-0)+f(0)$ On a $f'(0)=\frac{1}{4}$ et $f(0)=\frac{1}{2}$ Ainsi

(T) : $\boxed{y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}}$

b) Montrons que le point $A\left(0;\frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie pour (C).

Scanned by CamScanner

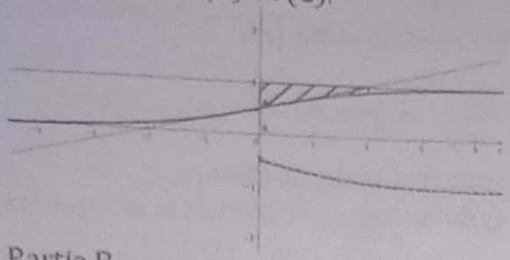
$\forall x \in \mathbb{R}$ alors $-x \in \mathbb{R}$ Donc

$f(x)+f(2\times 0-x)=f(x)+f(-x)$

$$=\frac{e^x}{1+e^x}+\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}=1=2\times\frac{1}{2}$$

Ainsi le point $A\left(0;\frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie pour (C).

4) Traçons de (T) et (C).



Partie B

1) hachurons le domaine D_2 (voir le graphique).

2) Montrons que $A_n=n+\ln 2-\ln\left(1+e^n\right)$.

$A_n=\int_0^n(1-f(x))dx=\int_0^n\left(1-\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx$ car $f(x)<1$

$A_n=\left[x-\ln\left(1+e^x\right)\right]_0^n=n+\ln 2-\ln\left(1+e^x\right)$ D'où

$$\boxed{A_n=n+\ln 2-\ln\left(1+e^n\right)}$$

3) limite A_n

$$\begin{aligned}A_n&=n+\ln 2-\ln(1+e^n)=n+\ln 2-\ln\left[e^n\left(1+e^{-n}\right)\right]\\&=n+\ln 2-\ln e^n-\ln\left(1+e^{-n}\right)\\&=n+\ln 2-n-\ln\left(1+e^{-n}\right)\\&=\ln 2-\ln\left(1+e^{-n}\right)\end{aligned}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}A_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\ln 2-\ln\left(1+e^{-n}\right)=\ln 2$ Car $\lim\limits_{n\to+\infty}e^{-n}=0$

D'où $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}A_n=\ln 2}$

Partie C

1) Déterminons les réels a et b.

$\frac{ae^x}{1+e^x}+\frac{be^x}{\left(1+e^x\right)^2}=\frac{ae^{2x}+(a+b)e^x}{\left(1+e^x\right)}=\frac{e^{2x}}{\left(1+e^x\right)^2}$ Par

identification on obtient $\begin{cases}a=1\\a+b=1\end{cases}\Leftrightarrow\boxed{\begin{cases}a=1\\b=-1\end{cases}}$

2) a) Calculons $V(\alpha)$ en fonction de α

$V(\alpha)=\pi\int_{\ln 2}^{0}(f(x))^2dx=\pi\int_{\alpha}^{0}\frac{e^{2x}}{\left(1+e^x\right)^2}dx$

$=\pi\int_{\alpha}^{0}\left[\frac{e^x}{1+e^x}-\frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}\right]dx=\pi\left[\ln\left(1+e^x\right)+\frac{1}{1+e^x}\right]_{\alpha}^{0}$ D'où

$=\pi\left(\ln 2+\frac{1}{2}-\frac{1}{1+e^{\alpha}}-\ln\left(1+e^{\alpha}\right)\right)$

$$\boxed{V(\alpha)=\ln 2+\frac{1}{2}-\frac{1}{1+e^{\alpha}}-\ln\left(1+e^{\alpha}\right)}$$

b) Limite de $V(\alpha)$

$\lim\limits_{\alpha\to-\infty}e^{\alpha}=0$ donc $\lim\limits_{\alpha\to-\infty}V(\alpha)=\pi\left(\ln 2+\frac{1}{2}-1\right)$ Ainsi

$$\boxed{\lim_{\alpha\to-\infty}V(\alpha)=\frac{\pi}{2}(2\ln 2-1)}$$

Partie D

1) Equation cartésienne de (Γ)

$\forall t\geq 1,\ x(t)\geq 0$ donc $\begin{cases}x(t)=\ln(t)\\y(t)=\frac{1}{1+t}-1\end{cases},t\geq 1$ Donne

$\begin{cases}t=e^x \text{ et } x\geq 0\\y=\frac{1}{1+e^x}-1=-\frac{e^x}{1+e^x}\end{cases}$

Par suite $y=\frac{-e^x}{1+e^x}$ aver $x\geq 0$ est l'équation cartésienne de (Γ).

2) Construction de (Γ)

On a $y=-\frac{e^x}{1+e^x}=-f(x)$ avec $x\geq 0$ donc on en déduit que (Γ) est le symétrique par rapport à l'axe des abscisses de la portion de (C) sur $[0;+\infty[$. (Γ) est en pointillé sur le graphique précédent.

Sujet 7

Exercice 1

1) Calcul de I_0 et de I_0+I_1

$I_0=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\left[\ln\left(1+x\right)\right]_0^1=\ln 2$ Donc $\boxed{I_0=\ln 2}$

$I_0+I_1=\int_0^1\frac{1+x}{1+x}dx=\int_0^1dx=1$ Donc $\boxed{I_0+I_1=1}$

Déduisons I_1

$I_0+I_1=1\Leftrightarrow I_1=1-I_0$ soit $\boxed{I_1=1-\ln 2}$

2) Calcul de I_n+I_{n+1} en fonction de n

$I_n+I_{n+1}=\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx+\int_0^1\frac{x^{n+1}}{1+x}dx=\int_0^1\left(\frac{x^n}{1+x}+\frac{x^{n+1}}{1+x}\right)dx$

$=\int_0^1\frac{x^n(1+x)}{1+x}dx=\int_0^1x^ndx=\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}$

D'où $\boxed{I_n+I_{n+1}=\frac{1}{n+1}}$

Scanned by CamScanner

Montrons que la suite (I_n) est décroissante

$-I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx = \int_0^1 \frac{x^n(1-x)}{1+x}dx$

tout $x \in [0;1]$, $x^n \geq 0$, $x+1>0$ et $x-1<0$ donc

$\frac{x-1}{x} \leq 0$ par suite $\int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x}dx \leq 0$ c'est à dire $I_{n+1} - I_n \leq 0$

la suite (I_n) est décroissante.

trons que I_n est positive.

tout $x \in [0;1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{x^n}{1+x} \geq 0$ donc

$\int \frac{x^n}{1+x}dx \geq 0$ c'est-à-dire I_n est positive.

ontrons que $I_n \leq \frac{1}{n+1}$ pour tout entier naturel n.

tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \leq I_n + I_{n+1}$ car la suite (I_n) est

ive ; donc $\boxed{I_n \leq \frac{1}{n+1}}$ (car $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}$).

duisons la convergence de (I_n)

te (I_n) est décroissante et minorée par 0 (car

ve) donc (I_n) est convergente.

ut entier naturel n, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ or $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$.

uit que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0}$

xercice 2

) Démontrons que ABCD est un parallélogramme

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}$. Comme $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ alors ABCD est

élogramme.

alculons les coordonnées de E.

$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}$ On a aussi $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}x_E-3\\y_E-2\\z_E-4\end{pmatrix}$ donc après

on obtient $\boxed{E(2;-2;5)}$

alculons l'aire A en cm² du parallélogramme ABCD.

$\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\| = 9\sqrt{2}$; $\boxed{A = 9\sqrt{2}cm^2}$

alculons le volume V en cm³ du prisme de base

et de hauteur $[AE]$

$\left|\overrightarrow{AE}\right| \times \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\| = 3\sqrt{2} \times 9\sqrt{2} = 54$; $\boxed{V = 54cm^3}$

rifions si F appartient à la droite (AB).

$\overrightarrow{FB}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FA} \wedge \overrightarrow{FB}\begin{pmatrix}-1\\-5\\2\end{pmatrix}$ On a $\overrightarrow{FA} \wedge \overrightarrow{FB} \neq \vec{o}$ on en

que F n'appartient à la droite (AB).

me

A

1) Limites de f en 0 et en $+\infty$

$\lim_{x\to0^+}\left(2-\frac{2}{x}\right) = -\infty$ et $\lim_{x\to0^+}(\ln x - 1)) = +\infty$

donc $\boxed{\lim_{x\to0^+} f(x) = -\infty}$

$\lim_{x\to+\infty}\left(2-\frac{2}{x}\right) = 2$ et $\lim_{x\to+\infty}(\ln x - 1) = +\infty$ Donc $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

2) Dérivabilité de f sur $]0;+\infty[$

La fonction $x \mapsto \left(2-\frac{2}{x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ donc sur

$]0;+\infty[$; la fonction $x \mapsto (\ln x - 1)$ est dérivable sur $]0;+\infty[$.

Par suite f est le produit de fonctions dérivables sur

$]0;+\infty[$ donc f y est dérivable.

Calculons la dérivée de f.

Pour tout $x>0$, $\boxed{f'(x) = \frac{2\ln x + 2x - 4}{x^2}}$

3) a) Etudions le sens de variations de g.

g est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x \in]0;+\infty[$,

$g'(x) = \frac{2}{x} + 2$

pour tout x>0, g'(x)>0 donc g est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Tableau de variation de g.

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to0^+} g(x) = -\infty$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

b) Existence et unicité d'une solution unique de l'équation g(x) = 0 dans $[1;2]$.

g est continue (car dérivable) et strictement croissance sur $]0;+\infty[$ donc réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur

$\left]\lim_{x\to0^+} g(x), \lim_{x\to+\infty} g(x)\right[= \mathbb{R}$ par suite l'équation g(x) = 0

admet une unique solution α dans $]0;+\infty[$. De plus $g(1)\times g(2) = -4\ln 2 < 0$. Donc l'équation g(x) = 0 admet une unique solution α appartenant à l'intervalle $[1;2]$.

c) Déduisons le signe de g sur $]0;+\infty[$.

g est croissante sur $]0;+\infty[$ et $g(\alpha) = 0$ donc pour tout $x \in]0;\alpha[, g(x) < 0$ et $x \in]\alpha;+\infty[, g(x) > 0$

4) a) Sens de variations et tableau de variation de f.

On a $\forall x \in]0;+\infty[, f'(x) = \frac{2\ln x + 2x - 4}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$ donc pour tout réel x>0, $f'(x)$ a le même signe que g(x). Ainsi $\forall x \in]0;\alpha], f'(x) \leq 0$ et $\forall x \in [\alpha;+\infty[, f'(x) \geq 0$ d'où f est décroissante sur $]0;\alpha]$ et croissante sur $[\alpha;+\infty[$.

Scanned by CamScanner

Tableau de variation de f

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$

b) Montrons que $f(\alpha)=\dfrac{-2(\alpha-1)^2}{\alpha}$.

$f(\alpha)=\left(2-\dfrac{2}{\alpha}\right)(\ln\alpha-1)=\left(\dfrac{2\alpha-2}{\alpha}\right)(\ln\alpha-1)$.

Or $g(\alpha)=0 \Leftrightarrow 2\ln\alpha+2\alpha-4=0 \Leftrightarrow \ln\alpha=2-\alpha$ donc

$f(\alpha)=\left(\dfrac{2\alpha-2}{\alpha}\right)(2-\alpha-1)=\dfrac{-2(\alpha-1)^2}{\alpha}$ d'où $\boxed{f(\alpha)=\dfrac{-2(\alpha-1)^2}{\alpha}}$

c) Calcul de $f(1)$ et $f(e)$.

$f(1)=\left(2-\dfrac{2}{1}\right)(\ln 1-1)=0$ et $f(e)=\left(2-\dfrac{2}{e}\right)(\ln e-1)=0$

Donc $\boxed{f(1)=0 \text{ et } f(e)=0}$

5) a) Signe de f sur $]0;+\infty[$

f est décroissante sur $]0;\alpha]$ et croissante sur $[\alpha;+\infty[$ donc $f(\alpha)$ est le minimum absolu de f sur $]0;+\infty[$. De plus $f(1)=f(e)=0$ et $f(\alpha)<0$ donc

$\boxed{\begin{array}{l}\forall x\in]0;1]\cup[e;+\infty[,\ f(x)\geq 0\\ \forall x\in[1;e],\ f(x)\leq 0\end{array}}$

b) Calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

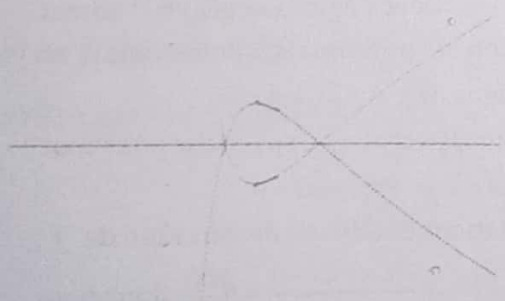
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(2-\dfrac{2}{x}\right)\left(\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{1}{x}\right)\right]=0$ car

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\dfrac{2}{x}\right)=2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$

Interprétation du résultat obtenu.

La courbe (C) de f admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

c) Construction de (C).



6) Justification de la construction de (C')

$h(x)=-f(x)$ et $D_h=]0;+\infty[$ donc (C) et (C') sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses,

Partie B

1) a) Par définition, F est la primitive de f sur $]0;+\infty[$ qui s'annule en 1.

b) sens de variation de F.

pour tout x>0, $F'(x)=f(x)$ donc d'après la partie A 5-a) on a F est croissante sur $]0;1]$ et sur $[e;+\infty[$

F est décroissante sur $[1;e]$.

c) D'après 4-c) de la partie A $f(1)=0$ et $f(e)=0$ c'est-à-dire F'(1) = 0 et F€ = 0 donc les tangentes aux points d'abscisses 1 et e à (C') sont horizontales.

2) a) Calcul de $\int_1^x \ln t\,dt$

Posons $u(t)=\ln t$ et $v'(t)=1$ on a $u'(t)=\dfrac{1}{t}$ et $v(t)=t$ par suite $\int_1^x \ln t\,dt=[t\ln t]_1^x-\int_1^x dt=x\ln x-x+1$ d'où

$\boxed{\int_1^x \ln t\,dt=x\ln x-x+1}$

b) Montrons que pour tout x>0,

$f(x)=2\ln x-2\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{2}{x}-2$

$f(x)=\left(2-\dfrac{2}{x}\right)(\ln x-1)=2\ln x-\dfrac{2}{x}\ln x+\dfrac{2}{x}-2$

c) Déduisons l'expression de F(x).

$F(x)=\int_1^x f(t)dt=\int_1^x\left(2\ln x-\dfrac{2}{x}\ln x+\dfrac{2}{x}-2\right)dt$

$\boxed{F(x)=2x\ln x+2\ln x-\ln^2 x-4x+4}$

3) Calculons l'aire A.

$A=4cm^2\times\int_1^e\left(h(x)-f(x)\right)dx=-8cm^2\times\int_1^e f(x)dx$

$=-8cm^2\left[F(x)\right]_1^e$

$\boxed{A=(16e-40)cm^2}$

sujet 8 Sujet BAC 2012(1er tour)

Exercice 1

1. $(E_1): y''+(2)^2 y=0$ donc l'ensemble des solutions de (E_1) sont les fonctions définies sur IR par $x\mapsto A\cos 2x+B\sin 2x$ avec A et B des réels. Celle cherchée est la fonction f définie sur IR par $\boxed{f(x)=-2\cos 2x}$ car elle vérifie les conditions $f(0)=-2$ et $f'(0)=0$.

2. Les fonctions solutions de (E_2) sont définie pour tout réel x par $x\mapsto A\cos x+B\sin x$ avec A et B réels. La solution g de (E_2) vérifiant les conditions initiales $g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)-1$ et $g'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$ est définie sur IR par $\boxed{g(x)=\cos x-\sin x}$.

Scanned by CamScanner

) La période commune de x et y est $\boxed{2\pi}$. Comparons
osition de M(t) et $M(t+\pi)$ $\begin{cases} x(t+\pi)=x(t) \\ y(t+\pi)=-y(t) \end{cases}$, donc les
nts M(t) et $M(t+\pi)$ sont symétriques par rapport à
e des abscisses. La période commune étant 2π on
obtenir toute la courbe en faisant varier t sur un
ervalle d'amplitude 2π prenons l'intervalle $[-\pi;\pi]$.
lus la courbe étant symétrique par rapport à l'axe
abscisses on peut réduire le domaine d'étude sur
ervalle $[0;\pi]$.

tude de x et y sur $[0;\pi]$

ations de x
$=-2\cos 2t$ et $x'(t)=4\sin 2t$.

$[0;\pi]$, $\sin 2t=0 \Leftrightarrow t=\frac{\pi}{2}$, $t=0$, $t=\pi$ on a

$\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, $x'(t)\geq 0$ donc x est croissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

$\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$, $x'(t)\leq 0$ Donc x est décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$

ons de y

$\cos t-\sin t$ et $y'(t)=-(\sin t+\cos t)=-\sqrt{2}sos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)$.

$(t)=0 \Leftrightarrow t=\frac{3\pi}{4}$ par suite

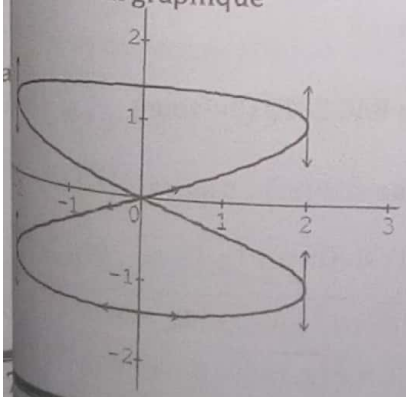
$\left[0;\frac{3\pi}{4}\right]$; $y'(t)\leq 0$ donc y est décroissante sur $\left[0;\frac{3\pi}{4}\right]$.

$\left[\frac{3}{4};\right]$; $y'(t)\geq 0$ donc y est croissante sur $\left[\frac{3\pi}{4};\pi\right]$

de variations de x et y

	$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
	+	0	−	−4	− 0
	2	↘	0	↘	−2
	−2	↗	−1	↗	−1
	−1	↘	$-\sqrt{2}$	↗	1
	−1	−	−1	+	1

ésentation graphique



Exercice 2

1.Soit r la raison de la progression arithmétique, alors $p_3=p_4-r$; $p_2=p_1-r$; $p_4=p_1-3r$ or

$p_1+p_2+p_3+p_4=1$ donc $r=\frac{4p_4-1}{6}=\frac{1,6-1}{6}=0,1$ par suite

$\boxed{p_1=0,1}$, $\boxed{p_2=0,2}$; $\boxed{p_3=0,3}$

2. a) Les lancers étant deux à deux indépendants, la probabilité d'obtenir dans l'ordre croissant les nombres 1, 2, 4 est $p_1\times p_2\times p_4$ soit $\boxed{0,003}$

b) Les différentes possibilités sont : 1,2,3 ; 1,2,4 ; 1,3,4. Donc la probabilité cherché est

$p_1\times p_2\times p_3+p_1\times p_2\times p_4+p_2\times p_3\times p_4$ soit $\boxed{0,05}$ 3. X suit une loi binomiale de paramètres n = 10 et $p=p_4=0,4$

a) Pour tout i tel que $0\leq i\leq 10$,

$\boxed{p(X=i)=C_{10}^{i}(0,4)^{i}(0,6)^{10-i}}$

b) L'espérance mathématique de X est

$\boxed{E(X)=np=10\times 0,4=4}$. Cela signifie qu'en moyenne, en lançant dix fois le dé on obtiendra 4 fois la face numérotée 4.

c) $P(X\geq 1)=1-p(X=0)=1-(0,6)^{10}$; $\boxed{P(X\geq 1)=0,994}$

3.a) Soit n un entier naturel non nul. On obtient 4 pour la première fois au n^{ième} lancer si, et seulement si on ne l'a pas obtenu aux éventuels lancers précédents et qu'on l'a obtenu au n^{ième}. Comme les lancers sont indépendants, $\boxed{u_n=(0,6)^{n-1}\times 0,4}$. La suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,6. Comme 0,6<1 alors la suite (u_n) converge vers 0.

b) S_n est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison 0,6 et de premier terme $u_1=0,4$ donc

$S_n=u_1\times\frac{1-(0,6)^n}{1-0,6}=0,4\times\frac{1-(0,6)^n}{1-0,6}=1-(0,6)^n$. Comme 0,6<1 alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(0,6)^n=0$ d'où $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=1}$

c) $S_n\geq 0,999\Leftrightarrow 1-(0,6)^n\geq 0,999$ on trouve $n\geq 13,529$

$\boxed{\text{La plus petite valeur recherchée de n est 14}}$

Problème

Partie A

1.Calculons les limites de f aux bornes de $\mathbb{R}/\{1\}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{1-x}=-1$;

$\lim\limits_{x\to-\infty}1-x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1-x)}{1-x}=0$ donc

$\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-1}$

$\lim\limits_{x\to1^-}\left(x+\ln|1-x|\right)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^-}(1-x)=0^+$ donc

$\boxed{\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=-\infty}$

Scanned by CamScanner

$\lim_{x\to 1}\left(x+\ln|1-x|\right)=-\infty$ et $\lim_{x\to 1^-}(1-x)=0$ donc

$\boxed{\lim_{x\to 1^-} f(x)=+\infty}$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1-x}=-1$; $\lim_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ donc

$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=-1}$

On a $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-1$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-1$ donc la droite d'équation y = -1 est une asymptote à (C). De même $\lim_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$ donc la droite d'équation x = 1 est une asymptote à (C)..

2. f est dérivable sur $\mathbb{R}/\{1\}$ et pour tout x de $\mathbb{R}/\{1\}$,

$f'(x)=\frac{\ln|1-x|}{(1-x)^2}$

Etudions le signe de $f'(x)$

Pour tout x de $\mathbb{R}/\{1\}$, $(1-x)^2>0$ donc le signe $f'(x)$ est celui de $\ln|1-x|$. On a $f'(0)=0$ et $f'(2)=0$ par suite $\forall x\in]-\infty;0]\cup[2;+\infty[$, $f'(x)\geq 0$; $\forall x\in[0;1[\cup]1;2]$, $f'(x)\leq 0$.

En conséquence f est strictement croissante sur $]-\infty;0]$ et sur $[2;+\infty[$; f est strictement décroissante sur $[0;1[$ et sur $]1;2]$

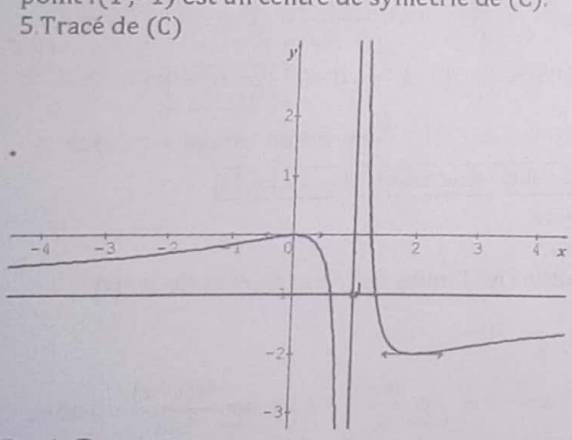
1. Dressons le tableau de variation de f

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	0	↘	‖	↘	-1	↗	
	-1				$+\infty$				$-\infty$

4. Montrons que I (; -1) est un centre de symétrie de (C).

$\forall x\in\mathbb{R}/\{1\}, (2-x)\in\mathbb{R}/\{1\}$ et $f(2-x)+f(x)=-2$ donc le point I(1 ; -1) est un centre de symétrie de (C).

5.Tracé de (C)



Partie B

1.Une primitive de u sur $]1;+\infty[$ est la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par : $x\mapsto\ln(x-1)$. Une primitive de v sur $]1;+\infty[$ est la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par : $x\mapsto\frac{1}{2}\ln^2(x-1)$

2. Pour tout réel x>1, $u(x)+v(x)=\frac{1+\ln(x-1)}{x-1}$ et $-1-f(x)=\frac{1+\ln(x-1)}{x-1}$. Ona bien l'égalité

$\boxed{u(x)+v(x)=-1-f(x)}$

3. $S=4\int_2^3\left(-1-f(x)\right)dx\,cm^2$ car la droite d'équation y = -1 est au dessus de (C) sur $[2;3]$.

$S=4\int_2^3\left(u(x)+v(x)\right)dx=4\left[\ln(x-1)+\frac{1}{2}\ln^2(x-1)\right]_2^3$

$=\left(4\ln 2+\frac{1}{2}\ln^2 2\right)cm^2$

Partie C

1.Montrons par récurrence que $3<u_n<4$ pour $n\geq 1$

On a $u_1=4-e^{-1}$ or $2<e<3$ donc $-\frac{1}{2}<-e^{-1}<-\frac{1}{3}$ et $\frac{7}{2}<u_1<\frac{11}{3}$ on en déduit que $3<u_1<4$

Supposons que $3<u_n<4$ et démontrons que $3<u_{n+1}<4$

On a $3<u_n<4$ donc $4-e^{-3}<4-e^{-u_n}<4-e^{-4}$ soit $4-e^{-3}<u_{n+1}<4-e^{-4}$ et $3<u_{n+1}<4$. On peut ainsi conclure que pour tout $n\geq 1$ $3<u_n<4$

2.a) pour tout $n\geq 1$, $u_{n+1}-u_n=e^{-u^{n-1}}-e^{-u_n}$

- Supposons $u_n-u_{n-1}>0$, c'est-à-dire $u_{n-1}<u_n$ alors

on aura $-u_{n-1}>-u_n$ et $e^{-u_{n-1}}>e^{-u_n}$ soit $u_{n+1}-u_n>0$

- Supposons $u_n-u_{n-1}<0$ c'est-à-dire $u_n<u_{n-1}$ on aura $-u_n>-u_{n-1}$ et $e^{-u_n}>e^{-u_{n-1}}$ soit $u_{n+1}-u_n<0$. En conclusion $u_{n+1}-u_n$ et u_n-u_{n-1} ont le même signe.

b) Comme $u_1-u_0>0$ car $3-e^{-1}>0$, d'après 2. a) on a $u_n-u_{n-1}>0$ soit $u_{n-1}<u_n$ et donc la suite (u_n) est croissante.

3. Etudions la convergence de la suite (u_n).

D'après 2. b) la suite (u_n) est croissante. D'après 1. la suite (u_n) est majorée par 4. On en déduit que suite (u_n) est convergente

sujet 9 Sujet du BAC 2012 (2nd tour)

Exercice 1

1.a) Montrons que si $P(z_0)=0$ alors $P(\overline{z_0})=0$

Supposons $P(z_0)=0$. On a $P(\overline{z_0})=\overline{z_0}^3-6\overline{z_0}^2+12\overline{z_0}-16$ or

$\overline{z_0}^3-6\overline{z_0}^2+12\overline{z_0}-16=\overline{z_0^3-6z_0^2+12z_0-16}$

$=\overline{P(z_0)}=\overline{0}=0$

ar suite $P(\overline{z_0})=0$ d'où

) Calculons $P(1+i\sqrt{3})$

$P(1+i\sqrt{3})=(1+i\sqrt{3})^3-6$

$=(1-9-6+18+12$

$=0$

'où $\boxed{P(1+i\sqrt{3})=0}$

actorisons P(z)

'après 1.a) $1-i\sqrt{3}$ est aus

existe deux nombres cor

ue $P(z)=(z-1-i\sqrt{3})(z-1$

uclidienne on obtient

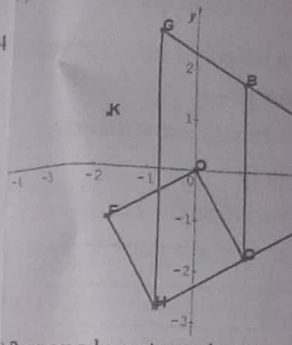
$(z)=(z-1-i\sqrt{3})(z-1+i\sqrt{3})$

) Déduisons les solutions d

$(z)=0\Leftrightarrow z=1+i\sqrt{3}$ ou $z=1-$

$=\{1+i\sqrt{3},1-i\sqrt{3},4\}$

a)



) Donnons la nature du triang

$B=|-3+i\sqrt{3}|=2\sqrt{3}$; $AC=|-3-i\sqrt{3}$

$AB=AC=BC$ donc ABC est u

) Déterminons les affixes re

$=e^{i\frac{\pi}{3}}z_K\Leftrightarrow\boxed{z_K=-\sqrt{3}-i}$

G(a,b) on a $\overrightarrow{KG}=\overrightarrow{OB}$ c'est-à

$=1-\sqrt{3}$

$=1+\sqrt{3}$ d'où $\boxed{z_G=1-\sqrt{3}+i(1+}$

ontrons que les droites (OC) e

pendiculaires

$=1-i\sqrt{3}$ et $z_{\overline{OF}}=-\sqrt{3}-i$

$\frac{z_{\overline{OC}}}{z_{\overline{OF}}}=\frac{1-i\sqrt{3}}{-\sqrt{3}-i}=i$ donc

est perpendiculaire $\overline{OF}$ d'où

) et (OF) sontperpendiculaires

Calculons l'affixe z_H

ANA

Scanned by CamScanner

suite $P(\overline{z_0})=0$ d'où si $P(z_0)=0$ alors $P(\overline{z_0})=0$

alculons $P(1+i\sqrt{3})$

$P(1+i\sqrt{3})=(1+i\sqrt{3})^3-6(1+i\sqrt{3})^2+12(1+i\sqrt{3})-16$

$=(1-9-6+18+12-16)+i(3\sqrt{3}-3\sqrt{3}-12\sqrt{3}+12\sqrt{3})$

$=0$

$\boxed{P(1+i\sqrt{3})=0}$

risons P(z)

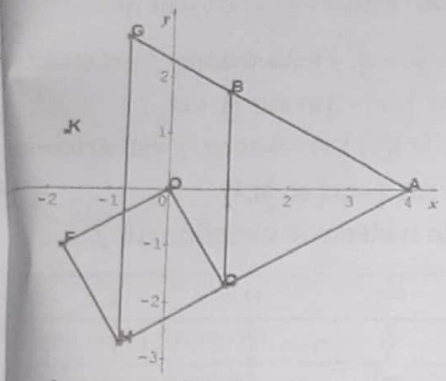
ns 1.a) $1-i\sqrt{3}$ est aussi solution de P(z) par suite te deux nombres complexes non nuls a et b tels $(z)=(z-1-i\sqrt{3})(z-1+i\sqrt{3})(az+b)$. Par division lienne on obtient

$\boxed{=(z-1-i\sqrt{3})(z-1+i\sqrt{3})(z-4)}$

uisons les solutions de $P(z)=0$

$=0 \Leftrightarrow z=1+i\sqrt{3}$ ou $z=1-i\sqrt{3}$ ou $z=4$ donc

$\boxed{+i\sqrt{3};1-i\sqrt{3},4\}}$



ons la nature du triangle ABC

$+i\sqrt{3}|=2\sqrt{3}$; $AC=|-3-i\sqrt{3}|=2\sqrt{3}$; $BC=|2i\sqrt{3}|=2\sqrt{3}$ On

=AC = BC donc ABC est un triangle équilatéral.

terminons les affixes respectives de F et G.

$z_K \Leftrightarrow \boxed{z_F=-\sqrt{3}-i}$

a,b) on a $\overrightarrow{KG}=\overrightarrow{OB}$ c'est-à-dire $\begin{cases}a+\sqrt{3}=1\\ b-1=\sqrt{3}\end{cases}$ soit

$\sqrt{3}$
$\sqrt{3}$ d'où $\boxed{z_G=1-\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3})}$

ons que les droites (OC) et (OF) sont diculaires

$-i\sqrt{3}$ et $z_{\overline{OF}}=-\sqrt{3}-i$

$\frac{1-i\sqrt{3}}{-\sqrt{3}-i}=i$ donc

perpendiculaire $\overline{OF}$ d'où

(OF) sontperpendiculaires

culons l'affixe z_H

On a $\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{HF}$ c'est-à-dire $\begin{cases}-x+\sqrt{3}=-1\\ -y-1=\sqrt{3}\end{cases}$ soit

$\begin{cases}x=1-\sqrt{3}\\ y=-1-\sqrt{3}\end{cases}$ d'où $\boxed{z_H=1-\sqrt{3}-i(1+\sqrt{3})}$

Montrons que COFH est un carré.

$OC=|1-i\sqrt{3}|=2$; $OF=|-\sqrt{3}-i|=2$

On a OC = OF et $\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{OF}$ ainsi le parallélogramme COFH a deux côtés consécutifs égaux et perpendiculaires donc COFH est un carré.

b) Donnons la nature du triangle AGH

$AG=|(-3-\sqrt{3})+i(1+\sqrt{3})|=\sqrt{16+8\sqrt{3}}$

$AH=|(-3-\sqrt{3})-i(1+\sqrt{3})|=\sqrt{16+8\sqrt{3}}$

$GH=|-i(2+2\sqrt{3})|=\sqrt{16+8\sqrt{3}}$

On a Ag = AH = GH donc AGH est un triangle équilatéral.

Exercice2

1.Déterminons les coordonnées du vecteur $\vec{u}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix}$ on a $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-6\\-4\\6\end{pmatrix}$ donc $\boxed{\vec{u}\begin{pmatrix}-6\\-4\\6\end{pmatrix}}$

2.a) H est le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC) et $\vec{u}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ (vecteur normal de 'ABC)) donc

$\boxed{\overrightarrow{AH}\text{ et }\vec{u}\text{ sont orthogonaux}}$

On a $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}a-2\\b\\c\end{pmatrix}$; $\vec{u}\begin{pmatrix}-6\\-4\\6\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AH}\perp\vec{u}\Leftrightarrow -6(a-2)-4b+c=0$ soit $\boxed{3a+2b-3c-6=0}$

b) on a $\vec{u}\perp\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{OH}$ donc $\overrightarrow{OH}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

Comme $\overrightarrow{OH}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires alors il existe un réel t tel que $\overrightarrow{OH}=t\vec{u}$ soit $\boxed{\begin{cases}a=-6t\\ b=-4t\\ c=6t\end{cases}}$

c) Déterminons la valeur de t et donnons les coordonnées de H.

En remplaçant a, b, et c par leurs valeurs dans l'équation de a) on a : $-18t-8t-18t-6=0$ et $t=-\frac{3}{22}$ d'où

$\boxed{H\left(\frac{9}{11},\frac{6}{11},-\frac{9}{11}\right)}$

d) calculons la distance du point O au plan 5ABC)

on a $\overrightarrow{OH}\left(\frac{9}{11};\frac{6}{11};-\frac{9}{11}\right)$ et $d(O;(ABC))=\|\overrightarrow{OH}\|$ par suite

$\boxed{d(O;(ABC))=\frac{3\sqrt{22}}{11}}$

3.Calculons le volume du tétraèdre BACO

Scanned by CamScanner

$V = \frac{1}{2}$ (aire du triangle ABC) × hauteur

Aire de ABC $= \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\vec{w}\right\|$ donc

$V = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\left\|\vec{w}\right\| \times \left\|CH\right\|\right]$ soit $\boxed{V = 2uv}$

Problème

Partie A

1.Etudions les variations de g et dressons son tableau de variation.

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

$\forall x \in \mathbb{R}^*, g'(x) = -\frac{2x^2+1}{x}$ donc

$\forall x \in]-\infty;0[, g'(x) > 0$ et $\forall x \in]0;+\infty[, g'(x) < 0$ par conséquent

$\boxed{g \text{ est croissante sur }]-\infty;0[\text{ et } g \text{ est décroissnate sur }]0;+\infty[}$

Tableau de variation

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	‖	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	↗ 0	‖ $+\infty$	↘ 0	↘ $-\infty$

2. $g(-1) = 0$ et $g(1) = 0$

D'après le tableau de variation de g et le fait que $g(-1) = 0$ et $g(1) = 0$ on en déduit que

$\boxed{\begin{array}{l}\forall x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[, g(x) < 0 \\ \forall x \in]-1;0[\cup]0;1[, g(x) > 0\end{array}}$

Partie B

1.Calons les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

$\lim\limits_{x\to-\infty}(x-2) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln|x|}{x} = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$

Remarque $\frac{-\ln|x|}{x} = \frac{1}{x}\times\ln\left(\frac{1}{|x|}\right)$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x\ln|x| = -\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty}$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln|x| = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln|x|}{x} = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

On a $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \infty$ donc la droite d'équation x = 0 est une asymptote verticale à (C).

2.a) Montrons que la droite (D) d'équation y = x – 2 est une asymptote à (C)

$f(x) = -\frac{\ln|x|}{x} + x - 2$ et $\lim\limits_{x\to\infty} -\frac{\ln|x|}{x} = 0$ donc la droite (D) d'équation y = x – 2 est une asymptote à (C).

b) Position relative de (C) par rapport à (D)

Pour cela étudions le signe de $f(x)-(x-2)$

$f(x)-(x-2) = -\frac{\ln|x|}{x}$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$\ln\lvert x\rvert$	$+$	0	$-$ ‖ $-$	0	$+$
$-x$	$+$		‖ $-$		
$-\frac{\ln\lvert x\rvert}{x}$	$+$	0	$-$ ‖ $+$	0	$-$

D'où d'après le tableau de signe (C) est située au dessus de (D) sur $]-\infty;1[\cup]0;1[$ et (C) est située au dessous de (D) sur $]-1;0[\cup]1;+\infty[$.

3.a) Calculons $f'(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{-\left(-x^2+1-\ln|x|\right)}{x^2} = -\frac{g(x)}{x^2}$

Sens de variations de f

D'après A-2) et $f'(x) = -\frac{g(x)}{x^2}$ il vient que

$\forall x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[, f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]-\infty;-1]$ et sur $[1;+\infty[$

$\forall x \in]-1;-0[\cup]0;1[, f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $[-1;0[$ et $]0;1]$

b) dressons le tableau de variation de f

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$ ‖ $-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	-3 ↘	‖ $+\infty$ ↘	-1	↗ $+\infty$

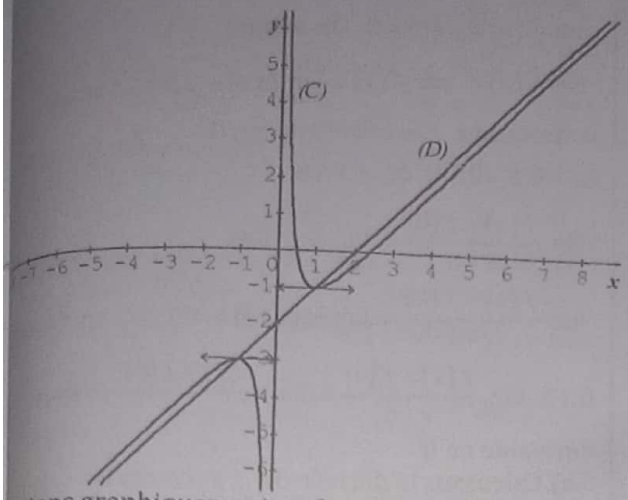
4.a) Montrons que le point I est centre de symétrie pour (C).

I est le point d'intersection des asymptote x = 0 et y = – 2 donc I aura pour coordonnées (0; –2)

$\forall x \in \mathbb{R}^*, -x \in \mathbb{R}^*$ et $f(2\times 0 - x) + f(x) = 2\times(-2)$ donc le point I (0 ;-2) est un centre de symétrie de (C).

b) Construction de (C) et ses aymptotes

Scanned by CamScanner



cutons graphiquement en fonction de m le nombre lutions de l'équation $f(x)=m$

= -3 et m = -1, $f(x)=m$ admet un e solution

e

$]-\infty;-3[\cup]-1;+\infty[$, $f(x)=m$ admet deux solutions.

$]-3;-1[$, $f(x)=m$ n'admet pas de solutions.

C

$$\int_{-1}^{\alpha}\left(f(x)-(x-2)\right)dx\times u.a=\int_{-1}^{\alpha}\left(-\frac{\ln|x|}{x}\right)dx\times 4cm^2$$

$$=4\left[\frac{1}{2}\left(\ln|\ |\right)^2\right]_{-1}^{\alpha}$$

$\boxed{a)=2\left(\ln|\alpha|\right)^2 cm^2}$

$(\alpha)=\lim_{\alpha\to 0^+}2\left(\ln|\alpha|\right)^2=+\infty$ $\boxed{\lim_{\alpha\to 0^+}A(\alpha)=+\infty}$

tation de la limite de $A(\alpha)$

$(\alpha)=+\infty$ donc l'aire limitée par (C), (D) et l'axe

onnées est une aire infinie.

$$=\int f(x)dx=\int_1^n\left(-\frac{\ln|x|}{x}+x-2\right)dx$$

$$\left[\frac{1}{2}(\ln x)^2+\frac{x^2}{2}-2x\right]_1^n$$

$\boxed{\frac{1}{2}(\ln n)^2+\frac{n^2}{2}-2n+\frac{3}{2}}$

$u_n=+\infty$ donc $\boxed{(u_n)\text{ est divergente}}$

10

e 1

de AB, BC et $\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{BC}$

$\boxed{BC=2\sqrt{2}}$ et $\boxed{\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{BC}=-4}$

onnées de D

du quadrilatère ABCD

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$ donc ABCD est un parallélogramme. De plus les côtés consécutifs [AB] et $[BC]$ de ce parallélogramme sont égaux d'où ABCD est un losange

ABCD étant un losange ses diagonales [AC] et $[BD]$ sont perpendiculaires d'où $\boxed{\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{BC}}$

3. Distance du point O au plan ABCD

$$d\left(O;(ABCD)\right)=\frac{\left|\overrightarrow{AO}\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\right|}{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|}$$

on trouve $\boxed{d\left(O;(ABCD)\right)=2\sqrt{3}}$

4. Calcul de OI

$\boxed{OI=2\sqrt{3}}$

On constate que $\boxed{d\left(O;(ABCD)\right)=OI}$ donc le poit I est le projeté orthogonal de O sur le plan ABCD

5. Démontrons que $(OAC)\perp(OBD)$

Remarque Deux sont orthogonaux si et seulement si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.

Or un vecteur normal de (OAC) est le vecteur $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OC}$ et un vecteur normal de (OBD) est le vecteur $\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OD}$

On a $\left(\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OC}\right).\left(\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OC}\right)=0$. O n en déduit donc que $\boxed{(OAC)\perp(OBD)}$

6. Calculons l'aire de ABCD

$A(ABCD)=\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$ donc $\boxed{A(ABCD)=4\sqrt{3}\times u.a}$

7. Volume de la pyramide

$V=\frac{1}{3}\left|\overrightarrow{OA}.\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\right|$ ou encore $V=\frac{1}{3}A(ABCD)\times h$ où h est la hauteur de la pyramide soit $h=OI$.

Donc $\boxed{V=8\times u.v}$

Exercice 2

1.Calcul de u_3 et u_4

$\boxed{u_3=\frac{8}{3}\text{ et }u_4=\frac{5}{3}}$

(u_n) n'est pas arithmétique car $u_3-u_2=-1\neq u_4-u_3=-\frac{1}{3}$

(u_n) n'est pas géométrique car $\frac{u_3}{u_2}=\frac{2}{3}\neq\frac{u_4}{u_3}=\frac{5}{6}$

2. Minoration de (u_n) par 1

Raisonnons par récurrence

Soit la propriété : « La suite (u_n) est minorée par 1 pour tout entier naturel $n\geq 2$ »

On a $u_2=3$ et $3\geq 1$ donc $u_2\geq 1$ par suite la propriété est vraie au rang 2.

Supposons la propriété vraie au rang n – 1 et démontrons qu'elle vraie eu rang n.

Scanned by CamScanner

Par hypothèse $u_2 \geq 1$. On a $u_n - 1 = \frac{2(u_{n-1}-1)}{u_{n-1}+1}$ or par hypothèse $u_2 \geq 1$ et $u_{n-1}+1 \geq 2$ donc $u_n \geq 1$. Par conséquent la propriété est vraie à au rang n. D'où

$\boxed{\forall n \geq 2, la \text{ suite } (u_n) \text{ est minorée par 1}}$

b) Monotonie de al suite (u_n)

on a $u_n - u_{n-1} = -\frac{(u_{n-1}-1)^2}{u_{n-1}+1}$ or $\frac{(u_{n-1}-1)^2}{u_{n-1}+1} \geq 0$ donc $u_n \geq u_{n-1}$ par conséquent la suite (u_n) est décroissante.

c. Convergence et limite de la suite (u_n)

la suite (u_n) est décroissante et minorée par 1 donc la suite (u_n) converge.

Posons ℓ la limite de la suite (u_n). ℓ Vérifie l'équation $\ell = \frac{3\ell-1}{\ell+1}$ c'est-à-dire $(\ell-1)^2 = 0$ soit $\boxed{\ell = 1}$

3. Montrons que la suite (v_n) est arithmétique.

On a $v_n = \frac{u_n+1}{u_n-1} = \frac{2u_{n-1}}{u_{n-1}-1}$ on a donc

$v_n - v_{n-1} = \frac{2u_{n-1}}{u_{n-1}-1} - \frac{u_{n-1}+1}{u_{n-1}-1} = \frac{u_{n-1}-1}{u_{n-1}-1} = 1$ on en déduit que la suite (v_n) est arithmétique de premier terme $v_2 = 2$ et de raison 1.

b. Expression de (v_n) et de (u_n) en onction de n

Pour $n \geq 2, v_n = v_2 + (n-2)\times 1$ soit $\boxed{v_n = n}$

Pour $n \geq 2$, $v_n = \frac{u_n+1}{u_n-1}$ donc $u_n = \frac{v_n+1}{v_n-1}$ soit $\boxed{u_n = \frac{n+1}{n-1}}$

c. Calcul de al limite de (u_n)

$\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{\to+\infty} \frac{n+1}{n-1} = 1}$

Problème

Partie A

1. Variation de g sur $[0;+\infty[$ et signe de g sur $[0;+\infty[$

$g'(x) = \frac{x+2}{(x+1)^2}$ or $(x+1)^2 > 0$ donc $g'(x)$ est du signe de $x+2$ pour tout $x \geq 0$

Comme $x+2 > 0$ on en déduit que $g'(x) > 0$ d'où g est croissante sur $[0;+\infty[$

Comme g est croissante sur $[0;+\infty[$ alors on a $\forall x \geq 0; g(x) \geq g(0)$ or $g(0) = 0$ donc $\boxed{\forall x \geq 0; g(x) \geq 0}$

2. a) Continuité de f en 0

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$ car $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 0$. On a donc

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$ et par conséquent f est continue en 0

b) Dérivabilité de f en 0

$\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$ et

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \ln(x+1) = 0$

On a $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$ donc f est dérivable en 0.

3.a) Calculons la dérivée de f suivants les valeurs de x.

Pour $x<0, f'(x) = \left(1-\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}$. Pour $x \geq 0, f'(x) = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1}$

On remarque donc que pour tout $x \geq 0, f'(x) = g(x)$.

b) signe de $f'(x)$ pour $x<0$

Pour tout $x \in]-\infty;0[, e^{\frac{1}{x}} > 0$ donc le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $\left(1-\frac{1}{x}\right)$.

Comme $x<0$ alors $\frac{1}{x} < 0$ et $-\frac{1}{x} > 0$ par suite $\left(1-\frac{1}{x}\right) > 0$ pour x<0 et par conséquent $f'(x) > 0$ pour $x<0$

C) signe de $f'(x)$ pour $x \geq 0$

Pour tout $x \geq 0, f'(x) \geq 0$ d'après Partie A) 1)

d) Calcul des limites

$\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} e^x = 1$

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

e) tableau de variation

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$		$+\infty$

4.a) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x+1) = +\infty$. On en déduit que la courbe de f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

b) Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$

Scanned by CamScanner

sons $X=\frac{1}{x}$ on a $x=\frac{1}{X}$ donc $x\to-\infty, X\to 0$ par

séquent $\lim_{x\to-\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)=\lim_{X\to 0}\frac{e^X-1}{X}=1$

) $\lim_{x\to-\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)=1$

Montrons que (D) est asymptote oblique

$\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)-1\right]=0$ car

$x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)=1$. D'où la droite (D) d'équation

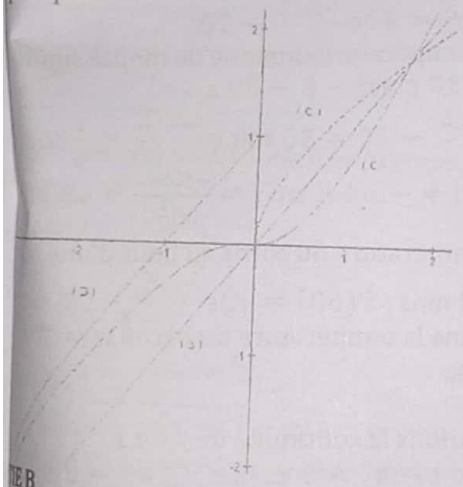
$+1$ est asymptote oblique à (C) en $-\infty$.

sition de (C) par rapport à (D) en pour $x<0$

$\left[f(x)-(x+1)\right]=\left[x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)-1\right]\le 0$ car $x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)\le 1$.

(C) est située au dessous de (D) sur $]-\infty;0[$

phique



TIE B

étermination de a, b et c

$=1, c=1$

cul de $\int_0^{e-1} f(x)dx$

$\int_0^{e-1} f(x)dx=\int_0^{e-1} x\ln(x+1)dx$

e $u(x)=\ln(x+1)$ et $v'(x)=x$ on a

$\frac{1}{x+1}$ et $v(x)=\frac{1}{2}x^2$

$$\int_0^{e-1} f(x)dx=\int_0^{e-1} x\ln(x+1)dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2\ln(x+1)\right]_0^{e-1}-\frac{1}{2}\int_0^{e-1}\frac{x^2}{x+1}dx$$
$$=\frac{1}{2}(e-1)^2-\frac{1}{2}\int_0^{e-1}\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$=\frac{1}{2}(e-1)^2-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(x-1)^2+\ln(x+1)\right]_0^{e-1}$$

D'où $\boxed{\int_0^{e-1} f(x)dx=\frac{e^2-3}{4}}$

2.Aire A en cm²

$A=\int_0^{e-1}\left(x-f(x)\right)dx\times 4cm^2$ car pour $0<x<e-1, f(x)<x$

donc $A=\left(\int_0^{e-1}xdx-\int_0^{e-1}f(x)dx\right)\times 4$

d'où $\boxed{A=\left(e^2-4e+5\right)cm^2}$

3.a) Montrons que h réalise une bijection

h est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$. De plus $f([0;+\infty[)=[0;+\infty[$ Donc h réalise une bijection de $[0;+\infty[$ sur $[0,+\infty[$ par suite $I=[0;+\infty[$

Représentation de la courbe de h^{-1}

(C') et (C) sont symétriques par rapport à la droite $(\Delta): y=x$

Voir Partie A)5)

4) Calcul de l'aire A' en cm²

D'après le graphique A' est le double de A, donc

$\boxed{A'=2\left(e^2-4e+5\right)cm^2}$

Partie C

1.Equation cartésienne de (Γ)

On a $-1<t<0$ donc $0<-t<1$ par suite $\ln(-t)<0$ et par conséquent $x<0$

De plus $x=\frac{1}{\ln(-t)}$ et $t=-e^{\frac{1}{x}}$ donc $y=-xe^{\frac{1}{x}}$ or

$f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$ d'où pour $x<0, y=-f(x)$. Ainsi l'équation cartésienne de (Γ) est $y=-f(x)$

2. on obtient la courbe de (Γ) en faisant le symétrique de la courbe (C) par rapport à l'axe des abscisses sur $]-\infty;0[$

3.tracer de la courbe de (Γ) voir partie A5)

Sujet 11 Bac 2014 1er tour

Exercice 1

1.Exprimons le module et un argument de $f(z)$ en fonction de r et θ

On a $|z|=r$ et $\left|-\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{|z|}$ donc $|f(z)|=\frac{1}{r}$;

$\arg(z)=\theta+2k\pi$ et

Scanned by CamScanner

$\arg\left(-\frac{1}{z}\right) = \arg(-1) - \arg(z)$ donc

$\arg\left(-\frac{1}{z}\right) = \pi - \theta + 2k\pi$. D'où un argument de $f(z)$ est $\pi - \theta$.

2. a) Exprimons X et Y en fonction de x et y.

$Z = \frac{z-\bar{z}}{2} = \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{\bar{z}}\right) = \frac{1}{2}\left(x - iy - \frac{1}{x+iy}\right)$ soit

$Z = \frac{1}{2}\left(x - iy - \frac{x-iy}{x^2+y^2}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{x}{x^2+y^2} - i\left(y - \frac{y}{x^2+y^2}\right)\right)$

$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{x}{x^2+y^2}\right) - i\frac{1}{2}\left(y - \frac{y}{x^2+y^2}\right)$ d'où

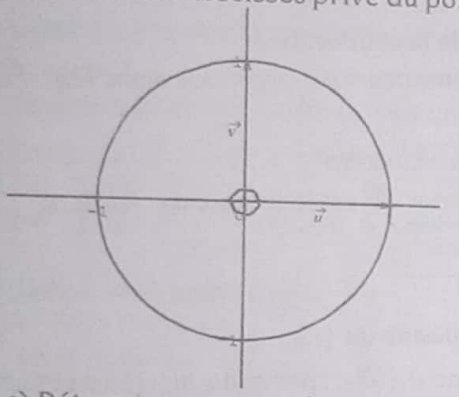
$X = \frac{1}{2}\left(x - \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ et $Y = \frac{1}{2}\left(y - \frac{y}{x^2+y^2}\right)$

b) Déterminons et représentons l'ensemble $(\mathcal{E})$

$I \in (o,\vec{u}) \Leftrightarrow Im(Z) = 0$ c'est-à-dire $Y = 0$

$Y = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}y\left(\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2}\right) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ et $x^2+y^2 \neq 0$ car $x^2+y^2-1 \neq 0$

Donc $Y = 0 \Leftrightarrow y = 0$ et $x \neq 0$ d'où l'ensemble $(\mathcal{E})$ est la droite d'équation $y = 0$ privé du point O c'est-à-dire l'axe des abscisses privé du point O.



c) Déterminons et représentations $(\mathcal{F})$

$I \in (o,\vec{v}) \Leftrightarrow Re(Z) = 0$ c'est-à-dire $X = 0$

$X = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x\left(\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x^2+y^2-1 = 0$ et $x^2+y^2 \neq 0$

Donc $X = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x^2+y^2 = 1$ et $y \neq 0$ d'où l'ensemble $(\mathcal{F})$ est la réunion de l'axe des ordonnées et du cercle de centre O et de rayon 1.(voir dessin précédent)

3. a) Calculons Z en fonction θ

$Z = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} - \frac{1}{e^{i\theta}}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right) = i\sin\theta$

$Z = i\sin\theta$

b) Caractérisons géométriquement la restriction de F à $\mathcal{C}(O;1)$

$M \in \mathcal{C}(O;1) \Leftrightarrow z = e^{i\theta}$ c'set à dire $M(\cos\theta;\sin\theta)$

D'après 1 a) si $M(\cos\theta;\sin\theta)$ alors

$M'(\cos(\pi-\theta);\sin(\pi-\theta))$ soit $M'(-\cos\theta;\sin\theta)$

M est donc l'image de M par la symétrie orthogonale d'axe $(O;\vec{v})$. D'où la restriction de F à $\mathcal{C}(O;1)$ est la symétrie orthogonale d'axe $(O;\vec{v})$.

Exercice 2

1.a) Equation différentielle vérifiée par ϕ

$\phi(t) = \theta(t) - \theta_1$ donc $\phi'(t) = \theta'(t)$ or $\theta'(t) = k(\theta(t) - \theta_1)$ on en déduit que l'équation différentielle vérifiée par ϕ est $\phi'(t) = -k\phi(t)$

b) Déterminons ϕ

$\phi'(t) = -k\phi(t)$ donc $\forall t \in IR,\ \phi(t) = \beta e^{-kt}$ avec $\beta \in IR$

c) Déterminons θ

$\phi(t) = \theta(t) - \theta_1 \Leftrightarrow \theta(t) = \phi(t) + \theta_1$ d'où

$\theta(t) = \beta e^{-kt} + 20$

d) Calculons β et k

$\theta(0) = 60$ signifie que $60 = \beta - 20$ donc $\beta = 40$

$\theta(10) = 50$ signifie que

$50 = 40e^{-10k} - 20$ donc $e^{-10k} = \frac{30}{40} = \frac{3}{4}$ par suite

$k = -\frac{1}{10}\ln\left(\frac{3}{4}\right)$

D'où $\theta(t) = 40e^{\frac{t}{10}\ln\left(\frac{3}{4}\right)} - 20$.

2. a) la température diminue de moitié signifie que $\theta(t) = 30$ c'est-à-dire

$40e^{\frac{t}{10}\ln\left(\frac{3}{4}\right)} - 20 = 30$ soit $e^{\frac{t}{10}\ln\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{1}{2}$ donc

$\frac{t}{10}\ln\left(\frac{3}{4}\right) = -\ln 4$ d'où $t = \frac{-10\ln 4}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)} \approx 48$ mns

b) La température du corps au bout d'une heure

1 h = 60 mns ; $\theta(60) = 40e^{6\ln\left(\frac{3}{4}\right)} - 20 \approx 27$donc au bout d'une la température du corps sera 27°C

Problème

Partie A

1.a) Etudions la continuité de f en 1

$\lim_{x\to 1^-}(1-x) = 0$ et $\lim_{x\to 1} e^x = e$ donc $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0$

$\lim_{x\to 1^+} x^2 - 2x - 3 = 0$ et $\lim_{x\to 0}\sqrt{x} = 0$ donc $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 0$

$f(1) = (1-1)e^1 = 0$ on a ainsi $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$ et donc f est continue en 1

b) Etudions la dérivabilité de f en 1

$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} =$

$\lim_{x\to 1^-} \frac{(1-x)e^x}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} -e^x = -e$

$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{x^2-2x-3}}{x-1} =$

$\lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)\sqrt{x^2-2x-3}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x-3}{\sqrt{x^2-2x-3}} = -\infty$

car $\lim_{x\to 1^-} x - 3 = 4$ et

$\lim_{x\to 1^-} \sqrt{x^2-2x-3} = 0^-$

Scanned by CamScanner

$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \neq \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ donc la fonction est pas continue en 1.

nterprétation graphique

Point de coordonnées $(1;0)$ $(\mathcal{C})$ admet une demi – ente de coefficient directeur –e à gauche de 1et une i-tangente verticale d'équation x = 1 à droite de 1.

Calcul des limites de f $en -\infty$ et $en -\infty$

$\lim_{x\to-\infty} e^x=0$ et $\lim_{x\to-\infty} xe^x=0$ donc

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x\to-\infty} x^2 - 2x - 3=\lim_{x\to-\infty} x^2 = -\infty$ et

$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x}=-\infty$ donc $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

lculons $f'(x)$ et étudions son signe.

$]-\infty;1], f'(x) = -xe^x$ et

$]1;-\infty[, f'(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-2x-3}}$

$]-\infty;1], e^x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de – x tout x de $]-\infty;1]$ d'où

$]-\infty;0[, f'(x) > 0$ et $\forall x \in]0;1[, f'(x) < 0$

$]1;-\infty[, x+3 > 0$ $donc$ $\forall x \in$ $\infty[, f'(x) > 0$

ssons la tableau de variations de f

$-\infty$		0		1		$+\infty$
	+	0	−	‖	+	
	↗	1	↘		↗	$+\infty$
				0		

rons que (Δ) :y=x+1 est une asymptote à $-\infty$

$f(x) - (x+1) =$

$\sqrt{x^2-2x-3} - (x+1)$

$\frac{x^2-2x-3-(x-1)^2}{\sqrt{x^2-2x-3}+x-1} =$

$\frac{-4}{\sqrt{x^2-2x-3}+x-1} = 0$

$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-2x-3} + x + 1 = -\infty$

droite (Δ) :y=x+1 est une asymptote à $-\infty$

minons une équation de la tangente à $(\mathcal{C})$ au abscisse -1

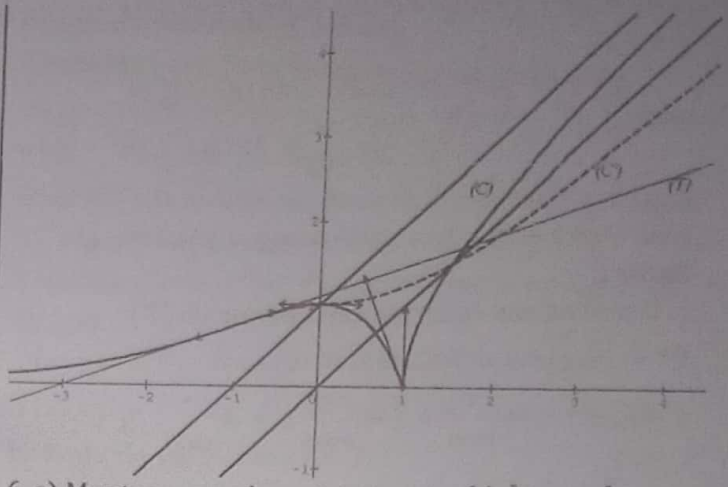
$y = f'(-1)(x-1) + f(-1)$

$(-1) = e^{-1} = \frac{1}{e}$ et $f(-1) = 2e^{-1} = \frac{2}{e}$ donc

$=\frac{1}{e}(x-1) + \frac{2}{e}$ c'est-à-dire

$=\frac{1}{e}x + \frac{3}{e}$

ns $(\Delta); (T)$ et $(\mathcal{C})$



6. a) Montrons que la restriction de f à $]1;-\infty[$ réalise une bijection de $]1;+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

f est continue et strictement croissante sur $]1;-\infty[$ donc elle réalise une bijection de $]1;-\infty[$ sur $]\lim_{x\to1^+} f(x); \lim_{x\to-\infty} f(x)[=]0;-\infty[$ donc J $=]0;-\infty[$

b) Tracer de $(\mathcal{C}')$

$(\mathcal{C}')$ est le symétrique de $(\mathcal{C})$ par rapport à la droite d'équation y = x

(voir dessin en 5.)

Partie B

a)Calculons $I(\alpha) = \int_\alpha^0 xe^x dx$ par intégration par parties

posons u(x) = x et $v'(x) = e^x$ on a

$u'(x) = 1$ et $v(x) = e^x$

$I(\alpha) = \left[xe^x\right]_\alpha^0 - \int_\alpha^0 e^x dx = \left[xe^x - e^x\right]_\alpha^0$

$= -1 - \left(\alpha e^\alpha - e^\alpha\right)$

soit $I(\alpha) = -1 - (1-\alpha)e^\alpha$

b) Calculons l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$

$\mathcal{A}(\alpha) = \int_x^0 f(x)dx \times u.a = 4\ cm^2 \int_\alpha^0 (e^x - xe^x)dx$

$\mathcal{A}(\alpha) = 4\ cm^2 \left(\int_\alpha^0 e^x dx - I(\alpha)\right) = 4\ cm^2([e^x]_\alpha^0 + 1 - (1-\alpha\alpha)e^\alpha)$

On a $\mathcal{A}(\alpha) = 4(2 - 2e^\alpha - \alpha e^\alpha)\ cm^2$

c) Calculons $\lim_{x\to-\infty} \mathcal{A}(\alpha)$

$\lim_{x\to-\infty} \mathcal{A}(\alpha) = \lim_{x\to-\infty} 4(2 - 2e^\alpha - \alpha e^\alpha) = 8cm^2$

car $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} \alpha e^\alpha = 0$

3. a) Déterminons les réels a, b et c

$F'(x) = (2ax^2 - 2(a+b)x + b - 2c)e^{2x}$ et

$F'(x) = (x^2 - 2x + 1)e^{2x}$ donc par identification on

a $\begin{cases} 2a = 1 \\ a - b = -1 \\ b - 2c = 1 \end{cases}$ soit $a = \frac{1}{2}; b = \frac{3}{2}$ et $c = \frac{1}{4}$

b) Calculons le volume $\mathcal{V}(\alpha)$

Scanned by CamScanner

$V(\alpha) = 8\pi \int_a^0 [f(x)]^2 dx\ cm^3 = 8\pi \int_a^0 (x^2 - 2x + 1)e^{2x} dx$

$V(\alpha) = 8\pi \int_a^0 F'(x) dx = 8\pi [F(x)]_a^0 =$

$8\pi \left[\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{4} \right) e^{2x} \right]_a^0 = 2\pi(5 - (2a^2 - 6a +$ donc $5)e^{2a})cm^3$

D'où $V(\alpha) = 2\pi(5 - (2a^2 - 6a - 5)e^{2a})cm^3$

Partie C

1. Donnons une équation cartésienne de (Γ)

$\forall t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ on a $0 < \cos t < 1$:

$0 < \cos t < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\cos t} > 1 \Leftrightarrow \frac{2}{\cos t} > 2 \Leftrightarrow \frac{2}{\cos t} - 1 > 1$

$x > 1$

$\forall t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ on a $\tan t > 0$ C'est-à-dire $y > 0$

On a $(x-1)^2 = \frac{4}{\cos^2 t} = 4(1 - \tan^2 t) =$

$4 - (2\tan t)^2 = 4 - y^2$ soit

$y^2 = (x-1)^2 - 4 = x^2 - 2x - 3$ et donc

$y = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$ avec x>1

2. (Γ) coïncide donc avec la partie de (C) sur l'intervalle $]1; -\infty[$

Sujet 12 Correction 2nd tr 2014

Exercice 1

1. Position relative

a) $M(t + 2\pi) = M(t)$

b) $M(-t)$ et $M(t)$ sont symétriques par rapport à (ox)

c) $M(\pi - t)$ et $M(t)$ sont symétriques par rapport à O.

2. a) Démonstration

Supposons $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, on a

$0 \le t \le \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \le -t \le 0 \Leftrightarrow \pi - \frac{\pi}{2} \le \pi - t \le \pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \le \pi - t \le \pi$

d'où si $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ alors $\pi - t \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$

b) Déduction

Comme $M(t + 2\pi) = M(t)$ alors toute la courbe est obtenue en faisant varie t sur un amplitude 2π soit par exemple l'intervalle $[-\pi; \pi]$

Par ailleurs comme $M(-t)$ et $M(t)$ sont symétriques par rapport à (ox) alors on peut réduire l'intervalle d'étude sur $[0; \pi]$. Enfin comme $M(\pi - t)$ et $M(t)$ sont symétriques par rapport à O alors on peut réduire l'intervalle d'étude sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. D'où il suffit de d'étudier (C) pour $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et faire successivement une symétrie par rapport O pui par rapport à l'axe (Ox).

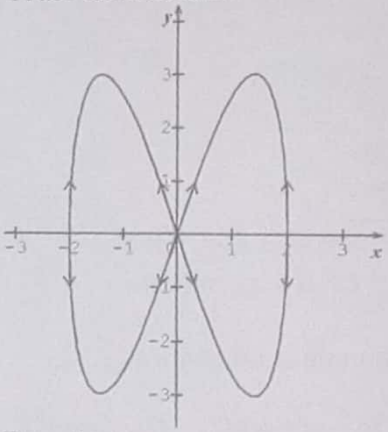
3.a) Etude des fonctions x et y.

Pour tout t de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ $x'(t) = -2\sin t$ or pour tout t de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ $\sin t \ge 0$ donc $x'(t) \le 0$ et par conséquent x est décroissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Pour tout t de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ $y'(t) = 6\cos 2t$; $\cos(2t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4}$, donc pour tout t de $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ $y'(t) \ge 0$ et y est croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ et pour tout de $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$ $y'(t) \le 0$ donc y est décroissante sur $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$

Tableau de variations de x et y

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	0	$-$		$-$	-1
$x(t)$	1	↘	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	↘	0
$y'(t)$	2	$+$	0	$-$	-2
$y(t)$	0	↗	1	↘	0

Tracé de la courbe



Exercice 2

1)Calculons l'aire du triangle ABC.

$A = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{42}u.a$

2) a) Distance de D au plan (ABC)

$d(D,(ABC)) = \frac{\left|\overrightarrow{AD}.\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right)\right|}{\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|} = \frac{5\sqrt{42}}{42}$

b) Points coplanaires

Comme $d(D,(ABC)) \neq 0$ alors les points A, B, C, D ne sont pas coplanaires.

3) Volume du tétraèdre DABC

Scanned by CamScanner

$= \frac{1}{3}h \times S_b = \frac{1}{3} \times d(D,(ABC)) \times A = \frac{5}{6}u.v$

a) Coordonnées de E.

$\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{ED}$ d'où $E(-2;-2;0)$

Aire du parallélogramme.

$= \left\| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AE} \right\| = \sqrt{2}u.a$

roblème

artie A

Calculons les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$

$\lim_{-\infty} g(x) = +\infty$ car $\lim_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$ et $\lim_{x\to-\infty}(-2x-1) = +\infty$

$\lim_{+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} e^x\left(e^x - \frac{2x}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right) = +\infty$ car $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

) Etudions sens de variations de g.

st dérivable sur IR et $\forall x \in IR$,

$(x) = 2e^{2x} - 2 = 2\left(e^x+1\right)\left(e^x-1\right)$

$\in IR$, $e^x + 1 > 0$ donc $g'(x)$ a le même signe que

-1

$-1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$; $e^x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow e^x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 0$;

n déduit que g est strictement croissante sur

$[$ et strictement décroissante sur $]-\infty;0]$

eau de variations de g

	$-\infty$		0		$+\infty$
		−	0	+	
	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

déduisons le signe de $g(x)$ pour tout x réel

ne g est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ et

ement décroissante sur $]-\infty;0]$ alors g admet un

mum en o qui est $g(0) = 0$. Donc $\forall x \in IR, g(x) \geq 0$

e B

lculons les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$

$(x) = \lim_{x\to-\infty}(x+1)\left(1+e^{-2x}\right) = -\infty$ car $\lim_{x\to-\infty}(x+1) = -\infty$

$e^{-2x} = +\infty$

$(x) = \lim_{x\to+\infty}(x+1)\left(1+e^{-2x}\right) = +\infty$ car $\lim_{x\to+\infty}(x+1) = +\infty$

$e^{-2x} = 0$

ontrons que (C) est asymptote à (Δ) d'équation

en $+\infty$

$(x)-(x+1)] = \lim_{x\to+\infty}(x+1)e^{-2x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^{2x}} + \frac{1}{e^{2x}}\right) = 0$

C) est asymptote à (Δ) d'équation $y = x+1$ en

Position relative de (C) et (Δ)

Etudions pour cela le signe de $f(x)-(x+1)$

$f(x)-(x+1) = (x+1)e^{-2x}$. on a $\forall x \in IR, e^{-2x} > 0$ donc

$f(x)-(x+1)$ est du signe de x + 1

D'où (C) est située au dessus de (Δ) sur $]-1;+\infty[$ et

(C) est située au dessous de (Δ) sur $]-\infty;-1[$

3.a) Calculons $f'(x)$ et exprimons la en fonction de g(x).

$f(x) = 1 + e^{-2x} - 2(x+1)e^{-2x} = 1 + e^{-2x}(-2x-1)$

$f(x) = 1 + e^{-2x}(-2x-1) = e^{-2x}\left(e^{2x} - 2x - 1\right) = e^{-2x}g(x)$

b) Sens de variations de f

$f'(x) = e^{-2x}g(x)$. Comme pour tout x de IR ,

$e^{-2x} > 0$ alors $f'(x)$ a le même que $g(x)$. Donc d'près Partie A 2) b) f est strictement croissante sur IR.

Tableau de variation de f

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

4 Calculons $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ puis interprétons le résultat.

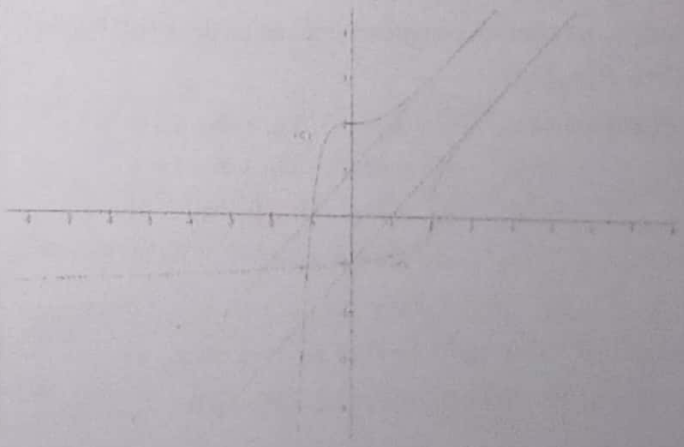
$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left[1 + \frac{1}{x} + \left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-2x}\right] = +\infty$ donc (C) admet une branche parabolique de direction (oy) en $-\infty$

5. a) Montrons que f réalise une bijection de IR sur un intervalle I que l'on précisera.

f est continue et strictement croissance sur IR donc f réalise une bijection de sur

$\left]\lim_{x\to-\infty} f(x); \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[=]-\infty;+\infty[= IR$

b) Construisons (C) , (Δ) et (Γ)



Scanned by CamScanner

Partie C

1.a) Calculons l'aire $a(\alpha)$

Sur $[-1;\alpha]$, (Δ) est au dessous de (C) donc $\forall x \in [-1;\alpha]$, $f(x)-(x+1)>0$ par conséquent on a :

$$a(\alpha)=\int_{-1}^{\alpha}\left[f(x)-(x+1)\right]dx=\int_{-1}^{\alpha}(x+1)e^{-2x}dx$$

Posons $u(x)=x+1$ et $v'(x)=e^{-2x}$ on a

$u'(x)=1$ et $v(x)=-\frac{1}{2}e^{-2x}$

$$\int_{-1}^{\alpha}(x+1)e^{-2x}dx=\left[-\frac{1}{2}(x+1)e^{-2x}\right]_{-1}^{\alpha}-\int_{-1}^{\alpha}-\frac{1}{2}e^{-2x}dx$$
$$=\left[-\frac{1}{2}(x+1)e^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}\right]_{-1}^{\alpha}$$
$$=\frac{1}{4}\left[e^{2}-(2\alpha+3)e^{-2\alpha}\right]$$

D'où $a(\alpha)=e^{2}-(2\alpha+3)e^{-2x}cm^{2}$

b) Calculons $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}a(\alpha)$

$$\lim_{\alpha\to+\infty}a(\alpha)=\lim_{\alpha\to+\infty}\left[e^{2}-(2\alpha+3)e^{-2\alpha}\right]=e^{2}$$

2.a) Montrons que $\left[f(x)\right]^{2}=(x+1)^{2}\left(1+2e^{-2x}+4e^{-4x}\right)$

$$\left[f(x)\right]^{2}=\left[(x+1)\left(1+e^{-2x}\right)\right]^{2}=(x+1)^{2}\left(1+2e^{-2x}+4e^{-4x}\right)$$

d'où $\left[f(x)\right]^{2}=(x+1)^{2}\left(1+2e^{-2x}+4e^{-4x}\right)$

b) Calculons H'(x) à l'aide de $f(x)$

$$H'(x)=x^{2}+2x+1-\left(2x+3-2x^{2}-6x-5\right)e^{-2x}-\frac{1}{32}\left(16x+20-32x^{2}-80-52\right)e^{-4x}$$
$$=(x+1)^{2}\left(1+2e^{-2x}+4e^{-4x}\right)=\left[f(x)\right]^{2}$$

D'où $H'(x)=\left[f(x)\right]^{2}$

c) En déduisons V.

L'unité de volume est $8cm^{3}$; $V=\pi\int_{-1}^{0}\left[f(x)\right]^{2}dx\times 8cm^{3}$

$$\int_{-1}^{0}\left[f(x)\right]^{2}dx=\left[H(x)\right]_{-1}^{0}=-\frac{93}{32}+\frac{1}{3}+\frac{e}{2}+\frac{e^{4}}{32}$$

D'où $V=\frac{-247+48e^{2}+3e^{4}}{12}cm^{3}$

Sujet 13 correction 1er tour 2015

Exercice 1

1. Montrons que $P(z)$ admet une racine réelle

Soit z_0 un nombre complexe une racine de $P(z)$

On a $P(z_0)=0$

$$P(z_0)=0\Leftrightarrow {z_0}^{3}-(1+2i){z_0}^{2}-3z_0+2i-1=0$$
$$\Leftrightarrow {z_0}^{3}-{z_0}^{2}-2i{z_0}^{2}-3z_0+2i-1=0$$
$$\Leftrightarrow \left({z_0}^{3}-{z_0}^{2}-3z_0-1\right)+i\left(-2{z_0}^{2}+2\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}{z_0}^{3}-{z_0}^{2}-3z_0-1=0\\-2{z_0}^{2}+2=0\end{cases}$$

$-2{z_0}^{2}+2=0\Leftrightarrow {z_0}^{2}-1=0\Leftrightarrow z_0=-1$ ou $z_0=1$

$(-1)^{3}-(-1)^{2}-3(-1)-1=-1-1+3-1=0$

-1 est solution des deux équations du système donc $P(z)$ admet une racine réelle $z_0=-1$

2. Déterminons les nombres complexes a, b et c

$$P(z)=(z-z_0)\left(az^{2}+bz+c\right)$$
$$=(z+1)\left(az^{2}+bz+c\right)=az^{3}+(a+b)z^{2}+(b+c)z+$$

Par identification on a $\begin{cases}a=1\\a+b=-1-2i\\b+c=-3\\c=-1+2i\end{cases}$

$\begin{cases}a=1\\a+b=-1-2i\\b+c=-3\\c=-1+2i\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-2-2i\\c=-1+2i\end{cases}$ On a

$a=1;\ b=-2-2i;\ c=-1+2i$

3. Résolvons dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z)=0$

$$P(z)=0\Leftrightarrow (z+1)\left(z^{2}-(2+2i)z-1+2i\right)=0$$
$$\Leftrightarrow z+1=0 \text{ ou } z^{2}-(2+2i)z-1+2i=0$$

$z+1=0\Leftrightarrow z=-1$

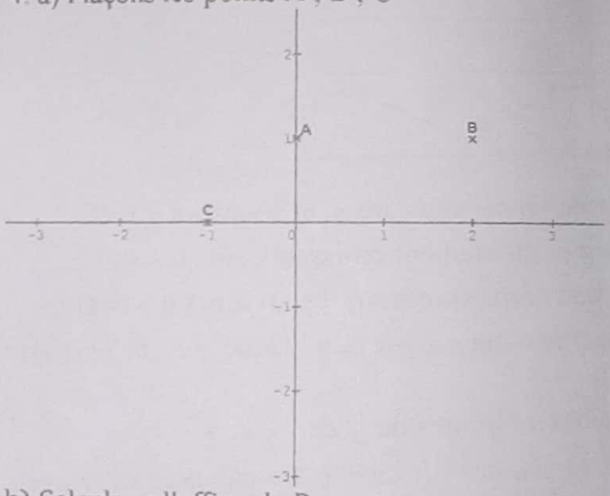
$z^{2}-(2+2i)z-1+2i=0$

$\Delta=(2+2i)^{2}-4(-1+2i)=4$

$z_1=\frac{2+2i-2}{2}=i$ et $z_2=\frac{2+2i+2}{2}=2+i$

Donc $\boxed{S=\{-1;\ i;\ 2+i\}}$

4. a) Plaçons les points A ; B ; C



b) Calculons l'affixe de D

$z_D=(z_C-z_B)+z_A\Leftrightarrow z_D=(-1-2-i)\times 1+i=-3$

D'où l'affixe de D est -3

c) Calculons le nombre complexe Z

$Z=\frac{i}{i-2-i}=-\frac{1}{2}i$; $\boxed{Z=-\frac{1}{2}i}$

Déterminons le module et un argument de Z.

$Z=-\frac{1}{2}i$; $|Z|=\left|-\frac{1}{2}i\right|=\frac{1}{2}$

$\arg(Z)=\arg\left(-\frac{1}{2}i\right)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}$

Scanned by CamScanner

...nc le module de Z est $\frac{1}{2}$ et un argument de Z est $-\frac{\pi}{2}$.

...déduisons la nature du triangle OAB

$= \frac{z_A}{z_A - z_B} = \frac{z_{\overrightarrow{OA}}}{z_{\overrightarrow{BA}}}$; on a

$...(Z) = \arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{OA}}}{z_{\overrightarrow{BA}}}\right) = \overline{\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AO}\right)}$ par suite

$\overline{\left(\overrightarrow{B;AO}\right)} = -\frac{\pi}{2}$

...c le triangle AOB est rectangle en A

...rcice 2

...Calculons $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$\begin{pmatrix}8\\-4\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\4\\8\end{pmatrix}$; donc

$\wedge \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-36\\-63\\36\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 8 - 16 + 8 = 0$

...terprétons géométriquement ces résultats

...ne $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{o}$ alors les points A, B et C ne sont ...lignés.

...ne $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$ alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont ...gonaux.

...lculons les distances AB et AC.

$= \sqrt{8^2 + (-4)^2 + 1^2} = \sqrt{81} = 9$; $\boxed{AB = 9}$

$= \sqrt{1^2 + 4^2 + 8^2} = \sqrt{81} = 9$; $\boxed{AC = 9}$

...déduisons la nature exacte du triangle ABC

...après 1. b) ABC est un triangle rectangle en A. d'après ...) ABC est un triangle isocèle en A. Donc finalement ...est un triangle rectangle et isocèle en A.

...montrons que les vecteurs $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et $\vec{u}$ sont ...aires.

$\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-36\\-63\\36\end{pmatrix}$; on a $\vec{u} \wedge \left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right)\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ donc

$\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right) = \vec{o}$ par conséquent les vecteurs

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

...trons que $\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\| = 9\left\|\vec{u}\right\|$

$\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-36\\-63\\36\end{pmatrix}$; on a : $\frac{-36}{-4} = \frac{-63}{-7} = \frac{36}{4} = 9$

...déduit que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 9\vec{u}$ 'où $\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\| = 9\left\|\vec{u}\right\|$

...duisons l'aire du triangle ABC.

$C) = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\| = \frac{1}{2} \times 9\left\|\vec{u}\right\|$ d'où l'aire du triangle ...t égale à $\frac{9}{2}\left\|\vec{u}\right\|$.

4. a) on a $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$ et

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 3 \times (-36) + 2 \times (-63) - 1 \times 4 = -270$

$270 \neq 0$ donc D n'appartient pas au plan (ABC) et par conséquent les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

b) Calculons $d\left(D,(ABC)\right)$

$d\left(D,(ABC)\right) = \frac{\left|\overrightarrow{AD}.\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right)\right|}{\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|} = \frac{270}{81} = \frac{10}{3}$. D'où

$\boxed{d\left(D,(ABC)\right) = \frac{10}{3}}$

En déduisons le volume de la pyramide.

$V = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AD}.\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right)\right| = \frac{1}{6} \times 270 = 45u.v$

Problème

Partie A.

1.Etudions les variations de g

g est dérivable sur IR et pour tout x de IR, $g'(x) = -xe^x$

$\forall x \in IR$, $e^x > 0$ donc $g'(x)$ a le même signe que $-x$. Par conséquent $\forall x \in]-\infty;0[$, $g'(x) > 0$ donc g est strictement croissante sur $]-\infty;0]$. $\forall x \in]0;+\infty[$, $g'(x) < 0$ donc g est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.

2.Calculons $g(0)$

$g(0) = e^0(1-0) - 1 = 1 - 1 = 0$ donc $\boxed{g(0) = 0}$

En déduisons que pour tout $x \neq 0$, $g(x) < 0$

g est strictement croissante sur $]-\infty;0]$ et strictement décroissante sur $[0;+\infty[$ donc g admet un maximum en 0.

Donc $\forall x \in IR$, $g(x) \leq g(0)$. Comme $g(0) = 0$ alors $\forall x \in IR$, $g(x) \leq 0$. On en déduit que pour tout $x \neq 0$, $g(x) < 0$.

Partie B

1.a) Déterminons la limite de f en $-\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty}\left(e^x - 1\right) = -1$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty}$

b) Etablissons $\frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{e^x} \times \frac{1}{1 - e^{-x}}$

$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{e^x\left(1 - e^{-x}\right)} = \frac{x}{e^x} \times \frac{1}{1 - e^{-x}}$ d'où

$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{e^x} \times \frac{1}{1 - e^{-x}}$.

Déterminons la limite de f en $-\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(\frac{x}{e^x - 1} + 2\right) = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(\frac{x}{e^x} \times \frac{1}{1 - e^{-x}}\right) = 2$

Car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2}$

Scanned by CamScanner

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$, on en déduit que (C) admet une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y = 2$

2.Montrons que la droite (D) d'équation $y = -x + 2$ est une asymptote oblique à (C)

$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-x+2)\right] = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^x-1}+x = \frac{xe^x}{e^x-1} = 0$ car

$\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$ et $\lim_{x\to-\infty}\left(e^x-1\right) = -1$ On a

$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-x+2)\right] = 0$ donc la droite (D) d'équation $y = -x+2$ est une asymptote oblique à (C).

3.Calculons pour tout $x \neq 0$, $f'(x)$

f est dérivable sur IR/{0} et

$$\forall x \in IR/\{0\}, f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{\left(e^x-1\right)^2} = \frac{e^x(1-x)-1}{\left(e^x-1\right)^2}$$

Montrons que $f'(x) = \frac{g(x)}{\left(e^x-1\right)^2}$

On a $\forall x \in IR/\{0\}, f'(x) = \frac{e^x(1-x)-1}{\left(e^x-1\right)^2}$ or

$g(x) = e^x(1-x)-1$ donc $f'(x) = \frac{g(x)}{\left(e^x-1\right)^2}$

4. a) Donnons le sens de variations de f

Pour tout $x \neq 0$, $\left(e^x-1\right) > 0$ donc $f'(x)$ a le même signe que g(x)

$\forall x \neq 0$, $g(x) < 0$ donc $f'(x) < 0$ d'où f est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$

b) Dressons le tableau de variations de f

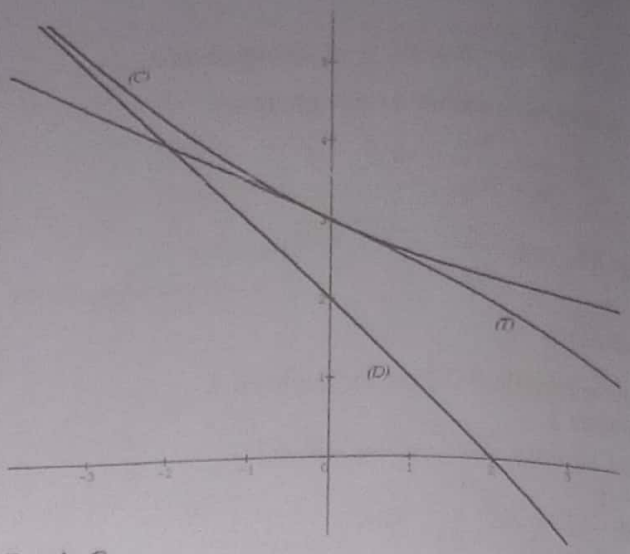
x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	2

5. Ecrivons l'équation de (T)

$y = f'(0)(x-0)+f(0)$, $f'(0) = -\frac{1}{2}$ et $f(0) = 3$

D'où $(T): y = -\frac{1}{2}x + 3$

6. Traçons (D), (T) et (C)



Partie C

1.Montrons que h(x) = 0 admet une unique solution α

h est dérivable sur IR donc continue sur IR et pour tout x de IR, $h'(x) = f'(x) - 1$.

$\forall x \in IR, f'(x) < 0$ et $-1 < 0$ donc $h'(x) < 0$ d'où h est strictement décroissante sur IR.

h est continue et strictement décroissante sur IR donc h réalise une bijection de IR sur

$\left]\lim_{x\to+\infty} h(x); \lim_{x\to-\infty} h(x)\right[=]-\infty;+\infty[$ et $0 \in]-\infty;+\infty[$ on en déduit que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution dans IR.

De plus $h(2) = f(2) - 2 = \frac{2}{e^2-1} = 0,31 > 0$ et

$h(2,5) = f(2,5) - 2,5 = \frac{2,5}{e^{2,5}-1} - 0,5 = -0,27 < 0$ on a

donc $h(2) \times h(2,5) < 0$ d'où $\alpha \in [2;2,5]$

2.a) Démonstration

g est strictement décroissante sur I donc pour tout x de I, on a $g(2,5) \leq g(x) \leq g(2)$ donc $\forall x \in I, g(x) \geq g(2,5)$ or $g(2,5) = -19,27 \geq -20$ d'où $\forall x \in I$, $g(x) \geq -20$

$\forall x \in I$, on a, $2 \leq x \leq 2,5 \Leftrightarrow e^2 \leq e^x \leq e^{2,5}$

$e^2 \leq e^x \leq e^{2,5} \Leftrightarrow e^2 - 1 \leq e^x - 1 \leq e^{2,5} - 1$.

$e^2 - 1 > 0$ et $e^{2,5} - 1 > 0$ donc

$e^2 - 1 \leq e^x - 1 \leq e^{2,5} - 1 \Leftrightarrow \left(e^2-1\right)^2 \leq \left(e^x-1\right)^2 \leq \left(e^{2,5}-1\right)$

ainsi $\left(e^x-1\right)^2 \geq \left(e^2-1\right)^2$ or $\left(e^2-1\right)^2 = 40,83 \geq 40$ d'où

$\forall x \in I$, $\left(e^x-1\right)^2 \geq 40$.

b) Déduction

$\forall x \in IR, f'(x) \leq 0$ donc $\forall x \in I$, $f'(x) \leq 0$

$\forall x \in I$, $g(x) \geq -20 \Rightarrow 0 < -g(x) \leq 20$

Scanned by CamScanner

$\in I,\ (e^x-1)^2 \geq 40 \Rightarrow \frac{1}{(e^x-1)^2} \leq \frac{1}{40}$ On a

$\in I, 0 < -g(x) \leq 20$ et $\frac{1}{(e^x-1)^2} \leq \frac{1}{40}$ donc

$\in I, 0 < \frac{-g(x)}{(e^x-1)^2} \leq \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$ c'est-à-dire

$\frac{g(x)}{(e^x-1)^2} \geq -\frac{1}{2}$. Comme $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x-1)^2}$ alors il vient

$\forall x \in I,\ f'(x) \geq -\frac{1}{2}$. D'où $\forall x \in I,\ -\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 0$.

ontrons par récurrence que pout tout
$\in \mathbb{N}$, on a $u_n \in I$

P(n) la propriété « $u_n \in I$ pour tout n de $\mathbb{N}$ »
$= 2 \in I$ donc P(0) est vraie.

posons P(n) vraie et démontrons que P(n + 1) est vraie.
par hypothèse $2 \leq u_n \leq 2,5$;

$u_n \leq 2,5 \Leftrightarrow f(2,5) \leq f(u_n) \leq f(2)$ car f est
ment décroissante sur IR. $f(2,5) \approx 2,22 > 2$ et
$= 2,30 > 2,5$ donc $2 \leq 2,22 \leq f(u_n) \leq 2,30 \leq 2,5$ et
$_{+1} \leq 2,5$ par conséquent P(n + 1) est vraie. D'où
out n de $\mathbb{N}$, on a $u_n \in I$

ntrons que pour tout
$\mathbb{N}$, on a $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

st dérivable sur I et $\forall x \in I, -\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 0$ c'est-à-

$x \in I, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$; $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$ et $\alpha \in I$. D'après

alité de la moyenne on a $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$. D'où

out n de $\mathbb{N}$, on a $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

ons que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

$| \leq \frac{1}{2}|u_0 - \alpha|$

$| \leq \frac{1}{2}|u_1 - \alpha|$

où

$| \leq \frac{1}{2}|u_{n-1} - \alpha|$

pliant ces inégalités membre à membre et après
ation, on obtient $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \times |u_0 - \alpha|$

$2 \leq \alpha \leq 2,5 \Leftrightarrow -2,5 \leq -\alpha \leq -2 \Leftrightarrow -0,5 \leq u_0 - \alpha \leq 0$

$-0,5 \leq u_0 - \alpha \leq 0 \Rightarrow |u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2}$. On adonc

$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \times |u_0 - \alpha| \Rightarrow |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{2}$ d'où

$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

Sujet 14 correction 2nd tour 2015

Exercice 1

1.Résolvons (E)

$9y'' + 49y = 0 \Leftrightarrow y'' + \frac{49}{9}y = 0 \Leftrightarrow y'' + \left(\frac{7}{3}\right)^2 y = 0$.

Les solutions de (E) sont donc les définies sur IR par

$x \mapsto A\cos\left(\frac{7}{3}x\right) + B\sin\left(\frac{7}{3}x\right)$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$

2 Déterminons la solution f de (E) vérifiant

$f(0) = \sqrt{3}$ et $f'(0) = 7$.

On a $f(x) = A\cos\left(\frac{7}{3}x\right) + B\sin\left(\frac{7}{3}x\right)$ donc

$f(0) = \sqrt{3} \Leftrightarrow A\cos(0) + B\sin(0) = \sqrt{3} \Leftrightarrow A = \sqrt{3}$

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -\frac{7}{3}A\sin\left(\frac{7}{3}x\right) + \frac{7}{3}B\cos\left(\frac{7}{3}x\right)$

$f'(0) = 7 \Leftrightarrow -\frac{7}{3}A\sin(0) + \frac{7}{3}B\cos(0) = 7 \Leftrightarrow B = 3$ d'où

$f(x) = \sqrt{3}\cos\left(\frac{7}{3}x\right) + 3\sin\left(\frac{7}{3}x\right)$

3.Montrons que pour tout réel x,

$f(x) = 2\sqrt{3}\cos\left(\frac{7}{3}x - \frac{\pi}{3}\right)$

Pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{3}\cos\left(\frac{7}{3}x\right) + 3\sin\left(\frac{7}{3}x\right) \\ &= \sqrt{3+9}\left[\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}\cos\left(\frac{7}{3}x\right) + \frac{3}{\sqrt{12}}\sin\left(\frac{7}{3}x\right)\right] \\ &= 2\sqrt{3}\left[\frac{1}{2}\cos\left(\frac{7}{3}x\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{7}{3}x\right)\right] \\ &= 2\sqrt{3}\left[\cos\frac{\pi}{3}\cos\left(\frac{7}{3}x\right) + \sin\frac{\pi}{3}\sin\left(\frac{7}{3}x\right)\right] \\ &= 2\sqrt{3}\cos\left(\frac{7}{3}x - \frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

D'où pour tout réel x, $f(x) = 2\sqrt{3}\cos\left(\frac{7}{3}x - \frac{\pi}{3}\right)$

4. Résolvons dans $]0; 2\pi[$, $f(x) = \sqrt{6}$

Scanned by CamScanner

$f(x)=\sqrt{6} \Leftrightarrow 2\sqrt{3}\cos\left(\frac{7}{3}x-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{6}$

$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{7}{3}x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{7}{3}x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{7}{3}x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{4}+2k\pi \\ ou \\ \frac{7}{3}x-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{4}+2k\pi\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{\pi}{4}+\frac{6k\pi}{7} \\ ou \\ x=\frac{\pi}{28}+\frac{6k\pi}{7}\end{cases}$

cherchons les valeurs de k pour lesquelles x est dans $]0;2\pi[$

Pour $x=\frac{\pi}{4}+\frac{6k\pi}{7}$, on a $0<\frac{\pi}{4}+\frac{6k\pi}{7}<2\pi$

$0<\frac{\pi}{4}+\frac{6k\pi}{7}<2\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4}<\frac{6k\pi}{7}<\frac{7\pi}{4} \Leftrightarrow -7\pi<24k\pi<49\pi$

$-7\pi<24k\pi<49\pi \Leftrightarrow -\frac{7}{24}<k<\frac{49}{24} \Leftrightarrow -0,29<k<2,04$

donc on a k prend les valeurs 0 ; 1 ; 2 les valeurs de x correspondantes sont $\frac{\pi}{4};\ \frac{31\pi}{28};\ \frac{55\pi}{28}$

Pour $x=\frac{\pi}{28}+\frac{6k\pi}{7}$, en menant un raisonnement similaire on trouve Pour $k=0;\ k=1;\ k=2$ et les valeurs de x correspondantes sont $\frac{\pi}{28};\ \frac{25\pi}{28};\ \frac{49\pi}{28}$. Doù

$S=\left\{\frac{\pi}{4};\ \frac{31\pi}{28};\ \frac{55\pi}{28};\frac{\pi}{28};\ \frac{25\pi}{28};\ \frac{49\pi}{28}\right\}$

5. Calculons la valeur moyenne de f sur $\left[\frac{3\pi}{14};\frac{3\pi}{7}\right]$

$v=\frac{1}{\frac{3\pi}{7}-\frac{3\pi}{14}}\int_{\frac{3\pi}{14}}^{\frac{3\pi}{7}}2\sqrt{3}\cos\left(\frac{7}{3}x-\frac{\pi}{3}\right)dx$

$v=\frac{28\sqrt{3}}{3\pi}\left[\frac{3}{7}\sin\left(\frac{7}{3}x-\frac{\pi}{3}\right)\right]_{\frac{3\pi}{14}}^{\frac{3\pi}{7}}$ après calcul on obtient

$v=\frac{6-2\sqrt{3}}{\pi}$

Exercice 2

1. Le nombre de tirages possibles es : $C_{10}^2=45$

2. On peut tirer 2 boules jaunes ; 2 boules rouges ; 2 boules noires ; 1 boule jaune et 1 boule rouge , 1 boule jaune et 1 boule noire ; 1 boule rouge et 1 boule noire. D'où Les valeurs prises par X sont : -6 ; -2 ; -1 , 2 ; 3 ; 4.

3. Déterminons la loi de probabilité de X

$P(X=-6)=\frac{C_5^2}{45}=\frac{10}{45}=\frac{2}{9}$

$P(X=-2)=\frac{C_5^1\times C_2^1}{45}=\frac{10}{45}=\frac{2}{9}$

$P(X=-1)=\frac{C_5^1\times C_3^1}{45}=\frac{15}{45}=\frac{1}{3}$ $P(X=2)=\frac{C_2^2}{45}=\frac{1}{45}$

$P(X=3)=\frac{C_3^1\times C_2^1}{45}=\frac{6}{45}=\frac{2}{15}$ $P(X=4)=\frac{C_3^2}{45}=\frac{3}{45}=\frac{1}{15}$

D'où la loi de probabilité de X

x	-6	-2	-1	2	3	4
$P(X=x)$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{45}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{915}$

4. Calculons l'espérance mathématique de X.

$E(X)=-\frac{60}{45}-\frac{20}{45}-\frac{15}{45}+\frac{2}{45}+\frac{18}{45}+\frac{12}{45}=\frac{-63}{45}$. Doù

$E(X)=-\frac{7}{5}$

5. Calculons la variance de X

$V(X)=E\left(X^2\right)-\left[E(X)\right]^2$

$V(X)=\frac{360+40+15+4+54+48}{45}-\frac{49}{25}=\frac{2164}{225}$

Problème

Partie A

1.a) Montrons que f est dérivable sur IR.

La fonction $x\mapsto e^{-3x}$ est dérivable sur IR de plus φ est dérivable sur IR donc f est dérivable sur IR car produit de fonctions dérivable sur IR.

b) Exprimons $f'(x)$ en fonction de $\varphi(x)$ et de $\varphi'(x)$

$f'(x)=-3e^{-3x}\varphi(x)+e^{-3x}\varphi'(x)=e^{-3x}\left[\varphi'(x)-3\varphi(x)\right]$

2. Exprimons $f'(x)$ en fonction de x

$f'(x)=e^{-3x}\left[\varphi'(x)-3\varphi(x)\right]$ Comme φ est solution de (E) alors $\varphi'(x)-3\varphi(x)=\frac{-3e}{\left(1+e^{-3x}\right)^2}$ donc

$f'(x)=e^{-3x}\left[\frac{-3e}{\left(1+e^{-3x}\right)^2}\right]=\frac{-3e\times e^{-3x}}{\left(1+e^{-3x}\right)^2}=\frac{-3e^{1-3x}}{\left(1+e^{-3x}\right)^2}$

b) Déterminons l'expression de $f(x)$ en fonction de x.

f est la primitive de f' qui prend la valeur $\frac{e}{2}$ en 0

$f'(x)=-\frac{e\left(1+e^{-3x}\right)'}{\left(1+e^{-3x}\right)^2}$ donc $f(x)=\frac{-e}{1+e^{-3x}}+k;k\in IR$

$f(0)=\frac{e}{2}\Leftrightarrow -\frac{e}{2}+k=\frac{e}{2}\Leftrightarrow k=e$. D'où

$f(x)=\frac{-e}{1+e^{-3x}}+e=\frac{-e+e+ee^{-3x}}{1+e^{-3x}}=\frac{e^{1-3x}}{1+e^{-3x}}$

Scanned by CamScanner

rtie B

Déterminons les limites de h

$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-3x}\times e}{e^{-3x}\left(e^{3x}+1\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e}{e^{3x}+1} = e$

$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{1-3x}}{1+e^{-3x}} = 0$ On en déduit que (C)

met deux asymptotes dont les équations sont
$=0$ et $y=e$.

) Calculons h'(x).

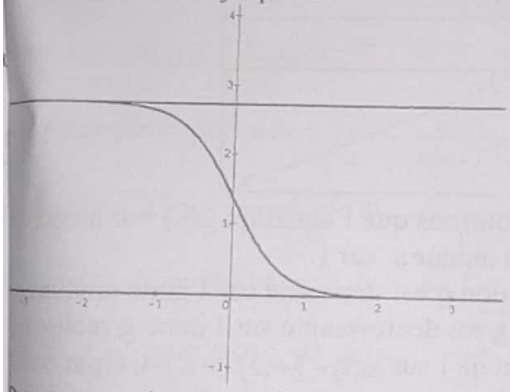
$(x) = \frac{-3e^{1-3x}}{\left(1+e^{-3x}\right)^2}$

Déterminons le sine de h'(x).

$\in\mathbb{R}, e^{1-3x}>0$ et $\left(1+e^{-3x}\right)^2>0$ donc $h'(x)<0$. On
éduit que h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
ssons son tableau de variations

x	$-\infty$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	
$h(x)$	e	↘	0

çons (C) et ses asymptotes



Donnons une interprétation graphique de I_α
présente l'aire, en unité d'aire, du domaine
itée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les
s d'équations $x=0$ et $x=\alpha$.
lculons I_α en fonction de α

$\left[-\frac{e}{3}\times\ln\left(1+e^{-3x}\right)\right]_0^\alpha = \frac{e\ln 2}{3} - \frac{e}{3}\ln\left(1+e^{-3\alpha}\right)$

minons la limite de I_α

$\lim_{\alpha\to+\infty} I_\alpha = \frac{e\ln 2}{3}$

C

ontrons que $\forall n\in\mathbb{N},\ U_n>0$

$1]$, $e^{\frac{x}{n}}>0$ et $h(x)>0$ donc $U_n>0$

b) Etudions le sens de variations de (U_n)

$U_{n+1}-U_n = \int_0^1 h(x)\left(e^{\frac{x}{n+1}} - e^{\frac{x}{n}}\right)dx$

$\forall x\in[0;1], n+1>n \Rightarrow \frac{x}{n} > \frac{x}{n+1} \Rightarrow e^{\frac{x}{n}} > e^{\frac{x}{n+1}}$ donc

$\forall x\in[0;1],\ e^{\frac{x}{n+1}} - e^{\frac{x}{n}} < 0$ par suite $\forall x\in[0;1]$,

$h(x)\left(e^{\frac{x}{n+1}} - e^{\frac{x}{n}}\right) < 0$ et ainsi $U_{n+1}-U_n<0$ d'où la suite

(U_n) est décroissante.

c) la suite (U_n) est minorée $(U_n>0)$ et décroissante donc la suite (U_n) est convergente.

2 a) Montrons que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ I_1 < U_n < e^{\frac{1}{n}} I_1$

On a $0\le x\le 1 \Leftrightarrow 0\le\frac{x}{n}\le\frac{1}{n}\Leftrightarrow 1\le e^{\frac{x}{n}}\le e^{\frac{1}{n}}$

$1\le e^{\frac{x}{n}}\le e^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow h(x)\le h(x)e^{\frac{x}{n}}\le e^{\frac{1}{n}}h(x)$ car h(x)>0

En intégrant, on obtient

$\int_0^1 h(x)dx \le \int_0^1 h(x)e^{\frac{x}{n}}dx \le \int_0^1 h(x)e^{\frac{1}{n}}dx$ soit

$I_1\le U_n\le e^{\frac{1}{n}}I_1$ d'où $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ I_1<U_n<e^{\frac{1}{n}}I_1$

c) En déduisons la limite de la suite (U_n)

$I_1<U_n<e^{\frac{1}{n}}I_1$ et $\lim_{n\to+\infty} I_1 = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}}I_1 = I_1$ donc d'après le théorème des gendarmes $\lim_{n\to+\infty} U_n = I_1$

Sujet 15 1er tour 2016

Exercice 1

1)a) Ecrivons sous forme algébrique

$(1-i)^2 = 1-2i-1 = -2i$ donc $\boxed{(1-i)^2=-2i}$

Solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2=-2i$

$z^2=-2i \Leftrightarrow z^2=(1-i)^2 \Leftrightarrow z=1-i$ ou $z=-1+i$ d'où

$\boxed{S=\{1-i;-1+i\}}$

b) les$ valeurs de b et de c.²

on a $P(z)=z^4+bz^3+(c+2i)z^2+2biz+2ic$ et donc par identification on a $\begin{cases} b=-4(1+i)\\ c+2i=12i\\ 2bi=8(1-i)\\ 2ic=20\end{cases}$ En résolvons ce système on obtient $\boxed{b=-4(1+i)}$ et $\boxed{c=10i}$

2) Solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z)=0$

$P(z)=0\Leftrightarrow\left(z^2+2i\right)\left(z^2-4(1+i)z+10i\right)=0$

Scanned by CamScanner

$(z^2+2i)(z^2-4(1+i)z+10i)=0 \Leftrightarrow z^2+2i=0$ ou $z^2-4(1+i)z+10i=0$

$z^2+2i=0 \Leftrightarrow z^2=-2i \Leftrightarrow z=1-i$ ou $z=-1+i$

$z^2-4(1+i)z+10i=0 \Leftrightarrow [z-2(1+i)]^2+2i=0$

$[z-2(1+i)]^2+2i=0 \Leftrightarrow [z-2(1+i)]^2=-2i$ c'est-à-dire

$z-2(1+i)=1-i$ ou $z-2(1+i)=-1+i$ soit

$z=3+i$ ou $z=1+3i$. Finalement

$\boxed{S=\{1-i;-1+i;3+i;1+3i\}}$

3) a) Faisons\$ une figure

b) Ecrivons Z sous algébrique ²

$Z=\frac{z_{\overrightarrow{BA}}}{z_{\overrightarrow{BC}}}=\frac{1-i-(-1+i)}{1+3i-(-1+i)}=\frac{2-2i}{2+2i}=\frac{1-i}{1+i}=-i$ donc

$\boxed{Z=-i}$

c) Interprétons géométriquement le module et un argument de Z

On a : $|Z|=\left|\frac{z_{\overrightarrow{BA}}}{z_{\overrightarrow{BC}}}\right|=\frac{|z_{\overrightarrow{BA}}|}{|z_{\overrightarrow{BC}}|}=\frac{BA}{BC}$

$\arg(Z)=\arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{BA}}}{z_{\overrightarrow{BC}}}\right)=\arg(z_{\overrightarrow{BA}})-\arg(z_{\overrightarrow{BC}})$

$=\overline{(\vec{u};\overrightarrow{BA})}-\overline{(\vec{u};\overrightarrow{BC})}$

$=\overline{(\vec{u};\overrightarrow{BC})}+\overline{(\vec{u};\overrightarrow{BA})}=\overline{(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA})}$

Un argument de Z est $\overline{(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA})}$

d) Nature du traingle ABC

$|Z|=|-i|=1$ et $|Z|=\frac{BA}{BC}$ donc $\frac{BA}{BC}=1$ soit $BA=BC$

$\arg(Z)=\arg(-i)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ or un argument de Z est

$\overline{(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA})}$ donc $\overline{(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA})}=-\frac{\pi}{2}$ d'où le triangle ABC est rectangle et isocèle en B

Nature de ABCD

$z_{\overrightarrow{BA}}=z_{\overrightarrow{BC}}=2+2i$ cela signifie que ABCD est un parallélogramme. De plus ABC est un triangle rectangle et isocèle en B , on en déduit que ABCD est un carré

Exercice 2

1) Calculons les coordonnées de $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix},\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}$ donc $\boxed{\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\3\\2\end{pmatrix}}$

2) Calculons la distance du point I au plan (ABC)

$d(I,(ABC))=\frac{\left|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\overrightarrow{IA}\right|}{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|}$

On a $\overrightarrow{IA}\begin{pmatrix}0\\-2\\-3\end{pmatrix}$, $\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\overrightarrow{IA}=-6-6=-12$

$\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|=\sqrt{36+9+4}=7$ d'où $\boxed{d(I,(ABC))=\frac{\left|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\overrightarrow{IA}\right|}{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|}=\frac{12}{7}}$

$D(I,(ABC))\neq 0$ donc $I\notin(ABC)$; les points I, A, B, C ne sont pas coplanaires.

3) a) Calculons l'aire du triangle ABC

$A_1=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|=\frac{7}{2}u.a$ $\boxed{A_1=\frac{7}{2}u.a}$

b) Calculons V le volume

$V=\frac{1}{3}\times A_1\times d(I,(ABC))=\frac{1}{3}\times\frac{7}{2}\times\frac{12}{7}=2u.v$, $\boxed{V=2u.v}$

Problème

Partie A

1)Limites de g aux bornes de I.

$\lim\limits_{x\to 1}g(x)=g(1)=2$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 1}g(x)=2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\ln x)=-\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty}$

2) Sens de variations de g

g est dérivable sur I et pour tout x de I $g'(x)=-\ln x$ pour tout x de I $\ln x\geq 0$ donc $g(x)\leq 0$. Par suite g est décroissante sur I.

Tableau de variation de g

x	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	
$g(x)$	2 ↘	$-\infty$

3) Démontrons que l'équation g(x) = 0 admet une solution unique α sur I.

La fonction g est dérivable sur I donc continue sur I. de plus g est décroissante sur I donc g réalise une bijection de I sur $g(I)=]-\infty;2]$. $0\in]-\infty;2]$ par conséquen l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans

Vérifions que $\alpha\in]3,5;4[$

$g(3,5)=0,125$ et $g(4)=-0,6$. On a : $g(3,5)\times g(4)<0$ par suite $\alpha\in]3,5;4[$

4) Signe de g sur I.

La fonction g est décroissante sur I et $g(\alpha)=0$. Donc d'après le tableau de variation $g(x)\geq 0$ pour tout x de $[1;\alpha]$ et $g(x)\leq 0$ pour tout x de $]\alpha;+\infty[$

Partie B

1)Limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x-1}=0$ et $\lim\limits_{x\to 0}e^x=1$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1}$

Pour tout $x\geq 1$, $f(x)=\frac{\ln x}{x}\times\frac{x}{x+1}$

Scanned by CamScanner

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}=1$ donc $\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=0}$

Etude de la dérivabilité de f en 1

ur tout $x\geq 1$,

$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{\ln x}{(x+1)(x-1)}=\frac{\ln[(x-1)+1]}{x-1}\times\frac{1}{x+1}$

$x-1=0$ et $\lim_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$ donc $\lim_{x\to1}\frac{\ln[(x-1)+1]}{x-1}=1$

$\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$ par suite $\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$\frac{1}{x-1}=-\infty$ $\lim_{x\to-\infty}xe^x=0$ donc $\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=0$

8 $\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\neq\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ donc la fonction

'est pas dérivable en 1.

erprétation graphique

$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{1}{2}$; (C) admet une demi tangente à

te de 1 d'équation $y=\frac{1}{2}(x-1)$

$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=0$ (C) admet une demi tangente à

he de 1 d'équation $y=0$

alcul de $f'(x)$

tout $x\geq1$; $f'(x)=\frac{1+x-x\ln x}{x(x+1)^2}$

tout $x<1$; $f'(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}e^{\frac{1}{x-1}}$

ons que pour tout x de I $f'(x)=\frac{g(x)}{x(x+1)^2}$

tout x de I $f'(x)=\frac{1+x-x\ln x}{x(x+1)^2}$ et

$1+x-x\ln x$ donc Pour tout x de I $f'(x)=\frac{g(x)}{x(x+1)^2}$

e gne de $f'(x)$ pour tout x de $IR/\{1\}$

stout $x>1$, on a $x(x+1)^2>0$ et $f'(x)=\frac{g(x)}{x(x+1)^2}$ donc

ne de f' est celui de g. il s'en que :

sur $]1;\alpha[$ et $f'<0$ sur $]\alpha;+\infty[$

tout $x<1$, on a : $\frac{1}{(x-1)^2}>0$ et $e^{\frac{1}{x-1}}>0$ donc

sur $]-\infty;1[$

au de variation

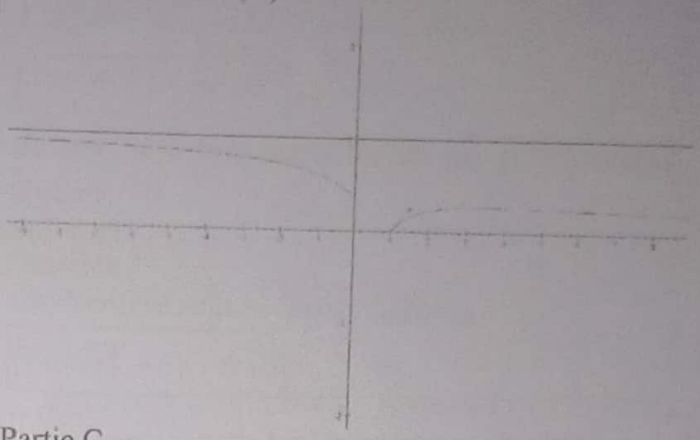
$-\infty$		1		α		$+\infty$
	$-$	‖	$+$	0	$-$	
1	↘	‖	↗	$f(\alpha)$	↘	0

5) Montrons que $f(\alpha)=\frac{1}{\alpha}$

On a $f(\alpha)=\frac{\ln\alpha}{1+\alpha}$ et $g(\alpha)=0\Leftrightarrow\ln\alpha=\frac{1+\alpha}{\alpha}$. Par suite

$f(\alpha)=\frac{\alpha+1}{\alpha}=\frac{1}{\alpha+1}$ d'où $f(\alpha)=\frac{1}{\alpha}$

6) Construisons (C)



Partie C

1)Calcul de J_0

Pour n = 0, $J_0=\frac{1}{3}\left(e^3-1\right)$

2) Montrons que $J_n\geq0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et pour tout $x\in[1;e]$; on a $\ln x\geq0$ donc pour tout $x\in[1;e]$ $x^2(\ln x)^n\geq0$ par suite pour tout $n\in\mathbb{N}$ $J_n\geq0$

3) Montrons que (J_n) est décroissante

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $J_{n+1}-J_n=\int_1^e x^2(\ln x)^n(\ln x-1)dx$ Pour tout $x\in[1;e]$ $\ln x-1\leq0$ et $x^2(\ln x)^n\geq0$ donc $J_{n+1}-J_n\leq0$ soit $J_{n+1}\leq J_n$ par suite (J_n) est décroissante

4) Montrons que (J_n) est convergente

La suite (J_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle est convergente.

5) Démontrons que $3J_{n+1}+(n+1)J_n=e^3$

$J_{n+1}=\int_1^e x^2(\ln x)^{n+1}dx$

En intégrant J_{n+1} une première fois par parties on obtient $J_{n+1}=\frac{1}{3}e^3-\frac{1}{3}(n+1)J_n$ et d'où $3J_{n+1}+(n+1)J_n=e^3$

6) Valeurs de J_1et J_2

En utilisant la relation $3J_{n+1}+(n+1)J_n=e^3$, on a :

$3J_1+J_0=e^3$ soit $J_1=\frac{2e^3+1}{9}$

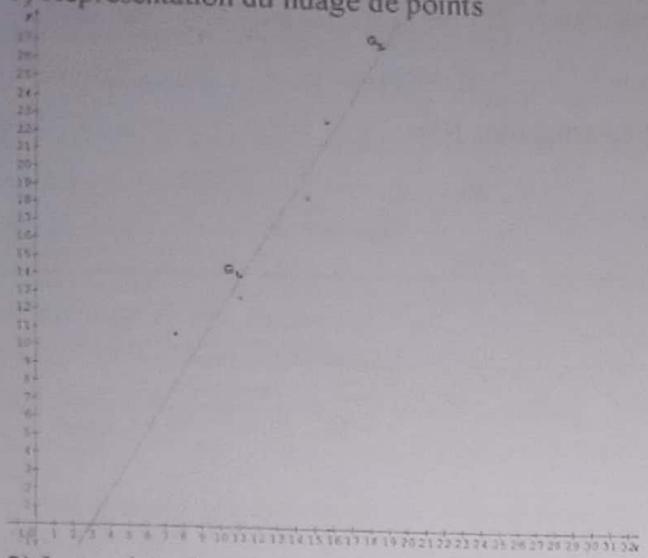
Aussi on a : $3J_2+J_1=e^3$ soit $J_2=\frac{5e^3-2}{27}$

Scanned by CamScanner

Sujet 16 2nd tour 2016

Exercice 1

1) Représentation du nuage de points



2) Les points du nuage semblent alignés donc un ajustement affine de ce nuage est possible.

3) après calcul on trouve $G_1(11.14)$ et $G_2(18;5.27)$

4) Equation cartésienne de (G_1G_2)

$(G_1G_2): y = \frac{26}{15}x - \frac{76}{15}$

5) Longueur de la face pour $x = 23,2$

$y = \frac{26}{15}(23,2) - \frac{76}{15} = 35,15$

Exercice 2

1) a) Etude du sens de variations de x et y

$x'(t) = \frac{-t}{1-t}$; on a $\frac{-t}{1-t} > 0\ \forall t \in]-\infty;0]$ donc x est strictement croissante sur $]-\infty;0]$.

$y'(t) = (t+1)e^t$

$\forall t \in]-\infty;-1]$; $t+1<0$ donc $y'(t)<0$ par suite y est décroissante sur $]-\infty;-1]$

$\forall t \in [-1;0]$; $t+1>0$ donc $y'(t)>0$ par suite y est croissante sur $[-1;0]$.

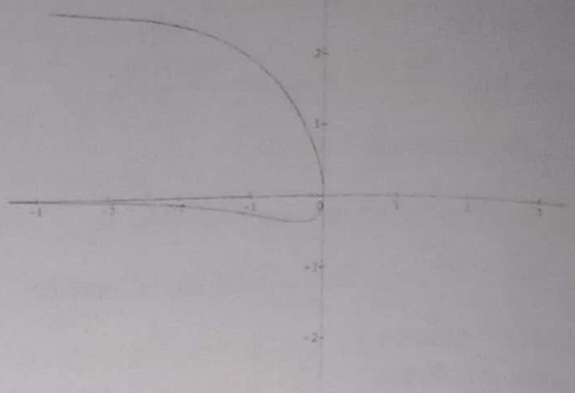
b) Tableau de variations conjoint de x et de y

t	$-\infty$		-1		0
$x'(t)$	$+$		$\frac{1}{2}$	$+$	0
$x(t)$	$-\infty$	↗	$-1+\ln 2$	↗	0
$y'(t)$		$-$	0	$+$	1
$y(t)$	0	↘	-1	↗	$+\infty$

2) a) Equations des tangentes à (Γ)

Pour t = 0 on a $(T_0): x = 0$; pour t = -1 on a $(T_1): y = -e^{-1}$

b) Construction de (Γ)



Problème

Partie A

$f(x) = x\left(1+e^{2-x}\right)$

1) $h(x) = 1+(1-x)e^{2-x}$

a) Etudions le sens de variations de h

$D_h = \mathbb{R}$

h est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$

$h'(x) = -e^{2-x} + (x-1)e^{2-x} = (x-2)e^{2-x}$

$\forall x \in]-\infty;2]$ $h'(x) \le 0$ donc h est décroissante sur $]-\infty;2]$

$\forall x \in [2;+\infty[$ $h'(x) \ge 0$ donc h est croissante sur $[2;+\infty[$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
h		↘	0	↗	

b) Déduction du signe de h sur IR

$h(2) = 1-e^0 = 0$ est un minimum de h sur IR donc $h(x) \ge 0$

2) a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

b) $\frac{f(x)}{x} = 1+e^{2-x}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ donc (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction (oy)

c) $f(x)-x = xe^{2-x}$, $f(x)-x = \frac{x}{e^x}\times e^2$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x) = 0$ donc $(\Delta): y = x$ est une asymptote oblique de (C) en $+\infty$

d) $f(x)-x = xe^{2-x}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)-x$		$-$	0	$-$	

Scanned by CamScanner

$]-\infty;0]$, (C) en dessous de (Δ) ;sur $[0;+\infty[$,
en dessus de (Δ) ;(C) et (Δ) se coupent en
rigine O

a) $f'(x)=1+e^{2-x}+x\left(-e^{2-x}\right)$;

$(x)=1+(1-x)e^{2-x}=h(x)$ donc $f'(x)\geq 0$

Déduction du sens de variation

$(x)\geq 0$ donc f est croissante surIR.

bleau de variation

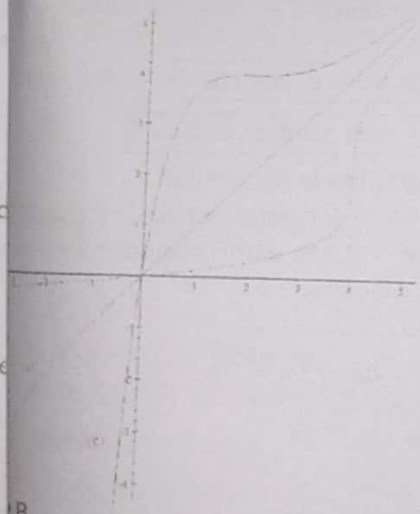
	$-\infty$	2	$+\infty$
	+	0	+
			$+\infty$
	$-\infty$		

est continue et strictement croissante sur
donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur
$(\mathbb{R})=J=IR$

$(2)=4\Leftrightarrow f^{-1}(4)=2$ et $f'(2)=0$ donc f^{-1}
pas dérivable en 4

ssons le tableau de variation de f^{-1}

	$-\infty$	$+\infty$
		$+\infty$
	$-\infty$	



B

$=\int_0^{\lambda}(f(x)-x)dx$ u a

$=4\int_0^{\lambda}xe^{2-x}dx$; $u(x)=x$ et $v'(x)=e^{2-x}$ On a

$=1$ et $v(x)=-e^{2-x}$

$A(\lambda)=4\left(\left[-xe^{2-x}\right]_0^{\lambda}+\int_0^{\lambda}e^{2-x}dx\right)$,

$A(\lambda)=4\left[-xe^{2-x}-e^{2-x}\right]_0^{\lambda}$, $a(\lambda)=4\left[(x+1)e^{2-x}\right]_0^{\lambda}$

$\boxed{A(\lambda)=4e^2-4(\lambda+1)e^{2-\lambda}}$

2. $A(\lambda)=4e^2-4\lambda e^{2-\lambda}-4e^{2-\lambda}$ donc

$\boxed{\lim_{\lambda\to+\infty}A(\lambda)=4e^2cm^2}$

$4e^2$ est l'aire de la partie limitée par (C);(Δ) et la droite x = 0

Sujet 19

Exercice 1

1)a) Ecriture sous la forme algébrique

$\boxed{\left(1+i\sqrt{3}\right)^2=-2+2i\sqrt{3}}$

b) Résolution dans $\mathbb{C}$

$\Delta=\left[6\left(1+i\sqrt{3}\right)\right]^2$ donc $\boxed{S=\left\{2+3i\sqrt{3};-4-3i\sqrt{3}\right\}}$

2) Résolution dans $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$

On a

$z_1^2-z_2^2=-4+\frac{4i\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow(z_1-z_2)(z_1+z_2)=-4+\frac{4i\sqrt{3}}{3}$ or

$z_1+z_2=-2$ donc $z_1-z_2=2-\frac{2i\sqrt{3}}{3}$. On obtient alors

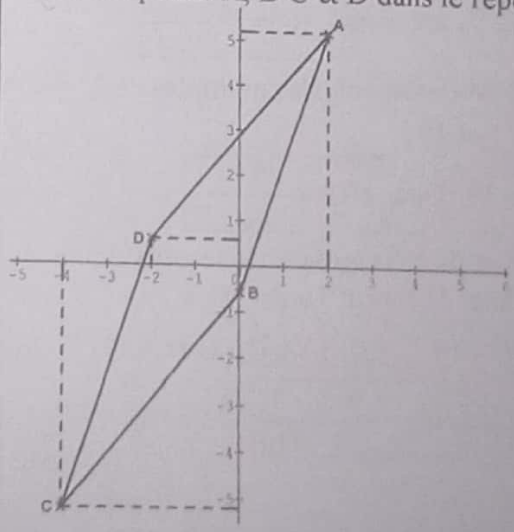
le système suivant : $\begin{cases}z_1+z_2=-2\\ z_1-z_2=2-\frac{2i\sqrt{3}}{3}\end{cases}$ donc après

calcul on obtient : $\boxed{S=\left\{\left(-\frac{i\sqrt{3}}{3},-2+\frac{i\sqrt{3}}{3}\right)\right\}}$

3) a) Les nombres complexes b, c et d

On a : $\boxed{b=-\frac{i\sqrt{3}}{3},c=-4-3i\sqrt{3}\text{ et }d=-2+\frac{i\sqrt{3}}{3}}$

Placé des points A, B C et D dans le repère



Scanned by CamScanner

b) Comparaison de a + c et b + d

$a+c=-2$ et $b+d=-2$ donc $\boxed{a+c=b+d}$

Déduction de la nature du quadrilatère ABCD

$\frac{a+c}{2}=\frac{b+d}{2}$ car $a+c=b+d$ les milieux des diagonales $[AC]$ et $[BD]$ ont la même affixe $\frac{a+c}{2}$ donc $\boxed{ABCD \text{ est un parallélogramme}}$

c) Un argument de Z

$Z=3\sqrt{3}i$ soit $Z=3\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$ donc un argument de Z est $\frac{\pi}{2}$

Interprétation géométrique d'un argument de Z

$\arg(Z)=(\overrightarrow{BD};\overrightarrow{AC})$ donc $\boxed{(\overrightarrow{BD};\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{2}}$

Nature exacte de ABCD

ABCD est un parallélogramme de plus $[BD]\perp[AC]$ car $(\overrightarrow{BD};\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{2}$ donc $\boxed{ABCD \text{ est un losange}}$

Exercice 2

1)Le nombre de tirages possibles

$C_{12}^{3}=\frac{12!}{3!(12-3)!}=220$

Il y a 220 tirages possibles

2) Probabilité des événements A, B, C, D, E et F

$\{2;3;5;7;11\}$ est l'ensemble des nombres premiers compris entre 1 et 12

$card(A)=C_5^3=10$ donc $\boxed{p(A)=\frac{10}{220}=\frac{1}{22}}$

$\{3;6;9;12\}$ est l'ensemble des nombres divisibles par 3 et compris entre 1 et 12

$card(B)=C_4^3=4$ donc $\boxed{p(B)=\frac{4}{220}=\frac{1}{55}}$

$card(C)=C_4^2\times C_8^1=48$ donc $\boxed{p(C)=\frac{48}{220}=\frac{12}{55}}$

$\{2;4;6;8;10;12\}$ est l'ensemble des multiples de 2 compris entre 1 et 12

$card(D)=C_6^3=20$ donc $\boxed{p(D)=\frac{20}{220}=\frac{1}{11}}$

Les différents cas de trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 3 sont : $(1;4;7)$; $(2;5;8)$; $(3;6;9)$; $(4;7;10)$; $(5;8;11)$ et $(6;9;12)$

$card(E)=6$ donc $\boxed{p(E)=\frac{6}{220}=\frac{3}{110}}$

Les différents cas de trois consécutifs d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ sont : $(12;6;3)$; $(8;4;2)$ et $(4;2;1)$

$card(F)=3$ donc $\boxed{p(F)=\frac{3}{220}}$

Problème

Partie A

1)a) Continuité de f en 3

$f(3)=3\sqrt{0}+1=1$; $\lim\limits_{x\to3^+}f(x)=\lim\limits_{x\to3^+}\left(x\sqrt{3-x}+1\right)=1$;

$\lim\limits_{x\to3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to3^-}\left(e^{3-x}+x-3\right)=1$

On a : $\lim\limits_{x\to3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to3^+}f(x)=f(3)$ donc

$\boxed{f \text{ est continue en 3}}$

b) Dérivabilité de f en 3

pour $x<3$, on a : $\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\frac{x\sqrt{3-x}}{x-3}=\frac{-x}{\sqrt{3-x}}$

$\lim\limits_{x\to3^-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to3^-}\left(\frac{-x}{\sqrt{3-x}}\right)=-\infty$ car

$\lim\limits_{x\to3^-}\sqrt{3-x}=0^+$

Donc $\boxed{f \text{ n'est pas dérivable à gauche de 3}}$

Pour $x>3$, on a :

$\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\frac{e^{3-x}+x-4}{x-3}=\frac{e^{3-x}-1}{x-3}+1=-\left(\frac{e^{3-x}-1}{3-x}\right)+1$

$\lim\limits_{x\to3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to3^+}\left[-\left(\frac{e^{3-x}-1}{3-x}\right)+1\right]=\lim\limits_{X\to0^-}\left[-\left(\frac{e^{X}-1}{X}\right)\right.$

Donc $\boxed{f \text{ est dérivable à droite de 3}}$

Conclusion : $\boxed{f \text{ n'est pas dérivable en 3}}$

Interprétation graphique du résultat

(C) admet une demi-tangente verticale à gauche au point d'abscisse 3 et une demi-tangente horizontale à droite au point d'abscisse 3

2) a) Limites de f

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x\sqrt{3-x}+1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{3-x}+\frac{1}{x}\right)=+\infty$

Déduction pour la courbe (C)

(C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées en $-\infty$

3) a) Démonstration que (D) est une asymptote à (C) en $+\infty$

Scanned by CamScanner

$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(x-3))=\lim_{x\to+\infty}e^{3-x}=0$ donc la droite (D)
une asymptote à (C) en $+\infty$

sition de (C) par rapport à (D) sur $]3;+\infty[$
ur tout $x\in]3;+\infty[$, $f(x)-(x-3)=e^{3-x}$ or
$\in]3;+\infty[, e^{3-x}>0$ donc $f(x)-(x-3)>0$
$\in]3;+\infty[$ Ainsi (C) est située au dessus de (D) sur
$+\infty[$

Position relative de (C) par rapport à (Δ) sur $[0;2]$
$\in[0;2], f(x)-(x+1)=x\sqrt{3-x}-x$. Pour $x\in[0;2]$
. $0\le x\le 2\Rightarrow 3-x\ge 1\Rightarrow\sqrt{3-x}\ge 1\Rightarrow x\sqrt{3-x}\ge x$;
$\sqrt{3-x}\ge x\Rightarrow x\sqrt{3-x}-x\ge 0$ donc
$\in[0;2], f(x)-(x+1)\ge 0$ par suite (C) est située au
sus de (Δ) sur $[0;2]$

) Calcul de $f'(x)$ $x\neq 3$

$x<3, f'(x)=\frac{3}{2}\left(\frac{2-x}{\sqrt{3-x}}\right)$; pour
$3, f'(x)=-e^{3-x}+1$
e de $f'(x)$ pour $x\neq 3$
$x<3$, $f'(x)$ est du signe de $2-x$ donc
$]-\infty;2[; f'(x)>0$ et $\forall x\in]2,3[, f'(x)<0$
$x>3$, on a : $3-x<0\Rightarrow e^{3-x}<1\Rightarrow -e^{3-x}+1>0$
$'(x)>0$

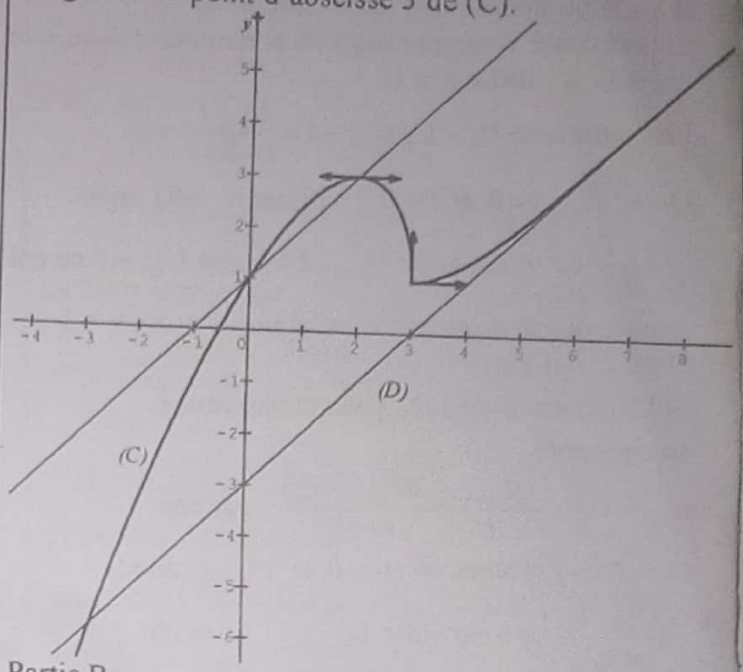
s de variation de f
strictement croissante sur $]-\infty;2]$ et sur
; f est strictement décroissante sur $[2,3]$
au de variation

	$-\infty$		2		3	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	+
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗ $+\infty$

Existence et unicité de α
dérivable et strictement croissante sur $]-\infty;2]$
f réalise une bijection de $]-\infty;2]$ sur $]-\infty;3]$
$;3]$ donc l'équation $f(x)=0$ admet une unique
on α dans $]-\infty;2]$
met 1 comme minimum sur $[2;+\infty[$ et $1>0$ donc
tion $f(x)=0$ n'admet pas de solution dans

sion : l'équation $f(x)=0$ admet une unique
α

Vérifions que $-1<\alpha<0$
$f(-1)=-1<0$ et $f(0)=1>0$ donc $-1<\alpha<0$
b) Construction de (C), (D), (Δ) et des demi-tangentes au point d'abscisse 3 de (C).



Partie B
1)Calcul de A
$A=\int_0^2|f(x)-(x+1)|dx\,u.a$
(C) est située au dessus de (Δ) donc
$|f(x)-(x+1)|=f(x)-(x+1)$
$A=\int_0^2\left(x\sqrt{3-x}-x\right)dx\times 4$. A près une intégration par parties on obtient $\boxed{A=\frac{24}{5}\left(-3+2\sqrt{3}\right)}$

2) Démonstration que la trajectoire de M est une partie de (C)
$x(t)=3-e^{2t}; y(t)=3e^{t}-e^{3t}+1, t\ge 0$
$t\ge 0\Leftrightarrow 2t\ge 0\Leftrightarrow e^{2t}\ge 1\Leftrightarrow 3-e^{2t}\le 2$ donc
$t\ge 0\Leftrightarrow x(t)\le 2$
$x(t)=3-e^{2t}\Leftrightarrow e^{t}=\sqrt{3-x(t)}$
$y(t)=3e^{t}-e^{3t}+1=3\sqrt{3-x(t)}-\left(\sqrt{3-x(t)}\right)^3+1$
$=3\sqrt{3-x(t)}-(3-x(t))\sqrt{3-x(t)}+1=x(t)\sqrt{3-x(t)}+1$
$=f[x(t)]$

On a : $y=f(x)$ avec $x<2$, donc la trajectoire de M est la partie de (C) sur $]-\infty;2[$

Sujet 20
Exercice 1

Scanned by CamScanner

1)Démontrons par récurrence que $U_n<1, \forall n\in\mathbb{N}$

Soit P la propriété « $U_n<1, \forall n\in\mathbb{N}$ »

Pour $n=0$, on a : $U_0=\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}<1$ c'est-à-die $U_0<1$

donc la propriété P est vraie pour $n=0$

Supposons P vraie au rang k>0 et démontrons qu'elle est vraie à l'ordre k + 1.

Par hypothèse $U_k<1$; $U_{k+1}-1=\frac{U_k-1}{1+2U_k}$

On a : $U_k-1<0$ et $1+2U_k>0$(car $U_k>0$) donc $\frac{U_k-1}{1+2U_k}<0$ c'est-à-die $U_{k+1}-1<0$ soit $U_{k+1}<1$ ce qui montre que la propriété P est vraie à l'ordre k + 1.

D'où $U_n<1, \forall n\in\mathbb{N}$

2) Démontrons que (U_n) est croissante et convergente

$U_{n+1}-U_n=\frac{3U_n}{1+2U_n}=\frac{2U_n(1-U_n)}{1+2U_n}$ comme $U_n<1, \forall n\in\mathbb{N}$ alors $1-U_n>0$ et $U_n>0$ donc $\frac{2U_n(1-U_n)}{1+2U_n}>0$ par suite $U_{n+1}-U_n>0$ et par conséquent la suite (U_n) est croissante

La suite (U_n) est croissante et majorée par 1(car $U_n<1$) donc (U_n) est convergente.

3) a) Démontrons que (V_n) est une suite géométrique

$V_{n+1}=\frac{U_{n+1}}{1-U_{n+1}}=\frac{\frac{3U_n}{1+2U_n}}{\frac{1-U_n}{1+2U_n}}=\frac{3U_n}{1-U_n}=3\times\frac{U_n}{1-U_n}=3V_n$ on a ainsi $V_{n+1}=3V_n$ donc (V_n) est une suite géométrique de raison 3. Le premier terme de (V_n) est $V_0=1$

b) Exprimons V_n en fonction de n

comme (V_n) est une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $V_0=1$ alors $V_n=V_0(3)^n$ soit $V_n=3^n$

Déduisons que $U_n=\frac{3^n}{1+3^n}$

$V_n=\frac{U_n}{1-U_n}\Leftrightarrow V_n(1-U_n)=U_n\Leftrightarrow U_n(1+V_n)=V_n\Leftrightarrow U_n=\frac{V_n}{1+V_n}$ soit $U_n=\frac{3^n}{1+3^n}$

c) Calculons la limite de (U_n)

$U_n=\frac{3^n}{1+3^n}=\frac{3^n}{3^n\left(\frac{1}{3^n}+1\right)}=\frac{1}{\frac{1}{3^n}+1}$ or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3^n}\right)=0$ donc

$\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=1}$

Exercice 2

1)a) Comparons les points M(t) et $M(\pi-t)$

$x(\pi-t)=\cos(\pi-t)=-\cos t=-x(t)$

$y(t)=\frac{\sin^2(\pi-t)}{2+\sin(\pi-t)}=\frac{\sin^2 t}{2+\sin t}=y(t)$

On a alors $M(t)$ et $M(\pi-t)$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

b) Restriction du domaine d'étude de (C) à $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

on a $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\Leftrightarrow-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\pi-\frac{\pi}{2}\le\pi-t\le\pi+\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\frac{\pi}{2}\le\pi-t\le\frac{3\pi}{2}$

comme $M(t)$ et $M(\pi-t)$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées alors on peut restreindre le domaine d'étude de (C) à $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ puis compléter la courbe par une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

2) a) Démontrons que $y'(t)=\frac{\sin t\cos t(4+\sin t)}{(2+\sin t)^2}$

$y'(t)=\frac{2\cos t\sin t(2+\sin t)-\cos t\sin^2 t}{(2+\sin t)^2}=\frac{\cos t\sin t(4+2\sin t)}{(2+\sin t)^2}$

soit $y'(t)=\frac{\sin t\cos t(4+\sin t)}{(2+\sin t)^2}$

b) Sens de variation de x et y sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

$x'(t)=-\sin t$ et $y'(t)=\frac{\sin t\cos t(4+\sin t)}{(2+\sin t)^2}$

$4+\sin t>0$(car $\sin t\ge-1$) et $(2+\sin t)^2>0$ et $\cos t\ge0$, $\forall t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ dont $y'(t)$ est du signe de $\sin t$

Pour $t\in\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$, $\sin t\le0$ donc $x'(t)\ge0$ et $y'(t)\le0$

Pour $t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, $\sin t\ge0$ donc $x'(t)\le0$ et $y'(t)\ge0$

x est croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$ et décroissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

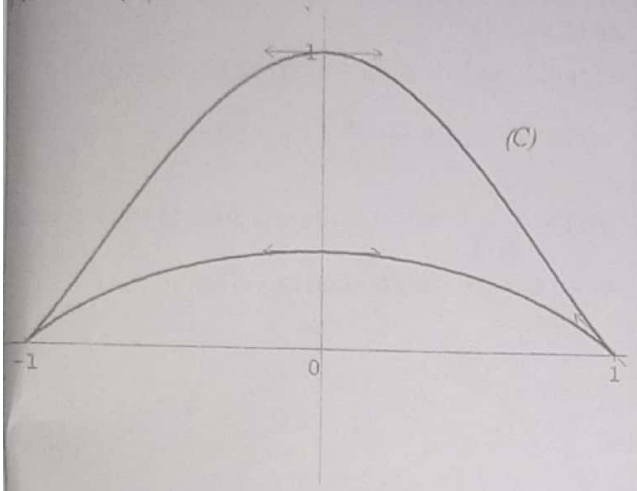
y est décroissante sur $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$ et croissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

c) Tableau de variation conjoint

Scanned by CamScanner

t	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	1 +	0	−−1
$y'(t)$	0 −	0	+ 0
$x(t)$	0 ↗	1	↘ 0
$y(t)$	1 ↘	0	↗ $\frac{1}{3}$

) Tracé de (C)



blème

rtie A

) Limites de f

$(1-x)=+\infty$donc $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-x}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)=-\infty$

nc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty}$

$\left(\frac{2}{x}-\ln x\right)=-\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty}$

$\frac{f(x)}{x}=\frac{x+1}{x}e^{1-x}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+1}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-x}=+\infty$ donc

$\left(\frac{f(x)}{x}\right)=+\infty$

$=\frac{2}{x^2}-\frac{\ln x}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x^2}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ donc

$\left(\frac{f(x)}{x}\right)=0$

en déduit que (C) admet une branche parabolique direction l'axe des ordonnées en $-\infty$ et une nche parabolique de direction l'axe des abscisses $+\infty$

ontinuité de f en 1

$)=2$; $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=2$ et $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=2$

On a : $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=f(1)$ donc f est continue en 1

2) a) Démontrons que

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=-2\left(\frac{e^X-1}{X}\right)+e^X \text{ si } x<1$$

$X=1-x \Leftrightarrow x=1-X$

Pour $x<1$,

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{(x+1)e^{1-x}-2}{x-1}=\frac{(2-X)e^X-2}{-X}$$

$$=\frac{2e^X-Xe^X-2}{-X}=\frac{2e^X-2}{-X}+e^X=-2\left(\frac{e^X-1}{X}\right)+e^X$$

b) Démontrons que $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{-2}{X+1}-\frac{\ln(X+1)}{X}$

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{\frac{2}{x}-\ln x}{x-1}=\frac{\frac{2}{X+1}-\ln(X+1)-2}{X}=\frac{2-(X+1)\ln(X+1)-2(X+1)}{X(X+1)}$$

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{2-(X+1)\ln(X+1)-2(X+1)}{X(X+1)}=\frac{-2}{X+1}-\frac{\ln(X+1)}{X}$$

c) Dérivabilité de f en 1

$\lim\limits_{x\to1^-}\left(\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right)=\lim\limits_{X\to0^-}\left(-2\left(\frac{e^X-1}{X}\right)+e^X\right)=-1$ donc

f est dérivable à gauche en 1 et $f'_g(1)=-1$

$\lim\limits_{x\to1^+}\left(\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right)=\lim\limits_{X\to0^+}\left(\frac{-2}{X+1}-\frac{\ln(X+1)}{X}\right)=-3$ donc

f est dérivable à gauche en 1 et $f'_d(1)=-3$

$f'_g(1)\neq f'_d(1)$ donc f n'est pas dérivable en 1

Interprétation graphique du résultat obtenu

(C) admet à gauche en 1 une demi-tangente de coefficient directeur -1 et à droite en 1une dem-tangente de coefficient directeur -3.

3) a) Détermination de $f'(x)$ pour tout $x\neq1$

Pour x<1, $f'(x)=-xe^{1-x}$ et pour x>1, $f'(x)=\frac{-2-x}{x^2}$

Signe de $f'(x)$

On a : $\begin{cases} f'(x)>0 \text{ pou } x<0 \\ f'(x)=0 \text{ pour } x=0 \\ f'(x)<0 \text{ pour } x\in\,]0;1[\,\cup\,]1;+\infty[\end{cases}$

b) Sens de variation de f

f est strictement croissante sur $]-\infty;0]$ et décroissante sur $[0;+\infty[$

Tableau de variation de f

Scanned by CamScanner

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	2	↘	$-\infty$

4) a) Existence et unicité de α sur $]1;+\infty[$

f est dérivable et strictement décroissante sur $]1;+\infty[$ donc f réalise une bijection de $]1;+\infty[$ sur $]-\infty;2[$. $0\in]-\infty;2[$ donc l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur $]1;+\infty[$

Vérification que $2,3<\alpha<2,4$

$f(2,3)=0,04$; $f(2,4)=-0,05$ donc

$f(2,3)\times f(2,4)<0$ par suite $2,3<\alpha<2,4$

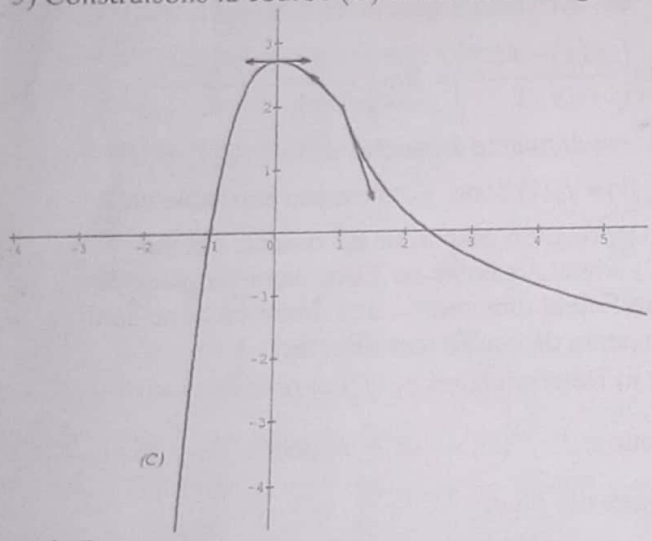
b) Résolution dans $]-\infty;1]$

dans $]-\infty;1]$, $f(x)=0$ donne $(x+1)e^{1-x}=0$;

$(x+1)e^{1-x}=0\Leftrightarrow x+1=0\Leftrightarrow x=-1$

$\boxed{S=\{-1\}}$

5) Construisons la courbe (C) et ses demi-tangentes



Partie B

1)Calcul de $\int_1^{\alpha}\ln x dx$

En intégrant par partie on trouve

$\boxed{\int_1^{\alpha}\ln x dx=\alpha\ln\alpha-\alpha+1}$

2) a) $A=\int_1^{\alpha}|f(x)|dx\,u.a=\int_1^{\alpha}f(x)dx\times 4$ car

$\forall x\in[1;\alpha], f(x)\geq 0$

$A=4\int_1^{\alpha}\left(\frac{2}{x}-\ln x\right)dx=4\int_1^{\alpha}\frac{2}{x}dx-4\int_1^{\alpha}\ln x dx$

$=4\left[2\ln x\right]_1^{\alpha}-4(\alpha\ln\alpha-\alpha+1)=8\ln\alpha-4(\alpha\ln\alpha-\alpha+1)$

Après calcul on obtient $\boxed{A=(8-4\alpha)\ln\alpha+4\alpha-4}$

b) α est une solution dans $]1;+\infty[$ de l'équation $f(x)=0$ donc $f(\alpha)=0$

$f(\alpha)=0\Leftrightarrow\frac{2}{\alpha}-\ln\alpha=0\Leftrightarrow\ln\alpha=\frac{2}{\alpha}$

En remplaçant $\ln\alpha$ par $\frac{2}{\alpha}$ dans A on obtient

$\boxed{A=4\alpha+\frac{16}{\alpha}-12}$

3) Démontrons que la trajectoire de M est une partie de (C)

$x(t)=e^t$ et $t\geq 0$ donnent $x(t)\geq 1$ et $t=\ln\left[x(t)\right]$

$y(t)=-t+2e^{-t}=-t+\frac{2}{e^t}=-\ln x(t)+\frac{2}{x(t)}$;

$y(t)==\frac{2}{x(t)}-\ln x(t)=f\left(x(t)\right)$ donc la trajectoire de M est la partie de (C) correspondant à $x\geq 1$

Scanned by CamScanner



70 440
1158

Scanned by CamScanner