Ps : # Cinématique du Point

La Cinematique c'est l'etude des mouvements sans se preoccuper des causes (forces) capable de les provoquer

I-1) Rappels :

I-1-1) Mobile :

On appelle mobile tout corps qui déplace. C'est l'objet sur lequel porte l'etude du mouvement.

I-1-2) Caractere Relatif du mouvement :

Un voyageur assis dans un vehicule qui se déplace est :
- immobile par rapport aux autres voyageurs
- en mouvement par rapport aux pietons et aux arbres

les notions de deplacements, de mouvement et de vitesse sont relatifs au referenciel choisi : c'est le caractere relatif du mouvement.

I-1-3) Referentiels :

C'est un solide ou un ensemble de solide par rapport auquel on etudie le mouvement.

Exemples de referentiels : - référentiel terrestre : lié à la terre
- référentiel géocentrique : lié au mouvement de rotation de la Terre sur elle même ou le mouvement des satellites autour de la Terre.
- referentiel Copernic (ou heliocentrique) : lie au mouvement des corps qui tournent autour du soleil

I-2) Repère et Systèmes de coordonnées :

I-2-1) Repère :

Pour faire la description complete du mvt d'un corps il faut choisir un repere de temps et d'espace

I-2-1-1) Repere d'Espace :

Le repère est l'association d'un point fixe O au référentiel appelé origine et d'un système d'axes associé à une base de 3 vecteurs unitaire $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$
Le repère s'écrit donc $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

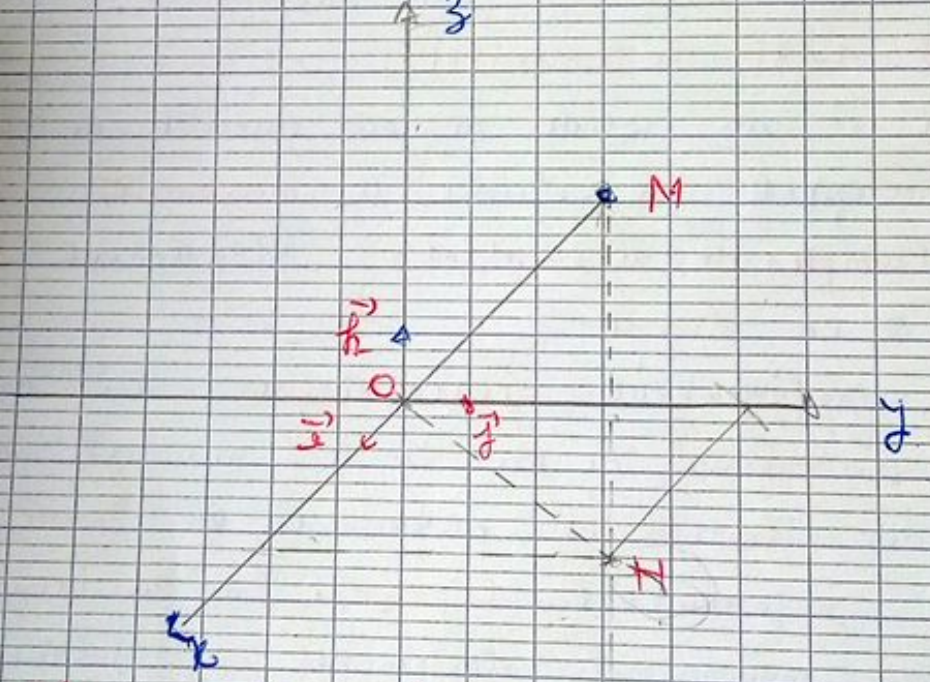
I-2-2) Repère de temps :

Le choix d'un repère de temps se ramène au choix d'une origine des dates appelée (t₀ instant initiale) et au choix d'une unité de temps qui est la seconde (s)

I-2-2 / Système de Coordonnées:

I-2-2-1/ Coordonnée Cartésienne :

Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la position d'un mobile M à chaque instant est repérée par le vecteur position $\overrightarrow{OM}$



$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NM}$$
$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

A chaque instant t la position du mobile est modifié donc les parametre x, y et z varient au cours du temps : $x = f(t)$, $y = f(t)$ $z = f(t)$ sont appelés équation horaire du mvt.

NB : Pour élimination de la variable (t) entre les parametre x, y et z on obtient l'equation cartesienne de la trajectoire.

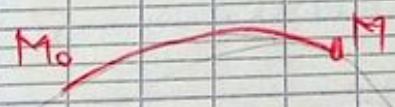
Exemples :

- $y = ax + b$: la trajectoire est une droite et le mouvement est rectiligne.
- $y = ax^2 + bx + c$ avec $(a \neq 0)$: la trajectoire est une est un arc de parabole et le mouvement est parabolique.
- $y = (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = a^2$: la trajectoire est un cercle de rayon $r = \sqrt{a^2}$ et de centre $C(x_c, y_c)$ et le mouvement circulaire.

I. 2-2-2| Abscisse Curviligne :

Il est constitué d'un point origine M choisi sur la trajectoire arbitrairement orienté.

La position du mobile est déterminée par l'abscisse curviligne (Δ) qui est la mesure algebrique de l'arc de courbe



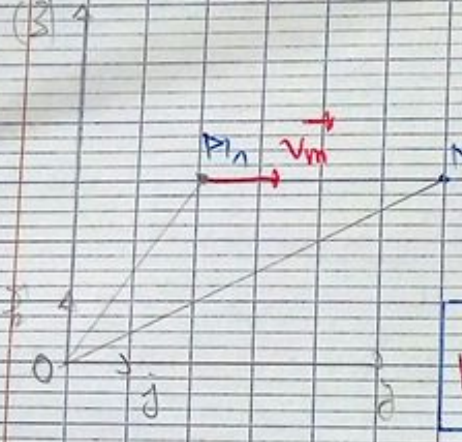
$S = \overset{\frown}{M_0M}$ $\quad S = f(t)$

arc de courbe decrit par le mobile à chaque instant (t).

S varie en fonction du temps donc l'equation horaire S = f(t)

I-3-1/ Le vecteur vitesse moyenne :

Le vecteur vitesse moyenne entre les instants de date t_1 et t_2



$$\vec{V}_m(t_1, t_2) = \frac{\vec{M_1M_2}}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{OM_2} - \vec{OM_1}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta(\vec{OM})}{\Delta t}$$

$$\|\vec{V_m}\| = \frac{\|\vec{M_1M_2}\|}{\Delta t}$$

I-3-2/ Vecteur vitesse Instantanée :

C'est la limite du vecteur vitesse moyenne entre les dates t_1 et t_2 lorsque $t_2 \to t_1$. Nous noterons

$$\vec{V} = \lim_{t_2 \to t_1} \vec{V_m} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta(\vec{OM})}{\Delta t} = \frac{d\vec{OM}}{dt}$$

Par définition le vecteur vitesse instantané est la dérivé par rapport au temps du vecteur position à ce date considéré :

$$\vec{V} = \frac{d\vec{OM}}{dt}.$$

* Les caractéristiques :
  - pt d'application : pt M où on veut déterminer la vitesse
  - direction : tangente à la trajectoire au pt M
  - sens : celui du mouvement

I-3-2-1) Expression du vecteur vitesse instantanée en coordonnée cartésienne :

Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on a :

$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ avec $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ vecteurs unitaire constant.

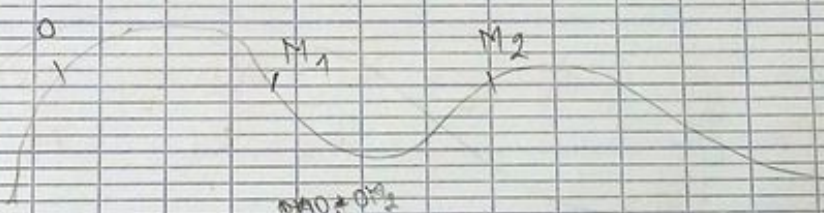
$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$$

$$= \frac{d}{dt}(x\vec{i}) + \frac{d}{dt}(y\vec{j}) + \frac{d}{dt}(z\vec{k})$$

OR $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = V_x = \dot{x} \\ \frac{dy}{dt} = V_y = \dot{y} \\ \frac{dz}{dt} = V_z = \dot{z} \end{cases}$ $\Rightarrow$ alors $\boxed{\vec{V} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}}$

$\boxed{\|\vec{V}\| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}$

I-3-2-2) Expression du vecteur vitesse instantané en abscisse curviligne :

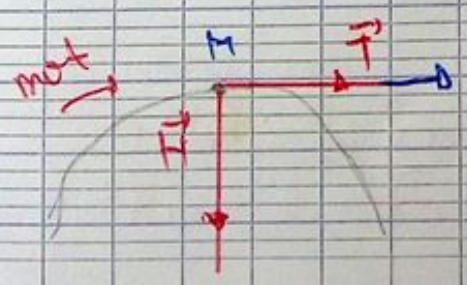


$$\vec{V} = \lim_{t_2 - t_1} \frac{\overset{\frown}{M_1M_2}}{t_2 - t_1} = \lim_{t_2 - t_1} \frac{\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}}{t_2 - t_1} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

OR $\overset{\frown}{OM} = S$

$$\boxed{\vec{V} = \frac{d\vec{S}}{dt} = \dot{S}\vec{u}} \qquad V = \dot{S}$$

3-2-3) Expression du vecteur vitesse instantané dans la base de Frenet :



Base de Frenet $(\vec{T}, \vec{N})$

ou $(\vec{u}_t, \vec{u}_n)$

Repère de Frenet $(M, \vec{T}, \vec{N})$

ou $(M, \vec{u}_T, \vec{u}_N)$

$\vec{T}$: est tangente à la trajectoire au M orienté dans le sens arbitrairement choisi.

$\vec{N}$: est perpendiculaire à $\vec{T}$ et orienté du côté concave de la trajectoire.

$$\vec{V} = V_t \vec{T} + V_n \vec{N} \quad \text{ou} \quad \vec{V} = V \vec{T}$$

$$\boxed{\vec{V} = V_t = \dot{S}} \quad m/s$$

II-) Vecteur Accélération :

Il décrit les variation du vecteur vitesse en fonction du temps.

II-1) Vecteur accélération moyenne :

Par définition l'accélération moyenne entre M_1 et M_2 est donnée par :

$$\boxed{\vec{a_m} = \frac{\vec{V_2} - \vec{V_1}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t}}$$

$$\boxed{a_m = \frac{\| \Delta \vec{V} \|}{\Delta t} \quad \begin{matrix} m/s \\ \hline s \end{matrix}} \quad m/s^2$$

II-2) Vecteur accélération instantanée ~~moyenne~~ :

$$\vec{a} = \lim_{t_2 - t_1} \vec{a_m} = \lim_{t_2 - t_1} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt}$$

or $\dfrac{d\vec{V}}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{d\vec{OM}}{dt}\right)$

$\Rightarrow$ alors $\boxed{\vec{a} = \dfrac{d\vec{V}}{dt} = \dfrac{d^2 \vec{OM}}{dt^2}}$

II-2-1) Expression du vecteur accélération instantanée en coordonnées cartésiennes :

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on a :

$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ avec $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ vecteurs unitaire constant.

$$\vec{a} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$$

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = a_z = \dot{v}_z = \ddot{z}$$

$$\boxed{\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}} \qquad \|\vec{a}\| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} \sim m/s^2$$

Application :

II-2-2) Expression du vecteur accélération instantanée dans la base de Frenet : $(\vec{T}, \vec{N})$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \quad \text{or} \quad \vec{v} = v_t\vec{T} = v\vec{T} \quad \text{car } v_n = 0$$

$\vec{N} \neq \vec{T}$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(v\vec{T}) = \underbrace{\frac{dv}{dt}\times\vec{T}}_{(a\ b')} + \underbrace{v\times\frac{d\vec{T}}{dt}}_{(a'\ b)}$$

or $\boxed{a_t = \frac{dv}{dt}\vec{T} = a_t\vec{T}}$: Vecteur accélération tangentielle

On admet que $\frac{v}{\rho} = \frac{d\vec{T}}{dt}$ | $\vec{a}_n = \frac{v^2}{\rho}\vec{N}$ vecteur accélération

avec ρ = rayon de courbure de la trajectoire normale.

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = \frac{d\vec{v}}{dt}\vec{T} + \frac{v^2}{\rho}\vec{N}$$

a_t : Norme $= \frac{dv}{dt}$ $\quad a_n = \frac{v^2}{\rho}$

EXERCICE D'APPLICATION

Les équations horaires du mouvement d'un mobile M dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ sont :

$x(t) = t$ et $y(t) = t^2 - 4t + 3$ avec x et y en mètre et t en seconde

1) Déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire du mobile M.
2) Exprimer les composantes du vecteur vitesse. Calculer sa norme à t=2s
3) Déterminer les valeurs de l'accélération tangentielle et normale à l'instant de date $t_0 = 0$ s. en déduire le rayon de courbure de la trajectoire à cet instant.
4) Entre quels instants de date le mouvement est-il accéléré ? Retardé ?

Solution :

1) Equation de la trajectoire.

$x = t \Rightarrow \boxed{y = x^2 - 4x + 3}$

la trajectoire est un axe de parabole

le mouvement est parabolique.

2-) Exprimons les composante du vecteur vitesse.

$\vec{v} \begin{cases} \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = 2t - 4 \end{cases}$

Calculons la norme à $t = 2s$

$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{1 + (2t-4)^2}$

à $t = 2s$:

$v = \sqrt{1 + (4-4)} = 1 \text{ m/s}$

3-) Déterminons les valeur a_T et a_N à $t_0 = 0s$

On a : $a_t = \frac{dv}{dt}$ on $v = \sqrt{1 + (2t-4)^2}$

$v = \sqrt{1 + 4t^2 - 16t + 16}$

2) $a_t = \left(\sqrt{4t^2 - 16t + 17}\right)' = \frac{(4t^2 - 16t + 17)'}{2\sqrt{4t^2 - 16t + 17}} = \frac{8t - 16}{2\sqrt{4t^2 - 16t + 17}}$

$\boxed{a_t = \frac{4t - 8}{\sqrt{4t^2 - 16t + 17}}}$

$a_{t=0} = \frac{-8}{\sqrt{17}}$ m/s²

- Calculons a_n :

$a_n = \frac{v^2}{\rho}$ ρ : inconnu

$a^2 = a_n^2 + a_t^2$ ⇒ $a_n^2 = a^2 - a_t^2$

$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2}$ or $\vec{a} \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 2 \end{cases}$ $a = 2$ m/s

$a_n = \sqrt{4 - \frac{64}{17}} = \boxed{\frac{2}{\sqrt{17}} \text{ m/s}^2}$

- Déduisons en le rayon de courbure.

$\rho = \frac{v^2}{a_n}$ on $V(t=0) = \sqrt{17}$ m/s

$a_n = 2/\sqrt{17}$ m/s²

AN : $\rho = \frac{17}{2/\sqrt{17}} = 17 \times \frac{\sqrt{17}}{2} = 35$ m

$\boxed{\rho = 35 \text{ m}}$

4) trajectoire du mouvement

$\vec{a} \cdot \vec{v} = (0\vec{i} + 2\vec{j}) \cdot (\vec{i} + (4t - 4)\vec{j})$

$= 4t - 8$

poser : $4t - 8 \geq 0 \Rightarrow t \geq \frac{8}{4} = 2$ s

t		2	
$4t - 8$	$-$	0	$+$

$[0, 2[$ $\vec{a} \cdot \vec{v} < 0$: mvt retardé

$]2, +\infty[$: $\vec{a} \cdot \vec{v} > 0$ mvt accéléré

III) Etude de quelques mouvements :

III-1) Mouvement accéléré - Retardé - uniforme :

Un mouvement est dit accéléré si le module du vecteur vecteur vitesse $\|\vec{V}\|$ augmente ; retardé si il diminue ; uniforme si il est constant

- Conséquence :

- si $\|\vec{v}\|$ augmente le mouvement est accéléré et $\vec{a} \cdot \vec{v} > 0$ (même sens)
- si $\|\vec{v}\|$ diminue le mouvement est retardé ou décéléré $\vec{a} \cdot \vec{v} < 0$ (de sens opposé)
- si $\|\vec{v}\|$ est une constante : le mouvement est uniforme $\vec{a} \cdot \vec{v} = 0$ ($\vec{a} = \vec{0}$ et $\vec{v} =$ est. ne $\vec{a} = \vec{0}$ donc $\vec{a} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{a} = \vec{a_n}$ et $\vec{a_T} = \vec{0}$)

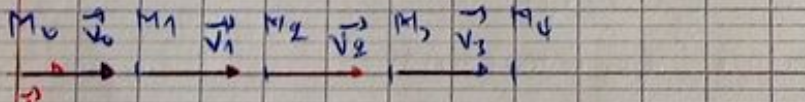
Exemple : Voir exo d'application

II-2) Mouvement Rectiligne :

Un mouvement est rectiligne si sa trajectoire est une droite.

II-2-1) Mouvement Rectiligne Uniforme :

Un mouvement est rectiligne uniforme si sa trajectoire est une droite et la norme de son vecteur vitesse instantanée constante



- Equation horaire :

MRU : A $t = 0$ s $x = x_0$ et $V = V_0 =$ constante

$\Rightarrow a = \frac{dV}{dt} = 0$

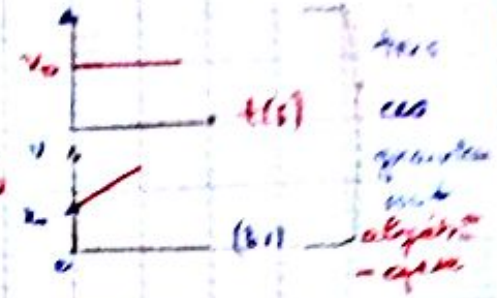
à $t \neq 0$ seconde $\Rightarrow V_0 = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = V_0 dt$

$\Rightarrow x = \int V_0 dt \Rightarrow$

$$\boxed{x = V_0 t + x_0}$$

équation horaire du mvt rectiligne uniforme.

MRU $\begin{cases} a = 0 \\ V = V_0 = \text{Constante} \\ \bar{x}(t) = \bar{V}_0 t + \bar{x}_0 \end{cases}$



Avec ces graphes on obtient alors :

Application :

Les équations paramétriques du mobile donnant le vecteur position $\vec{OM}$ sont : $\vec{OM} \begin{cases} x = t \\ y = 2t + 4 \\ z = 0 \end{cases}$

1-) Montrons que le mobile est R.U pour cela il faut :

- d'abord que sa trajectoire est une droite

$x = t \Rightarrow |y = 2x + 4|$: la trajectoire est une droite et le mobile est rectiligne. ①

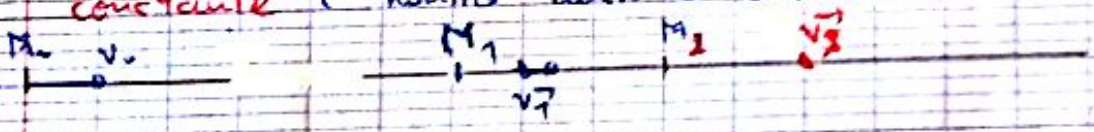
- Montrons ensuite qu'il est uniforme c'est à dire $V = cte$

$\vec{V} \begin{cases} \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = 2 \end{cases} \Rightarrow V = \sqrt{5}\ m/s = cte$ ②

D'après ① et ② le mobile est R.U.

III - 2 - 2) Mobile Rectiligne uniformément varié :

Sa trajectoire est une droite et le vecteur accélération constante (nous aussi = constante).



MRUV : $a = a_0 = a_x = \text{constante}$

$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dV = a\,dt \Rightarrow V = \int a\,dt$

$V = at + cte$.

à $t = 0$: $V = V_0 \Rightarrow V_0 = a(0) + cte \Rightarrow V_0 = cte$

$$\boxed{V = at + V_0}$$

équation relative à V pour un MRUV

$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v\,dt = (at + v_0)\,dt$

$x = \int at\,dt + \int v_0\,dt = a\int t\,dt + v_0 \int dt$

$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + cte$ or à $t = 0$ $x = x_0$

$x_0 = \frac{1}{2}a(0)^2 + v_0(0) + cte \Rightarrow x_0 = cte$

d'où $\boxed{x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0}$ équation horaire

relative à l'abscisse x d'un MRUV.

- Relation indépendante du temps entre v et x

$v = at + v_0 \Rightarrow t = \frac{v - v_0}{a}$

$x = \frac{1}{2}a\left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2 + v_0\left(\frac{v - v_0}{a}\right) + x_0$

$x - x_0 = \frac{v^2 - 2vv_0 + v_0^2}{2a} + \frac{2vv_0 - v_0^2}{2a} = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$

$\boxed{v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)}$ $\quad \Delta v^2 = 2a\,\Delta x$

Formule de Torricelli

MRUV

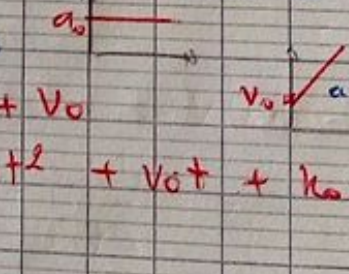
$a = cte$

$v = at + v_0$

$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$

$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

$\Delta v^2 = 2a\,\Delta x$



Propriétés :

Les espaces parcourues (pendant) par des intervalle temps successifs et égaux (Δt) sont en progression arithmétique

matique ($U_{n+1} = U_n + r$) de raison $r = a\theta'$ / $= a\ddot{x}$

III-3) Mouvement Rectiligne Sinusoïdal :

Un MRS est un mouvement de va et vient sur un segment [AB] de longueur d autour du point O milieu de [AB]

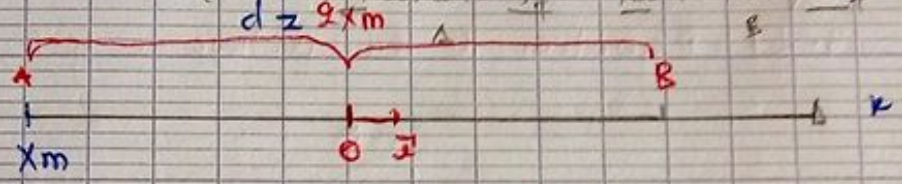
L'equation horaire de ce mouvement peut se mettre sous la forme développée

$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$ ou

$x(t) = X_m \sin(\omega t + \varphi)$ ou

$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ ou

$x(t) = X_m \cos\omega t \cos\varphi - X_m \sin\omega t \sin\varphi$



- x(t) : est l'abscisse ou élongation
- X_m : est l'amplitude maximale ou élongation maximale en metre (m) toujours > 0
- ω : est la pulsation en Rad/s
- φ : phase initiale ou phase à l'origine en rad
- $(\omega t + \varphi)$: phase instantanée à la date t en radian

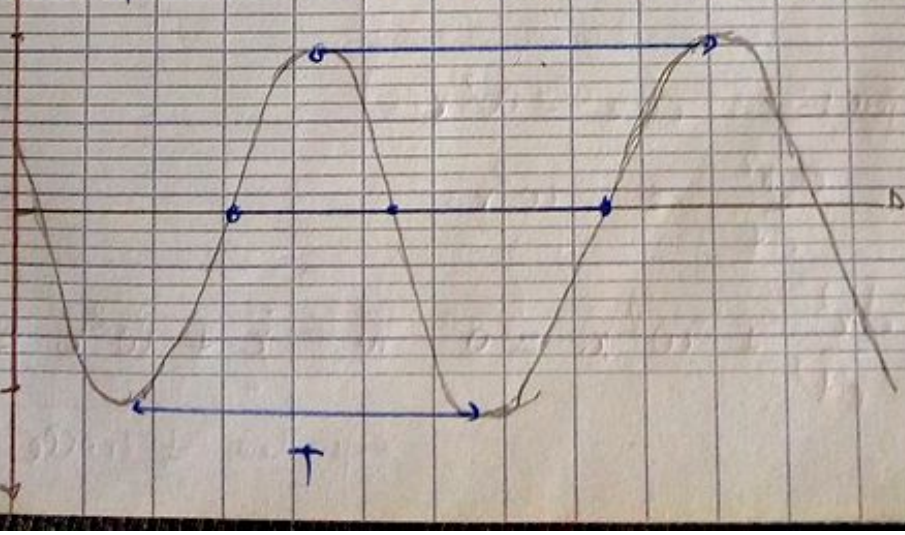
NB :

$\frac{1}{2}T \longrightarrow d = 2X_{max}$

période (T) $T \longrightarrow 2d = 4X_{max}$

3-1) Equation du Mobile :

Le mobile M effectue un mouvement de va et vient entre les points A et B d'abscisse respective X_m et $-X_m$



Un mouvement rectiligne sinusoïdal est un mvt périodique.

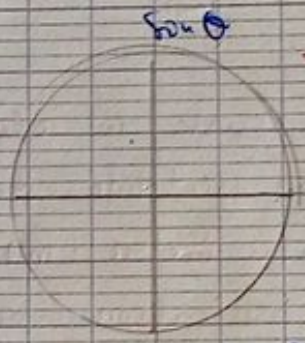
La période : est le temps au bout duquel un mobile se repete identique à lui-même. Elle est donné par

(S) $$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

- La fréquence : c'est l'inverse de la période elle s'exprime en Hertz (H_z)

(H_z) ou s^{-1} $$N = \frac{1}{T}$$

3-2) Equation de la vitesse et de l'accélération :



$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi)$$

$$V = \dot{x} = -x_m \omega \sin(\omega t + \varphi) \qquad V_m = x_{max}\,\omega$$

$$a = \ddot{x} = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x$$

$$a_m = \omega^2 x_m$$

Remarque : $a = -\omega^2 x$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad \text{ou} \quad \ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

équation différentielle

MIRS

* $\cos a = \cos b \Rightarrow \begin{cases} a = b + 2k\pi \\ a = -b + 2k\pi \end{cases}$

* $\sin a = \sin b \Rightarrow \begin{cases} a = b + 2k\pi \\ a = (\pi - b) + 2k\pi \end{cases}$

$k \in \mathbb{Z}$

* $\cos a = -\cos b = \cos(\pi - b)$

* $\sin a = -\sin b = \sin(-b) \Rightarrow \begin{cases} a = -b + 2k\pi \\ a = (\pi + b) + 2k\pi \end{cases}$

EXERCICE D'APPLICATION :

Un mobile ponctuel M se déplace sur un axe horizontal(x'Ox) d'origine O. La loi horaire de son mouvement $x = f(t)$ est donnée par le graphe ci- dessous.

1/ Quelle est la nature du mouvement?

2/ Déterminer l'amplitude X_m, la période T, la pulsation ω, la fréquence N et la phase initiale φ du mouvement.

3/ Ecrire la loi horaire de $x = f(t)$ sous la forme $x(t) = X_m\cos(\omega t + \varphi)$ puis sous la forme $x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ avec A et B des constantes que l'on précisera.

4/ En considérant l'équation de la forme $x(t) = X_m\cos(\omega t + \varphi)$.

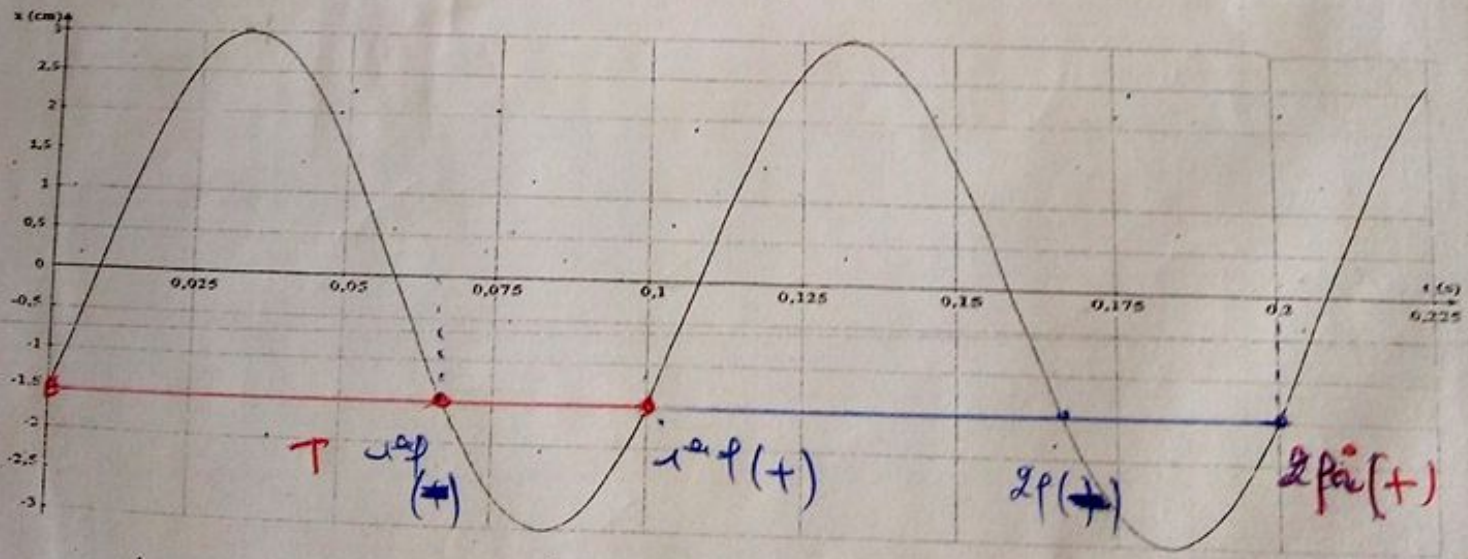
a/ Déterminer la position du mobile pour laquelle sa vitesse prend la valeur maximale V_m.

b/ Etablir l'expression en fonction du temps, de la vitesse v(t) du mobile ainsi que celle de l'accélération a(t).

c/ Déterminer la date à laquelle le mobile passe pour la deuxième fois (après la date t=0) par l'élongation $x = -1{,}5$cm en allant dans le sens positif ?

En déduire la vitesse et l'accélération du mobile à cet instant. Le mouvement à cet instant est- il accéléré ou retardé ?

d/ Quelle est la longueur parcourue par le mobile au bout de 4 périodes ?



$\varphi\left(20\pi t - \frac{9\pi}{2}\right) = \frac{-\pi}{2}$ sin

1) MRUS

2) $X_m = 3\,cm = 0{,}03\,m$

$T = 0{,}1\,s$

$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0{,}1} = 20\pi\ rad/s$

$N = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}1} = 10\ Hz = 10\ s^{-1}$

A $t = 0$ $x = -1{,}5\,cm$ abscisse donc à son point d'équilibre donc $V > 0$ (vers droite)

$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$

$-1{,}5 = 3\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = -\frac{1{,}5}{3} = -\frac{1}{2}$

$\cos\varphi = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos\varphi = -\frac{\pi}{3} = \cos(\pi - \pi/3)$

$\cos\varphi = \cos\frac{2\pi}{3} \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3}$ ou $\varphi = -\frac{2\pi}{3}$

$V = \dot{x} = -X_m \sin(\omega t + \varphi)$

A $t = 0$ la mobile part dans le sens positif $V > 0$

$V = -X_m \sin\varphi > 0$ si φ est sol < 0

donc $\boxed{\varphi = -\frac{2\pi}{3}}$

4) Ecrire équation horaire, $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$

$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$ $x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$

avec $X_m = 0{,}03\,m$ et $\omega = 20\pi$ $\varphi = -2\pi/3$

$\boxed{x(t) = 0{,}03\cos(20\pi t - 2\pi/3)}$

$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$

$x(t) = 0{,}03 \cos 20\pi t \cos 2\pi/3 + 0{,}03 \sin 20\pi t \sin 2\pi/3$

$x(t) = -0{,}015 \cos(20\pi t) + 0{,}026 \sin(20\pi t)$

$A = -0{,}015\ m$ et $B = 0{,}026\ m$

4-a) Déterminons la position du mobile $v = v_m$:

$$\begin{cases} x = x_m \cos(\omega t + \varphi) \\ v = -x_m \omega \sin(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

(v) primitive de (x)

$v = x_m \omega = cte$

$v' = x$

$0 = x$

$$\begin{cases} x\omega = +x_m \omega \cos(\omega t + \varphi) \\ v = -x_m \omega \sin(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

$x^2\omega^2 = x_m^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$

$v^2 = x_m^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$

$x^2\omega^2 + v^2 = x_m^2 \omega^2$

Or $v = v_m = x_m \omega$

$x^2\omega^2 + x_m^2\omega^2 = x_m^2\omega^2$

$x^2\omega^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

$\omega \neq 0$

4-b) $x = 0{,}03 \cos(20\pi t - 2\pi/3)$

$v = -0{,}03 \times 20\pi \sin(20\pi t - 2\pi/3)$

$-0{,}6\pi \sin(20\pi - 2\pi/3)$

$a = -0{,}03 \times (20\pi)^2 \cos(20\pi t - 2\pi/3)$

$-12\pi \cos(20\pi t - 2\pi/3)$

4-c) On donne :

$t = 0{,}25\ seconde$ $\quad$ $x(t)$ vaut courbe

Par calcul :

$x = -1{,}5\ cm$. (+)

$x = 0{,}03 \cos(20\pi t - 2\pi/3) = -0{,}015$

$\cos(20\pi t - 2\pi/3) = \frac{-0{,}015}{0{,}03} = -\frac{1}{2}$

$\cos(20\pi t - 2\pi/3) = -\cos\frac{\pi}{3} = \cos(\pi - \pi/3) = \frac{2\pi}{3}$

$\cos(20\pi t - 2\pi/3) = \cos(2\pi/3)$

$\begin{cases} 20\pi t - 2\pi/3 = 2\pi/3 + 2k\pi \\ 20\pi t - 2\pi/3 = -2\pi/3 + 2k\pi \end{cases}$ $k \geq 0$

$\Rightarrow \begin{cases} 20t = 4/3 + 2k \\ 20t = 2k \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = \frac{4}{15} + \frac{k}{10} \\ t = \frac{k}{10} \end{cases}$

Pour $k=0$ $\begin{cases} t_1 = \frac{1}{15} + \frac{1}{10} = \frac{10+15}{150} = \frac{25}{150} = \frac{1}{6} \text{ sec} \approx 0{,}167 \text{ s} \\ t_2 = \frac{1}{10} = 0{,}1 \text{ s} \end{cases}$ 1er P(+) 2P(-)

$k=0$ $\begin{cases} t_1 = \frac{1}{15} \text{ second} \approx 0{,}067 \text{ s} & 1^{er} P(-) \\ t_2 = 0 \text{ seconde} \end{cases}$

Pour $k=1$ $\begin{cases} t_1 = \frac{1}{15} + \frac{1}{5} = \frac{4}{15} = 0{,}267 \text{ s} & 3^{ème} P(-) \\ t_2 = \frac{1}{5} = 0{,}2 \text{ sec} & 2 P(+) \text{ pas successifs} \end{cases}$

Remarque :

$$t_{np}{}_{\text{même}} = t_{1p} + (np - p_1)T$$

suite arithmétique de raison T

(Cn applicable seulement dans un même sens (+ ou -)

Exemple $t_{2n} = t_{1n} + T = \frac{1}{15} + \frac{1}{10} = \frac{1}{6}$ sec

Déduire la vitesse à cet instant : $t = 0,2s$

$v = -0,6\pi \sin(2\pi - 2\pi/3)$

$= -0,6\pi \sin(10\pi/3) = 0,219 m/s = 1,69 m/s$

- Calculons la valeur de l'accélération :

$a = -\omega^2 x$ avec $\omega = 20\pi Rad/s$ et $x_{at\ t=0,2} = -1r$

$a = +(20\pi)^2 \times 0,01 = 59,16 m/s$

$a = 59,16 m/s^2$

$\vec{a} = a\vec{i} = 59,16\vec{i}$ et $\vec{v} = v\vec{i} = 1,69\vec{i}$

$\vec{a}.\vec{v} = 59,16 \times 1,69 = 99,99 > 0$

donc le mouvement est accéléré.

- Calculons la longueur du parcours à $T = 4$ period

$1T \longrightarrow 4xm$

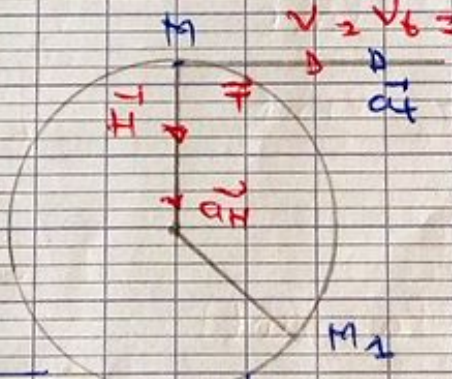
$4T \longrightarrow D$

$D = \frac{4T \times 4xm}{T} = 16xm = \boxed{48 cm}$

III. 4) Mouvement Circulaire uniforme (MCU)

4-1) Définition :

Un MCU est un mouvement dont la trajectoire est un cercle et la norme de la vitesse constante



$S = \overset{\frown}{MM_1} = R\theta$ (rad)

$\vec{v} = v\vec{T} = \frac{dS}{dt}\vec{T} = \dot{S}\vec{T}$

- $\vec{v} = \dot{S}\vec{T} = R\dot{\theta}\vec{T}$

- Vitesse angulaire ($\omega = \dot{\theta}$)

$$\omega = \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$$

- Relation entre v et ω

On a : $v = R\dot{\theta} = R\omega \Rightarrow \boxed{v = R\omega}$

- Accélération (dans la base de Frenet)

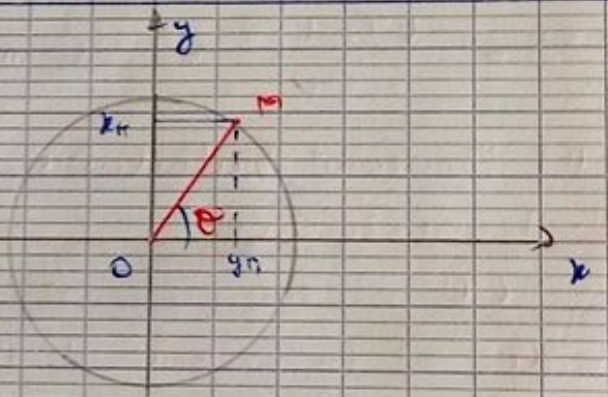
$\vec{a} = a_t\vec{t} + a_n\vec{n} = a_t\vec{T} + a_n\vec{N}$

or $a_t = \frac{dv}{dt} = 0$ v constante

$$\boxed{\vec{a} = a_n\vec{N} = \frac{v^2}{r}\vec{N}}$$

l'accélération est centripète (vers le centre du mvt

- Accélération en coordonnées cartésiennes :



$\overrightarrow{OH} \begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \end{cases}$ or $\omega = \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$

$\theta = \int_0^t \omega\,dt = \omega[t]_0^t = \omega t$

$$\boxed{\theta = \omega t}$$

$\vec{v} \begin{cases} \dot{x} = -R\omega\sin(\omega t) \\ \dot{y} = R\omega\cos(\omega t) \end{cases}$

$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{(-R\omega)^2\sin^2(\omega t) + (R\omega)^2\sin^2(\omega t)}$

$= \sqrt{R^2\omega^2}$

$$\boxed{V = R\omega}$$

$$\vec{a} \begin{cases} \ddot{x} = -R\omega^2 \cos(\omega t) \\ \ddot{y} = -R\omega^2 \sin(\omega t) \end{cases}$$

$$\vec{a} = -\omega^2 \underbrace{(R\cos(\omega t)\vec{i} + R\sin(\omega t)\vec{j})}_{\overrightarrow{OM}}$$

$$\boxed{\vec{a} = -\omega^2 \overrightarrow{OM} \Rightarrow \vec{a} + \omega^2 \overrightarrow{OM} = 0}$$

$\vec{a}$ et $\overrightarrow{OM}$ ont même direction mais de sens contraire

4-2) Equation horaire :

- Pour l'abscisse curviligne :

$$V = \frac{ds}{dt} \Rightarrow s = \int v\,dt = Vt + cte$$

$t = 0$; $s = s_0 \Rightarrow s_0 = V(0) + cte = s_0$

$$\boxed{s(t) = Vt + s_0}$$

- Pour l'abscisse Angulaire :

$$\boxed{\theta(t) = \dot{\theta} t + \theta_0}$$ de la même manière

$\dot{\theta} = \omega$

Application :

Soit un système d'axe (O, x, y) sur lequel un mobile se déplace. On donne $\begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$

1) Montrons que le MCU est CU

- Montrons que la TJ est un cercle

$$(x-1)^2 = \cos^2 t \quad (1)$$

$$y^2 = \sin^2 t \quad (2)$$

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

Cercle de centre $A(1_0)$ et rayon $r = 1\,m$

- Montrons que V = constante

$$\vec{V} \begin{cases} \dot{x} = \text{cst} \\ \dot{y} = \text{cst} \end{cases} \qquad \|\vec{V}\| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 1\ m/s$$

D'après (1) et (2) on a MCU.

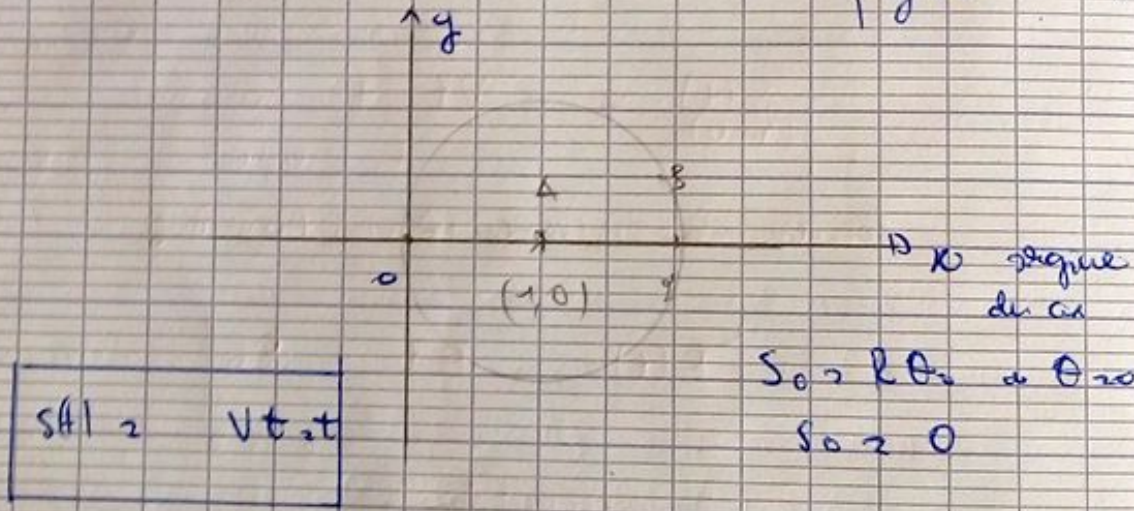
2-) Donnons les coordonnées de $\vec{a}$ et calculons ω

$$\vec{a} \begin{cases} \ddot{x} = -\cos t \\ \ddot{y} = -\sin t \end{cases} \qquad \|\vec{a}\| = 1\ m/s^2$$

On a : $V = R\omega \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{V}{R} = 1\ Rad/s}$

3-) Donnons l'expression de (S)

On a : $S(t) = Vt + S_0$ à $t=0 \begin{cases} x = R \\ y = 0 \end{cases}$ $R(R,0)$



$S_0 = R\theta_0$ à $\theta = 0$

$S_0 = 0$

$\boxed{S(t) = Vt = \omega t}$

III-1) Mouvement Circulaire uniformément varié : MCUV

1-1) Définition :

Un mobile MCUV si en plus de la trajectoire circulaire son accélération angulaire est constante.

$$\boxed{\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt}}$$

1-2) Equation horaire :

Par Analogie au MRUV

$a \longrightarrow \ddot{\theta}$, $V \longrightarrow \dot{\theta} = \omega$, $x \longrightarrow \theta$

MCUV

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = cte \\ \dot{\theta} = \ddot{\theta} t + \dot{\theta}_0 \\ \theta = \frac{1}{2} \ddot{\theta} t^2 + \dot{\theta}_0 t + \theta_0 \end{cases}$$

$$A\dot{\theta}^2 = 2\ddot{\theta} A\theta = \dot{\theta}^2 - \dot{\theta}_0^2 = 2\ddot{\theta}(\theta - \theta_0)$$

Accélération en MCUV

$\vec{a} = a_t \vec{T} + a_n \vec{T}$ or $a_t = \frac{dV}{dt}$ or $V = R\omega$

$a_t = R\dot{\omega} = R\ddot{\theta}$

$a_n = \frac{V^2}{R} = \frac{R^2\omega^2}{R}$ $\quad \frac{R^2\omega^2}{R} = R\dot{\theta}^2$ $\quad \omega^2$

$$\boxed{\vec{a} = R\dot{\omega}\vec{T} + R\omega^2\vec{N} = R\ddot{\theta}\vec{T} + R\dot{\theta}^2\vec{N}}$$

P2 : Bases de la Dynamique

Introduction :

La dynamique est une discipline de la mécanique classique qui étudie les corps en mouvement sous l'influence des forces qui leur sont appliquées.

I/ Centre d'Inertie :

1-) Définition :

Le centre d'inertie d'un solide est une point du solide qui effectue un MRU lorsque le solide evolue en etant pseudo-isolé.

NB :

- pseudo-isolé : si le solide est mumis à des forces qui se compensent à chaque instant.
- systeme isolé : si le solide n'est mumis à aucune force exterieur.

2-) Relation Barycentrique :

Soit un solide decomposé en (...) n element de matiere A_1, A_2, A_3 ---- A_n de masse m_1 m_2 m_3 ---- m_n.

Le Barycentre G de n elements à A_i affecté chacun de sa masse m_i est défini par :

$$m_1 \vec{GA_1} + m_2 \vec{GA_2} + m_3 \vec{GA_3} + \dots + m_n \vec{GA_n} = \vec{0}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{GA_i} = \vec{0}$$

$m_i = m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n$

soit un point fixe generalement O origine.

$$\sum m_i (\vec{GO} + \vec{OA_i}) = \vec{0}$$

$$\sum m_i \vec{OG} = \sum m_i \vec{OA_i}$$

$\overrightarrow{OG} \sum m_i = \sum m_i \overrightarrow{OA}$

or $\sum m_i = m$ (masse du solide)

$$\boxed{m \overrightarrow{OG} = \sum m_i \overrightarrow{OA_i}}$$

avec $\overrightarrow{OG}$: vecteur position du centre d'inertie du solide.

$\overrightarrow{OA_i}$: vecteur position des i^{th} point materiel du solide

II/ Vecteur quantité de mvt des points materiels :

Le vecteur quantité de mouvement d'un point materiel de masse m et vitesse $\vec{v}$ est donné par :

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$$

kg | m/s | kg m/s

$\vec{p}$ et $\vec{v}$ ont meme sens

II-1) Le Vecteur quantité de mvt d'un système de points materiels :

Il est donné par

$$\boxed{\vec{p} = \sum \vec{p_i} = \sum m_i \vec{v_i}}$$

avec $\vec{v_i} = \dfrac{d\overrightarrow{OA_i}}{dt}$

$$\vec{p} = \sum m_i \frac{d\overrightarrow{OA_i}}{dt}$$

II-2) Vecteur quantité de mvt d'un solide

Soit un solide de masse m quantifié par un ensemble de points materiels A_i de masse m_i et vitesse $\vec{v_i}$

La Quantité de mvt du solide s'écrit :

$$\vec{p} = \sum m_i \frac{d\overrightarrow{OA_i}}{dt}$$

$$\vec{p} = \frac{d}{dt}\left(\sum m_i \overrightarrow{OA_i}\right)$$

$$\vec{p} = \frac{d}{dt} m \overrightarrow{OG}$$

$$\boxed{\vec{p} = m \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} = m\vec{v_G}}$$

avec $\vec{v_G}$ = vitesse du centre d'inertie

III) Les lois de Newton :

III-1) Principe d'Inertie 1ère loi de Newton

Dans un référentiel Galiléen, le mouvement du centre d'Inertie d'un système isolé ou pseudo-isolé :
- soit au repos $\vec{V_G} = \vec{0}$ (si le solide est initialement immobile)
- soit animé d'un MRU ($\vec{V_G}$ = constante) si le solide est initialement en mouvement

$$\boxed{\sum \vec{F}_{extérieur} = \vec{0}}$$

III-2) Loi de conservation de la quantité de mouvement

$\vec{P} = m\vec{V_G}$ et si $\vec{V_G}$ = cte $\Rightarrow$ $\vec{P}$ = cte

La Quantité de mvt d'un système pseudo isolé ou isolé déformable ou non se conserve au cours du temps

$$\boxed{\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} = cte}$$

Remarque : Choc entre deux solides : Je y choc entre deux solides ou leurs vecteurs vitesse sont brusquement modifiés suite à un rapprochement entre eux. Je existe 2 choc : choc élastique et choc mou

choc élastique : si les deux solides ne sont pas déformés à l'issue du choc $\begin{cases} \vec{P}_{avant} = \vec{P}_{après} \\ E_{c(av)} = E_{c(ap)} \end{cases}$

choc mou : si les deux solides déformés au le choc $\begin{cases} \vec{P}(avant) = \vec{P}(après) \\ E_c \text{ diminue} \end{cases}$

III-3) Relation Fondamentale de la dynamique (RFD)

Enoncé :

Dans un référentiel Galiléen, la somme vectorielle des forces extérieures appliquées à un solide est égale à tout instant à la dérivée par rapport au temps du vecteur quantité de mvt du solide

$$\boxed{\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt}}$$

II-4) Théorème du centre d'inertie (TCI) : 2ème loi de Newton

Enoncé : Dans un référentiel galiléen, la somme vectorielle des forces extérieures appliquées à un solide est égale (à tout instant) au produit de la masse du solide par accélération de son centre d'inertie

$$\sum \vec{F}_{ext} = m \vec{a}_G$$ avec $\vec{a}_G$ = accélération du centre d'inertie

III-5) Principes des actions réciproques : 3ème loi de Newton

Si un solide S_1 exerce une force $\vec{F}_{1/2}$ sur un autre solide S_2 alors ce dernier en exerçant une force $\vec{F}_{2/1}$ sur S_1 tel que

$$\vec{F}_{1/2} + \vec{F}_{2/1} = \vec{0} \quad \text{ou} \quad \vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1}$$

IV) Théorème de l'accélération angulaire :

1-) Cas de point matériel :

Soit un point matériel de masse m animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe (Δ)

$$\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}_i) = m r_i^2 \ddot{\theta}$$

2-) Cas d'un solide :

on a : $\sum \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}_{ext}) = \sum m r_i^2 \ddot{\theta} = \ddot{\theta} \sum m_i r_i^2$

avec $J_{\Delta} = \sum m_i r_i^2$

MRUV

$$\sum \mathcal{M}(\vec{F}_{ext}) = J_A \ddot{\theta}$$ Théorème de l'accélération angulaire d'un solide

J_A = moment d'inertie du solide / à (Δ)

il s'exprime en Kg/m^2

III-4) Théorème du centre d'inertie (TCI) : 2ème loi de Newton

Enoncé : Dans un référentiel galiléen, la somme vectorielle des forces extérieures appliquées à un solide est égale (à tout instant) au produit de la masse du solide par accélération de son centre d'inertie

$$\boxed{\sum \vec{F}_{ext} = m \vec{a}_G}$$ avec $\vec{a}_G$ = accélération du centre d'inertie

III-5) Principes des actions réciproques : 3ème loi de Newton

Si un solide S_1 exerce une force $\vec{F}_{1/2}$ sur un autre solide S_2 alors ce dernier en exerçant une force $\vec{F}_{2/1}$ sur S_1 tel que

$$\boxed{\vec{F}_{1/2} + \vec{F}_{2/1} = \vec{0} = \vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1}}$$

IV) Théorème de l'accélération angulaire :

1-) Cas de point matériel :

Soit un point matériel de masse m animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe (Δ)

$$\boxed{\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}_i) = m r_i^2 \ddot{\theta}}$$

2-) Cas d'un solide :

On a : $\sum \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}_{ext}) = \sum m r_i^2 \ddot{\theta} = \ddot{\theta} \sum m_i r_i^2$

avec $J_{\Delta} = \sum m_i r_i^2$

MRUV

$$\boxed{\sum \mathcal{M}(\vec{F}_{ext}) = J_{\Delta} \ddot{\theta}}$$ Théorème de l'accélération angulaire d'un solide

J_{Δ} = moment d'inertie du solide / à (Δ)

il s'exprime en Kg/m^2

VI/ Validité des lois de Newton :

Les lois de Newton ne peuvent être appliquées que dans une classe de référentiel appelé référentiel galiléen.

VI-1) Les Référentiels Galiléens

Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel les lois de Newton sont applicables.

2-) Exemples de Référentiel galiléen :

2-1) Référentiel de Copernic ou héliocentrique

Il est constitué du centre du centre soleil comme origine et des 3 directions fixe allant du centre du soleil vers 3 étoiles éloignées

2-2) Référentiel géocentrique ou Coriolis

Il est constitué du centre de terre comme origine et de 3 axes dirigés vers 3 etoiles fixes considéré comme galiléen pour étudier le mouvements des satellite terrestre.

2-3) Référentiel terrestre ou du laboratoire :

Le est lié à la Terre, son origine au point lié à la Terre peut être considéré comme galiléen pour des expériences dont la durée est brève.

Remarque : Tous les référentiels animé d'un MRU par rapport à un référentiel galiléen sont eux-même galiléen

P: 3 | Application des Bases de la Dynamique

- Conseils pour résoudre un exercice de dynamique :
  - Définir le système (solide, voiture ...)
  - Choisir un référentiel en précisant l'origine des espace et du temps. (R + S G)
  - Faire l'inventaire des forces appliquées au système
  - Appliquer les ≠ théorèmes (TEC, TEM, TEC ...)
  - Exploiter les résultats obtenus.

I/ Mouvement Rectiligne

Mouvement Rectiligne d'un projectile dans le champ de pesanteur uniforme $\vec{G}$ ($\vec{v_0} // \vec{g}$)

I/ Mouvement rectiligne:

I.1/ Mouvement d'un projectile dans le champ de pesanteur ($\vec{Vo} // \vec{g}$)

On lance une pierre de masse m verticalement vers le haut à partir d'une hauteur de 1m par rapport au sol avec une vitesse initiale de valeur $V_0 = 10m/s$. On néglige la résistance de l'air.
On donne $g = 10N/kg$.
1/ Etablir la loi horaire du mouvement de la pierre.
2/ Calculer la hauteur maximale de la pierre par rapport au sol.
3/ Calculer le temps au bout duquel la pierre tombe au sol.

Solution :

1/ La horaire :

SE : Pierre ; RTGS

Bilan des forces $\vec{P} + \vec{f}$ ($\vec{f}$: résistance de l'air << $\vec{P}$)

TCI : $\vec{P} = m\vec{a}$

$m\vec{g} = m\vec{a}$ // $\vec{g} = \vec{a}$

$\vec{a} \begin{cases} a_x = g_x = 0 \\ a_y = g_y = 0 \\ a_z = g_z = -g \end{cases}$ $a = g$: cte donc MRUV

$v_z = a_z t + v_{0z}$

$v_z = -gt + v_0$ où $t = 0$: $v_{0z} = V_0 = 10m/s$

$\boxed{v_z = -10t + 10}$

$z(t) = \frac{1}{2} a_z t^2 + v_{0z} t + z_0$ avec $t_0 = 0 + h + 1m$

$$z(t) = -5t^2 + 10t + 1$$

2) Calculer la hauteur maximale :

$z = z_{max}$ sss $v_z = 0$ ⇒

$-10t + 10 = 0 \Rightarrow -10t = -10 \Rightarrow t = 1$ seconde

$z = -5(1) + 10 + 1 = 6\,m$ | $z_{max} = 6m$

3) Calculer le temps au bout duquel la pierre touche sol :

On a : $z(t) = -5t^2 + 10t + 1$ on $z = 0$

$-5t^2 + 10t + 1 = 0$

$\Delta = 100 - 4(-5)(1)$

$100 + 20 = 120$

$t_1 = \frac{-10 - \sqrt{120}}{-10} = \frac{10 + \sqrt{120}}{10} = 2,1$ s

$t_2 = \frac{-10 + \sqrt{120}}{-10} = \frac{10 - \sqrt{120}}{10} < 0$ donc non

d'où | $t = 2,1$ seconde

I.2/ Plan incliné :

I.2/ Plan incliné:

Un solide (C) assimilé à un point matériel, de massé m = 100g est lancé à t = 0 d'un point O origine du repère $(O, \vec{j})$, avec une vitesse $\overrightarrow{Vo}$ de valeur 8m/s, vers un point A d'un plan incliné faisant un angle $\alpha = 30°$ avec l'horizontale. Au cours de sa montée le mobile est soumis à une force de frottement $\vec{f}$ constante et opposée au vecteur vitesse.

1/ Représenter sur un schéma clair, les forces appliquées au solide (C).

2/ a/ Par application de la R.F.D déterminer l'expression de l'accélération a du mouvement.

b/ Déduire la nature du mouvement de (C).

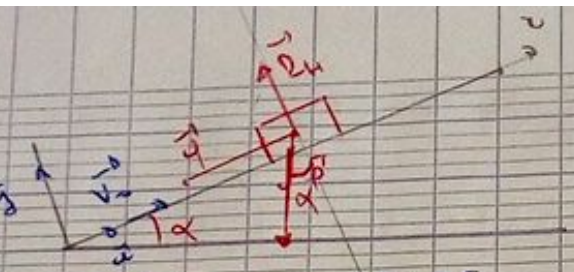
3/ La vitesse de (C) s'annule lorsqu'il atteint le point A situé à la distance d = OA =4m.

a/ Calculer l'accélération a.

b/ Déduire la valeur de la force de frottement $\vec{f}$.

4/ Déterminer la valeur de sa vitesse lorsqu'il repasse par le point O. On donne $g = 10\ m.s^{-2}$

5 /Donner l'équation horaire sachant qu'à t = 0s, $x_0 = 0$.



2a) Le solide RTGS

BP : $\vec{P}$, $\vec{R_N}$, $\vec{f}$

TC : $\vec{P} + \vec{R_N} + \vec{f} = m\vec{a}$

(xx') : $-P\sin\alpha + 0 - f = ma$

$$\boxed{a = -\left(g\sin\alpha + \frac{f}{m}\right)} = cte \Rightarrow MRUV$$

Par TEC :

$E_c(f) - E_{ci} = W(\vec{P}) + W(\vec{R_N}) + W(\vec{f})$

$\frac{1}{2}mV_f^2 - \frac{1}{2}mV_0^2 = -mg\sin\alpha + 0 + -f\times\ell$

où $\ell = x$ est la distance parcourue

$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mV^2\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mV_0^2\right) = \frac{d}{dt}(-mgx\sin\alpha) + \frac{d}{dt}(-fx)$

(V_0 est cte)

$ma_V = -mg\dot{x}\sin\alpha - f\dot{x}$ or $V = \dot{x}$

$ma = -mg\sin\alpha - f \Rightarrow \boxed{a = -\left(g\sin\alpha + \frac{f}{m}\right)}$

donc MRUV

2b) le mouvement est rectiligne uniformément décéléré $\vec{a}.\vec{V_0} < 0$ car a est négatif

3a) calculer a :

$\Delta V^2 = 2ad \Rightarrow a = \frac{\Delta V^2}{2d} = \frac{0 - 8^2}{2\times 4} = \frac{-64}{8} = -8$

$$\boxed{a = -8\,m/s^2}$$

3b) Déduire de la valeur de la force de frottement $\vec{f}$

sur (xx') $-P\sin\alpha - f = ma \Rightarrow \boxed{f = -ma - mg\sin\alpha}$

AN : $f = -0,1(-8) - 1\sin 30 = 0,3\ N$

4) Détermination de la valeur de la vitesse lorsque le ressort est à 0.

$E_{c_0} - E_{c_A} = W(P) + W(f) + W(R_N)$

$\frac{1}{2} m v'^2 = mgl\sin\alpha - fd \Rightarrow m v'^2 = 2mgl\sin\alpha - 2fd$

$$v' = \sqrt{2d\left(g\sin\alpha - \frac{f}{m}\right)}$$

AN : $v' = 4\ m/s$

5) Donner l'équation horaire :

$a = cte$ donc MRUV.

$x = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + x_0$ avec $x_0 = 0$

$$x = \frac{1}{2}\left(g\sin\alpha + \frac{f}{m}\right) t^2 + v_0 t$$

$$x = -4t^2 + 8t$$

Remarque : lorsque le mouvement s'effectue sans frottement alors on a

$a = -g\sin\alpha$

$v = (-g\sin\alpha)\, t + v_0$ avec $v = at + v_0$

I.3/ Systèmes articulés:

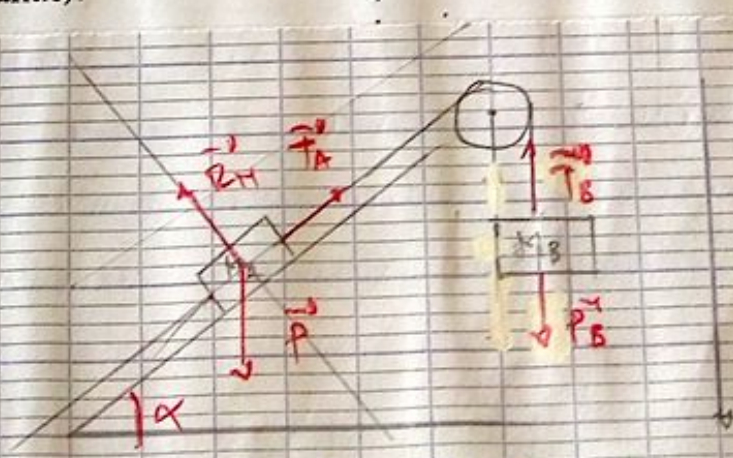
On considère un solide A de masse $m_A = 80$ g pouvant glisser le long du plan incliné OC d'un angle $\alpha = 30°$ parfaitement lisse suivant la ligne de plus grande pente. Un solide B de masse $m_B = 70$ g relié à A par un fil inextensible de masse négligeable passant sur la gorge d'une poulie de masse négligeable.
A la date t = 0, le système est libéré sans vitesse, le solide A partant du point O.

1/ Calculer l'accélération du système.

2/ Calculer le temps mis par A pour atteindre le point S tel que OS = 2 m.

3/ Calculer la vitesse de A au passage en S.

4/ Au moment où le solide passe en S, le fil casse brusquement. Décrire les mouvements ultérieurs de A et B (aucun calcul n'est demandé).



1) Calculer l'accélération du système.

SE : A ; RTSG

BF : $\vec{P}_A$; $\vec{T}_A$; $\vec{R}_A$

TCI : $\vec{P}_A + \vec{T}_A + \vec{R}_A = m\vec{a}$

$-m_A g \sin\alpha + T_A = m a$

$T_A = m a + m_A g \sin\alpha$ (1)

SE : B ; RTSG

BF : $\vec{P}_B$; $\vec{T}_B$

TCI : $\vec{P}_B + \vec{T}_B = m\vec{a}$

(yy') $P_B - T_B = m_B a$

$T_B = m_B g - m_B a$ (2)

2) $T_A = T_B$ ⇒ $m_A a + m_A g \sin\alpha = m_B g - m_B a$

$$a = \frac{g(m_B - m_A \sin\alpha)}{m_A + m_B}$$

AN : $a = 2\ m/s^2$

2) Calculons le temps mis par A pour atteindre B : OS = 2m

a = cte MRUV

$V_A = at + V_{0A}$ or $t \geq 0$ $V_{0A} = 0$ et $x_{0A} = 0$

$V_A = 2t$

$x_A = \frac{1}{2} a t^2 + V_{0A} t + x_{0A}$ $x_A = t^2$

$d = |x_A - x_0| = OS = 2$ $t^2 = 2$ $t = \sqrt{2}\ s$

3) Calculer la vitesse au pt A :

TCC : $V_A = 2t$ ⇒ $V_S = 2t_S$ avec $t_S = \sqrt{2}$

AN : $V_S = 2\sqrt{2}\ m/s$

4) Au moment où B fait sa course :

le solide B continue sa chute verticale (chute libre

et le solide A continue sa montée jusqu'à l'annulation de

sa vitesse puis ensuite descendre.

L4/ Accéléromètre

On constitue un accéléromètre en fixant au plafond d'un wagon un fil de masse négligeable qui soutient une petite masselotte de masse m.

1/ La rame d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré.

a/ Dans quel sens le fil de l'accéléromètre dévie-t-il.?

b) Le fil prend alors une inclinaison $\alpha_1 = 13°$ par rapport à la verticale. Calculer l'accélération a_1 du mouvement de démarrage.

2/ Lorsque la rame est lancé d'un mouvement uniforme à la vitesse de 72 $km.h^{-1}$, comment se déplacerait le fil par rapport à la verticale ?

3/ Maintenant la rame freine jusqu'à l'arrêt avec un mouvement uniformément retardé en 10s.

a/ Dans quel sens le fil de l'accéléromètre dévie-t-il ?

b/ Calculer l'angle α_2 qu'il forme avec la verticale.

1a) MRUA

si le mouvement est accéléré, le fil dévie vers l'arrière

il prend le sens contraire à la vitesse du wagon.

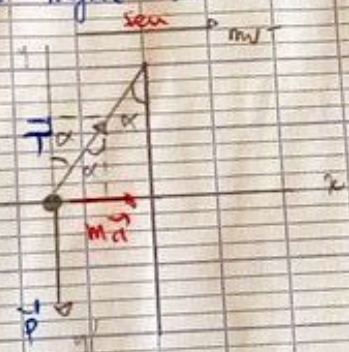
Autrement :

SE : masselotte (m)

RTSG BP : $\vec{P}$ et $\vec{T}$

TCI : $\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$ or $a \neq 0$ et $\vec{P}$ et $\vec{T}$ n'ont pas la même direction car $\vec{P} + \vec{T} = ma \neq 0$ dû à fil s'écarte de la verticale.

$\vec{a}$ était dans le sens du mouvement



b) Calculons l'accélération a_1 du mouvement :

TCI : $\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$

(xx') $T\sin\alpha = ma$ (on cherche les coordonnées de $\vec{a}$)

(yy') $-mg + T\cos\alpha = 0$

$T\sin\alpha = ma_1$ ①

$T\cos\alpha = mg$ ②

$\frac{①}{②}$; $\tan\alpha = \frac{a_1}{g}$ ⇒

$a_1 = g\tan\alpha$

$a_1 = 2{,}3\ m/s^2$

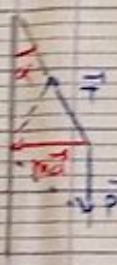
2) $\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a} = 0$

car $a = \frac{dv}{dt} = 0$ car $v = cte$

$P + T = 0$ ont même direction ($\alpha = 0°$) donc $\vec{P}$ et $\vec{T}$ sont opposés et sur la verticale.

3) Si le mouvement est circulaire le fil devie vers l'avant pour se placer à la verticale.

3.1) Calculer α_2



$\tan\alpha_2 = \frac{a_2}{g}$

$\alpha_2 = \tan^{-1}\left(\frac{a_2}{g}\right)$

$a_2 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-2}{10} = -2$

$\alpha_2 = \left|\tan^{-1}\left(\frac{-2}{10}\right)\right| = 11,3°$

$\alpha_2 = 11,3°$

I.5/Mouvement d'une bille dans un fluide

On étudie le mouvement d'une bille B en plomb de rayon r, de masse m, tombant sans vitesse initiale d'un réservoir de grandes dimensions rempli d'éthanol liquide de masse volumique ρ_e. Sur la bille mouvement s'exercent:

- Son poids $\vec{P}$.
- La résistance $\vec{f}$ du fluide, qui est une force colinéaire et de sens opposé au vecteur vitesse instantanée de la bille, d'intensité $f = 6\pi\eta rv$, expression où η est la viscosité de l'éthanol supposée constante, v la valeur de la vitesse instantanée de la bille et r son rayon.
- La poussée d'Archimède $\vec{F}$ qui est une force verticale orientée vers le haut, d'intensité $F = \rho_e Vg$, relation où ρ_e est la masse volumique de l'éthanol, V le volume de la bille et g l'intensité de la pesanteur.

On donne: $g = 9,8\ m.s^{-2}$; $\rho_e = 0,789\ g/cm^3$; $\rho_m = 11,35\ g/cm^3$; rayon de la bille $r = 0,5$ mm ; Volume de la bille $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

1/ Représenter sur un schéma les forces appliquées à la bille a un instant ou sa vitesse est $\vec{v}$.

2/ Montrer, par application de la deuxième loi de Newton, que l'équation différentielle du mouvement de la bille s'écrit: $\frac{d\vec{v}}{dt} + \alpha v = \frac{1}{\tau}$; où α et τ sont des constantes.

3/ Donner l'expression de α en fonction de ρ_m, r et η (viscosité de l'éthanol) puis exprimer τ en fonction de g, ρ_e et ρ_m. Vérifier que $\tau = 0,11\ s^2.m^{-1}$.

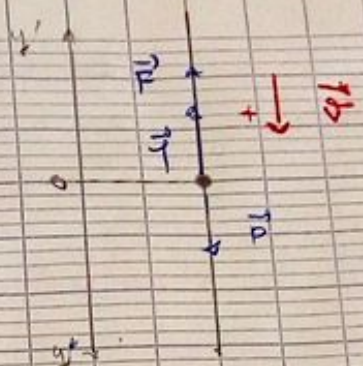
4/ Montrer l'existence d'une vitesse limite. Préciser son expression en fonction de α et τ.

5/ On trouve expérimentalement que $V_{lim} = 4,77$ m/s. Quelle valeur de α peut-on en déduire ?

6/ Déterminer la valeur de la viscosité η de l'éthanol.

Solution:

2) Montrons que $\frac{dv}{dt} + \alpha v = \frac{1}{\tau}$



SE: la Bille
BF: $\vec{P}$ + $\vec{f}$, $\vec{F}$
TCI: $\vec{P} + \vec{f} + \vec{F} = m\vec{a}$
(yy'): $m_b g - f - F = ma$

$$m_b g - 6\pi\eta r v - \rho_e V g = m\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{6\pi\eta r v}{m_b} = g\left(1 - \frac{\rho_e V}{m_b}\right) \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{6\pi\eta r}{m_b}$$

et $\tau = \frac{m_b}{g(m_b - \rho_e V)}$

3) Donnons l'expression de α en fonction de ρ_{pb}, η et r

$\alpha = \frac{6\pi\eta r}{m_{pb}}$ or $m_{pb} = \rho_{pb} \times V$ avec $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$\alpha = \frac{6\pi\eta r}{\rho_{pb} \times V}$ ainsi $\alpha = \frac{6\pi\eta r}{\rho_{pb} \times \frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{6\pi\eta r \times 3}{\rho_{pb} 4\pi r^3}$

enfin $\boxed{\alpha = \frac{9\eta}{\rho_{pb} 2 r^2}}$

Exprimons τ en fonction de g, ρ_e et ρ_{pb}

Or: $\frac{1}{\tau} = g\left(1 - \frac{\rho_e V}{m_{pb}}\right) = g\left(1 - \frac{\rho_e V}{\rho_{pb} \times V}\right)$

$\frac{1}{\tau} = g\left(1 - \frac{\rho_e}{\rho_{pb}}\right)$ $\Rightarrow$ $\boxed{\tau = \frac{\rho_{pb}}{g(\rho_{pb} - \rho_e)}}$

AN: $\tau = \frac{11,35}{9,8(11,35 - 0,789)} = \boxed{0,11\ s^2/m}$

4) Montrons que l'existence d'une vitesse limite

Au bout d'un temps suffisamment long, la vitesse reste constante : l'accélération est donc nulle $= 0$ et on obtient la vitesse limite.



On aura $\frac{d\vartheta}{dt} = 0 \Rightarrow \alpha V_{lim} = \frac{1}{\tau}$

$$\boxed{V_{lim} = 1/\alpha\tau}$$

5) Calculons la valeur de α

On a $V_{lim} = 1/\alpha\tau$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{V_{lim}\,\tau} = \frac{1}{0,11 \times 4,77} = 1,9\ s^{-1}$$

$$\boxed{\alpha = 1,9\ s^{-1}}$$

6) Déterminons la constante viscosité η de l'éthanol

On a $\alpha = \frac{9\eta}{2\rho r^2} \Rightarrow \eta = \frac{\alpha \times 2\rho r^2}{9}$

AN $\eta = \frac{2 \times 1,9 \times 11,35.10^3 \times (0,005/2)^2}{9} \approx 0,00119$

$\eta = 1,19.10^{-3}$ kg/m s (unité : $s^{-1} \times kg \times m^2$)

I.6/ Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique uniforme: Cas où $\vec{E} // \vec{Vo}$

Une particule de charge q positive arrive avec une vitesse $\vec{Vo}$ en un point O d'un condensateur plan comme indiqué sur le schéma. La distance entre les armatures est d et on établit une tension U entre les plaques.

1/ Déterminer l'équation horaire du mouvement et la nature du mouvement.

2/ Déterminer la vitesse V de la particule entre les plaques.



1) Déterminons l'équation horaire :

SE : particule, RTS Ⓖ

BF : $\vec{P} + \vec{F_e}$ ou (P négligeable devant $\vec{F}$)

$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow q\vec{E} = m\vec{a}$

$\Rightarrow \vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}$ $\quad \vec{a} \begin{cases} a_x = \frac{q}{m}E \\ a_y = 0 \end{cases}$

$\boxed{a = \frac{q}{m}E}$ = cte donc MRUV

$\vec{V} \begin{cases} V_x = a_x t + V_{0x} \\ V_y = a_y t + V_{0y} \end{cases}$ $\quad$ or à $t = 0$s, $V_0 \begin{cases} V_{0x} = 0 \\ V_{0y} = 0 \end{cases}$ $\quad$ CI : $\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}$

$\boxed{V(t) = \left(\frac{q}{m}E\right)t + V_0}$

$\overrightarrow{OM} \begin{cases} x = \frac{1}{2}a_x t^2 + V_{0x}t + x_0 \\ y = \frac{1}{2}a_y t^2 + V_{0y}t + y_0 \end{cases}$ $\quad$ OM : $\boxed{x = \frac{qE}{2m}t^2 + V_0}$

2) Déterminons la vitesse $\vec{V}$ entre les plaques :

TEC $\quad \frac{1}{2}mV_0^2 - \frac{1}{2}mV^2 = qU$

$\Rightarrow \boxed{V_0 = \sqrt{V_0^2 + \frac{2qU}{m}}}$

La particule n'est pas dévié car le Mouvement est Rectiligne ($V_0 \perp V_0$)

le mvt est accéléré si $q > 0$ $\quad (V_0 > V)$

le mvt est retardé si $q < 0$

$v^2 - v_0^2 = 2ad$ où $a = \frac{g}{2}$

II/ Mouvement parabolique

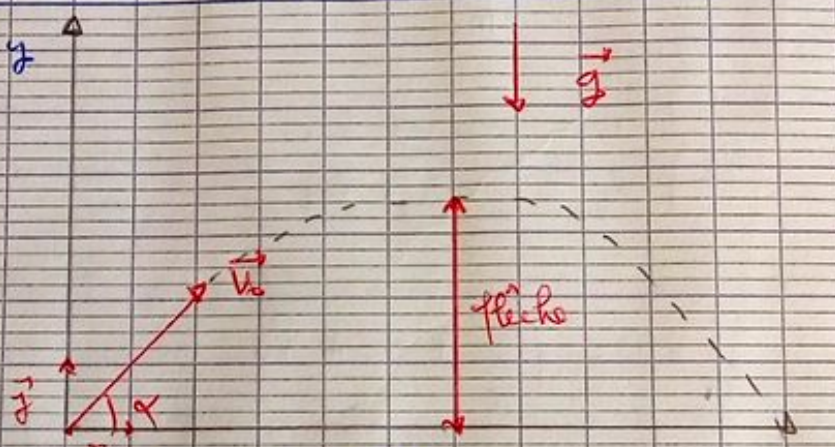
II.1/ Mouvement d'un projectile dans un champ de pesanteur cas où $\overrightarrow{Vo}$ est non parallèle à $\vec{g}$

Un projectile est tiré du sol avec une vitesse $\overrightarrow{Vo}$ faisant un angle α avec l'horizontale (angle de tir).

1/ Déterminer l'accélération du mouvement.
2/ Etablir les équations horaires du mouvement. En déduire l'équation de la trajectoire.
3/ Déterminer l'altitude maximale atteinte par le projectile (la flèche).
4/ Déterminer la portée du tir (l'abscisse du point de chute P).
5/ Déterminer α pour que la portée soit maximale.
6/ Déterminer le temps mis pour atteindre la portée.
7/ Déterminer la vitesse d'arrivée du projectile en P (point de chute).
8 /Déterminer l'équation de la parabole de sureté.

Solution:

1) Déterminons l'accélération du mouvement:



a) ΣE : projetile , RTBG

BF : $\vec{P}$

TCI : $\vec{P} = m\vec{a} \Rightarrow m\vec{g} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{g} = \vec{a}$

$\Rightarrow \vec{a} \begin{cases} a_x = g_x = 0 \\ a_y = g_y = -g \end{cases}$

$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = g = cte = MRUV$

2) Etablissons l'équation horaire:

$\vec{v} \begin{cases} v_x = a_x t + v_{ox} \\ v_y = a_y t + v_{oy} \end{cases}$ or $t \geq 0$ ou a $\vec{V_0} \begin{cases} v_{ox} = v_0 \cos\alpha \\ v_{oy} = v_0 \sin\alpha \end{cases}$

$\vec{OM}_0 \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}$ $\quad \boxed{\vec{V} \begin{cases} V_{x(t)} = V_0 \cos\alpha \\ V_{y(t)} = -gt + V_0 \sin\alpha \end{cases}}$

$\vec{OM} \begin{cases} x = \frac{1}{2} a_x t^2 + V_{0x} t + x_0 \\ y = \frac{1}{2} a_y t^2 + V_{0y} t + y_0 \end{cases}$ $\quad \vec{OM} \begin{cases} x = (V_0 \cos\alpha)\, t \quad (1) \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 + (V_0 \sin\alpha) t \quad (2) \end{cases}$

Déterminer l'équation de la trajectoire :

$\vec{OM} \begin{cases} x = (V_0 \cos\alpha)\, t \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 + (V_0 \sin\alpha) t \end{cases}$ $\quad t = \frac{x}{V_0 \cos\alpha}$

$$y = -\left(\frac{g}{2V_0^2 \cos^2\alpha}\right) x^2 + x \tan\alpha$$

mvt parabolique :

3) Déterminons l'amplitude maximale : (flèche)

Si on atteint le point max (F) alors $V_y = 0$

Donc $-g t_p + V_0 \sin\alpha = 0$

$$\Rightarrow \boxed{t_p = \frac{V_0 \sin\alpha}{g}}$$

Or $y = -\frac{1}{2} g t^2 + (V_0 \sin\alpha) t$

$$y_{max} = -\frac{1}{2} g \left(\frac{V_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 + (V_0 \sin\alpha)\left(\frac{V_0 \sin\alpha}{g}\right)$$

$$y_{max} = -\frac{(V_0 \sin\alpha)^2}{2g} + \frac{(V_0 \sin\alpha)^2}{g}$$

$$y_{max} = \frac{2(V_0 \sin\alpha)^2 - (V_0 \sin\alpha)^2}{2g} = \frac{(V_0 \sin\alpha)^2}{2g}$$

$$\boxed{y_{max} = \frac{(V_0 \sin\alpha)^2}{2g}} \quad (\text{flèche})$$

dérivée au point de x

Autre méthode : $\frac{dy}{dx} = -\frac{g}{v_0^2 \cos^2\alpha} x + \tan\alpha$

$x = \frac{v_0 \cos^2\alpha \tan\alpha}{g}$ puis remplace dans l'équation cartésienne.

$$v_y = \frac{dy}{dx} = -\frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} x + \tan\alpha$$

4-) Détermiun ea portei du tire :

La portée c'est la distance maximale atteinte par le projectile suivant l'horizontale passant par O.

Les coordonnées de la portée c-a-dire les coordonnées du point (P) sont :

$$\vec{P} \begin{cases} x_P = ? \\ y_P = 0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x^2 + x \tan\alpha$$

$$\text{donc on a} \quad \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x_P^2 + x_P \tan\alpha = 0$$

$$x_P \left(\frac{-g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x_P + \tan\alpha \right) = 0$$

$x_P = 0$ ou $\frac{-g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x_P + \tan\alpha = 0$

impossible

$$x_P = \frac{2v_0^2 \cos^2\alpha \tan\alpha}{g} \rightarrow x_P = \frac{2v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$$

or $2 \sin\alpha \cos\alpha = \sin 2\alpha$

$$\boxed{x_P = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}}$$

5) Déterminons α pour que la portée

La portée est maximale si $\sin 2\alpha = 1$ ($x = \sin\alpha$ ↑)

Donc $\sin 2\alpha = 1$ $\quad 2\alpha = \frac{\pi}{2} \rightarrow \boxed{\alpha = \frac{\pi}{4}}$

portée max $\quad \boxed{x_{P\,max} = \frac{v_0^2}{g}}$

6) Déterminer le temps mis pour atteindre x_p.

$x_p = (v_0 \cos\alpha)\, t_p \Rightarrow t_p = \dfrac{x_p}{v_0 \cos\alpha} = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g v_0 \cos\alpha}$

$= \dfrac{2 v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g v_0 \cos\alpha} = \dfrac{2 v_0^2 \sin\alpha}{2g} \Rightarrow \boxed{t_p = \dfrac{2 v_0 \sin\alpha}{g}}$

7) Déterminer la vitesse d'arrivée du projectile.

TEC : $\frac{1}{2} m v_p^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = W(\vec{P}) = 0$ ($\vec{P} \perp \vec{T}$ déplacement)

$\frac{1}{2} m v_p^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 \Rightarrow \boxed{v_p = v_0}$

Autrement : $v_p \begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha \\ v_y = -g t_p + v_0 \sin\alpha \end{cases}$

$v_p \begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha \\ v_y = -g\left(\dfrac{2 v_0 \sin\alpha}{g}\right) + v_0 \sin\alpha \end{cases}$

$v_p \begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha \\ v_y = -2 v_0 \sin\alpha + v_0 \sin\alpha = -v_0 \sin\alpha \end{cases}$

$v_p = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(v_0 \cos\alpha)^2 + (-v_0 \sin\alpha)^2}$

$\boxed{v_p = v_0}$

8) Déterminer l'équation de la parabole de sûreté :

$y = \dfrac{-g}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} x^2 + x \tan\alpha$ or $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha$

$y = -\dfrac{g}{2 v_0^2}\left(1 + \tan^2\alpha\right) x^2 + x \tan\alpha$

où la trajectoire devant contenir le pt P

$$y = \frac{-g\,xp^2}{2V_0^2}\tan^2\alpha + xp\tan\alpha - \left(\frac{g\,xp^2}{2V_0^2} + yp\right) \geq 0$$

Equation du second degré en fonction de $\tan\alpha$ qui donne l'angle de tir qui permet d'atteindre ce site.

$$\Delta = xp^2 - 4\left(\frac{g^2 xp^4}{4V_0^4} + \left(\frac{g\,xp^2\,yp}{2V_0^2}\right)\right) \geq 0$$

$$\Delta = xp^2 - \frac{g^2 xp^4}{V_0^4} + \frac{2g\,xp^2\,yp}{V_0^2} \geq 0$$

$$\Delta = \frac{V_0^4 xp^2 - g^2 xp^4 + 2g V_0^2 xp^2 yp}{V_0^4} \geq 0$$

$$\Delta = xp^2\left(\frac{V_0^4 - g^2 xp^2 + 2g V_0^2 yp}{V_0^4}\right) \geq 0$$

$xp^2 > 0$ donc $\dfrac{V_0^4 - g^2 xp^2 + 2g V_0^2 yp}{V_0^4} \geq 0$

$$-\frac{2g V_0^2 yp}{V_0^4} \leq \frac{V_0^4 - g^2 xp^2}{V_0^4}$$

$$2g V_0^2 yp \leq V_0^4 - g^2 xp^2$$

$$yp \leq \frac{V_0^4 - g^2 xp^2}{2g V_0^2 yp} \qquad yp \leq \frac{V_0^2}{2g} - \frac{g^2 xp^2}{2V_0^2}$$

donc l'équation de sureté :

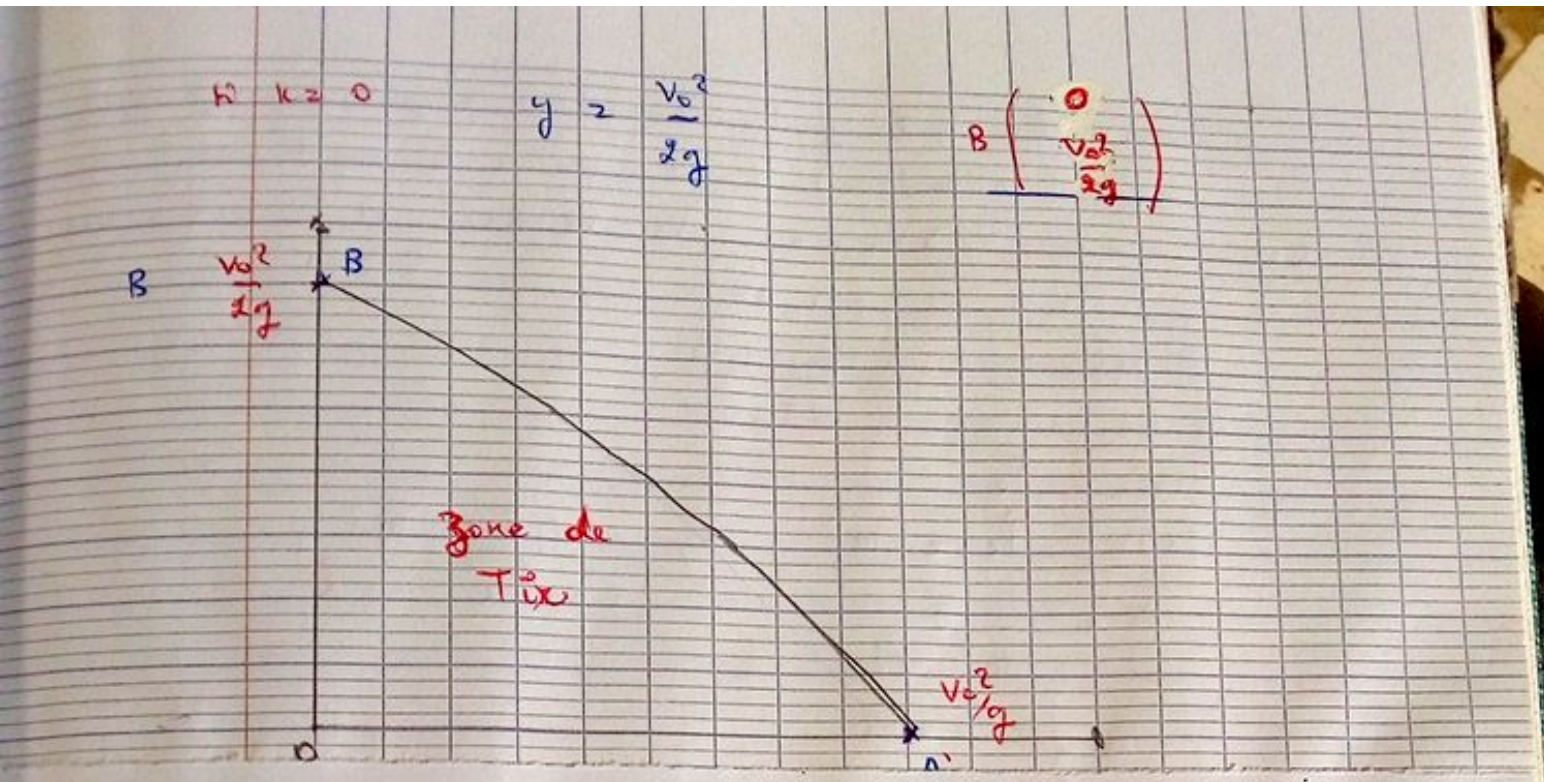
$$\boxed{y = -\frac{g\,x^2}{2V_0^2} + \frac{V_0^2}{2g}}$$

La cible ne peut être atteinte que si elle se trouve dans la zone délimité par la parabole de sureté.

si $y = 0$ on a $\dfrac{gx^2}{2V_0^2} = \dfrac{V_0^2}{2g}$ $\Rightarrow$ $x^2 = \dfrac{V_0^2}{2g} \times \dfrac{2V_0^2}{g}$

$x^2 = \dfrac{V_0^4}{g^2}$ $\Rightarrow$ $x = \dfrac{V_0^2}{g}$

$A\left(\begin{matrix} \frac{V_0^2}{g} \\ 0 \end{matrix}\right)$



II.2/ Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique uniforme:

a/ Cas où $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{Vo}$ sont orthogonaux:

Les deux armatures A et B d'un condensateur plan sont disposées dans le vide. Parallèlement à l'axe (Ox), leur distance est d = 4 cm et leur longueur est L = 10 cm. Un faisceau d'électrons homocinétiques pénètre en O entre ces deux armatures avec une vitesse $\overrightarrow{Vo}$ parallèle à l'axe (Ox) et de valeur $V_o = 25.10^3$ km/s.

Données: $m_e = 9{,}1.10^{-31}$ kg ; $q = -e = -1{,}6.10^{-19}$ C.

1/ Quel doit être le signe de la tension U_{AB} pour que les électrons soient déviés vers l'armature A ?

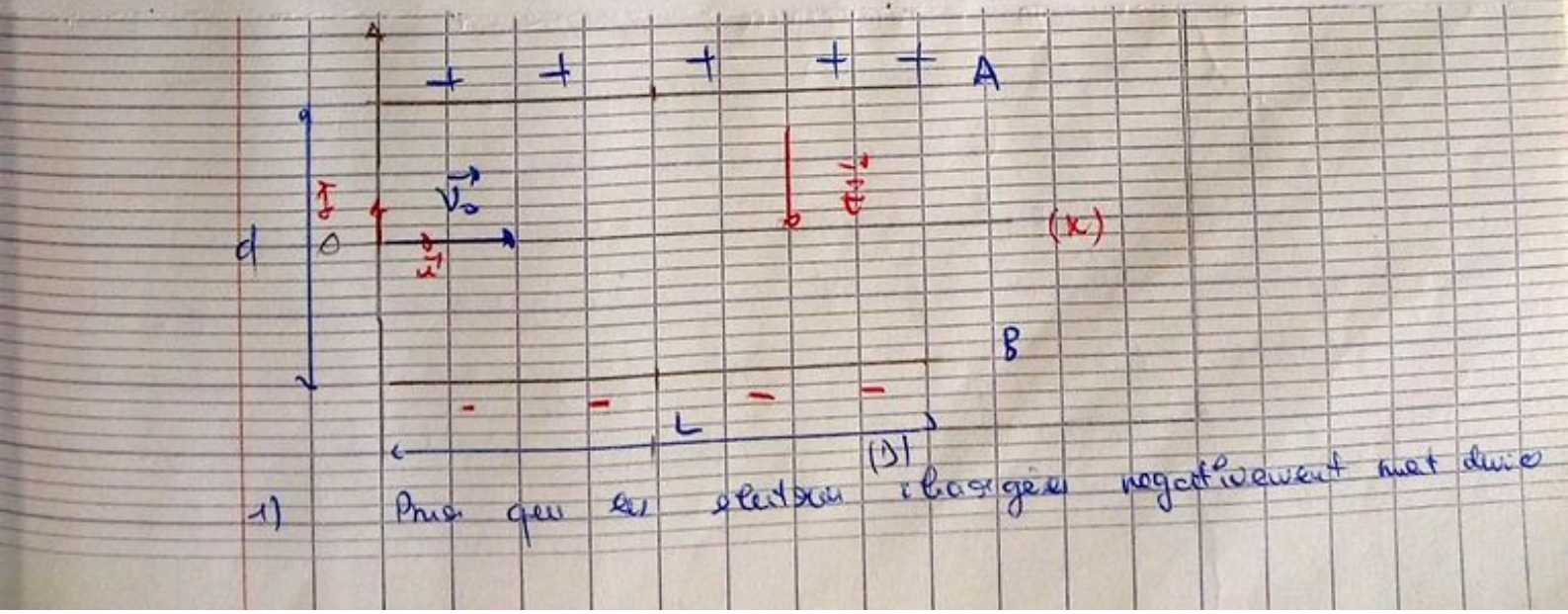
2/ On établit entre les armatures une tension $U_{AB} = 400$ V. Déterminer la trajectoire d'un électron dans le champ électrique crée par le condensateur. On utilisera le repère $(\overrightarrow{Ox}\,;\overrightarrow{Oy})$ de la figure; la date t = 0 s est l'instant à laquelle l'électron arrive au point O. Préciser la condition d'émergence.

3/ Déterminer l'ordonner du point M où les électrons sortent du champ. Calculer également la vitesse des électrons en M et la déviation électrique α. Quelle est la nature de la trajectoire au-delà de M ? Justifier.

4/ Un écran fluorescent est place à la distance D = 25 cm du point I, perpendiculairement à l'axe (Ox). Déterminer l'ordonnée Y du point d'impact des électrons sur cet écran appelé aussi déflexion électrique.

5/ Etablir l'expression de la déflexion Y en fonction de m ; e ; L ; D ; U ; d et Vo.

6/ Cet appareil peut être utilisé comme voltmètre. Justifier cet emploi à partir de l'expression de la déflexion.



1) Puis que les électrons chargés négativement sont dirigé

vers le haut, il faut l'armature A soit chargée positivement (attraction) et l'armature B négativement ou

a) $V_A > V_B \rightarrow V_A - V_B > 0$ or $V_A - V_B = U_{AB}$

donc $U_{AB} > 0$.

2) Déterminons la trajectoire.

SE : électron, RTSG

BF : $\vec{F_e}$

TCI : $\vec{F_e} = m\vec{a} \rightarrow q\vec{E} = m\vec{a}$

$\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}$ avec $q = -e$

$$\vec{a} \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = \dfrac{-e(-E)}{m} = \dfrac{eE}{m} \end{cases}$$

$$\vec{V} \begin{cases} v_x = a_x t + v_{0x} \\ v_y = a_y t + v_{0y} \end{cases}$$

or $t = 0$ on $V_0 \begin{cases} v_{0x} = V_0 \\ v_{0y} = 0 \end{cases}$

$O M_0 \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}$

$$\boxed{\vec{V} \begin{cases} v_x = V_0 \\ v_y = \left(\dfrac{eE}{m}\right) t \end{cases}}$$

$$\overrightarrow{OM} \begin{cases} x = \frac{1}{2} a_x t^2 + v_{0x} t + x_0 \\ y = \frac{1}{2} a_y t^2 + v_{0y} t + y_0 \end{cases}$$

$$\boxed{\overrightarrow{OM} \begin{cases} x = V_0 t \\ y = \left(\dfrac{eE}{2m}\right) t^2 + \end{cases}}$$

$t = \dfrac{x}{V_0}$ $\quad \boxed{y = \dfrac{eE}{2mV_0^2} x^2}$

trajectoire Parabolique.

- Condition d'emergence : condition pour que la particule sorte du champs $(\vec{E})$ il faut :

$x = L$ et $y_S < \dfrac{d}{2}$

$$\frac{eEL^2}{2mV_0^2} < \frac{d}{2}$$

or $U = dE \Rightarrow E = \dfrac{U}{d}$

$$\frac{eUL^2}{2mV_0^2 d} < \frac{d}{2} \Rightarrow \boxed{U < \frac{md^2V_0^2}{eL^2}}$$

$$\text{ou } V_0^2 > \frac{eUL^2}{md^2}$$

$x = L$

$$y_M = \frac{eEL^2}{2mdv_0^2}$$

AN $y_M = \frac{1,6.10^{-19} \times 200 \times 0,1^2}{2 \times 9,1.10^{-31} \times 0,01 \times (25.10^6)^2}$

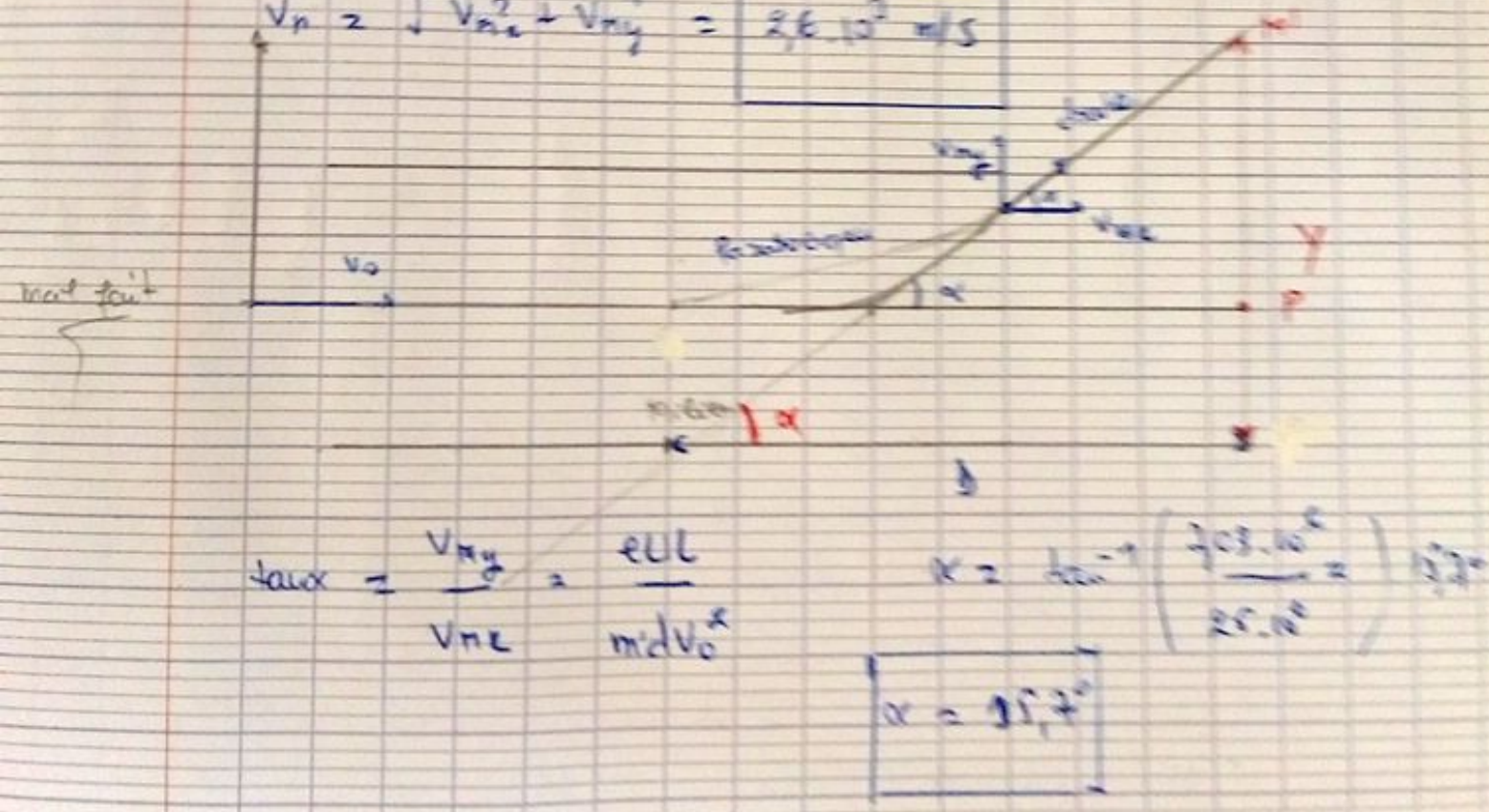
$$y_M = 3,51.10^{-2}\,m = 1,9\,cm$$

Calculons également les coordonnées de M :

$$\vec{V}_M \begin{cases} V_{Mx} = V_0 \\ V_{My} = \left(\frac{eE}{m}\right) t_M \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{aligned} x_M &= V_0 t_M \\ L &= V_0 t_M \\ t_M &= \frac{L}{V_0} \end{aligned}$$

$$\vec{V}_M \begin{cases} V_{Mx} = V_0 = 25.10^6 \\ V_{My} = \dfrac{eUL}{mdV_0^2} = 7,03.10^6 \end{cases}$$

$$V_M = \sqrt{V_{Mx}^2 + V_{My}^2} = 2,6.10^7\ m/s$$



$$\text{tan}\alpha = \frac{V_{My}}{V_{Mx}} = \frac{eUL}{mdV_0^2} \qquad \alpha = \text{tan}^{-1}\left(\frac{7,03.10^6}{25.10^6}\right) = 15,7°$$

$$\alpha = 15,7°$$

Au cours du pt M l'électron a un mvt rectiligne uniforme (MRU) suivant la direction de $\vec{V}_M$ car l'électron n'est soumis à aucune force.

4) Déterminons l'ordonnée du pt d'impact de l'électron sur l'écran

$\tan\alpha = \frac{MP}{IP} = \frac{Y}{D} \Rightarrow \boxed{Y(m) = D\tan\alpha = 7\alpha}$

5) $\tan\alpha = \frac{V_{Sy}}{V_{Sx}} = \frac{Y}{D} = \frac{\frac{eUL}{md}}{V_0^2}$

$\boxed{Y = \frac{eLD}{mdV_0^2} \times U = kU}$ avec $k = \frac{eLD}{mdV_0^2}$

6) Cet appareil peut utilisé comme voltmetre ; justifier

on a : $\frac{1}{k} = \frac{U}{Y} \Rightarrow K = \frac{U}{Y}$ $K = \frac{1}{k}$ (sensibilité)

Pour une simple mesure de Y avec la règle on multiplie la sensibilité K et on obtient U. $\boxed{K = \frac{U}{Y}}$

b/ Cas où $\vec{E}$ est non parallèle à $\vec{Vo}$

A l'instant initial, une particule de masse m et de charge q >0, pénètre avec une vitesse $\vec{Vo}$ dans l'espace compris entre deux armatures d'un condensateur plan faisant un angle α avec l'axe (Ox). On applique une tension U >0 entre ces deux plaques avec un champ électrique $\vec{E}$ (voir figure).

1/ Déterminer l'équation de la trajectoire.

2/ Déterminer l'ordonnée Ys de sortie du champ ainsi que le temps ts correspondant.

3/ Déterminer les coordonnées de la vitesse $\vec{Vs}$ ainsi que sa direction par rapport à l'axe (Ox).

4/ Déterminer l'ordonnée du point H sommet de la trajectoire.



SE : particule (q>0) RTGS

bilan $\vec{F_e}$

TCI : $\vec{F_e} = m\vec{a}$ $q\vec{E} = m\vec{a}$ $\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}$

$\vec{a}\begin{cases} a_x = z_x = 0 \\ a_y = z_y = -E = \frac{-qE}{m} \end{cases}$ $a = \frac{qE}{m}$ = cte (norme)

$\vec{V}\begin{cases} V_x = a_x t + V_{0x} \\ V_y = a_y t + V_{0y} \end{cases}$ où $t=0$ $\vec{V_0}\begin{cases} V_{0x} = V_0\cos\alpha \\ V_{0y} = V_{0y}\sin\alpha \end{cases}$

$$\vec{V}\begin{cases} V_y = -\frac{qE}{m}t + V_0\sin\alpha \\ V_x = V_0\cos\alpha \end{cases}$$

$\overrightarrow{OM}\begin{cases} x = \frac{1}{2}a_x t^2 + V_{0x}t + x_0 \\ y_0 = \frac{1}{2}a_y t^2 + V_{0y}t + y_0 \end{cases}$ $t=0$ $\overrightarrow{OM_0}\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}$

$$\overrightarrow{OM}\begin{cases} x = (V_0\cos\alpha)t \\ y = -\frac{qE}{2m}t^2 + (V_0\sin\alpha)t \end{cases} \quad \text{or} \quad t = \frac{x}{\cos\alpha V_0}$$

$$y = -\left(\frac{qE}{2mV_0^2\cos^2\alpha}\right)x^2 + x\tan\alpha$$ est parabole

2) Déterminons l'ordonnée Y_S de sortie du champs

on a $x_S = L$

$$y_S = -\frac{qE}{2mV_0^2\cos^2\alpha}L^2 + L\tan\alpha$$

- Calculons la durée t_S :

On a : $x = (V_0\cos\alpha)t$ avec $x = L$

$$\Rightarrow t_S = \frac{L}{V_0\cos\alpha}$$

3) Déterminons les coordonnés de la vitesse $\vec{V_S}$

$\vec{V_S}\begin{cases} V_{Sx} = V_0\cos\alpha \\ V_{Sy} = -\frac{qE}{mV_0\cos\alpha} + V_0\sin\alpha \end{cases}$ (coordonnées de $\vec{V_S}$)

Déterminons la direction par rapport à (Ox)

$$\tan\theta = \left|\frac{V_{Sy}}{V_{Sx}}\right| = \left|-\frac{qEL}{mV_0^2\cos^2\alpha} + \tan\alpha\right|$$

$$\theta = \tan^{-1}\left|-\frac{qEL}{mV_S^2\cos^2\alpha} + \tan\alpha\right|$$

La droite passant par $\vec{V_S}$ et faisant l'angle θ avec (Ox)

4) Déterminons l'ordonnée du pt H (sommet de la trajectoire)

Au sommet de la trajectoire $V_y = 0$

$$-\frac{qE}{m} t_H + V_0 \sin\alpha = 0 \qquad \boxed{t_H = \frac{mV_0 \sin\alpha}{qE}}$$

$$y_H = -\frac{qE}{2m}\left(\frac{m^2 V_0^2 \sin^2\alpha}{q^2 E^2}\right) + V_0 \sin\alpha \left(\frac{mV_0 \sin\alpha}{qE}\right)$$

$$y_H = -\frac{m V_0^2 \sin^2\alpha}{2qE} + \frac{2 m V_0^2 \sin^2\alpha}{2qE}$$

$$\boxed{y_H = \frac{m V_0^2 \sin^2\alpha}{2qE}}$$

III/ Mouvement circulaire uniforme:

Pendule conique:

Considérons un pendule constitue d'un fil inextensible de longueur ℓ à l'extrémité duquel on fixe une bille de masse m, l'autre extrémité étant fixé au point O. Le dispositif tourne lentement autour d'un axe (Δ) en mouvement circulaire uniforme de vitesse angulaire ω égale à une constante.

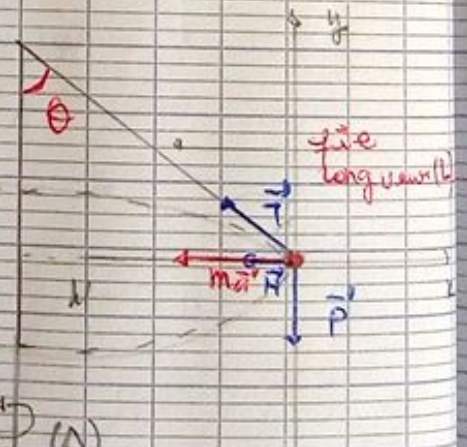
1/ Déterminer la tension T du fil en fonction de m, ℓ et de ω .

2/ Donner l'angle θ dont s'écarte le fil de la verticale en fonction de g , ℓ et ω.

3/ Montrer qu'un tel mouvement n'est possible que si la vitesse angulaire ω(vitesse angulaire minimale) est supérieure à une valeur ω_0 que l'on calculera. Commenter ce résultat.

.....

trajectoire circulaire horizontale de rayon r



1) Déterminons la tension $\vec{T}$ du fil en fonction de m, ℓ et ω

SE : boule (m) RTSG

BF : $\vec{P}, \vec{T}$

TC1 : $\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$

Projection sur (xx') c'-a-d sur la normale ($\vec{n}$)

$0 + T\sin\theta = +ma_n$; $a_n = m\frac{v^2}{R}$

$ma_n = T\sin\theta$

$\omega_0 \to \frac{1}{\ell\omega^2}$

AN $v = R\omega$ et $\sin\theta = \frac{r}{\ell}$

$+\frac{r}{\ell} = m\,r\,\omega^2 \Rightarrow$ $\boxed{T = m\ell\omega^2}$

2) Donnons l'angle θ en fonction g, ℓ et ω

Suivant (yy') : $-mg + T\cos\theta = m a_y^{\prime\prime}$ (or $a_T = a_y = 0$)

$T\cos\theta = mg$

$m\ell\omega^2\cos\theta = mg \Rightarrow \cos\theta = \frac{g}{\ell\omega^2}$

$\boxed{\theta = \cos^{-1}\left(\frac{g}{\ell\omega^2}\right)}$ ou graphiquement $\tan\theta = \frac{m_1}{mg} = \frac{a}{g}$

or $a = a_N = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$.

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{R\omega^2}{g}$ or $\sin\theta = \frac{r}{\ell}$

$\boxed{\cos\theta = \frac{\sin\theta \times g}{R\omega^2} = \frac{\frac{r}{g\ell}}{R\omega^2} = \frac{g}{\ell\omega^2}}$

3) Montrons que le mvt n'est possible que si ω est minimal

On a $\omega^2 = \frac{g}{\ell\cos\theta}$ donc ω est minimal si $\cos\theta \leq 1$

$\cos\theta = \frac{g}{\ell\omega_{min}^2} \leq 1$ $\quad \frac{1}{\ell\omega_0^2}$

$\omega_{min}^2 \geq \frac{g}{\ell}$ or $\omega_0^2 = \frac{g}{\ell}$

$\omega_{min} \geq \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ $\quad \boxed{\omega_{min} \geq \omega_0}$ $\quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$

ω_0 est la vitesse angulaire limite que ω doit dépasser pour que le pendule s'écarte de sa position initiale

IV/ Mouvement curviligne:

1/ Pendule en rotation dans le plan vertical:

Un solide S de masse m supposé ponctuel est suspendu par l'intermédiaire d'un fil inextensible de longueur $\ell = 50$ cm. Le solide étant initialement immobile en M_0, on lui communique une vitesse horizontale $\overrightarrow{V_0}$ de telle sorte qu'il décrive un cercle de centre O dans le plan vertical. La position M du solide dans son mouvement est repérée par l'angle $\alpha = (\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM})$.

1/ Montrer que l'intensité de la tension T du fil exprimée en fonction de la vitesse V du solide (S), de la masse m, g, ℓ et α peut s'écrire $T = mg\cos\alpha + m\frac{V^2}{l}$. On néglige les frottements et $g = 10$ SI

2/ En déduire la vitesse minimale V_H du point culminant H atteint par le solide pour que le fil reste tendu. Déduire alors la valeur minimale V_0 initialement communiquée au solide.

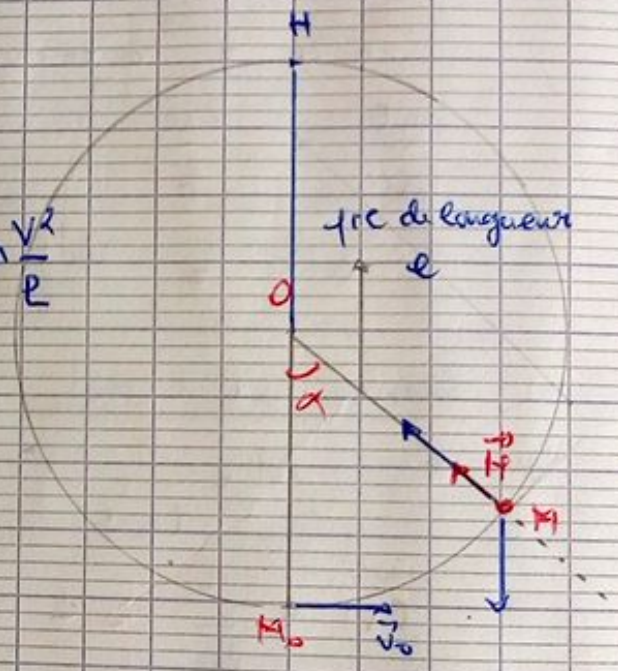
SE : Solide

BF : $\vec{P}$, $\vec{T}$

TCI : $\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$

Suivant : $-mg\cos\alpha + T = ma_N = m\frac{V^2}{\ell}$

$$T = mg\cos\alpha + \frac{mV^2}{\ell}$$



2) Déduire la vitesse minimale V_H

En H $\alpha = \pi$ rad

$T_H = mg\cos(\pi) + \frac{mV^2}{\ell}$

$$T_H = -mg + \frac{mV^2}{\ell}$$

La vitesse minimale V_H

En H le fil est tendu ($T_H > 0$)

$-mg + \frac{mV^2}{\ell} \geq 0 \Rightarrow \frac{V_H^2}{\ell} > g$ *

$$V_{H\,min} \geq \sqrt{g\ell}$$

- Calculer la vitesse minimale V_0.

TEC

$\frac{1}{2}mV_H^2 - \frac{1}{2}mV_0^2 = -2mg\ell$

BH ? : $T = -mg + \frac{mV^2}{\ell} =$

$\Rightarrow$ $V_M^2 - V_0^2 = 4ge$ $\Rightarrow$ $V_0^2 = +4ge + V_M^2$

$V_0 = \sqrt{V_M^2 + 4ge}$ $\quad$ $V_0 = \sqrt{ge + 4ge}$

2/ Mouvement d'une bille sur une gouttière:

Un solide S de masse m supposé ponctuel part en A sommet d'une demi-sphère de rayon r et de centre O sans vitesse initiale. Les forces de frottements sont négligées.

1/ Représenter les forces appliquées au solide S au point M.

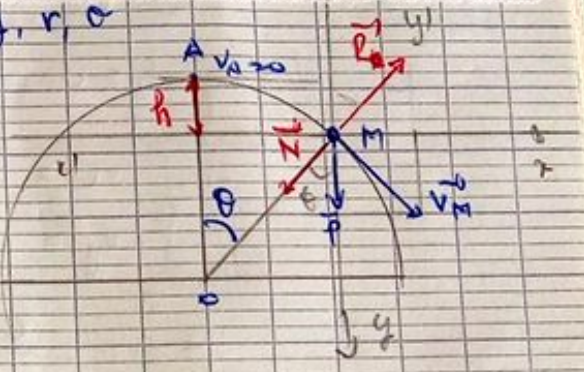
2/ Exprimer la vitesse du solide au point M en fonction de g, r et θ.

3/ Exprimer la réaction R de la demi-sphère sur le solide en M en fonction de m, g et θ.

4/ Calculer la valeur de θ quand la bille quitte la demi-sphère.

5/ Quelle sera la nature de la trajectoire après que le solide ait quitté la demi-sphère.

2) Exprimons la vitesse du (S) en fonction g, r, θ



TEC : $\frac{1}{2}mV_M^2 - \frac{1}{2}mV_A^2 = W(P) + W(R)$

$mV_M^2 = 2mgh + 0$

$V_M^2 = 2gh$ avec $h = r - r\cos\theta$

$$V_M = \sqrt{2gh\,r(1-\cos\theta)}$$

3) Exprimons la réaction R en fonction m, g et θ

$\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}_M$

Suivant $\vec{N}$: $mg\cos\theta - R = m\frac{V_M^2}{r}$

$R = mg\cos\theta - 2mg(1-\cos\theta)$

$= mg\cos\theta - 2mg + 2mg\cos\theta$

$= 3mg\cos\theta - 2mg$

$$R = mg(3\cos\theta - 2)$$

4) Calculons la valeur de θ quand la bille quitte la sphère

$R = 0 \Rightarrow mg(3\cos\theta - 2) = 0$

$\Rightarrow mg = 0$ ou $3\cos\theta - 2 = 0$

$\Rightarrow 3\cos\theta = 2 \Rightarrow \cos\theta = \frac{2}{3} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$

$$\theta = 48{,}2^\circ$$

5) Nature de la trajectoire après la fin de la durée d'action

Le système : [illegible]

TCI : $\vec{P} = m\vec{a}$

$m\vec{g} = m\vec{a} \rightarrow \vec{a} = \vec{g}$

$\vec{a} \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = g \end{cases}$ $a = g = cte$ MRUV

$\vec{V} \begin{cases} V_x = a_x t + V_{0x} \\ V_y = a_y t + V_{0y} \end{cases}$ car $\vec{V_0} = \vec{V_M}$ (fonction de la durée)

à $t = 0$ $\vec{V_0} = \vec{V_M} \begin{cases} V_{Mx} = V_M \cos\theta \\ V_{My} = V_M \sin\theta \end{cases}$ $\overrightarrow{OM_0} \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}$

$$\vec{V} \begin{cases} V_x = V_M \cos\theta \\ V_y = gt + V_M \sin\theta \end{cases}$$

$$\overrightarrow{OM} \begin{cases} x = (V_M \cos\theta)\, t \\ y = \frac{1}{2} g t^2 + (V_M \sin\theta) t \end{cases}$$

$t = \dfrac{x}{V_M \cos\theta}$ $\rightarrow$ $y = \frac{1}{2} g \left(\dfrac{x}{V_M \cos\theta} \right)^2 + (V_M \sin\theta)\left(\dfrac{x}{V_M \cos\theta} \right)$

$$y = \frac{g x^2}{2 V_M^2 \cos^2\theta} + x \tan\theta$$

Axe de parabole.

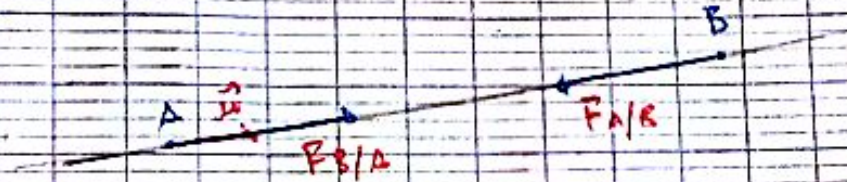
Py :

Gravitation Universelle

I/ Loi de la gravitation universelle :

1) Loi de gravitation pour 2 points materiels

Enoncé : Les forces d'interaction gravitationnelle s'exerçant mutuellement entre deux masses m_1 et m_2 distantes de d ou r sont dirigées suivant la droite joignant les 2 masses attractives proportionnelles au produit des 2 masses mat m_1 et m_2 et inversement proportionnelles au carré de la distance d ou r separant les 2 masses. Les forces ont même intensité donné par la 3ème loi de Newton.



$$F_{A/B} = F_{B/A} = \frac{K m_1 m_2}{d^2}$$

$d = r = AB$

K = Constante de gravitation :

$K = 6,67 \cdot 10^{-11}\ N m^2 / kg^2$

2) Expression vectorielle de la force gravitationnelle entre 2 corps à symetrie spherique de masse

Un corps dont la repartition de masse est un corps dont la masse volumique est la même en tout point du corps - la Terre, Soleil etc ... peuvent être considérés comme étant des corps dont la répartition de masse est à symetrie spherique.

La loi de Newton s'applique à ces types de corps

L'expression vectorielle de la loi de Newton s'exprime par :

$$\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A} = -\frac{K m_1 m_2}{d^2} \vec{u}$$

II/ Champ gravitationnel ou champ de gravitation :

Dans toute région de l'espace en un point A quelconque où on place une masse ponctuelle m on lui exerce une force d'origine gravitationnelle alors dans cette région règne un champ gravitationnel noté $\vec{G}$. champ

1) Expression vectorielle du champs gravitationnel :

Tout corps de masse m_i dans l'espace champ gravitationnel à la distance r_i du corps de masse m_i est soumis à la force d'attraction $\vec{F}_i$ proportionnelle à la masse m_i.

$$\vec{F}_i = m\vec{G}$$

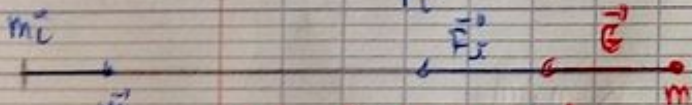
$$-\frac{K m_i m}{r_i^2}\vec{u} = m\vec{G}$$

$$\vec{G} = -\frac{K m_i}{r_i^2}\vec{u}$$

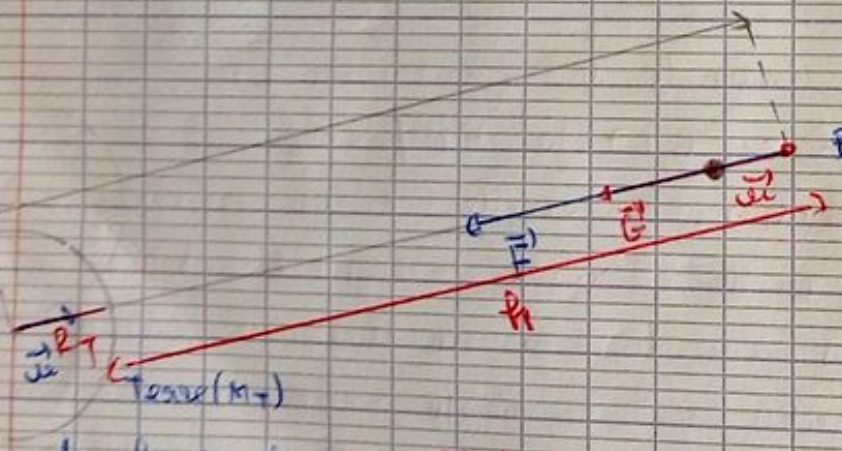
m_i : masse qui crée le champ

$\vec{u}$: vecteur unitaire qui oriente

H/Kg



2-) Expression du champ gravitationnel terrestre :



Le champs de gravitation créé par les astres (Terre) de masse M_T et de rayon R_T en un point B situé à la distance R du centre de l'astre donné par la relation :

$$G(B) = -\frac{K m_B M_T}{m_B r^2} = \frac{\vec{F}}{m_B} = -\frac{K M_T}{r^2}\vec{u}$$

avec $r = OB = h + R_T$

$$\vec{G}(B) = -\frac{K M_T}{(R_T + h)^2}\vec{u}$$

$M_T = 5{,}98 \times 10^{24}$

avec R_T = 6370 km = $6,4 \cdot 10^6$ m (5,98.10^24 kg)

h = altitude du point (B)

r = orbite du pt (B)

m_T = masse de la Terre $5,98 \cdot 10^{24}$ kg

II-3) Champs gravitationnel à la surface de la Terre :

Si le point B est à la surface de la Terre on as $h = 0$

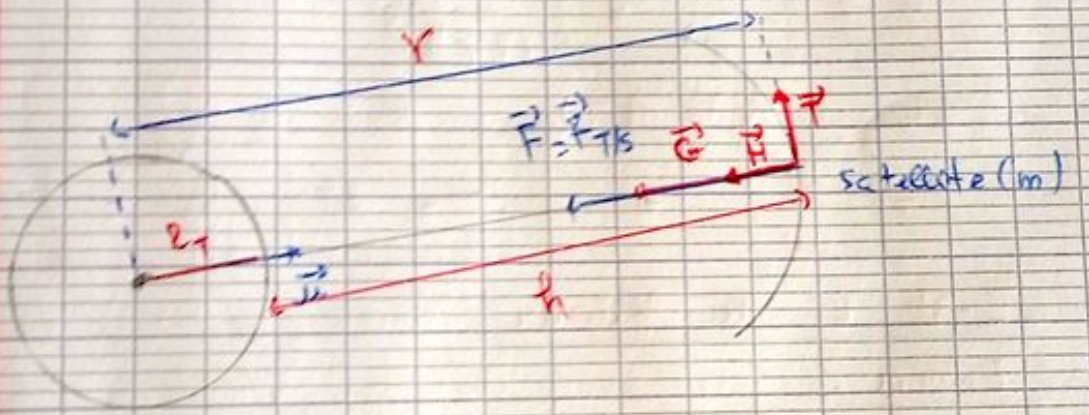
donc : $G = G_0 = \frac{K m_T}{R_T^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \times 6 \cdot 10^{24}}{(6,4 \cdot 10^6)^2} = 9,8$ N/kg

G_0 est le champs de pesanteur terrestre.

Remarque : Si $h = 0$ valeur $\boxed{G_0 R_T^2 = K m_T}$

III/ Mouvement d'un satellite a trajectoire circulaire :

1) Etude dynamique



SE = Satellite (m)

- Référentiel = géocentrique

- BF : $\vec{F} = \vec{P}_{T/S}$

TCI : $\vec{F} = m\vec{a}$

$m\vec{G} = m\vec{a}$ → $\vec{G} = \vec{a} = G\vec{H}$

$\vec{a} = 0\vec{T} + G\vec{H}$

$\vec{a} \begin{cases} a_t = 0 \\ a_n = G = \frac{K m_T}{r^2} \end{cases}$

* Nature du mouvement :

$a_t = 0$ → $\frac{dV}{dt} = 0$ ⇒ $V = cte$

et la trajectoire est circulaire.
donc le mvt est circulaire uniforme.

* La vitesse du mouvement :

$a_n = \frac{GM_T}{r^2}$ et $a_n = \frac{V^2}{r}$

$\frac{V^2}{r} = \frac{GM}{r^2}$ $\Rightarrow$ $V^2 = \frac{GM}{r}$ $\Rightarrow$ $V = \sqrt{\frac{GM}{r}}$ vitesse de satellisation

$$V = \sqrt{\frac{GM}{r+h}} = \sqrt{\frac{G_0 R_T^2}{(R_T+h)}}$$

* Vitesse Angulaire ω

$\omega = \frac{V}{r} = \frac{1}{r} \times V = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{GM}{r}}$

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}} = \sqrt{\frac{G_0 R_T^2}{(R+h)^3}}$$

* La Période (T)

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ $\Rightarrow$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}} = 2\pi\sqrt{\frac{(R+h)^3}{G_0 R^2}}$$

II-3) Lè de Keplex

Enoncé :

La carré de la période (T) d'un satellite par le cube de son rayon (r) est d'une constante quelque soit le satellite.

- En mettant au carré l'expression de la Période, on retrouve la 3ème lè de Keplex.

$T^2 = 4\pi \times \frac{r^3}{GM}$ $\Rightarrow$

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = \frac{4\pi^2}{G_0 R^2} = cte$$

4) Satellites géostationnaires

Un satellites geostationnaire est un satellite qui est fixe

par rapport à un point de la Terre tournant d'ouest en Est donc dans le sens de rotation de la Terre avec la même vitesse angulaire et se déplaçant dans le plan équatorial sur une orbite circulaire.

- La période de révolution (rotation) est celle de la Terre ($T = 23h56,04$ = 86164 seconde ou $T = 24$ heures = 86400 secondes

$$r = \sqrt[3]{\frac{G_0 R^2 T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{9,8 \times (6,4.10^6)^2 \times (86164)^2}{4\pi^2}} = 4,2.10^7 \text{ m}$$

$$r = 4,2.10^7 \text{ m}$$

Calculer h

$$h = r - R_T = 35,86.10^6 \text{ m} \simeq 36.10^6 \text{ m}$$

$$h = 36000 \text{ km}$$

- La vitesse d'un satellite géostationnaire :

$$V = R\sqrt{\frac{G_0}{r}} = 6,4.10^6 \sqrt{\frac{9,8}{4,2.10^7}} = 3,09.10^3 \text{ m/s} = 3 \text{ km/s}$$

$$V = 3 \text{ km/s}$$

II/ Etude énergétique :

1) Energie potentiel de gravitation

La force gravitationnelle est une force conservative donc son travail ne dépend pas du chemin suivi.

$$\Delta E_p = -\sum W(\text{force conservative})$$

$$dE_p = -dW \quad (\text{travail élémentaire})$$

$dE = dw = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\frac{Km\,M}{r^2}\vec{u} \cdot d\vec{r}$

avec $d\vec{r} = dr\,\vec{u}$

$dw = -\frac{Km\,M}{r^2}\vec{u} \cdot dr\,\vec{u} = -\frac{Km\,M}{r^2}dr$

$dw = -\frac{Km\,M}{r^2}dr$

$dEp = -dw = \frac{Km\,M}{r^2}dr$

$$\Delta Ep(r) = Km\,M \int \frac{dr}{r^2} + cte = -\frac{Km\,M}{r} + cte$$

- Si $r \to \infty$, $Ep(\infty) = 0 = Ep(ref) = 0$

$Ep(\infty) = \frac{Km\,M}{\infty} + cte$

$Ep(\infty) = Ep(ref) = 0 = 0 + cte$ donc $cte = 0$

$$\Delta Ep = -\frac{KM\,m}{r} = -\frac{G_0 R^2 m}{r}$$

$ref = \infty$ ou infini

- Si la position de la référence est choisi au sol.

$r(ref) = R$; $Ep(ref) = 0$ sol

$Ep(R) = Ep(ref) = 0 = -\frac{Km\,M}{R} + cte$

$0 = -\frac{KMm}{R} + cte$

$$cte = \frac{KMm}{R}$$

$$Ep = -\frac{KmM}{r} + \frac{KMm}{R}$$

Ep de référence

Ref au sol

$$E_p = -K_M m\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right) = m G_0 R^2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right)$$

Remarque : On peut retrouver l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur

$$E_p = m G_0 R^2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{(R+h)}\right) = m G_0 R^2\left(\frac{R+h-R}{R(R+h)}\right)$$

$$= m G_0 R^2\left(\frac{h}{R^2 + Rh}\right) = m G_0 h\left(\frac{R^2}{R\left(1+\frac{h}{R}\right)}\right)$$

$$= m G_0 h\left(\frac{1}{\left(1+\frac{h}{R}\right)}\right) \approx 1 \quad \text{car } h \ll R$$

$$\boxed{E_p = m G_0 h}$$ E_p de pesanteur

* Pour une altitude h très faible devant R le satellite se trouve presque au sol

IV/2-) Energie cinétique d'un satellite :

$$E_c = \frac{1}{2} m V^2 \quad \text{or} \quad V^2 = \frac{K_M}{r}$$

$$\boxed{E_c = \frac{K_M m}{2r} = \frac{G_0 R^2 m}{2r}}$$

3-) Energie mécanique d'un satellite :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{K_M m}{2r} - \frac{K_M m}{r} = \frac{K_M m - 2K_M m}{2r}$$

$$\boxed{E_m = -\frac{K_M m}{2r} = -\frac{G_0 R^2 m}{2r}} \quad \text{Ref au } \infty$$

E_c E_c

Remarque :

$$\boxed{E_m = -E_c} \quad \text{et} \quad \boxed{E_m = \frac{1}{2} E_p}$$

$$E_p = -2E_c$$

V/ Vitesse de libération :

La vitesse de libération d'un satellite est la vitesse minimale qu'il faut communiquer au satellite à partir du sol pour qu'il échappe à l'attraction terrestre. (V_ℓ)

La conservation de l'énergie mécanique implique :

$$E_m(sol) = E_m(\infty)$$

$$\frac{1}{2}mV_\ell^2 - \frac{KMm}{R} = 0$$

$r = R$ au sol

$$\frac{1}{2}V_\ell^2 = \frac{KM}{R} \Rightarrow V_\ell^2 = \frac{2KM}{R}$$

$$V_\ell = \sqrt{\frac{2KM}{R}}$$

$$\boxed{V_\ell = \sqrt{\frac{2KM}{R}}}$$

$$V_\ell = \sqrt{2} \times \sqrt{\frac{KM}{R}} = \sqrt{2} \times V_{satellisation}$$

(vitesse à une distance $r = R$)

au sol : $K = GoR^2$

$$\boxed{V_\ell = \sqrt{2} \times V_{satellisation\ (au\ sol)} = \sqrt{2GoR}}$$

V_ℓ libération

NB : si on avait lancé à partir d'une hauteur (h)

$r = (R+h)$

$$\frac{1}{2}mV_\ell^2 - \frac{KMm}{r} = 0$$

$$\frac{1}{2}mV_\ell^2 = \frac{KMm}{r} \Rightarrow V_\ell^2 = \frac{2KM}{r}$$

$$\boxed{V_\ell = \frac{\sqrt{2KM}}{r} = \frac{\sqrt{2KM}}{R+h} = \frac{\sqrt{2GoR^2}}{R+h} = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{GoR^2}}{\sqrt{(R+h)}}}$$

$$\boxed{V_\ell = \sqrt{2} \times V_{satellisation\ (R)}}$$

VI/ Période apparente (t_a)

C'est le temps qui sépare deux passages successifs d'un satellite à la verticale d'un point donné de l'équateur

1) Satellite tournant autour de la Terre dans le même sens:

$$\alpha_{S_{satellite}} = \alpha_{T_{Terre}} + 2\pi$$

avec $\begin{cases} \alpha_S = \text{angle balayé satellite} \\ \alpha_T = \text{angle balayé Terre} \end{cases}$

or $\omega = \frac{\alpha}{t} \Rightarrow \alpha = \omega t$

$\omega_S t_a = \omega_T t_a + 2\pi$ sachant $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$\omega_S t_a - \omega_T t_a = 2\pi$

$t_a\left(\frac{2\pi}{T_S} - \frac{2\pi}{T_T}\right) = 2\pi \Rightarrow t_a\left(\frac{1}{T_S} - \frac{1}{T_T}\right) = 1$

$\left(\frac{T_T - T_S}{T_T T_S}\right) t_a = 1$

$$t_a = \frac{T_T T_S}{T_T - T_S}$$

2-) Satellite tournant dans le sens contraire de la Terre

$$\alpha_S + \alpha_T = 2\pi$$

$\alpha_S = -\alpha_T + 2\pi$

$\omega_S t_a + \omega_T t_a = 2\pi$

$t_a\left(\frac{2\pi}{T_S} + \frac{2\pi}{T_T}\right) = 2\pi \Rightarrow t_a\left(\frac{T_T + T_S}{T_T T_S}\right) = 1$

$$t_a = \frac{T_T T_S}{T_T + T_S}$$

NB:
- l'angle balayé par la Terre pendant une révolution du satellite

$$\theta = \omega_T T_S = \frac{2\pi}{T_T} \times T_S$$

- l'angle balayé par la Terre pendant une révolution de la Terre. $\theta = \omega_T T_T = \frac{2\pi}{T_T} \times T_T$

- l'angle balayé par le satellite pendant une révolution du satellite $\theta = \omega_S T_S = \frac{2\pi}{T_S} \times T_S$

Applications:

Exercice d'application:

La constante de gravitation universelle est $G = 6{,}67.10^{-11}$ S.I.

On considère une planète P de masse M. Le mouvement de l'un de ses satellites S, assimilé à un point matériel de masse m, est étudié dans un référentiel considéré comme galiléen, muni d'un repère dont l'origine coïncide avec le centre O de la planète P et les trois axes dirigés vers trois étoiles fixes.

On admet que la planète a une distribution de masse à symétrie sphérique et que l'orbite de son satellite est un cercle de centre O et de rayon r.

1/ Donner les caractéristiques de la force de gravitation exercée par la planète P sur le satellite S. Faire un schéma.

2/ Donner l'expression du vecteur champ de gravitation créé par la planète P au point où se trouve le satellite S. Représenter ce vecteur champ sur le schéma précédent.

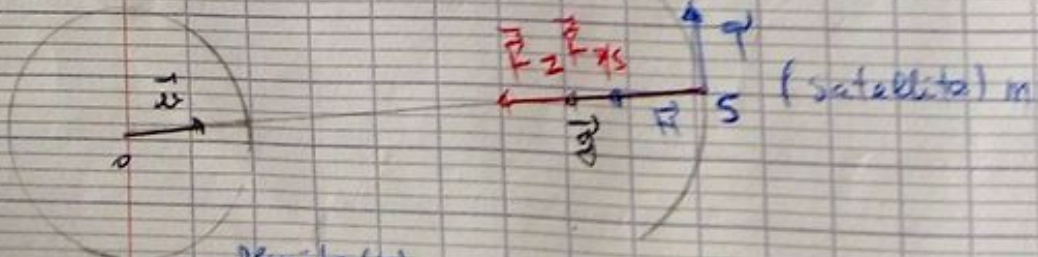
3/ Déterminer la nature du mouvement du satellite S dans le référentiel d'étude précisé.

4/ Exprimer le module de la vitesse linéaire v et la période de révolution T du satellite S en fonction de la constante de gravitation G, du rayon r de la trajectoire du satellite et de la masse M de la planète P.

Montrer que le rapport $\frac{T^2}{r^3}$ est une constante.

5/ Sachant que l'orbite du satellite S a un rayon r = 185 500 km et que sa période de révolution vaut T = 22,6heures, déterminer la masse M de la planète P.

6/ Un autre satellite S' de la planète P a une période de révolution T' = 108,4 heures. Déterminer le rayon r' de son orbite.



Planète (M)

1) PAI S

Direction: suivant (OS)

- Loi de Newton en Physique
- Norme $F = \frac{GMm}{r^2}$

2) Donner l'expression du vecteur champ :

$$\vec{F} = m\vec{g}$$

$$-\frac{GMm}{r^2}\vec{u} = m\vec{g} \Rightarrow \boxed{\vec{g} = -\frac{GMm}{r^2}}$$

3) Déterminer la nature du mouvement du satellite(S)

SE :

- Référentiel géocentrique
- BF : $\vec{F} = \vec{F}_{S/G}$

TCI : $\vec{F} = m\vec{a}$

$$m\vec{g} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g} = g_0\vec{u}$$

$$\vec{a} \begin{cases} a_N = g = \frac{GM}{r^2} \\ a_T = 0 \end{cases} \quad \text{Or } v = \text{cte} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 0 \text{ m/s}$$

donc : MU ;

Or la trajectoire du satellite est un cercle donc le mouvement est circulaire uniforme (MCU)

4) Exprimer V, puis T, la période en fonction de (G, r, M)

On a : $a_N = \frac{GM}{r^2} = \frac{v^2}{r} = \frac{GM}{r^2}$

$$\boxed{V = \sqrt{\frac{GM}{r}}}$$

On a : $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{GM}{r}}} = 2\pi r\sqrt{\frac{r}{GM}}$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}}$$

- Montrer que $\frac{T^2}{r^3} = cte$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} \times r^3 \Rightarrow \boxed{\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = cte}$$

c) Détermination de la masse M de Pluk

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} = \frac{4\pi^2 \times (18750.000)^3}{6{,}67.10^{-11} \times (81.360)^2}$$

$$\boxed{M = 5{,}71.10^{26}\ kg}$$

d) Déterminons le rayon r'

$$r' = \frac{MGT'^2}{4\pi^2}$$

$$r' = \frac{5{,}71.10^{26} \times 6{,}67.10^{-11} \times (390240)^2}{4\pi^2}$$

$$\boxed{r' = 5{,}3.10^8\ m}$$

P11

Oscillations mécaniques libres

I/ Généralités :

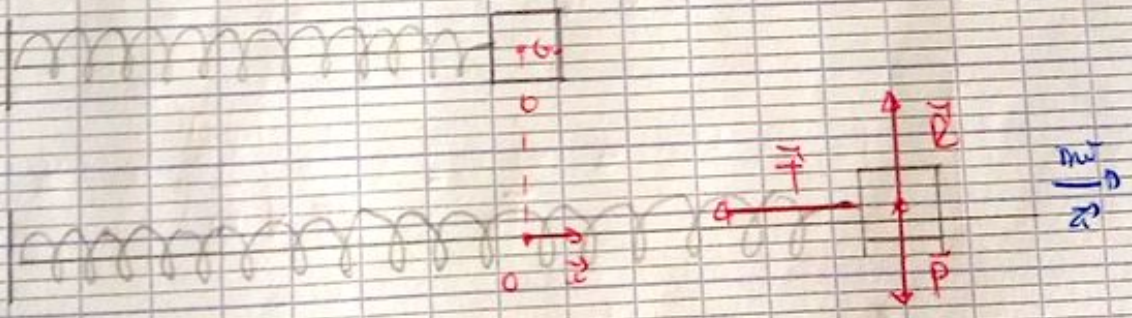
- Un phénomène ou un mouvement est dite périodique s'il se répète identique à lui-même à des intervalles de temps successif et égaux.
- Un mouvement oscillatoire est un mouvement périodique qui va et de part et autre d'une position d'équilibre
- Une oscillation mécanique est un système mécanique qui est animé d'un mouvement mécanique.
- Les oscillateurs sont dites libres si le système écarté légèrement de sa position d'équilibre est abandonné à lui même et susceptible d'osciller.
- Elles sont dites harmonique ou linéaire si leurs positions sont une fonction sinusoïdale du temps

II/ Les oscillations mécaniques libres non amorties

Les oscillateurs sont libres, si l'oscillateur oscille selon ses propres caractéristiques. A l'absence du frottement ($f=0$) elles sont dites non amorties

1-) Pendule élastique horizontale :

1-1) Etude dynamique :



Ecartons le solide (S) de sa position d'équilibre puis abandonnons le à lui même sans vitesse. Il oscille entre A et A' tel que

$OA = OA'$

a) Equation différentielle du mouvement

Système : Solide RST

PF : $\vec{P}, \vec{T}, \vec{R}$

TCI : $\vec{P} + \vec{T} + \vec{R} = m\vec{a}$

(x'x) : $-T = max$

$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2} = m\ddot{x}$

$m\ddot{x} + kx = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

équation différentielle d'un mouvement harmonique

En pose $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

équation différentielle d'un mouvement Rectiligne sinusoïdale

b) Solution de l'équation différentielle :

$x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

pulsation propre

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Période propre.

$$f_0 = N_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

fréquence propre

$(\omega_0 t + \varphi)$: phase à l'instant t en Radian

φ : phase à l'origine en Radian (Rad)

X_m : amplitude maximale en m. Ces constantes sont déterminées à partir des conditions initiales

NB :

A Revoir

- si on écarte le ressort sans vitesse ($V=0$), X_m = allongement du ressort
- si on écarte le ressort avec une vitesse initiale, $X_m \neq k$ (allongement)

$X_m \neq k \quad (X_m > k)$

$k = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$

$V = -X_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$

$\frac{V}{\omega} = -X_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$

① $k^2 = X_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$

② $\frac{V^2}{\omega^2} = X_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$

$k^2 + \frac{V^2}{\omega^2} = X_m^2$ ② $\Rightarrow$ $\boxed{X_m = \sqrt{k^2 + \frac{V^2}{\omega_0^2}}}$

II/ 1/ Etude Energétique : le ressort est allongé

$E_m = E_c + E_{pe} + E_{pp}$ (car $z = 0$ (altitude))

$\boxed{E_m = \frac{1}{2} m V^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \text{cte} \quad \text{car } f = 0}$

le système se conserve

$\frac{d}{dt} E_m = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m V^2 + \frac{1}{2} k x^2\right) = 0$

$= m \dot{V} V + k \dot{x} x = 0$

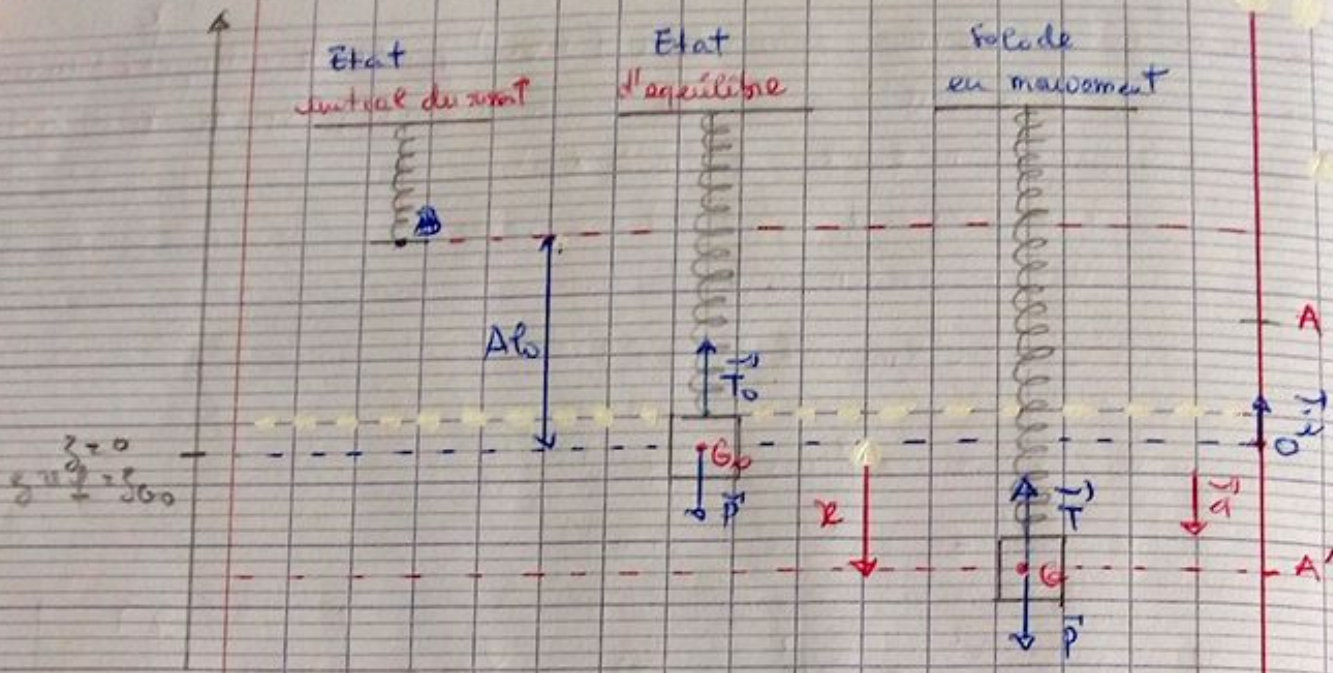
$= m \ddot{x} \dot{x} + k \dot{x} x = 0 \Rightarrow m \dot{x}\left(\ddot{x} + \frac{k x}{m}\right) = 0$

② $m \dot{x} \neq 0$ $\boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0}$ équation différentielle du mouvement rectiligne

II/ 2/ Pendule élastique Vertical

II 2-1) Etude dynamique :

Traitons le cas de la position d'équilibre vers le bas suivant $\vec{k}$ puis abandonné à sans vitesse. G va osciller entre les points A' et A'.



* Equation différentielle du mouvement

- Equilibre du solide :

Système : Solide ; BP : $\vec{T}_0, \vec{P}$; TCI : $\vec{T}_0 + \vec{P} = m\vec{a} = 0$ car $\vec{V} = cte$

(xx') : $-mg + T_0 = 0 \Rightarrow \boxed{-mg + k\Delta l_0 = 0}$

- Solide en mouvement

BP : $\vec{P}, \vec{T}$

TCI : $\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$

(xx') : $mg - T = m a_x \Leftrightarrow mg - k(\Delta l_0 + x) = +m\ddot{x} \Rightarrow -kx + m\ddot{x} = 0$

$mg - k\Delta l_0 - kx = +m\ddot{x}$; $mg - k\Delta l_0 = 0$

$\Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0}$ équation différentielle du mouvement

II - 2 - 2/ Etude Energétique :

$E_m = E_c + E_{pp} + E_{pe}$

* $E_{pp} = mg(z_G - z_{ref})$

$z_{ref} = z_{G_0} = 0$

$z_G = -x$

$\boxed{E_{pp} = -mgx}$

* Le référentiel du présente est l'origine des altitudes c-a-d au pt O.

$E_{p,e} = \frac{1}{2} k (x_0^2 - x_{inf}^2)$ * référence et origine des altitude du ressort en B

$E_{pes} = \frac{1}{2} k (\Delta l_0 + x)^2$

$E_m = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - mgx + \frac{1}{2} k (\Delta l_0 + x)^2 = cte$

$\frac{dE_m}{dt} = m \ddot{x} \dot{x} - mg\dot{x} + k\dot{x}(\Delta l_0 + x) = 0$

$= m \ddot{x} \dot{x} - mg\dot{x} + k\dot{x}\Delta l_0 + kx\dot{x} = 0$

$= \dot{x}(m\ddot{x} - mg + k\Delta l_0 + kx) = 0$

$= m\ddot{x} + kx = 0 \Rightarrow$ $\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$

NB : Montrons que E_m est une constante au cours du temps.

$E_m = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2$ or $x = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

$\dot{x} = -\omega_0 X_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$

$E_m = \frac{1}{2} m \omega_0^2 X_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2} k (X_m \cos(\omega_0 t + \varphi))$

$E_m = \frac{1}{2} m \omega_0^2 X_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2} k X_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$

$E_m = \frac{1}{2} k X_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2} k X_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$

$E_m = \frac{1}{2} k X_m^2 (\cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \sin^2(\omega_0 t + \varphi))$

$E_m = \frac{1}{2} k X_m^2$ $\boxed{E_m = \frac{1}{2} k X_m^2 = cte}$

Conséquence graphe $E_p = f(x)$: cuvette de potentiel

$\boxed{E_m = E_{pmax}}$

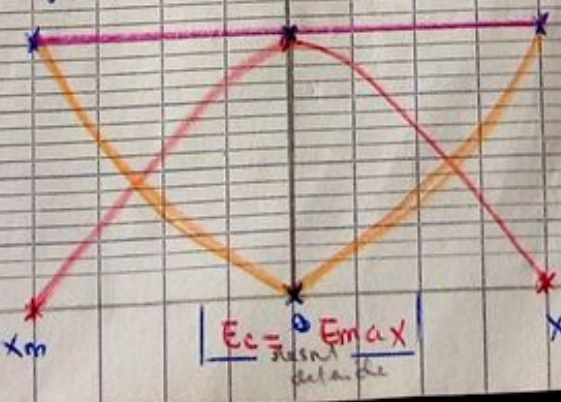
* si $x = X_m$

$E_c = 0$; $E_m = E_{pmax}$

* si $x = 0$

$E_c = E_m$

$E_{pe} = 0$



Au cours du mouvement, E_p se transforme en E_c et vice-versa.

- En 0 : $E_m = E_{c_{max}} = \frac{1}{2} m V_{max}^2$ (V_m) = vitesse maximale
- En $\pm X_m$: $E_m = E_{pmax} = \frac{1}{2} k X_{max}^2$

* Vitesse maximale

On a : $E_m = E_{c\,max} = \frac{1}{2} m V_m^2$

$E_m = E_{pmax} = \frac{1}{2} k X_m^2$

$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} m V_m^2 = \frac{1}{2} k X_m^2$

$m V_m^2 = k X_m^2$ $\Rightarrow$ $\boxed{V_{max}^2 = \frac{k X_{max}^2}{m}}$

$\omega_0 =$

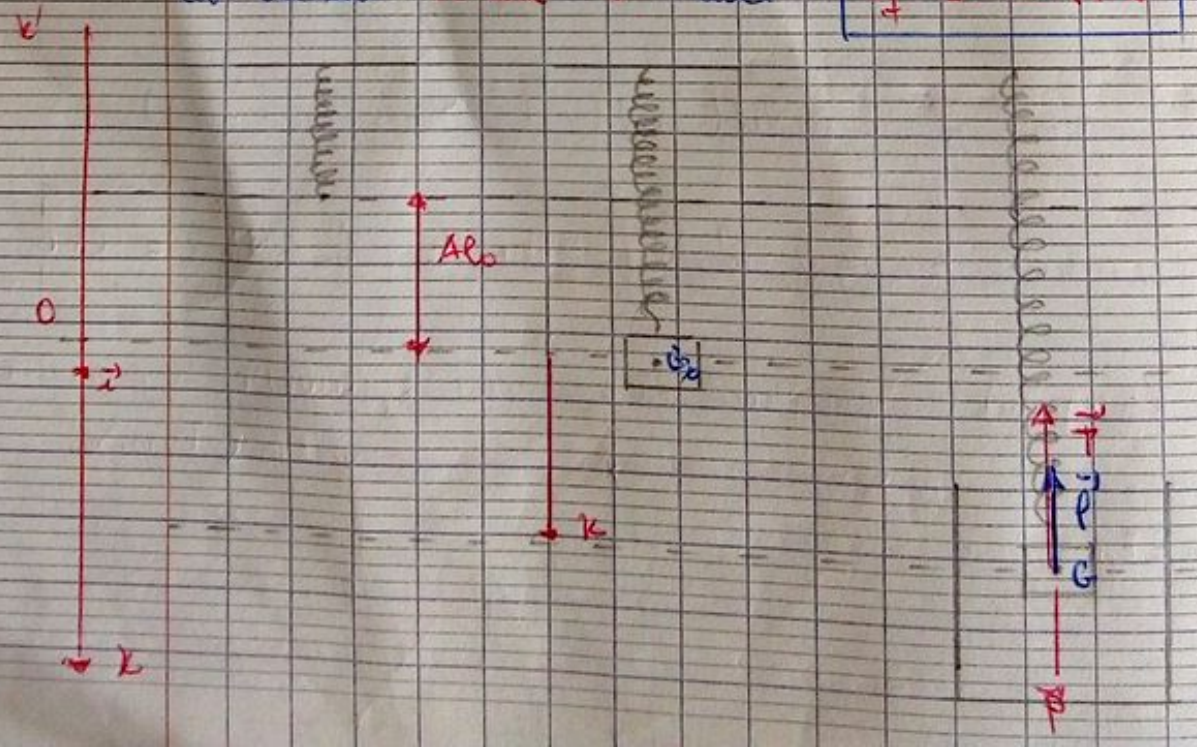
$\Rightarrow$ $\boxed{V_{max} = \omega_0 X_m}$

III/ Les oscillateurs mécaniques amortis :

1°) Amortissements fluides :

En présence des frottements (solide - solide, solide - liquide) le mouvement est amorti.

Dans le cas de frottement solide - fluide (frottement visqueux), la force de frottement $\vec{f}$ est proportionnelle au vecteur vitesse $\vec{v}$ avec $\boxed{\vec{f} = -h\vec{v}}$



différentielle du mvt

- A l'équilibre du solide : SE, Solide ; BF, $\vec{P}$, $\vec{T}$

$\vec{P} + \vec{T} = 0$ (v = cste)

(kk') $\boxed{mg - k\Delta l_0 = 0}$

- Solide en mouvement :

BF : $\vec{P}$, $\vec{T}$ et $\vec{f}$ TC : $\vec{P} + \vec{T} + \vec{f} = m\vec{a}$

(kk') $mg = k(\Delta l_0 + x) - f = m\ddot{x}$

or $f = -d\vec{v}$ (=) $f = dv$

=) $\underbrace{mg - k\Delta l_0}_{0} - kx + dv = m\ddot{x}$

$m\ddot{x} + d\dot{x} + kx = 0$

=) $\boxed{\ddot{x} + \frac{d}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0}$

équation différentielle du mvt du système amorti dont la résolution est hors-du programme

Solution de l'équation

(E) : $\ddot{x} + \frac{d}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

L'équation caractéristique (E) est :

Posons $X = \dot{x}$ et $X^2 = \ddot{x}$ =) $k = 1 = X^0$

$X^2 + \frac{d}{m}X + \frac{k}{m} = 0$

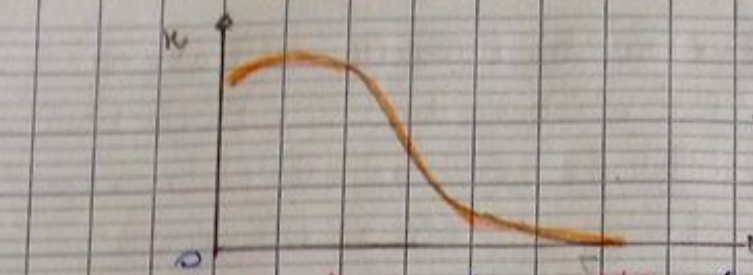
$\Delta = \left(\frac{d}{m}\right)^2 - 4\frac{k}{m}$ pour $\Delta = 0$

$\left(\frac{d}{m}\right)^2 = \frac{4k}{m}$ =) $\frac{d}{m} = \sqrt{\frac{4k}{m}}$ or $\frac{k}{m} = \omega_0^2$

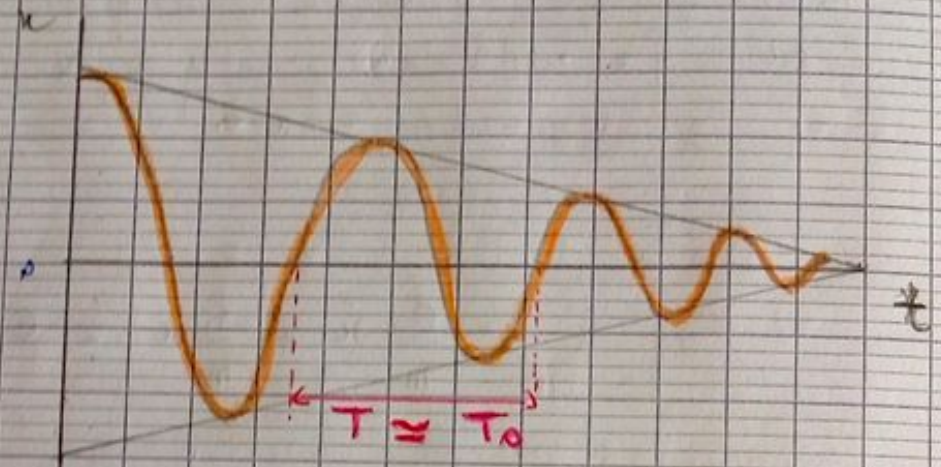
$\frac{d}{m} = \sqrt{4\omega_0^2}$ =) $\boxed{d = 2m\omega_0}$

d_c = coefficient de frottement critique

- Si les frottements sont importants c-a-d : $d \geq d_c = 2m\omega_0$ le régime est apériodique (pas d'oscillation)



- Si les frottements sont faibles ($d < d_c$) : le régime est dit pseudo périodique.



NB : Montrons que E_m est décroissante dans des oscillations mécanique amortie

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + kx = 0$$

$$m\ddot{x} + kx = -d\dot{x}$$

$$\frac{dE_m}{dt} = \dot{x}(m\ddot{x} + kx) \quad \text{d'après (1-1-2)}$$

$$\frac{dE_m}{dt} = \dot{x}(-d\dot{x}) = -d\dot{x}^2 = -dv^2 = \mathcal{P}(\vec{f}) < 0$$

$$\boxed{dE_m = \mathcal{P}(\vec{f})\,dt}$$ variation de l'énergie

$$\boxed{\Delta E_m = \mathcal{P}(\vec{f}) \times t < 0}$$

$$\Delta E = \int_0^t \mathcal{P}(\vec{f})\,dt = W(\vec{f})$$

Tout le système ne se conserve, l'oscillateur perd de l'énergie sous forme de chaleur.

NB: Calculons T_e, ω_e et φ_e (Pendule élastique)

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 \quad ; \quad x = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\dot{x} = -x_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$E_c = \frac{1}{2} m x_m^2 \omega_0^2 \sin^2(\underbrace{\omega_0 t + \varphi}_{a})$$

or $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - \sin^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a$

$$E_c = \frac{1}{2} m x_m^2 \omega_0^2 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\omega_0 t + 2\varphi)\right]$$

$\sin^2 a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2a$

par identification

$$\begin{cases} \omega_e = 2\omega_0 \\ \varphi_e = 2\varphi \\ T_e = \frac{T_0}{2} \end{cases}$$

$\omega_e = 2\omega_0$

$\frac{2\pi}{T_e} = \frac{4\pi}{T_0}$

$$\Rightarrow \boxed{T_e = \frac{T_0}{2}}$$

$$\begin{cases} E_c = \frac{1}{2} m x_m^2 \omega_0^2 \left(1 - \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_0)\right) \\ E_c = E_{cmax}\left(1 - \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_0)\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_{cm} = \frac{1}{2} m x_m^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) \\ E_c = E_{max} \sin^2(\omega_0 t + \varphi) \end{cases}$$

P5 :

Généralité sur Les Champs Magnetiques

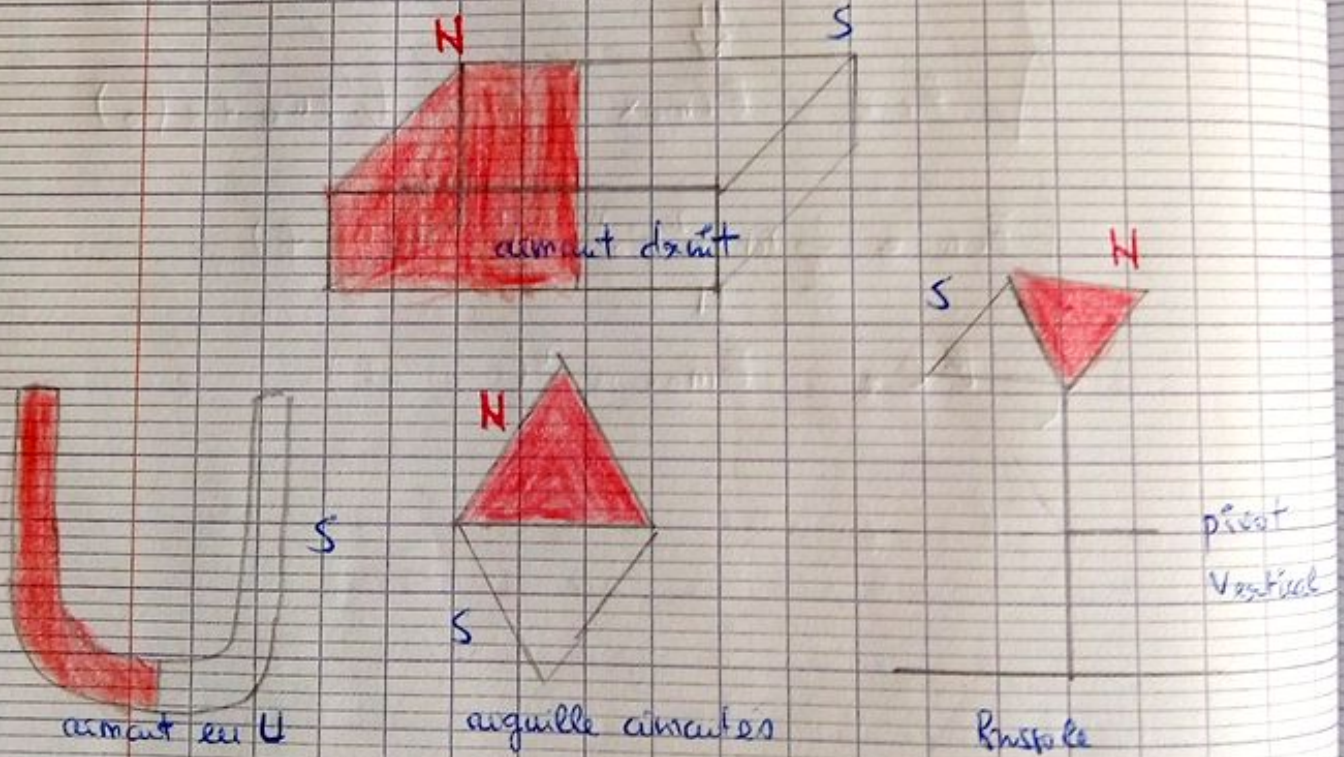
- Champs Magnétiques des Aimants

I/ Généralité :

1) Les aimants :

On appelle aimant les corps qui sont capable d'attirer du fer en deux zones appelées **Pôles**. On distingue deux :

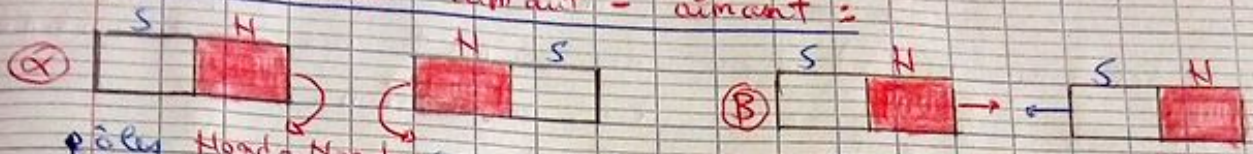
- les aimants naturels qui sont constitués par des oxyde de fer en particulier d'oxyde magnetique (Fe_3O_4)
- les aimants artificiels : ce sont des alliages obtenus par aimantation du barreau ou d'aiguille en acier. Les plus aimants sont (placés) classés suivant leur forme qui se presente comme suit :



Un aimant possede 2 pôles : nord (N et sud (S) generalement de couleur differentes.

2) Interaction (aimant) magnétique :

a) Interaction aimant - aimant :



Pôles Nord - Nord se repoussent pôle Nord - Sud s'attirent

Conclusion : Deux pôle de meme nom se repoussent
Deux pôle de noms différents s'attirent

b) Expérience de l'aimant brisé :

Si on casse un aimant en deux on obtient deux aimant qui ont chacun 2 pôles Nord et Sud.

3) Les bobines :

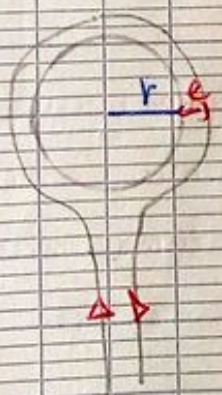
Une Bobines est un enroulement de fil conducteur en plusieurs spires. Si le fil est mple on l'enroule sur un cylindres isolant.



Il existe deux types de Bobines

a) Bobine plates :

Une bobine est plate si son épaisseur est négligeable (e) devant son rayon (r) (e << r)



b) Bobine longue ou Solénoïde

Une bobine est longue si son rayon est négligeable devant sa longueur ℓ (r << ℓ) ou ℓ > 10 r

Voir - schéma du 3 (Bobine longue)

a) Intéraction aimant - aimant :



pôles Nord - Nord se repoussent pôle Nord - Sud s'attirent

Conclusion : Deux pôle de meme nom se repoussent

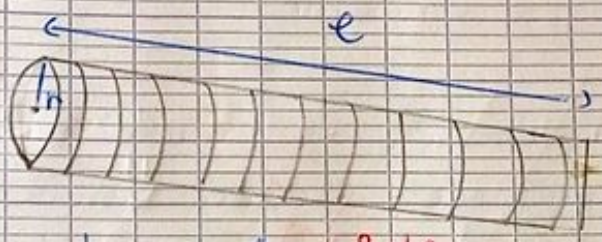
Deux pôle de noms différents s'attirent

b) Expérience de l'aimant brisé :

Si l'on casse un aimant en deux on obtient deux aimant qui ont chacun 2 pôles Nord et Sud.

3) Les bobines :

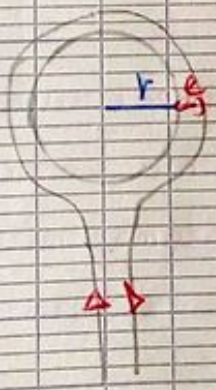
Une Bobines est un enroulement de fil conducteur en plusieurs spires. Si le fil est enroulé en l'enroule sur un cylindres isolant.



Il existe deux types de Bobines

a) Bobine plates :

Une bobine est plate si son épaisseur est négligeable (e) devant son rayon (r) (e <<< r)



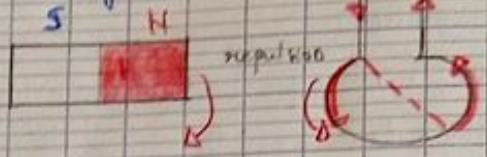
b) Bobine longue ou solénoïde

Une bobine est longue si son rayon est négligeable devant sa longueur ℓ (r <<< ℓ) ou ℓ > 10 r

Voir - schéma en 3 (Bobine longue)

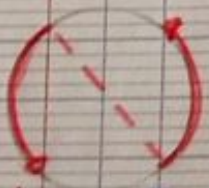
4) Intéractions aimant – courant :

Remplaçons en (x) l'un des aimant par une bobine de sorte à garder la répulsion.



face Nord

Idem pour une bobine si on se place devant une face on aura :



face Nord → I circule dans le sens trigonométrique



face Sud → I circule dans le sens des aiguilles d'une montre

Conclusion : Un aimant, un courant, une particule chargée en mouvement, perturbe l'espace environ de la même manière. Cet espace ainsi perturbé est appelé Espace champ magnétique ces corps subissent également dans ce champs des actions à distances appelées Forces magnétiques.
Les expériences montrent que le courant électrique est à la fois source et détecteur de champs magnétique.

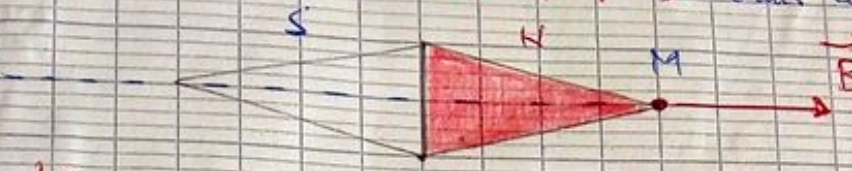
Il existe un champ magnétique dans toute région de l'espace où des actions magnétiques se font subir.

1) Le vecteur champ magnétique :

Le champs magnétique est représenté par un vecteur noté $\vec{B}$ caractérisé par :

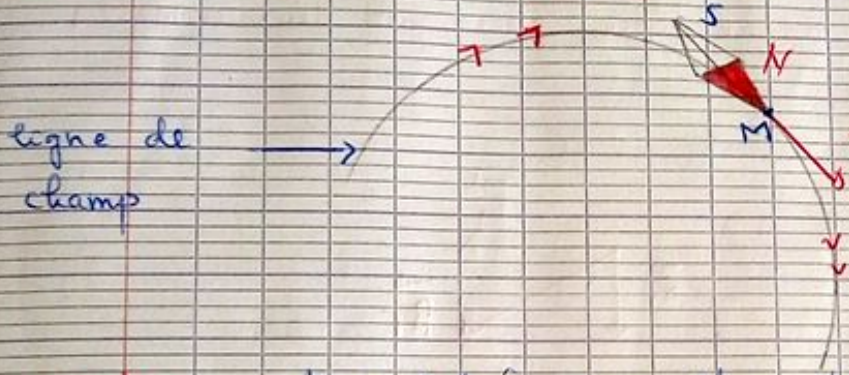
- pt d'application : tt pt de l'espace considéré
- direction : celle de l'aiguille aimantée
- sens : dirigé du pôle **Sud** vers le pôle **Nord**

- Norme : Obtenue par calcul ou par mesure avec un Teslamètre
B s'exprime donc en Tesla (T) dans le S.I



2/ Ligne et Spectre de champ magnétique :

La ligne de champ est une courbe tangente au vecteur champ ($\vec{B}$) en chacun de ses points. Elle est orientée tjrs suivant le sens de $\vec{B}$ (c'est-à-dire, elles sortent du pôle Nord)



Le spectre est constitué par l'ensemble des lignes de champs magnétiques.

* Propriétés

- En un point de l'Espace, il ne peut passer que seule ligne de champs, il ne peut y avoir qu'un seul champs magnétique en ce point : il y a unicité du champ magnétique.
- Les lignes de champs dans un espace donné peut sient convergentes, divergentes ou parallèles

Remarque : Lorsque les lignes de champ sont parallèles dans une région de l'espace, le champ est uniforme, le vecteur champs ($\vec{B}$) est constant (même sens, norme et direction)

3/ Spectre magnétique des aimants :

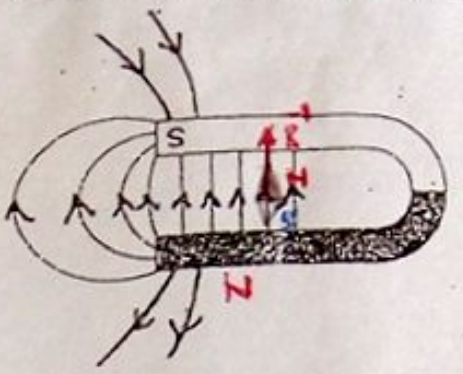
Spectres magnétiques des aimants

1. Spectre magnétique d'un aimant droit



Les lignes de champ orientées dans le sens du champ, sortent par le pôle nord.

2 Spectre magnétique d'un aimant en U.



Le champ est uniforme entre ses branches

CHAMPS MAGNETIQUES DES COURANTS.

1. Spectre magnétique d'un courant rectiligne.
Il a même forme dans tout plan perpendiculaire au fil.

4/ Composantes des champs magnétiques

Exemple : Champ magnétique créé par deux aimants



La résultante de un champs créée par les deux aimants est

$$\vec{B}r = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$$

Dans d'une manière générale

$$\vec{B}_r = \sum_{i=1}^{n} \vec{B}_i$$

Dans notre cas $\vec{B}_r = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$

$$B_r^2 = B_1^2 + B_2^2 + 2\vec{B}_1 \cdot \vec{B}_2$$

$$\Rightarrow B_r^2 = B_1^2 + B_2^2$$

$\vec{B}_1 \perp \vec{B}_2$

$$B_r = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}$$

b) Champs magnétique Terrestre :

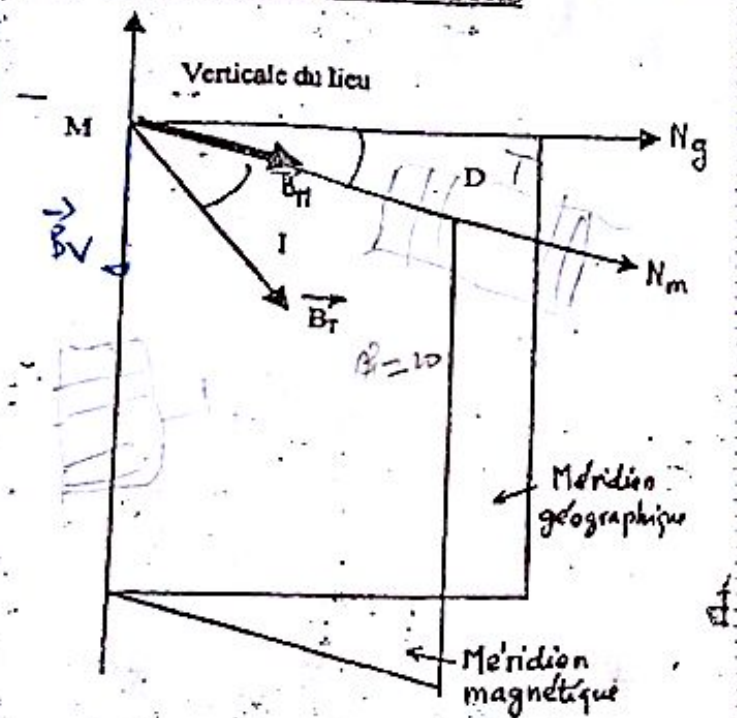
La Terre crée dans son voisinage un champs magnétique appelé champs magnétique terrestre. Le vecteur champs magnétique Terrestre ($\vec{B}_T$) est incliné par rapport au plan horizontal d'un angle I appelé inclinaison du lieu.

$$\vec{B}_T = \vec{B}_H + \vec{B}_V$$

champ magn terrestre

avec $\begin{cases} B_H = B\cos I : \text{composante horizontale du champ m. terrestre} \\ B_V = B\sin I : \text{composante verticale du champ mag. terrestre} \end{cases}$

CHAMP MAGNÉTIQUE TERRESTRE



NB: les aiguilles aimantées mobiles sont maintenues de telle qu'elles prennent toujours la direction de la composante horizontale de $\vec{B}_T$

B_H est une constante

$$B_H = K \cdot 10^{-5}\ T$$

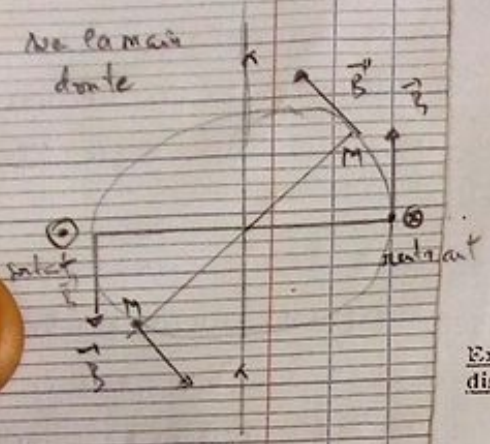
III/ Champs magnétique des courant

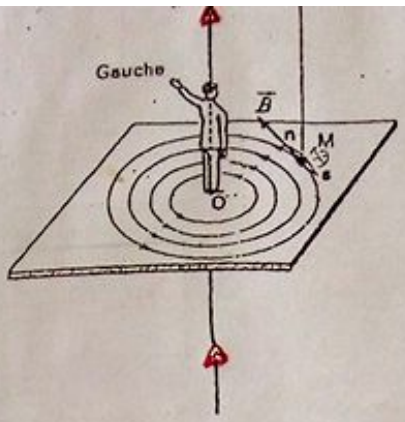
1) Champs magnétique créé par du courant

a) Spectre magnétiques

Les lignes de champs sont des cercles concentriques contenus dans des perpendiculaire du fil.

b) Caractéristiques du champs créé en un point M





Expression du champ en un point M situé à la distance d = OM du fil

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} = 2.10^{-7}\frac{I}{d}$$

B en teslas (T), I en ampères (A), d en mètres .

5) Caractéristique du champs créé en un point M :

- direction tangente à la ligne de champs au point M
- sens le sens de $\vec{B}$ au point M est donné par la règle de la main droite ou la règle du bonhomme d'ampère

* Règle de la main droite :

La main droite est placé sur le conducteur, la paume est mise vers le point M, le courant circule du poignet vers l'extrémité des doigts, le pousse écarté des doigts indique le sens de $\vec{B}$

* le bonhomme d'ampère

Le bonhomme enchâssé sur le fil de tel sorte que le courant lui entre par les pieds sorte par sa tête lorsqu'il est tourné vers le point M, son bras gauche tendu indique le sens de $\vec{B}$

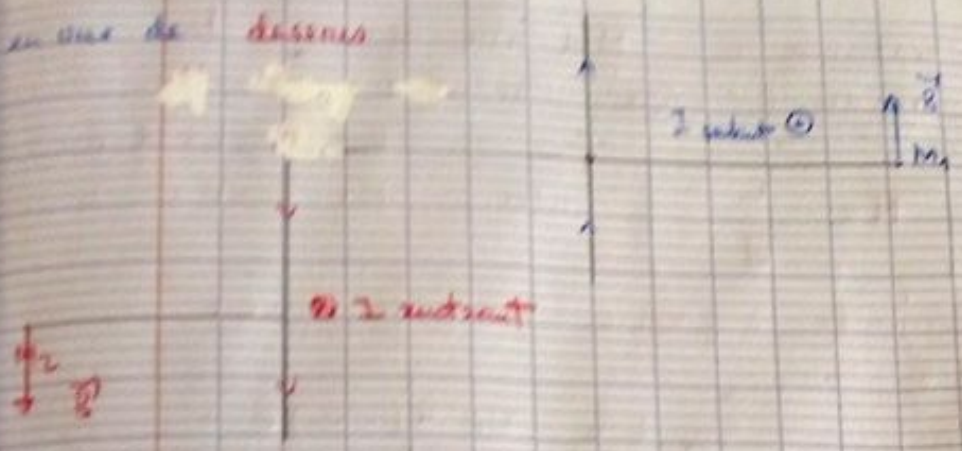
- Norme

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} = 2.10^{-7}\frac{I}{d}$$

avec $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ perméabilité du vide

d = OM : distance du fil

Remarque : convention utilisée pour l'orientation dans l'espace : sens rentrant et sens sortant pour le courant magn



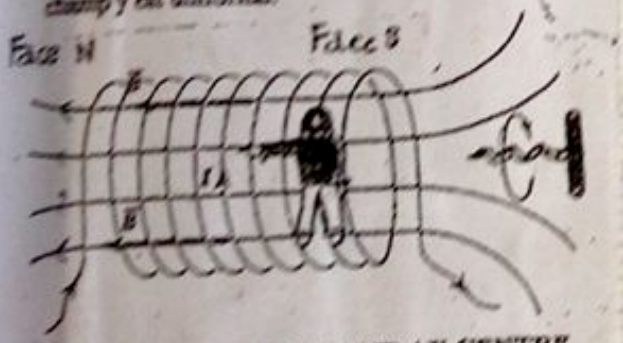
2) champs magnétique créé par un solénoïde :

à l'intérieur du solénoïde le champ est uniforme.

2. Champ magnétique d'un solénoïde :

SPECTRE MAGNETIQUE

A l'extérieur du solénoïde le spectre magnétique est analogue à celui d'un aimant droit.
A l'intérieur du solénoïde loin des spires, dans la région centrale les lignes de champ sont parallèles le champ y est uniforme.



EXPRESSION DU CHAMP AU CENTRE

Solénoïde de longueur L (en m), comportant N spires, soit $n = \frac{N}{L}$ spires par mètre de longueur.

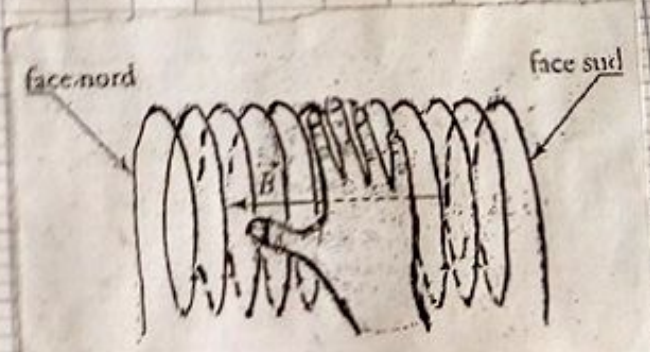
$$B = \mu_0 . n . I = \mu_0 \frac{N}{L} . I$$

Remarque :
Le rayon R du solénoïde n'intervient pas dans l'expression de B.

a) Caractéristiques du champs à l'intérieur du solénoïde

- direction : parallèle à l'axe du solénoïde
- Sens : donné par les règles ci-dessous

* la main droite : empoigne le solénoïde dans le sens du courant, le pouce écarté des autres doigts indique le sens de $\vec{B}$



* La règle du bonhomme d'ampère :

C'est la même règle mais ici le bonhomme regarde vers l'intérieur du solénoïde.

- Norme :

$$B = \mu_0 n I = \mu_0 \times \frac{N}{L} \times I \qquad n = \frac{N}{L}$$

n : nombre de spires / unité Longueur (m)
L : Longueur du solénoïde
N : Nombre de spire

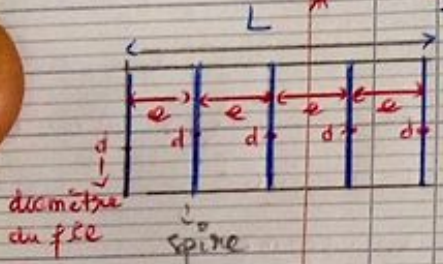
NB : Quelques expressions pour N (nbre de spire)

* Solénoïde à spire jointive :

$$N = \frac{L}{d}$$

avec L : longueur du solénoïde
d : diamètre du fil

* Solénoïde à spire non-jointive :



$$L = Nd + (N-1)e$$

$$N = \frac{L+e}{d+e}$$

longueur et diamètre

* Quelque soit la forme du solénoïde

$$P(\omega, e) = 2\pi r$$

$$N = \frac{\ell}{\ell'} = \frac{\ell}{\pi D}$$

$D = 2r$) Périmètre du cercle

ℓ : longueur du fil

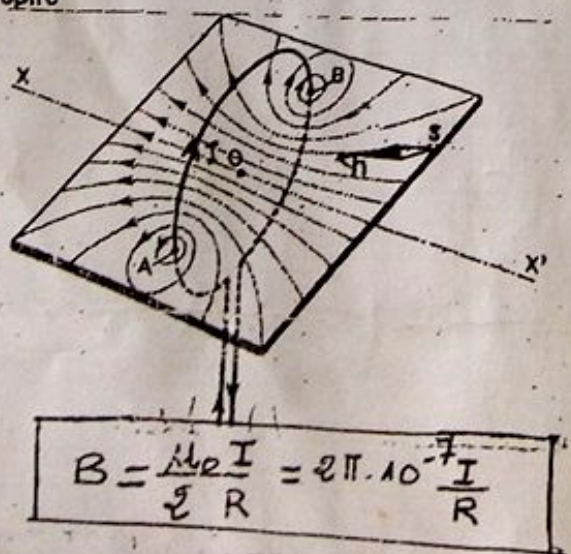
D = diamètre d'une spire

III/3/ Champs magnétique créé par une spire circulaire

SPIRE CIRCULAIRE

Le spectre magnétique a même forme dans tout plan méridien.

Plan méridien : tout plan contenant l'axe xx' de la spire



$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} = 2\pi \cdot 10^{-7} \frac{I}{R}$$

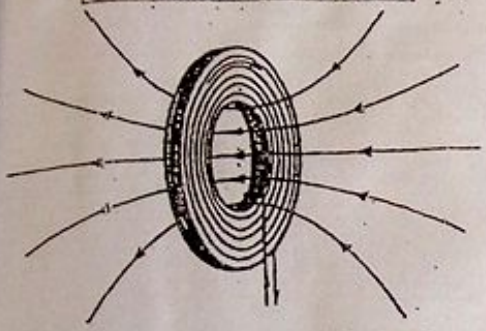
$$B = \frac{\mu_0}{\ell} \times \frac{I}{R} = 2\pi \cdot \omega^{-7} \frac{I}{R}$$

R = Rayon des spires

4) Champs magnétique créé par une bobine plate :

Elle est analogue à un solénoïde mais la longueur n'est plus très grand devant le rayon.

BOBINE PLATE



Expression du champ au centre de la bobine de rayon R, comportant N spires et parcourue par I

$$B = \frac{\mu_0}{2}\frac{NI}{R} = 2\pi.10^{-7}\frac{NI}{R}$$

$$B = \frac{\mu_0}{2} \times \frac{NI}{R_{moy}} = 2\pi.10^{-7}\frac{NI}{R}$$

Remarque :

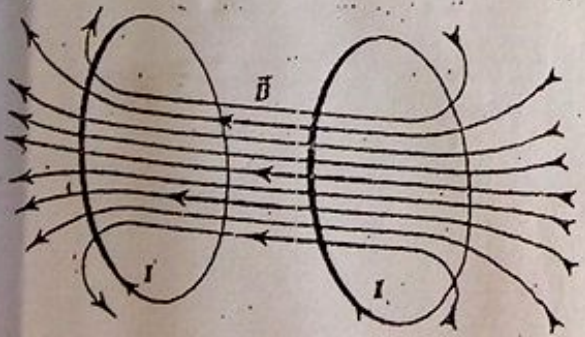
N = 1 mais solénoïde $B = 2\pi.10^{-7}\frac{I}{R}$ pour 1 spire

5) Spectre magnétique

Les lignes de champs ont la même allure que dans le cas d'un solénoïde. Le champs magnétique est uniforme au centre de la bobine plate

5) Bobine de Helmholtz

Ce sont deux bobines plates identiques parallèles, de rayon R, distantes de R et parcourues par le même courant I, dans le même sens



Le champ est uniforme entre les bobines

Expression du champ :

$$B = 0,72\,\mu_0\frac{NI}{R}$$

N nombre de spires de chaque bobine.

N = nombre de spire de chaque bobine

$$B = 0,72\,\mu_0\frac{NI}{R}$$

R = Rayon

Exercice d'application:

On néglige le champ magnétique terrestre ; $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ S.I.

On considère une bobine de longueur L = 50 cm comprenant N = 1000 spires de rayon moyen r = 2 cm.

1/ La bobine est traversée par un courant d'intensité I. L'intensité B_b du vecteur champ magnétique au centre de cette bobine est 10^{-2} T.

a/ Peut-on utiliser la relation $B_b = \mu_0.n.I$? Justifier.

b/ Indiquer par un schéma clair comment se placerait une aiguille aimantée au centre de la bobine en choisissant un sens de parcours du courant.

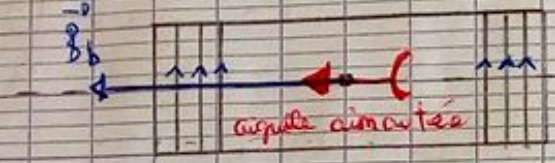
2/ Un aimant droit situé dans le plan horizontal est placé perpendiculairement à l'axe de la bobine horizontale, toujours traversé par le même courant.

a/ Représenter au centre de la bobine les vecteurs champs magnétiques $\overrightarrow{B_0}$ crée par l'aimant droit et $B_b = 10^{-2}$ T crée par la bobine en précisant les pôles de l'aimant et le sens du courant.

b/ Préciser la nouvelle orientation de l'aiguille. Quelle est l'intensité B_T du champ résultant sachant que $\alpha = 30°$?

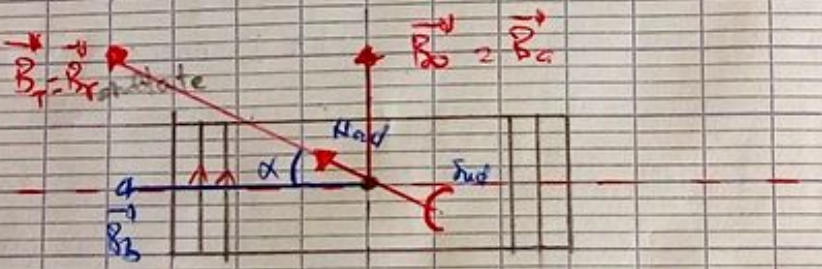
Solution :

1a) L = 50 cm, r = 2 cm } L > 10r donc la bobine est longue d'où $B_b = \mu_0 n I$



(axe de la bobine)

2) $\vec{B}_T = \vec{B}_r + \vec{B}_0$ résultante ; $\vec{B}_0 = \vec{B}_a$



2b) Nouvelle orientation de l'aiguille



(aimant)

- Calculons l'intensité de B_T du champ résultant $\alpha = 30°$

$$\cos\alpha = \frac{B_b}{B_T} \Rightarrow B_T = \frac{B_b}{\cos\alpha} = \frac{10^{-2}}{\cos 30} = 1{,}15.10^{-2}\ T$$

$$\boxed{B_T = 1{,}15.10^{-2}\ T}$$

HB1 Exo1 §

- si l'angle α est grand I_1 et I_2 sont de sens opposés
- si l'angle α est petit I_1 et I_2 sont de même sens

Pc : **Mouvement d'une Particule chargée dans un champ magnétique uniforme :**

I/ Rappels mathématiques : Produit Vectoriel :

1/ Définition :

Le produit vectoriel de 2 vecteurs noté $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur $\vec{w}$ tel que : $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ (∧ : vectoriel)

2/ Caractéristiques du vecteur $\vec{w}$:

$\vec{w}$ est un vecteur caractérisé comme suit :

- direction : perpendiculaire au Plan formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$
- sens : tel que la triade $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit directe. Pour cela on utilise l'une des règles suivantes :

* **Règle de la main droite :** la main droite est traversée par $\vec{u}$ du poignet vers les doigts, la paume orientée vers $\vec{v}$ et la paume indique le sens de $\vec{w}$. ($(\vec{u}, \vec{v})$; $\vec{u}$; $\vec{v}$)

* **Règle du bonhomme d'Ampère :** il est traversé des pieds à la tête par $\vec{u}$, il regarde dans le sens de $\vec{v}$ et son bras gauche tendu donne le sens de $\vec{w}$.

- Norme : $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(\vec{u}, \vec{v})$

avec $\alpha = (\vec{u}, \vec{v})$

$$W = u \times V \sin\alpha$$

3/ Propriétés

- Le Produit vectoriel de deux vecteurs n'est pas commutatif

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$$

- Le (Produit) vecteur Produit vectoriel de 2 vecteurs est perpendiculaire à chacun de ces vecteurs :

$$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} \Rightarrow \vec{w} \perp \vec{v} \text{ et } \vec{w} \perp \vec{u}$$

- Le produit vectoriel de 2 vecteurs colinéaires est nul.

Il est aussi nul si l'un des vecteurs est nul.

$$\vec{w} \wedge (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \wedge \vec{u} + \vec{w} \wedge \vec{v}$$ (distributivité par rapport à l'addition)

II/ Force de Lorentz

1) Définition

Une particule de charge q animée d'un mouvement de vitesse $\vec{v}$ dans un champ magnétique uniforme est soumise à une Force magnétique appelée Force de Lorentz. Elle est donnée par

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Par analogie

2) Caractéristiques de la Force de Lorentz :

- direction : perpendiculaire au plan formé par $q\vec{v}$ et $\vec{B}$
- Sens : le sens de $\vec{F}$ est tel que le trièdre $(q\vec{v}, \vec{B}, \vec{F})$ soit direct. Pour cela on peut utiliser l'une règle d'orientation énoncé ci-dessous.
- Norme :

$$F = |q| v B \sin\alpha$$ avec $\alpha = (\vec{v}, \vec{B})$ en degré

F en N, v (c) (charge) en m/s (vitesse), B en T (champ)

. α angle pris en radian.
. angle aigu ou obtus, non c'est en degré

- Cas Particuliers :
  - si $\vec{v} \parallel \vec{B}$ ($\alpha = 0$ ou $\alpha = 180°$) $\Rightarrow \sin\alpha = 0$ donc $F = 0$
  - si $\vec{v} \perp \vec{B}$ ($\alpha = 90°$) $\Rightarrow \sin\alpha = 1$ donc $F = |q| v B$

NB :

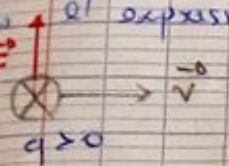
- si $q > 0$; $q\vec{v}$ et $\vec{v}$ ont le même sens
- si $q < 0$; $q\vec{v}$ est opposé à $\vec{v}$ (
- $F = 0$ si la particule est non-chargée ou la particule est immobile ($v = 0$) ($q = 0$)

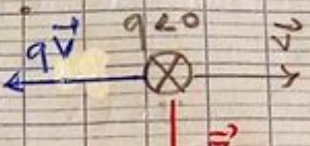
$F >>> P$

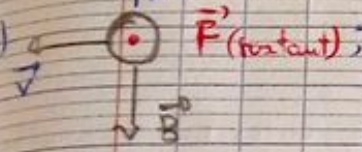
Exercice d'application :

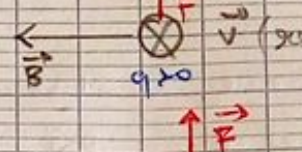
Déterminer le sens du vecteur manquant dans les cas suivants :

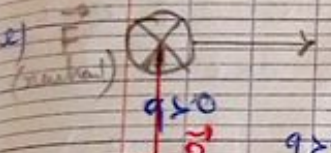
dans l'expression $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$.

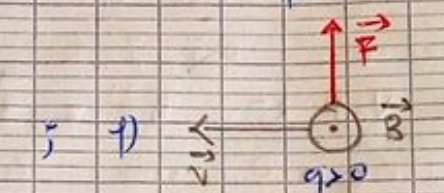
a) 

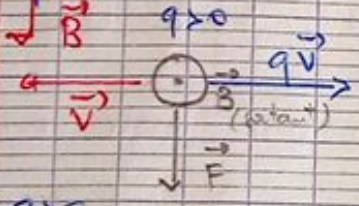
b) 

c) 

d) 

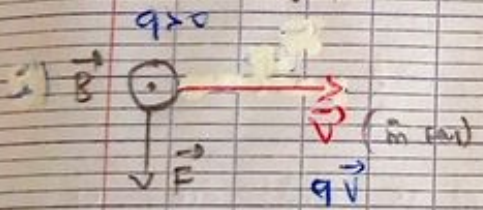
e) 

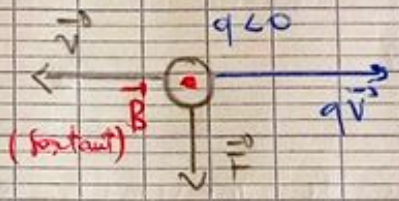
f) 

g) 

h) 

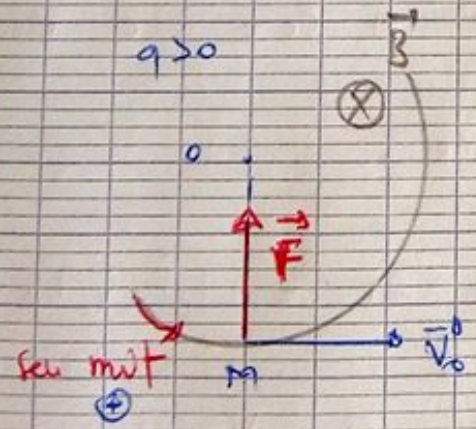
$F=0$ car $\vec{B} \parallel \vec{v}$

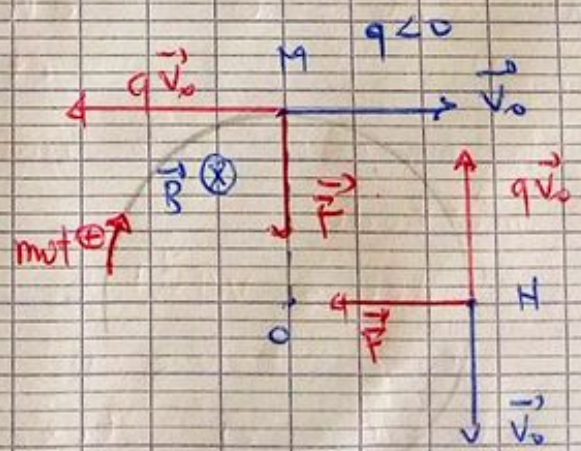
i) 

j) 

III/ Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme : cas où $\vec{v_0} \perp \vec{B}$

On considère une particule de charge q animée d'un mvt de vitesse initiale $\vec{v_0}$ qui entre dans un espace où règne un champs magnétique $\vec{B}$ tel que : $\vec{v_0} \perp \vec{B}$





Conclusion : $\vec{F}$ est centripète

- Étude dynamique :

système Et : particule (q)

RTSG : BF : $\vec{F}$ (force de Lorentz)

$\vec{F} \gg P$ ... [1] : $\vec{F} = m\vec{a}$

$q\vec{V} \wedge \vec{B} = m\vec{a}$ $\quad \boxed{\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{V} \wedge \vec{B}}$ $\quad a \perp \vec{V}$; $a \perp \vec{B}$

1/ Montrons que le mvt est plan.

Soit un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que $\vec{V_0} = V_0\vec{i}$ et $B\vec{k} = \vec{B}$. Il suffit de montrer que $\vec{a} \cdot \vec{B} = 0$

donc $a_z = 0$ car $\vec{a} \perp \vec{B} = B\vec{k}$ donc pas de composante sur $(\vec{k})$

$a_z = \frac{dV_z}{dt} = 0$ alors $V_z = cte = V_{0z}$

$\boxed{V_{0z} = 0}$ car V_0 n'a qu'une seule composante et c'est suivant $\vec{i}$

or $\boxed{V_{0z} = \frac{dz}{dt} = 0}$ $\quad \boxed{z = cte}$

donc le mouvement est plan et se fait dans le plan perpendiculaire à $\vec{B}$ (c'est à dire $(Ox ; Oy)$)

2/ Montrons que le mouvement est uniforme $V = cte$:

1ère méthode :

$\forall t$ on a $E_c = \frac{1}{2}mV^2 \Rightarrow \frac{dE_c}{dt} = m\frac{d\vec{V}}{dt}\vec{V} = m\vec{a}.\vec{V} = 0$

or $\vec{a}.\vec{V} = 0$ $(a \perp V)$ $\quad \frac{dE_c}{dt} = 0 \Rightarrow E_c = cte$ donc $V = cte$

donc le mouvement est uniforme.

$\mathcal{P} = \frac{W(\vec{F})}{\Delta t}$

2ème méthode :

TEC : $\Delta E_c = W(\vec{F}) = \mathcal{P}(\vec{F}) \times \Delta t = (\vec{F}.\vec{V}) \times \Delta t = 0$

car $\vec{F}.\vec{V} = 0$ $\quad \vec{F} \perp \vec{V}$

$\Delta E_c = 0 \Rightarrow E_c = cte \Rightarrow V = cte$

donc le mouvement est uniforme.

3ème méthode : Dans la base de Frenet $(\vec{u_t}, \vec{u_n})$

$\vec{a} = a_t \vec{u_t} + a_N \vec{u_n}$ or $\vec{a}$ est centripète car $\vec{F}$ est centripète donc

$a_t = 0 \Leftrightarrow \frac{dV}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{V = cte}$ le mouvement est uniforme

3/ Montrons que le mouvement est circulaire et circulaire :

- D'après la 3 méthodes, on a : $V = cte$ donc Mouvement Uniforme
- Dans la base de Frenet $a_N = a$ or $a_N = \frac{V^2}{R}$

et $\vec{F} = m\vec{a_N} \Leftrightarrow |q| V B = m\frac{V^2}{R}$

$\Rightarrow \boxed{R = \frac{mV}{|q|B} = cte}$ (2) le mouvement est circulaire

Conclusion : le mouvement d'une particule chargée lancée avec une vitesse $\vec{V}$, dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ tel que $\vec{B} \perp \vec{V}$ est plan (plan $\perp$ à $\vec{B}$) uniforme et circulaire de rayon R

$$\boxed{R = \frac{mV}{|q|B}}$$

Remarque : La masse d'une particule peut être donné par

$\boxed{m = AU}$ $\boxed{m = \frac{M}{\mathcal{N}}}$

U : unité de masse atomique ($1U = 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ Kg)

A : Nombre de masse ou nombre de Nucléons

$\mathcal{N}$: nombre d'Avogadro ($6{,}02 \cdot 10^{23}\ mol^{-1}$)

4/ grandeurs caractéristiques du mouvement :

- Vitesse angulaire : $\omega = \frac{V}{R} = \frac{V|q|B}{mV} = \frac{|q|B}{m}$

$\boxed{\omega = \frac{|q|B}{m}}$

- Période : $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{|q|B}}$

- fréquence : $\boxed{\nu = N = \frac{1}{T} = \frac{|q|B}{2\pi m}}$

- : quantité de mouvement : $\boxed{p = mv = |q|BR}$

Remarque :

* si $\vec{v}$ et $\vec{B}$ sont colinéaire c à-dire $(\vec{v}, \vec{B}) = 0$ ou π, $F = 0$

$\vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \underline{v = cte}$

d'où le mouvement de la particule est rectiligne uniforme

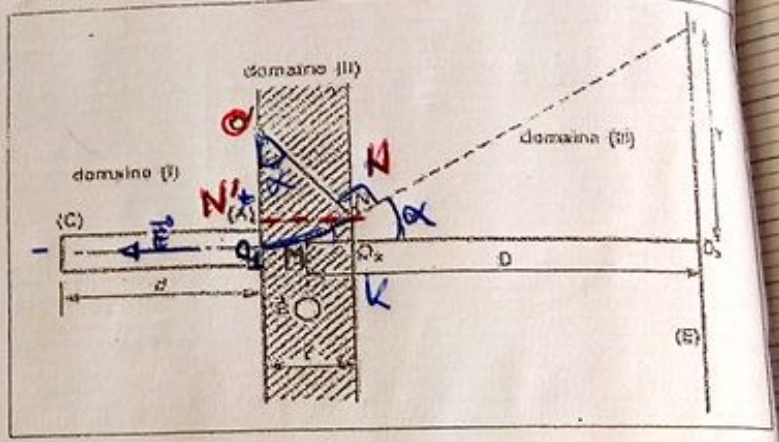
IV/ Applications :

1/ Déflexion magnétique : Cas où $(\vec{v}, \vec{B}) = \frac{\pi}{2}$

Application : (1)

Application 1 : Déflexion magnétique

1. Des électrons de masse m et de charge q sont émis sans vitesse initiale par la cathode (C). Ils subissent sur la longueur ℓ l'action du champ électrique uniforme $\vec{E}$. $E = 5.10^4$ V/m ; $d = 10$ cm



1.1 Quelle est la nature du mouvement de l'électron entre la cathode (C) et l'anode (A) ?

1.2 Que vaut la vitesse V_0 d'un électron au point O_1 ?

2. Arrivés en O_1, les électrons subissent sur la distance ℓ l'action d'un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ perpendiculaire au plan de la figure (le domaine où règne ce champ $\vec{B}$ est hachuré). Quel doit être le sens du vecteur $\vec{B}$ pour que les électrons décrivent l'arc de cercle O_1N. Justifier la réponse.

Établir l'expression du rayon $R = O'O_1 = O'N$ de cet arc de cercle.

A.N. Calculer R pour $B = 2.10^{-3}$ T.

3.1 Quelle est la nature du mouvement de l'électron dans le domaine III où n'existe aucun champ ?

3.2 Le domaine III est limité par un écran (E) sur lequel arrivent les électrons. Exprimer en fonction de m, e, B, D, ℓ et V_0 la déflexion magnétique $O_3I = Y$ subie par un électron à la traversée du système (II + III). La droite IN coupe l'axe O_1O_2 au point M. L'écran E est à la distance D de ce point M.

On fera les hypothèses simplificatrices suivantes :

- dans le domaine II de l'espace, on peut confondre la longueur de l'arc avec la longueur $O_1O_2 = d$ où règne le champ $\vec{B}$

On supposera que la déviation angulaire est faible.

3.3 Sachant que $Y \doteq 3{,}35$ cm, retrouver la valeur V_0 de la vitesse de l'électron au point O_1.

$D = 40$cm ; $\ell = 1$cm

Solution :

1) Système étudié : électron ($q < 0$)

2TSG ; BF : ($\vec{F}_e \gg \vec{P}$) ; Fe

TCI : $\vec{F}_e = m\vec{a}$

$q\vec{E} = m\vec{a}$ $\Rightarrow$ $\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}$

$\vec{a}$ $\begin{cases} a_x = \frac{(-e)(-E)}{m} \\ a_y = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\vec{a}$ $\begin{cases} a_x = \frac{eE}{m} \\ a_y = 0 \end{cases}$

$a = cte$ Mouvement Uniformément Varié

1-2/ TEC ; $\frac{1}{2}mV_{0_1}^2 - 0 = qU_{CA}$

e → A

$\frac{1}{2}mV_{0_1}^2 = q(V_C - V_A)$ (<0) $= qU$

$\Rightarrow$ $V_{0_1}^2 = \frac{2qU}{m}$ $\Rightarrow$ $\boxed{V_{0_1} = \sqrt{\frac{2qU}{m}}}$

avec $q = -e$ et $|U| = dE$; $U < 0$

$V_{0_1} = \sqrt{\frac{2deE}{m}}$ AN $V_{0_1} = \sqrt{\frac{0,1 \times 2 \times 1,6.10^{-19} \times 5.10^4}{9,1.10^{-31}}}$

$\boxed{V_{0_1} = 4,19.10^7 \text{ m/s}}$

2/ Sens du vecteur $\vec{B}$

Le sens de la déviation correspond au sens de la force de Lorentz ($\vec{F}_M$) donc vers le haut, selon le schéma $\vec{B}$ est sortant.



Expression du rayon R

- $R = OO' = O'H$
- $\vec{F}_m = m\vec{a}$ or $\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{V}_{0_1} \wedge \vec{B}$

Vitesse de la particule

Dans la base de Frenet on a : $\vec{V}_{0_1} = V_{0_1}\vec{u}_t$ or $\vec{a} \perp \vec{V}_{0_1}$

$\Rightarrow$ $\vec{a} = \vec{a}_N$ $\Rightarrow$ $a = a_N$

$F = ma_N$

$|q|BV_{0_1} = m\frac{V_{0_1}^2}{R}$ $\Rightarrow$

$\boxed{R = \frac{mV_{0_1}}{|q|B}}$

AN : $R = \frac{9{,}11.10^{-31} \times 4{,}19.10^{7}}{1{,}6.10^{-19} \times 2.10^{-3}} = 0{,}119\ m = 11{,}9\ cm$ | $R \approx 11{,}9\ cm$

3-1/ Nature du mouvement de l'électron : III

$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{a}$: Mouvement rectiligne uniforme.

suivant $\vec{V}_M$

3-2/ La déflexion en fonction de m, e, B, D, et V_0

- Dans le triangle $OH'H$: $\sin\alpha = \frac{HH'}{OH'} = \frac{e}{R}$
- Dans MIO_2 : $\tan\alpha = \frac{IO_2}{MO_2} = \frac{Y}{D}$

Or α est faible ($\alpha \leq 10°$) $\Rightarrow$ $\tan\alpha = \sin\alpha = \alpha$ (rad)

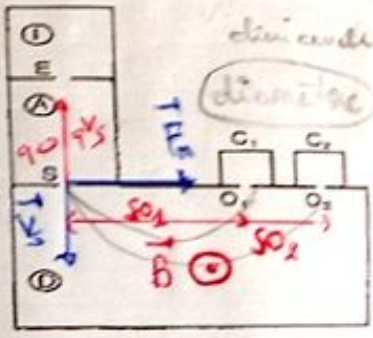
$\tan\alpha = \sin\alpha \Leftrightarrow \frac{e}{R} = \frac{Y}{D} \Rightarrow Y = \frac{eD}{R}$

$$Y = \frac{eD|q|B}{mV_0} = \frac{eDeB}{mV_0} \Rightarrow V_0 = \frac{eDeB}{mY}$$

$U = \frac{\Delta V_{ch} \times 100}{\Delta V_{ch}(V)}$ $\quad V_0 = \frac{0{,}01 \times 0{,}[illegible] \times 1{,}6.10^{-19} \times 2.10^{-3}}{[illegible]} = 4{,}2\ [illegible]\ m/s$

Application 2: spectrographe de masse

Données: $|U_0| = 4{,}00.10^{3}\ V$; $B = 1{,}00.10^{-1}\ T$; $e = 1{,}60.10^{-19}\ C$; $1u = 1{,}66.10^{-27}\ Kg$.



1/ Des ions de masse m et de charge $q < 0$ sont produits dans la chambre d'ionisation (I) avec une vitesse pratiquement nulle. Ils entrent en E dans l'enceinte A, sous vide, où ils sont accélérés et ressortent en S. Les orifices E et S sont pratiquement ponctuels, et on note $U_0 = V_E - V_S$ la différence de potentiel accélératrice. La vitesse des ions reste suffisamment faible pour que les lois de la mécanique classique soient applicables.

Etablir l'expression littérale de la norme du vecteur vitesse d'un ion à sa sortie en S, en fonction de m, q et U_0.

2/ A leur sortie en S, les ions pénètrent dans une deuxième enceinte sous vide D, dans laquelle règne un champ magnétique uniforme vertical.

a/ Quel doit être le sens du vecteur champ magnétique pour que les ions puissent atteindre les points O_1 ou O_2 ? Justifier la réponse.

b/ En S, le vecteur vitesse des ions est perpendiculaire à la droite passant par les points O_2, O_1 et S.

► Montrer que la trajectoire d'un ion dans l'enceinte D est plane.

► Montrer que la vitesse de l'ion est constante, que la trajectoire est un cercle de rayon R. Déterminer l'expression du rayon R.

3/ Le jet d'ions sortant de la chambre (I) est un mélange d'ions $^{81}Br^-$, de masse $m_1 = 81u$, et d'ions $^{79}Br^-$, de masse $m_2 = 79u$.

a/ Dans quel collecteur sont reçus les ions de masse m_1 ? Justifier la réponse.

b/ Calculer la distance entre les entrées O_1 et O_2 des deux collecteurs C_1 et C_2 chargés de récupérer les deux types d'ions.

c/ En une minute, les quantités d'électricité reçues respectivement par les collecteurs C_1 et C_2 sont $q_1 = -6{,}60.10^{-8}\ C$ et $q_2 = -1{,}95.10^{-8}\ C$. Déterminer la composition du mélange d'ions. Justifier votre réponse.

charge

2.3 Quelle est la trajectoire d'un ion dans la chambre D ? Etablir la relation qui donne le rayon R de cette trajectoire.

2.4 A quelle distance T_2C du trou T_2 doit-on placer le collecteur C pour recueillir les ions X^{2+} ? (on exprimera T_2C en fonction de m , e, U et B).

2.5 La chambre d'ionisation produit aussi des ions X^{+} de masse $m' = m/2$. Peut-on séparer les deux types d'ions avec ce dispositif ? Justifier...

2/ Spectrographe de masses : c'est un appareil qui permet de séparer les isotopes d'un même élément $\left({}^{A}_{Z}X \; {}^{A'}_{Z}X\right)$. Il est constitué de 3 chambres présentée comme suit :

- chambre d'ionisation : dans cette chambre des ions (isotopes de même charge (q) mais de masse $\neq$) qui sont produits.
- chambre d'accélération : les ions isotopes y arrivent sans vitesse et sont accélérés par la tension $U > 0$ de sorte que la vitesse

$$V_i = \sqrt{\frac{2qU}{m_i}}$$ (Voir appl)

- Chambre de déviation ou de séparation : les ions isotopes sont dirigés dans un champs magnétique uniforme $\vec{B}$ et sont par trajectoire de demi-cercle de rayon R_i

$$R_i = \frac{m_i V_i}{|q|B} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2m_i U}{q}}$$

Les isotopes sont ensuite recueillis sur un détecteur (collecteur) ou capteurs sur lequel se forme des points d'impacts différents de ces ions.

Application : (2) :

1) Établir l'expression de V_S.

TEC : $\frac{1}{2}mV_S^2 - 0 = q(V_E - V_S) = qU_0$

$$V_S = \sqrt{\frac{2qU_0}{m}}$$

2-a) Le sens du vecteur champs $\vec{B}$ est sortant voir schéma.

2-b) Montrons que la trajectoire est plane :

Soit un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ / $\vec{V_S} = V_S\vec{i}$ et $\vec{B} = B\vec{k}$

$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow q\vec{V_S} \wedge \vec{B} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{q}{m}\vec{V_S} \wedge \vec{B}$

$\Rightarrow \vec{a} \perp \vec{V_S}$ et $\vec{a} \perp \vec{B}$

$\vec{a}.\vec{B} = 0 \Rightarrow a_z = 0 \Rightarrow \frac{dv_z}{dt} = 0 \Rightarrow v_z = cte = 0$

$\Rightarrow \frac{dz}{dt} = 0 \Rightarrow z = cte$ donc le mouvement est plan et se fait dans le plan perpendiculaire à $\vec{B}$ c'est à dire $(O\vec{i}, O\vec{j})$

Autrement $\begin{cases} \vec{a} \perp \vec{v} \\ a \perp \vec{B} \end{cases} \Rightarrow \vec{a} = a\vec{j}$ alors $\begin{cases} \vec{a} = a\vec{j} & (P) \\ \vec{v} = v\vec{i} & (V) \\ \vec{B} = B\vec{k} \end{cases}$

alors le mouvement se fait dans le plan (O_x, O_y)

- Montrons la vitesse est constante et la trajectoire est 1 Cercle

- Dans la base de Frenet : $\vec{a} = a_t \vec{u}_t + a_n \vec{u}_n$

or $\vec{a}$ est centripète $\Rightarrow a_t = a \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v = cte$

Mouvement uniforme.

- Dans la base de Frenet : $a_t = 0 \Rightarrow \vec{a} = \vec{a}_n$ donc la trajectoire est un cercle.

Trouvons le rayon R :

$a_n = a \Rightarrow \frac{v^2}{R} = \frac{|q|}{m} v.B \Rightarrow \frac{v}{R} = \frac{|q|B}{m}$

$\Rightarrow \boxed{R = \frac{m v_s}{|q| B}}$ avec $q = e \Rightarrow R = \frac{m v_s}{eB}$

avec $v_s = \sqrt{\frac{2eU_0}{m}} \Rightarrow \boxed{R = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mU_0}{e}} = \sqrt{\frac{2mU_0}{eB^2}}}$

3-a) Les Collecteurs :

(diamètre) $SC = 2R = 2\sqrt{\frac{2mU_0}{eB^2}}$ si $m \uparrow \rightarrow SC \uparrow$ $m_1 = 81u$, $m_2 = 79u$

$m_2 < m_1 \Rightarrow$ S_2 va être plus loin que C_2 que S_1 de C_1

b) Calculons la distance entre e_1 et e_2

$O_1O_2 = SO_2 - SO_1 = 2\left(\sqrt{\frac{2mU_0}{eB^2}}\right)\left(\sqrt{m_1} - \sqrt{m_2}\right)$

3-c) Composition du mélange d'ions :

si on a N

$$\text{Pourcentage}(1) = \frac{N_1}{N_1 + N_2} \times 100$$

N_1 nombre d'électrons

- Si on a Q avec Q_1 quantité d'électricité

$$P_{Z_n(1)} = \frac{Q_1}{Q_1 + Q_2 (q} \times 100$$

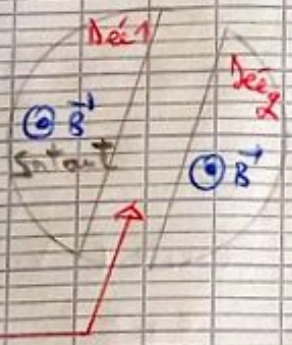
- Si on a : I (Intensité Courant) :

$$P_{Z_n(1)} = \frac{I_1}{I_1 + I_2} \times 100$$

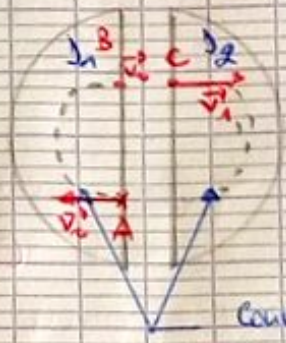
Seule des Réactions : $Q = He$ et $Q = It$

B) Cyclotron :

Un cyclotron : est un accélérateur de particules qui leurs permet d'acquérir une certaine vitesse avant d'aller frapper une cible (voir schéma app ③).



$\vec{E}$ est variable qui peut changer de sens)



V_0 = vitesse

Constitué de 2 dées où règne un $\vec{B}$ uniforme (le même dans le même sens aussi)

- Si une particule de masse m et de charge q. entre en A dans le dée d_1 avec une vitesse V_0 (qui peut être négligée) elle décrit une demi-cercle dans ce dée de rayon R_0

$$R_0 = \frac{m V_0}{|q| B}$$

- La durée t_0 de parcours pour chaque 1/2 tour est la même dans les 2 dées.

$$t_0 = \frac{d_0}{V_0} = \frac{\text{demi périmètre du cercle}}{V_0} = \frac{\pi R}{V_0} = \frac{\pi m}{|q| B}$$

- Arrivée en B la particule doit entrer dans l'espace compris entre les 2 dées où règne le champ électrique $\vec{E}$ (variable) qui va changer de sens. (il change de signe)

APPLICATION 3: CYCLOTRON

Soit un cyclotron à fréquence fixe N. C'est un accélérateur de particules constitué de deux demi-cylindres conducteurs creux D_1 et D_2 appelés «dees», séparés par un intervalle étroit. A l'intérieur des deux «dees» D_1 et D_2, règne un champ magnétique uniforme $\vec{B}$. Une tension U est maintenue entre les deux «dees». Cette tension change de signe périodiquement.

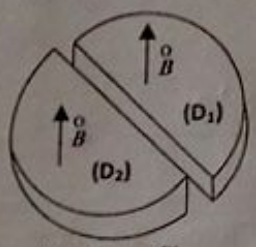
Des protons sont lancés à partir d'un point O dans la région D_1 avec un vecteur vitesse $\overrightarrow{V_0}$ négligeable.

1/ Quel doit être alors le signe de la tension U_{PQ} pour accélérer les protons ? Avec quelle vitesse V_1 pénètrent-ils dans le «dee» D_2 ?

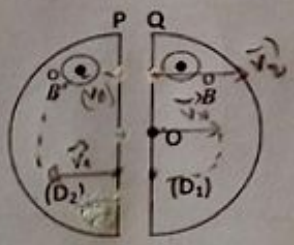
2/ Exprimer le rayon R_1 de la trajectoire des protons dans le «dee» D_2, ainsi que la durée du trajet effectué.

3/ Quel est le signe de la tension U_{PQ} lorsque les protons quittent le «dee» D_2 en traversant la paroi PQ ? Calculer la période T et la fréquence N de la tension U, en négligeant la durée de transfert dans l'intervalle entre les deux «dees».

4/ Soit R_0 le rayon des «dees». Donner les expressions de la vitesse et de l'énergie cinétique maximales acquises par les protons.



Vue de profil



Vue de dessus

Solution :

Elle entre en D_2 en C avec une vitesse ($V_1 > V_0$) en décrivant un 1/2 cercle de rayon $R_1 > R_0$ et la durée $T_1 > T_0$ pour être de nouveau accélérée à la sortie S vers G et ainsi de suite.

– La tension appliquée entre les 2 dees change de signe après chaque demi-tour dans un dee.

Elle a donc périodique de demi-période

$$T_{1/2} = t = \frac{\pi m}{|q| B}$$

$$T = 2 \cdot T_{1/2} = \frac{2\pi m}{|q| B}$$

– Après n tours la particule arrive à la périphérique avec sa vitesse maximale ($V_{max} = V_m$)

$$\Delta E_c = |q| U \quad \text{– pour 1/2 tour}$$

$$\Delta E_c = 2|q| U_{max} \quad \text{– pour 1 tour}$$

$$\Delta E_{c\,\text{totale}} = 2n\,|q|\,U \quad \text{pour} \quad n \text{ tours}$$

$$n = \frac{\Delta E_{c\,\text{totale}}}{2|q|U} = \frac{\Delta E_c\,(\text{totale})}{\Delta E_c\,(1\,\text{tour})} = \frac{\frac{1}{2}mV_{max}^2 - \frac{1}{2}mV_i^2}{}$$

Solution de l'application 3 :

1/ Pour accélérer les protons de D_1 vers D_2 il faut que $P^{\oplus}$ et $Q^{\oplus}$: $V_P < V_Q$

$$U_{PQ} = V_P - V_Q < 0$$

$$\frac{1}{2}mV_1^2 - 0 = qU_{QP} \quad \text{avec} \quad U_{QP} > 0 \quad \text{car} \quad q = e > 0$$

(initial - finale)

$$V_1 = \frac{2eU_{QP}}{m}$$

2/ Exprimons le rayon R_1 :

$\vec{F}_m = m\vec{a}$ or F est centripète donc $\vec{a} = \vec{a}_N$

$\Rightarrow$ alors $eV_1B = m\frac{V_1^2}{R_1} \Rightarrow$ $R_1 = \frac{mV_1}{eB}$

- Calculons la durée du trajet effectué :

t et $t = \frac{d_1}{V_1} = \frac{1/2\ P_{ex(cercle)}}{V_1} = \frac{\pi R_1}{V_1} = \frac{\pi \times mV_1}{eB \times V_1} = \frac{\pi m}{eB}$

$$t = \frac{\pi m}{eB}$$

Autrement :

$$t = \frac{T}{2} = \frac{2\pi}{2V_1} = \frac{\pi R_1}{V_1} = \frac{\pi}{V_1} \times \frac{mV_1}{eB} = \frac{\pi m}{eB}$$

3/ Pour l'accélérer de D_2 à D_1, $\vec{E}$ change de sens donc U_{PQ} change de signe donc $U_{PQ} > 0$.

Autrement : $Q^{(-)}$ et $P^{(+)}$: $V_P > V_Q$

$U_{PQ} = V_P - V_Q > 0$

Calculons la période $T = \Delta t \rightarrow \boxed{T = \frac{2\pi m}{eB}}$ et $\boxed{\nu = \frac{1}{T} = \frac{eB}{2\pi m}}$

4/ Si $R_1 = R_0 = R_{max} \Rightarrow V_1 = V_{max}$

$R_0 = \frac{m V_{max}}{eB} \Rightarrow \boxed{V_{max} = \frac{eBR_0}{m}}$

$E_{c\,max} = \frac{1}{2} m V_{max}^2 = \frac{e^2 B^2 R_0^2}{2m}$

$$\boxed{E_{c\,max} = \frac{e^2 B^2 R_0^2}{2m}}$$

- Calculons le nombre de tours :

$n = \frac{\Delta E_{totale}}{\Delta E_c(1\,tour)}$ or $\Delta E_{c\,totale} = E_{cf} - E_{ci} = E_{cf} = E_{c\,max}$

$\Delta E_c(totale) = E_{c(max)} = \frac{e^2 B^2 R_0^2}{2m}$

$\Delta E_{c\,1/2\,tour} = |q|U = eU$; $\Delta E_{c\,1\,tour} = 2eU$

$$\boxed{n = \frac{e^2 B R_0^2}{2m \times 2eU} = \frac{e B^2 \times R_0^2}{4mU}} = 30 \text{ tours}$$

donnée :

4/ Filtre de Vitesse :

Filtre de vitesse : il est constitué de 3 chambres présentées comme suit :

- chambre d'ionisation : dans cette chambre l'atome s'ionise (donne un ou deux ions)
- chambre d'accélération : les ions isotopes y pénètre sans vitesse pour subir une accélération leur permettant d'acquérir une vitesse v à la sortie
- Chambre de séparation : Dans cette chambre règne un champs

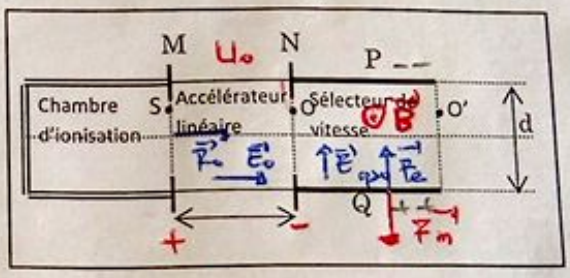
magnétique $\vec{B}$ et un champ électrique $\vec{E}$. Seules les ions ayant une vitesse $\vec{V}$ tel que $\vec{F_e} + \vec{F_m} = \vec{0}$ pourront traverser et sont dévié (le mouvement est rectiligne uniforme)

avec $\vec{F_e} = -\vec{F_m} \Rightarrow F_e = F_m$

$|q|E = |q|VB \Rightarrow$ $V = \frac{E}{B}$ constante. valeur de la vitesse

APPLICATION 4 : FILTRE DE VITESSE

Une chambre d'ionisation produit des ions mono ionisés d'hélium $^3_2He^+$; $^4_2He^+$; $^6_2He^+$ de masses respectives m_1, m_2, m_3. Leur poids sont négligeables devant les forces électromagnétiques qu'ils subissent. Ils pénètrent en S sans vitesse initiale, dans un accélérateur linéaire où ils sont soumis à l'action d'un champ électrique uniforme $\vec{E}_0$ créé par une différence de potentiel $U_0 = V_M - V_N$.



On désignera par $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$, $\vec{V}_3$ les vecteurs vitesse en O respectivement des ions $^3_2He^+$; $^4_2He^+$; $^6_2He^+$. On notera e la charge électrique élémentaire.

1. Déterminer le signe de U_0 et représenter le champ électrique $\vec{E}_0$ dans l'accélérateur. Exprimer l'accélération d'un ion $^4_2He^+$ en fonction de U_0, d_0, e et m_2 ; préciser la nature du mouvement.
2. En O, à la sortie de l'accélérateur, montrer que $m_1V_1^2 = m_2V_2^2 = m_3V_3^2$.
3. Les ions pénètrent ensuite dans un sélecteur de vitesse limité par les plaques P et Q. Ils sont alors soumis à l'action simultanée de deux champs : champ électrique uniforme $\vec{E}$ créé par une d.d.p. positive $U = V_Q - V_P$ et un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ perpendiculaire à $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$, $\vec{V}_3$ et $\vec{E}$. Représenter le champ magnétique $\vec{B}$ pour que la force électrique et la force magnétique aient même direction mais des sens contraires. On règle la valeur de U de façon que le mouvement des ions $^4_2He^+$ soit rectiligne uniforme de trajectoire OO'. Exprimer U en fonction de B, V_2 et d.
4. Comment seront déviés les ions $^3_2He^+$ et $^6_2He^+$? On se contentera de donner l'allure des trajectoires sans préciser leur nature et sans faire de calcul.

1) Les ions H_2^+ sont accélérés de M → vers N

donc $M^\oplus$ et $N^\ominus$: $V_M > V_N$

$U_0 = V_M - V_N > 0$

Exprimons l'accélération de $^4_2He^+$ ($F_0 \ggg P$)

TCI : $\vec{F_0} = m\vec{a_x}$ avec $F_0 = |q|E = qE$

$m\vec{a_2} = q\vec{E} \Rightarrow \vec{a_2} = \frac{q}{m}\vec{E}$ avec $\begin{cases} \vec{a} = a_x\vec{i} \\ \vec{E} = E_0\vec{i} \end{cases}$

$(\vec{a}$ et $\vec{E})$ ont même sens.

$a_x = \frac{q}{m}E$ or $E_0 = \frac{U_0}{d_0}$

$$a_x = \frac{eU_0}{md_0}$$

2/ TEC : $E_c(0) - E_c(S) = qU_{S0}$

$S \to 0$

$\frac{1}{2} m V_0^2 = eU_0 \Rightarrow \boxed{mV_0^2 = 2eU_0}$ (1)

- Pour $^3He^+$ $(m = m_1 ; q = e , V_0 = V_1)$

$\boxed{m_1 V_1^2 = 2eU_0}$ (2)

- Pour $^4He^+$ $(m = m_2 ; q = e , V_0 = V_2)$

$\boxed{m_2 V_2^2 = 2eU_0}$ (3)

- Pour $^6He^+$ $(m = m_3 \; q = e , V_0 = V_3) \Rightarrow \boxed{m_3 V_3^2 = 2eU_0}$ (3)

D'après (1), (2) et (3) on a :

$\boxed{m_1 V_1^2 = m_2 V_2^2 = m_3 V_3^2}$ (4)

3-1/ $V_a - V_p > 0 \Leftrightarrow V_a > V_p$.

Représentons le champs magnétique $\vec{B}$ $\vec{R}$ et sortant.

3-2/ Expression de U en fonction de B, V_2 et d (caractéristiques)

On a $\vec{F_e} + \vec{F_m} = 0 \Rightarrow \vec{F_e} = -\vec{F_m} \Rightarrow F_e = F_m$

avec $F_e = eE$ et $F_m = eBV_2$ (B et V_2 sont perpendiculaires)

$eE = eBV_2 \Rightarrow E = BV_2$ avec $U = Ed$; $E = \frac{U}{d}$

$\frac{U}{d} = BV_2 \Rightarrow \boxed{U = BV_2 d}$

4/ Comment varient deux ions $^3_2He^+$ et $^6_2He^+$

- $^3_2He^+$ $(m = m_1 = 3u, q = 2e)$

$\vec{F_{e_1}}$ et $\vec{F_{m_1}}$

$\begin{cases} F_{e_1} = eE = e\frac{U}{d} = eV_2 B \\ F_{m_1} = eV_1 B = eV_1 B \end{cases}$

D'après (4) $V_1 = V_2 \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$ avec $\begin{cases} m_1 = 3u \\ m_2 = 4u \end{cases} \Rightarrow m_2 > m_1$

$\Rightarrow \frac{m_2}{m_1} > 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} > 1 \Leftrightarrow V_2 \times \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} > V_2$

$V_1 > V_2$ $\Rightarrow F_{m_1} > F_{e_1}$ d'où l'ion $^3He^+$ dévie dans le sens de $\vec{F_m}$ c-à-d vers (G)

- Pour l'ion (3) $^6He^+$ $m_3 = 6u$, $q = e$, BF $\vec{F_{e_3}}$ et $\vec{F_{m_3}}$

$$\begin{cases} F_{e_3} = eE = e\frac{U}{d} = eV_2B \\ F_{m_3} = eV_3B = eV_3B \end{cases}$$ or

D'après (II) on a : $V_3 = V_2\sqrt{\frac{m_2}{m_3}}$

$m_2 = 4u$, $m_3 = 6u$ $\Rightarrow m_2 < m_3 \Rightarrow \frac{m_2}{m_3} < 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{m_2}{m_3}} < 1$

$\Leftrightarrow V_2\sqrt{\frac{m_2}{m_3}} < V_2$ avec $V_2\sqrt{\frac{m_2}{m_3}} = V_3$

$V_3 < V_2$ $\Rightarrow F_{m_3} < F_{e_3}$ d'où l'ion $^6He^+$ dévie dans le sens de $\vec{F_{e_3}}$ c'est à dire vers P

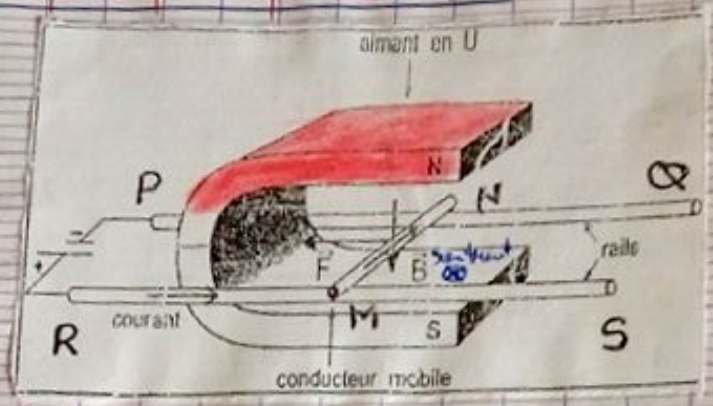
P: 7 : La loi de Laplace

I/ Action d'un champ magnétique Uniforme sur un courant rectiligne : Force magnétique de Laplace :

I-1/ Mise en évidence expérimentale :

1-1/ Expérience des rails de Laplace :

a/ Dispositif expérimental :

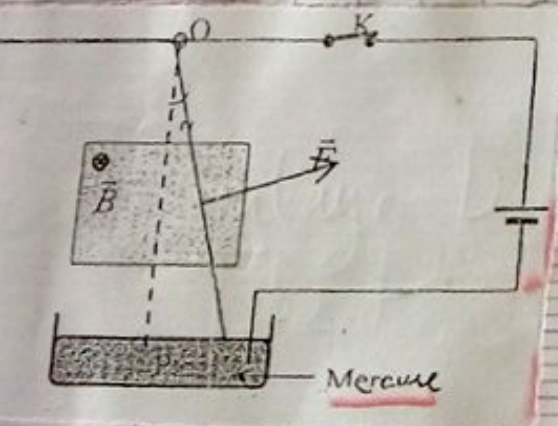


b/ Manipulations

- Si $I = 0$ MN (tige) est immobile
- Si $I \neq 0$; MN se met en mouvement dans le sens qui dépend de I et de $\vec{B}$.

1-2/ Expérience des conducteurs pendule

a/ Dispositif expérimental



- La cuve de mercure permet de fermer le circuit
- Si $I = 0$ la tige (OP) est sur la verticale
- Si $I \neq 0$ la tige (OP) dévie d'un angle α par rapport à la verticale dans le sens qui dépend de I et de $\vec{B}$

1-3/ Interprétation des expériences

- Conclusion : un conducteur parcouru par un courant I placé dans un champ magnétique $\vec{B}$ est soumis à une force $\vec{F}$ appelée Force de Laplace.

II/ Expression de la force de Laplace :

a/ Enoncé : tout conducteur de longueur (ℓ) parcouru par un courant d'intensité I placé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ est soumis à une force électro-magnétique dite Force de Laplace d'expression :

$$\vec{F} = I\vec{\ell} \wedge \vec{B}$$

b/ Caractéristiques de la force de Laplace :

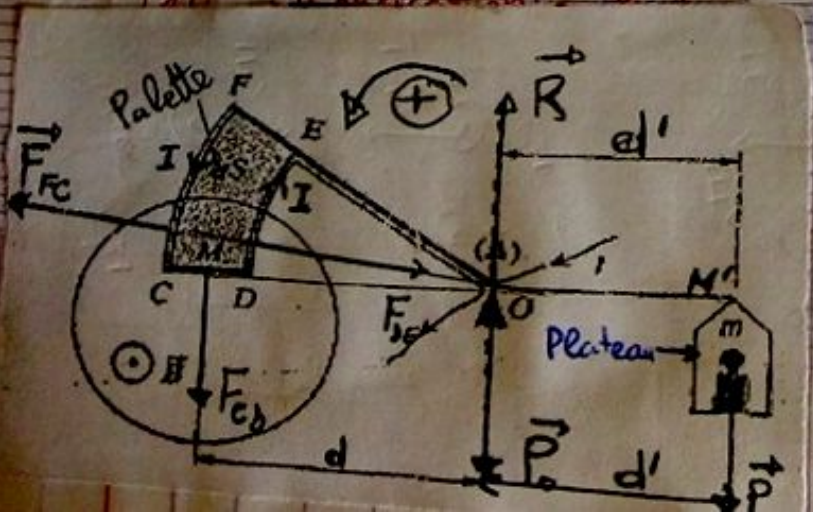
- direction : $\perp$ au plan formé par $\vec{\ell}$ et $\vec{B}$
- sens : tel que la triade ~~$\vec{\ell}\vec{B}\vec{F}$~~ $(\vec{\ell}, \vec{B}, \vec{F})$ soit directe ou celui indiqué par la pointe de la main droite posée sur le conducteur de sorte les autres doigts indique le sens de I et la paume orienté dans le sens de $\vec{B}$
- point d'application : milieu de la portion du conducteur parcouru par le courant
- Norme :

$$F = I\ell B \sin(\vec{\ell}, \vec{B})$$

(N) (Amp) (m) (T) (degré)

III/ Applications Pratiques

a/ Balance de Cotton



- si I et m tout nuls la balance est en équilibre (CS) étant dans le prolongement de $(M'O)$

- si $I \neq 0$ la balance sera déséquilibré par le fait que la palette descend pour rétablir l'équilibre. On dépose sur le plateau des masses marquées jusqu'à ce (CS) revienne au niveau (OM'). La condition d'équilibre permet alors de déterminer l'intensité de B.

Système étudié :

les forces : $\vec{P}$, $\vec{R}$, $\vec{P'}$, $\vec{F}_{es}$, $\vec{F}_{Fc}$ et $\vec{F}_{DE}$

condition d'équilibres : $\mathcal{M}(\vec{P}/\Delta) + \mathcal{M}(\vec{R}/\Delta) + \mathcal{M}(\vec{P_0}/\Delta) + \mathcal{M}(F_{es/s}) + \mathcal{M}(F_{Fc/s}) + \mathcal{M}(\vec{F}_{DE}) = 0$

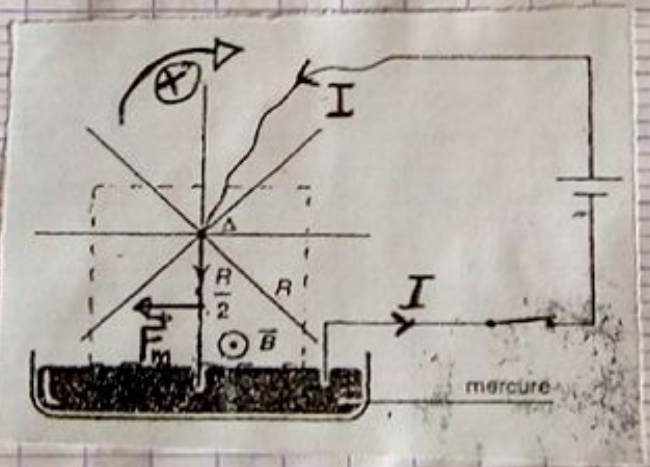
$-mgd' + F_{es}\, d = 0$ or $F_{es} = IeB$ avec $e = CS$.

$mgd' = IeBd$ généralement $d = d'$

$$\Rightarrow \boxed{B = \frac{mg}{Ie}}$$

NB: la balance de Cotton permet de déterminer l'intensité du champs $\vec{B}$

2/ Roue de Barlow



En circuit ouvert ($I = 0$) la roue demeure immobile.

- lorsqu'on ferme l'interrupteur, on observe un mouvement de rotation de la roue dans un sens bien déterminé.

Pour ceux qui s'intéresse à la puissance de la roue qui constitue un moteur électrique. soit ω la vitesse angulaire en rad/s de rotation de la roue.

$$\mathcal{P}_{(roue)} = \mathcal{P}(\vec{F}_{Fm}) = \mathcal{M}(F_{m/\Delta}) \cdot \omega$$

or $\mathcal{M}(F_{m/\Delta}) = F_m \cdot d = -eBd$ (loi d'action) avec $e = 2$ (sens I est injecté au centre (A)) et $d = \frac{R}{2}$

$$= \frac{-R^2 B}{2}$$

$$\mathcal{P}_{(roue)} = \frac{I R^2 B}{2} \omega$$

avec $\omega = 2\pi N$

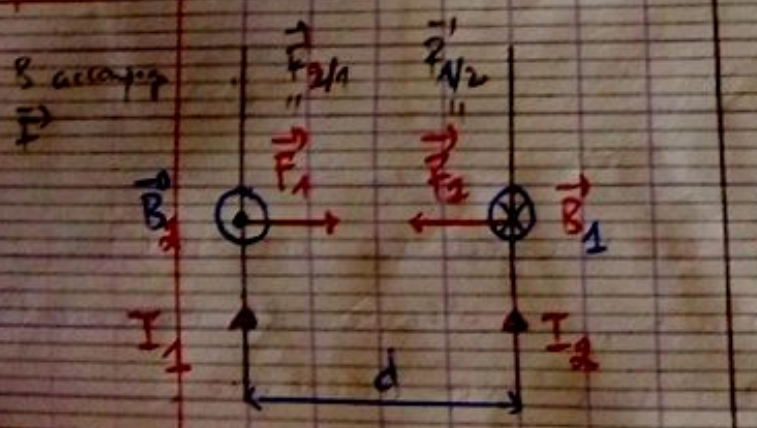
N : fréquence

NB: la puissance de la roue demeure très faible donc la roue de Barlow n'est pas un bon moteur.

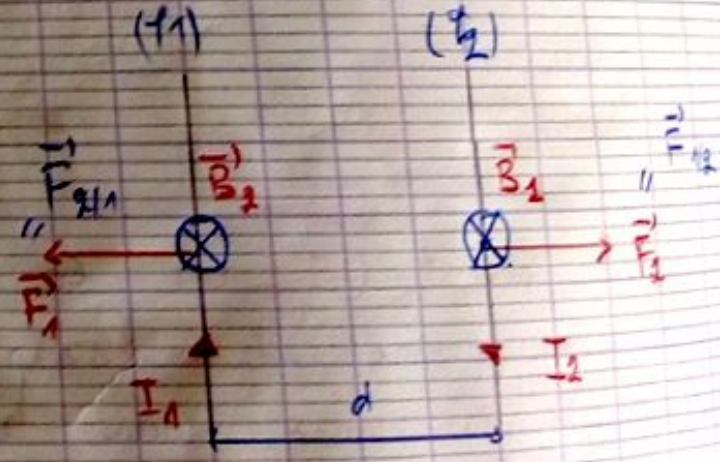
3/ Action d'un courant sur un courant : définition légale ampère

La dispositif expérience : le dispositif est constitué de deux fils conducteurs verticaux placés à une distance d l'un de l'autre et pouvant être parcourus par des courants électriques de même sens et de sens contraire.

L'expérience montre que si les courant sont de même sens les fils s'attirent et s'ils sont de sens contraire les fils se repoussent



Vue de face



Interprétations :

- Le courant I_1 crée en tout point du conducteur (P_2) un champ $\vec{B}_1$. $\vec{B}_1$ exerce en tout point de ce conducteur une force de Laplace une force $\vec{F}_2$: $\vec{F}_2 = I_2 \vec{\ell}_2 \wedge \vec{B}_1$
- Le courant I_2 crée en tout point du conducteur (P_1) un champ $\vec{B}_2$. $\vec{B}_2$ exerce en tout point de ce conducteur une force de Laplace une force $\vec{F}_1$: $\vec{F}_1 = I_1 \vec{\ell}_1 \wedge \vec{B}_2$

$$F_1 = I_1 \ell_1 B_2 = I_1 \ell_1 \times \frac{2.10^{-7} I_2}{d}$$

$$F_2 = I_2 \ell_2 B_1 = I_2 \ell_2 \times \frac{2.10^{-7} I_1}{d}$$

* Si $\ell_1 = \ell_2 = \ell$ on a : $\boxed{F_1 = F_2 = 2.10^{-7} I_1 I_2 \times \frac{\ell}{d}}$

$$\begin{cases} \ell = d \\ I_1 = I_2 = 1\,A \end{cases} \Rightarrow \boxed{F_1 = F_2 = 2.10^{-7}\ N}$$

L'ampère est donc défini comme étant l'intensité commune de deux courants électriques parcourant deux fils conducteurs de longueur ℓ chacun placé à une distance $d = \ell$ l'un de l'autre et exerçant entre eux des forces attractives et répulsives d'intensité égale 2.10^{-7} N

Ph : S

Induction magnétique - Etude du dipôle (R, L)

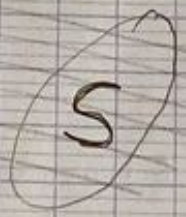
A/ Introduction magnétique

I/ Etude qualitative de l'induction magnétique

I-1/ Notion de flux magnétique :

1/ Aspect du flux magnétique :

On considérons un circuit fermé géométriquement situé dans un champs magnétique uniforme $\vec{B}$, Nous dirons que la surface (S) du circuit est traversée par un flux magnétique.



ligne de champ

2/ Définition :

a/ Vecteur surface (S) $\vec{S} = S\vec{n}$: une norme = aire du circuit fermé en m^2 et défini comme suit :

- une direction ⊥ au plan du circuit
- un sens donné par la règle de la main droite (on empogne le circuit fermé de sorte que les 4 doigt indique le sens d'orientation arbitraire du contours du circuit, et le pousse écarté indique le sens de $\vec{S}$ (orienté de la face Sud → Nord)

b/ Flux magnétique (ϕ) à travers une spire :

ϕ est défini :

$$\phi = \frac{1}{\text{spire}} \vec{B} \cdot \vec{S} = B \times S \cos(\vec{B}, \vec{S})$$

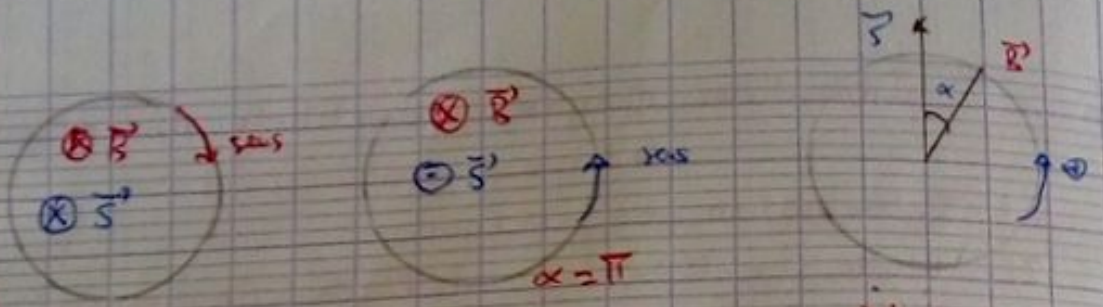
Weber / Wb ; B en T ; S en m^2

Pour un circuit à N spires on a :

$$\phi = N\vec{B} \cdot \vec{S} = NBS\cos(\vec{B}, \vec{S})$$

Webers / Wb

Exemples :

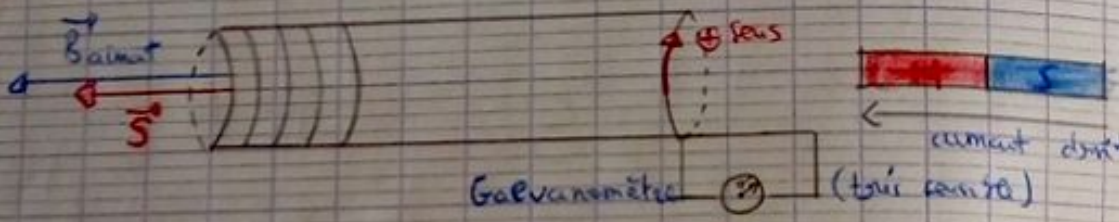


2/ Phénomène d'induction électromagnétique :

2-1/ Expérience de mise en évidence :

a) Expérience du déplacement d'un aimant à travers une bobine.

α) Dispositif :



Le dispositif ne renferme pas de générateur : on a un circuit conducteur mais pas électrique (pas de générateur).

B/ Manipulations :

- Lorsqu'on approche l'aimant droit de la bobine on observe l'aiguille du Galvanomètre dévie dans un sens puis revient au 0 lorsqu'on immobilise l'aimant.
- Lorsqu'on éloigne l'aimant de la bobine, on observe que l'aiguille dévie en sens inverse puis revient au 0 lorsqu'on immobilise l'aimant.

8) Interprétation :

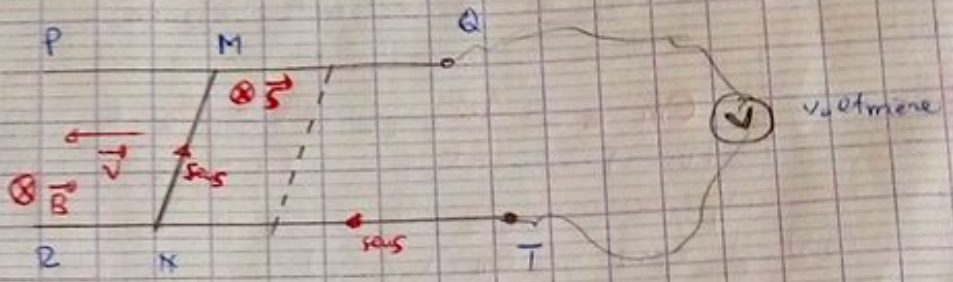
La déviation de l'aiguille du Galvanomètre met en évidence la production du courant électrique qui n'était pas fournis par un générateur électrique : on dit qu'il s'est produit une phase d'induction magnétique lors du déplacement de l'aimant à travers la bobine.

- Le courant (i) qui traverse la bobine est appelé courant
- La bobine siège de ce courant induit est appelé

- l'aimant qui crée le champs magnétique est appelé inducteur

B/ Expériences des rails de Laplace :

a/ Dispositif :



(MN) est la barre

(PQ) et (RT) les rails de Laplace

- Si la tige est mobile l'aiguille dévie
- Si la tige est immobile l'aiguille revient au 0

β/ Interprétation

La déviation de l'aiguille du voltmètre mis en évidence une tension électrique sans qu'il y est courant électrique. Cette tension est appelé force électromotrice noté f.e.m en disant que le déplacement de la tige a produit une phénomène d'induction.

1-β-α/ Conclusion des expériences :

Les deux expériences ci-dessus dans lesquelles apparaissent un phénomène d'induction mettent en jeu une variation de flux magnétique mais pas variation de $\vec{B}$ ni pas variation de surface ($\vec{S}$) ni pas variation d'angle $(\vec{B}, \vec{S})$.

Donc toute variation de flux magnétique dans un circuit donne naissance à un phénomène d'induction électromagnétique qui se manifeste par :

- un courant induit si le circuit est conducteur
- existence d'une f.e.m induite si le circuit est fermé ou voltmètre ou oscilloscope

induit
induit ou
induit

II/ Etude quantitative du phénomène d'induction :

1. Expression de la f.e.m induite : Loi de Faraday

a) f.e.m moyenne : e_m

Je a déjà établit expérimentalement que la f.e.m moyenne et la variation de flux sont opposé.

Soit :

$$e_{m\,(Volt)} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{t_2 - t_1}$$

Φ (wb) ; t(s) ; e_m (Vol (V))

b) f.e.m instantanée (e)

$$e = \lim_{t_2 \to t_1} e_m = \lim_{\Delta t \to 0} -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{d}{dt}\Phi$$

Exemple : Expérience des rails de Laplace

$$\Phi = \vec{B}.\vec{S} = BS\cos 0 = BS$$

or $S = \ell x$ $\begin{cases} \ell = MH \\ x = \text{dpt de la tige} \end{cases}$

$$\Phi = B\ell x$$

$$e = -\frac{d}{dt}\Phi = -\frac{d}{dt}(B\ell x) = -B\ell\dot{x} = -B\ell v$$

$$e = -B\ell v$$

II-2/ Courant induit :

a) Intensité du courant induit : loi de Pouillet

Enoncé de la loi de Pouillet :

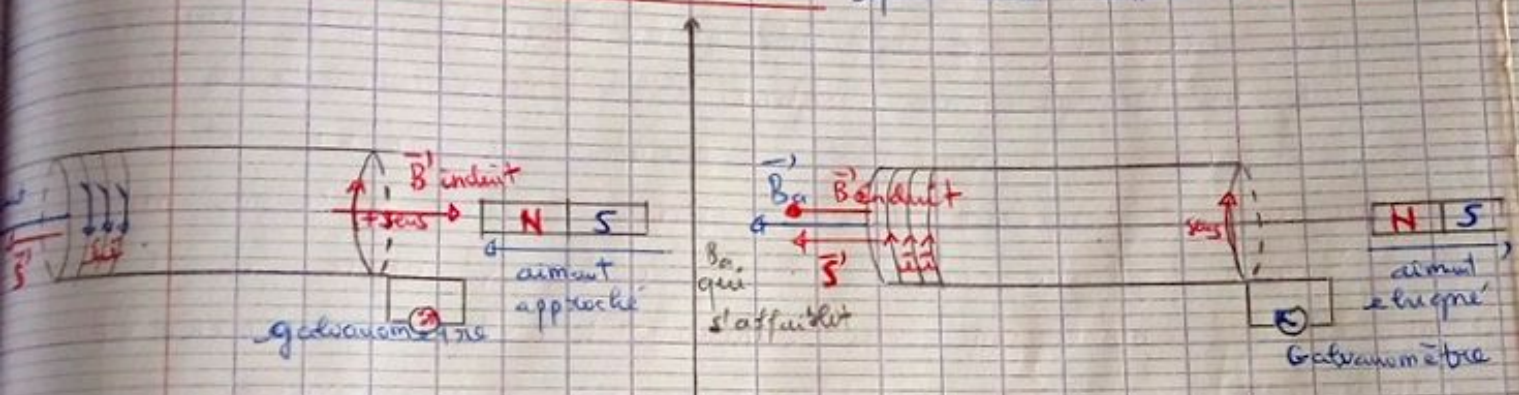
Dans un circuit fermé on a :

$$i = \frac{\sum f.e.m}{\sum \text{résistances}} \Rightarrow \boxed{i(t) = \frac{e}{R_{totale}} = -\frac{1}{R_{tot}} \times \frac{d\Phi}{dt}}$$

b) Sens du courant induit : loi de Lenz :

Enoncé :

Le sens du courant induit est tel que par ses effets il tend s'opposer à la cause qui lui donne naissance.



c) Quantité d'électricité induite : Q

$$i(t) = \frac{dq}{dt} \rightarrow dq = i(t)\,dt$$

$$dq = -\frac{1}{R_T} \times \frac{d\Phi}{dt} dt = -\frac{1}{R_T} \times d\Phi$$

$$\int_0^Q dq = -\frac{1}{R_T} \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi$$

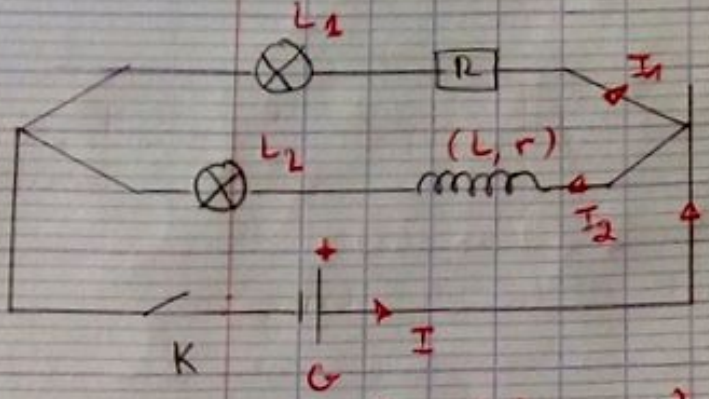
$$[q]_0^Q = -\frac{1}{R_T} [\Phi]_{\Phi_1}^{\Phi_2}$$

$$Q - 0 = -\frac{1}{R_T} (\Phi_2 - \Phi_1)$$

$$\boxed{Q = -\frac{\Delta\Phi}{R_T}} \quad \begin{matrix} (\text{Coulomb}) & (\text{Wb}) \\ & (\Omega) \end{matrix}$$

B/ Etude du dipôle (R, L) :

I/ Phénomène d'auto-induction :



L_1 et L_2 : lampe identique
- G : générateur de courant continu de f.e.m = E
- Bobine et conducteur ohmique de même résistance R = r

1) Résultats expérimentaux :

En fermant K, puis en l'ouvrant successivement on constate que chaque fois L_2 s'allume et s'éteint avec un retard.

- si on remplace la bobine par un conducteur ohmique L_1 et L_2 s'allume et s'éteignent en même et l'intensité du courant atteint instantanément sa valeur maximale.

La bobine placée dans la branche (2) s'oppose à l'établissement et à l'annulation du courant : c'est le phénomène d'auto-induction.

2/ Interprétations :

K fermé impliquée :

$$I \xrightarrow[\text{naissance}]{\text{donne}} \vec{B} \xrightarrow[\text{du flux}]{\text{naissance}} \Phi \xrightarrow[\text{naissance}]{\text{donne}} e \xrightarrow[\text{induit}]{\text{source d'un courant}} i,$$

En fermant alors la loi de Lenz (i) s'oppose au courant initiale (I)

3/ Les caractéristiques d'une bobine :

3-1/ Flux magnétique propre inductance

Une bobine est caractérisée par sa résistance interne (R) son inductance (L). Le flux propre (Φ_p) qui traverse

Bobine est proportionnelle à l'intensité du courant induit (i) qui la traverse :

même formule $\Phi = BS\cos(\vec{i},\vec{s})$

$$\Phi_p = L\,i$$

(Φ_p : weber ; L : (Henry) H ; i : Ampère)

- Déduisons l'inductance L pour N spires.

$$\Phi_p = NBS = Li \quad \text{or} \quad B = \frac{\mu_0 N i}{\ell}$$

$$\frac{\mu_0 N^2 i S}{\ell} = Li \Rightarrow \boxed{L = \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell}}$$

L : inductance ou auto-inductance.

3-2/ **f.e.m d'auto-induction : (e)**

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(Li) = -L\frac{di}{dt}$$

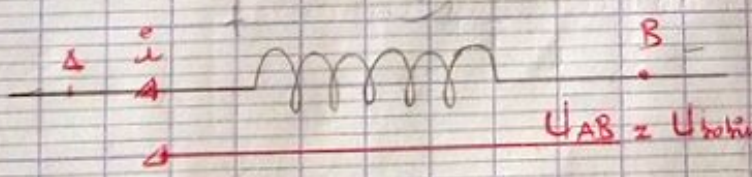
$$\boxed{e = -L\frac{di}{dt}}$$

II/ Etude du dipôle (R, L) :

1/ Tension aux bornes de la bobine

a) **Convention générateur :**

La convention est générateur si la flèche tension et le courant ont même sens.



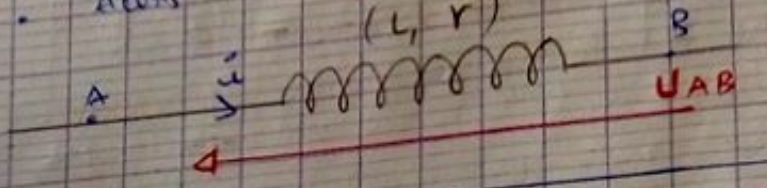
L'expression de la tension s'écrit donc :

$$\boxed{U_{AB} = U_b = e - ri = -L\frac{di}{dt} - ri}$$

dû au négatif

2/ Convention récepteur

La convention est récepteur si en fléchant tension et courant. Alors U_b s'écrit



$$U_{AB} = U_b = ri - e = ri + L\frac{di}{dt}$$

HB: - Si la bobine est une inductance pure alors $r = 0$:

$$U_{AB} = U_b = L\frac{di}{dt}$$

- En régime continue ou permanente $i = cte$ alors

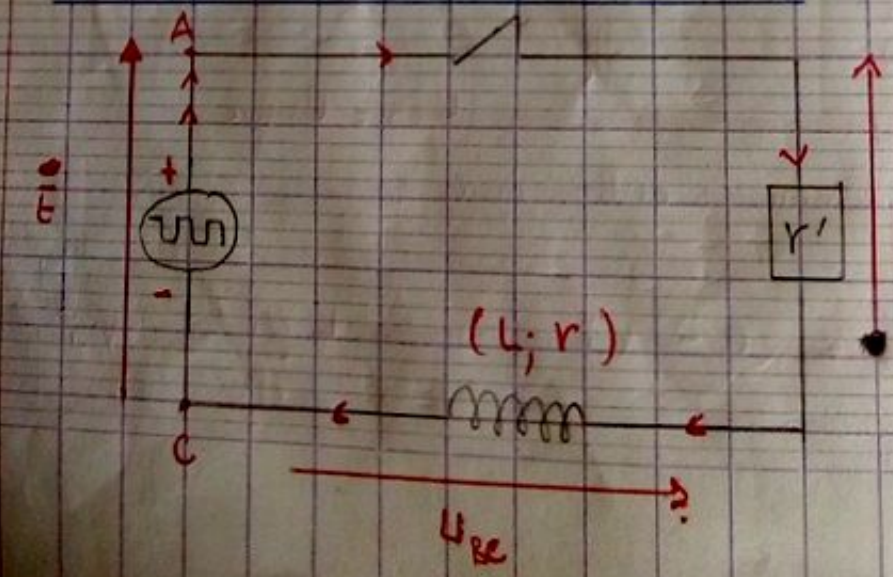
$$U_b = U_{AB} = ri \quad \text{(Resistor)}$$

alors la bobine se comporte comme un résistor (R)

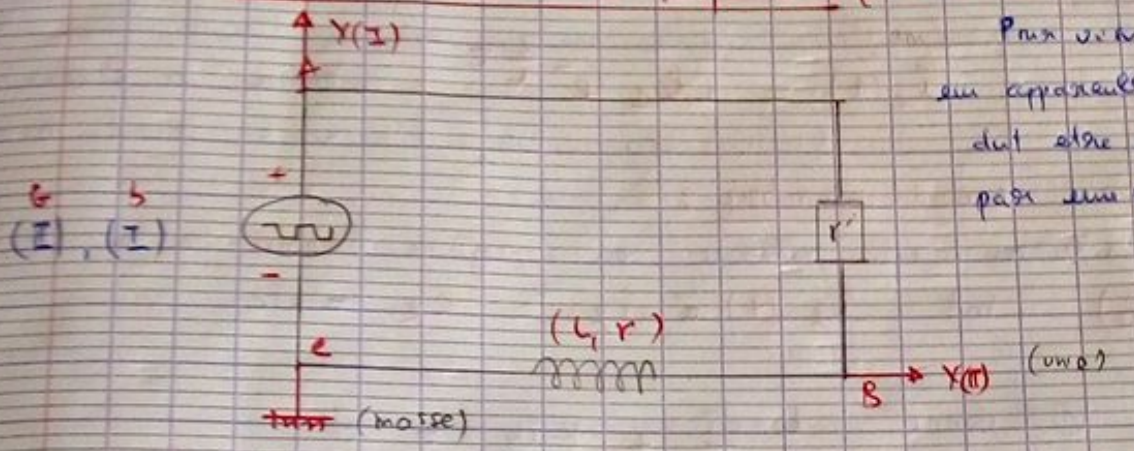
- Si $r = 0$ et $i = cte$ la bobine se comporte comme un fil (court - circuit).

II- 2/ Etablissement et annulation du courant dans un circuit (R, L)

2-1/ Etablissement du courant :



Visualisons la tension aux bornes du generateur et de la bobine sur les voies respectives I et II



Pour visualiser un appareil il doit être encadrer par une masse et une voie

Loi des mailles :

$$U_{AC} - U_{AB} - U_{BC} = 0$$

$$U_{AC} = U_{AB} + U_{BC}$$

$$E = r'i + L\frac{di}{dt} + ri$$

$$\boxed{L\frac{di}{dt} + (r + r')i = E}$$ pour $R = r + r'$

$$\boxed{E = L\frac{di}{dt} + Ri}$$

2-2/ Equation differentiee du dipole (R, L) pendant l'etablissement du courant :

a) Solution de l'equation differentielle :

* Sans second membre : ($R = r' + r$)

$$L\frac{di}{dt} + Ri = 0 \quad (\Rightarrow) \quad \frac{di}{i} = -\frac{R}{L}dt$$

$$\int \frac{di}{i} = -\frac{R}{L}\int dt \quad (\Rightarrow)$$

$$\ln i = -\frac{R}{L}t + cte$$

$$\ln i = -\frac{R}{L}t + c$$

$$i = e^{-\frac{R}{L}t} \times e^{c} \quad \text{posons} \quad e^{c} = k_1$$

$$\boxed{i_1(t) = k_1 e^{-\frac{R}{L}t}}$$ solution de l'équation du système sans second membre

* Avec second membre :

Cette solution est atteinte au régime permanente ($i = i_2$ et $\left(\frac{di}{dt} = 0\right)$, tel que $i_2(t) = i_2 = k_2 = cte$

① donne $L \frac{di}{dt} + R i_2 = E$

$\frac{di}{dt} = 0$

$$L \times 0 + R i_2 = E$$

$$\boxed{i_2 = \frac{E}{R}}$$

* Solution générale :

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t)$$

$$= k_1 e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R}$$

à $t = 0$ - Condition initiale :

à $t = 0$; $i = 0$

$$i(t=0) = k_1 e^{0} + \frac{E}{R} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{k_1 = -\frac{E}{R}}$$

$$\boxed{i(t) = -\frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R}}$$

$$\boxed{i(t) = +\frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)}$$

Posons $\tau = \frac{L}{R}$ et $I_{max} = \frac{E}{R} = U_{max}$ (max) ; tension

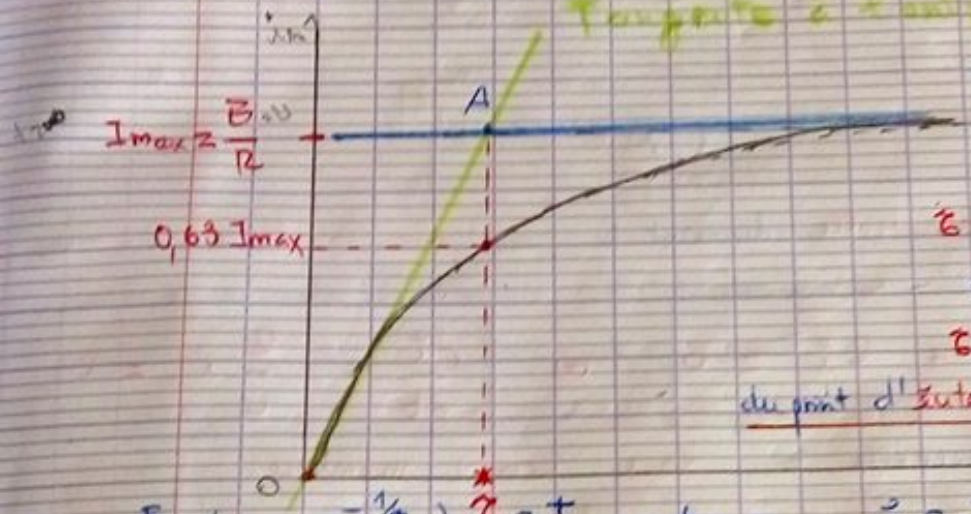
$U = RI$

$$i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{\frac{t}{\tau}}\right)$$

- τ : constante de temps du circuit (R, L) peut être déterminé graphiquement (en seconde).

- si $t = \tau$

$$\underset{t=\tau}{i(t)} = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-1}\right) = I_{max}\left(1 - e^{-1}\right) = 0{,}63\, I_{max}$$



τ : est l'abscisse du pt ayant pour ordonnée $i = 0{,}63 I_{max}$

τ : correspond aussi à l'abscisse du point d'intersection entre la tangente et AH($i = I$)

$$i = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}}\right) \quad \tau = t \quad ; \quad \text{si } t = 0 \quad i = I_{max}\left(1 - e^{0}\right) = 0$$

si $t \to \infty$; $i = I_{max}\left(1 - e^{-\infty}\right) = I_{max} = \frac{E}{R}$ ($e^{-\infty} = 0$)

5) Déterminer l'équation de la tangente à l'origine :

$i = at$ avec (a = pente)

$$a = \frac{di}{dt} = \frac{E}{R}\left(0 + \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$a = \frac{E}{R}\left(\frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

à l'origine $(t = 0)$: $a = \frac{E}{R}\left(\frac{1}{\tau}\right) = \frac{E}{R}\left(\frac{R}{L}\right) = \frac{E}{L}$

$$\boxed{a = \frac{E}{L}}$$

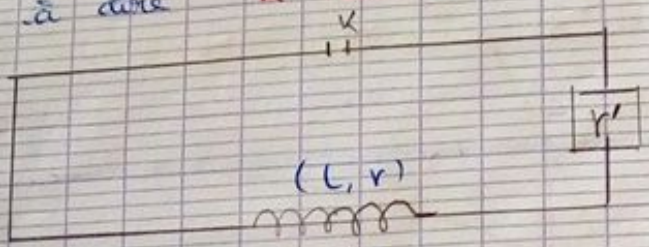
$$\boxed{i(t) = \frac{E}{L} t}$$ équation de la tangente à l'origine $i = 0{,}63 I_m$

Au point A : $y_{AH} = y_{T_0}$ $(t=0)$

$\frac{E}{R} = \frac{E}{L} t$ ⇔ $\frac{1}{R} = \frac{t}{L}$ ⇒ $\boxed{t = \frac{L}{R} = \tau}$

2-2/ Annulation du courant :

Lorsque l'on annule cet courant, le générateur délivre aussi tension ($E = 0$) c'est à dire K ouvert. Le circuit précédent devient



L'équation différentielle devient :

$$\boxed{L \frac{di}{dt} + R i = 0} \Leftrightarrow \boxed{\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = 0}$$

équation différentielle sans second membre

$$\boxed{i(t) = k_1 e^{-t/\tau}}$$

- Condition initiale :

A $t = 0$; $i = I_{max}$

$i(t=0) = k_1 e^0$

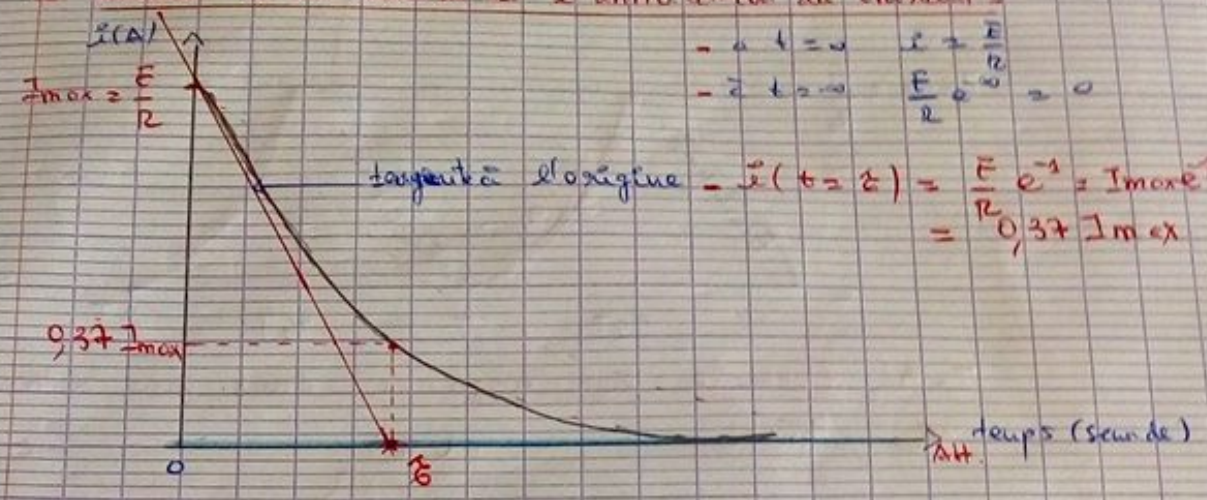
(2) $k_1 e^0 = I_{max} = \frac{E}{R}$ (tension du générateur / somme des résistances)

$$\boxed{k_1 = \frac{E}{R}}$$ ⇒ alors $$\boxed{i = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}}$$

avec $\begin{cases} \tau = \frac{L}{R} \\ R = \Sigma \text{ résistances} \end{cases}$

- allure de la courbe de l'annulation du courant :

- à $t = 0$ $\quad i = \frac{E}{R}$
- à $t = \infty$ $\quad \frac{E}{R} e^{-\infty} = 0$



- τ est l'abscisse du point ayant comme ordonnée $0,37\, I_{max}$
- τ correspond aussi à l'abscisse du pt d'intersection entre la tangente à la courbe à $t=0$ et l'axe des abscisses.

b) Détermination de l'équation de la tangente à l'origine :

$i = at + b$

$$a = \frac{di}{dt} = \frac{E}{R}\left(-\frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}\right)$$

$$= \frac{E}{R}\left(-\frac{R}{L} e^{-t/\tau}\right) = -\frac{E}{L} e^{-t/\tau}$$

$t = 0$

$$\boxed{a = -\frac{E}{L}}$$

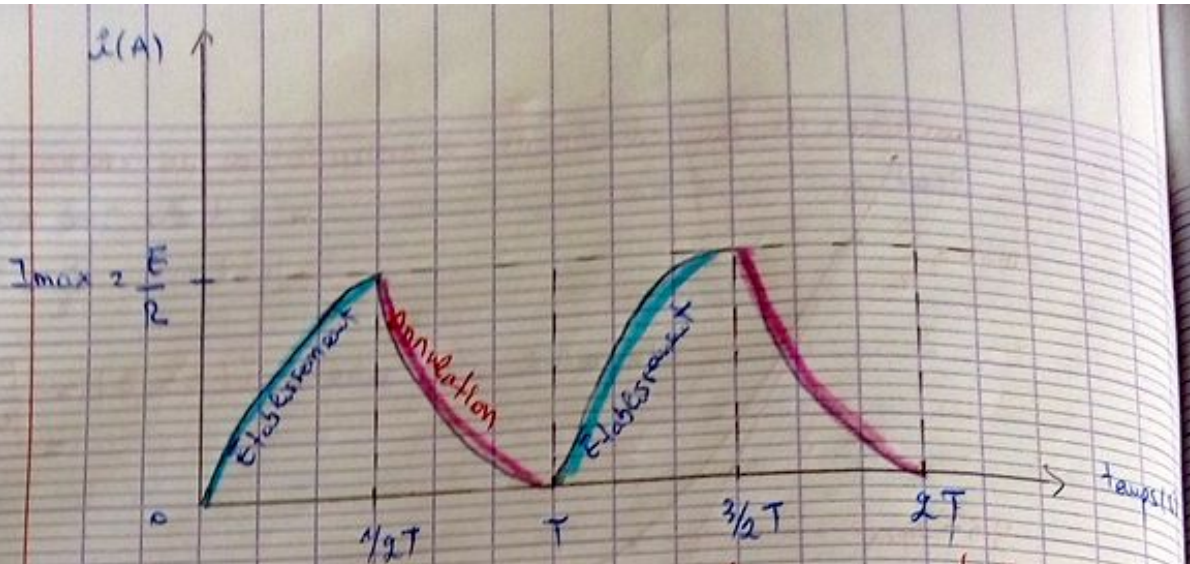
$$i(t) = -\frac{E}{L} t + b$$

A $t = 0$ (2) $\quad i = I_{max} = \frac{E}{R}$

$$I_{max} = -\frac{E}{L}(0) + b \Rightarrow b = I_{max} = \frac{E}{R} \qquad b = \frac{E}{R}$$

$$\boxed{i(t) = -\frac{E}{L} t + \frac{E}{R}}$$ équation de la tangente à l'origine.

- NB : Ces deux courbes peuvent être tracées ensemble.



I- 3/ Energie emmagasinée dans une bobine

(L, r)

$U_b = ri - e$

$$U_b = ri + L\frac{di}{dt}$$

a) Puissance électrique :

$$P = U_b i = ri^2 + Li\frac{di}{dt}$$

dérivée

$$P = ri^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right)$$ avec $\left(\frac{1}{2}Li^2\right)' = Li$

$P_j = ri^2$ = Puissance dissipée ou perdue par effet Joule

$$P_m = Li\frac{di}{dt} = -ei$$ puissance magnétique de la bobine

b) Energie emmagasinée dans la bobine

Pendant une durée dt la bobine reçoit l'énergie :

$$dE = Pdt$$

$$dE = ri^2 dt + d\left(\frac{1}{2}Li^2\right)$$

$$\int_0^E dE = r\int_0^t i^2 dt + \int d\left(\frac{1}{2}Li^2\right)$$

$$E - 0 = r i^2 (t - 0) + \frac{1}{2} L i^2$$

$$E = r i^2 t + \frac{1}{2} L i^2$$

$$P_{puissance} = \frac{E\ (Travail)}{t}$$

$$E = \underbrace{r i^2 t}_{\text{énergie emmagasinée}} + \underbrace{\frac{1}{2} L i^2}_{\text{Epûre}} + \underbrace{\text{Eem emmagasinée}}$$

- $E_j = r i^2 t$: énergie dissipée ou perdue par effet joule

- $E_e = \frac{1}{2} L i^2$ = énergie emmagasinée dans la bobine ou énergie magnétique.

Conclusion :

- Si le courant s'établit la bobine emmagasine de l'énergie

$$E = \underbrace{\frac{1}{2} L i^2}_{\text{emmagasi.}}$$

et cède en retard à l'établissement du courant, par auto-induction.

- S'il y a annulation, la bobine restitue l'énergie emmagasinée et cède en retard à l'annulation du courant.

EXERCICE D'APPLICATION:

On se propose d'étudier l'établissement du courant dans un dipôle série comportant une bobine d'inductance L = 0,5 H, de résistance interne r et un résistor de résistance R. Ce dipôle est soumis à un échelon de tension de valeur E délivrée par un générateur de tension idéal. Un oscilloscope à mémoire, permet de visualiser la tension aux bornes du générateur et du résistor.

A l'instant t = 0, on ferme l'interrupteur K, et on procède à l'enregistrement. On obtient l'oscillogramme représenté sur la figure 2.

1/ Reprendre le schéma de la figure 1 en indiquant, les branchements à réaliser pour visualiser les tensions aux bornes du générateur et du résistor sur les voies respectives (I) et (II) de l'oscilloscope?

2/ Quelle grandeur électrique peut-être déterminée à partir de la tension aux bornes du résistor ?

3/ a/ Expliquer le retard de l'établissement du courant dans le circuit.

b/ Nommer le phénomène qui est à l'origine de ce retard.

4/ Le circuit étudié peut être caractérisé par une constante de temps τ, qui permet d'évaluer la durée nécessaire à l'établissement du régime permanent dans ce circuit.

a/ Etablir l'équation différentielle qui régit l'intensité du courant i dans le circuit.

b/ Vérifier que $i(t) = \frac{E}{R+r}(1 - e^{-t/\tau})$ est une solution de cette équation différentielle, avec $\tau = \frac{L}{R+r}$.

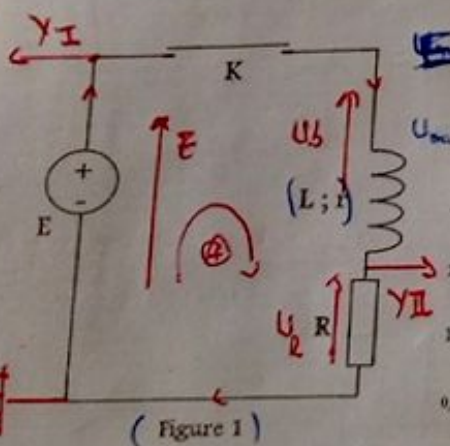
5/ a/ Quelle est l'expression I_0 de l'intensité du courant i lorsque le régime permanent est établi. En déduire que l'expression de la tension u_R aux bornes du résistor en régime permanent est $u_R = \frac{R}{R+r}E$.

b/ A partir du graphe de la figure 2, déterminer la valeur de la constante de temps τ.

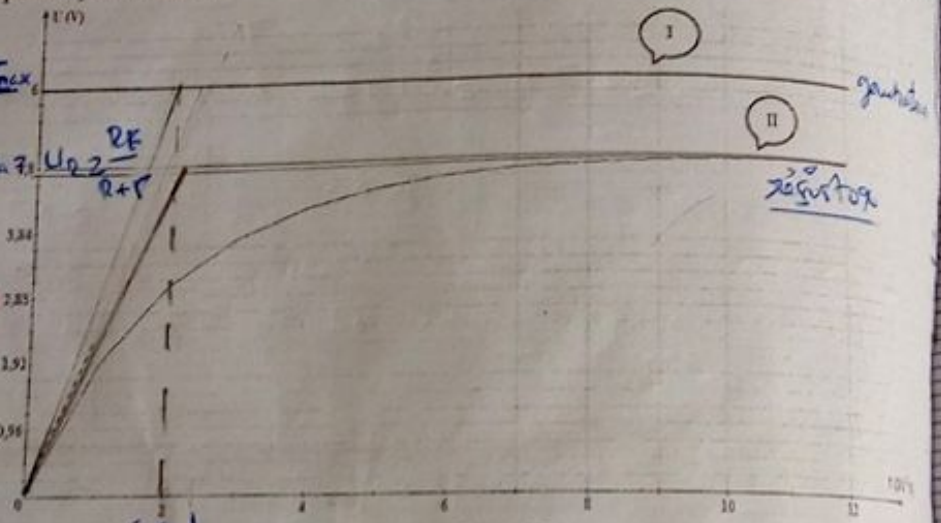
c/ Déduire des questions précédentes les valeurs de la résistance interne r de la bobine et la résistance R du résistor.

6/ Calculer la valeur de l'énergie magnétique E_B à la date $t = 2.10^{-2}$ s.

7/ Représenter l'allure de la courbe représentant les variations de la tension $u_B(t)$ aux bornes de la bobine. On précisera les coordonnées des points particuliers.



(Figure 1)



(2)

Figure 2

Solution :

2/ C'est l'intensité du courant (I)

3-a/ Explication du retard à l'établissement

C'est à cause de la présence de la bobine

3-b/ Nommons le phénomène.

Le phénomène qui est à l'origine du retard est l'auto-induction

4-a/ Etablissons l'équation différentielle qui régit

Loi des mailles : $U_G - U_b - U_R = 0$

$U_b + U_R = U_G$ (1) $L\frac{di}{dt} + ri + Ri = E$

$$\boxed{\frac{di}{dt} + \frac{(R+r)}{L}i = \frac{E}{L}} \quad (1)$$

5/ Vérifions que $i(t) = \frac{E}{R+r}(1 - e^{-t/\tau})$ avec $\tau = \frac{L}{R+r}$ est solution de l'équation

$$i = \frac{E}{R+r}(1 - e^{-t/\tau}) \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{E}{R+r}\left(0 + \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{di}{dt} = \frac{E}{R+r}\left(\frac{R+r}{L} e^{-t/\tau}\right) = \frac{E}{L} e^{-t/\tau}$$

$$\Leftrightarrow \text{(A)} \quad L \times \frac{E}{L} e^{-t/\tau} + (R+r) \times \frac{E}{R+r}(1 - e^{-t/\tau})$$

$$E e^{-t/\tau} + E - E e^{-t/\tau} = E \quad \text{(donc solution)}$$

5-a) En régime permanent on peut appliquer la loi de Pouillet :

$$I_0 = \frac{\sum e}{\sum \text{récept}} = \frac{E}{R+r}$$

ou bien :

En régime permanent $i = cte \Rightarrow I_0 = \frac{di}{dt} = 0$

(A) devient $L \times 0 + (R+r) I_0 = E$

$$\Leftrightarrow \boxed{I_0 = \frac{E}{R+r}}$$

- Déduisons en l'expression de U_R aux bornes du régime permanent est $U_R = \frac{R}{R+r} E$

$U_R = R I_0$ car RP $i = I_0$

$$\boxed{U_R = \frac{R}{R+r} E}$$

D'après la courbe $\boxed{\tau = 2.10^{-2}\ s}$

c/ Déduisons des questions précédentes, les valeurs de r et R :

On a $\tau = \frac{L}{R+r} = 2.10^{-2} \Rightarrow R+r = \frac{L}{2.10^{-2}} = \frac{0,5}{2.10^{-2}} = 25\ \Omega$

$$\boxed{R+r = 25\ \Omega}$$

$U_R = U_{max} = \frac{RE}{R+r} = 4,8$

$\Leftrightarrow \frac{RE}{25} = 4,8 \quad \Leftrightarrow R = \frac{4,8 \times 25}{E} = 20$

$\boxed{R = 20\ \Omega}$ et $\boxed{r = 5\ \Omega}$

6/ Calculer la valeur de l'énergie magnétique.

$E_B = \frac{1}{2} L i^2$ à $t = 6 = 2.10^{-2}$ seconde

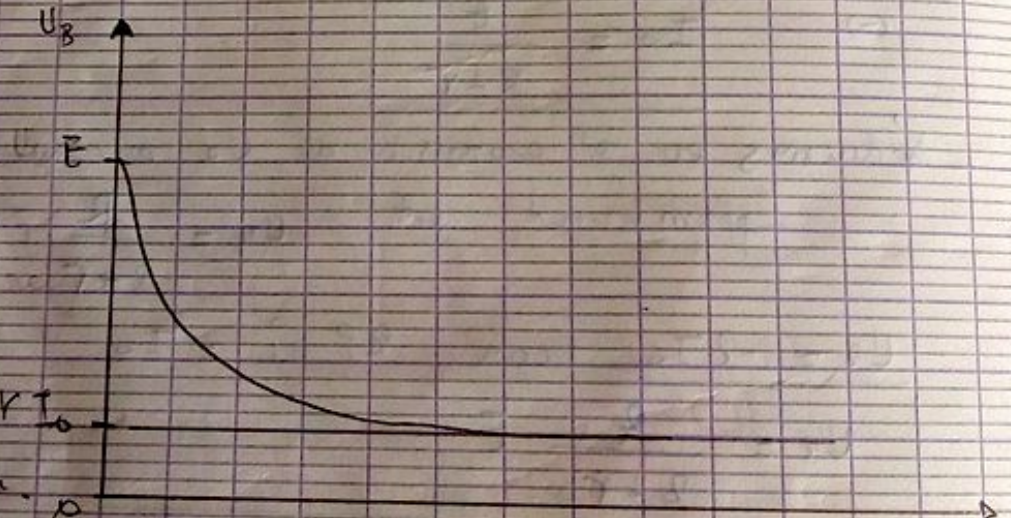
or à $t = 6$, $i = 96\%\ I_0$

avec $I_0 = \frac{E}{R+r} = \frac{6}{25} = 0,24\ A$

$E_B = \frac{1}{2}(0,5)(96 \times 0,24)^2 = 5,71.10^{-3}\ J$

$\boxed{E_B = 5,71.10^{-3}\ J}$

7) Représenter l'allure de la courbe représentant



La tension aux bornes du résistance (R)

- Si la bobine avait r I_0 aux bornes du bobine pure. la courbe tendrait vers 0.

Justification de l'allure de la courbe :

$U_B = L \frac{di}{dt} + r i$ avec $\frac{di}{dt} = \frac{E}{L} e^{-t/\tau}$

$U_B = E e^{-t/\tau} + r \times \frac{E}{R+r}(1 - e^{-t/\tau})$

$$= E e^{-t/\tau} + \frac{rE}{R+r} - \frac{rE}{R+r} e^{-t/\tau}$$

$$\boxed{U_B = E e^{-t/\tau}\left(1 - \frac{r}{R+r}\right) + \frac{rE}{R+r}}$$

à $t = 0$; $U_B = E\left(1 - \frac{r}{R+r}\right) + \frac{rE}{R+r} = E$

à $t = \infty$ $\quad U_B = \frac{rE}{R+r} = rI_0$, $\boxed{U_B = rI_0}$

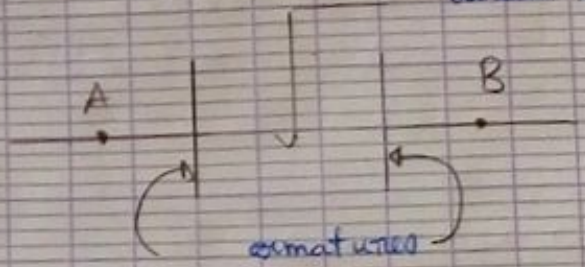
P: 9

Etude du dipôle (R, C)

I/ Généralité sur le condensateur :

1/ Définition :

Un condensateur est un dipôle constitué de deux conducteurs (armatures) a ses proches l'un de l'autre en influence mutuelle séparés par un isolant appelé diélectrique (air, papier, verre ...). Le symbole est :

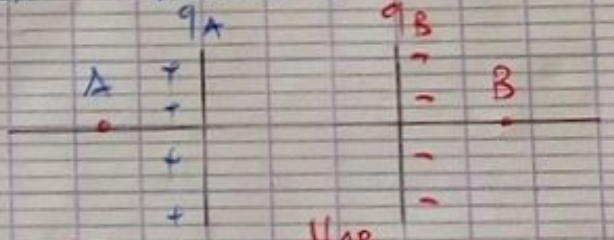


Il existe plusieurs types de condensateur dont le plus connu est le condensateur plan.

2/ Charge et capacité d'un condensateur :

2-1/ Charge d'un condensateur (q)

Soit le condensateur suivant :



$$q = |q_A| = |q_B|$$
(C)

2-2/ Capacité d'un condensateur (C)

C'est le coefficient de proportionalité entre la charge q et la tension U.

$$q = C\,U$$
(Coulomb) (C) (Volt (V))

C : constante positive qui s'exprime en Farad (F)

NB : Capacité d'un condensateur plan :

Je a sor deux conducteurs plans, parallèle de même surface distants de d

$$C = \varepsilon \frac{S}{d\,(m)}$$

- S : en m^2 surface de chaque armature
- ε : $\varepsilon_0 \varepsilon_r$ s'exprime en Farad/m : permitivité du diélectrique
- ε_r : permitivité relative ou constante du diélectrique
- ε_0 : permitivité à vide = $8{,}85.10^{-12}$ F/m

I-3/ Association de condensateurs :

3-1/ Association en série :



$U_{AB} = U_{AJ} + U_{JB}$ or $U = \frac{q}{C}$

(=) $\frac{q}{C} = \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2}$ or $q = q_1 = q_2$ (série)

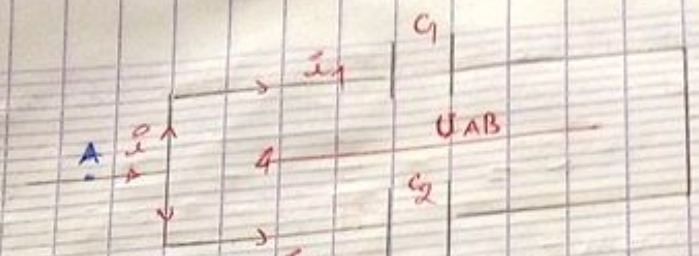
=) alors $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$ (=) $\frac{1}{C} = \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2}$

(=) $$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$ C : capacité équivalent

Pour n condensateurs en série on a :

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}$$

3-2/ Association en parallèle ou dérivation :



Au noeud A : $i = i_1 + i_2$ ⇒ $q = It$ (I max)

$q = q_1 + q_2$

$CU_{AB} = C_1 U_{AB} + C_2 U_{AB}$

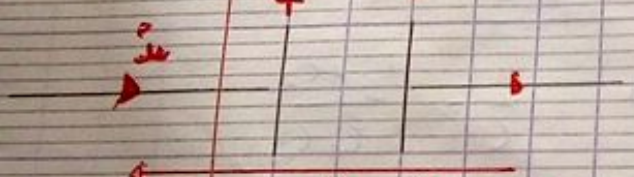
C : capacité équivalent de deux condensateurs en ||

$\Rightarrow \boxed{C = C_1 + C_2}$

Pour n condensateurs $\boxed{C = C_1 + C_2 + \dots + C_n}$

I-4/ Relation entre la charge (q) et l'intensité du courant i :

Charge



$$\boxed{i = \frac{dq}{dt} = C\frac{du_c}{dt}}$$

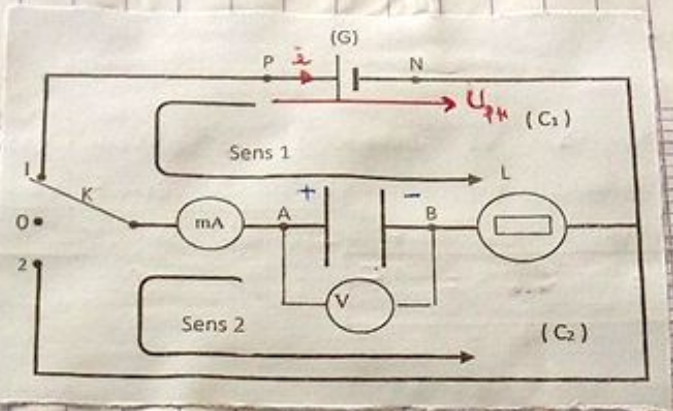
Décharge



$$\boxed{i = -\frac{dq}{dt} = -C\frac{du_c}{dt}}$$

II/ Etude expérimentale : charge et décharge :

1/ Dispositif expérimental



- G : générateur idéal de maintenu de $f.e.m = E = U_{PN}$
- L : lampe témoin
- le condensateur de capacité (C) est initialement non chargé
- le milliampèremètre est à 0 central
- K interrupteur

— Si K est en position (1), le circuit C_1 est fermé et le circuit C_2 est ouvert.

— Si K est en position (2) le circuit C_2 est fermé et le circuit C_1 est ouvert.

— Si K est en position (0) les circuits C_1 et C_2 sont ouverts

2-/ Résultats expérimentaux :

* Plaçons K en position (1), on observe éclat bref de la lampe
* L'aiguille du mAmpèremètre dévie dans le sens (1) puis revient au 0
* l'aiguille du voltmètre dévie et affiche la valeur de $U_{AB} = U_B = E$.
* Plaçons K en position (0) on observe aucune modification.
* Plaçons K en position (2) on observe un bref éclat de la lampe
* l'aiguille du mA dévie dans le sens (2) puis revient au 0 mA
* l'aiguille du voltmètre revient à la graduation 0

3/ Interprétations :

a) K en position (1) : Charge du condensateur :

Le générateur fait mettre en mouvement les électrons libres de l'armature (A), ~~de~~ ceux-ci se déplacent à travers le

circuit C_1 et viennent s'accumuler sur l'armature A. Ce mouvement d'électrons correspond à un courant de charge qui circule dans le sens (1) et qui s'annule lorsque

$$U_c = U_G = E$$

Caractéristiques :

- Au début de la charge on a : $i = I_{max}$; $q = 0$; $U_c = 0$
- A la fin de la charge on a : $i = 0$; $q = Q_{max} = CE$

b/ K en position (2) : décharge du condensateur

Les électrons accumulés sur l'armature B se déplacent à travers le circuit C_2 et viennent neutraliser les charges positives de l'armature A. Ce mouvement d'électrons correspond à un courant de décharge (i_d) circulant dans le sens contraire de la charge (1) c'est à dire sens (2) et qui s'annule lorsque le q du condensateur se vide $q = 0$

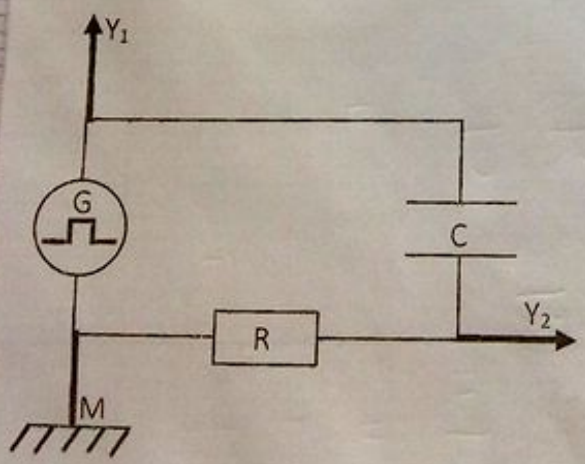
Caractéristiques de la décharge :

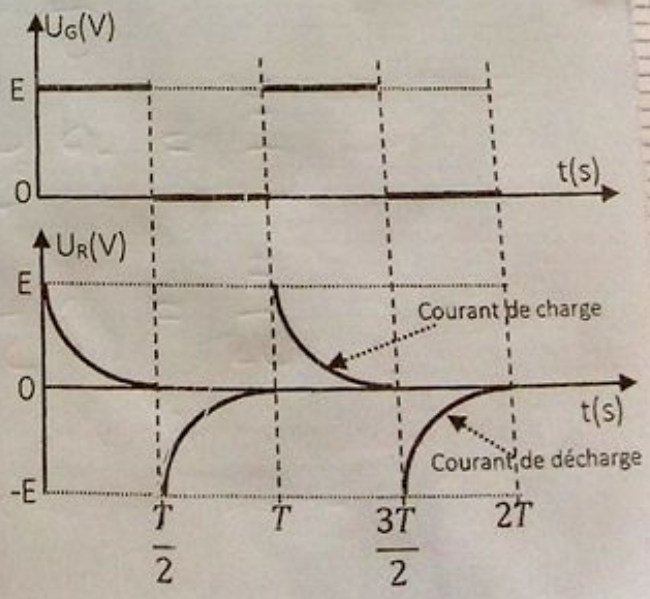
Au début de la décharge : $i = -I_{max}$; $q = Q_{max} = CE$

A la fin de la décharge : $i = 0$; $q = 0$, $U_c = 0$

II-4/ Visualisation du phénomène à l'oscilloscope :

a/ Visualisation du tension aux bornes du générateur (G) et du résistor (R) :





— Le générateur (G) délivre une tension créneau variant périodiquement entre deux valeurs (E et 0 volt)

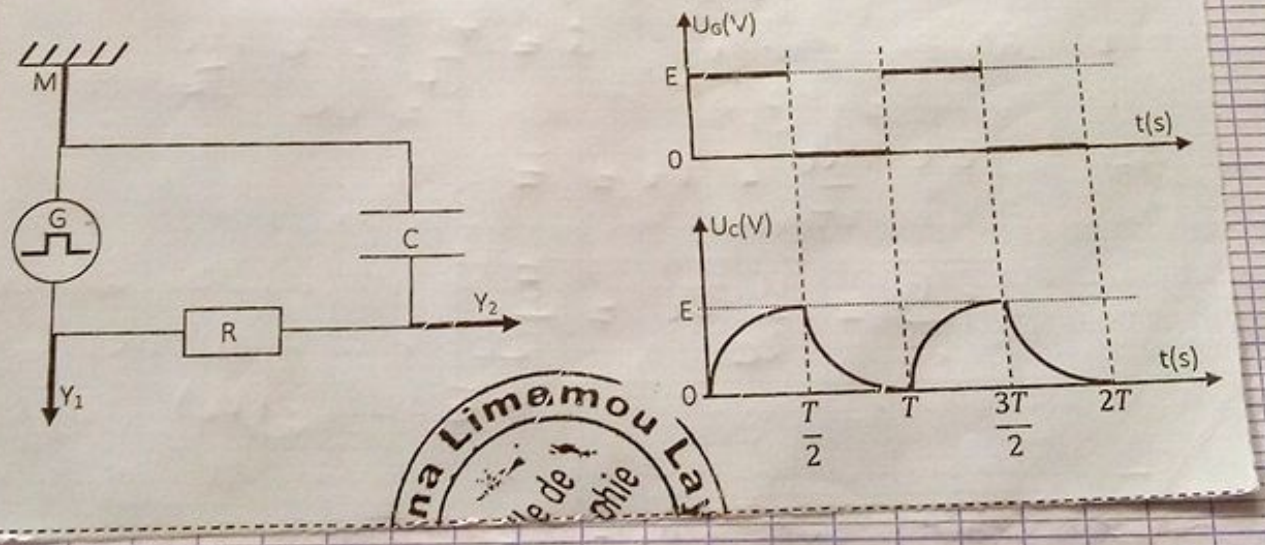
— Sur la voie Y_1 de l'oscilloscope on enregistre les variations de la tension du générateur (U_G).

— Sur la voie Y_2 on enregistre les variations de la tension (U_R) aux bornes du résistor donc les variations de l'intensité (i) car $U = Ri$ avec (R constante)

— Lorsque $U_G = E$, un courant de charge traverse le circuit dans un sens et varie de I_{max} à 0.

— Lorsque $U_G = 0$, un courant de décharge traverse le circuit dans le sens contraire et $-I_{max}$ à 0 donc la tension U_R est discontinue.

b/ Visualisation aux bornes du générateur (G) et du condensateur (C):



— Sur la voie Y_1 de l'oscilloscope on enregistre la tension U_G du générateur (G).

— Sur la voie Y_2 on enregistre la tension U_C aux bornes du condensateur.

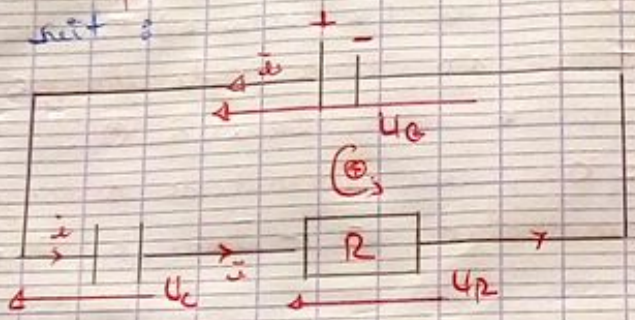
— Lorsque $U_G = E$, le condensateur se charge et sa tension U_C augmente de 0 → $E = U_{max}$

— Lorsque $U_0 = 0$ le condensateur se décharge et sa tension diminue de $U_{cmax} = E$ à 0 donc sa tension U_c est discontinue.

II/ Etude théorique ; Equation différentielle :

1/ Pendant la charge du condensateur :

— Si K est en position (1), on a le circuit qui représente comme suit :



(maille) $U_0 - U_c - U_R = 0$

$U_R + U_c = U_0$ ≠ d'elle en $f(U_c)$

$\Rightarrow$ $Ri + U_c = E$

or à la charge $i = \frac{dq}{dt} = C\frac{dU_c}{dt}$

$\Leftrightarrow$ $RC\frac{dU_c}{dt} + U_c = E$

$$\boxed{\frac{dU_c}{dt} + \frac{1}{RC}U_c = \frac{E}{R}}$$

(1) equation différentielle d'un dipôle (R,C) en charge en $f(U_c)$

— Equation différentielle en fonction de q ; $f(q)$

on sait que $U_c = \frac{q}{C}$

(1) devient $\frac{1}{C}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC^2}q = \frac{E}{R}$

$\Rightarrow$ $\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q = \frac{E}{RC}$

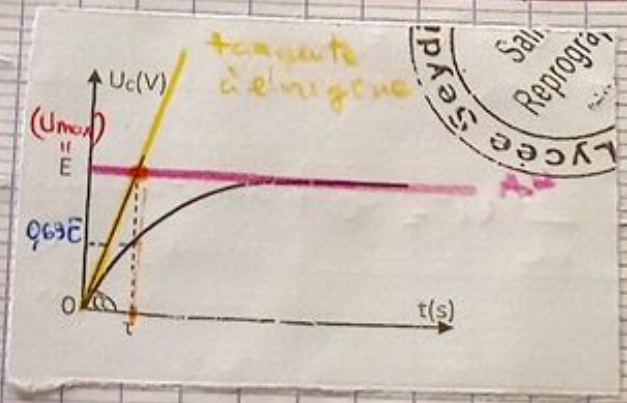
$$\boxed{\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q = \frac{E}{RC}}$$

(2) ≠ telle d'un dipôle (R,C) en charge en $f(q)$

— Solution de l'équation différentielle du 1er degré avec second membre.

Soit la solution ⊛ $u(t) = \underbrace{E}_{U_{max}}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$ avec $\tau = RC$ constante

- Pour analogue à (R,L)

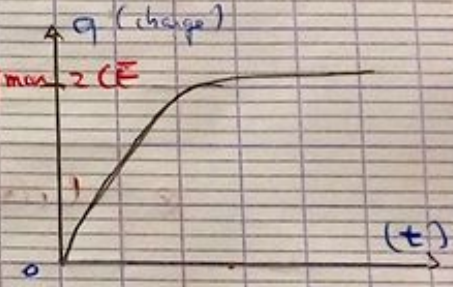


Lycée Seyp... Sali... Reprogra...

si $t = 0$, $U_c = 0$

$t = \infty$, $U_c = E$

* $U_c(t = \tau) = E(1 - e^{-1}) = 0{,}63E$ $q_{max} = CE$

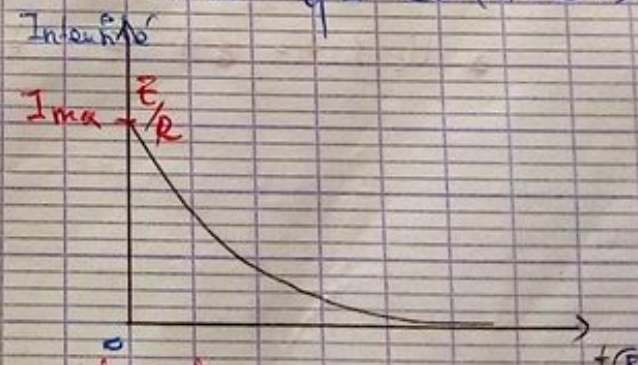


⊛ $\boxed{q(t) = Cu(t) = \underbrace{CE}_{q_{max}}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$

- Pour l'intensité i :

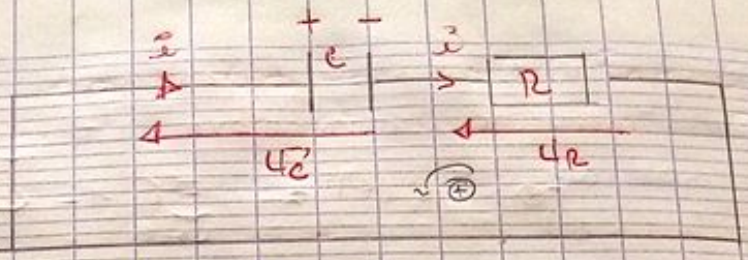
on a $i = \frac{dq}{dt} = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}$ avec $q = CE\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

⊛ $\boxed{i(t) = \left(\frac{E}{R}\right) e^{-t/\tau} = I_{max}}$



II-2/ Pendant la décharge du condensateur :

La charge du condensateur étant terminée, basculons en position (2) à $t = 0$, on obtient C_2



La loi des mailles $u_c + u_R = 0$

Les équations différentielles (1) et (2) deviennent avec $E = 1$

(1)' $\boxed{\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{RC} u_c = 0}$ équation différentielle d'un dipôle (R,C) en décharge en fonction de u_c.

(2)' $\boxed{\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC} q = 0}$ équation différentielle d'un dipôle en décharge en fonction de q.

* Solution de l'équation différentielle

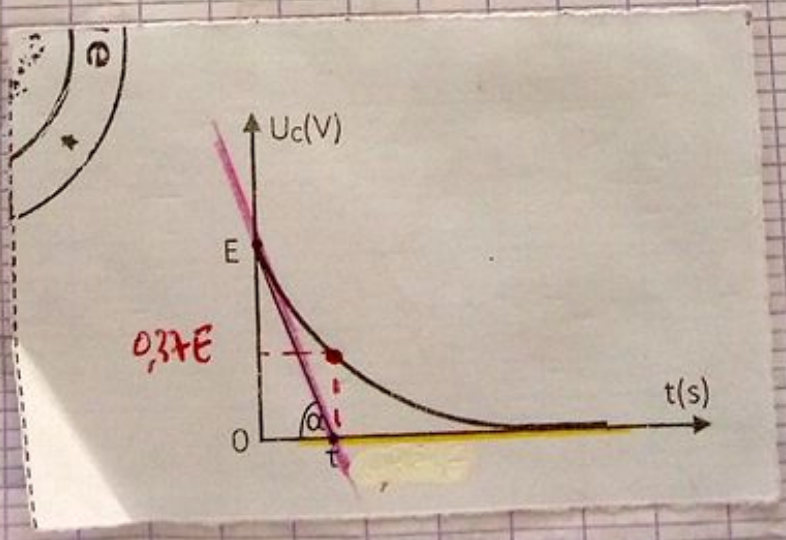
⊛ $\boxed{u_c(t) = \underbrace{E}_{U_{max}} e^{-t/\tau}}$ $\quad \tau = RC$

à $t = 0$; $u_c = E$

$t = \infty$ $\quad u_c = 0$

même !!!

* $u_c(t = \tau) = E e^{-1} = 0{,}37E$



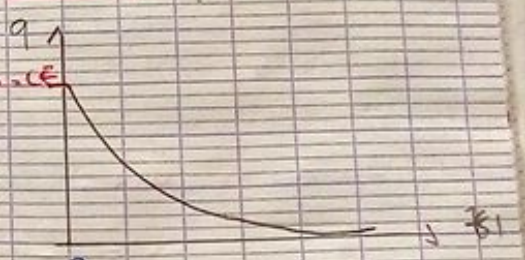
- Montrons qu'on τ est homogène à une durée

$\tau = RC$ or $R = \frac{U}{i}$ et $C = \frac{q}{U} = \frac{it}{U}$

$\Rightarrow$ alors $\tau = \frac{U}{i} \times \frac{it}{U} = t$

$\tau = t$

⊗ $q(t) = C U_c(t) = \underbrace{CE}_{Q_{max}} e^{-t/\tau}$



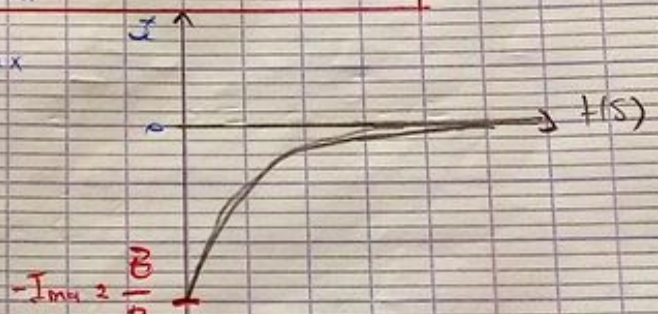
- Pour l'intensité i (décharge)

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = -\left(\frac{E}{R}\right) e^{-t/\tau} = -I_{max} e^{-t/\tau}$$

$I_{max} = \frac{E}{R}$

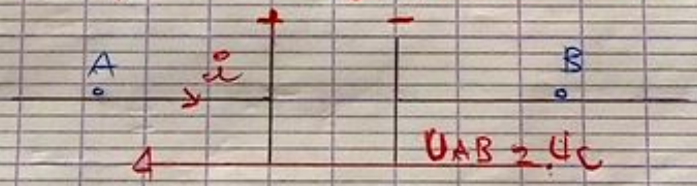
si $t = 0$; $i = -I_{max}$

$t = \infty$; $i = 0$



NB: l'expérience a montré que la charge et la décharge ont la même durée pour un dipôle (R, C)

III - 3/ Energie Emmagazinée dans un condensateur :



$P_c = U_c i$ or $i = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(CU_c)$

$$P_c = U_c \frac{d(U_c)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} C U_c^2\right) = \frac{dE_c}{dt}$$

$$E_c = \frac{1}{2} C U_c^2 \qquad E_c = \frac{1}{2} \times \frac{q^2}{C} \text{ avec } U_c = \frac{q}{C}$$

ωεε $C = \frac{q}{U}$ $\Rightarrow$ $W_e = \frac{1}{2} q U_c$

P4p — Oscillateurs électriques

1ère Partie : Oscillateurs électriques libres

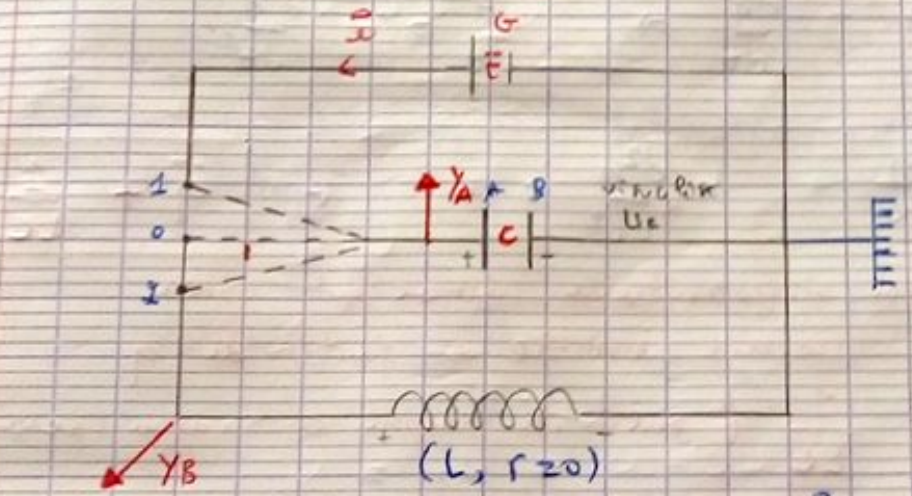
Introduction :

Un oscillateur électrique libre est constitué d'un condensateur de capacité C initialement chargé et d'une bobine d'inductance L.

- si Σ résistances = 0, l'oscillateur est non amortie (circuit L,C)
- si Σ résistances $\neq$ 0 et oscillateur est amortie (circuit R, L, C)

I/ Oscillateurs électriques libres non-amortis :

1) Mise en évidence :

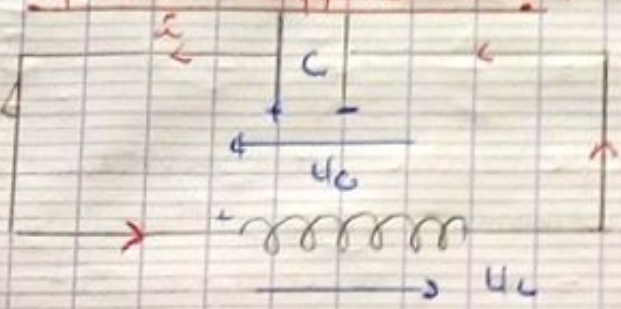


- K en position (1) : le condensateur se charge grâce au générateur (G)
- K en position (2) : le condensateur décharge dans la bobine, cette décharge s'accompagne d'une f.e.m induite à la fin de la décharge la charge du condensateur devient nulle ($q_C = 0$) et la bobine charge à son tour le condensateur grâce à son courant induit qui circule en sens inverse. Ainsi on a un ensemble de charge et de décharge entre le condensateur et la bobine : on parle d'oscillation électrique. Donc le dipole (L, C) K en position (2) est un **Oscillateur électrique** ; r = 0, donc l'oscillation est non-amortie.

$i = \frac{dq}{dt}$ $\frac{E}{L}$

I- 2/ Etude de la décharge des condensateurs

2-1/ Equation différentielle :



La loi des mailles : $u_c + u_L = 0$ or $u_L = L \frac{di}{dt}$

$u_c = \frac{q}{C} + L\frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{q}{C} - L\frac{di}{dt} = 0$

or $i = -\frac{dq}{dt} \Rightarrow \frac{di}{dt} = -\frac{d^2q}{dt^2}$

$\Rightarrow \frac{q}{C} + L\frac{d^2q}{dt^2} = 0$ donc $\boxed{\ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0}$

- équation différentielle du second ordre sans second membre en fonction de q

Avec $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ (pulsation propre en radian / seconde)

l'équation peut être aussi écrite en fonction de la tension aux bornes du condensateur.

l'équation devient : on a $\ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$

avec $q = CU \Rightarrow$

$\ddot{q} = C\frac{d^2U}{dt^2}$ (1) $\boxed{\frac{d^2U}{dt} + \frac{1}{LC}U = 0}$ (1)

2-2/ Solution de l'équation différentielle :

La solution de cette équation différentielle est de la forme

$\boxed{q(t) = q_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)}$ pour (1) . q_{max} = Cte

$u_c(t) = U_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi)$ pour (1) avec $U_{max} = E$

2-3/ Conservation de l'énergie totale dans le dipôle (L, C)

A $t = 0$ l'énergie totale est : $E_{totale} = E_{condensateur} = \frac{1}{2}\frac{q_m^2}{C}$

A $t \neq 0$ l'énergie totale est : $E_{Totale} = E_{cond} + E_{bobine} = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}Li^2$

or $q = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \Rightarrow \dot{q} = -q_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$

or $i = -\dot{q}$

$\Rightarrow E_T = \frac{q_m^2}{2C}\cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{L}{2} q_m^2 \omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi)$ or $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$

$\Rightarrow E_T = \frac{q_m^2}{2C}\cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{q_m^2}{2C}\sin^2(\omega_0 t + \varphi)$

$$\boxed{E_T = \frac{q_m^2}{2C}\left(\cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \sin^2(\omega_0 t + \varphi)\right) = \frac{q_m^2}{2C} = cte \quad (a\ t \neq 0)}$$

donc l'énergie se conserve.

Remarque :

l'équation différentielle peut être retrouvée à partir de l'étude énergétique.

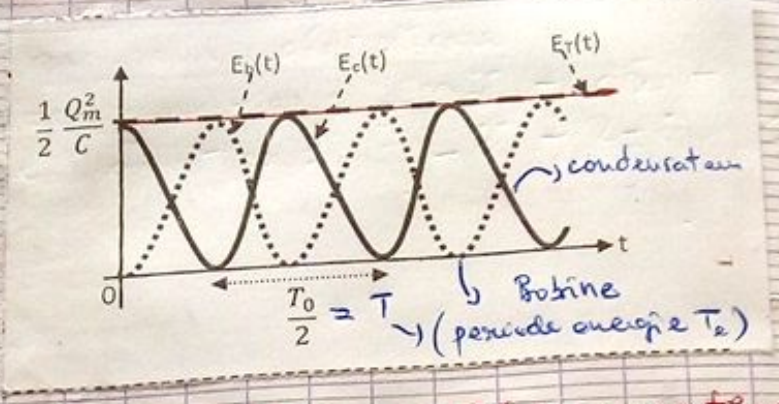
$E_T = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}Li^2$ $\quad \frac{dE_T}{dt} = 0$ $\quad E_T = cte$

$\frac{dE_T}{dt} = \frac{q}{C}\dot{q} + L\ddot{q}\dot{q} = 0$ car $i = \dot{q}$ et $\frac{di}{dt} = \ddot{q}$

$\dot{q}\left(L\ddot{q} + \frac{1}{C}q\right) = 0$ or $\dot{q} \neq 0$

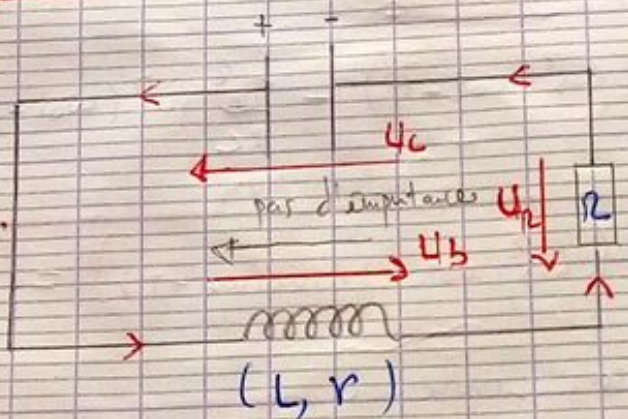
$$\boxed{\ddot{q} + \frac{1}{LC} = 0}$$

2-4/ Représentation graphique des énergies :



II/ Oscillations électriques libres amorties

1/ Etude du dipôle (R, L, C)



Loi des mailles $U_C + U_b + U_R = 0$

$$\frac{q}{C} + e - ri - Ri = 0$$

$$\frac{q}{C} - L\frac{di}{dt} - (R+r)i = 0 \quad \text{avec } i = -\frac{dq}{dt}$$

$$\frac{q}{C} + L\frac{d^2q}{dt^2} + (R+r)\frac{dq}{dt} = 0$$

$$\boxed{L\ddot{q} + (R+r)\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0} \quad (1)$$

$$\boxed{\ddot{q} + \frac{(R+r)}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0}$$

Remarque

- L'énergie totale (E_T) ne se conserve plus ($\frac{dE_T}{dt} \neq 0$) à cause de la présence du résistor (R) et r (bobine)

avec $R_T = R + r$

- Sa variation par rapport au temps est alors égale à la puissance dissipé par effet joule au niveau du (m) des résistors.

$$\frac{dE_T}{dt} = \dot{q}\left(L\ddot{q} + \frac{1}{C}q\right)$$

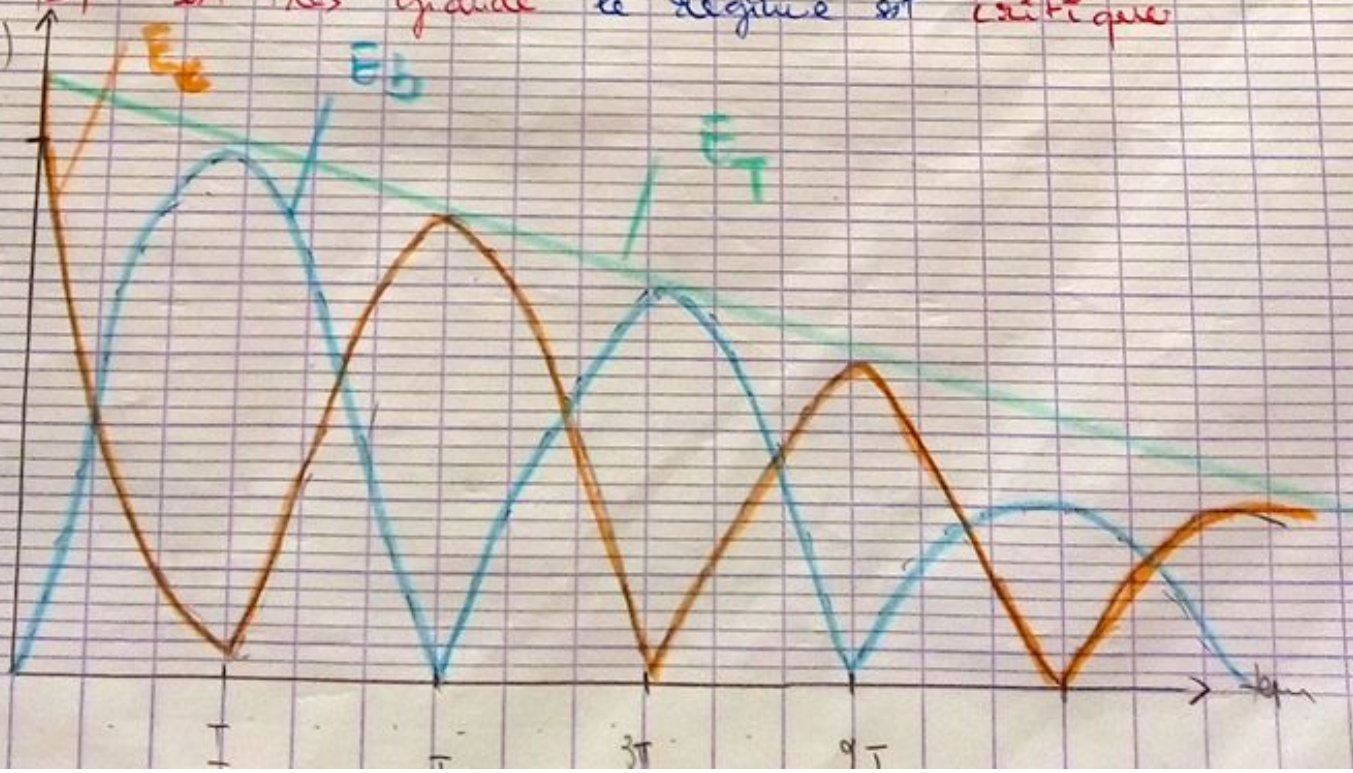
D'après (1) $\quad L\ddot{q} + \frac{1}{C}q = -(R+r)\dot{q}$

$$\frac{dE_T}{dt} = -(R+r)\dot{q}^2 = -R_T\dot{q}^2$$

$$\boxed{\frac{dE_T}{dt} = -R_T\dot{q}^2 = -R_T i^2 = \text{Puissance } \frac{E}{\Delta t}}$$

2/ Représentation graphique des énergies :

- Si R_T faible le régime est pseudopériodique
- Si R_T grande le régime est apériodique
- Si R_T est très grande le régime est critique

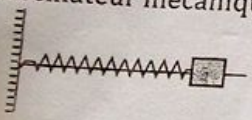


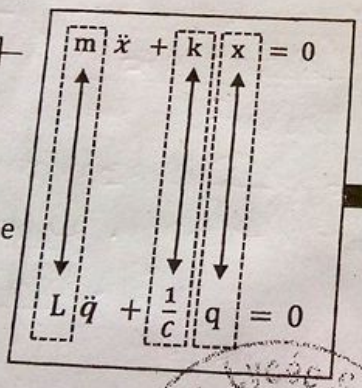
Oscillation

III/ Analogie entre grandeur mécanique et grandeur électrique

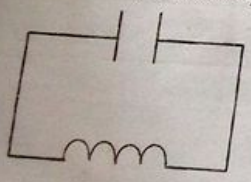
- Oscillation mécanique amorties : $m\ddot{x} + d\dot{x} + kx$
- oscillation électrique amorties : $L\ddot{q} + R_T\dot{q} \quad \frac{1}{C}q$

Oscillateur mécanique





Oscillateur électrique



x (abscisse)	⟷	q (charge électrique)
$\dot{x} = v$ (vitesse)	⟷	$\dot{q}$ = i (intensité du courant)
m (masse du solide)	⟷	L (inductance de la bobine)
k (raideur du ressort)	⟷	$\frac{1}{C}$ (inverse de la capacité)
$E_p = \frac{1}{2}kx^2$	⟷	$E_e = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$
$E_c = \frac{1}{2}mv^2$	⟷	$E_m = \frac{1}{2}Li^2$
Masse	⟷	Bobine
Ressort	⟷	Condensateur
Force de frottement	⟷	Résistance

Censeur Guédiawaye

2ème Partie : Oscillations électriques forcées en régime alternatif Sinusoïdal (RAS)

I/ ~~Alternatif sur le courant~~

I/ Généralité sur le courant alternatif : (vocal = fonction du temps)

1/ Définition :

Un courant alternatif est un courant dont son intensité est une fonction sinusoïdale du temps, de la forme :

$i(t) = I_{max} \cos(\omega t + \varphi)$; $i(t) = I_{max} \sin(\omega t + \varphi)$; $i(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$

ω = pulsation imposée par le générateur

Pour un courant alternatif, la tension électrique u est aussi une fonction sinusoïdale de la même forme que $i(t)$.

En R.A.S, la tension $u(t)$ et $i(t)$ sont des fonctions sinusoïdales de même pulsation (ω) ; de même période (T_{ens}) et de même fréquence (N en hertz) : on dit qu'elle sont synchrone

2/ Grandeurs alternatives efficaces

2-1/ Intensité efficace (I_{eff} ou I) :

$$I_{eff} = I = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}$$

2-2/ Tension efficace (U_{eff} ou U)

La tension efficace aux bornes d'un résistor est donnée par :

$$U_{eff} = U = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}}$$

En effet : $U_{eff} = R I_{eff} = \frac{R I_m}{\sqrt{2}} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$

NB : ~~En~~ courant alternative, l'ampèremètre et le voltmètre mesure les valeurs efficaces (i et U) alors que l'oscilloscope mesure les valeurs maximales.

I-3/ Impédance d'un dipôle :

On définit l'impédance (Z) d'un dipôle par le rapport de la tension efficace U_{eff} sur l'intensité efficace I_{eff}

$$Z = \frac{U_{eff}}{I_{eff}} = \frac{U_m}{I_m} = R \ (\Omega)$$

Z est toujours positive et dépend de la fréquence

NB: l'inverse de l'impédance est appelée admittance (Y) et s'exprime en siemens (S)

$$Y = \frac{1}{Z} \quad \Omega^{-1}$$

4/ Représentation de Fresnel :

La représentation de Fresnel des fonctions sinusoïdales est sous forme de vecteur. De tels vecteurs ont pour norme leur maximale de la fonction et pour phase la valeur de la phase initiale.

Les angles sont comptés positivement à partir de l'axe des abscisses dans le sens trigonométrique.

Exemples: $A(t) = 2\cos\left(5t + \frac{\pi}{6}\right)$; $B(t) = 3\sin\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)$

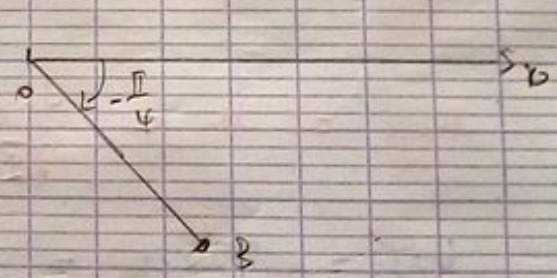
$C(t) = 5\cos 3t$.

$A(t) = 2\cos\left(5t + \frac{\pi}{6}\right)$; $\vec{OA}\begin{pmatrix} 2 \\ \pi/6 \end{pmatrix}$

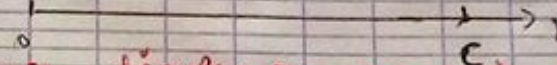


origine du sp

$B(t) = 3\sin\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)$; $\vec{OB}\begin{pmatrix} 3 \\ -\pi/4 \end{pmatrix}$

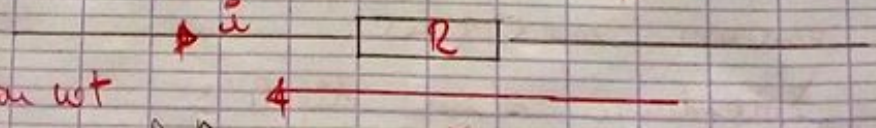


$C(t) = 5\cos(3t)$; $C\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$



1-5) Etude de quelques dipôles en courant alternatif:

5-1/ Résistor : conducteur ohmique :



pose $i(t) = I_{max} \cos \omega t$

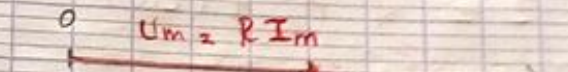
d'une manière générale

$u_R = R\,i(t) = R I_m \sin \omega t = \boxed{U_m \sin(\omega t + \varphi_R)}$

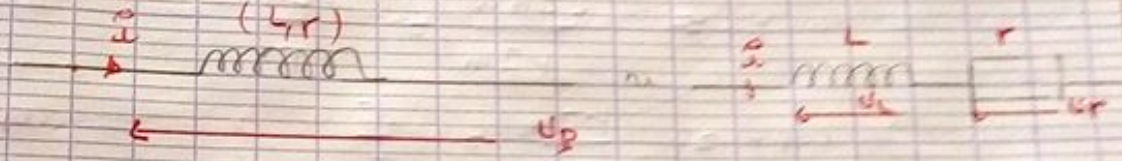
Par identification on a : $\begin{cases} U_m = R I_m \\ \varphi_R = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = Z = \frac{U_R}{I_m} \\ \varphi_R = 0 \end{cases}$

$\varphi_R = 0$ implique que $i(t)$ et $u(t)$ sont en phase.

- Représentation de Fresnel



5-2/ Bobine (r, L) ou bobine réelle :



$U_B = ri + L\frac{di}{dt}$ or $i = I_m \sin \omega t$

$\frac{di}{dt} = I_m \omega \cos \omega t$; $U_B = r I_m \sin \omega t + L I_m \omega \cos \omega t$

- Pour transformer il faut utiliser les angles sup et complémentaires.

transformons $\sin \omega t$

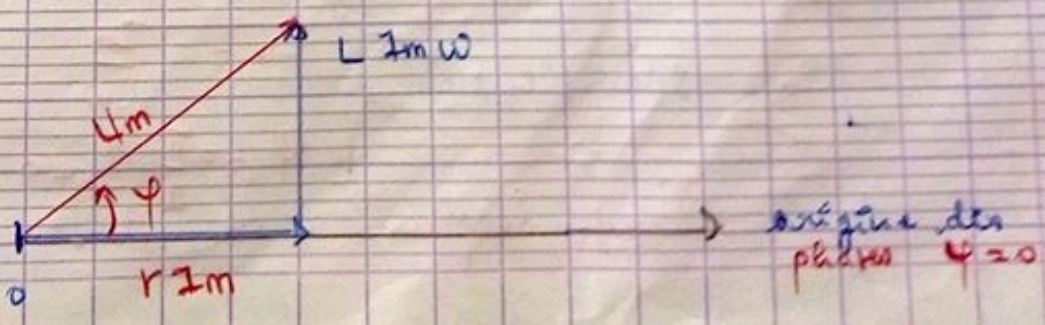
Posons $\omega t = \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ $\cos(\omega t) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \omega t\right) =$

$U_B = r I_m \sin \omega t + L I_m \omega \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$

une manière générale $U_B = U_m \sin(\omega t + \varphi_B)$

$$\vec{U}_B \begin{pmatrix} U_m \\ \varphi_B \end{pmatrix} = U_r \begin{pmatrix} r I_m \\ \varphi_R = 0 \end{pmatrix} + \vec{U}_L \begin{pmatrix} L I_m \omega \\ \varphi_L = \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$$

- Représentation de Fresnel :



$\varphi_{u/i} = \varphi > 0$; u est en avance de phase sur i

- Calculons l'impédance (Z) :

$U_m^2 = R^2 I_m^2 + L^2 I_m^2 \omega^2$

$\frac{U_m^2}{I_m^2} = R^2 + L^2\omega^2 \Rightarrow Z^2 = r^2 + L^2\omega^2$

$$\boxed{Z = \sqrt{r^2 + (L\omega)^2}}$$ Impédance d'une bobine résistive.

- Calculons φ :

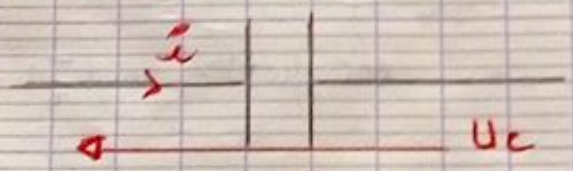
$\tan\varphi = \frac{L I_m \omega}{r I_m} = \frac{L\omega}{r}$;

$\cos\varphi = \frac{r I_m}{U_m} = \frac{r}{Z}$;

$$\boxed{\tan\varphi = \frac{L\omega}{r}} \qquad \boxed{\cos\varphi = \frac{r}{Z}}$$

- Si la bobine était non résistive $r = 0$ $\boxed{Z = L\omega}$ appelé réactance d'inductance.

5-3/ Condensateur :

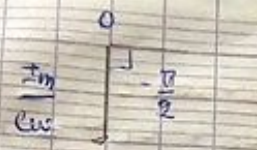


$U_c = \frac{q}{C}$ or $i = \frac{dq}{dt} \Rightarrow q = \int i\,dt = \int I_m \sin\omega t$

$q = -\frac{I_m}{\omega}\cos\omega t$

$U_c = -\frac{I_m}{C\omega}\cos\omega t = \frac{I_m}{C\omega}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = U_m \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$

Par identification $\begin{cases} U_m = \frac{I_m}{C\omega} \Rightarrow \frac{U_m}{I_m} = \frac{1}{C\omega} = Z \\ \varphi = -\frac{\pi}{2} < 0 \end{cases}$; $\varphi < 0$; u est en retard de phase sur i.



II/ Etude Expérimentale et théorique d'un circuit (R,L,C) forcé :

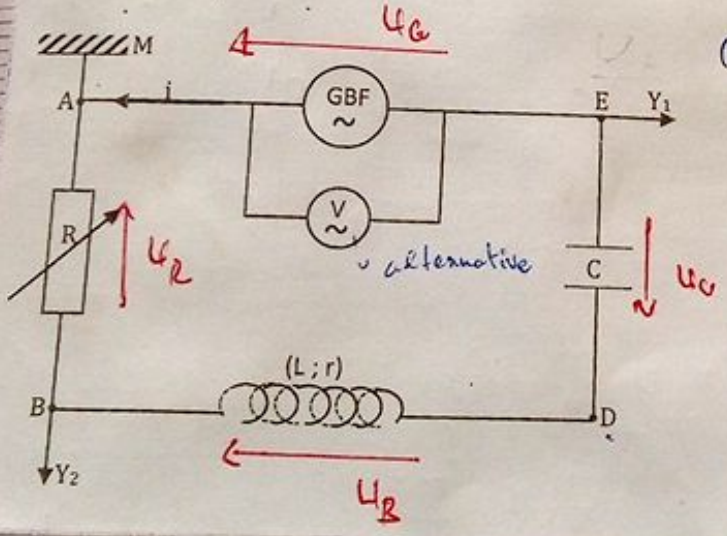
1/ Etude Expérimentale :

Le dipole (R, L, C) associé en série et branché aux bornes d'un GBF qui fournit 1 courant alternatif sinusoïdale de pulsation ω.

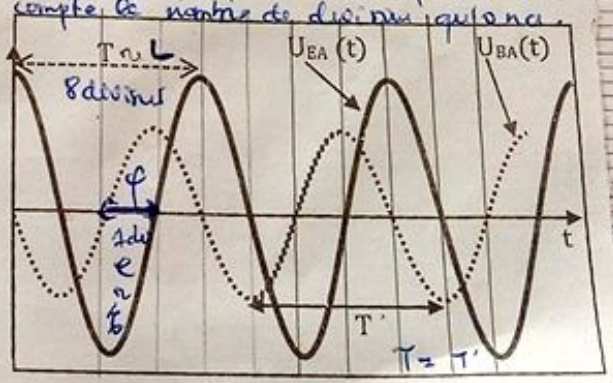
Sur la voie Y_1 on mesure la tension aux bornes du GBF

Voie Y_2 mesure U_R dont $i(t)$ qui traverse le circuit (R, L, C). Les oscillogrammes ci-dessus de même période T (même ω et même I_m) mais déphasé ont été obtenue de façon expérimental

- Pour déterminer le déphasage (φ) on peut procéder par l'une des méthodes suivantes :



On suppose que φ = 1 div et T = 8 divisions (dans un exo, 1 fois que on détermine φ et T on compte le nombre de div pour chacun)



1ère méthode spatiale :

L ⟶ 2π rad

e ⟶ φ

$$\varphi = \frac{2\pi e}{L} = \frac{2\pi \times 1\,div}{8\,div} = \frac{\pi}{4}$$

$$|\varphi| = \frac{\pi}{4}\ rad$$

L : période spatiale
e : décalage spatial
φ : déphasage

2ème méthode temporelle

T ⟶ 2π rad (Période temporelle)

décalage temporelle $\frac{\varphi}{6}$ ⟶ φ

avec 1 div = 2 ms

T = 8 div = 16 ms ; $\frac{\varphi}{6}$ = 1 div = 2 ms

$$\varphi = \frac{2\pi}{T}\,\frac{\varphi}{6}$$

$$\varphi = \frac{2\pi \times 2\,ms}{16} = \frac{\pi}{4}$$

$$|\varphi| = \frac{\pi}{4}\ rad/s$$

2/ Etude théorique :

2-1/ Equation différentielle :

En des mailles : $U_G = U_R + U_B + U_C$ avec $U_C = U$

$$U = Ri + ri + L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C}$$

or $i = \frac{dq}{dt} = \dot{q}$ et $\frac{di}{dt} = \ddot{q}$

$$U = (R+r)\dot{q} + L\ddot{q} + \frac{1}{C}q$$

$$\boxed{U = L\ddot{q} + (R+r)\dot{q} + \frac{1}{C}q}$$

équation différentielle d'un circuit (R, L, C) en régime forcé.

2-2/ Equation trigonométrique :

En des mailles $U_R + U_B + U_C = U_G$

avec $i = I_m \sin \omega t \Rightarrow \frac{di}{dt} = I_m \omega \cos \omega t$

* $U_R = Ri = R I_m \sin \omega t$

* $U_B = ri + L\frac{di}{dt} = r I_m \sin \omega t + L I_m \omega \cos \omega t$

$$U_B = r I_m \sin \omega t + L I_m \omega \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

* $U_C = \frac{q}{C} = \frac{1}{C}\int i\,dt = \frac{1}{C}\int I_m \sin \omega t\,dt$

$$U_C = -\frac{I_m}{C\omega}\cos \omega t = \frac{I_m}{C\omega}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$U_G = U_m \sin(\omega t + \varphi)$ (formule générale)

NF $\varphi_{u/i}$ (déphasage)

équation trigonométrique d'un dipôle (R,L,C) en série en régime sinusoïdal forcé :

$$(R+r)\,I_m \sin\omega t + L\omega I_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{I_m}{C\omega}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = U_m \sin(\omega t + \varphi)$$

2-3/ Diagramme de Fresnel :

$$U_\omega \begin{pmatrix} U_m \\ \varphi \end{pmatrix} ; \quad \vec{U}_{R_T} \begin{pmatrix} R_T I_m \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \vec{U}_L \begin{pmatrix} L\omega I_m \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} ; \quad \vec{U}_C \begin{pmatrix} \frac{I_m}{C\omega} \\ -\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$$

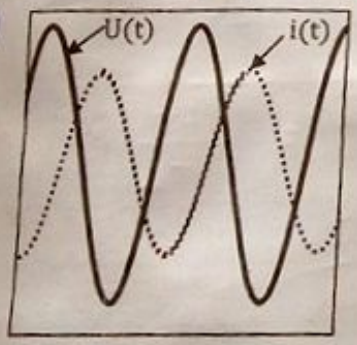
a) Cas où $L\omega I_m > I_m/C\omega \Leftrightarrow L\omega > \frac{1}{C\omega} \Leftrightarrow \omega^2 > \frac{1}{LC}$

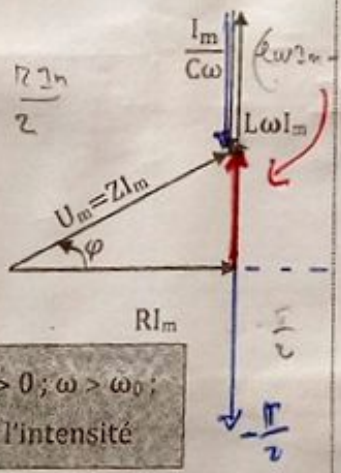
On dit que l'effet de la bobine l'emporte sur celui du condensateur ; le circuit est dit inductif ; la tension u est en avance sur l'intensité i (vrai du courant dans tout le circuit en série)

$\varphi > 0$.

Diagrammes :

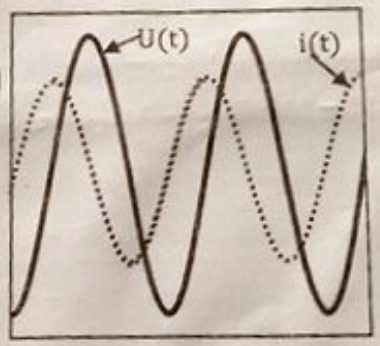
a)

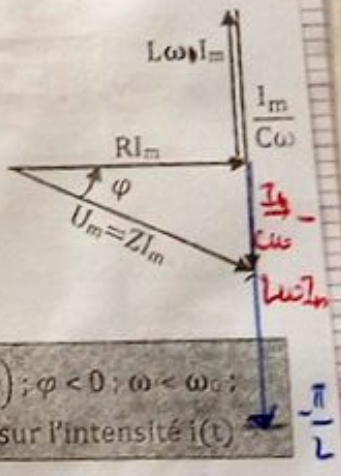




Circuit inductif : $\left(L\omega > \frac{1}{C\omega}\right)$; $\varphi > 0$; $\omega > \omega_0$; la tension u(t) est en avance sur l'intensité

b)





Circuit capacitif : $\left(L\omega < \frac{1}{C\omega}\right)$; $\varphi < 0$; $\omega < \omega_0$; la tension u(t) est en retard sur l'intensité i(t)

- Impédance

$$U_m^2 = R_T^2 I_m^2 + \left(L\omega I_m - \frac{I_m}{C\omega}\right)^2$$

$$\frac{U_m^2}{I_m^2} = R_T^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2$$

$$Z = \sqrt{R_T^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

- Impédance :

$$Z = \sqrt{R_T^2 + \left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)^2}$$

- Déterminons le déphasage φ :

$$\tan\varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R_T} \quad \text{si } \varphi > 0$$

$$\cos\varphi = \frac{R_T}{Z}$$

Remarque : Si la bobine était non-résistible ($r = 0$)

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

- Dans le cas où le circuit est inductif alors

$$\varphi = \varphi_{u/i} = \varphi_u - \varphi_i > 0$$

- Déterminons le déphasage φ :

$$\tan\varphi = \frac{-\frac{1}{C\omega} + L\omega}{R_T} \quad \text{si } \varphi < 0$$

$$\cos\varphi = \frac{R_T}{Z}$$

Remarque : - Si la bobine était non résistible ($r = 0$)

- Dans le cas où le circuit est capacitif alors

$$\varphi = \varphi_{u/i} = \varphi_u - \varphi_i < 0$$

b) Cas où $L\omega I_m > \frac{I_m}{C\omega}$ (=) $L\omega > \frac{1}{C\omega}$ => $\omega^2 > \frac{1}{LC}$

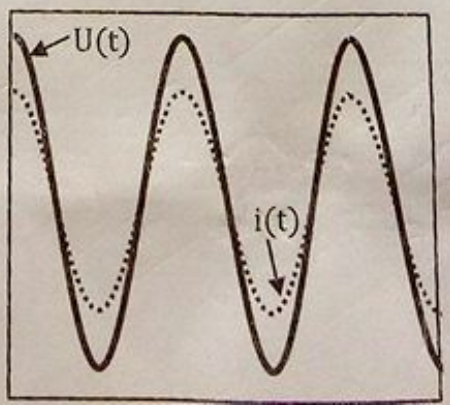
L'effet du condensateur l'emporte sur la bobine. Le circuit est capacitif. La tension en est en retard d'intensité i : $\varphi < 0$

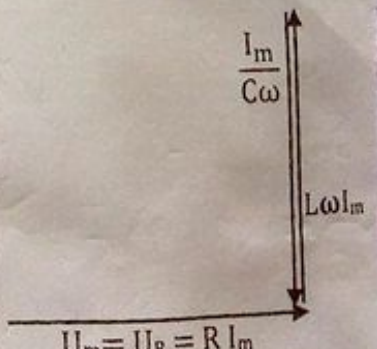
c) Cas où $L\omega I_m = \frac{I_m}{C\omega}$ (=) $L\omega = \frac{1}{C\omega}$ => $\omega^2 = \omega_0^2$

L'effet inductif et l'effet capacitif se compense ($\varphi = 0$) la tension U et i sont en phase ($\varphi = 0$) :

C'est la résonance

Circuit résistif : $\left(L\omega = \frac{1}{C\omega}\right)$; $\varphi = 0$; $\omega = \omega_0$; la tension $u(t)$ et l'intensité $i(t)$ sont en phase : c'est la résonance d'intensité





- Impédance : $Z = R_T = (R+r)$

- Déphasage φ :

A la résonance : $\varphi = \varphi_{u/i} = \varphi_u - \varphi_i = 0$

$$\tan\varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R_T} = \frac{L}{R_T}\left(\omega - \frac{1}{LC\omega}\right) = \frac{L}{R_T}\left(\omega - \frac{\omega_0^2}{\omega}\right)$$

$$\tan\varphi = \frac{L}{R_T}\left(\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega}\right)$$

Lorsqu'on varie la fréquence du GBF, on observe l'oscillogramme décalées de même fréquence, mais on remarque que l'amplitude de la tension visualisant i passe par un maximum

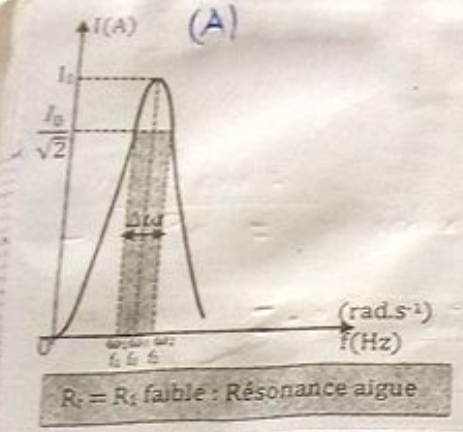
la fonction $I = f(\omega)$ passe par 1 maximum pour ω_0 c'est la résonance d'intensité ; la tension ne sont plus decalé $\varphi = 0$; on dit que le dipole (R,L,C) est un résonateur et générateur et un excitateur.

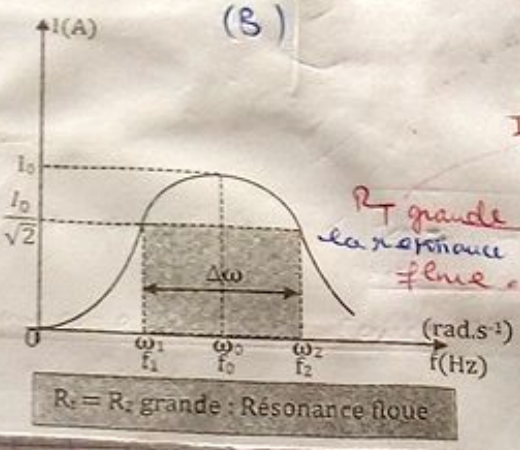
- A la Resonance : $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; $N = N_0$

- $\varphi = 0$ (u et i) et en phase

- $I = I_0 = \frac{U_{eff}}{R_T} = \frac{U_M}{\sqrt{2}R_T}$

b) Courbe de resonance :







c) Bande Passante :

Elle est l'intervalle de fréquence (N_1 et N_2) ou de pulsation (ω_1 et ω_2) pour lequel, la largeur de la bande passante est tel que

$$I(N_1) = I(N_2) = \frac{I_0(N_0)}{\sqrt{2}}$$

ou

$$I(\omega_1) = I(\omega_2) = \frac{I_0(\omega_0)}{\sqrt{2}}$$

$\omega = 2\pi N$

- la bande passante est notée $\Delta\omega$ (rad/s) ou ΔN (Hertz)

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{R_T}{L} \quad \text{ou} \quad \Delta N : N_2 - N_1 = \frac{R_T}{2\pi L}$$

d) Facteur de qualité :

La résistance totale R_T du dipole amortie les oscillations. Pour caractériser la résonance on définit une grandeur Q appelé facteur de qualité

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{N_0}{\Delta N} = \frac{\omega_0 L}{R_T}$$

$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ $\quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$$Q = \frac{1}{C\omega_0 R_T}$$

- Si la résistance totale R_T du dipole est faible le facteur de qualité Q est grand et la courbe de résonance

est fine (courbe A), la bande passante est étroite, la résonance est aigue et le circuit est qualifié sélectif.

- Si R_T = grande, Q est petit, la courbe de résonance est basse, la bande passante est large et la résonance est floue et le circuit est qualifié de peu sélectif.

II-2-5) Phénomène de surtension :

A la résonance on constate que la tension U_C aux bornes du condensateur est supérieure à la tension U imposé par le GBF aux bornes de l'ensemble : c'est le phénomène de surtension. La tension maximale du condensateur à la résonance est U_C

$$U_C = \frac{I_0}{C\omega_0} \quad \text{or} \quad I_0 = \frac{U}{R_T}$$

$$U_C = \frac{I_0}{C\omega_0} = \frac{U}{R_T C\omega_0} = QU \quad \text{or} \quad \frac{1}{R_T C\omega_0} = Q$$

- La tension maximale aux bornes de la bobine à la résonance est

$$U_B = L\omega_0 I_0 = \frac{L\omega_0 U}{R_T} = \frac{U}{R_T C\omega_0} = QU \quad \left(L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0}\right)$$

III)

III-1)

En R.A.S la puissance moyenne échangé par un dipole est définie par :

$$P_m = UI\cos\varphi$$

(P_m : Watt ; U, I : tension et intensité efficace)

U = tension efficace aux bornes du dipole

I = tension efficace à travers le dipole

φ = déphasage de U / à i : $\varphi_{u/i}$

Remarque :

- P_a = puissance apparente du dipôle : $\boxed{P_a = UI}$ (Watt)

III-2/ Puissance moyenne de quelques dipôles

a) Conducteur ohmique

$\boxed{P_m = U_R I \cos\varphi_R}$ avec $\varphi_R = 0$, $U_R = RI$

$\boxed{P_m = RI^2 = P_{thermique\ joule}}$

- En R.A.S un conducteur ohmique dissipe toute sa puissance qu'il reçoit en puissance thermique par effet joule.

b) Condensateur :

$\boxed{P_m = U_C I \cos\varphi_C = -\frac{\pi}{2} = 0}$ avec $\varphi_C = -\frac{\pi}{2}$

Un condensateur ne consomme pas d'énergie.

En R.A.S un condensateur ne reçoit globalement aucune puissance électrique, car la puissance électrique emmagasinée pendant un 1/2 période est restituée pendant la 1/2 période suivante.

c) Bobine non-résistive :

$\boxed{P_m = U_L I \cos\varphi_L = \frac{\pi}{2} = 0}$

En R.A.S une bobine pure ne consomme pas d'énergie.

d) Bobine résistive :

$\boxed{P_m = U_b I \cos\varphi_b}$ avec $U_b = Z_b I$ et $\cos\varphi = \frac{r}{Z_b}$

$$P_m = r I^2 = P_{thermique} = \text{effet Joule}$$

En R.A.S une bobine réelle transforme toute sa puissance électrique qu'elle reçoit en puissance thermique par effet Joule.

Attention : La puissance reçue par un condensateur ou une bobine n'est pas toujours nulle.

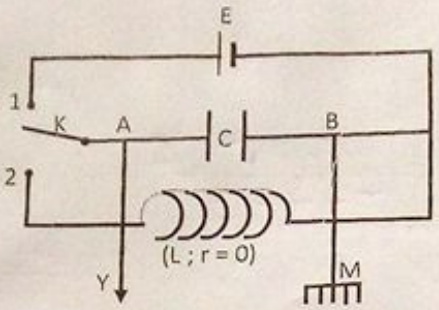
2) Puissance moyenne pour un dipôle en série :

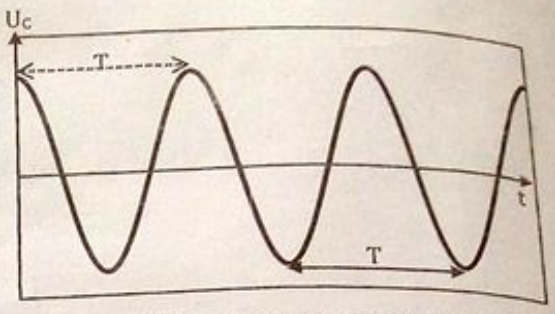
$$P_m = R_T I^2 = (R + r) I^2$$

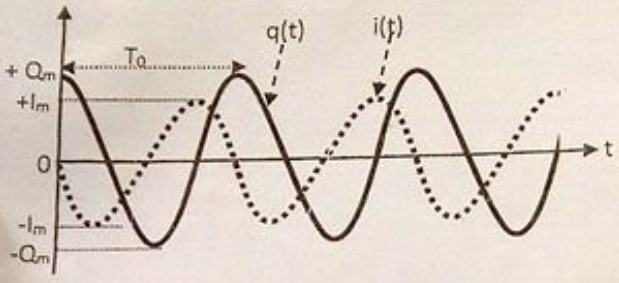
$P_m = U I \cos\varphi$

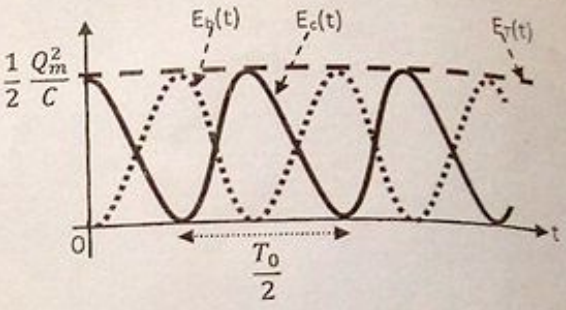
$2 \cdot 1 \times 1 \frac{R+r}{2}$

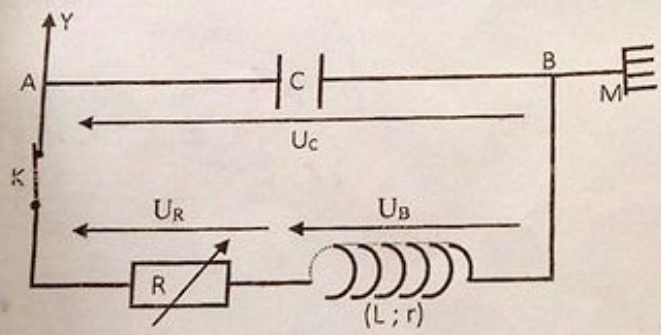
- En R.A.S, un dipôle en série transforme toute sa puissance électrique qu'il reçoit en chaleur dans sa partie résistive

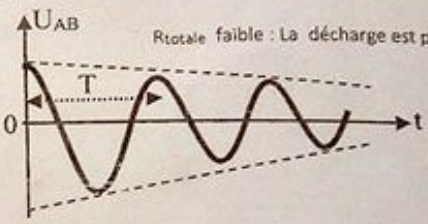


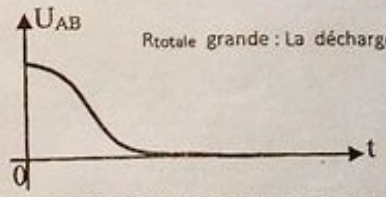




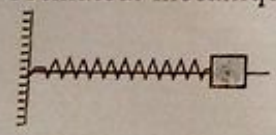




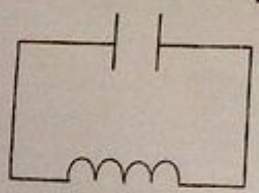




Oscillateur mécanique



Oscillateur électrique

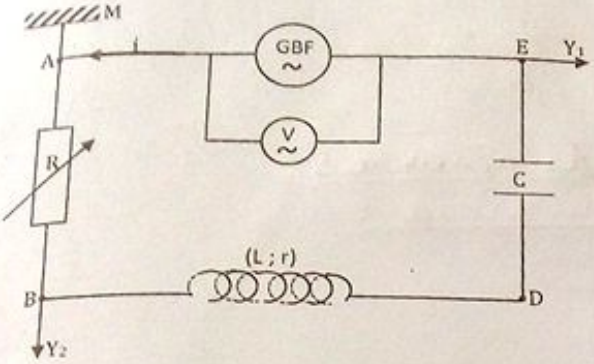


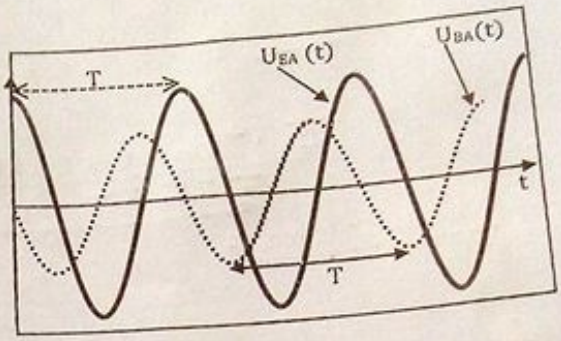
$m\ddot{x} + kx = 0$

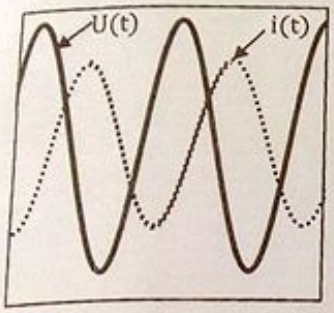
$L\ddot{q} + \frac{1}{C}q = 0$

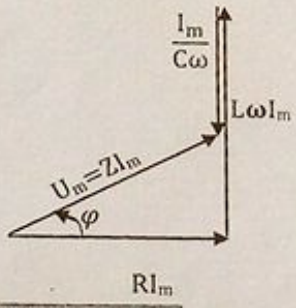
x (abscisse)		q (charge électrique)
$\dot{x} = v$ (vitesse)	⟷	$\dot{q}$ = i (intensité du courant)
m (masse du solide)		L (inductance de la bobine)
k (raideur du ressort)		$\frac{1}{C}$ (inverse de la capacité)
$E_p = \frac{1}{2}kx^2$	⟷	$E_e = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$
$E_c = \frac{1}{2}mv^2$		$E_m = \frac{1}{2}Li^2$
Masse	⟷	Bobine
Ressort		Condensateur
Force de frottement		Résistance

Censeur Berrada

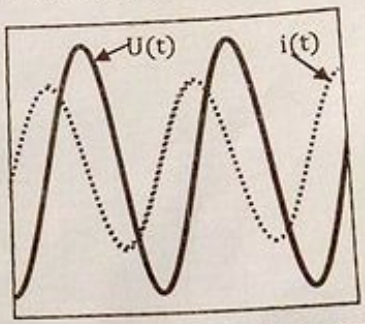


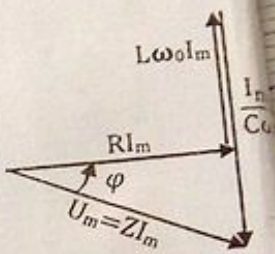






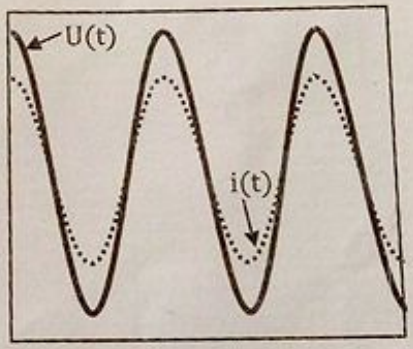
Circuit inductif : $\left(L\omega > \frac{1}{C\omega}\right)$; $\varphi > 0$; $\omega > \omega_0$; la tension u(t) est en avance sur l'intensité

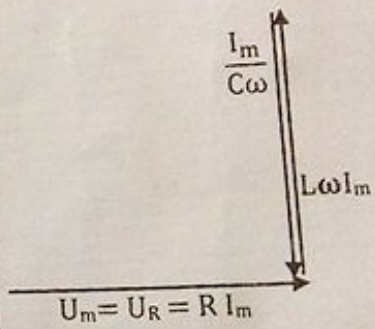


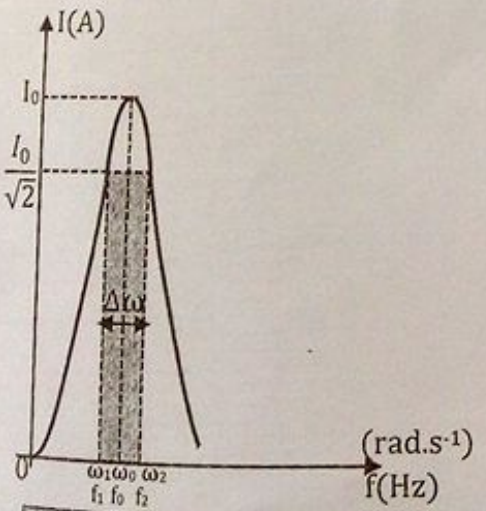


Circuit capacitif : $\left(L\omega < \frac{1}{C\omega}\right)$; $\varphi < 0$; $\omega < \omega_0$; la tension u(t) est en retard sur l'intensité i(t)

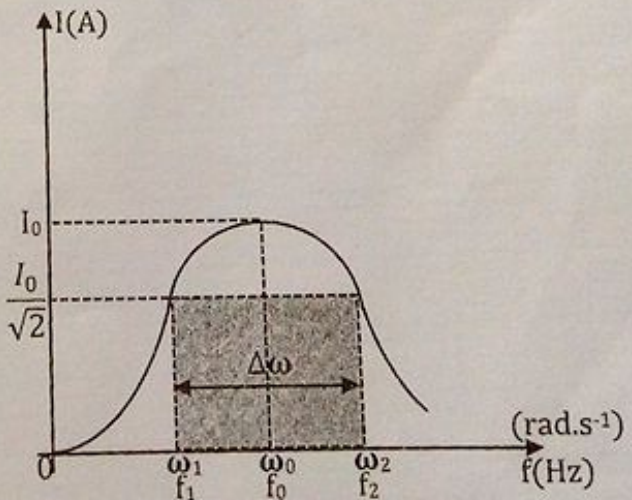
Circuit résistif : $\left(L\omega = \frac{1}{C\omega}\right)$; $\varphi = 0$; $\omega = \omega_0$; la tension u(t)et l'intensité i(t) sont en phase ; c'est la résonance d'intensité







$R_t = R_1$ faible : Résonance aigue



$R_t = R_2$ grande : Résonance floue

Interférences lumineuses
Effet Photoélectrique :
Applications :

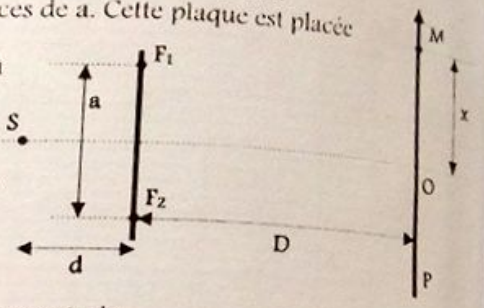
EXERCICE D'APPLICATION: On donne: $1eV = 1{,}6.10^{-19}J$; $h=6{,}62.10^{-34}J.s$; $e=1{,}6.10^{-19}C$; $C = 3.10^{8}m.s^{-1}$.

Des interférences lumineuses sont réalisées avec un laser He-Ne de longueur d'onde $\lambda_1 = 633$ nm.

Le dispositif comprend une plaque percée de deux fentes très fines distances de a. Cette plaque est placée à une distance d de la source laser S (voir figure).

On observe les interférences sur un écran P parallèle à la plaque et situé à une distance $D = 3$ m de celle-ci. Les deux fentes sont à égale distance de la source.

La droite (SO) est l'axe de symétrie du dispositif.



1/ Expliquer brièvement la formation des franges brillantes et des franges obscures sur l'écran.

2/ On montre que la différence de marche δ entre les rayons issus des fentes sources F_1 et F_2 s'exprime par

$\delta = \frac{ax}{D}$ en un point M d'abscisse x comptée à partir du milieu O de la frange centrale.

a/ Quelle condition doit vérifier δ pour qu'en un point P de l'écran, on observe une frange brillante ?

b/ Montrer que l'interfrange ou distance entre deux franges consécutives de même nature s'exprime par la formule

$i = \frac{\lambda D}{a}$

3/ Sur l'écran on mesure la distance entre cinq franges brillantes successives et on trouve $\Delta x = 25$mm. On remplace le laser He-Ne par une diode laser de longueur d'onde λ_d, sans rien modifier d'autre ; on mesure maintenant une distance $\Delta x' = 27$mm entre cinq franges brillantes successives.

a/ Trouver la relation donnant l'écart a entre les fentes F_1 et F_2 en fonction de λ_1, D et Δx. Faire l'application numérique.

b/ Trouver la relation donnant la longueur d'onde λ_d de la diode laser en fonction de λ_1, Δx et $\Delta x'$.

Faire l'application numérique.

4/ Les deux radiations sont successivement utilisées pour éclairer une cellule photo émissive de fréquence seuil $\nu_0 = 4{,}5.10^{14}$ Hz.

a/ Dans le cas où il y a émission d'électrons, calculer, en joule puis en électron-volt, l'énergie cinétique maximale Ec_{max} des électrons émis.

b/ Dire quel caractère de la lumière cette expérience met en évidence.

P.G.D

P12 : INTERFERENCES LUMINEUSES

P.G.D

I. GENERALITES SUR LES ONDES

Dans un milieu transparent, homogène et isotrope, la lumière se propage en ligne droite. Par conséquent, un rayon lumineux est un modèle qui représente le trajet suivi par la lumière (optique géométrique). Cette dernière a des limites car un faisceau lumineux dirigé sur un obstacle présentant une ouverture donne deux phénomènes selon le diamètre :

- Si le **diamètre d** de l'ouverture est **supérieur** à la **longueur d'onde** λ **(d>λ)**, on obtient le **phénomène de diaphragmation**
- Si le diamètre d de l'ouverture est **inférieur ou égal** à la **longueur d'onde** λ **(d≤ λ)**, on obtient le **phénomène de diffraction**

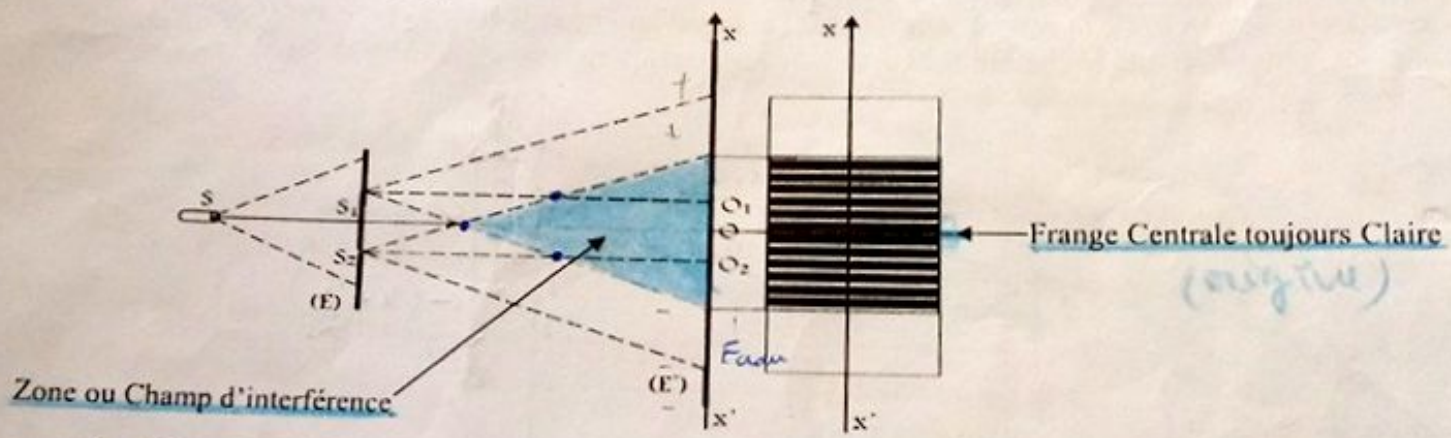
NB : Plus le diamètre de l'ouverture est petit, plus on obtient une tâche de diffraction plus grande.
La diffraction met en défaut le principe de propagation rectiligne de la lumière qui est donc une approximation.

II. INTERFERENCES EN LUMIERE MONOCHROMATIQUE

1. Mise en évidence du phénomène.

a. Dispositif expérimental : les fentes de YOUNG

Le dispositif est constitué d'une source lumineuse S (source principale) qui émet de la lumière monochromatique (**lumière constituée d'une seule radiation ou couleur donc caractérisée par une seule longueur d'onde** λ) sur un écran E percé de deux petits trous S_1 et S_2 très proches l'un de l'autre appelés sources secondaires.
Une partie de la lumière diffractée par S_1 et S_2 se superpose sur un autre écran E' parallèle à l'écran E et placé à une distance D de l'écran



b. Observations

On observe sur l'écran dans le champ d'interférence, alternativement, de **fines bandes (franges) brillantes (ou claires) et obscures (ou sombres) parallèles entre elles, équidistantes les unes aux autres et symétriques par rapport à une raie centrale (toujours brillante): ce sont des franges d'interférences.**

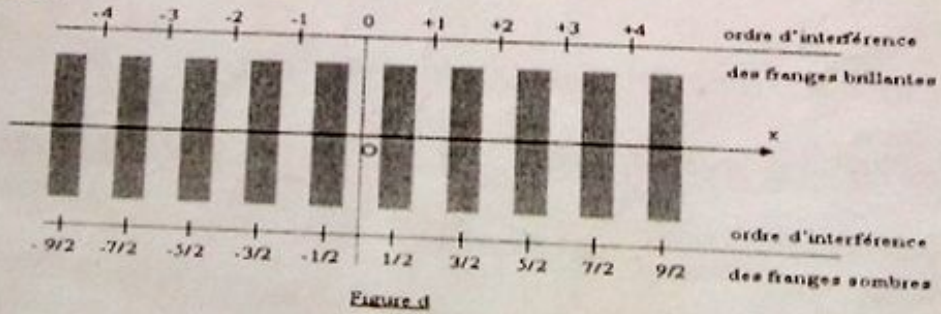


Figure d

Aspect du champ d'interférence sur l'écran

c. Interprétation

Pour expliquer les résultats de l'expérience, il faut considérer le caractère ondulatoire de la lumière.

► **L'apparition de franges brillantes en un point M de l'écran E1, résulte de la superposition de deux rayons lumineux (ondes lumineuses) issus de S_1 et S_2 arrivant en phase: on parle d'interférence constructive.** Les points d'une frange brillante vibrent avec une amplitude maximale.

► **L'apparition de franges sombre en un point M de l'écran E1, résulte de la superposition de deux rayons lumineux (ondes lumineuses) issus de S_1 et S_2 arrivant en opposition de phase: on parle d'interférence destructive.** Les points d'une frange obscure vibrent avec une amplitude nulle.

d. *Conclusion*

L'interférence lumineuse constitue ainsi une preuve de la nature ondulatoire de la lumière c'est-à-dire qu'elle peut se comporter comme une onde possédant une période temporelle(T) et une période spatiale λ

► **La période temporelle (T) est la durée que met l'onde pour se répéter identiquement à elle-même**. Elle s'exprime **en seconde (s)** dans le système international.

► **La période spatiale ou longueur d'onde (λ) est la distance parcourue une onde lumineuse durant une période temporelle (T).** Elle s'exprime **en mètre (m)** dans le système international.

NB: Si C est la célérité de la lumière de l'onde alors: $C = \frac{\lambda}{T} = \lambda \times \nu$; avec $\nu = \frac{1}{T}$ représente la fréquence (Hz). $C = 3.10^8$ m/s.

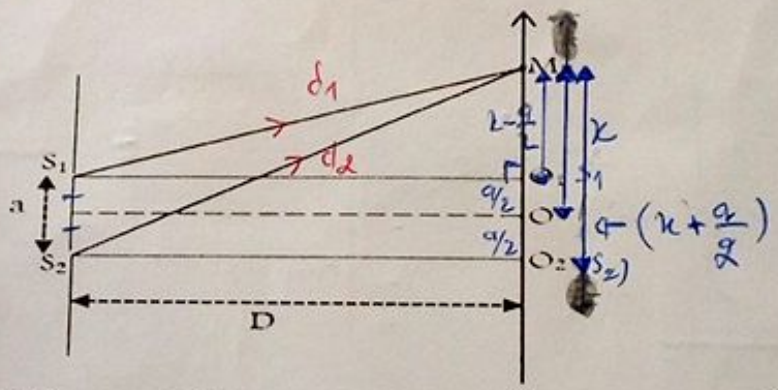
vitesse de la lumière

II-2/ Conditions d'obtention d'interférences lumineuses:

Pour obtenir un phénomène d'interférence lumineuse, il faut que les deux sources secondaires S_1 et S_2 soient **synchrones** (même fréquence et même amplitude) **et cohérentes** (même décalage dans le temps). Une interférence est donc la superposition de deux sources cohérentes.

II-3/ Différence de marche (δ):

Considère un point M de la zone d'interférence ; le rayon lumineux issu de S_1 parcourt le chemin $S_1M = d_1$ plus court que le chemin $S_2M = d_2$ parcouru par le rayon lumineux issu de S_2.



En posant: $S_1S_2 = a$; $OM = x$; $O_1M = x - \frac{a}{2}$; $O_2M = x + \frac{a}{2}$; $a <<< D$

On appelle différence de marche, la différence des deux chemins d_1 et d_2 notée $\delta = d_2 - d_1$.

En considérant les triangles rectangles (S_1O_1M) et (S_2O_2M) respectivement en O_1 et en O_2, d'après le théorème de Pythagore on a:

$d_1^2 = D^2 + (x - a/2)^2$ et $d_2^2 = D^2 + (x + a/2)^2$ ainsi $d_2^2 - d_1^2 = D^2 + (x + a/2)^2 - D^2 - (x - a/2)^2$

$(d_2 + d_1)(d_2 - d_1) = (x + a/2)^2 - (x - a/2)^2 = 2\,a.x$ **Or $a <<< D$ et $x <<< D$ alors $d_2 + d_1 = 2D$**

D'où on a :

$$\delta = \frac{ax}{D}$$

m | m

m m

II-4/ Positions des franges:

II-4-1/ Positions des franges brillantes (ou claires):

Un point M appartient à une frange brillante, si la différence de marche δ entre les deux ondes qui parviennent en M est: **δ est un multiple entier de λ avec $k \in \mathbb{Z}$** ($\delta = k\lambda$)

$\delta = k\lambda \Leftrightarrow \frac{ax}{D} = k\lambda$ donc la position d'une frange claire est : $x = \frac{k\lambda D}{a}$ avec $k = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots\ldots, n$ (ou 0, -1, -2, -3, ... -n)

Si $k = 0$, alors $x = 0$: milieu de la frange centrale (claire)
Si $k = 1$, alors $x = \lambda D / a$: milieu de la première frange brillante au-dessus de la frange centrale.

.
.

Si $k = -1$, alors $x = -\lambda D / a$: milieu de la première frange brillante en-dessous de la frange centrale.

.
.

Si $k = n$, alors $x = n. \lambda D / a$: milieu de la $n^{ième}$ frange brillante au-dessus de la frange centrale.

II-4-2/ Positions des franges obscures (ou sombres)

Un point M appartient à une frange sombre, si la différence de marche δ entre les deux ondes qui parviennent en M est : **δ est un demi entier multiple de λ avec $k \in \mathbb{Z}$**

$\delta = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda \Leftrightarrow \frac{ax}{D} = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda$ donc la position d'une frange sombre est : $x = \left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda D}{a}$ avec $k = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots\ldots, n$ (ou 0, -1, -2, -3, ... -n)

Si $k = 0$, alors $x = \lambda D / 2a$: milieu de la première frange obscure au-dessus de la frange centrale.
Si $k = 1$, alors $x = 3\lambda D / 2a$: milieu de la deuxième frange obscure au-dessus de la frange centrale.

.
.

Si $k = -1$, alors $x = -\lambda D / 2a$: milieu de la première frange obscure en-dessous de la frange centrale.

.
.

Si $k = n$, alors $x = (n + 1/2) \lambda D / a$: milieu de la (n + 1) frange obscure au-dessus de la frange centrale.

II-5/ Interfrange (i):

II-5-1/ Définition:

L'interfrange i est la distance qui sépare deux milieux de deux franges consécutives de même nature.

II-5-2/ Détermination:

Considérons la **frange brillante numéro k** et la frange brillante suivante, consécutive de **numéro k+1ou** bien la **frange sombre numéro k + ½** et la frange sombre suivante, consécutive numéro **k +1/2+1**.

-Pour les franges brillantes on aura: $i = x_{k+1} - x_k = (k+1) \lambda D / a - k \lambda D / a$ alors $i = \lambda D / a$

-Pour les franges sombres on aura: $i = x_{k+1/2+1} - x_{k+1/2} = (k+1/2+1) \lambda D / a - (k+1/2) \lambda D / a$ alors $i = \lambda D / a$

Remarque:

► La mesure de l'interfrange *i* connaissant **D** permet de déterminer la valeur de λ de la lumière monochromatique utilisée.

► **La lumière visible** correspond aux longueurs d'onde λ telles que: **400 nm ≤ λ ≤800 nm**..

► $x_{claire} = k\,i$ et $x_{sombre} = (k+1/2)i$

II-6/ Ordre d'interférence (p):

C'est le nombre p qui nous permet de connaitre la nature (obscure ou brillante) d'une frange. Soit

$p = \delta / \lambda = x / i$ car $\delta = a\,x / D$

► Si p est entier relatif (p = k) alors la $k^{ième}$ frange correspondante après la frange centrale est brillante.
► Si p est un demi-entier relatif (p = k + 1/2) alors la $k^{ième}$ frange correspondante après la frange centrale est sombre.

N.B: La valeur de p nous renseigne sur le numéro de la frange considérée, comptée à partir de la frange centrale pour laquelle son numéro p = 0 et pour x = 0.

III/ Interférences en lumière polychromatique:

III-1/ Interférence en lumière dichromatique: phénomène de superposition:

Considerons maintenant une source S de lumière dichromatique constituée des longueurs d'onde λ_1 et λ_2 qui éclaire les deux sources S_1 et S_2 simultanément.

Chaque longueur d'onde provoque un système d'interférence ; nous constatons que **les franges centrales brillantes des deux systèmes coïncident d'abord au centre de l'écran et cette coïncidence se répète périodiquement de part et d'autre du centre de l'écran.**

Au point de coïncidence on a:

$$x_{k1} = x_{k2} \longrightarrow k_1 \lambda_1 D / a = k_2 \lambda_2 D / a \text{ alors } k_1 / k_2 = \lambda_2 / \lambda_1$$

N.B: Ce rapport irréductible permet de trouver les numéros k_1 et k_2 des franges claires des deux longueurs d'onde qui se superposent. Cette superposition se répète périodiquement dans toute la zone d'interférence.

III-2/ Interférence en lumière blanche

La dispersion de la lumière blanche (lumière du soleil) par un prisme montre que celle- ci est formée d'une infinie de radiations allant du rouge au violet et présentant toutes les couleurs de l'arc en ciel ; l'ensemble de ces radiations (couleurs) constitue le spectre de la lumière blanche.

Ces radiations ne sont pas séparées : On dit que le spectre de la lumière blanche est un spectre continu; elle est donc constituée de toutes les radiations qui apparaissent dans l'arc – en – ciel.

La figure d'interférence présente :

- ► Au centre O de l'écran (E), une frange centrale blanche.
- ► De part et d'autre de celle-ci, on observe des franges aux bords colorés dites **franges irisées(colorées).**
- ► Enfin, plus loin d'elle, une coloration uniforme blanchâtre pour les franges brillantes: **coloration appelée blanc d'ordre supérieure.**

Explication

La lumière blanche étant constituée par un mélange de toutes les radiations visibles allant de (0,4µm) < λ visible < (0,8µm), l'éclairement de l'écran résulte de la superposition des systèmes de franges donnée par chaque lumière monochromatique.

Lorsqu'on analyse ce blanc au spectroscope, on voit des bandes noires qui correspondent aux radiations manquantes et que l'on désigne sous le nom de cannelures : on parle pour cette raison de spectre cannelé.

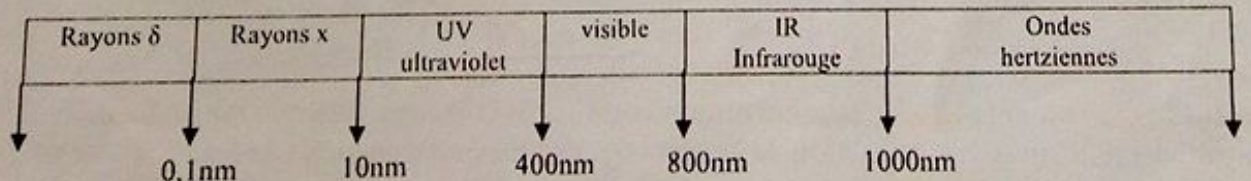
***Remarque* : Les radiations manquantes en un point donné sont celles qui y présentent une frange obscure donc celles pour lesquelles au point considéré** $\delta = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda$

$$x = \left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda D}{a} \Rightarrow \lambda = \frac{ax}{\left(k + \frac{1}{2}\right)D} \text{ or lumière visible } 400.10^{-9}\,m \le \lambda \le 800.10^{-9}\,m \text{ donc}$$

$$\frac{ax}{800.10^{-9} D} \le \left(k + \frac{1}{2}\right) \le \frac{ax}{400.10^{-9} D}$$

III-3/ Domaine des ondes électromagnétiques

L'observation de franges d'interférences à partir d'une source de lumière (onde électromagnétique) permet de calculer la longueur d'onde λ (en m) de cette source en mesurant l'interfrange. La connaissance de λ permet d'identifier cette source et de préciser sa place sur l'échelle des ondes électromagnétiques.



CONCLUSION

Le phénomène d'interférences lumineuses n'est pas seulement une preuve du caractère ondulatoire de la lumière, mais c'est aussi une méthode de mesure physique de longueur d'onde d'une source monochromatique.

P13 : EFFET PHOTOELECTRIQUE

I. Mise en évidence de l'effet photoélectrique: (Expérience de Hertz 1887)

1. Expériences

Une lame de zinc bien décapée, est posée sur le plateau d'un électroscope chargé. On éclaire la lame de zinc avec une lampe à vapeur de mercure (qui fournit des radiations ultraviolettes).

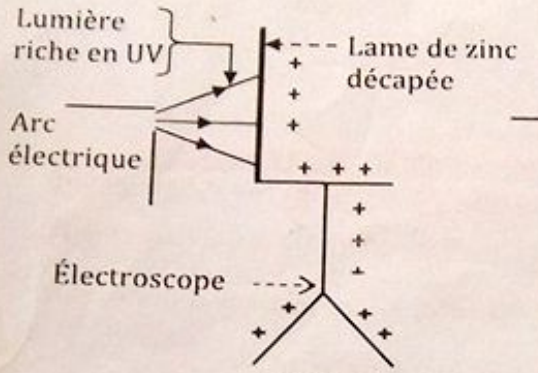


Figure 1

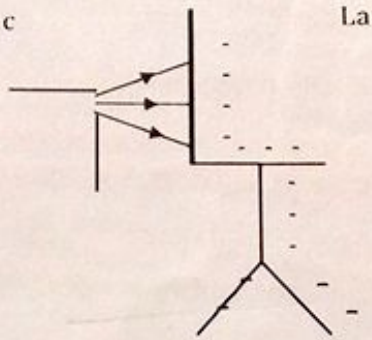


Figure 2

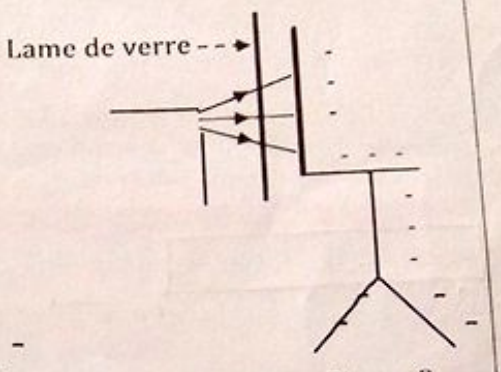


Figure 3

a) **Observation**

L'électroscope initialement chargé négativement se décharge lorsque la lame de zinc est éclairée (fig2).

b) **Interprétation**

L'expérience (fig.2) montre que l'électroscope ne peut se décharger que sur la lame de zinc. Ce qui suppose que la lame de zinc a perdu des charges négatives (électrons) durant son éclairage par les rayons ultraviolets. **Ce phénomène s'appelle effet photoélectrique.**

2. Définition

On appelle effet photoélectrique, l'émission d'électrons par un métal lorsqu'il est éclairé par une lumière convenable.

Remarques :

- ✓ Si on interpose une lame de verre entre la lumière et la lame de Zinc, il n'y aura pas de décharge : expérience (fig.3).

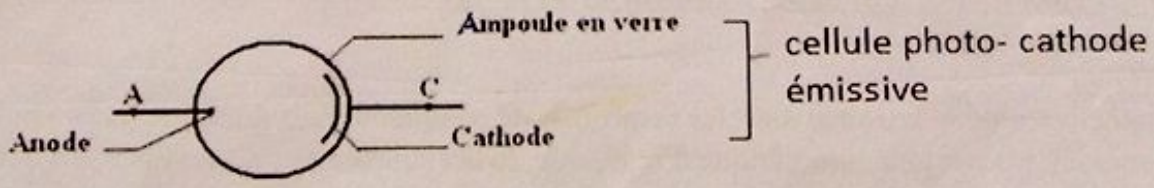
-Cette expérience montre que ce sont les radiations ultraviolettes qui sont responsables de la décharge de l'électroscope.

- ✓ Si l'électroscope est chargé positivement (fig.1), il n'y aura pas de décharge.

II. ETUDE EXPERIMENTALE

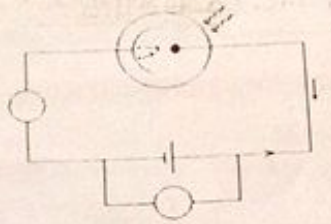
1. Dispositif : cellule photoélectrique

La cellule photo-émise est composée d'une ampoule de verre transparent aux U.V, dans laquelle on a fait le vide et qui renferme une plaque métallique sensible à la lumière appelée **cathode** et un mince filament appelé **anode.**



2. Expérience de Millikan

- La cathode est éclairée par une lumière monochromatique dont on peut faire varier l'intensité et la fréquence υ.
- L'anode portée à un potentiel supérieur à celui de la cathode ($U_{AC} > 0$), capte les électrons qu'expulse le métal de la cathode suite à son éclairement : il en résulte dans le circuit un courant de faible intensité que décèle le micro- ampèremètre.



NB : Résultats de l'expérience : Le seuil photoélectrique

On constate que pour un métal donné, quel que soit les valeurs de la tension U_{AC} aux bornes du générateur et quel que soit la puissance lumineuse, **il n'y a émission photoélectrique que si la fréquence υ du rayonnement est supérieure à une fréquence seuil (ou limite) ν_0 (ou ν_s)du métal:**

$\nu > \nu_s$ ou $\lambda < \lambda_s$ car $\lambda = CT = \frac{C}{\nu}$ et $\lambda_s = \frac{C}{\nu_s}$ avec λ la longueur d'onde du rayonnement qui est liée à sa fréquence υ et C = vitesse de la lumière dans le vide $C = 3\ 10^8$m/s. λ_s: **longueur d'onde seuil**

III. INTERPRETATION D'EINSTEIN DE L'EFFET PHOTOELECTRIQUE

Pour interpréter l'effet photoélectrique, **ALBERT EINSTEIN** considère le rayonnement électromagnétique (lumière) comme un flux de particules appelées photons ; chaque photon transporte **une énergie propre ou quantum** d'énergie proportionnelle à sa fréquence ν tel que :

$$E = h\upsilon = \frac{hC}{\lambda}$$

E est l'énergie du photon donc de la radiation.

Le coefficient de proportionnalité h est appelée constante de Planck. ($h = 6,62.10^{-34}$J.s)

NB :

- ***L'énergie d'extraction est l'énergie minimale à envoyer sur un métal pour lui arracher un électron***
- ***Pour extraire un électron d'un métal, le photon lui fournit une énergie supérieure ou égale à une valeur minimale appelée énergie ou travail d'extraction $W_0 = h\upsilon_0$.***

L'énergie supplémentaire éventuelle du photon est transférée à l'électron sous forme d'énergie cinétique.

D'après le principe de conservation de l'énergie :

$$E(\text{photon}) = W_0 + E_c \quad \text{donc} \quad E_c = h\nu - W_0 = hC\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_s}\right)$$

CONCLUSION : DUALITE ONDE-CORPUSCULE

La lumière se présente sous deux aspects :

- **Les phénomènes de diffraction et d'interférences lumineuses** ont permis de montrer que **la lumière est de nature ondulatoire**
- Au début du XX^e siècle, Albert Einstein remet finalement en question la nature ondulatoire de la lumière **par la théorie des «quanta» en considérant que la lumière est constituée de photons. Ceci met en évidence le caractère corpusculaire de la lumière.**

APPLICATIONS

- L'effet photoélectrique se retrouve dans les dispositifs de commande tels que : la mise en marche d'un escalier roulant, l'ouverture automatique d'une porte, le déclenchement d'un système d'alarme… « Un faisceau lumineux (invisible) tombant sur une photopile y produit un courant photoélectrique dont la suppression par un corps déclenche le fonctionnement d'un dispositif »
- Il est aussi utilisé dans les cellules photovoltaïques par une transformation de l'énergie solaire en énergie électrique.

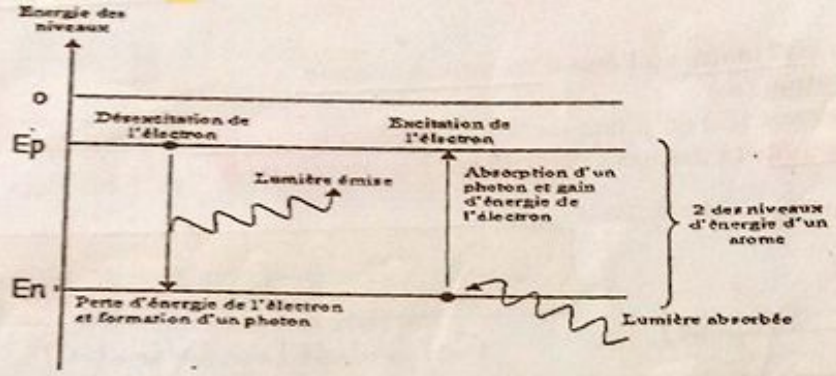
P14 : NIVEAUX D'ENERGIE DE L'ATOME

I. SPECTRES ATOMIQUES

Le spectre atomique d'un atome est l'**ensemble des radiations** (lumières) qu'il échange (absorption ou émission) avec le milieu extérieur. Il est constitué de deux parties: **le spectre d'absorption et le spectre d'émission**.

1. Spectre d'absorption et Spectre d'émission

- **L'absorption d'un photon** (particule d'énergie lumineuse) correspond à **une excitation** d'un atome qui passe d'un **niveau inférieur d'énergie En** à un niveau **supérieur Ep**.
- **L'émission d'un photon** correspond à une **désexcitation** d'un atome (car un atome excité n'est pas stable; il a toujours tendance à **restituer l'énergie absorbée** pour être stable: l'énergie de l'atome diminue) passant d'un **niveau supérieur d'énergie Ep** à un **niveau inférieur d'énergie En**. Avec p>n



- **Lors de l'excitation** c-à-d **l'absorption** on a **Eph=Ep-En= hν**
- **Lors de la désexcitation** c-à-d **l'émission** on a **Eph=En-Ep= -hν alors Eph=Ep-En= hν**

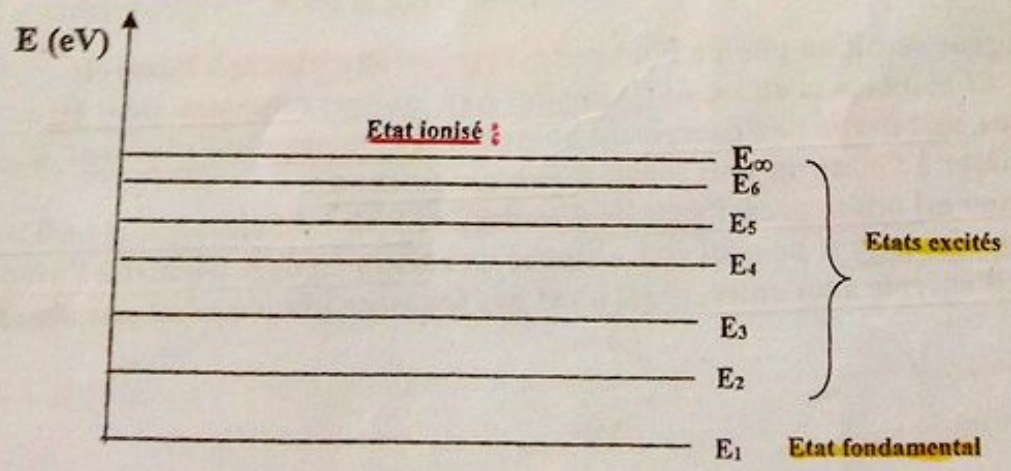
NB : Les raies d'émission d'un atome correspondent exactement à celles d'absorption: les spectres d'absorption ou d'émission sont donc complémentaires. Un atome ne peut émettre que la lumière qu'elle a absorbée

2. Postulat de Bohr

Bohr rassemble les résultats concernant des spectres atomiques et le modèle du photon:

- Les variations d'énergies d'un atome sont quantifiées (Energie classé par niveau)
- L'atome peut passer d'un niveau d'énergie En à un autre Ep par absorption ou par émission d'un **seul photon ou quantum**. Ainsi le spectre lumineux des atomes est discontinu.
- L'absorption ou l'émission d'un photon par l'atome n'affecte qu'un seul électron de l'atome qui effectue une transition électronique. Ainsi l'énergie du photon absorbée ou émise est donnée par : $E_{ph} = |E_n - E_p| = h\upsilon = h|\upsilon_n - \upsilon_p|$ avec **Eph>0 : adsorption et Eph< 0: émission**

❖ **Diagramme énergétique**



II. Niveau d'énergie de l'atome

1 Energies de l'atome d'hydrogène

a. Expression

D'après l'étude du spectre des atomes, Bohr a montré que les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène sont quantifiés et forment une suite donnée par :

$$E_n = -\frac{E_0}{n^2}$$

-n : nombre quantique principal ($n \in N^*$) qui représente le numéro de la couche électronique occupée par l'électron

- $E_0 = 13{,}6eV$: énergie de l'atome d'hydrogène à l'état fondamental

-Si n=1; $E_1 = -E_0 = -13{,}6eV$ (c'est l'état fondamental le plus stable car l'énergie est la plus basse)

-Si n=2; $E_2 = -E_0/2^2 = -3{,}4eV$ (1^{er} niveau excité)

-Si n=3; $E_3 = -E_0/3^2 = -1{,}51eV$ (2^{er} niveau excité)

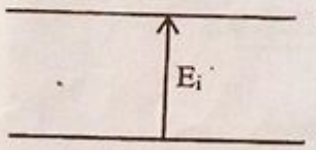
} excité

$1eV \rightarrow 1{,}6.10^{-19} J$

-Si $n=\infty$; $E_\infty = 0$ eV: état ionisé ou l'état d'énergie maximale

b. Energie d'ionisation (E_i)

C'est l'énergie minimale (E_i) qu'il faut fournir à l'atome d'hydrogène dans son état fondamental pour lui arracher son électron et l'amener à l'infini avec une énergie nulle.



$$E_i = E_\infty - E_1 = 0 - E_1 \Rightarrow E_i = E_0 = 13{,}6eV$$

finale initiale (état fondamental)

NB : Lorsque l'énergie hυ fournie à l'atome est supérieure à l'énergie d'ionisation (E_i), une partie de cette énergie permet l'ionisation, le reste est transféré à l'électron éjecté sous forme d'énergie cinétique.

2. Séries des raies d'émission de l'hydrogène

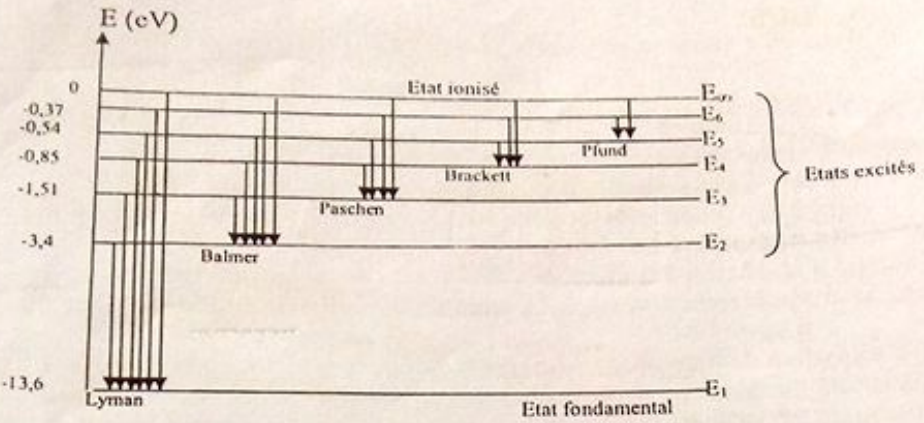
Lors d'une transition du niveau E_p à un niveau inférieur E_n, un photon de fréquence υ (de longueur d'onde $\lambda = \frac{c}{\upsilon}$) et d'énergie $E = h\upsilon$ est émis.

L'ensemble des raies constituant le spectre d'émission de l'atome d'hydrogène peut être placé en série dont chacune correspond aux transitions qui aboutissent au même niveau d'énergie.

- **Série de Lyman: transition de p vers n=1; p>n ; alors $E_p = E_{ph} + E_1$**
- **Série de Balmer: transition de p vers n=2; p>n ; alors $E_p = E_{ph} + E_2$**
- **Série de Paschen: transition de p vers n=3; p>n ; alors $E_p = E_{ph} + E_3$**
- **Série de Brackett: transition de p vers n=4; p>n ; alors $E_p = E_{ph} + E_4$**
- **Série Pfund: transition de p vers n=5; p>n ; alors $E_p = E_{ph} + E_5$**

Remarques

- ✓ **Si l'atome d'hydrogène reçoit un photon dont son énergie est supérieure à l'énergie d'ionisation $E_{ph} > E_i$ alors $\upsilon > \upsilon_i$ ou $\lambda < \lambda_i$ (le photon sera ioniser) ce photon peut être absorbé. Dans ce cas, une partie de l'énergie du photon sert à l'ioniser et l'excédent d'énergie est transférer à l'électron sous forme d'énergie cinétique.**
- ✓ **Si l'énergie du photon est inférieure à l'énergie d'ionisation $E_{ph} < E_i$ alors $\upsilon < \upsilon_i$ ou $\lambda > \lambda_i$ (le photon ne sera pas ioniser) et ne peut être absorbé que si son énergie permet à l'atome de passer d'un niveau d'énergie à un autre. Si tel n'est pas le cas, ce photon n'est pas absorbé.**



3. Longueur d'onde émise lors d'une transition (p vers n)

Une série de raies d'émission correspond aux transitions qui aboutissent au même niveau d'énergie. La transition (p vers n) produit la radiation de fréquence ν correspondant à la longueur d'onde λ telle que:

Eph=Ep-En= hν

$$E = E_p - E_n \Leftrightarrow \frac{hC}{\lambda} = -\frac{E_0}{p^2} + \frac{E_0}{n^2} \Rightarrow \sigma = \frac{1}{\lambda} = \frac{E_0}{hC}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2}\right) \quad avec\ n < p$$

Avec $\frac{E_0}{hC} = R_H = 1{,}096.10^7\, m^{-1}$ est la constante de Rydberg

$\sigma = \frac{1}{\lambda}$ appelé nombre d'onde; $\frac{1}{\lambda_{pn}} = R_H\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2}\right)$

Exemple

Serie de Lyman (p vers n=1) ; $\frac{1}{\lambda_{p1}} = R_H\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{p^2}\right)$ **donc on aura:**

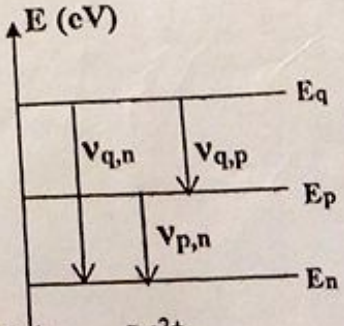
$\lambda_{21} = 122nm$; $\lambda_{31} = 103nm$; $\lambda_{41} = 97,5nm$;..... ; $\lambda_{\infty 1} = 91,2nm$; cela montre que les longueurs d'onde limites de la série de Lyman se trouvent dans le domaine ultraviolet (UV).

NB: Calculer les longueurs d'onde des autres séries et conclure.

4. Loi de combinaison de Ritz

Si un atome quitte un niveau d'énergie q vers un niveau d'énergie n en passant par un niveau p, on utilise la loi de combinaison de Ritz

$E_q - E_n = (E_q - E_p) + (E_p - E_n) \Rightarrow \nu_{q,n} = \nu_{q,p} + \nu_{p,n} \Rightarrow \frac{1}{\lambda_{q,n}} = \frac{1}{\lambda_{q,p}} + \frac{1}{\lambda_{p,n}}$



III. GENERALISATION: IONS HYDROGENOIDES

Ce sont des ions qui possèdent un seul électron mais Z≠1. Exemples : ${}_2He^+$; ${}_3Li^{2+}$

Pour ces ions, le diagramme d'énergie est identique à celui de l'atome d'hydrogène mais les énergies des différents niveaux sont plus faibles et son données par :

$$E_n = -\frac{Z^2 E_0}{n^2}$$

En: energie du niveau

Z: nombre de protons ou numéro atomique; Eo=13,6eV

Exemples: ${}_2He^+$ **(Z=2) ;** $En = -\frac{2^2 \times 13,6}{n^2} = -\frac{54,4}{n^2}\ eV$

EXERCICE D'APPLICATION:

1/ Dans la théorie de Bohr de l'atome d'hydrogène, les énergies des différents niveaux sont données par la formule:

$E_n = -\frac{13,6}{n^2}$ (en eV) ; n est un nombre entier positif.

Le spectre d'émission de l'atome d'hydrogène contient les trois raies visibles:
(orangée) : λ_1 = 656,3 nm ; (bleue) : λ_2 = 486,1 nm ; (indigo) : λ_3 = 434,1 nm.
On donne les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène dans le diagramme énergétique simplifié ci-contre :
a/ Quel est le niveau correspondant à l'état fondamental ?
b/ Calculer, en eV, l'énergie d'un photon des radiations lumineuses de longueur d'onde λ_1, λ_2, λ_3.
c/ Montrer que chacune de ces trois raies correspond à une transition d'un niveau excité, que l'on précisera, au niveau n = 2.
d/ Quelle est l'énergie d'ionisation de l'atome d'hydrogène ? Quelle est la longueur d'onde correspondant à l'ionisation de l'atome d'hydrogène (pris à l'état fondamental) ?
2/ Une source de lumière composée de ces trois radiations λ_1, λ_2, λ_3 est utilisée pour éclairer une cellule photoélectrique au potassium. L'énergie d'extraction d'un électron du métal potassium est w_0 = 2,2 eV. A l'aide de filtres appropriés on peut isoler chacune des radiations précédentes pour étudier leur effet.
a/ Quelles sont parmi ces trois radiations celles qui provoquent une émission d'électrons ? Justifier la réponse.
b/ Calculer la vitesse maximale d'émission des électrons pour chacun des cas où l'émission est possible. **Données numériques : 1 eV = $1,6.10^{-19}$ J ; constante de Planck : h = $6,62.10^{-34}$ J.s ; célérité de la lumière dans le vide: C = 3.10^8 m.s^{-1} ; masse de l'électron: m = $9,1.10^{-31}$ kg ; charge élémentaire : e = $1,6.10^{-19}$ C.**

P15 : LES REACTIONS NUCLEAIRES

I. LE NOYAU

Un atome est constitué d'un noyau chargé positivement autour du quel gravitent des électrons chargés négativement.

I-1. Constituants et symbole d'un noyau

Le noyau de l'atome est constitué de particules élémentaires appelées **nucléons (A)** composés **protons (Z)** et les **neutrons (N)**. $A = Z+N$ avec :

A: nombre de nucléons appelé aussi nombre de masse

Z: nombre de protons ou numéro atomique ou nombre de charge

Caractéristiques des protons et des neutrons $m_p \approx m_n \approx 1{,}67.10^{-27}kg$; $q_p = +e = 1{,}6.10^{-19}C$; $q_n = 0C$

I-2. Nucléide

Un nucléide est l'ensemble des noyaux des atomes d'un même élément ayant la même la valeur de Z et la même valeur de A. on le note ${}^{A}_{Z}X$ où X est le symbole de l'élément chimique, A nombre de nucléons et Z son numéro atomique. Exemples : ${}^{16}_{8}O$; ${}^{12}_{6}C$; ${}^{1}_{1}H$; ${}^{14}_{7}N$; ${}^{234}_{92}U$.

I-3. Notion d'isotope

Ce sont des nucléides qui ont le même nombre de protons (Z), mais des nombres de nucléons (A) différents.

Exemple : Oxygène : ${}^{16}_{8}O$; ${}^{17}_{8}O$; ${}^{18}_{8}O$; Carbone : ${}^{12}_{6}C$; ${}^{13}_{6}C$; ${}^{14}_{6}C$; l'uranium: ${}^{234}_{92}U$; ${}^{235}_{92}U$; ${}^{238}_{92}U$

Exercice d'application 1 :

a) Le noyau de l'atome de chlore contient 17 protons et 18 neutrons. Donner la représentation de ce nucléide. ${}^{35}_{17}Cl$ $A = Z+N = 35$

b) Donner la composition du noyau ${}^{226}_{88}Ra$

$A = 226$
$Z = 88$
$N = 226 - 88 = 138$

II. EQUIVALENCE MASSE-ENERGIE

En 1905, **Albert Einstein** postule l'équivalence entre masse et énergie.

II-1. Relation d'Einstein

Une particule matérielle, même **au repos**, du seul fait de sa **masse m**, possède une **énergie E** appelée « **énergie de masse** » donnée par la **relation d'Einstein** : $E = m.c^2$ où **C est la célérité (vitesse) de la lumière dans le vide ($c = 3.10^8$ m/s) ; E(J) et m (kg).**

Remarque: électronvolt(eV): $1eV = 1{,}6.10^{-19}J$; méga électronvolt(MeV): $1MeV = 10^6 eV = 1{,}6.10^{-13}J$.

-unité de masse atomique (u): $1u = 1{,}66.10^{-27}kg$.

$1u = 931{,}5\ MeV/C^2$ alors $1u.c^2 = 1{,}66.10^{-27} \times (3.10^8)^2 \approx 931{,}5\ MeV$. - Si la masse est en u

II-2. Stabilité d'un noyau

a) Défaut de masse (Δm) du noyau

Des mesures précises montrent que **la masse d'un noyau ${}^{A}_{Z}X$** est toujours inférieure à la somme des masses des de ses différents nucléons: $m({}^{A}_{Z}X) < (Zm_p + (A-Z)m_n)$

Le défaut de masse Δm du noyau est la différence entre la somme des masses des nucléons et la masse du noyau : $\Delta m = Zm_p + (A-Z)m_n - m({}^{A}_{Z}X)$

7 7 48 5 7 7 62

b) **Energie de liaison** (E_ℓ) c'est pour un atome

C'est l'énergie qu'il faut fournir pour séparer les nucléons d'un noyau au repos. D'après le principe de l'équivalence masse-énergie, au défaut de masse Δm correspond une libération d'énergie égale à l'énergie de liaison :

$$E_\ell = \Delta m.c^2 = \{Zmp + (A-Z)mn - m(^A_Z X)\}c^2$$

c) **Energie de liaison par nucléon**

L'énergie de liaison par nucléon d'un noyau, noté E_A est le quotient de son énergie de liaison E_ℓ par le nombre de ces nucléons A : $E_A = \frac{E\ell}{A}$. Cette grandeur caractérise la stabilité du noyau.

-Si $E_A \geq$ 8 MeV/nucléon alors le noyau est stable

-Si $E_A <$ 8 MeV/nucléon alors le noyau est instable

Exercice d'application 2 :

1) Calculer l'énergie de liaison du noyau d'hélium $^4_2$He.

On donne : m_n =1,0090u; m_p=1,0076u et $m_{(He)}$= 4,0028u.

2) Calculer l'énergie de liaison par nucléon puis conclure.

Le noyau d'hélium $^4_2$He possède: 4 nucléons (A=4) ; 2 protons (Z=2) et 2 neutrons (N=4-2=2).
$\Delta m = \{(2\times1,0076+2\times1,009) - 4,0028\} = 0,0304$ u $= 0,0304\times931,5 MeV/c^2$ or $E_\ell = \Delta m.C^2$ soit :
$E_\ell = 0,0304\times931,5$ MeV = 28.3176 MeV alors E_A=28.3176 MeV/4=7,0794 MeV/nucléon < 8 MeV/nucléon : donc le noyau d'hélium $^4_2$He est instable.

NB: si les masses étaient en Kg, on aurait: $E_\ell = \{(2m_p+2m_n) - m_{(He)}\}.C^2$
En joule : $E_\ell = \{(2\times1,67265.10^{-27}+2\times1,67496.10^{-27}) - 6,6447.10^{-27}\} \times (3.10^8)^2 = 4,5468.10^{-12}$J
En eV : $E_\ell = \frac{4.5468.10^{-12}}{1,6.10^{-19}}$ = 28417500 eV ; en MeV : E_ℓ =28,4175 MeV.

III. LA RADIOACTIVITE

En 1896, **Henry Becquerel** découvrit que l'uranium et ses composés émettaient continuellement un rayonnement capable de traverser la matière. Poursuivant les travaux de **Becquerel, Pierre et Marie Curie ont donné à ce phénomène le nom de radioactivité.**

III-1. Définition

La radioactivité est la transformation spontanée (désintégration) des noyaux atomiques instables (radioactifs) en d'autres noyaux plus stables avec émission de particules et de rayonnement radioactifs (α; β^+ ;β^-et γ).

III-2. Caractéristiques

Les transformations radioactives sont: **spontanées, aléatoires , inéluctables et indépendantes**

III-3. Lois de conservation : lois de Soddy

La désintégration d'un noyau X (**appelé noyau père**) conduit à un noyau Y (**appelé noyau fils**) et à l'expulsion d'une particule P (**particules α; β^+ ; β^-et γ).**

L'équation de la désintégration s'écrit : $^A_Z X \rightarrow {}^{A_1}_{Z_1}Y + {}^{A_2}_{Z_2}P$ } Noyau fils

Noyau père

Lois de conservation de Soddy s'écrivent :

- conservation du nombre de nucléon A : $A = A_1 + A_2$
- conservation du nombre de charges Z : $Z = Z_1 + Z_2$

III-4. Energie libérée lors d'une désintégration (ΔE)

L'énergie libérée (dégagée) lors d'une désintégration (ΔE) du noyau X a pour expression:

$$\Delta E = (m_X - m_Y - m_\alpha).c^2 = \Delta m.c^2$$

III-5. LES RAYONNEMENTS α ; β et γ

On distingue les différentes désintégrations nucléaires spontanées suivantes : la radioactivité α, la radioactivité β^+, la radioactivité β^- et l'émission γ.

a) Rayonnement α

La radioactivité α correspond à l'émission d'une particule α ou noyau d'hélium ($^4_2\mathbf{He}$) par un noyau père instable.

Equation de désintégration α : $\quad {}^A_Z X \longrightarrow {}^{A-4}_{Z-2}Y + {}^4_2He$

Exemple: ${}^{210}_{84}Po \longrightarrow {}^{206}_{82}Pb + {}^4_2He$

Remarque: Lors d'une désintégrationα, si le noyau père est initialement au repos, la conservation de la quantité de mouvement s'écrit : $m_Y\vec{V_Y} + m_\alpha\vec{V_\alpha} = \vec{0}$ donc le noyau fils Y recule et on a : $m_Y V_Y = m_\alpha V_\alpha$ (1). La conservation de l'énergie totale s'écrit : $E_{lib} = Ec_\alpha + Ec_Y$ ou $E_{lib} = Ec_\alpha + Ec_Y + E_{ph}$ si un photon est libéré.

(1) entraine $\frac{V_Y}{V_\alpha} = \frac{m_\alpha}{m_Y}$ donc $\frac{V_Y}{V_\alpha} = \frac{m_\alpha}{m_Y} = \frac{Ec_Y}{Ec_\alpha}$ car $Ecy = \frac{1}{2}m_Y V_Y^2 = \frac{1}{2}m_Y \times \frac{m_\alpha^2 V_\alpha^2}{m_Y^2} = \frac{m_\alpha}{m_Y} \times E_{C\alpha}$

b) Rayonnement β^+

La radioactivité β^+ correspond à l'émission d'un positon ou positron ($^0_{+1}e$) de charge +e appelé particule β^+ et d'un neutrino ($^0_0\nu$) par un noyau père instable.

Equation de désintégration β^+ : $\quad {}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z-1}Y + {}^0_{+1}e + {}^0_0\nu$

Exemple: ${}^{30}_{15}P \longrightarrow {}^{30}_{14}S_i + {}^0_{+1}e + {}^0_0\nu$

Remarque: Tout se passe comme si un proton du noyau se transforme en neutron ^1_0n et en positon $^0_{+1}e$ suivant l'équation bilan:

$$^1_1P \rightarrow {}^1_0n + {}^0_{+1}e + {}^0_0\upsilon$$

c) Rayonnement β^-

La radioactivité β^- correspond à l'émission d'un électron ($^0_{-1}e$) de charge –e appelé particule β^- et d'un antineutrino ($^0_0\bar{\nu}$) par un noyau père instable.

Equation de désintégration β^- : $\quad {}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z+1}Y + {}^0_{-1}e + {}^0_0\bar{\nu}$

Exemple: ${}^{60}_{27}C_o \longrightarrow {}^{60}_{28}N_i + {}^0_{-1}e + {}^0_0\bar{\nu}$

Remarque : Tout se passe comme si un neutron du noyau se transforme en proton et en électron suivant l'équation : $\quad {}^1_0n \rightarrow {}^1_1P + {}^0_{-1}e + {}^0_0\bar{\upsilon}$

d) Rayonnement γ

À la suite d'une désintégration α, β^+ ou β^-, le noyau fils émis est en générale dans un état excité (renfermant un excès d'énergie); il est noté Y^*. Le noyau fils devient stable en libérant son excédent d'énergie sous forme de rayonnement γ appelé photon: on dit qu'il se **désexcite**.

Equation de désexcitation s'écrit : ${}^{A}_{Z}Y^{*} \rightarrow {}^{A}_{Z}Y + \gamma$

Exemple cas d'une émission α : ${}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}Y^{*} + {}^{4}_{2}He$ ou ${}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}Y + {}^{4}_{2}He + \gamma$

III.6. Loi de décroissance radioactive

III.6.1. Loi de décroissance

Soient N_0 le nombre de noyaux radioactifs à la date t= 0 et N le nombre de noyau restant à la date t. Le nombre de noyau qui se désintègre pendant l'intervalle de temps noté $(-dN/dt)$ est proportionnelle à N. La constante de proportionnalité notée λ est caractéristique du noyau radioactif considéré. Elle est appelée constante radioactive du noyau considéré, son unité est l'inverse de celui du temps. On a alors: $-dN = \lambda N dt$. Par intégration, on obtient la relation :

$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ avec λ est la constante radioactive et s'exprime en s^{-1}.

On peut avoir aussi $m = m_0 e^{-\lambda t}$ car $N = n.\mathcal{N} = \frac{m}{M}\mathcal{N}$ mais aussi $N_0 = n_0.\mathcal{N} = \frac{m_0}{M}\mathcal{N}$

III.6.2. Période radioactive d'un nucléide

La période T ou temps de demi-vie est le temps au bout duquel la moitié des noyaux initialement présents ont subi une désintégration.

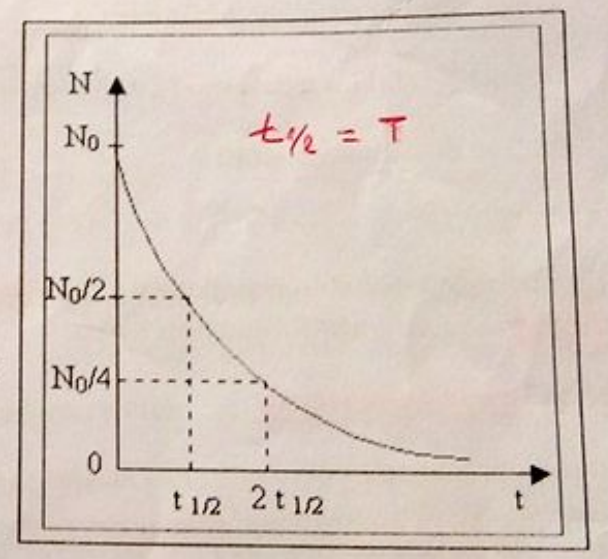
$$N = \frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T} \rightarrow T = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

Remarque : Un nucléide est d'autant plus radioactif que sa période T est petite.

III.6.3. Courbe de décroissance radioactive :

A partir de la relation $N = N_0/2^n$, on peut tracer la courbe N=f(t) $t = nT$

t (temps)	0	$t_{1/2}$	$2t_{1/2}$	$3t_{1/2}$	$4t_{1/2}$
N (nombre de noyaux restant	N_0	$N_0/2$	$N_0/4$	$N_0/8$	$N_0/16$



Sur cette courbe, la constante de temps τ est l'abscisse du point d'intersection de la tangente à la courbe à t = 0 avec l'axe des abscisses; on a $\tau = \frac{1}{\lambda}$

NB: Au bout d'un temps t on a: t=nT; $N = N_0/2^n$ (relation importante).

III.7. L'activité d'une source radioactive

- **Définition**: L'activité A d'une source radioactive (ou d'un échantillon radioactif) est le nombre de désintégrations effectuées par unité de temps (seconde). Elle s'exprime en becquerel (Bq).

$$A = -\frac{dN}{dt} = \lambda N \rightarrow A = \lambda N$$

$$A = \lambda N_0 e^{-\lambda t} \rightarrow A = A_0 e^{-\lambda t} \text{ avec } A_0 = \lambda N_0$$

Remarque:

- **1 Bq = 1 désintégration par seconde**

A diminue au cours du temps.

- Une autre unité d'activité le curie (Ci) : $1Ci = 3{,}7.10^{10}Bq$.
- Au bout du temps nT, l'activité A est donné par $A = \frac{A_0}{2^n}$

Application:

Le $^{210}_{84}Po$ est émetteur α avec une période T = 3min3s

1°) Ecrire l'équation de désintégration en précisant le noyau fils.

2°) Calculer A_0 activité radioactive de ^{210}Po d'un échantillon de 1mg.

3°) Quelle masse de polonium 210 de cet échantillon reste- t-il au bout de 12 min ? Quelle est alors l'activité de l'échantillon à cette date ? On donne: $\mathcal{N} = 6{,}02\ 10^{23}mol^{-1}$ $_{80}Hg$ $_{81}Tl$ $_{82}Pb$ $_{83}Bi$ $_{84}Po$ $_{85}At$ $_{86}Rn$

III.8. Familles radioactives :

Une famille radioactive est l'ensemble des noyaux instables issu du même noyau instable initial et qui, par désintégrations successives aboutit au même noyau stable. Il existe quatre familles : celle de l'uranium 235 : $^{235}_{92}U$; celle de l'uranium 238 : $^{238}_{92}U$; celle du Thorium 232 : $^{232}_{90}Th$ et celle du Neptunium 239 ; $^{239}_{93}Np$.

IV. Réactions nucléaires provoquées : fission et fusion.

IV.1. Définition

Une réaction nucléaire est dite provoquée lorsqu'un noyau cible est frappé par un noyau projectile et donne naissance à de nouveaux noyaux.

IV.2. Fission nucléaire :

a) **Définition:**

La fission est une réaction nucléaire provoquée au cours de laquelle un noyau lourd "fissile" (c'est- à-dire capable de subir une réaction de fission) **donne naissance à deux noyaux plus légers sous l'impact d'un neutron** (^1_0n).

b) **Exemples:**

$^1_0n + {}^{235}_{92}U \rightarrow {}^{94}_{38}Sr + {}^{140}_{54}Xe + 2(^1_0n)$;

$^1_0n + {}^{235}_{92}U \rightarrow {}^{91}_{36}Kr + {}^{142}_{56}Ba + 3(^1_0n)$;

$1 + 225 = 94 + 2 + 140$

$0 + 92 = 54 + 0$

IV-3. Fusion nucléaire

a) **Définition**

La fusion est une réaction nucléaire provoquée au cours de laquelle deux noyaux légers s'unissent pour former un noyau plus lourd.

b) **Exemples**

$^2_1H + {}^2_1H \rightarrow {}^3_1H + {}^1_1P$; $^2_1H + {}^2_1H \rightarrow {}^3_2He + {}^1_0n$; $^2_1H + {}^3_1H \rightarrow {}^4_2He + {}^1_0n$

V) APPLICATIONS

La radioactivité offre de nombreuses applications dont la datation des objets archéologiques par le carbone 14, la radiographie en médecine, la détermination du volume sanguin...

Les réactions nucléaires ont cependant pour application principale la production d'énergie électrique dans les centrales nucléaires.

EXERCICE D'APPLICATION:

Données: $1u = 1,66.10^{-27}$ Kg = 931,5 MeV.C^{-2} ; 1MeV = $1,6.10^{-13}$ J.

Noyau ou particule	Radon	radium	Hélium	Proton	Neutron
Symbole	$^{222}_{86}Rn$	$^{226}_{88}Ra$	$^{4}_{2}He$	$^{1}_{1}p$	$^{1}_{0}n$
Masse (en u)	221,970	226,977	4,00150	1,00728	1,00866

L'air contient l'isotope du radon 222 en quantité plus ou moins importante. Ce gaz radioactif naturel provient des roches qui contenaient de l'uranium et du radium.

1/ A un instant pris comme origine du temps (t=0), l'activité d'un échantillon de radon 222 est A_0. A une date ultérieure t, cette activité devient A.

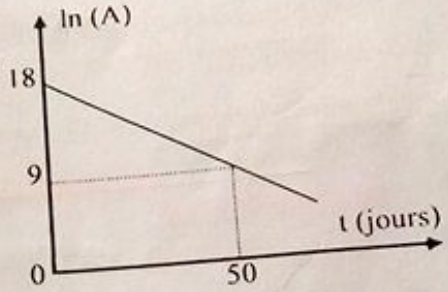
La mesure de l'activité A de cet échantillon à différents instants t a permis de tracer la courbe de la figure ci-contre représentant les variations de ln(A) en fonction du temps t où ln désigne le logarithme népérien et A est l'activité de l'échantillon à l'instant t, exprimée en Bq.

a/ Définir: l'activité d'un élément radioactif ; la période d'un élément radioactif.

b/ Donner l'expression de la loi de décroissance radioactive en fonction de A.

c/ Déduire graphiquement la valeur de la période radioactive du radon 222.

d/ Calculer le nombre N de noyau de radon 222 désintégrés pendant 50 jours.



2/ a/ Donner l'expression littérale du défaut de masse Δm du noyau de radon 222.

b/ Calculer, en MeV, l'énergie de liaison du noyau de radon 222.

c/ En déduire l'énergie de liaison par nucléon du noyau de radon 222.

3/ Le noyau de radon 222 se forme par désintégration du noyau de radium 226. Cette désintégration s'accompagne par l'émission d'une particule $^{a}_{b}x$.

a/ Préciser, en justifiant, la nature de la particule $^{a}_{b}x$.

b/ Calculer en MeV l'énergie libérée au cours de cette désintégration.

4/ Dans une centrale nucléaire à neutrons lents, le combustible est l'uranium enrichi. Lors de la fission d'un noyau d'uranium $^{235}_{92}U$, un grand nombre de réactions nucléaires sont possibles parmi celles-ci, il y en a une qui donne les noyaux de zirconium et de tellure, dont les symboles des noyaux sont $^{99}_{40}Zr$ et $^{134}_{52}Te$.

a/ Ecrire l'équation de la fission nucléaire du noyau d'uranium 235 bombardé par un neutron.

b/ A l'aide de la courbe d'Aston, on a relevé les valeurs du tableau suivant:

Noyau	$^{235}_{92}U$	$^{99}_{40}Zr$	$^{134}_{52}Te$
Energie de liaison par nucléons (MeV)	**7,3**	**8,7**	**8,5**

A partir de ce tableau dégager l'intérêt énergétique de cette réaction de fission.

5/ Le noyau de zirconium $^{99}_{40}Zr$ est instable, il se désintègre en donnant un noyau de niobium $^{A}_{Z}Nb$ et une particule β^-.

a/ Ecrire l'équation de la réaction de désintégration du noyau en précisant la précisant la valeur du nombre de masse A et du nombre de charge Z du noyau de niobium $^{A}_{Z}Nb$

b/ Expliquer l'origine d'émission de β^-.