

CODE DU SUCCES

OUR D-DJERI
TOME 1



MATHEMATIQUES

ruleD

ASSUEK K.
SCHNELL

Cel. 07 70 78 40
03 20 88 80
44 22 33 90

Refusez de bosser, c'est accepter d'échouer d'avance.

SOMMAIRE TOME I

OURO-BERT HOUGHEN



Pages:

T.D. N°1: LIMITES - CONTINUITÉ	4.
T.D. N°2: DÉRIVATION	12.
T.D. N°3: PRIMITIVE	19.
TD. N°4: PROBLEMES (1 ^{ère} Partie)	25.
TD. N°5: DENOMBREMENT PROBABILITE D'UN ÉVÉNEMENT	39.
TD. N°6: PROBABILITE CONDI- TIONNELLE & VARIABLE ALÉATOIRE	52.

Dans la même Collection:

TOME II

- * NOMBRES COMPLEXES.
- NOMBRES COMPLEXES &
GEOMETRIE.
- FONCTION LOGARITHME
NÉPÉRIEN.
- * FONCTION EXPONENTIELLE
NÉPÉRIENNE.
- * PROBLEMES (2^{ème} Partie).

TOME III

- * CALCUL INTEGRAL.
- * SUITES NUMÉRIQUES
- * STATISTIQUES.
- * EQUATIONS
DIFFÉRENTIELLES
- * PROBLEMES (3^{ème} partie).



TD N°1: LIMITES - CONTINUITÉ

Résumé



I. LIMITES

① Limites de référence

propriété: * a et c sont des nombres réels:

$$\lim_{x \rightarrow a} c = \lim_{x \rightarrow -\infty} c = \lim_{x \rightarrow +\infty} c = c. \quad \rightarrow \text{constante}$$

* a est un nombre réel et n un nombre entier naturel ($n \neq 0$)

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} -\infty & \text{si } n \text{ est impaire.} \\ +\infty & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} x^n = \lim_{x \rightarrow a} (x-a)^n = 0.$$

$$\bullet \text{Pour } n \text{ pair: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x-a)^n} = +\infty.$$

$$\bullet \text{Pour } n \text{ impair: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x-a)^n} = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x-a)^n} = +\infty.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

② Limite en l'infinie d'une fonction Polynôme ou rationnelle.

propriété 1: la limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ ou en $-\infty$ est égale à la limite de son terme de plus haut degré.

propriété 2: La limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$ ou en $-\infty$ est égale à la limite du quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

③ Limite de la Composée de deux fonctions

propriété: f et g sont des fonctions; a, l et l' des éléments de

$$\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$$

si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow l} f(x) = l'$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f \circ g(x) = l'$



④ Propriété de Comparaison

pté Soit f une fonction.

- s'il existe une fonction g telle que $f \geq g$ sur un intervalle $]a; +\infty[$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- s'il existe une fonction g telle que $f \leq g$ sur un intervalle $]a; +\infty[$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.
- s'il existe deux fonctions g et h telle que $g \leq f \leq h$ sur un intervalle $]a; +\infty[$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \ell$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$.

Exp: On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 1 - 3\sin x$.

1. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, 2x - 2 \leq f(x) \leq 2x + 4$.
2. Calculer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction f .

Rép: $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin x \leq 1$

$$-3 \leq -3\sin x \leq 3$$

$$-2 \leq 1 - 3\sin x \leq 4$$

$$2x - 2 \leq 2x + 1 - 3\sin x \leq 2x + 4$$

$$2x - 2 \leq f(x) \leq 2x + 4.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 2 = +\infty \text{ ainsi } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + 4 = -\infty \text{ ainsi } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

Exp₂ Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction $h(x) = \sqrt{\frac{2x-1}{x+1}}$.

Rép₂ Soit f et g les fonctions définies par $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ et $g(x) = \sqrt{x}$, on a donc $h(x) = g \circ f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \sqrt{2} \text{ ainsi } \lim_{x \rightarrow +\infty} g[f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \sqrt{2}.$$

II. ETUDE D'UNE BRANCHE INFINIE

Soit f une fonction et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative.

- (1) si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ alors la droite d'équation $x=a$ est asymptote verticale à $(\mathcal{C})$.
- (2) si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$ alors la droite d'équation $y=b$ est asymptote horizontale à $(\mathcal{C})$ en $\pm\infty$.
- (3) si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$ alors la droite d'équation $y=ax+b$ est asymptote oblique à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$ ou en $-\infty$.
- (4) si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ alors $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction (Ox) en $\pm\infty$.
- (5) si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$ alors $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction (Oy) en $\pm\infty$.



III CONTINUITÉ D'UNE FONCTION

① Continuité sur un intervalle:

a. Définition: soit f une fonction et x_0 un nombre réel, soit K un intervalle

- f est continue en x_0 si f est définie en x_0 et $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.
- f est continue sur K si f est continue en tout élément de K .

Exp₃ Etudier la limite et la continuité en 1 de la fonction f définie par
 $\forall x \in]-\infty; 1] ; f(x) = x^2 - x + 2$
 $\forall x \in]1; +\infty[; f(x) = x + 1$.

Rép₃ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - x + 2) = 2$; $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$
Comme $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ alors $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$.

Aussi $f(1) = 2$ par suite f est continue en 1 car $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 2$.



b. Propriétés:

pté 1: soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle K

- Les fonctions $f+g$; $f-g$; $k \cdot f$ ($k \in \mathbb{R}$) et $|f|$ sont continues sur K .
- si g ne s'annule pas sur K , alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur K .
- si f est positive sur K alors $\sqrt{f}$ est continue sur K .

② Prolongement par Continuité:

f est une fonction d'ensemble de définition D_f ; a un nombre réel n'appartenant pas à D_f . On suppose que f admet une limite finie ℓ en a . Alors la fonction g définie par: $\begin{cases} \text{pour } x \in D_f \setminus \{a\} ; g(x) = f(x) \\ g(a) = \ell \end{cases}$, est

continue en a . g est appelée prolongement par Continuité de f en a .

Exp₄ On donne la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$.

Justifier que f admet un prolongement par continuité en 1 et préciser ce prolongement.

Rép₄ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$; $1 \notin D_f$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+2) = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3 ; 3 \in \mathbb{R}$$

Comme $1 \notin D_f$ et $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$; $3 \in \mathbb{R}$ alors f admet un prolongement par Continuité en 1. soit g ce prolongement, on a $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} ; g(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} \\ g(1) = 3. \end{cases}$

③ Image d'un intervalle par une fonction Continue :

- Ppté 1: si f est une fonction continue sur un intervalle K alors $f(K)$ est un intervalle.
- Théorème (Valeurs intermédiaires) soit f une fonction continue sur un intervalle K et a et b deux éléments de K . Tout nombre réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ a au moins un antécédent par f compris entre a et b .
- Ppté 2: Soit f une fonction continue sur un intervalle K . s'il existe deux éléments a et b ($a < b$) de K tels que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a; b]$.
Si de plus f est strictement monotone sur $[a; b]$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[a; b]$.
- Ppté 3: soit f une fonction continue sur un intervalle K . si f ne s'annule pas sur K alors f garde un signe constant sur K .

④ Fonction Continue et monotone :

- Ppté: soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle K :
- f réalise une bijection de K vers $f(K)$.
 - la bijection réciproque de f notée f^{-1} est continue sur l'intervalle $f(K)$.
 - f^{-1} est strictement monotone et a le même sens de variation que f .
- Rmq: Les représentations graphiques $(\mathcal{C}_f)$ de f et $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ de f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.
- * Lorsqu'une fonction f est continue et strictement monotone sur K , $f(K)$ est un intervalle de même nature de K et ses bornes sont les limites de f aux bornes de K . on a ainsi :

K	f(K)	
	f est strictement croissante	f est strictement décroissante
$[a; b]$	$[f(a); f(b)]$	$[f(b); f(a)]$
$[a; b[$	$[f(a); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)[$	$] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x); f(a)]$
$]a; b]$	$] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)[$	$] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)[$
$[a; +\infty[$	$[f(a); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$	$] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); f(a)]$
$\mathbb{R}$	$] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$	$] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)[$



T.D. N°1: LIMITES · CONTINUITÉ

Exercices



EXON°1 Calculer les limites suivantes:

(1) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{x + 2}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} + 1\right)(x^2 + 1)$

(4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - 2x)^2}{1 - x}$

(5) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 1}{x - 2}$

(6) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1 - 4x}{x^2 - 9}$

EXON°2 On donne les fonctions f et g définies par:

$$f(x) = \frac{3x^2 - 5x + 1}{x + 9} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{7x^2 + 3x - 8}{x^2 - 3x + 2}$$

Calculer les limites de f et de g aux bornes de leur ensemble de définition respectif. Donner éventuellement une interprétation géométrique des résultats obtenus.

EXON°3 Etudier la Continuité en 2 des fonctions f et g définies par:

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; 2[; f(x) = 2x^2 - 4x - 4 \\ \forall x \in [2; +\infty[; f(x) = \frac{2x + 3}{x - 1} \end{cases} ; \quad \begin{cases} \forall x \in]-\infty; 2[; g(x) = 2x^2 - 4x - 4 \\ \forall x \in [2; +\infty[; g(x) = \frac{x - 6}{x - 1} \end{cases}$$

EXON°4 On donne les fonctions f et g définies par:

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x + 1}{|x + 1|}$$

- Justifier que f admet un prolongement par Continuité en 1 et préciser ce prolongement.
- Peut-on prolonger par Continuité g en -1? Justifier.

EXON°5 On considère la fonction g définie par $g(x) = \frac{x^2 + 2x}{|x| - 2}$

- Déterminer l'ensemble de définition D_g de g .
- Ecrire $g(x)$ sans le symbole « Valeur absolue » sur D_g .
- Calculer les limites de g aux bornes de D_g .
- Justifier que g est prolongeable par Continuité en -2 puis préciser ce prolongement qu'on notera f .

EXON°6 Calculer les limites suivantes:

(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x})$

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 1}{\sqrt{x^3 + x^2 + 8}}$

(3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})$



$$\begin{aligned} \rightarrow (4) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2+7} + 3x) \quad (5) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2+7} - 3x) \quad (6) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{5x-2} - \sqrt{x+1}) \\ (7) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{5-x} - \sqrt{1-x}) \quad (8) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+3x-2} + x) \quad (9) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x+4} - \sqrt{2}}{x^2-4} \\ (10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{4x^2} \quad (11) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) \quad (12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} + 1}{x + \sqrt{x}} \end{aligned}$$

EXON°7 Etudier la continuité en 1 de la fonction f définie par:

$$\begin{cases} \text{Pour } x \in]-\infty; 1[; f(x) = \frac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}-1} \\ \text{Pour } x \in]1; +\infty[; f(x) = -x^2+4x-4 \end{cases}; f(1) = -1$$

EXON°8 On pose $P(x) = 4x^2 - x - 5$ et $f(x) = \frac{2x + \sqrt{x+5}}{x^2 - 1}$

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.
- Ecrire alors $P(x)$ sous la forme d'un produit de facteurs du premier degré.
- Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .
- Montrer que pour tout $x \in D_f$; $f(x) = \frac{4x-5}{(x-1)(2x-\sqrt{x+5})}$.
- En déduire la limite de f en -1 .
- f est-elle prolongeable par continuité en -1 ? Justifier.

EXO N°9 soit la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2x - \sqrt{-x^2+2x+3}}{x-1}$

- Justifier de $D_f = [-1; 1[\cup]1; 3]$.
- Factoriser $K(x) = 5x^2 - 2x - 3$.
- Calculer la limite de f en 1.
- En déduire que f admet en 1 un prolongement par continuité g et le définir.

EXO N°10 soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{|x+1|}{1-|x-1|}$.

- Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .
- Exprimer pour tout x de D_f $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.
- Calculer les limites de f en 0; 2; $+\infty$ et $-\infty$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
- Etudier la continuité de f en -1 .
- Etudier la dérivabilité de f en -1 . Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

EXO N°11 soit f la fonction définie Comme suit:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} \text{ pour } x \in]4; +\infty[\\ f(x) = x \text{ pour } x \in]-\infty; 4[\\ f(4) = a^2 - 1 \end{cases}$$



→ Déterminer le nombre réel positif a pour que f soit continue en 4.

EXON°12: On donne la fonction f_a définie par $f_a(x) = \frac{ax^2 + (a^2+1)x + a}{x-5}$ ($a \in \mathbb{R}$)

- 1 Déterminer l'ensemble de définition D_{f_a} de f_a .
- 2 Déterminer suivant les valeurs de a les limites éventuelles respectives de f_a , en $+\infty$; $-\infty$ et en 5.
- 3 Pour quelle(s) valeur(s) de a la fonction f_a admet-elle un prolongement par continuité en 5?

EXON°13 1a. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

1b Déterminer les limites suivantes: (a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x^2}{x+1}$

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \sin \frac{1}{x}$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x}$

(5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2}$

(6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x}$

(7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$

EXON°14 1. Démontrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{2}$.

2 Déterminer les limites suivantes:

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{4x^2}$ et (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin x} - 1}{2x}$

EXON°15 On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$.
On pose $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

- 1 Déterminer l'ensemble de définition de f .
- 2a Montrer que pour tout x élément de D_f ; $f(x) = \frac{2 \sin^2 x}{x^2}$.
- 2b Déterminer alors $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. Est-elle prolongeable par continuité en 0?

EXON°16 On donne $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ et $g(x) = x^2 - x \cos x$

- 1a Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $-\frac{1}{x} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$ et $x^2 - x \leq g(x) \leq x^2 + x$.
- 1b Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

EXON°17 On donne $h(x) = x + 2 \cos x$ et $k(x) = x^2 - 2 \cos(x^3)$.

- 1 Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$;
1a. $x - 2 \leq h(x) \leq x + 2$.
1b. $x^2 - 2 \leq k(x) \leq x^2 + 2$.
2. Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions h et k .



T1- 10

EXO N°18 On donne les fonctions f , g et h telles que :

$$f(x) = x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) ; g(x) = \sqrt{x} \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ et } h(x) = x^3 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

- 1 Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions f , g et h .
- 2 Montrer que :
 - 2a $\forall x \in D_f ; -x^2 \leq f(x) \leq x^2$.
 - 2b $\forall x \in D_g ; -\sqrt{x} \leq g(x) \leq \sqrt{x}$.
 - 2c $\forall x \in D_h ; -x^3 \leq h(x) \leq x^3$.
- 2d En déduire la limite en 0 des fonctions f , g et h .
- 3 On considère la fonction k définie sur $]1; +\infty[$ par $k(x) = \frac{2x + \sin x}{x-1}$.
 - 3a Justifier que $\forall x \in]1; +\infty[; \frac{2x-1}{x-1} \leq k(x) \leq \frac{2x+1}{x-1}$.
 - 3b En déduire la limite de k en $+\infty$.
- 4 On considère la fonction ℓ définie par $\ell(x) = \frac{x \cdot \cos x}{1+x^2}$.
 - 4a Déterminer l'ensemble de définition de ℓ .
 - 4b Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} ; \frac{-x}{1+x^2} \leq \ell(x) \leq \frac{x}{1+x^2}$.
 - 4c En déduire la limite de ℓ en $+\infty$ et en $-\infty$.

EXO N°19 1. Rappeler les limites suivantes :

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} \quad (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$$

2. Déterminer les limites en 0 de chacune des fonctions suivantes

$$f(x) = \frac{\sin^2 x}{x} \quad i(x) = \sqrt{x} \cdot \sin x \quad l(x) = \frac{\tan x - \sin x}{x}$$

$$g(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \quad j(x) = \frac{\tan x}{x^3} \quad m(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

$$h(x) = x \cdot \sin x \quad k(x) = \frac{\tan x}{\sin x}$$

EXO 5 Le jour tant attendu a beau être lointain, il finira toujours par arriver.

Le BAC, c'est maintenant et tout de suite qu'il se prépare, car après, il sera trop....

Schnell



T1 - 11

T.D. N°2: DERIVATION



Resumé

I. NOMBRE DERIVÉ EN x_0

Définition: soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert K . On dit que f est dérivable en x_0 lorsque: $\lim_{x \in K, x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a, (a \in \mathbb{R})$

On dit alors que a est le nombre dérivé de f en x_0 ; On écrit $f'(x_0) = a$.

N.B: a est le coefficient directeur de la tangente (T) à la courbe (Cf) au point d'abscisse x_0 .

- f est dérivable en x_0 si et seulement si $f'_d(x_0)$ et $f'_g(x_0)$ existent et sont égaux.
 - si $f'_d(x_0)$ et $f'_g(x_0)$ existent mais sont différents, alors la courbe (Cf) admet deux demi-tangentes au point $M_0(x_0; f(x_0))$.
 - Lorsque $f'(x_0) = 0$ alors (Cf) admet au point $M_0(x_0; f(x_0))$ une tangente horizontale.
 - Lorsque $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm \infty$; alors f n'est pas dérivable en x_0 ainsi (Cf) admet au point $M_0(x_0; f(x_0))$ une demi-tangente verticale.
 - Lorsque f est dérivable en x_0 ; l'équation de la tangente au point d'abscisse x_0 est: (T): $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.
- * $f'_d(x_0)$ et $f'_g(x_0)$ désignent respectivement les nombres dérivés de f à droite et à gauche en x_0 .

II. DÉRIVÉES USUELLES

(1) fonctions élémentaires



$f(x)$	$f'(x)$	Ensemble de dérivabilité
k ($k \in \mathbb{R}$)	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
x^n ($n \in \mathbb{Z}$)	$n x^{n-1}$	$\mathbb{R}^*$ si $n < 0$ $\mathbb{R}$ si $n > 0$

$f(x)$	$f'(x)$	Ensemble de dérivabilité
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$ $k \in \mathbb{Z}$

② Dérivées et opérations sur les fonctions

Fonction	Dérivée
$f + g$	$f' + g'$
λf ($\lambda \in \mathbb{R}$)	$\lambda f'$
$f \cdot g$	$f'g + g'f$
$\frac{1}{f}$	$-\frac{f'}{f^2}$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f'g - g'f}{g^2}$

Fonction	Dérivée
f^n ($n \in \mathbb{Z}^*$)	$n f' \cdot f^{n-1}$
$\sqrt{f}$	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$
$f(ax+b)$	$a \cdot f'(ax+b)$

③ Dérivée de fonctions Composées

Théorème: Soit U une fonction dérivable sur un intervalle K et V une fonction dérivable sur un intervalle contenant $U(K)$, la fonction $V \circ U$ est dérivable sur K et on a : $(V \circ U)' = U' \cdot (V' \circ U)$

Exp₁: On donne la fonction $f(x) = \cos\left(\frac{1}{1-x}\right)$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$
Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} : f'(x) = -\frac{1}{(1-x)^2} \cdot \sin\left(\frac{1}{1-x}\right)$.

④ Dérivée de la réciproque d'une fonction

Ppte: Soit f une fonction dérivable, strictement monotone sur un intervalle K telle que $\forall x \in K : f'(x) \neq 0$:

- la fonction f réalise une bijection de K vers $f(K)$
- la bijection réciproque f^{-1} est dérivable sur $f(K)$ et on a : $\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f'[f^{-1}]}$
- s'il existe x_0 élément de $f(K)$ alors : $(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x_0)]}$

Méthode: Comment Calculer $(f^{-1})'(b)$?

- f doit être continue et strictement monotone sur un intervalle.
- On détermine a , la solution de l'équation $f(x) = b$.
- On calcule $f'(a)$ et on vérifie que $f'(a) \neq 0$.
- On conclue que $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$.

Exp₂: Exo N° 15 page T1- 18



T1- 13

⑤. Sens de variation d'une fonction

soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- si $\forall x \in I ; f'(x) > 0$ alors f est croissante sur I .
- si $\forall x \in I ; f'(x) < 0$ alors f est décroissante sur I .
- si $\forall x \in I ; f'(x) = 0$ alors f est constante sur I .
- si f' s'annule en changeant de signe en x_0 alors f admet un extremum en x_0 , dans ce cas, $(\mathcal{E}f)$ admet en x_0 une tangente horizontale en $M_0(x_0; f(x_0))$.

⑥. Remarques

- R_1 . La fonction f est paire lorsque: $\forall x \in D_f, -x \in D_f, f(-x) = f(x)$, ainsi $(\mathcal{E}f)$ admet un axe de symétrie.
- R_2 . La fonction f est impaire lorsque: $\forall x \in D_f, -x \in D_f; f(-x) = -f(x)$, ainsi $(\mathcal{E}f)$ admet un centre de symétrie.
- R_3 . Le point $\Omega\left(\frac{a}{b}\right)$ est un centre de symétrie à $(\mathcal{E}f)$ lorsque: $\forall x \in D_f, (a-x) \in D_f; (a+x) \in D_f; f(a-x) + f(a+x) = 2b$.
- R_4 . La droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de $(\mathcal{E}f)$ lorsque: $\forall x \in D_f; (a+x) \in D_f; (a-x) \in D_f; f(a+x) = f(a-x)$.
- R_5 . Dans le plan muni d'un R.O.N (OIJ), si $A \in (OI)$ alors $y_A = 0$.
- R_6 . Dans le plan muni d'un R.O.N (OIJ); si $B \in (OJ)$ alors $y_B = 0$.

EXOS Seuls ceux qui ne font jamais rien ne se trompent jamais. Trompez-vous maintenant ! Car le "Jour J", la péccadille peut être fatale.

Péccadille = petite faute.

schnell



07 70 78 40
03 20 88 89
44 22 33 96
schnell



T.D. N°2 : DERIVATION



Exercices

EXO N°1 On donne les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = x^2 + 1 \text{ et } \begin{cases} g(x) = 2x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ g(x) = x^2 + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- 1 Etudier la dérivabilité de f en 1.
- 2 Etudier la dérivabilité de g en 0.

***EXO N°2** Calculer les limites suivantes :

$$(1) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x - \frac{1}{4}}{x - \frac{\pi}{3}} \quad (2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x-5} - 1}{x-2} \quad (3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{x-1}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{2x - \pi} \quad (5) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin x - 1}{6x - \pi} \quad (6) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \cos x - 1}{3x - \pi}$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x + 1}{x - \pi}$$

EXO N°3 On donne les fonctions f , g et h définies par :

$$f(x) = |x^2 - 4| ; \quad g(x) = \sqrt{x-2} ; \quad \begin{cases} h(x) = x^2 - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ h(x) = \frac{x-1}{x+1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- 1a Ecrire f sans le symbole de la valeur absolue.
- 1b Etudier la dérivabilité de f en 2.
- 2 Etudier la dérivabilité de g en 2.
- 3a Démontrer que h est continue en 1.
- 3b Etudier la dérivabilité de h en 1.

EXO N°4 Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{2x+1}{|x+1|+2}$

- 1 Déterminer l'ensemble de définition de f .
- 2 Exprimer $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.
- 3a Etudier la continuité de f en -1.
- 3b Etudier la dérivabilité de f en -1 puis en déduire l'ensemble de dérivabilité $D_{f'}$ de f .
- 4 Pour tout x de $D_{f'}$, calculer $f'(x)$.



07 70 71 40
03 20 77 89
44 22 33 96

Schnell

Ti

15

EX0 N°5 On donne les fonctions f et g définies par :

$$g(x) = x|x-1| \text{ et } \begin{cases} \forall x \in]-\infty; -3] ; f(x) = x + \sqrt{x^2 + 2x - 3} \\ \forall x \in [-3; +\infty[; f(x) = x + \sqrt{x^2 + 10x + 21} \end{cases}$$

- 1a. Ecrire $g(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.
1b. Calculer le nombre dérivé à gauche et le nombre dérivé à droite en 1 pour g .

1c. La fonction g est-elle dérivable en 1? Justifier.

2a. Justifier que $\forall x \in]-\infty; -3] ; \frac{f(x) - f(-3)}{x - (-3)} = 1 - \sqrt{\frac{x+1}{x+3}}$

2b. En déduire $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x) - f(-3)}{x - (-3)}$.

2c. Calculer $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x) - f(-3)}{x - (-3)}$

3a. La fonction f est-elle dérivable en -3? Justifier

3b. Donner une interprétation graphique des résultats obtenus.



EX0 N°6 On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\sqrt{5x+1} - 1}{x}$

1a. Montrer que $\forall x \in]0; +\infty[; f(x) = \frac{5}{\sqrt{5x+1} + 1}$

1b. En déduire que f admet un prolongement par continuité en 0. on notera g ce prolongement. Définir g .

2a. Montrer que $\frac{g(x) - g(0)}{x} = \frac{-25}{4[\sqrt{5x+1} + \frac{5}{2}x + 1]}$

2b. La fonction g est-elle dérivable en 0? si oui, déterminer alors $g'(0)$.

EX0 N°7 On donne les fonctions f ; g et h définies par :

$$\begin{cases} \text{pour } x \in [0; 1] ; f(x) = 5x^2 - 3 \\ \text{pour } x \in [1; 3] ; f(x) = 3x - 1 \end{cases} ; g(x) = |x^2 - 1| \text{ et } h(x) = \frac{x-2}{2-|x|}$$

1. Ecrire g et h sans le symbole de la valeur absolue.

2. Etudier la dérivabilité de f en 1; de g en 1 et de h en 0.

EX0 N°8 Pour chacune des fonctions suivantes, indiquer l'ensemble de dérivabilité, puis calculer sa dérivée.

$$a(x) = 3x^2 - 5x + 1.$$

$$d(x) = 5\sqrt{2x-3}$$

$$g(x) = (x^4 - 6)^3$$

$$j(x) = \left[\frac{3x-4}{x-1} \right]^2$$

$$m(x) = \sin(x - x^2)$$

$$b(x) = x - 1 + \frac{1}{x+2}$$

$$e(x) = \frac{2x^2 + 5x - 12}{7x - 1}$$

$$h(x) = (3x - 4)^5$$

$$k(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$n(x) = \cos(5x + 3)$$

$$c(x) = \tan x$$

$$f(x) = \frac{1}{(2x+3)^3}$$

$$i(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 13}$$

$$l(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x+1}}$$

$$o(x) = \frac{\sin 3x}{x} \quad \pi - 16$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \quad p(x) &= \sin 3x \cdot \cos 2x & q(x) &= \sin(3x - \frac{\pi}{4}) & h(x) &= \sin^2(2x - \frac{\pi}{4}) \\ n(x) &= \sqrt{3 + \cos 2x} & i(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}} & u(x) &= (\sin^3 x) \cdot \tan x \\ v(x) &= \frac{x \cdot \sqrt{x+1}}{2x-3} & z(x) &= \cos^2(3x+4) \end{aligned}$$

- EXO N°9** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x^2 - 2x|$.
- 1a Ecrire f sans le symbole de la valeur absolue.
 - 1b Etudier la dérivabilité de f en 0 et en 2.
 - 2 Déterminer l'ensemble de dérivabilité Df' de f .
 - 3 Calculer $f'(x)$.
 - 4 Calculer les limites de f aux bornes de Df .
 - 5 Dresser le tableau de variation de f .

- EXO N°10** On donne les fonctions f , g et h telles que:
- $$f(x) = x^3 - 3x + 1; \quad g(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + 1 \quad \text{et} \quad h(x) = -x^3 + 9x^2 - 24x + 17$$
- 1 Etudier les variations des fonctions f , g et h puis dresser pour chacune d'elle le tableau de variation.
 - 2 Déterminer le nombre de solutions des équations suivantes
 - 2a $\forall x \in \mathbb{R}; f(x) = 0$.
 - 2b $\forall x \in \mathbb{R}; g(x) = 0$.
 - 2c $\forall x \in \mathbb{R}; h(x) = 0$.

- EXO N°11** Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{5x}{x^2 + 4}$.
- 1 Déterminer l'ensemble de définition Df de f .
 - 2a Calculer les limites de f aux bornes de Df .
 - 2b En déduire l'équation de l'asymptote $\tilde{\alpha}(f)$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
 - 3 Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
 - 4a Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 0.
 - 4b Etudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à (T) .
 - 5 Montrer que f est impaire, puis interpréter graphiquement ce résultat.



- EXO N°12** m est un nombre réel et f_m est la fonction définie par:
- $$f_m(x) = \frac{x^3 + x^2 + x + m}{x^2}$$

- 1a Déterminer l'ensemble de définition de f_m .
- 1b En déduire les intervalles sur lesquels f_m est dérivable.
- 2a Calculer $f'_m(x)$.
- 2b Déterminer m pour que la représentation graphique de f_m ait en son point d'abscisse -1 une tangente horizontale.

EXO N°13

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + 1}$
 a et b étant deux nombres réels.

- 1a Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .
- 1b Calculer les limites de f aux bornes de D_f puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- 2a Calculer la dérivée $f'(x)$ de f en fonction de a et b .
- 2b Déterminer a et b pour que la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 0 ait pour équation : $y = 3x + 2$.
- 3a Pour les valeurs de a et b trouvés en 2b, montrer que $f(x) - (3x + 2) = \frac{x^2(-3x - 1)}{x^2 + 1}$.
- 3b Préciser la position de (T) par rapport à $(\mathcal{C}_f)$.
4. Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.

EXO N°14

On donne la fonction f et le nombre réel m tels que :

$$\begin{cases} \text{Pour } x \in]-\infty; 1]; & f(x) = \frac{x-1}{x+2} \\ \text{Pour } x \in [1; +\infty[& f(x) = m(x^2 - 1) \end{cases}$$

- 1a Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ puis $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.
- 1b f est-elle continue en 1 ? Justifier.
- 2a Montrer que $f'_g(1) = \frac{1}{3}$.
- 2b Déterminer m pour que f soit dérivable en 1.

EXO N°15

soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$.

- 1 Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .
- 2 Calculer les limites de f aux bornes de D_f .
- 3a Déterminer l'ensemble de dérivabilité $D_{f'}$ de f puis calculer $f'(x)$.
- 3b En déduire le sens de variation de f .
- 4a Dresser le tableau de variation de f .
- 4b Justifier que f réalise une bijection de $] -3; +\infty[$ vers un intervalle K que l'on précisera. soit f^{-1} la bijection réciproque de f sur $] -3; +\infty[$.
- 5a Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 1$.
- 5b Calculer $f'(4)$.
- 5c f^{-1} est-elle dérivable en 1 ? si oui, calculer $(f^{-1})'(1)$.
- 6a Expliciter la bijection réciproque f^{-1} de f .
- 6b Retrouver la valeur de $(f^{-1})'(1)$ calculer en 5c.

EXO 5: "Bosses" est "dur".

Dormir est "doux" mais

ECHOUE fait "mal", très mal !!!



07 70 78 40
03 20 88 89
44 22 33 96

Schnell

T1 18

T.D. N°3: PRIMITIVE

Résumé

I. DEFINITION

Soit f une fonction définie sur un intervalle K .
On appelle primitive de f sur K , toute fonction F de K vers $\mathbb{R}$ telle que, pour tout élément x de K , $F'(x) = f(x)$.

II. PROPRIÉTÉS

Propriété 1 : si f est continue sur un intervalle K alors f admet une primitive sur K .

Propriété 2 : soit f une fonction admettant une primitive F sur un intervalle K ;

- $\forall c \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto F(x) + c$ est une primitive de f sur K .
- Toute primitive de f sur K est de la forme $x \mapsto F(x) + c$ où $c \in \mathbb{R}$.

Propriété 3 : soit f une fonction admettant une primitive sur un intervalle K , y_0 un nombre réel et x_0 un élément de K . Il existe une primitive de f sur K et une seule qui prend la valeur y_0 en x_0 .

III. CALCUL DE PRIMITIVES

Fonction f	Primitives de f	sur
a ($a \in \mathbb{R}$)	$ax + c$	$\mathbb{R}$
x^n ($n \in \mathbb{N}$)	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^n}$ ($n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$)	$\frac{-1}{(n-1) \cdot x^{n-1}} + c$	$] -\infty; 0[\cup] 0; +\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$	$] 0; +\infty[$
x^n ($n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$)	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$] 0; +\infty[$ si $n > 0$ $] 0; +\infty[$ si $n < 0$
$\sin x$	$-\cos x + c$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x + c$	$\mathbb{R}$



schad.

T1

19

Fonction f	Primitive(s) de f	Sur
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$	$] (2k-1)\frac{\pi}{2}; (2k+1)\frac{\pi}{2} [; k \in \mathbb{Z}$
$U' \cdot U^n ; (n \in \mathbb{N})$	$\frac{U^{n+1}}{n+1} + C$	tout intervalle où U est dérivable.
$\frac{U'}{U^n} ; (n \in \mathbb{N}, \{1\})$	$\frac{-1}{(n-1) \cdot U^{n-1}} + C$	tout intervalle où U est dérivable et ne s'annule pas.
$\frac{U'}{\sqrt{U}}$	$2\sqrt{U} + C$	tout intervalle où U est dérivable et strictement positive.
$U' \cdot U^r (r \in \mathbb{R}, \{-1\})$	$\frac{U^{r+1}}{r+1} + C$	tout intervalle où U est dérivable et positive. (strictement positive, si $r < 0$.)
$U' \cdot \cos U$	$\sin U + C$	tout intervalle où U est dérivable.
$U' \cdot \sin U$	$-\cos U + C$	tout intervalle où U est dérivable.
$\frac{U'}{U} *$	$\ln U + C *$	tout intervalle où U est dérivable et ne s'annulant pas.

* Voir le Cour sur logarithme népérien ($\ln$)
 $C \in \mathbb{R}$.

EXO 5 Confiez vos études au TOUT-PUISSANT et
METTEZ VOUS À BOSSER À FOND, et selon
la volonté de Dieu, tout ira pour le
mieux.

Schnell
07 70 78 40
03 20 88 89
44 22 33 96



T.D. N°3 : PRIMITIVE

Exercices

EXO N°1 Dans chacun des cas suivants, F et f sont des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Démontrer que F est une primitive de f sur l'ensemble K .

- | | | |
|--|---|---------------------------------------|
| ① $F(x) = x^5 + 6x + 2013$; | $f(x) = 5x^4 + 6$; | $K = \mathbb{R}$ |
| ② $F(x) = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 7$ | $f(x) = 6(2x-1)^2$ | $K = \mathbb{R}$ |
| ③ $F(x) = -2\cos(3x+2)$ | $f(x) = 6\sin(3x+2)$ | $K = \mathbb{R}$ |
| ④ $F(x) = x + \frac{1}{x^2} + \sqrt{3}$ | $f(x) = 1 - \frac{2}{x^3}$ | $K = \mathbb{R}_+^*$ |
| ⑤ $F(x) = x\sqrt{x} + 18$ | $f(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ | $K =]0; +\infty[$ |
| ⑥ $F(x) = 130 + x \cdot \cos x$ | $f(x) = \cos x - x \sin x$ | $K = \mathbb{R}$ |
| ⑦ $F(x) = \sqrt{2x+1}$ | $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$ | $K =]-\frac{1}{2}; +\infty[$ |
| ⑧ $F(x) = \tan x - x - a$ ($a \in \mathbb{R}$) | $f(x) = \tan^2 x$ | $K =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ |
| ⑨ $F(x) = \frac{1}{18}(x^3-1)^6 + 500$ | $f(x) = x^2(x^3-1)^5$ | $K = \mathbb{R}$ |
| ⑩ $F(x) = (\frac{1}{x} - \sqrt{x})^2$ | $f(x) = \frac{(x\sqrt{x}-1)(2+x\sqrt{x})}{x^3}$ | $K =]0; +\infty[$ |

EXO N°2 Dans chacun des cas suivants, détermine les primitives sur $\mathbb{R}$ des fonctions.

- | | | |
|---|-------------------------------------|-------------------------------|
| $f(x) = x^3 + x^2 - 3$ | $g(x) = (-2x+3)(x-1)$ | $h(x) = (2x-3)^3$ |
| $k(x) = 5(2x+1)^9$ | $i(x) = x^4 + x^2 - 1$ | $j(x) = 8x^3 - 3x^2 - 2x - 5$ |
| $l(x) = 5x(5x^2-7)^4$ | $m(x) = \frac{2x-3}{(2x^2-6x+1)^3}$ | $n(x) = 3\sin(3x-2)$ |
| $p(x) = \frac{x(2x^2+1)}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$ | | |

EXO N°3 Dans chacun des cas suivants, justifier que les fonctions données admettent une primitive sur l'intervalle J_i donné, puis déterminer une primitive pour chacune d'elle

- | | |
|--|----------------------|
| $f(x) = x^3 - x^2 + \frac{1}{x^2} + 5$ | $J_1 =]0; +\infty[$ |
| $g(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 + 4}{x^3}$ | $J_2 =]0; +\infty[$ |



$$h(x) = \frac{3x^3 + 2x^2 + 1}{x^2}$$

$$l(x) = \frac{1}{(2x+1)^2}$$

$$m(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$J_3 =]0; +\infty[$$

$$J_4 =]-\frac{1}{2}; +\infty[$$

$$J_5 =]-\frac{1}{2}; +\infty[$$

$$n(x) = \frac{7}{(3x+2)^5}$$

$$J_6 =]1; +\infty[$$

EXON°4 Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives sur l'intervalle K_i des fonctions :

$$f(x) = \frac{-1}{\sqrt{x}}$$

$$K_1 =]0; +\infty[$$

$$g(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - x\sqrt{2}$$

$$K_2 =]0; +\infty[$$

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

$$K_3 =]1; +\infty[$$

$$i(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}$$

$$K_4 =]0; +\infty[$$

$$l(x) = \frac{2}{\sqrt{2x+1}}$$

$$K_5 =]-\frac{1}{2}; +\infty[$$

$$m(x) = \frac{5}{\sqrt{2x-1}}$$

$$K_6 =]\frac{1}{2}; +\infty[$$

$$n(x) = \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$$

$$K_7 =]-3; 3[$$

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{3x+5}}$$

$$K_8 =]-1; +\infty[$$

$$q(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-8}} \quad K_9 =]2; +\infty[$$

EXON°5 Dans chacun des cas suivants, déterminer le plus grand ensemble K sur lequel la fonction donnée admet une primitive puis déterminer les primitives des fonctions sur l'intervalle K

$$f(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$$g(x) = \sqrt{3-2x}$$

$$h(x) = (x-1) \cdot \sqrt{x^2-2x+3}$$

$$l(x) = \frac{-4x+6}{\sqrt{-x^2+3x+4}}$$

$$m(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^3-1}}$$

$$n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

EXON°6 soit f la fonction définie sur $] -2; +\infty[$ par $f(x) = (x+2) \cdot \sqrt{x+2}$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. En déduire une primitive de $g(x) = \sqrt{x+2}$ sur $] -2; +\infty[$.

EXON°7 f et g sont deux fonctions définies respectivement sur $]1; +\infty[$ et $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{3x^3 - 7x^2 + 5x + 1}{(x-1)^2} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x^3 + x^2 + 2x + 1}{x^3(x+1)^2}$$

1. Déterminer les nombres a ; b ; c ; m et n tels que :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-1)^2} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{m}{x^3} + \frac{n}{(x+1)^2}$$



→

e Déterminer une primitive de :

2a f sur $]1; +\infty[$.

2b g sur $]0; +\infty[$.

EXO N°8 soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{3x^2 - 6x + 5}{(x-1)^2}$.

1a Déterminer l'ensemble de définition D_h de h.

1b Déterminer les réels a et b tels que $\forall x \in D_h, h(x) = a + \frac{b}{(x-1)^2}$.

2. En déduire une primitive de h sur $]1; +\infty[$.

3. Déterminer la primitive de h sur $]1; +\infty[$ qui prend la valeur 8 en 3.

EXO N°9 soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{4 - (x-2)^2}{(x-2)^2}$.

1a Déterminer l'ensemble de définition D_g de g.

1b Montrer que pour tout x élément de D_g , $g(x) = \frac{4}{(x-2)^2} - 1$.

2a Déterminer le plus grand ensemble I sur lequel g admet des primitives.

2b Déterminer une primitive de g sur I.

2c Déterminer la primitive de g sur I qui s'annule en 3.

2d Déterminer la primitive de g sur I qui prend la valeur 3 en 0.

EXO N°10 soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-3) \cdot \sqrt{x-3}$.

1a Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.

1b Déterminer l'ensemble de dérivabilité $D_{f'}$ de f.

2 Montrer que $\forall x \in D_{f'}, f'(x) = \frac{3}{2} \sqrt{x-3}$.

3 soit h la fonction définie sur $]3; +\infty[$ par $h(x) = \sqrt{x-3}$.

3a En utilisant les résultats précédents, détermine une primitive de h sur $]3; +\infty[$.

3b Déterminer la primitive de h sur $]3; +\infty[$ qui s'annule en 4.

EXO N°11 Dans chacun des cas suivants, déterminer la primitive F_i de la fonction f_i sur l'intervalle K_i qui vérifie la condition indiquée:

$$f_1(x) = x + \sin x$$

$$K_1 = \mathbb{R}$$

$$F_1(0) = 2$$

$$f_2(x) = \cos x \cdot \sin^3 x$$

$$K_2 = \mathbb{R}$$

$$F_2(\pi) = 5$$

$$f_3(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$$

$$K_3 = \mathbb{R}$$

$$F_3(\frac{\pi}{3}) = \pi$$

$$f_4(x) = \sin x \cdot \cos^4 x$$

$$K_4 = \mathbb{R}$$

$$F_4(\pi) = 0$$

$$f_5(x) = 2 \cos x \sin^4 x$$

$$K_5 = \mathbb{R}$$

$$F_5(0) = 1$$

$$f_6(x) = x \cdot \cos(3x^2 - \frac{\pi}{4})$$

$$K_6 = \mathbb{R}$$

$$F_6(0) = 0$$

$$f_7(x) = 3 \sin x - 4 \cos x$$

$$K_7 = \mathbb{R}$$

$$F_7(\pi) = -1$$

$$f_8(x) = \frac{1}{\cos^3 x} + \sin x$$

$$K_8 =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$$

$$F_8(0) = 1$$

$$f_9(x) = (1 + \tan^2 x) \cdot \tan x$$

$$K_9 =]0; \frac{\pi}{2}[$$

$$F_9(\frac{\pi}{4}) = 0$$



EXON°12 On donne $f(x) = \cos^2 x - 1$.

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$.
2. En déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer la primitive de f qui prend la valeur $\frac{\pi}{2}$ en $\frac{\pi}{2}$.

EXO N°13

(Voir ln)

soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3x+1}{(2x+1)^2}$

- 1a Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .
- 1b Déterminer les nombres réels a et b tels que:
 $\forall x \in D_f; f(x) = \frac{a}{2x+1} + \frac{b}{(2x+1)^2}$.
- 2a En déduire une primitive de f sur $]-\frac{1}{2}; +\infty[$.
- 2b Déterminer la primitive F de f sur $]-\frac{1}{2}; +\infty[$ telle que $F(0)=1$.

EXO S: - Après la "basse", il y a
Wouhoooooooo DIEU MERCI!!!!

- Après la paresse, il y a
Eééééh Dieu!!!

Vous savez donc ce qu'il vous reste
à faire.



07 70 78 40
03 20 88 89
44 22 33 96
Schnell.



T.D. N°4: PROBLEMES

(1^{ère} partie)



PROBLEME N°1

On donne $f(x) = x^3 - 3x - 4$.

- 1 Déterminer l'ensemble de définition D_f de f , puis déterminer les limites de f aux bornes de D_f .
- 2 Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.
- 3a Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α avec $\alpha \in]1; +\infty[$.
- 3b Vérifier que $2 < \alpha < 3$.
- 3c Encadrer α par deux décimaux consécutifs d'ordre 1.
- 4 Déterminer le signe de f sur $\mathbb{R}$.
- 5 Montrer que f réalise une bijection de $]1; +\infty[$ sur un intervalle K que l'on précisera.
- 6 Soit f^{-1} la bijection réciproque de f sur $]1; +\infty[$. Dresser le tableau de variation de f^{-1} .

PROBLEME N°2

Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = -\frac{1}{4}x^3 + x^2 - 1 \text{ et } (E) \text{ sa courbe représentative}$$

dans le plan muni d'un R.O.N. (OIJ) $OI = OJ = 1\text{cm}$.

- 1 Déterminer l'ensemble de définition D_g de g .
- 2 Calculer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.
- 3 Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
- 4 A est le point de (E) dont l'abscisse est 2.
- 4a Déterminer une équation de la tangente (T) à (E) en A (Ecrire cette équation sous la forme $y = t(x)$).
- 4b On pose $d(x) = g(x) - t(x)$. Vérifier que $d(x) = -\frac{1}{4}x(x-2)^2$.
- 4c En déduire la position relative de (E) par rapport à (T) .
- 5 Tracer dans le R.O.N. (OIJ) la droite (T) et la courbe (E) .



PROBLEME N°3

Le plan est muni d'un R.O.N. (OIJ) : Unité : le cm

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$$

On désigne par (E) la représentation graphique de f .

- 1a Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .
- 1b Calculer les limites de f aux bornes de D_f et interpréter si possible les résultats trouvés.
- 2a Déterminer l'ensemble de dérivabilité $D_{f'}$ de f puis calculer la dérivée f' de f sur $D_{f'}$.
- 2b Etudier le sens de variation de f .

- 2c Dresser le tableau de variation de f .
- 3a Déterminer les nombres réels a ; b et c tel que $\forall x \in D_f; f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$.
- 3b On admet que pour tout $x \in D_f; f(x) = x-1 + \frac{1}{x-1}$.
Montrer que la droite (D) d'équation $y = x-1$ est une asymptote à (E_f) en $-\infty$ et en $+\infty$.
- 3c Étudier les positions relatives de (D) et (E_f) .
- 4 Déterminer une équation réduite de la tangente (T) à (E_f) au point d'abscisse 3.
- 5 Déterminer les coordonnées du point d'intersection A des droites (D) et (T) .
- 6a Recopier et Compléter le tableau suivant :

x	-3	-2	-1	0	0,5	1	1,5	2	3	4	5	6
$f(x)$												

- 6b Tracer dans le même repère la droite (T) ; les asymptotes à (E_f) ainsi que (E_f) .

PROBLEME N°4 soit f une fonction dont le tableau de variation est :

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	-2	$+\infty$	-2	$+\infty$

On note (E) la courbe représentative de f dans un R.O.N (O.I.J)
(Unité : 1 cm)

f est de la forme $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$ où a ; b et c sont des réels.

- 1 soit $f'(x)$ la dérivée de $f(x)$. Calculer $f'(x)$.
- 2a Donner la valeur de $f(-2)$; de $f(0)$; de $f'(-2)$ et de $f'(0)$
- 2b À l'aide de ces valeurs (2a) déterminer a ; b et c .
- 3 Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x+1$ est asymptote à (E) .
- 4 Étudier la position relative de (E) par rapport à (Δ) .
- 5 A est le point d'intersection des asymptotes à (E) .
- 5a Déterminer les Coordonnées du point A .
- 5b Justifier que le point A est centre de symétrie de la courbe (E)
- 6 Construire les asymptotes à (E) , ses tangentes horizontales et la courbe (E) dans le R.O.N.



PROBLEME N°5 soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x-1}$ et (E) sa représentation graphique dans un R.O.N (O.I.J)

- 1 Déterminer l'ensemble de définition D_g de g .
- 2 Calculer les limites de g aux bornes de D_g puis interpréter graphiquement si possible les résultats trouvés.

- 3 Montrer que $\forall x \in D_g; g'(x) = \frac{(x-1)^2 + 4}{(x-1)^2}$.
- 4 Etudier les variations de g puis dresser son tableau de variation.
- 5a Vérifier que $\forall x \in D_g; g(x) = x+2 + \frac{4}{x-1}$.
- 5b En déduire que la droite (D) d'équation $y = x+2$ est asymptote à (E) .
- 5c Etudier la position relative de (E) et (D) .
- 6 Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (E) avec l'axe des abscisses: (On notera ces points A et B avec $x_A > x_B$).
- 7 Déterminer les coordonnées de C, point d'intersection de (E) avec l'axe des ordonnées.
- 8 Justifier que le point $\Omega(1;3)$ est un centre de symétrie de (E) .
- 9 Tracer les asymptotes à (E) puis la courbe (E) dans le R.O.N.
(unité: 1cm) ; $(-6 \leq x \leq 10)$ et $(-10 \leq y \leq 16)$

PROBLÈME N°6 Soit la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{x^2 - 2x - 5}{x+1}$ et (E_f) sa courbe représentative dans un R.O.N (O.I.J) (unité graphique: 1cm)

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
- 2a Déterminer les réels $a; b$ et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$.
- 2b En déduire que (E_f) possède une asymptote oblique (D) dont on donnera une équation.
- 2c Etudier la position relative de la courbe (E) et de l'asymptote (D) .
- 3a Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Donner une interprétation éventuelle des résultats trouvés.
- 4a Calculer la dérivée $f'(x)$ de $f(x)$.
- 4b Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.
- 5 Donner l'équation de la tangente (T) à (E_f) au point d'abscisse 0.
- 6 Montrer que le point $K(-1; -4)$ est centre de symétrie de (E_f) .
- 7 Tracer dans un même repère la tangente (T) à la courbe (E_f) , les asymptotes à (E_f) et (E_f) .

PROBLÈME N°7

PARTIE A On donne dans $\mathbb{R}$ le polynôme $Q(x) = -x^2 + 2x$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $Q(x) = 0$.
2. Justifier que:
 - Pour tout nombre réel $x \in]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[; Q(x) < 0$
 - Pour tout nombre réel $x \in]0; 2[; Q(x) > 0$

PARTIE B

On donne la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par:

$$f(x) = \frac{-x^2 + 5x - 5}{x-1}$$

On désigne par (E) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un R.O.N (O.I.J)
Unité: (1cm).



T: 27

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f .
- 2a. Calculer les limites de f aux bornes de D_f .
- 2b. Justifier que la droite (Δ) d'équation $x=1$ est une asymptote à (E) .
- 3a. Justifier que $\forall x \in D_f; f(x) = -x+4 - \frac{1}{x-1}$.
- 3b. Démontrer que la droite (D) d'équation $y = -x+4$ est une asymptote à (E) en $-\infty$ et en $+\infty$.
- 3c. Déterminer la position relative de (E) par rapport à (D) .
- 4a. Démontrer que $\forall x \in D_f; f'(x) = \frac{Q(x)}{(x-1)^2}$.
- 4b. En déduire de la partie A le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x puis étudier les variations de f .
- 4c. Dresser le tableau de variation de f .
5. Justifier que (E) coupe l'axe (Ox) en deux points.
- 6a. Déterminer les coordonnées du point d'intersection K des asymptotes (Δ) et (D) de (E) .
- 6b. Montrer que le point K est le centre de symétrie de (E) .
7. Construire (Δ) , (D) et (E) dans le repère (Oxy) .

PROBLÈME N°8

PARTIE A

On considère la fonction g définie par $g(x) = -x^3 + 3x + 6$.



- 1a. Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.
- 1b. Étudier les variations de g , puis dresser son tableau de variation.
- 2a. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$.
- 2b. Vérifier que $2 < \alpha < 3$.
- 3a. Déterminer un encadrement de α par deux décimaux consécutifs d'ordre 1.
- 3b. Démontrer que:

$$- \forall x \in]-\infty; \alpha[; g(x) > 0$$

$$- \forall x \in]\alpha; +\infty[; g(x) < 0$$

PARTIE B On considère la fonction f définie par $f(x) = -x+1 - \frac{3}{x} - \frac{3}{x^2}$.
 On désigne par (E_f) la courbe représentative de f dans un R.O.N. (OIJ) (Unité : 1 cm).

- 1a. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
- 1b. Démontrer que la droite (D) d'équation $y = -x+1$ est une asymptote à (E_f) en $-\infty$ et en $+\infty$. Préciser une équation de l'autre asymptote.
- 2a. Montrer que $\forall x \in D_f; f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$.
- 2b. Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.
- 3a. Étudier les positions relatives de (E_f) et (D) .
- 3b. En déduire les coordonnées du point d'intersection A de (E_f) et (D) .
4. Soit h la restriction de f à $] -\infty; 0[$.

→

- 4a Démontrer que h réalise une bijection de $]-\infty; 0[$ sur un intervalle L que l'on précisera.
- 4b On note h^{-1} la bijection réciproque de h .
Dresser le tableau de variation de h^{-1} .
- 5 Tracer les asymptotes à $(\mathcal{C}_f)$ puis $(\mathcal{C}_g)$. (On prendra $a = 2, 4$ et $f(a) = -3, 2$
 $-8 \leq x \leq 8$ et $-14 \leq y \leq 10$).

PROBLEME N°9 On donne la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par:

$$f(x) = \frac{2x^3 + 3}{1 - x^2}.$$
 $(\mathcal{C}_f)$ est la courbe représentative de f dans un R.O.N. (O.I.J).
 Unité: 2cm sur (O.I); 1cm sur (O.J)

PARTIE A

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x^3 + 3x + 3$

- 1 Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition, Etudier les variations de g puis dresser son tableau de variation.
- 2a Montrer que l'équation $x \in [2; 3]; g(x) = 0$ admet une solution unique α .
- 2b Donner un encadrement de α par deux décimaux consécutifs d'ordre 1.
- 3 Déterminer le signe de g sur $\mathbb{R}$.

PARTIE B

- 1a Déterminer l'ensemble de définition D_f de f
- 1b Calculer les limites de f aux bornes de D_f
- 1c Interpréter graphiquement les limites de f en 1 et en -1.
- 2a Déterminer l'ensemble de dérivabilité $D_{f'}$ de f .
- 2b Montrer que $\forall x \in D_{f'}; f'(x) = \frac{2x \cdot g(x)}{(x^2 - 1)^2}$.
- 2c Etudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f .
- 3a Déterminer quatre nombres réels $a; b; c$ et d tels que:

$$\forall x \in D_f; f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{1 - x^2}$$
- 3b En déduire que la droite (D) d'équation $y = -2x$ est asymptote à $(\mathcal{C}_f)$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
- 3c Etudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ et de (D) sur D_f .
- 4 Montrer que $f(\alpha) = -3\alpha$.
- 5 Tracer les asymptotes à $(\mathcal{C}_f)$ ainsi que $(\mathcal{C}_g)$ dans le R.O.N. (O.I.J)
 (On prendra $a = 2, 2; f(a) = 6, 3; -4 \leq x \leq 4, -13 \leq y \leq 13$)
- 6 h est la restriction de f à l'intervalle $]-\infty; -1[$ et h^{-1} sa réciproque
- 6a Montrer que h est une bijection de $]-\infty; -1[$ vers un intervalle K que l'on précisera.
- 6b Dresser le tableau de variation de h^{-1} .



PROBLEME N°10 soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$.

- 1 Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .
- 2a Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- 2b Interpréter graphiquement les résultats trouvés.
- 3a Soit g le prolongement par continuité de f en 0. Trouver g .
- 3c Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}$.
- 3d Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)-g(0)}{x}$. La fonction g est-elle dérivable en 0?
- 4a Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \frac{1}{(\sqrt{x^2+1}+1)(\sqrt{x^2+1})}$.
- 4b En déduire le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation.
- 5 Déterminer une équation de la tangente (T) à (E_g) au point d'abscisse 0.
- 6 Tracer les asymptotes à (E_g) ; (T) et (E_g) dans un R.O.N.
(Unité graphique: 2cm ; $-6 \leq x \leq 6$; $-4 \leq y \leq 4$).

PARTIE B

- 1 Démontrer que g est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle K que l'on précisera. On note g^{-1} sa bijection réciproque.
- 2a Calculer $g(1/3)$ et démontrer que g^{-1} est dérivable en $1/2$. Calculer $(g^{-1})'(1/2)$.
- 2b Construire en pointillés $(E_{g^{-1}})$ dans le même R.O.N (OIJ).
- 3a Démontrer que $\forall x \in K; g^{-1}(x) = \frac{2x}{1-x^2}$.
- 3b Pour tout $x \in K$, calculer $(g^{-1})'(x)$ puis retrouver la valeur de $(g^{-1})'(1/2)$ calculée en 2a.

PROBLEME N°11 On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

définie par:
$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; 0[; f(x) = x - \frac{1}{2} - \frac{x+1}{x+2} \\ \text{pour } x \in [0; +\infty[; f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1 \end{cases}$$
 et

On désigne par (E_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (R.O.N) (OIJ) Unité: 1cm.

- 1 Déterminer l'ensemble de définition D_f de f puis calculer les limites de f aux bornes de D_f .
- 2a Étudier la continuité de f en 0.
- 2b Étudier la dérivabilité de f en 0 et donner une interprétation graphique des résultats.
- 3a Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat.



→

- 3b Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x - \frac{3}{2}$ est une asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$ en $-\infty$ et étudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à (Δ) sur $] -\infty; -2[$.
- 4a Pour $x \in] -\infty; 0[\setminus \{-2\}$, Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
- 4b Pour $x \in] 0; +\infty[$, Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
- 4c Donner les valeurs exactes de $f(-3)$; $f(-1)$ et $f(1)$ et dresser le tableau de variation de f .
- 5a Justifier que l'équation $(E) x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$ admet 2 solutions α et β ($\alpha < \beta$) telles que $\alpha \in] -2; -1[$ et $\beta \in] 1; 2[$.
- 5b Déterminer les valeurs approchées par défaut à 10^{-1} près de α et β .
- 5c Donner les coordonnées des points d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec (OI) .
6. Dans le plan muni du R.O.N. (OIJ) , tracer les tangentes à $(\mathcal{C}_f)$ aux points d'abscisses -3 ; -1 ; 1 ; et 0 ; toutes les asymptotes à $(\mathcal{C}_f)$ et Construire $(\mathcal{C}_f)$.
7. Déterminer graphiquement, selon les valeurs du réel m le nombre de solutions de l'équation $(E'): x \in \mathbb{R}; f(x) = m$.
8. soit h la restriction de f à $K = [1; +\infty[$.
- 8a Justifier que h réalise une bijection de K sur un intervalle L à préciser.
- 8b Soit h^{-1} la réciproque de h .
 h^{-1} est-elle dérivable en -2 ? Justifier.
- 8c Calculer $h(2)$ et démontrer que h^{-1} est dérivable en 3 puis donner la valeur exacte de $(h^{-1})'(3)$.
- 8d Tracer en pointillés dans le même repère (OIJ) la courbe $(\mathcal{C}_{h^{-1}})$ de h^{-1} .

PROBLÈME N°12

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par:

$$f(x) = |x-3| + \frac{1}{x-2}$$
 On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un R.O.N. (OIJ) , unité 2cm

PARTIE A

- 1a Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
- 1b Interpréter graphiquement les limites de f en 2 .
- 2a Ecrire f sans le symbole de la valeur absolue.
- 2b Montrer que pour $x \in] -\infty; 2[\cup] 2; 3[$; $\frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \frac{-x + 1}{x - 2}$
- 2c Montrer que pour $x \in] 3; +\infty[$; $\frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \frac{x - 3}{x - 2}$
- 2d Étudier la dérivabilité de f en 3 et calculer $f'(x)$.
- 2e Donner les conséquences graphiques de l'étude de la dérivabilité de f en 3 .
- 2f Étudier les variations de f et dresser le tableau de variation de f .
- 3a Montrer que les droites $(D_1): y = x - 3$ et $(D_2): y = -x + 3$ sont asymptotes à $(\mathcal{C})$ respectivement en $+\infty$ et en $-\infty$.
- 3b Étudier la position relative de $(\mathcal{C})$ avec (D_1) sur l'intervalle $] 2; +\infty[$.
- 4 Tracer dans le R.O.N. (OIJ) les asymptotes à $(\mathcal{C})$ puis $(\mathcal{C})$.



→

PARTIE B: Soit g la restriction de f à l'intervalle $] -\infty; 2[$.

On note g^{-1} la bijection réciproque de g et (E') sa représentation graphique.

- 1a Justifier que g réalise une bijection de $] -\infty; 2[$ vers un intervalle K que l'on précisera.
- 1b Donner le tableau de variation de g^{-1} .
- 2a Résoudre l'équation $x \in] -\infty; 2[; g(x) = 1$.
- 2b g^{-1} est-elle dérivable en 1, si oui calculer $(g^{-1})'(1)$.
- 3 Tracer (E') dans le même repère (OIJ) (on tracera (E') en pointillés).

PROBLÈME N°13

Soit f la fonction définie par :
$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x^2}{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On désigne par (E) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un R.O.N (OIJ); Unité 2cm.

- 1 Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .
- 2a Calculer les limites de f aux bornes de D_f .
- 2b Interpréter, si possible les résultats obtenus.
- 3 Étudier la continuité de f en 0.
- 4 Étudier la dérivabilité de f en 0.
- 5 Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
- 6 Tracer (E) avec ses tangentes en 0 et ses asymptotes éventuelles.

PROBLÈME N°14: soit f la fonction définie par: $f(x) = |1-x| - \frac{1}{x}$

On note (E) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un R.O.N (OIJ): Unité: 2cm sur(OI)
1cm sur(OJ)

- 1 Déterminer le domaine de définition D_f de f .
- 2a Écrire $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.
- 2b Déterminer les limites de f aux bornes de D_f .
- 2c Justifier que les droites (D_1) d'équation $y = 1-x$ et (D_2) d'équation $y = x-1$ sont asymptotes à (E) respectivement en $-\infty$ et en $+\infty$.
- 3a Étudier la dérivabilité de f en 1. Interpréter le résultat.
- 3b Déterminer les intervalles de $\mathbb{R}$ où f est dérivable.
- 3c Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
- 4a Tracer les asymptotes à (E) puis (E) .
- 4b Vérifier que le point $A(2; 1/2)$ appartient à (E) .
- 5 Soit g la restriction de f à l'intervalle $[1; +\infty[$.
- 5a Démontrer que g est une bijection de $[1; +\infty[$ vers un intervalle K que l'on déterminera. Soit g^{-1} la réciproque de g et (E') la courbe de g^{-1} .
- 5b Démontrer que g^{-1} est dérivable en $1/2$.
- 5c Calculer $(g^{-1})'(1/2)$.
- 6 Tracer en pointillés (E') dans le même repère.



PROBLEME N°15 Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{|x^2 - 6x + 5|}$ et (E) sa courbe représentative dans le plan muni d'un R.O.N (OIJ). Unité : 2cm.

- 1 Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .
- 2a Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (I) : $x^2 - 6x + 5 \geq 0$.
- 2b Exprimer alors $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.
- 2c Calculer les limites de f aux bornes de D_f .
- 3a Étudier la continuité de f sur D_f .
- 3b Étudier la dérivabilité de f en 1 et en 5.
- 3c En déduire l'ensemble K sur lequel f est dérivable.
- 4a Déterminer l'expression de la dérivée $f'(x)$ de f .
- 4b Étudier les variations de f ; puis dresser son tableau de variation.
- 5 Montrer que les droites (D_1) et (D_2) d'équation respective : $y = x - 3$ et $y = -x + 3$ sont asymptotes à (E) respectivement en $+\infty$ et en $-\infty$.
- 6 Montrer que la droite (D_3) d'équation $x = 3$ est un axe de symétrie de (E).
- 7 Déterminer les coordonnées des points A et B ; points d'intersection de (E) avec l'axe (OI) ($x_A < x_B$).
- 8 Déterminer les coordonnées du point C ; point d'intersection de (E) avec l'axe (OJ).
- 9 Tracer dans le R.O.N (OIJ), (D_1) ; (D_2) ; (D_3) et (E) $(-4 \leq x \leq 9)$ et $(-1 \leq y \leq 7)$.

PROBLEME N°16

PARTIE A On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 4x^3 - 9x^2 + 6x + 1.$$

- 1 Déterminer l'ensemble de définition D_g de g .
- 2a Calculer les limites de g aux bornes de D_g .
- 2b Étudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
- 2c1 Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α .
- 2c2 Vérifier que $\alpha \in]-1; 0[$.
- 2c3 Donner un encadrement de α par deux décimaux consécutifs d'ordre 1.
- 3 Justifier que : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty; \alpha[; g(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[; g(x) > 0 \end{cases}$

PARTIE B

Soit f la fonction numérique définie par :

$$\forall x \in]-\infty; 1[; f(x) = 2x^2 - x - \frac{2}{x-1}.$$

$$\forall x \in]1; +\infty[; f(x) = x - \frac{2}{x-1}.$$

$(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ sont respectivement les courbes représentatives de f sur $]-\infty; 1[$ et sur $]1; +\infty[$ dans le plan muni d'un R.O.N (OIJ). (Unité : 2cm) ; $-3 \leq x \leq 5$ et $-5 \leq y \leq 8$.

- 1a Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .
- 1b Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
- 2a Démontrer que $\forall x \in]-\infty; 1[; f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$ puis étudier le sens de variation de f sur $]-\infty; 1[$.



-
- 2b Etudier les variations de f sur $]1; +\infty[$.
 - 2c Dresser le tableau de variation de f .
 - 3a Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y=x$ est asymptote à (E_2) en $+\infty$.
 - 3b Etudier la position relative de (E_2) par rapport à (Δ) .
 - 4 Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$; puis interpréter graphiquement le résultat.
 - 5 Déterminer les coordonnées des points d'intersection:
 - 5a de (E_1) avec l'axe des ordonnées (On appellera A ce point).
 - 5b de (E_2) avec l'axe des abscisses (on appellera B ce point).
 - 6 Tracer (Δ) ; (E_1) et (E_2) dans le repère (OIJ).

PARTIE C

- Soit h la restriction de f à l'intervalle $]1; +\infty[$.
- 1a Justifier que h est une bijection de $]1; +\infty[$ sur un intervalle K que l'on déterminera. On note h^{-1} la bijection réciproque de h .
 - 1b Dresser le tableau de variation de h^{-1} .
 - 2a h^{-1} est-elle dérivable en 0? Justifier.
 - 2b Calculer $(h^{-1})'(0)$.
 - 3 Tracer en pointillés $(E_{h^{-1}})$, la courbe représentative de h^{-1} dans le même repère.

PROBLEME N°17

PARTIE A Soit g la fonction numérique définie par $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.

- 1 Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
- 2 Calculer $g'(x)$ et donner le sens de variation de g .
- 3 Dresser le tableau de variation de g .
- 4a Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
- 4b Montrer que $1,6 < \alpha < 1,7$.
- 5 En déduire le signe de g suivant les valeurs de x .

PARTIE B Soit f la fonction numérique de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}$.

On note (E) sa courbe représentative dans un R.D.N. (OIJ), unité: 2cm.

- 1 Déterminer l'ensemble de définition de f .
- 2a Calculer les limites de f en $-\infty$; en $+\infty$ et en -1 .
- 2b Interpréter graphiquement les résultats trouvés.
- 3a Montrer que $\forall x \in D_f$; $f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x^3)^2}$.
- 3b En déduire le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.
- 4 Montrer que $f(x) = \frac{2(1-x)}{3(1+x^2)}$.
- 5a Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à (E) au point d'abscisse 0.
- 5b Etudier la position relative de (E) et (T) sur l'intervalle $] -1; 1[$.
- 6 Tracer (T) , les asymptotes à (E) et la courbe (E) ; $\begin{cases} -4 \leq x \leq 4 \\ -7 \leq y \leq 6 \end{cases}$
(on prendra $\alpha = 1,7$; $f(\alpha) = -0,1$);



PARTIE C

h est la restriction de f à l'intervalle $] -\infty; -1[$.

- 1 Démontrer que h réalise une bijection de l'intervalle $] -\infty; -1[$ vers un intervalle K à préciser.
- 2a soit h^{-1} la bijection réciproque de h et $(\mathcal{E}')$ sa représentation graphique. Dresser le tableau de variation de h^{-1} .
- 2b Calculer $h(-2)$ puis $(h^{-1})'(-3/4)$.
- 3 Tracer en pointillés dans le même repère $(\mathcal{E}')$.

PROBLEME N°18

soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$ et $(\mathcal{E})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un R.O.N. (OIJ) Unité graphique: 1 cm



- 1 Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .
- 2 Calculer les limites de f aux bornes de D_f . Interpréter si possible les résultats obtenus.
- 3a Montrer que $\forall x \in D_f; f(x) - 2x = \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} + x}$.
- 3b En déduire que la droite (D) d'équation $y = 2x$ est une asymptote à $(\mathcal{E})$ en $+\infty$.
- 3c Etudier la position relative de $(\mathcal{E})$ par rapport à (D) sur $[1; +\infty[$.
- 4 Justifier que f est dérivable sur $] -\infty; -1[\cup] 1; +\infty[$.
- 5a Calculer $f'(x)$.
- 5b sachant pour $x < -1; \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} < -1$, étudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.
- 6 Tracer les asymptotes à $(\mathcal{E})$ puis $(\mathcal{E})$ dans le même repère (OIJ).
- 7 soit g la restriction de f à l'intervalle $] -\infty; -1[$.
- 7a Montrer que g réalise une bijection de $] -\infty; -1[$ vers un intervalle K que l'on précisera.
- 7b On note g^{-1} la bijection réciproque de g et $(\mathcal{E}')$ sa représentation graphique. Dresser le tableau de variation de g^{-1} .
- 8 Calculer $f(-2)$ puis le nombre dérivé de g^{-1} en $\sqrt{3} - 2$.
- 9 Tracer en pointillés la courbe $(\mathcal{E}')$ de g^{-1} dans le R.O.N. (OIJ).

PROBLEME N°19

PARTIE A soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $g(x) = 4x^3 - 9x^2 + 6x + 1$.

- 1a Calculer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.
- 1b Etudier les variations de g puis dresser son tableau de variation.
- 2a Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $] -\infty; 1/2[$.
- 2b Justifier que $\alpha \in] -1; 0[$.
- 2c Déterminer un encadrement de α par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 1.
3. Justifier que : pour tout $x \in] -\infty; \alpha[; g(x) < 0$.
pour tout $x \in [\alpha; +\infty[; g(x) \geq 0$.

PARTIE B

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 - x - \frac{2}{x-1} \sin x &]-\infty; 1[\\ x - \frac{2}{x-1} &]1; +\infty[\end{cases}$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un R.O.N. (OIJ) (l'unité : 2 cm)

- 1a Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$.
- 1b Interpréter graphiquement les résultats de 1a.
- 1c Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.
- 1d Étudier la position relative de $(\mathcal{C})$ et de (D) sur $]1; +\infty[$.
- 2a Démontrer pour tout $x \in]-\infty; 1[$; $f'(x) = \frac{8x}{(x-1)^2}$.
- 2b En déduire le sens de variation de f sur $]1; +\infty[$.
- 2c Déterminer le sens de variation de f sur $]1; +\infty[$.
- 2d Dresser le tableau de variation de f .
- 3a Montrer que $2 < f(1) < 4$; en déduire le signe de $f(x)$.
- 3b Déterminer les coordonnées des points A et B, points d'intersection de $(\mathcal{C})$ respectivement avec les axes (OI) et (OJ).
- 4a Démontrer que f réalise une bijection de $]1; +\infty[$ sur un intervalle K que l'on déterminera.
- 4b Déterminer le sens de variation de f^{-1} ; la bijection réciproque de f .
- 4c Dresser le tableau de variation de f^{-1} .
- 5a Tracer les asymptotes de $(\mathcal{C})$ et construire $(\mathcal{C})$.
- 5b Construire en pointillés (Γ) la courbe de f^{-1} dans le même repère (OIJ).



PROBLÈME N° 20

soit f une fonction dont le tableau de variation est :

f est de la forme $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$ où a ; b et c sont des nombres réels.

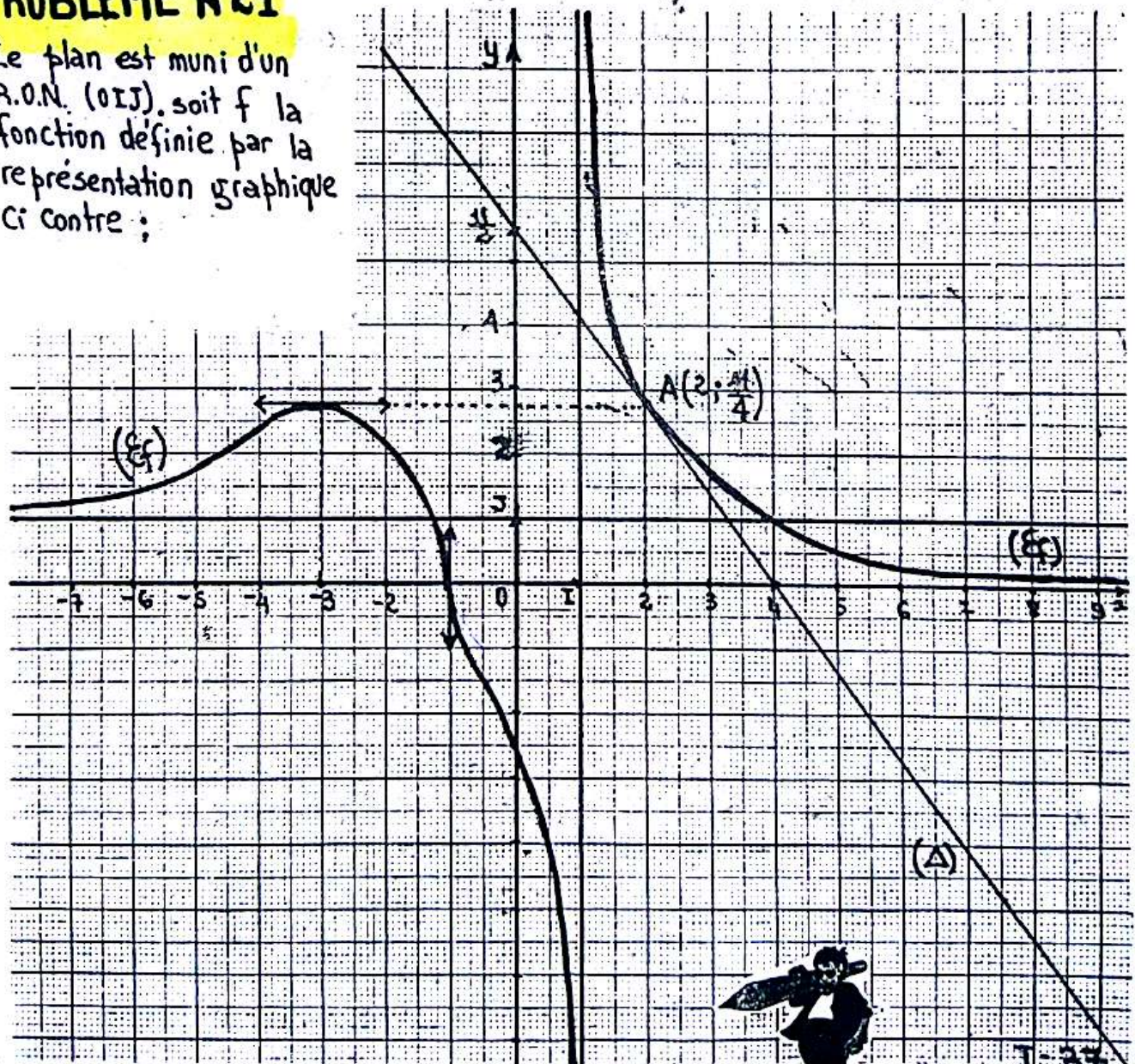
x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$		2		2		

- 1 Déterminer l'ensemble de définition D_f de f ainsi que son ensemble de dérivabilité D_f' .
- 2a Soit f' la dérivée de f . Exprimer $f'(x)$ en fonction de a et c .
- 2b Donner les valeurs de $f(-2)$; $f(0)$; $f'(2)$ et $f'(0)$.
- 2c A l'aide des valeurs ci-dessus, déterminer a ; b et c . En déduire l'expression de $f(x)$.
- 3 Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .
- 4 Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à $(\mathcal{C}_f)$ en $-\infty$ et en $+\infty$ ($\mathcal{C}_f$ est la courbe représentative de f dans un R.O.N. (OIJ) l'unité : 1 cm). T. - 26

-
- 5 Etudier la position relative de $(\mathcal{E}_f)$ par rapport à (Δ) .
 - 6 Déterminer les Coordonnées de A, point d'intersection des asymptotes à $(\mathcal{E}_f)$.
 - 7 Montrer que le point A est centre de symétrie à $(\mathcal{E}_f)$.
 - 8 Construire dans le R.O.N (OIJ):
 - Les asymptotes à $(\mathcal{E}_f)$.
 - Les tangentes horizontales à $(\mathcal{E}_f)$,
 - $(\mathcal{E}_f)$
 - 9 Soit g la restriction de f à l'intervalle $[0; +\infty[$.
 - 9a Justifier que g réalise une bijection de $[0; +\infty[$ vers un intervalle K que l'on précisera.
 - 9b Soit g^{-1} la bijection réciproque de g . Dresser le tableau de variation de g^{-1} .
 - 10a Résoudre l'équation $x \in D_g; g(x) = \frac{5}{2}$.
 - 10b g^{-1} est-elle dérivable en $5/2$? si oui, déterminer $(g^{-1})'(5/2)$.
 - 11 Tracer en pointillés $(\mathcal{E}_{g^{-1}})$ dans le repère (OIJ).

PROBLEME N°21

Le plan est muni d'un R.O.N. (OIJ). soit f la fonction définie par la représentation graphique ci contre ;



PARTIE A

- 1 Donner les équations des asymptotes $\tilde{\alpha}$ ($\mathcal{E}_f$).
- 2a Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .
- 2b Déterminer les limites de f aux bornes de D_f .
- 3 Étudier la dérivabilité de f en -3 et en -1 .
- 4 Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.
- 5 Déterminer le signe de f sur D_f .

PARTIE B La droite (Δ) est la tangente $\tilde{\alpha}$ ($\mathcal{E}_f$) au point $A(2; 4)$.

- 1a Déterminer une équation de (Δ) sachant que (Δ) coupe les axes (OI) et (OJ) respectivement aux points d'abscisses 4 et 0 .
- 1b En déduire $f'(2)$.
- 2 Déterminer la position relative de $(\mathcal{E}_f)$ par rapport à (Δ) .
- 3 Soit h la restriction de f à l'intervalle $]1; +\infty[$.
- 3a Justifier que h réalise une bijection de $]1; +\infty[$ vers un intervalle K que l'on déterminera.
- 3b Soit h^{-1} la bijection réciproque de h . Dresser le tableau de variation de h^{-1} .
- 4a Déterminer l'image de 2 par h .
- 4b h^{-1} est-elle dérivable en $\frac{11}{4}$? Si oui calculer $(h^{-1})'(\frac{11}{4})$.

PROBLEME S

Vous avez soif ? BUVEZ !

Vous avez faim ? MANGEZ !

Vous avez sommeil ? DORMEZ !

Vous voulez le BAC ? ... BOSSEZ !



07 70 78 40
03 20 88 89
44 22 33 96

chnel.



T.D. N°5: DENOMBREMENT, PROBABILITÉ D'UN ÉVÈNEMENT



Résumé

I. DENOMBREMENT

1. Outils de dénombrement

soit n et p 2 nombres entiers naturels. Le tirage de p éléments dans une urne qui en contient n modélisent de nombreux problèmes de dénombrement :

	les p éléments sont-ils ordonnés?	les p éléments sont-ils distincts?	OUTILS	Nombre de tirages
Tirages successifs avec remise	OUI	NON	p -uplet de E	n^p
Tirages successifs sans remise	OUI	OUI	Arrangement de p éléments de E	$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$
Tirages simultanés	NON	OUI	Combinaison de p éléments de E	$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

2. Propriété soit A et B deux parties d'un ensemble fini E . On a :

- $\text{Card}(A) + \text{Card}(\bar{A}) = \text{Card}(E)$.
- $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$.

II. PROBABILITÉ

1. Définition : soit Ω l'univers lié à une expérience aléatoire. On appelle probabilité sur Ω , toute application P de l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de Ω dans l'intervalle $[0;1]$ satisfaisant aux conditions suivantes :

- La somme des probabilités des événements élémentaires est égale à 1.
- La probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent. Ainsi :

- * $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) ; 0 \leq P(A) \leq 1$.
- * $P(\Omega) = 1$ (événement certain).
- * $P(\emptyset) = 0$ (événement impossible).



-
- * Pour tous événements A et B : $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
 - * si A et B sont incompatibles alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$
 - * Pour tout événement A de Ω ; $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$.
($\bar{A}$ est l'événement contraire à A).

2 - Equiprobabilité

Lorsqu'une expérience aléatoire conduit à n issues de même probabilité, on dit qu'elle est équiprobable.

si tous les événements élémentaires de A sont équiprobables, on a :

$$p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{nbre de cas favorables à A}}{\text{nbre de cas possibles}}$$

EXO 5 - Quand on veut le miel, on ne fuit pas les abeilles ;

- Quand on veut le BAC, on ne fuit pas le TRAVAIL !

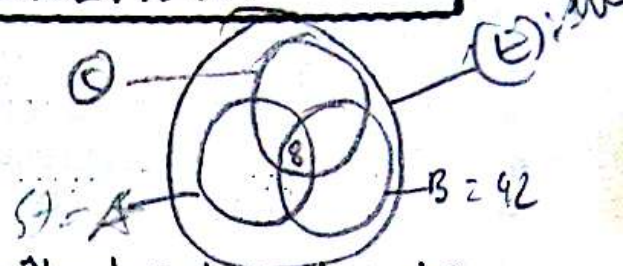
Allez-y ; FONCEZ !!!



Ti. 40

T.D. N°5: DENOMBREMENT; PROBABILITE D'UN EVENEMENT

Exercices



DENO. N°1 On effectue une enquête de 3 revues A; B et C.
On obtient les résultats suivants:
sur 100 personnes interrogées:

- 57 lisent A
- 42 lisent B
- 38 lisent C
- 22 lisent A et B
- 16 lisent A et C
- 14 lisent B et C
- 8 lisent A; B et C.

Déterminer le nombre de personnes:

- 1 Qui ne lisent que A et B; que B et C; que A et C.
- 2 Qui ne lisent que A; que B; que C.
- 3 Qui ne lisent aucune des 3 revues.

DENO N°2 À la faveur de la Coupe du monde de football 2006 en Allemagne, le responsable d'une compagnie aérienne Allemande veut proposer un parcours en boucle, partant de l'Allemagne, faisant une escale dans chacun des cinq pays africains qualifiés (Côte d'Ivoire, Ghana; Togo; Angola, Tunisie) et finissant en Allemagne.

- 1 Déterminer le nombre de trajets qu'il peut établir.
- 2 Combien y a-t-il de trajets pour lesquels la Côte d'Ivoire est le premier pays d'escale?
- 3 Combien y a-t-il de trajets pour lesquels l'escale en Côte-d'Ivoire a lieu avant celle du Ghana?
- 4 Combien y a-t-il de trajets pour lesquels la première escale a lieu dans l'un des 3 pays de l'Afrique de l'ouest?
- 5 Pour des raisons économiques, le responsable décide de proposer un trajet dont les escales dans les pays de l'Afrique de l'ouest ont lieu avant celles des autres pays.
Combien de trajets peut-il établir?



DEND N°3 La classe de T^{le} C₂ du LY.MO.RESS Compte 20 filles dont une seule s'appelle Polhi et 12 garçons dont un seul s'appelle Kolani. Cette classe désire présenter une équipe de 6 élèves en vue de participer au Concours mondial de « Genie en herbe »
Déterminer le nombre d'équipes différentes :

- 1 De 6 élèves de la classe.
- 2 De 6 filles de la classe.
- 3 De 6 garçons de la classe.
- 4 De 6 élèves comprenant Polhi et Kolani.
- 5 De 3 filles et 3 garçons.

DEND N°4 Mamou et Tina font partie d'un club de 18 personnes. On doit former un groupe de 5 d'entre elles pour représenter le club à une cérémonie.

- 1 Combien de groupes de 5 personnes peut-on constituer ?
- 2 Dans Combien de ces groupes peut figurer Mamou ?
- 3 Dans Combien de groupes figurent ensemble Mamou et Tina ?
- 4 Mamou et Tina ne pouvant se supporter, Combien de groupes de 5 personnes peut-on constituer de telle sorte que Mamou et Tina ne se retrouvent pas ensemble ?

DEND N°5 M^r ADÉ est professeur d'EPS au LYMORESS. il effectue une enquête auprès des 40 élèves de sa classe : Les élèves ont répondu soit par oui, soit par non à chacune des questions posées (il n'y a pas d'absent ni d'abstention).

Question N°1: « Aimez-vous le football ? » : 26 élèves ont répondu « OUI »

Question N°2: « Aimez-vous la natation ? » : 20 élèves ont répondu « OUI »

On a par ailleurs dénombré 2 élèves qui ont répondu « OUI » aux deux questions.

1. Combien y a-t-il d'élèves qui ont répondu :
 - 1a « NON » à la question N°1 ?
 - 1b « NON » à la question N°1 et « OUI » à la question N°2 ?
 - 2a Combien d'élèves ont répondu « OUI » aux deux questions ?
 - 2b Combien d'élèves n'aiment que le football ?
 - 2c Combien d'élèves n'aiment que la natation ?
 - 3 Combien peut-on constituer de groupes de 5 élèves :
 - 3a n'aimant que le football ?
 - 3b n'aimant que la natation ?
 - 3c aimant la Natation et le football ?
 - 3d dont au moins 2 n'aiment aucun des deux sports ?



DENO N°6 Un chariot de desserts comporte 5 oranges, 6 mangues et 4 gâteaux. Bouftou, un enfant qui aime tous les desserts en choisit simultanément 3 au hasard.

- 1 Déterminer le nombre de choix possibles.
- 2 Déterminer le nombre de choix possibles de 3 desserts ne contenant aucune orange.
- 3 Déterminer le nombre de choix possibles de 3 desserts contenant au moins une orange.
- 4 Déterminer le nombre de choix possibles de 3 fruits.

DENO N°7 On désire former un Comité de 5 élèves dans une classe dont l'effectif est 30. Le Comité sera formé d'un chef de classe, de deux adjoints et de deux responsables de l'entretien. La classe est composée de 12 garçons externes, 12 garçons internes, 3 filles externes et 3 filles internes.

De combien de façons différentes peut-on composer le Comité si l'on veut que :

- 1 le chef soit interne ?
- 2 Les adjoints soient de sexes différents ?

DENO N°8 On forme un jury de 5 personnes tirées au sort parmi un ensemble de 9 hommes et 6 femmes.

- 1 Quel est le nombre de Jurys possibles ?
- 2 Déterminer le Cardinal des événements suivants :
 - 2a A: « Le jury comporte 2 hommes et 3 femmes »
 - 2b B: « Le jury ne comporte que des femmes »
 - 2c C: « Le jury ne comporte aucune femme »
 - 2d D: « Le jury comporte au moins une femme »
 - 2e E: « Le jury comporte au plus un homme »
 - 2f F: « Le jury comporte plus d'homme que de femmes »
 - 2g G: « Le jury satisfait l'exigence de M^r Bly qui ne veut pas siéger avec Mme Diko ».

DENO N°9 Godeu frappe successivement 3 touches parmi les 14 suivantes de sa calculatrice : 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; +; -; : et X.

- 1 De Combien de manières Godeu peut-il ainsi frapper 3 touches ?
- 2 Combien de manières où Godeu :
 - 2a Frappe 3 chiffres distincts ?
 - 2b Frappe un produit de 2 nombres naturels ?
 - 2c Frappe un produit de 2 nombres naturels et le résultat est nul ?
 - 2d Frappe un quotient de 2 nombres naturels et le résultat est nul ?
 - 2e Frappe une somme ou une différence de 2 nombres naturels ?



DENO N°10

A l'oral du BAC, en anglais, un candidat tire successivement devant un examinateur 3 questions sur les 10 qui lui sont proposées. Parmi ces 10 questions, le candidat connaît 4; 3 sont mal connues et 3 sont ignorées.

- 1 Combien ce candidat a-t-il de tirages possibles?
- 2 Combien y a-t-il de tirages où le candidat:
- 2a Connait les 3 questions tirées?
- 2b Connait une seule question parmi les 3 tirées?
- 2c Ne connaît aucune question parmi les 3 tirées?
- 2d Connait une question, mal une question et ignore une question?

DENO N°11

- On considère un dé cubique parfaitement équilibrée dont 4 faces sont peintes en blanc et les autres en noir.
- 1 On lance une fois ce dé et on observe la couleur de la face supérieure. Calculer le nombre de possibilités d'obtenir:
 - 1a Une face blanche.
 - 1b Une face noire.
 - 2 On lance maintenant ce dé 4 fois de suite. Combien de possibilités s'offre à nous?
 - 3 Calculer le nombre de possibilités d'obtenir:
 - 3a Dans l'ordre; Une face blanche; Une face noire; Une face blanche et une face blanche.
 - 3b Une seule face Noire au cours des 4 lancers
 - 3c Une face Noire au 4^{ème} lancer (Une face noire pouvant apparaître au cours des autres lancers).
 - 3d Au moins une face Noire au cours des 4 lancers.
 - 3e Au plus une face noire au cours des 4 lancers.

DENO N°12

- Un club sportif comprend 20 athlètes dont 8 filles. L'entraîneur désire former une équipe de 5 personnes pour participer à un tournoi.
- 1 Déterminer le nombre d'équipes possibles.
 - 2 Déterminer le nombre d'équipes possibles ne comportant que des filles.
 - 3 A quel type d'équipe possible correspond le nombre $C_{12}^3 \times C_8^2$?
 - 4 L'équipe sélectionnée se compose de 3 garçons et 2 filles (Gouédé, Yao; Sery, Fatim et Akissi). Pour la cérémonie d'ouverture, ces athlètes défilent l'un derrière l'autre.
 - 4a De combien de manières peuvent-ils se présenter?
 - 4b Combien y a-t-il de présentations possibles avec Akissi en 1^{ère} position et Fatim en 5^{ème} position?
 - 4c Combien y a-t-il de présentations possibles avec une fille en 1^{ère} position et une autre en 5^{ème} position?



07 70 78 40
03 20 88 89
144 22 33 96

PROBA N°1

Le bassin d'élevage d'Awlan contient 30 poissons dont 5 Carpes, 10 brochets et 15 mâchoirons. Awlan a pêché en une même prise 4 poissons par un heureux coup de filet. (On admet que chaque poisson a la même probabilité d'être pris dans le filet d'Awlan). On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles. Calculer la probabilité des événements suivants:

- 1 A: « Aucun des 4 poissons pêchés est un mâchoiron ».
- 2 B: « Il y a au moins un mâchoiron dans le filet ».
- 3 C: « Le filet contient exactement une Carpe, un brochet et deux mâchoirons ».

PROBA N°2

Une Urne Contient 5 boules rouges, 4 boules noires et 3 boules vertes. On tire 3 boules dans cette urne successivement en remettant chaque boule tirée dans l'urne avant de prendre les suivantes.

- 1 Quel est le nombre de tirages possibles ? $(12^3 = 1728)$
- 2 Calculer la probabilité: $P(A) = \frac{5}{12} \times \frac{5}{12} \times \frac{5}{12} = \frac{125}{1728}$
- 2a P(A); d'obtenir 3 boules rouges.
- 2b P(B); d'obtenir exactement 2 boules rouges.
- 2c P(C); d'obtenir au moins une boule rouge.
- 2d P(D); d'obtenir 2 boules vertes et une boule noire.
- 2e P(E); d'obtenir 3 boules de couleur identique.
- 2f P(F); d'obtenir 3 boules de 3 couleurs différentes.

PROBA N°3

On lance simultanément deux dés non truqués dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et l'on note les deux numéros obtenus sur les faces supérieures.

- 1 Déterminer le nombre de résultats possibles.
- 2 Calculer la probabilité des événements suivants:
- 2a A: « la somme des numéros obtenus est égale à 6 ».
- 2b B: « la somme des numéros obtenus est impaire ».
- 2c C: « la somme des numéros obtenus est paire ».
- 2d D: « la somme des numéros obtenus est supérieure à 8 ».
- 2e E: « la somme des numéros obtenus est inférieure à 4 ».

PROBA N°4

Dans une urne se trouvent 6 boules blanches et 5 boules rouges. On extrait au hasard 4 boules de l'urne. On admet que tous les tirages de 4 boules sont équiprobables.

- 1 Déterminer le nombre de tirages possibles.
- 2 Calculer la probabilité de chacun des événements suivants:
- 2a A: « Les 4 boules sont blanches ».
- 2b B: « il y a au moins une boule rouge ».
- 2c C: « il y a au moins une boule blanche ».
- 2d D: « il y a 2 boules blanches et 2 boules rouges ».
- 2e E: « il y a 1 boule blanche et 3 boules rouges ».

07707840

Schneid

45

- 2^e F: « Il y a 3 boules blanches et une boule rouge ».
- 3 Vérifier que $P(A) + P(E) + P(D) + P(F) + P(\bar{C}) = 1$ ($\bar{C}$ est l'événement contraire de C)

PROBA N°5

Un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6 est truqué de telle manière que la probabilité d'obtenir chaque numéro de 1 à 6 est proportionnelle à ce numéro.

- 1 Quelle est la probabilité de sortie de chaque numéro?
- 2 On lance une fois ce dé; quelle est la probabilité d'obtenir un numéro supérieur à 3.

PROBA N°6

On lance deux fois de suite un dé cubique parfait dont les faces sont numérotées de 1 à 6 de façon à former un nombre de deux chiffres: le résultat du premier lancer donne le chiffre des dizaines; celui du second lancer celui des unités.

- 1 Déterminer le nombre de résultats possibles.
- 2 Calculer la probabilité des événements suivants:
 - 2a A: « le nombre obtenu est pair ».
 - 2b B: « les deux chiffres du nombre obtenu sont identiques ».
 - 2c C: « le nombre obtenu est supérieur ou égal à 51 ».
 - 2d D: « le nombre obtenu contient au moins un 6 ».

PROBA N°7 Une urne contient 10 jetons dont la répartition est la suivante:

- 4 jetons rouges numérotés 1; 1; 2 et 4.
- 3 jetons noirs numérotés 1, 3 et 4
- 2 jetons blancs numérotés 1 et 2
- 1 jeton vert numéroté 3

Les jetons sont indiscernables au toucher.

I. On tire au hasard simultanément 3 jetons de l'urne.

- 1 Combien y a-t-il de tirages possibles?
- 2 Calculer la probabilité des événements suivants:
 - 2a A: « faire un tirage comportant 3 jetons de même couleur ».
 - 2b B: « faire un tirage comportant 3 jetons de même numéro ».
 - 2c C: « faire un tirage comportant au moins un jeton portant un numéro pair ».
 - 2d D: « faire un tirage comportant 2 jetons de même couleur ».
 - 2e E: « faire un tirage comportant 3 jetons dont la somme des numéros est 5 ».

II. On tire au hasard successivement avec remise 3 jetons de l'urne.

- 1 Combien y a-t-il de tirages possibles?
- 2 Combien y a-t-il de tirages comportant 3 jetons de même couleur?
- 3 Combien y a-t-il de tirages comportant 2 jetons de même couleur?

PROBA N°8

A schnellville, le quartier de "Petit Paris" compte 5 "garbadrômes". 5 "Pomeurs" (mangeurs de garba) se donnent rendez-vous dans l'un des garbadrômes de "Petit Paris".

- 1 Quel est le nombre de possibilités de trouver ces 5 personnes aux 5 endroits?



- 2. Calculer la probabilité pour que chacune des 5 personnes ait choisi un "garbadrôme" différent.
3. Calculer la probabilité pour que les 5 personnes se retrouvent dans le même "garbadrôme".
4. Calculer la probabilité pour qu'au moins deux personnes se retrouvent dans un même "garbadrôme".

PROBA N°9 Un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6 est truqué de telle manière que l'apparition du numéro 5 est deux fois "plus probable" que l'apparition des autres numéros.

1. Calculer la probabilité de l'apparition de chaque numéro.
- a. Calculer la probabilité des événements suivants:
 - 2a A: « Obtenir un nombre pair ».
 - 2b B: « Obtenir un nombre impair ».
 - 2c C: « Obtenir un nombre plus petit que 4 ».



PROBA N°10 Le Clavier de l'ordinateur de AICHA Comporte 42 touches. 26 de ces touches représentent les 26 lettres de l'alphabet français, les autres représentent des chiffres ou des symboles.

1. Les yeux bandés, AICHA frappe au hasard une touche du clavier; chaque touche ayant la même probabilité d'être frappée.
- 1a. Quelle est la probabilité qu'elle frappe une lettre?
- 1b. Quelle est la probabilité qu'elle frappe une lettre de son prénom?
2. Dans cette question, on donnera les résultats approchés sous forme $a \cdot 10^{-n}$ avec $a \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{D}$ et $1 < n < 10$ et comportant un chiffre après la virgule.
- AICHA frappe au hasard 5 touches distinctes ou non. Calculer la probabilité des événements suivants:
 - 2a A: « AICHA frappe 5 lettres différentes ».
 - 2b B: « AICHA frappe son prénom ».
 - 2c C: « AICHA frappe la dernière lettre de son prénom ».

N.B Un anagramme d'un mot est un mot formé au moyen de toutes les lettres de ce mot disposées dans un ordre quelconque.

PROBA N°11 soit E l'ensemble des lettres A, B, C, D, E.

1. Un mot est une succession de lettres distinctes ou non de l'ensemble E . La longueur d'un mot est le nombre de lettres formant ce mot. exemple: AAA; ABB; BAC sont des mots de longueur 3.
- 1a. Déterminer le nombre de mots de longueur 3 que l'on peut former.
- 1b. Calculer le nombre de mots de longueur 3 formés de lettres toutes distinctes.
- 1c. Déterminer le nombre de mots de longueur 3 formés de lettres toutes distinctes et terminés par E.
2. On tire au hasard et simultanément 3 lettres de E .
 - 2a. Calculer la probabilité d'avoir une consonne et 2 voyelles.
 - 2b. Calculer la probabilité d'avoir deux consonnes et une voyelle.

PROBA N°12 Les dix lettres du mot "PATRIMULES" sont inscrites sur 10 petits cartons rectangulaires. Tout alignement de 5 de ces cartons est appelé "mot" qu'il ait un sens ou non. Les dix petits cartons rectangulaires sont placés dans un sac. On tire au hasard, successivement 5 cartons que l'on aligne dans l'ordre où ils se présentent.

- 1 Combien de mots de 5 lettres peut-on former?
- 2 Calculer la probabilité des événements suivants:
 - 2a A: « former un mot commençant par la lettre A ».
 - 2b B: « former un mot commençant et se terminant par une Consonne ».
 - 2c C: « former un mot comportant exactement une voyelle ».
 - 2d D: « former un mot ne comportant pas de voyelle ».
 - 2e E: « former un mot comportant au moins deux voyelles ».

PROBA N°13 Le LYMDRESS est un lycée composé de 7 promotions: de la 6^{ème} à la 1^{ère}. Dans chaque promotion, on choisit 6 élèves. On obtient ainsi 42 élèves. Parmi ces 42 élèves, on choisit au hasard 4 élèves pour représenter le lycée. On suppose que tous les élèves ont la même chance d'être choisis. On considère les événements suivants:

- A: « les quatre élèves sont de la même promotion ».
- B: « il n'y a aucun élève de la classe de 6^{ème} parmi les quatre ».
- C: « il y a un seul élève de la 1^{ère} parmi les quatre ».
- D: « il y a au moins un élève de la 3^{ème} parmi les quatre ».
- E: « il y a au moins deux élèves du second cycle parmi les quatre ».
- F: « il y a au plus deux élèves de la 1^{ère} parmi les quatre ».

Calculer $p(A)$; $p(B)$; $p(C)$; $p(D)$; $p(E)$ et $p(F)$.



PROBA N°14 Un sac contient 3 cubes de couleur verte; 2 cubes de couleur blanche et 5 cubes de couleur orange.

Les cubes sont identiques et numérotés de 0 à 9.

- 1 On tire simultanément et au hasard 3 cubes du sac. Déterminer le nombre de tirages possibles.
- 2 Calculer la probabilité de chacun des événements suivants:
 - 2a A: « les trois cubes sont de couleurs deux à deux différentes ».
 - 2b B: « les trois cubes sont de même couleur ».
 - 2c C: « deux couleurs seulement apparaissent ».
- 3 En disposant côte à côte et dans un ordre quelconque les cubes numérotés: 0; 2; 3; 5 et 8, on forme un nombre entier de cinq chiffres.
 - 3a Combien peut-on former de tels nombres?
 - 3b Calculer la probabilité des événements suivants:
 - 3b1 A: « les nombres formés sont pairs ».
 - 3b2 B: « les nombres formés sont divisibles à la fois par 2 et par 5 ».

NB on rappelle que l'écriture d'un nombre entier ne commence pas par 0
ex 02358 = 2358 (02358 est donc un nombre de 4 chiffres).

PROBA N°15

On considère un dé cubique parfait dont :

- Une face porte le chiffre 1.
- deux faces portent le chiffre 2 et
- trois faces portent le chiffre 3.

On lance une fois ce dé et on désigne par p_1 , p_2 et p_3 les probabilités d'obtenir respectivement 1; 2 et 3.

- 1 Déterminer :
- 2 On lance trois fois ce dé; déterminer la probabilité d'obtenir :
- 2a A: deux fois le chiffre 2.
- 2b B: aucune fois le chiffre 3.
- 2c C: une somme égale à 4.

PROBA N°16

Deux boules de couleurs différentes: ROUGE et NOIRE, sont réparties dans 3 cases de couleurs différentes: ROUGE, NOIRE et JAUNE.

- 1 Combien y a-t-il de répartitions possibles des deux boules dans les trois cases?
- 2 En supposant toutes ces répartitions équiprobables, Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
- 2a A: « Chaque boule est dans la case de sa couleur ».
- 2b B: « la Case JAUNE est vide ».
- 2c C: « la boule ROUGE est la seule dans la case ayant sa couleur ».
- 3 On suppose que chaque Case peut contenir plus d'une boule.
- 3a Combien y a-t-il de répartitions possibles des deux boules dans les trois Cases?
- 3b En supposant toutes les répartitions équiprobables, Calculer les probabilités $p(A')$ et $p(B')$ de chacun des événements A et B définis au 2a et 2b.

PROBA N°17

on donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

Une boîte Contient 12 gâteaux emballés séparément dans 12 paquets identiques. 5 de ces gateaux sont parfumés à la Vanille, 4 au chocolat et les 3 derniers à la banane.

I. GBAGUIDI Choisit simultanément 3 gateaux

- 1 Combien a-t-il de choix possibles?
- 2 Calculer la probabilité de chacun des événements :
- 2a A: « GBAGUIDI choisi un gâteau de chaque sorte ».
- 2b B: « GBAGUIDI choisi trois gateaux identiques ».
- 2c C: « GBAGUIDI choisi exactement deux variétés de gateaux ».

II. La maison de GBAGUIDI vend ses gâteaux pendant un jour, le matin, un à midi et un le soir.

- 1 Combien a-t-il de choix possibles dans ce cas?
- 2 Quelle est dans ce cas la probabilité de prendre :
- 2a A: un gâteau à la Vanille le matin, un à la banane à midi
- 2b B: Un gâteau de chaque sorte?
- 2c C: Deux gateaux à la banane et un au chocolat?



PROBA N°18 Dans la vitrine d'une bijouterie sont exposés 4 types de bijoux: 3 bracelets, 3 bagues, 7 colliers et 7 chaînes. Au cours d'une nuit CHIPPER un voleur a cassé la vitrine; mais surpris par le gardien, il s'est enfuit en emportant seulement 4 bijoux. On suppose que tous les bijoux ont la même chance d'être emportés par chipper.

- 1 Quelle est la probabilité des événements suivants:
 - 1a A: «CHIPPER a emporté un bijou de chaque type»?
 - 1b B: «CHIPPER a emporté des bijoux identiques»?
 - 1c C: «CHIPPER n'a emporté aucun Collier»?
 - 1d D: «CHIPPER a emporté au moins un Colier»?
- 2 En fait, CHIPPER s'est emparé d'un bijou de chaque type et désire cacher un bijou chez chacun de ses trois amis qui sont Xavier; Yves et Zoé. En supposant que chacun ne peut recevoir qu'un seul bijou; déterminer:
 - 2a Le nombre de possibilités que CHIPPER a de cacher les bijoux volés chez ses amis.
 - 2b Déterminer la probabilité des événements suivants:
 - 2b1 E: «Xavier reçoit le bracelet».
 - 2b2 F: «Xavier ne reçoit pas le bracelet».



PROBA N°19 On lance deux fois de suite, un dé cubique parfait dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et l'on note a le résultat du premier lancer et b le résultat du second lancer. On considère alors l'équation du second degré:

$$(E): x^2 + ax + b = 0.$$

- 1 Déterminer la probabilité pour que cette équation admette des solutions (distinctes ou confondues).
- 2 Montrer que la probabilité $p(\bar{E})$ pour que l'équation (E) n'admette aucune solution est $p(\bar{E}) = 17/36$.

PROBA N°20 Une urne contient n boules noires et 3n boules blanches.

- 1 On tire simultanément 2 boules de l'urne. on suppose qu'il y a équiprobabilité de tirages possibles.
 - 1a Montrer que le nombre de tirages possibles est $2n(4n-1)$
 - 1b Déterminer en fonction de n la probabilité P_n de tirer une boule de chaque couleur.
 - 1c Justifier que la limite de P_n lorsque n tend vers $+\infty$ est $3/8$.
 - 1d A partir de quelle valeur de n la différence $P_n - \frac{3}{8}$ est-elle inférieure à $1/100$?
- 2 On tire maintenant une boule de l'urne, on note sa couleur, on l'y remplace puis on tire à nouveau une boule de l'urne et on note sa couleur.
 - 2a Déterminer le nombre de tirages possibles en fonction de n.



- 2b Montrer que le nombre de tirages contenant une boule de chaque couleur est $6n^2$.
- 2c Montrer que la probabilité de tirer une boule de chaque couleur est indépendant de n .

PROBA N°21 Une urne contient 42 boules indiscernables au toucher. Il y a:

- n boules rouges
- toutes les autres boules sont vertes.

Il y a au moins une boule de chaque couleur dans l'urne.

On tire au hasard et simultanément 3 boules de l'urne.

- 1 Déterminer l'ensemble A des valeurs que peut prendre le nombre n .
- 2 On suppose que $n=8$ (on donnera les résultats à 10^{-3} près par défaut)
- 2a Montrer que la probabilité P_1 de tirer une boule de chaque couleur est $P_1 = 0,144$.
- 2b Quelle est la probabilité P_2 de tirer 3 boules vertes?
- 3 On considère la fonction f de la variable x définie sur $[1;20]$ par $f(x) = -2x^3 + 42x^2$.
Etudier les variations de f . (On montrera que f possède un maximum sur $[1;20]$ pour $x=14$)
- 4 On suppose maintenant que $n \in A$ (question 1), On note P_n la probabilité d'obtenir une boule de chaque couleur.
- 4a Montrer que $P_n = \frac{-2n^2 + 42n^2}{11480}$.
- 4b Pour quelle valeur n_0 de n $P(n)$ atteint son maximum?
- 4c Calculer $P(n_0)$ à 10^{-3} près par défaut.

PROBA 5 :

9 mois pour 4 heures !



T.D. N°6: PROBABILITE CONDITIONNELLE, VARIABLE ALEATOIRE.

Résumé

I PROBABILITE CONDITIONNELLE

1. Définition : Soit Ω un univers muni d'une probabilité p . A et B deux événements de Ω tels que $p(A) \neq 0$. La probabilité de l'événement B sachant que l'événement A est réalisé est :

$$p(B/A) = \frac{P(ANB)}{P(A)} \quad \text{ainsi : } * P(ANB) = p(B/A) \times P(A).$$

$$* P(ANB) = P(B) \times p(A/B).$$

Rmq $P(B/A)$ se note aussi $P_A(B)$. (on lit "probabilité de B sachant A").

2. Evénements indépendants Deux événements A et B sont indépendants lorsque : $P(ANB) = p(A) \times p(B)$.

3. Probabilité totale Lorsque B n'est pas l'événement impossible : $p(A) = p(ANB) + p(AN\bar{B})$.

II VARIABLE ALEATOIRE

1. Définition On appelle Variable aléatoire X sur un univers Ω , toute application de Ω vers $\mathbb{R}$.

2. Loi de Probabilité (L.P) Soit p une probabilité définie sur un univers Ω . La L.P d'une variable X sur Ω est l'application qui à toute valeur x_i prise par X associe $P(X=x_i)$. Une L.P peut être donnée sous forme de tableau comme suit :

Valeurs de X (x_i)	x_1	x_2	...	x_n
$P(X=x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

Rmq $\sum_{i=1}^n P(X=x_i) = p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.



3. Fonction de répartition (F.R)

La F.R de la variable aléatoire X est l'application F de $\mathbb{R}$ vers $[0;1]$ définie par : $F(x) = P(X \leq x)$ ainsi :

- Pour $x < x_1$; $F(x) = 0$
- Pour $x_i \leq x < x_{i+1}$; $F(x) = F(x_{i-1}) + P(X=x_i)$
- Pour $x_n \leq x$; $F(x) = 1$.

Exemple: Représenter la fonction de répartition de la loi de probabilité donnée par le tableau (T) ci-dessous.

x_i	-500	0	500	1000
$P(X=x_i)$	0,3	0,4	0,2	0,1

(T)

Réponse:

Donnons les formules explicites de F (fonction de répartition):

$$x < -500 ; F(x) = 0$$

$$-500 \leq x < 0 ; F(x) = 0 + 0,3 = 0,3$$

$$0 \leq x < 500 ; F(x) = 0,3 + 0,4 = 0,7$$

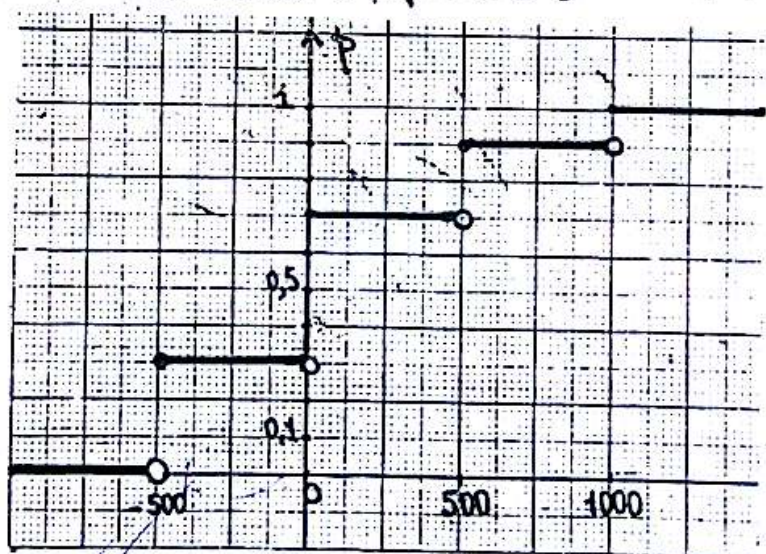
$$500 \leq x < 1000 ; F(x) = 0,7 + 0,2 = 0,9$$

$$1000 \leq x ; F(x) = 0,9 + 0,1 = 1$$

Ces résultats peuvent être résumés par le tableau (T')

x_i	$-\infty$	-500	0	500	1000	$+\infty$
$P(X \leq x_i)$	0	0,3	0,7	0,9	1	1

On obtient la représentation suivante:



4. Espérance Mathématique

X étant une variable aléatoire, on appelle espérance mathématique de X le nombre réel $E(X)$ tel que: $E(X) = \sum_{i=1}^n X_i \cdot P_i = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_n \cdot p_n$.

Exemple: soit la loi de probabilité donnée par le tableau (T) ci-dessus. Calculons l'espérance mathématique $E(X)$ de X .

→

53

→

Reponse:

$$E(x) = \sum_i x_i p_i = -500 \times 0,3 + 0 \times 0,4 + 500 \times 0,2 + 1000 \times 0,1.$$

$$E(x) = 50$$

Remarque:

si x porte sur un jeu et que:

- * $E(x) > 0$ alors le jeu est avantageux pour le joueur.
- * $E(x) < 0$ alors le jeu est désavantageux pour le joueur.
- * $E(x) = 0$ alors le jeu est équitable.

$E(x)$ est la moyenne des valeurs x_i pondérées par les nombres réels p_i .

5. Variance: On appelle variance de x , le nombre réel noté

$$V(x) \text{ tel que : } V(x) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(x))^2 = E(x^2) - [E(x)]^2.$$

$$V(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot p_i - [E(x)]^2$$

Exemple: En reprenant les données de l'exemple (Tableau (T))

$$\text{ona: } V(x) = (-500)^2 \times 0,3 + 0^2 \times 0,4 + (500)^2 \times 0,2 + 1000^2 \times 0,1 - 50^2$$

$$V(x) = 222500.$$

6. Écart type: On appelle écart type de x le nombre réel $\sigma(x)$ tel que $\sigma(x) = \sqrt{V(x)}$.

Exemple: En reprenant les données de l'exemple, on a:

$$\sigma(x) = \sqrt{222500} \Rightarrow \sigma(x) \approx 471,7.$$

7 schéma de BERNOULLI, Loi binomiale: Une épreuve de

Bernoulli est une expérience aléatoire comportant deux issues. l'une de ses issues est appelée succès avec une probabilité p , l'autre échec avec une probabilité q (on a $p+q=1$).

• Un schéma de Bernoulli est la répétition d'une même épreuve de Bernoulli. Les n épreuves sont identiques et indépendantes.

• La probabilité d'obtenir k succès ($0 \leq k \leq n$) au cours des n épreuves est: $p(x=k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ ($q=1-p$).

• L'espérance mathématique de x est $E(x) = n \cdot p$.

• La variance de x est $V(x) = n \cdot p \cdot q = n \cdot p \cdot (1-p)$.

On dit que la variable aléatoire x suit une loi binomiale de paramètres n et p notée $\mathcal{B}(n; p)$.



T.D. N°6 PROBABILITÉ CONDITIONNELLE - VARIABLE ALÉATOIRE (PCVA)

Exercices



PCVA N°1) Dans la classe de T^{le} D₂ du LYMORESS, il y a 36 élèves. 23 de ces élèves ont 18 ans ; 29 élèves sont des filles et 17 filles ont 18 ans. On choisit au hasard un élève de cette classe. On s'intéresse aux événements suivants :

- A: « l'élève a 18 ans ».
- B: « l'élève est une fille ».
- A ∩ B: « l'élève est une fille de 18 ans »
- A/B: « l'élève a 18 ans sachant que c'est une fille »

Calculer $p(A)$; $p(B)$; $p(A \cap B)$ et $p(A/B)$.

PCVA N°2) La "COLB BICO" est une entreprise qui fabrique des appareils électroniques. La probabilité pour qu'un appareil ainsi fabriqué fonctionne parfaitement est $9/10$.
on note : $\bar{F}$ l'événement « l'appareil fonctionne parfaitement » et
 $\bar{F}$ l'événement « l'appareil ne fonctionne pas parfaitement ».

- 1 Calculer $p(\bar{F})$
- 2 On fait subir à chaque appareil un test avant sa livraison.
On constate que :
 - Lorsque l'appareil est en parfait état de fonctionnement ; il est toujours accepté à l'issue du test.
 - Lorsque l'appareil n'est pas en parfait état de fonctionnement, il peut être néanmoins accepté avec une probabilité de $1/11$.
 On note T l'événement « l'appareil est accepté à l'issue du test ».
- 2a Construire un arbre pondéré correspondant à cette expérience aléatoire.
- 2b Calculer $p(T \cap F)$ et $p(T \cap \bar{F})$.
- 2c En déduire $P(T)$.
- 2d Justifier que $P(F/T) = \frac{99}{100}$.

PCVA N°3) L'entreprise "GRIGRA" comprend 70% d'employés (dont 80% sont mariés) et 30% de cadres (dont 40% sont célibataires).
On contacte un salarié de l'entreprise "GRIGRA" pour une enquête.
On notera : E " le salarié est un employé".
C " le salarié est un Cadre".
M " le salarié est marié".
 $\bar{M}$ " le salarié est célibataire".



→

- 1 Construire un arbre pondéré correspondant à cette expérience aléatoire.
- 2 Quelle est la probabilité pour que le salarié contacté soit :
 - 2a Un cadre célibataire ?
 - 2b Un employé célibataire ?
- 3 En déduire que la probabilité pour que le salarié contacté soit un célibataire est 0,26.
- 3a Quelle est la probabilité pour qu'un célibataire soit un cadre ?
- 3b Quelle est la probabilité pour qu'un salarié marié soit un employé ?

PCVA N°4

Deux urnes indiscernables A et B contiennent des boules indiscernables au toucher.

- L'urne A contient 4 boules rouges et 2 boules noires.
- L'urne B contient 3 boules rouges et 1 boule noire.

Soient les événements :

- A : l'urne choisie est l'urne A.
- B : l'urne choisie est l'urne B.
- A/R : tirer une boule rouge de l'urne A.
- B/R : tirer une boule rouge de l'urne B.

On choisit au hasard une urne, on tire au hasard une boule de l'urne choisie et on note la couleur de cette boule.

- 1 Calculer les probabilités $p(A)$; $p(B)$; $p(A/R)$ et $p(B/R)$ respectivement des événements A ; B ; A/R et B/R.
- 2 Calculer $p(A \cap R)$ et $p(B \cap R)$.
- 3 Vérifier que la probabilité pour que la boule tirée soit rouge est $p(R) = \frac{11}{24}$.

PCVA N°5

Une enquête effectuée à SCHNELLKAHA a révélé que les 3% de la population de ce Campement sont atteints de "Djekouadio". Un test de dépistage a donné les résultats suivants :

- Chez les individus malades, 95% des tests sont positifs et 5% négatifs.
- Chez les individus non malades, 1% des tests sont positifs et 99% négatifs.

On note : M : l'événement : « être malade » et
T : l'événement : « le test est positif ».

- 1 Construire un arbre pondéré correspondant à cette expérience aléatoire.
- 2 Calculer la probabilité des événements suivants :
 - 2a « M n T » -
 - 2b « M n T̄ » -
- 3 Calculer les probabilités $p(T)$ et $p(\bar{T})$.
- 4a Vérifier que la probabilité de ne pas être malade sachant que le test est positif est $p(\bar{M}/T) = 0,2539$.
- 4b Calculer la probabilité $p(M/\bar{T})$ d'être malade sachant que le test est négatif.

NB : "Djekouadio" = Paludisme.



PCVA N°6

La production des bouteilles d'eau minérale de la société "Djimi" est assurée à 60% par une machine A et à 40% par une machine B. La machine A fabrique 1% de bouteilles défectueuses et la machine B produit 3% de bouteilles défectueuses. On choisit une bouteille au hasard à la sortie de l'usine. On notera D : l'événement: «la bouteille choisie est défectueuse» et $\bar{D}$: l'événement: «la bouteille choisie n'est pas défectueuse».

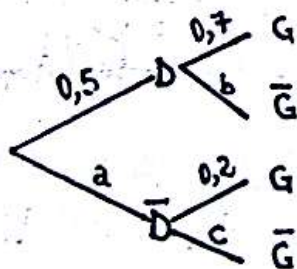
- 1 Construire un arbre pondéré de cette expérience aléatoire.
- 2 Quelle est la probabilité que:
 - 2a La bouteille choisie soit défectueuse et produite par la machine B?
 - 2b La bouteille choisie soit défectueuse et produite par la machine A?
 - 2c La bouteille choisie soit défectueuse?
 - 2d La bouteille choisie soit en bon état?
- 3 Justifier que la probabilité $p(B/D)$ que la bouteille ait été produite par B sachant qu'elle est défectueuse est $p(B/D) = 2/3$.

PCVA N°7

Une salle de jeu possède deux consoles identiques proposant le même jeu. Un jour, l'une des deux consoles est déréglée. Les joueurs ne peuvent pas savoir laquelle des deux est déréglée. Ce jour-là, MOBALI un habitué du jeu choisit l'une des deux consoles et joue une partie. On note:

- D : l'événement "MOBALI choisit la console déréglée" et
- $\bar{D}$: l'événement contraire à D .
- G : l'événement "MOBALI gagne la partie" et
- $\bar{G}$: l'événement contraire à G .

Cette situation est modélisée par l'arbre pondéré ci-dessous dans lequel figurent certaines probabilités.



Ainsi 0,7 est la probabilité que MOBALI gagne sachant qu'il a choisi la console déréglée.

1. Déterminer les valeurs des nombres a ; b et c figurant dans l'arbre.
2. Calculer la probabilité $p(D \cap G)$, de l'événement "MOBALI choisit la console déréglée et gagne".
3. Calculer la probabilité de l'événement "MOBALI choisit la console non déréglée et il gagne".
4. Vérifier que la probabilité $p(G)$ que MOBALI gagne est $p(G) = 0,45$.
5. Calculer la probabilité $p(D/G)$, que MOBALI ait choisi la console déréglée sachant qu'il a gagné.

PCVA N°8

Sur une table, on lance un dé tétraédrique dont chaque face porte un numéro (de 1 à 4):



- 1 pour l'une de ses faces, 2 pour une autre, 3 pour une autre et 4 pour la dernière. On s'intéresse au numéro qui est en contact avec la table. Ce dé est pipé et on désigne par P_1 ; P_2 ; P_3 et P_4 les probabilités pour que le numéro en contact avec la table soit respectivement le 1, le 2, le 3 et le 4.
- On donne $P_1 = \frac{1}{16}$; $P_2 = \frac{3}{16}$ et $P_3 = \frac{5}{16}$.

- 1 Calculer P_4 .
- 2a Calculer la "probabilité" $p(P)$ pour que le numéro en contact avec la table soit pair.
- 2b On lance ce dé quatre fois consécutivement. Vérifier que la probabilité pour qu'au cours de ces quatre lancers, on obtienne exactement trois fois un numéro pair en contact avec la table est $P(X=3) = \frac{375}{1024}$.

PCVA N°9 Au LYMORESS, il y a deux classes de Terminale D; $T^{\text{le}} D_1$ et $T^{\text{le}} D_2$. La $T^{\text{le}} D_1$ contient 60% de filles et la $T^{\text{le}} D_2$ 56% de garçons. De plus la $T^{\text{le}} D_1$ contient deux fois plus d'élèves que la $T^{\text{le}} D_2$.

On choisit au hasard un élève de $T^{\text{le}} D$ du LYMORESS. On désigne par:

- D_1 : l'événement « l'élève choisi est en $T^{\text{le}} D_1$ ».
- D_2 : l'événement « l'élève choisi est en $T^{\text{le}} D_2$ ».
- F : l'événement « l'élève choisi est une fille ».

- 1a Montrer que $p(D_1) = 2/3$ (on désignera par n l'effectif de la $T^{\text{le}} D_2$).
- 1b Calculer $p(D_2)$.
- 2a Expliciter l'événement " $D_1 \cap F$ ".
- 2b Montrer que $p(D_1 \cap F) = 2/5$.
- 2c Montrer que $p(F) = 41/75$.
- 3 sachant que l'élève choisi est une fille, quelle est la probabilité $p(D_1/F)$, que cette fille soit en $T^{\text{le}} D_1$?
- 4 On suppose que la $T^{\text{le}} D_1$ contient 30 filles. Déterminer alors l'effectif de chacune des deux classes de $T^{\text{le}} D$ du LYMORESS.



PCVA N°10 Une Urne U_1 contient 3 boules noires et une boule blanche. Une Urne U_2 contient 2 boules noires et 3 boules blanches. Toutes les boules sont indiscernables au toucher. On tire une boule dans l'une des deux urnes. De plus on suppose que l'on a deux fois plus de chance de tirer la boule dans U_1 que dans U_2 . On notera les événements suivants:

- U_1 « Choisir l'urne U_1 ».
- U_2 « Choisir l'urne U_2 ».
- B « tirer une boule blanche ».

- 1 Justifier que $p(U_1) = 2/3$. En déduire $p(U_2)$.
- 2a Construire un arbre pondéré correspondant à cette expérience aléatoire.
- 2b Montrer que la probabilité $p(U_1 \cap B)$, de choisir l'urne U_1 et de tirer une

→

boule blanche est $p(U_1, NB) = 1/6$

2c Calculer la probabilité de choisir l'urne U_2 et de tirer une boule blanche.

3 Sachant que la boule tirée est blanche, déterminer la probabilité:

3a $P(U_1/B)$ qu'elle provienne de l'urne U_1 .

3b $P(U_2/B)$ qu'elle provienne de l'urne U_2 .



PCVA N° 11 Un jeu nommé "GAGNER-GAGNER/PERDU-PERDU" est proposé par Malo à une foire. Le jeu est le suivant:

Le joueur tire une carte d'un lot comportant 32 cartes dont 12 figures réparties en: 4 Rois; 4 Dames et 4 Valets.

• s'il obtient une figure, il tire un billet dans le panier "SUPER CHANCE" qui contient 50 billets dont 20 gagnent un lot.

• s'il n'obtient pas de figure, il tire un billet dans le panier "PETITE CHANCE" qui contient 50 billets dont 10 gagnent un lot.

1a Calculer la probabilité de l'événement A: « le joueur obtient une figure ».

1b En déduire que la probabilité de l'événement B: « le joueur n'obtient pas de figure » est $5/8$

2 On suppose que pour chaque panier, tous les tirages d'un billet sont équiprobables. Soit G l'événement « le joueur gagne un lot ».

2a Calculer $P(G/A)$, la probabilité pour le joueur de gagner un lot sachant qu'il a tiré une figure.

2b En déduire que la probabilité de l'événement: « le joueur a tiré une figure et gagne un lot » est $p(A \cap G) = 3/20$.

3a Calculer la probabilité $p(G/B)$ de l'événement (G/B): « le joueur gagne un lot sachant qu'il a tiré une figure ».

3b En déduire la probabilité de l'événement: « le joueur n'a pas tiré de figure et gagne un lot ». On notera $p(B \cap G)$

4 Justifier alors que la probabilité de l'événement G: « le joueur gagne un lot » est $p(G) = 11/40$.

PCVA N° 12 Un dé A bien équilibré possède: Une face numérotée 1, deux faces numérotées 2, une face numérotée 4, Une face numérotée 5 et une face numérotée 6.

1a On lance une fois le dé A et on lit le numéro inscrit sur la face supérieure. Quelle est la probabilité d'obtenir le numéro 2 ?

1b On lance trois fois de suite le dé A et on note de la gauche vers la droite les chiffres obtenus successivement. On obtient ainsi un nombre de trois chiffres. Quelle est la probabilité d'obtenir le nombre 421 ?

2 Un autre B, bien équilibré possède: Une face numérotée 1, deux faces numérotées 2, deux faces numérotées 4 et une face numérotée 6. On lance trois fois de suite le dé B comme à la question 1b.

Vérifier que la probabilité d'obtenir le nombre 421 est égale à $1/54$.

3 Une urne contient 4 dés identiques au dé A et 6 dés identiques au dé B. Tabaki tire au hasard un dé de l'urne et le lance trois



- fois de suite pour obtenir un nombre à trois chiffres comme décrit précédemment.
- 3a Démontrer que la probabilité d'obtenir 421 est égale à $\frac{2}{135}$.
- 3b Tabaki a obtenu 421, Calculer la probabilité qu'il ait joué avec le dé de type A.

PCVA N°13 1. Soient A et B deux événements indépendants tels que: $P(A \cap B) = 0,1$ et $P(B) = 0,5$.

- 1a Calculer $P(A)$
- 1b Calculer $P(A \cup B)$
- 2 On lance un dé non pipé à six faces numérotées de 1 à 6. On note:
- C l'événement: « obtenir un nombre pair » et
 - D l'événement: « obtenir un nombre multiple de 3 ».
- 2a Calculer $P(C)$ puis $P(D)$.
- 2b Les événements C et D sont-ils indépendants? Justifier.
- 3 On lance simultanément deux dés identiques au précédent (question 2) On note:
- E l'événement: « Obtenir une somme multiple de 3 ».
 - F l'événement: « Obtenir une somme divisible par 4 ».
- 3a Citer tous les couples qui satisfont à l'événement E.
- 3b Vérifier que $P(E) = 1/3$.
- 3c Citer tous les couples qui satisfont à l'événement F puis vérifier que $P(F) = 1/4$.
- 3d Calculer la probabilité de l'événement G: « obtenir une somme égale à un nombre multiple de 3 et divisible par 4 ».
- 3e Les événements E et F sont-ils indépendants? Justifier.



PCVA N°14 Un cirque possède 10 fauves dont 4 tigres. Pour chaque représentation, le dompteur choisit 5 fauves au hasard.

- 1 Combien de groupes différents de 5 fauves peut constituer le dompteur?
- 2 soit X la variable aléatoire qui décompte le nombre de tigres présents au cours d'une représentation.
- 2a Donner les différentes valeurs prises par X.
- 2b Justifier que $P(X=3) = \frac{5}{21}$.
- 2c Déterminer la loi de probabilité de X (on donnera les résultats sous forme de fractions ayant 42 comme dénominateur)
- 2d Vérifier que la probabilité pour que le dompteur se présente avec au moins 2 tigres est $\frac{31}{42}$.
- 3 Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de X, puis interpréter.

PCVA N°15 Yéd a dans son porte monnaie 3 pièces de 250F et 5 pièces de 100F. Pour faire une course, il emprunte pour la première fois un taxi-compteur. A sa destination, le compteur marque 760F. Pour payer le chauffeur, Yéd tire au hasard et simultanément 4 pièces dans son porte-monnaie.

1 Déterminer le nombre de tirages possibles.

- 2 On désigne par X la valeur des pièces tirées.
Déterminer les valeurs prises par X .
- 3a Vérifier que $P(X=700) = 6/14$.
- 3b Etablir la loi de probabilité de X .
- 4a Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de X .
- 4b Calculer la variance $V(X)$ de X .
- 5 Quelle est la probabilité pour que Yed puisse payer le chauffeur?



PCVA N°16 Pour participer au jeu "GAGNER-GAGNER/PERDU-PERDU", Bary mise une certaine somme s . Le jeu consiste à lancer deux pièces de monnaies parfaitement équilibrées :

- si Bary amène deux faces, il reçoit 3000 F.
- si Bary amène une face, il reçoit 500 F.
- si Bary amène aucune face, il ne reçoit rien.

soit X la variable aléatoire qui associe à chaque partie le gain net c'est-à-dire la différence entre la somme reçue et la mise s .

1. Donner en fonction de s les valeurs prises par X .
2. Déterminer la loi de probabilité de X .
3. Justifier que l'espérance mathématique de X est $E(X) = -s + 1000$.
- 4a Quelle doit être la mise s pour que le jeu soit équitable?
- 4b Pour la valeur de s trouvée, déterminer la fonction de répartition de X et la représenter.

PCVA N°17 Un sac contient 10 boules indiscernables au toucher dont 6 boules blanches, 3 boules rouges et une boule noire.

Kassi participe à un jeu qui consiste à tirer au hasard et au maximum deux boules du sac de manière successive avec remise.

- si la boule tirée est noire, Kassi gagne 1500 F.
- si la boule tirée est rouge, Kassi gagne 500 F.
- si la boule tirée est blanche, Kassi perd 500 F et la partie s'arrête.

- 1a Déterminer la probabilité P_1 pour que la partie s'arrête après le premier tirage.
- 1b Déterminer la probabilité P_2 pour que Kassi effectue les deux tirages.
- 2 soit X la variable aléatoire qui à chaque partie associe la somme algébrique des gains de Kassi.
- 2a Donner les valeurs prises par X .
- 2b Montrer que la probabilité pour Kassi de gagner 2000 F est $P(X=2000) = \frac{6}{100}$.
- 2c Déterminer la loi de probabilité de X (on donnera les probabilités sous la forme $\frac{a}{100}$).
- 2d Justifier que la probabilité pour Kassi de gagner à ce jeu est $P(G) = 11/50$.
- 2e Justifier que ce jeu n'est à l'avantage ni de l'organisateur ni du joueur qu'est Kassi.

PCVA N°18 Dans une urne se trouve six médaillons identiques indiscernables au toucher et numérotés de 1 à 6. Un jeu consiste à



T. 6.1

→

tirer au hasard un médaillon de l'urne après mise d'une somme versée aux organisateurs du jeu et à recevoir un prix ou non selon le numéro inscrit sur le médaillon tiré.

- si le joueur tire le médaillon numéroté 4, on lui remet ce qu'il a misé et il gagne 3.000F.
- si le joueur tire le médaillon numéroté 1 ; 2 ou 6, il perd sa mise et ne gagne rien.
- si le joueur tire le médaillon numéroté 3, il ne gagne rien mais récupère sa mise.
- si le joueur tire le médaillon numéroté 5, il le remet dans l'urne et effectue un second tirage. si le médaillon retiré :
 - porte le même numéro (c'est-à-dire 5) le joueur gagne 2000F et perd sa mise.
 - si non, il perd sa mise et en plus il paie 1500F aux organisateurs.

On note A l'événement: « le joueur récupère sa mise » et

B l'événement: « le joueur perd 1500 et perd aussi sa mise »

1. Calculer la probabilité de l'événement A.
2. Justifier que la probabilité de l'événement B est $P(B) = 5/36$.
3. Le joueur a misé une somme S . on note X la variable aléatoire qui à chaque partie associe le résultat financier de son jeu, c'est-à-dire la différence entre ce que le joueur possèdera à l'issue du jeu et ce qu'il possédait avant de jouer.
- 3a Compléter le tableau ci-dessous définissant la loi de probabilité de X .

x_i (Valeurs de la variable)	-S	-S-1500	0	-S+2000	3000
$P(X=x_i)$					

- 3b Démontrer que l'espérance mathématique de X est $E(X) = -\frac{2}{3}S + \frac{3125}{9}$
- 3c Quelle somme le joueur doit-il miser pour que son résultat financier soit nul (on donnera l'arrondi de cette somme à l'unité près).

PCVA N°19

On considère un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

1. On lance une fois ce dé et on considère l'événement A: « Obtenir un numéro pair ».

Calculer $p(A)$ et $p(\bar{A})$.



2. On lance 6 fois de suite ce dé. les lancers sont indépendants.

- 2a Calculer la probabilité d'obtenir exactement 4 fois un numéro pair.

- 2b Calculer la probabilité d'obtenir au moins une fois un numéro pair.

3. On lance maintenant n fois de suite ce même dé ($n \geq 1$). Les lancers sont indépendants.

- 3a Calculer la probabilité p_n d'obtenir au moins une fois un numéro pair au cours de ces n lancers.

- 3b * Déterminer la plus petite valeur de n pour que $p_n \geq 0,95$.

(*) Voir cours sur logarithme népérien ($\ln$).

PCVA N°20

On lance simultanément deux dés cubiques équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On dit qu'on obtient un « double » si les faces supérieures des dés portent des numéros identiques.

A chaque lancer, si le joueur fait un « double » il gagne 500^F, sinon il perd 100^F.

- 1 On lance les dés une fois. Calculer la probabilité de gagner 500^F.
- 2 On lance les dés trois fois. soit X la variable aléatoire associée à la somme gagnée ou perdue après les trois lancers.
- 2a Quel est l'ensemble des valeurs prises par X ?
- 2b Justifier que la probabilité de gagner 900^F est $P(X=900) = \frac{15}{216}$.
- 2c Etablir la loi de probabilité de X (on écrira les probabilités sous la forme $\frac{a}{216}$).
- 2d Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de X .
- 3 On lance le dés n fois ($n > 1$)
- 3a Calculer en fonction de n la probabilité p_n de ne jamais faire un « double ».
- 3b Calculer en fonction de n la probabilité p_n de faire au moins un « double ».
- 3c (*) Quelle est la valeur minimal de n pour que l'on ait $p_n > 0,8$?
- (*) Voir ln.

PCVA N°21

Une urne contient 8 boules indiscernables au toucher, 5 sont rouges et 3 sont noires.

(Pour chaque question posée, 3 réponses (A; B; C) sont proposées, Indiquer la lettre (A; B; C) donnant la bonne réponse)

- 1 On tire au hasard et simultanément 3 boules de l'urne. soit :
 - . D l'événement « les trois boules tirées sont noires » et
 - . E l'événement « les trois boules tirées ont la même couleur ».
- 1a la probabilité de l'événement D est : A. $\frac{1}{56}$ B. $\frac{1}{120}$ C. $\frac{1}{3}$
- 1b la probabilité de l'événement E est : A. $\frac{11}{56}$ B. $\frac{11}{120}$ C. $\frac{16}{24}$
- 2 On tire au hasard une boule dans l'urne, on note sa couleur et on la remet dans l'urne. On procède ainsi à 5 tirages successifs et deux à deux indépendants. soit :
 - . F l'événement « obtenir 5 fois une boule noire » et
 - . G l'événement « obtenir 2 boules noires et 3 boules rouges ».
- 2a la probabilité de l'événement F est : A. $(\frac{5}{8})^3$ B. $(\frac{3}{8})^5$ C. $(\frac{1}{5})^5$
- 2b la probabilité de l'événement G est : A. $(\frac{5}{8})^3 \times (\frac{3}{8})^2$ B. $2 \times \frac{5}{8} + 3 \times \frac{3}{8}$ C. $10 (\frac{5}{8})^3 (\frac{3}{8})^2$
- 3 On tire successivement et sans remise 2 boules dans cette urne. On note :
 - . R_1 l'événement « la première boule tirée est rouge ».
 - . N_1 l'événement « la première boule tirée est noire ».
 - . R_2 l'événement « la deuxième boule tirée est rouge ».
 - . N_2 l'événement « la deuxième boule tirée est noire ».

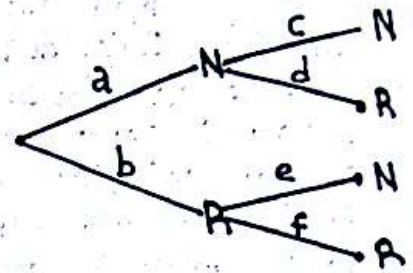


→

3a L'arbre pondéré ci-contre correspond à l'expérience.

Donner la valeur de chacun des nombres a ; b ; c ; d , e et f sachant qu'ils appartiennent tous à l'ensemble P tel que

$$P = \left\{ \frac{2}{7}; \frac{3}{8}; \frac{4}{7}; \frac{5}{8}; \frac{5}{7}; \frac{3}{7} \right\}$$



3b la probabilité conditionnelle $P_R(R_2)$ est A. $\frac{5}{8}$ B. $\frac{4}{7}$ C. $\frac{5}{14}$

3c la probabilité de l'événement $R_1 \cap N_2$ est A. $\frac{15}{64}$ B. $\frac{16}{49}$ C. $\frac{15}{56}$

3d la probabilité de tirer une boule rouge au deuxième tirage est :
A. $\frac{5}{8}$ B. $\frac{5}{7}$ C. $\frac{3}{28}$

3e la probabilité de tirer une boule rouge au premier tirage sachant qu'on a obtenu une boule noire au second tirage est :
A. $\frac{15}{56}$ B. $\frac{3}{8}$ C. $\frac{5}{7}$

PCVA N°22* On considère un dé cubique truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6. on note P_i la probabilité d'apparition de la face i . Les P_i sont telles que :
 $P_1 = P_2$; $P_3 = P_4 = 2P_1$; $P_5 = P_6 = 3P_1$.

1a Montrer que $P_1 = 1/12$.

1b Montrer que la probabilité de l'événement $A \ll \text{obtenir 3 ou 6} \gg$ est $P(A) = \frac{5}{12}$.

2 Un jeu d'adresse consiste à lancer le dé décrit ci-dessus puis à lancer une fléchette sur une cible fixe.
• si le joueur obtient 3 ou 6; il se place à 5 m de la cible et lance la fléchette. A 5 m, la probabilité d'atteindre la cible est alors $3/5$.
• si l'événement A n'est pas réalisé, il se place à 7 m de la cible et lance la fléchette. A 7 m, la probabilité d'atteindre la cible est alors $2/5$.

- On note C l'événement « la cible est atteinte ».

2a Traduire le problème et ses données par un arbre pondéré.

2b Déterminer $P(C)$

2c Déterminer $P_{\bar{A}}(C)$ ($\bar{A}$ étant l'événement contraire à A)

2d En déduire que $P(C) = \frac{29}{60}$.

2e Déterminer $P_C(A)$.

3 Moun dispose de 10 fléchettes qu'il doit lancer, une à une, de façon indépendante, dans les mêmes conditions que précédemment définies. Calculer la probabilité qu'il attergne la cible exactement 4 fois.



PCVA N° 23

On teste un médicament sur un ensemble d'individus ayant un taux de glycémie anormalement élevé. Pour cela, 60% des individus prennent le médicament, les autres recevant une substance neutre et l'on étudie à l'aide d'un test la baisse du taux de glycémie. Chez les individus ayant pris le médicament, on constate une baisse de ce taux avec une probabilité de 0,8. On ne constate aucune baisse de ce taux pour 90% des personnes ayant reçues la substance neutre. On désigne par:

- M: Prise de médicament.
- $\bar{M}$: Non prise de médicament.
- B: Baisse du taux de glycémie.
- $\bar{B}$: Non baisse du taux de glycémie.



- 1a Déterminer la probabilité $P_n(B)$ d'avoir une baisse du taux de glycémie sachant qu'on a pris le médicament.
- 1b Construire l'arbre pondéré correspondant à cette situation.
- 2 Démontrer que la probabilité d'avoir une baisse du taux de glycémie est $P(B) = 0,52$.
- 3 On soumet au test un individu pris au hasard. Quelle est la probabilité qu'il ait pris le médicament sachant que l'on constate une baisse de son taux de glycémie?
- 4 On contrôle 5 individus au hasard.
- 4a Quelle est la probabilité d'avoir exactement deux individus dont le taux de glycémie a baissé?
- 4b Quelle est la probabilité d'avoir un individu dont le taux de glycémie a baissé?
- 5 On contrôle n individus pris au hasard ($n \in \mathbb{N}^*$). Déterminer n pour que la probabilité d'avoir au moins un individu dont le taux de glycémie a baissé soit supérieur à 0,98.

PCVA N° 24

A schnellville, la capitale de schnelland, un sondage a permis de constater que 30% de la population sont des gauchers et que 70% sont droitiers. (les résultats seront des arrondis d'ordre 4)

- 1 Justifier que dans un groupe de 6 personnes choisies au hasard à schnellville, la probabilité pour qu'il y ait un seul gaucher est $p = 0,3025$.
- 2 Calculer la probabilité pour qu'un groupe de 6 personnes choisies au hasard à schnellville contienne:
 - 2a Exactement deux gauchers.
 - 2b Au moins un gaucher.
- 3 Un atelier de couture à schnellville est équipé de 5 paires de ciseaux pour droitiers et 2 paires de ciseaux pour gauchers. cet atelier vient de recevoir 6 stagiaires. soit X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de stagiaires de l'atelier pouvant trouver une paire de ciseaux à sa convenance.
- 3a Donner les valeurs prises par X .

- 2b Justifier que la probabilité pour que X prenne la valeur 2 est $P(X=2) = 0,0007$.
- 3c Calculer la probabilité pour que X prenne la valeur 6.

PCVA. N°25 Au jeu dénommé "KOUTCHA" Tabaki lance trois de suite une pièce de monnaie parfaitement équilibrée. Il gagne 200F pour chaque apparition de la face "FACE" et perd 100F pour chaque apparition de la face "PILE".

- 1a Déterminer le nombre de résultats que peut obtenir Tabaki.
- 1b Donner tous les résultats possibles.
- 1c Dresser un tableau de la variable aléatoire X donnant le gain pour chaque résultat possible obtenu par Tabaki.
- 2a Vérifier que $P(X=300) = 3/8$.
- 2b Déterminer la loi de probabilité de X .
- 2c Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de X .
Le jeu est-il profitable pour Tabaki? Justifier.
- 2d Calculer la Variance $V(X)$ de X puis l'écart type $\sigma(X)$ de X .
3. Déterminer la fonction de répartition F de X .
- 4a Construire le diagramme en bâtons de la loi de probabilité de X .
échelle: $1\text{cm} \rightarrow 1/8$ et $1\text{cm} \rightarrow 300\text{F}$.
- 4b Construire la représentation graphique de la fonction de répartition F de X . (même échelle que dans 4a).



PCVA N°26 À la bermesse du LYMORESS, un jeu consiste à tirer 2 enveloppes parmi 5 dont :

- Une contient un billet de 1000 F
- deux contiennent un billet de 500 F et
- les autres contiennent rien.

Les enveloppes sont indiscernables.

- 1 Déterminer le nombre de tirages possibles.
- 2 soit X la variable aléatoire qui s'intéresse à la valeur de la somme reçue après chaque tirage.
- 2a Donner les valeurs prises par X .
- 2b Justifier que la probabilité de ne rien gagner est $P(X=0) = \frac{1}{10}$.
- 2c Déterminer la loi de probabilité de X .
- 3 Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de X , la Variance $V(X)$ de X et l'écart type $\sigma(X)$ de X .
- 4 Définir la fonction de répartition de X .
- 5a Tracer le diagramme en bâtons de la loi de probabilité de X .
- 5b Représenter la fonction de répartition de X ($1\text{cm} \rightarrow \frac{1}{10}$; $3\text{cm} \rightarrow 500\text{F}$)
- 6 Le jeu est-il équitable? Justifier.
- 7 l'organisateur décide de rendre équitable le jeu; pour cela, il exige que chaque participant doit miser une certaine somme m .
- 7a Vérifier que dans ce cas l'espérance mathématique de X et $E(X_m) = 80 - m$.
- 7b Déterminer m pour que le jeu soit équitable.

PCVA N°27

On dispose d'un dé en forme de tétraèdre régulier et homogène dont les quatre faces portent chacune l'un des quatre nombres suivants: 1; 3; 7 et 10. Lorsque le dé est posé, trois faces sont visibles.

- 1 Calculer la probabilité pour que le dé se pose sur une face donnée.
- 2 Soit X la variable aléatoire donnant la somme des nombres visibles après un lancer.
 - 2a Donner l'ensemble des valeurs prises par X .
 - 2b Etablir la loi de probabilité de X .
 - 2c Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de X .
 - 2d Calculer la probabilité de l'événement $(X \geq 14)$.
- 3 Soit n un entier naturel non nul. On lance le dé n fois et après chaque lancer, on calcule la somme X , des nombres visibles.
 - 3a Calculer la probabilité P_n pour que l'événement $(X \geq 14)$ se réalise au moins une fois au cours des n lancers.
 - 3b Calculer la plus petite valeur de n pour laquelle on a $P_n \geq 0,999$.



PCVA N°28

Une Urne Contient 3 boules jaunes, 5 boules vertes et 8 boules rouges.

- 1 On tire une boule de l'urne, on note sa couleur, on la remet dans l'urne puis on effectue un nouveau tirage d'une boule. Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants:
 - 1a A: « On obtient deux boules rouges ».
 - 1b B: « On obtient dans le désordre, une boule verte et une boule rouge ».
 - 1c C: « On obtient au moins une boule rouge ».
- 2 On effectue maintenant un tirage simultané de deux boules de l'urne. On considère les événements:
 - D: « On obtient deux boules rouges ».
 - E: « On obtient une boule rouge et une boule verte ».
- 2a Calculer la probabilité $P(D)$ de l'événement D.
- 2b Montrer que la probabilité $P(E)$ de l'événement E est $P(E) = \frac{1}{3}$.
- 3 Une épreuve Consiste à effectuer un tirage simultané de deux boules de l'urne. On répète cinq fois successivement cette épreuve en remettant les boules tirées dans l'urne avant d'effectuer l'épreuve suivante. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois que l'événement E se réalise.
 - 3a Donner l'ensemble des valeurs prises par X .
 - 3b Justifier que $P(X=2) = 80/243$.
 - 3c Donner la loi de probabilité de X .
 - 3d Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de X .
- 4 On répète cette fois-ci l'épreuve n fois ($n \in \mathbb{N}; n \geq 1$). On note P_n la probabilité que l'événement E se réalise au moins une fois.
 - 4a Calculer P_n en fonction de n .
 - 4b Quelle valeur minimale faut-il donner à n pour que $P_n > 0,99$?

PCVA N°29

L'entreprise "BACKDO" fabrique des jouets. Chaque jouet produit par cette entreprise est soumis à deux contrôles :

- D'une part l'aspect du jouet est examiné afin de vérifier qu'il ne présente pas de défaut de finition et
- D'autre part sa solidité est testée.

L'ingénieur qualitatif de l'entreprise "BACKDO" a remarqué à la suite d'un grand nombre de vérification que :

- 92% des jouets sont sans défaut de finition.
- Parmi les jouets qui sont sans défaut de finition, 95% réussissent le test de solidité.
- 2% des jouets ne satisfont à aucun des deux contrôles.

On prend au hasard un jouet parmi les jouets produits. On note :

- F l'événement : « le jouet est sans défaut de finition »
- S l'événement : « le jouet réussit le test de solidité »

- Traduire les données de l'énoncé en utilisant les notations des probabilités (On donnera $P(F)$; $P(\bar{F})$; $P_F(S)$ et $P(\bar{F} \cap \bar{S})$).
 - Démontrer que $P_F(\bar{S}) = \frac{1}{4}$.
 - Construire l'arbre pondéré correspondant à cette situation.
 - Démontrer que $P(S) = 0,934$.
 - Un jouet a réussi le test de solidité. Calculer la probabilité $P_S(F)$ qu'il soit sans défaut de finition (on donnera le résultat arrondi au millième).
 - Les jouets ayant satisfait aux deux contrôles rapportent un bénéfice de 1000F. Ceux qui n'ont pas satisfait au test de solidité sont mis au rebut, les autres jouets rapportent un bénéfice de 500F.
- On désigne par X , la variable aléatoire qui associe à chaque jouet le bénéfice rapporté.
- Donner l'ensemble des valeurs prises par X .
 - Montrer que $P(X=0) = 0,066$.
 - Donner la loi de probabilité de la variable X .
 - Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de X .
- 4 On prélève au hasard dans la production de l'entreprise "BACKDO" un lot de 10 jouets. On désigne par Y la variable aléatoire égale au nombre de jouets de ce lot subissant avec succès le test de solidité.
- Calculer la probabilité ($P(Y=8)$) que 8 jouets de ce lot subissent avec succès le test de solidité.
 - Calculer la probabilité ($P(Y \geq 8)$) qu'au moins 8 jouets de ce lot subissent avec succès le test de solidité.



PCVA N°30

A l'oral du BAC de l'année dernière, M^r POINKDO doit interroger 4 filles et 3 garçons. Il décide d'établir au hasard la liste fixant l'ordre de passage des candidats. Pour cela, il met les noms (supposés tous différents) des sept candidats dans une boîte.

- On suppose que M^r POINKDO procède à un tirage des sept noms l'un après l'autre.



- On désigne par F_1 l'événement « le 1^{er} candidat interrogé est une fille » et par F_2 l'événement « le 2^{ème} candidat interrogé est une fille ».
- 1a Construire l'arbre pondéré correspondant à cette expérience puis donner la probabilité que le 2^{ème} candidat interrogé soit une fille sachant que le 1^{er} candidat interrogé est une fille. (on notera $P_{F_1}(F_2)$)
 - 1b Quelle est la probabilité que les deux premiers candidats interrogés soient des filles? (on notera $P(A)$).
 - 1c Quelle est la probabilité que les deux premiers candidats interrogés soient de même sexe (On notera $P(S)$).
 - 1d Quel est la probabilité que le 2^{ème} candidat interrogé soit une fille? (on notera $P(F_2)$)
 2. On suppose maintenant que M^r POINKDO veut interroger seulement 4 candidats parmi les sept. Il procède donc à un tirage simultané de 4 noms de la boîte. On note X la variable aléatoire égale au nombre de filles interrogées.
 - 2a Donner l'ensemble des valeurs prises par X .
 - 2b Montrer que $P(X=2) = 18/35$.
 - 2c Quelle est la loi de probabilité de X ?
 - 2d Quelle est la probabilité ($P(X>3)$) que M^r POINKDO interroge plus de filles que de garçons?
 - 2e Calculer l'espérance mathématique, $E(X)$ de X .
 - 2f Calculer la variance $V(X)$ de X .

à préparer [5] NPCVA N° 31

Une association organise une loterie pour laquelle une participation de m francs (mF) est demandée. Un joueur doit tirer simultanément au hasard deux boules dans une urne contenant deux boules vertes et trois boules jaunes.

- si le joueur obtient 2 boules de couleurs différentes ; il a perdu.
- si le joueur obtient 2 boules jaunes, il est remboursé de sa participation m .
- si le joueur obtient 2 boules vertes, il doit continuer le jeu qui consiste à faire tourner une roue où sont inscrits des gains répartis comme suit :
 - sur $1/8$ de la roue, le gain est de $1000F$.
 - sur $1/4$ de la roue, le gain est de $200F$.
 - sur le reste, le joueur est remboursé de sa participation.

On appelle :
 V l'événement « le joueur a obtenu 2 boules vertes »
 J l'événement « le joueur a obtenu 2 boules jaunes »
 R l'événement « le joueur est remboursé de sa mise ».

- 1 Calculer la probabilité $P(V)$ et $P(J)$ des événements V et J .
- 2 On note $P_V(R)$ la probabilité pour le joueur d'être remboursé sachant qu'il a obtenu deux boules vertes.
- 2a Justifier que $P(R) = 5/8$.
- 2b Déterminer $P(V|V)$.



- 3 Démontrer que $P(R) = \frac{29}{80}$
- 4 On appelle x la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur c'est-à-dire la différence entre les sommes éventuellement perçues et la participation initiale.
- 4a Justifier que les valeurs prises par x sont: $-m$; 0 ; $1000-m$ et $200-m$.
- 4b Vérifier que $P(x=-m) = 0,6$.
- 4c Donner la loi de probabilité de x (on donnera les probabilités sous la forme $\frac{a}{80}$).
- 4d Démontrer que l'espérance mathématique de x est $E(x) = \frac{1400 - 51m}{80}$.
- 4e Le jeu est-il équitable si la mise m est de 30^F ? Justifier.
- 5 Balou se présente et décide de jouer 4 fois, quels que soient les résultats obtenus. Calculer la probabilité que sa mise m soit remboursée au moins une fois.

FCVA N°32

N Bly dit à son ami clovis: « Comme tu veux être riche, voici un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6. Tu le lances une fois. si tu obtiens un multiple de 3, tu tires un papier dans le chapeau noir, si non tu tires un papier dans le chapeau blanc. Le papier tiré t'indiquera ce que tu as gagné ou perdu. »

- Bly a placé dans le chapeau noir 4 papiers portant la mention $+500^F$ et 1 papier portant la mention -2000^F .
- Dans le chapeau blanc, il a mis 3 papiers portant la mention $+500$ et un papier portant la mention -1500^F .

On appelle N l'événement « tirer dans le chapeau Noir » et B l'événement « tirer dans le chapeau Blanc ». On suppose que tous les tirages et lancers sont équiprobables.

- 1a Calculer la probabilité $P(N)$ de l'événement N .
- 1b Calculer la probabilité $P(B)$ de l'événement B .
- 2 On appelle x la variable aléatoire donnant, pour une tentative, le gain algébrique possible. Déterminer les valeurs prises par x .
- 3a Calculer $P_N(x=500)$ c'est-à-dire la probabilité de gagner 500^F sachant que l'on tire dans le chapeau noir.
- 3b Calculer $P_B(x=500)$ c'est-à-dire la probabilité de gagner 500^F sachant que l'on tire dans le chapeau blanc.
- 3c En déduire la probabilité de l'événement $(x=500) \cap N$ puis la probabilité de l'événement $(x=500) \cap B$.
- 3d Vérifier que la probabilité de l'événement $(x=500)$ est $\frac{23}{30}$.
- 4a Vérifier que la probabilité de l'événement $(x=-1500)$ est $\frac{1}{6}$.
- 4b Calculer $P(x=-2000)$.
- 5a Déterminer la loi de probabilité de x .
- 5b Calculer l'espérance mathématique de x .
- 5c Clovis pourrait-il devenir riche en ne jouant qu'au jeu proposé par Bly? Justifier.
- 6 Boris joue 5 fois au jeu proposé par Bly. Calculer la probabilité pour Boris de perdre 3 fois. (on donnera l'arrondi d'ordre 3 du résultat).



N° PCVA 33

On dispose de deux sacs A et B contenant des boules indiscernables au toucher.

- Le sac A contient 3 boules oranges, 3 boules blanches et 2 boules vertes.
- Le sac B contient 2 boules oranges et 2 boules vertes.

On extrait successivement trois boules du sac A et on observe leurs couleurs. Calculer la probabilité de l'événement E : « Les trois boules tirées ont la même couleur ».

2. On extrait successivement avec remise trois boules du sac B et on observe leurs couleurs. Calculer la probabilité de l'événement E.

3. On organise le jeu suivant :

Le joueur mise une somme m . Il choisit au hasard un sac. La probabilité de choisir le sac A (notée $p(A)$) vaut le double de celle de choisir le sac B (notée $p(B)$)

- si le sac choisi est A, le joueur en extrait simultanément 3 boules.

- si les 3 boules tirées ont la même couleur, on lui remet en plus de sa mise la somme de 3000 F $\Rightarrow 3000 + m$.
- si non on lui remet seulement sa mise $\Rightarrow m$.

- si le sac choisi est B, le joueur en extrait successivement et avec remise 3 boules.

- si les 3 boules tirées ont la même couleur, on lui remet 3000 F $\Rightarrow 3000$.
- si non, on ne lui remet rien (même pas sa mise) $\Rightarrow -m$.

soit X la variable aléatoire égale au gain du joueur à la fin d'une partie (Gain = somme reçue - mise).

3a Démontrer que $P(B) = 1/3$; En déduire $P(A)$.

3b Calculer la probabilité de l'événement « les trois boules tirées ont la même couleur et proviennent du sac B ».

3c Donner l'ensemble des valeurs prises par X .

3d Déterminer la loi de probabilité de X .

3e Démontrer que l'espérance mathématique de X est $E(X) = \frac{2250}{7} - \frac{m}{3}$.

3f Pour quelles valeurs de m le jeu est-il profitable au joueur ?



PCVA N°34

On lance simultanément deux dés cubiques A et B parfaitement équilibrés. Deux des faces du dé A portent le numéro 2 les quatre autres faces sont numérotées de 3 à 6.

Quant au dé B, deux de ses faces portent le numéro 6 ; deux autres portent le numéro 5 et les deux derniers le numéro 2.

On dit qu'on obtient « un double » si les faces supérieures des dés portent des chiffres identiques.

A chaque lancer, si le joueur fait « un double » ; il gagne 1000 F CFA, sinon, il perd 500 F CFA. Cette dernière alternative est comptabilisée comme un gain de - 500.

1. On lance les dés une fois. Montrer que la probabilité de gagner 1000 F est $P(X=1000) = 2/9$

Ti - 71



- 2 On lance les dés quatre fois. soit X la variable aléatoire associée au gain du joueur sur l'ensemble des quatre lancers.
- 2a Donner l'ensemble des valeurs prises par X .
- 2b Montrer que $P(X = -500) = \frac{2744}{6561}$.
- 2c Etablir la loi de probabilité de X .
- 3a Vérifier que l'espérance mathématique de X est $E(X) = \frac{-2000}{3}$.
- 3b Le jeu est-il équitable? Justifier.
- 3c L'organisateur décide de rendre le jeu équitable. Pour cela, il offre une prime p à trois joueurs (qui devront la partager équitablement) et ceux quel que soit le résultat obtenu après les quatre lancers.
- Calculer P .
- 4 On lance les dés n fois ($n \geq 2$).
- 4a Calculer en fonction de n la probabilité q_n de ne jamais faire « un double ».
- 4b En déduire en fonction de n la probabilité p_n de faire au moins « un double ».
- 4c * Quelle est la valeur minimale de n pour que $p_n \geq 0,95$?
- (on prendra $\ln(0,05) = -3$, $\ln(\frac{7}{9}) = -0,25$).



PCVA N°35 Au LYMORESS, une étude a montré que sur 100 filles inscrites en 2ndC, 40 parviennent à atteindre la classe de T^{le}C et s'y inscrivent.

- 1 Justifier que la probabilité qu'une élève du LYMORESS inscrite en 2ndC parvienne à atteindre la classe de T^{le}C et s'y inscrit est $P(TC) = \frac{2}{5}$.
- 2 Dans ce lycée, on choisit au hasard 10 élèves filles parmi les 100 inscrites en 2ndC. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'élèves (filles) qui parviennent à atteindre la classe de T^{le}C et s'y inscrivent. Quelle est la probabilité pour que:
- 2a 8 élèves (filles) exactement parviennent à atteindre la classe de T^{le}C et s'y inscrivent?
- 2b Au moins 2 élèves (filles) parviennent à atteindre la classe de T^{le}C et s'y inscrivent?
- 3 Lorsqu'une élève est parvenue à atteindre la classe de T^{le}C et s'y est inscrite, la probabilité qu'elle fasse échec au BAC C est de 0,1. Toutes les élèves admises au BAC C reçoivent un diplôme d'honneur.
- 3a Justifier que la probabilité $P(D)$ pour une élève du LYMORESS inscrite en 2ndC reçoive un diplôme d'honneur est $P(D) = 0,36$.
- 3b M^r TATTO, Proviseur du LYMORESS, choisit au hasard un nombre n d'élèves inscrites en 2ndC ($n \in \mathbb{N}$ tel que $1 < n \leq 100$). Soit P_n la probabilité d'avoir au moins une élève ayant reçu un diplôme d'honneur.
- 3a Exprimer P_n en fonction de n .
- 3b * Déterminer le nombre minimal n d'élèves (filles) que le Proviseur doit choisir pour que $P_n \geq 0,99$.

(*) Voir ln

PCVA N°36

L'association "BAC-A-CHO" organise une tombola. Tous les billets au nombre de 500 sont vendus.

- L'un des billets permet de gagner un lot d'une valeur de 62.000F.
- 9 billets permettent chacun de gagner un lot d'une valeur de 7.000F.
- 50 billets permettent chacun de gagner un lot d'une valeur de 500F.
- Les autres billets sont perdants.

1 On choisit au hasard un billet. Tous les billets ont la même probabilité d'être choisi. Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants:

1a A: « le billet choisi gagne un lot d'une valeur de 7000F ».

1b B: « le billet choisi est perdant ».

2 Les billets sont vendus à 500F l'unité. Combien rapportera la tombola au trésorier de l'association?

3 On appelle gain d'un billet la différence entre le montant du lot et le prix d'achat du billet. On désigne par X la variable aléatoire qui associe à chaque billet choisi au hasard son gain.

3a Donner les différentes valeurs de X .

3b Donner la loi de probabilité de X .

3c Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de X .

4 Pour augmenter ses chances, Tataby a acheté 5 billets. Quelle est la probabilité pour qu'il ait exactement 3 billets gagnants parmi les 5 qu'il a achetés?

PCVA N°37

Une population d'élèves comportant 40% de bacheliers a subi un test de recrutement en première année d'une grande école. Ce test a donné les résultats suivants:

- 75% des bacheliers sont admis.
- 52% des non bacheliers sont admis.

On choisit au hasard un élève de la population et on note:

- B l'événement « l'élève est bachelier »
- T l'événement « l'élève est admis au test »
- A l'événement « l'élève est bachelier et admis au test »

1 Préciser chacune des probabilités suivantes:

1a la probabilité $P(B)$ de l'événement B.

1b La probabilité $P_B(T)$ de T sachant que B est réalisé.

1c La probabilité $P_{\bar{B}}(T)$ de T sachant que B n'est pas réalisé.

2 Démontrer que la probabilité de l'événement A est égale à 0,3.

3 Calculer la probabilité de l'événement T.

4 Dédire des questions précédentes, que les événements B et T ne sont pas indépendants.

5 Démontrer que la probabilité pour qu'un élève admis au test soit bachelier est $25/51$.

6 On choisit au hasard 5 élèves de la population étudiée. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'étudiants bacheliers et admis



→

- au test parmi les 5 choisis.
- c1 Démontrer que la probabilité pour que 3 seulement des 5 élèves choisis soient bacheliers et admis au test est égale à 0,1323.
 - c2 Calculer l'espérance mathématique de X .



PCVA N°38 Le chargement d'un Camion remorque est composé de 60 sacs identiques dont 10 contiennent un produit non déclaré aux services des douanes. Le trajet à parcourir comporte trois barrages de douane. A chacun de ses barrages, le contrôle obligatoire consiste à examiner le contenu de 5 sacs choisis au hasard (les contrôles effectués aux différents barrages sont indépendants).

A Hamidou le Camionneur arrive à un barrage donné. (on donnera un arrondi d'ordre 1 de chacun des résultats).

- 1 Calculer la probabilité $P(A)$ pour qu'exactement 2 des 5 sacs contrôlés contiennent le produit non déclaré.
- 2 Démontrer que la probabilité pour que l'un au moins des 5 sacs contrôlés contienne le produit non déclaré est égale à 0,6.

B Hamidou sait que si l'un au moins des sacs du produit non déclaré est découvert à un barrage quelconque, il doit payer une taxe forfaitaire de 10.000F à ce barrage pour être autorisé à continuer son chemin avec tout son chargement. Si Hamidou ne peut pas payer la taxe forfaitaire, tout son chargement est saisi.

- 1 On suppose que Hamidou paie la taxe chaque fois que le produit non déclaré est découvert. On note X la variable aléatoire égale à la somme totale que Hamidou peut ainsi payer sur l'ensemble de son trajet.

1a Donner l'ensemble des valeurs prises par X .

1b Montrer que $P(X=20.000) = 0,432$.

1c Déterminer la loi de probabilité de X .

1d Démontrer que l'espérance mathématique $E(X)$ de X est $E(X) = 18.000$.

- 2 Avant de prendre la route, Hamidou a oublié son porte-monnaie à la maison, il n'a donc pas d'argent pour payer une éventuelle taxe. Calculer la probabilité pour que son chargement soit saisi.

PCVA N°39 On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles. Une classe de 1^{re} D du LYMORESS compte 30 élèves dont 10 filles.

- 1 A chaque séance du cours de mathématiques, le professeur interroge au hasard 3 élèves.

Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants:

1a A: « Exactement deux des 3 élèves interrogés sont des garçons ».

1b B: « Les 3 élèves interrogés sont du même sexe ».

T. 74

→

- 1c: « il y a au plus une fille parmi les 3 élèves interrogés ».
- 2 On désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de filles interrogées à chaque séance du cours de mathématiques.
- 2a Donner l'ensemble des valeurs prises par X .
- 2b Justifier que $P(X=2) = 45/203$.
- 2c Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .
- 2d Déterminer l'espérance mathématique $E(X)$ de X .
En déduire l'écart type $\sigma(X)$ de X .
- 2e Définir la fonction de répartition F de X et la représenter dans un repère orthogonal ($2\text{cm} \rightarrow \frac{50}{203}$).
- 3 A la fin de chaque séance, le professeur désigne au hasard un élève qui effacera le tableau. Un même élève peut être désigné plusieurs fois.
- 3.1 Déterminer la probabilité P_n pour que le tableau soit effacé au moins une fois par une fille à l'issue de n séances ($n \in \mathbb{N}$).
- 3.2 Déterminer le nombre minimal de séances pour que $P_n \geq 0,9999$.
- 4 Parmi les 19 internes de la classe, on compte 4 filles. On choisit au hasard dans cette classe deux délégués de sexes différents. Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants:
- 4a D: « les deux délégués sont internes ».
- 4b E: « un seul des deux délégués est interne ».



PCVA N°40

À FLASCHTOWN, au Lycée Moderne "BOSSÉDUR", on a relevé que l'année dernière 60% des élèves de terminale étaient réguliers en classe; les autres étaient irréguliers. Après les résultats du BAC, on a constaté que dans ce lycée, la probabilité qu'un élève régulier en classe soit admis est 0,8 tandis que 90% des élèves irréguliers en classe ont échoué à l'examen.

On choisit un élève au hasard de la liste des élèves de T^{le} de l'année dernière du Lycée Moderne "BOSSÉDUR". On note les événements: R : « l'élève choisi était régulier en classe ».

A : « l'élève choisi est admis au BAC ».

$\bar{R}$ et $\bar{A}$ désignent respectivement les événements contraires de R et A . On suppose que tous les élèves ont subi l'examen du BAC.

1. Préciser les probabilités suivantes.
- 1a $P(R)$: la probabilité de l'événement R .
- 1b $P(\bar{R})$: la probabilité de l'événement $\bar{R}$.
- 1c $P(A/R)$: la probabilité de l'événement A sachant R .
- 1d $P_{\bar{R}}(A)$: la probabilité de l'événement A sachant $\bar{R}$.
- 2 Calculer la probabilité de l'événement « l'élève était régulier en classe et admis au BAC ».

- 3 Démontrer que $P(A) = 0,52$.
4. On choisit un élève admis au BAC. Calculer la probabilité qu'il ait été régulier en classe.
5. On contrôle les relevés de notes au BAC de 5 élèves choisis au hasard de la liste des élèves de terminale de l'année dernière du LY.MDB. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'élèves admis au BAC parmi les 5 choisis.
- 5a Donner les valeurs prises par X .
- 5b Calculer la probabilité d'avoir exactement deux des 5 élèves admis au BAC.
- 5c Calculer la probabilité d'avoir au moins un des 5 élèves admis au BAC.
- 5d Donner la loi de probabilité de X .
- 5e Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de X .
- 6 On contrôle les relevés de notes de n élèves choisis au hasard de la liste des élèves de Tle de l'année dernière du LY.MDB ($n \in \mathbb{N}^*$). Déterminer la valeur minimale de n pour que la probabilité d'avoir au moins un parmi ces élèves admis au BAC soit supérieure à 0,98.

PCVA N°41 A la kermesse du Lycée Moderne BOSSÉDUR (LYMDB),
Un organisateur de jeux dispose de deux roues A et B
de 20 cases chacune.

- La roue A comporte 18 cases noires et 2 cases rouges.
- La roue B comporte 16 cases noires et 4 cases rouges.

Lors du lancer d'une roue, toutes les cases ont la même probabilité d'être obtenues. La règle du jeu est la suivante:

- Le joueur mise 100 F et lance la roue A;
- ✓ s'il obtient une case rouge, alors il lance la roue B, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.
- ✓ s'il obtient une case noire, alors il relance la roue A, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.

- 1 Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.
- 2 soient E et F les événements :
- E : « à l'issue de la partie, les 2 cases obtenues sont rouges »
- F : « à l'issue de la partie, une seule des deux cases est rouge ».
- Montrer que $P(E) = 0,02$ et $P(F) = 0,17$
- 3 si les 2 cases obtenues sont rouges le joueur reçoit 1000 F.
si une seule des cases est rouge, le joueur reçoit 200 F.
sinon, il ne reçoit rien.
- X désigne la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur
(Rappel : le joueur mise 100 F).
- 3a Donner les valeurs prises par X .
- 3b Déterminer la loi de probabilité de X .



T-76

07 70 78 40
03 20 77 79

- 3c Calculer l'espérance mathématique $E(x)$ de x et en donner une interprétation.
4. Lati décide de jouer n parties consécutives et indépendantes ($n \geq 2$)
- 4a Démontrer que la probabilité P_n qu'elle lance au moins une fois la roue B est telle que $P_n = 1 - (0,9)^n$, ($n \in \mathbb{N}$).
- 4b Justifier que le terme général P_n est convergente et préciser sa limite.
- 4c Quelle est la valeur minimale de n pour laquelle $P_n > 0,9$?

PCVA N°42. La société « Gnamien Lait » de Gnamien produit des sachets de lait caillé. Soit x la variable aléatoire qui associe à chaque sachet de lait caillé produit sa masse en gramme (g). La loi de probabilité de x est définie par le tableau ci-dessous :

x_i (en g)	220	230	240	250	260	270	280	a et b sont de nombres réels.
P_i	0,08	0,1	a	b	0,16	0,15	0,04	

- 1a Calculer l'espérance mathématique $E(x)$ de x en fonction de a et b .
- 1b Sachant que $E(x) = 250$, Justifier que $a = 0,14$ et $b = 0,33$
(Dans la suite de l'exercice, on conservera les valeurs de a et b trouvées en 1b)
- 2 Gnamien prend au hasard un sachet de lait de sa société. Calculer la probabilité pour que la masse de ce sachet soit au moins de 250 g.
- 3 Tieplé, la fille de Gnamien prend au hasard et de façon indépendante cinq sachets de lait caillé. Calculer la probabilité qu'elle est Choisi exactement 3 sachets de lait de 220 g. (on donnera l'arrondi d'ordre 3 du résultat)
4. Les sachets de lait sont contrôlés par une machine. Cette machine est réglée pour éliminer en principe les sachets de lait de masse strictement inférieur à 250 g.
- si un sachet de lait a 240 g, la probabilité qu'il soit éliminé est de 0,7.
 - si un sachet de lait a 230 g, la probabilité qu'il soit éliminé est de 0,8.
 - si un sachet de lait a 220 g, il est systématiquement éliminé.
 - si un sachet de lait a une masse supérieure ou égale à 250 g, il est systématiquement accepté.
- 4a Justifier que la probabilité qu'un sachet de lait caillé de 240 g soit éliminé est de 0,098.
- 4b Calculer la probabilité pour qu'un sachet de lait caillé de la société « Gnamien Lait » soit éliminé.



07707840
03 20 8889
44 22 33 96

Schnell
S. T. - 77

PCVA N°43 Tabaki un livreur de pain qui fait son service à moto doit servir tous les jours un client à 20 heures précises. La livraison de pain chez ce client est indépendante d'un jour à l'autre. Habituellement, Tabaki met 10 minutes de la boulangerie au domicile de ce client; mais la mairie a fait installer sur son trajet deux feux tricolores non synchronisés et indépendants.

- si Tabaki arrive à un feu orange, il s'arrête 60 secondes et repart.
- si Tabaki arrive à un feu rouge, il s'arrête 30 secondes et repart.

Pour chaque feu :

- la probabilité d'être vert à l'arrivée de Tabaki est $1/2$
- la probabilité d'être orange à l'arrivée de Tabaki est $1/4$

On note X la variable aléatoire égale au temps mis en minutes (min) par Tabaki pour arriver au domicile du client.

- Justifier que l'ensemble des valeurs prises par X est : $\{10; 10,5; 11; 11,5; 12\}$
- Justifier que $P(X=11) = 5/16$.
- Déterminer la loi de probabilité de X .
- Calculer l'espérance mathématique de X . Interpréter ce résultat.
- Tabaki part à 19h49 min de la boulangerie.
- Calculer la probabilité qu'il arrive à 20 heures précises chez le client.
- Calculer la probabilité qu'il arrive en retard chez le client.
- Pour cette question, on donnera l'arrondi d'ordre 3 de chaque résultat.
- Calculer la probabilité pour que le pain soit livré exactement trois fois à 20 heures précises au cours d'une semaine.
- Calculer la probabilité pour que le pain soit livré au moins une fois à 20 heures précises au cours d'une semaine.

PCVA N°44 Cet exercice a pour but de déterminer lesquels des avions à 2 ou à 4 moteurs sont les plus sûrs.

Un avion ne s'écrase pas tant que la moitié au moins de ses moteurs fonctionne. Les moteurs d'un avion tombent en panne de manière indépendante. Soit p la probabilité pour qu'un moteur tombe en panne.

A Dans cette partie, on prendra $p = 0,1$

- Calculer la probabilité pour qu'un avion à 2 moteurs s'écrase.
- Calculer la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs ait ses 4 moteurs en panne.
- Calculer la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs ait exactement 3 moteurs en panne.
- En déduire la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs s'écrase

B On revient au cas général.

- Soit $f(p)$ la probabilité pour qu'un avion à 2 moteurs s'écrase. Démontrer que $f(p) = p^2$.



- 2 soit $g(p)$ la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs s'écrase.
Démontrer que $g(p) = p^2(-3p+4p)$.
- 3 On pose $h(p) = f(p) - g(p)$.
- 3a Etudier le signe de $h(p)$ en fonction de p .
- 3b En déduire, suivant les valeurs de p , dans quels avions il vaut mieux monter?



PCVA N°45 Propriétaire d'une loterie, M^r Djroukou met en vente des billets numérotés de 1 à 50. La règle du jeu est la suivante:

- Si le numéro du billet se termine par 0 ou 5, le client gagne 2000F.
- Si le numéro du billet se termine par 2 ou 3, le client gagne 1000F.
- Dans les autres cas, le client ne gagne rien.

- 1 Le client choisit un seul billet. On suppose que chaque billet a la même chance d'être choisi.
- 1a Quelle est la probabilité qu'il gagne 1000F?
- 1b Quelle est la probabilité qu'il gagne 2000F?
- 2 soit X la variable aléatoire qui à chaque billet choisi associe le gain réalisé.
- 2a Donner l'ensemble des valeurs prises par X .
- 2b Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de X .
- 2c Le jeu est-il équitable? Justifier.
- 2d Si M^r Djroukou veut rendre le jeu équitable, quelle somme S doit-il exiger à chaque participant? (on donnera l'arrondi au franc près).
- 3 Trouvant qu'il y a trop de gagnants, M^r Djroukou décide de retirer de la vente un certain nombre de billets terminés par 0 ou 5 ($0 \leq n \leq 10$). Le client choisit alors un billet parmi ceux restants. Soit X_n la variable aléatoire qui à chaque billet choisi associe le gain réalisé.
- 3a Montrer que l'espérance mathématique $E(X_n)$ de X_n est $E(X_n) = \frac{35000 - 2000n}{50 - n}$.
- 3b En déduire le nombre minimal de billets à retirer pour que $E(X_n) \leq 500$.
- 4 M^r Djroukou enlève 7 billets terminés par 0 ou 5. un client tire simultanément 2 billets parmi ceux restants. Soit Y la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le gain réalisé.
- 4a Donner l'ensemble des valeurs prises par Y .
- 4b Montrer que $P(Y=3000) = \frac{15}{301}$.
- 4c Donner la loi de probabilité de Y .



PCVA N°46 Une urne contient 10 boules blanches et n boules rouges, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2. On fait tirer à un joueur des boules de l'urne. A chaque tirage, toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées



- Pour chaque boule blanche tirée le joueur gagne 2 Yens et pour chaque rouge tirée il perd 3 Yens. On désigne par X la Variable aléatoire correspondant au gain algébrique obtenu par le joueur.
1. Le joueur tire deux fois successivement et sans remise une boule de l'urne.
 - 1a. Donner l'ensemble des valeurs prises par X .
 - 1b. Montrer que $P(X=-1) = \frac{20n}{(n+10)(n+9)}$.
 - 1c. Calculer en fonction de n la probabilité correspondant aux deux autres valeurs prises par la variable X .
 - 1d. Vérifier que l'espérance mathématique de X est $E(X) = \frac{-6n^2 - 14n + 360}{(n+10)(n+9)}$.
 - 1e. Déterminer s'ils existent les valeurs de n pour lesquelles le jeu est équitable.
 - 1f. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles le jeu est à l'avantage du joueur.

PCVA N°47 M^{me} Kapa veut savoir si son fils aura le BAC. Pour cela, elle se rend chez M^r Fifi Ribana le féticheur du village. Celui-ci lui propose deux boîtes indiscernables A et B contenant des poulets indiscernables au toucher.

- La boîte A contient 4 poulets rouges et 2 poulets noirs.

- La boîte B contient 3 poulets rouges et 1 poulet noir.

M^{me} Kapa choisit une boîte au hasard, tire au hasard un poulet de la boîte choisie et note sa couleur.

1. Montrer que la probabilité pour que le poulet choisi soit rouge est égale à $\frac{17}{24}$.
2. De la boîte choisie, M^{me} Kapa tire simultanément et au hasard 2 poulets. Montrer que la probabilité de tirer au moins un poulet noir est $\frac{11}{20}$.
3. Chez le féticheur Fifi, le prix de la consultation est fonction de la couleur du poulet tiré. Ainsi M^{me} Kapa paie 1000F pour un poulet noir tiré et 2000F pour un poulet rouge tiré. Soit X la variable aléatoire qui associe la somme à payer à Fifi après chaque tirage simultané de deux poulets.
- 3a. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X .
- 3b. Montrer que $P(X=3000) = \frac{31}{60}$.
- 3c. Déterminer la loi de probabilité de X .
- 3d. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de X .
4. M^{me} Kapa reprend n fois l'expérience de la question 2 ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$)
- 4a. Déterminer en fonction de n la probabilité q_n de ne jamais tirer de poulet noir.
- 4b. En déduire la probabilité P_n de tirer au moins un poulet noir.
- 4c. Calculer la valeur minimale de n pour que l'on ait $P_n \geq 0,8$.



PCVA N°48

Dans l'association sportive "BACACHO", un quart des femmes et un tiers des hommes adhèrent à la section tennis. On sait aussi que 30% des membres de cette association adhèrent à la section tennis.

- A On choisit au hasard un membre de cette association et on note :
- F l'événement « le membre choisi est une femme ».
 - T l'événement « le membre choisi adhère à la section tennis ».

- 1 Démontrer que la probabilité de l'événement F est $p(F) = 2/5$.
- 2 On choisit un membre au hasard de l'association de la section tennis. Quelle est la probabilité que ce membre soit une femme ?

B Pour financer une sortie, les membres de "BACACHO" organisent une loterie.

Chaque semaine un membre de l'association est choisi au hasard de manière indépendante pour la loterie.

- 1a Déterminer la probabilité pour qu'en quatre semaines consécutives il y ait exactement deux fois un membre qui adhère à la section tennis parmi les membres choisis.
- 1b Pour tout entier naturel non nul n , on note P_n la probabilité pour qu'en n semaines consécutives, il y ait au moins un membre qui adhère à la section tennis parmi les membres choisis. Montrer que $P_n = 1 - (0,7)^n$.
- 1c Déterminer le nombre minimal de semaines pour que $P_n \geq 0,99$.
- 2 Pour cette loterie, on utilise une urne contenant 100 jetons :

Les autres ne rapportent rien.

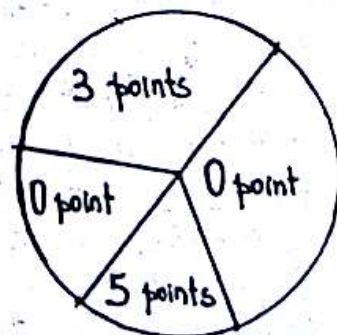
Pour jouer, le joueur doit payer 5000 F puis tirer au hasard et de façon simultanée deux jetons de l'urne. Il reçoit alors 20000 F par jeton gagnant. Les deux jetons sont ensuite remis dans l'urne. On note X le gain (en F) réalisé par le joueur lors d'une partie de cette loterie.

- 2a Donner l'ensemble des valeurs prises par X .
- 2b Montrer que $P(X = 15000) = \frac{20}{110}$.
- 2c Déterminer la loi de probabilité de X .
- 2d Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de X et interpréter le résultat obtenu.

PCVA N°49

Un jeu consiste à lancer des fléchettes sur une cible. La cible est partagée en 4 secteurs comme indiqué sur la figure ci-contre. On suppose que les lancers sont indépendants et que le joueur touche la cible à tous les coups.

- 1 Le joueur lance une fléchette. On note :
 - P_0 : la probabilité d'obtenir 0 point.
 - P_3 : la probabilité d'obtenir 3 points.
 - P_5 : la probabilité d'obtenir 5 points.



→ sachant que $P_5 = \frac{1}{2} P_3 = \frac{1}{3} P_0$.
Déterminer les valeurs de P_0 , P_3 et P_5 .

2. Une partie de ce jeu consiste à lancer trois fléchettes au maximum. Le joueur gagne la partie s'il obtient un total (pour les 3 lancers) supérieur ou égal à 8 points. Si au bout de 2 lancers, il a un total supérieur ou égal à 8 points, il ne lance pas la troisième fléchette. On note :

✓ G_2 : l'événement: « le joueur gagne la partie en 2 lancers ».

✓ G_3 : l'événement: « le joueur gagne la partie en 3 lancers ».

✓ P : l'événement: « le joueur perd la partie ».

- 2a Montrer que $P(G_2) = \frac{5}{36}$.

On admettra dans la suite que $P(G_3) = \frac{7}{36}$.

- 2b En déduire $p(P)$.

3. Un joueur joue 6 parties avec les règles données à la question 2.

- 3a Quelle est la probabilité qu'il gagne exactement 2 parties?

- 3b Quelle est la probabilité qu'il gagne au moins une partie?

4. Un joueur joue n parties ($n \in \mathbb{N}^*$). Déterminer n pour que la probabilité qu'il gagne au moins une partie soit supérieure à 0,99.

5. Pour une partie, la mise est fixée à 2000 F. si le joueur gagne en deux lancers, il reçoit 5000 F. s'il gagne en trois lancers, il reçoit 3000 F. s'il perd, il ne reçoit rien.

On note X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur pour une partie.

- 5a Donner l'ensemble des valeurs prises par X .

- 5b Déterminer la loi de probabilité de X .

- 5c Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de X .

PCVA N° 50

Voir "Complexe et ln"

Un dé parfait possède: Une face marquée 0, deux faces marquées -2 et trois faces marquées 1.

- A. On lance une fois le dé et on lit le numéro marqué sur la face supérieure.

Calculer la probabilité d'obtenir chaque numéro.

- B. Une expérience E consiste à lancer deux fois de suite le dé. On note a le numéro lu au premier lancer et b celui du deuxième lancer. On obtient ainsi le résultat $(a; b)$ de E .

1. Justifier que la probabilité d'obtenir deux numéros identiques est $\frac{7}{18}$.

2. Pour un résultat $(a; b)$ obtenu, on écrit le nombre complexe $z = a + ib$ et on place son point image M dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité 2 cm.

- 2a Placer tous les points images possibles. (il y en a 9).

- 2b Déterminer la probabilité de chacun des événements:

E_1 : « M est sur la droite d'équation $y = x$ »

E_2 : « OJM est un triangle rectangle ».



-
- 3 soit A le point d'affixe $-1-i$ et $(\mathcal{C})$ le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{3}$. On désigne par D la variable aléatoire égale à la distance AM.
- 3a Montrer que D prend exactement trois valeurs que l'on précisera.
- 3b Justifier que la probabilité de l'événement $(D=\sqrt{5})$ est $1/2$.
- 3c Déterminer la loi de probabilité de D.
- 3d Vérifier que l'espérance mathématique de D est $E(D) = \frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{5}}{4}$.
- 3e Montrer que la probabilité que le point M se place à l'extérieur du cercle $(\mathcal{C})$ est $p(e_x) = 3/4$.
- 4 On pratique n fois ($n \in \mathbb{N}^*$) la même expérience $\mathcal{E}$, en espérant placer une fois au moins le point M à l'intérieur du cercle $(\mathcal{C})$.
- 4a Quelle est la probabilité P_n de le réaliser ?
- 4b Au bout de combien de fois peut-on le réaliser à plus de 98,95% ?

PCVA S : La meilleure manière de réaliser ses rêves, c'est de commencer par se réveiller.

LEVEZ-VOUS & FONCEZ →



07 70 78 40
03 20 88 89
44 22 33 96

Chnell

7.

Je vous remercie tous (enseignants, élèves, amis et parents) et je souhaite que ce fascicule soit un outil de travail non seulement agréable mais surtout efficace pour ses utilisateurs.

Aussi, je recevrai avec grand intérêt et une infinie reconnaissance les remarques et critiques.

De votre Dévoué,
Celui qui ne jure que seul
le travail paye !!

Assué K

Schnell

07 70 78 40
03 20 88 89
44 22 33 96

N.B
?

Le secret de la réussite n'est pas de
faire ce que l'on aime mais d'aimer
ce que l'on fait.

Levez-vous donc et
COURAGE !!!!

FONCEZ



T1- 84



Refuser de bosser, c'est accepter d'échouer d'avance.