maxi Sciences Physiques

PHYSIQUE & CHIMIE

2ème Année du Baccalauréat

sciences expérimentales

PC-Biof

Tome 2

Cours & exercices corrigés



2ème Bac PC

EDITIONS Plus

maXi. Sciences Physiques

PHYSIQUE & CHIMIE

Tome 2

2ème année du baccalauréat

Sciences expérimentales

PC-Biof

Cours & exercices corrigés

Auteurs

Mohamed El khattabi

Professeur du cycle secondaire qualifiant

Docteur en Sciences Physiques

Abdelali Hanfaoui

Professeur du cycle secondaire qualifiant

Docteur en Sciences Physiques

EDITIONS Plus

إديسيون بلوس

MAXI SCIENCES PHYSIQUES

2ème année du baccalauréat

Sciences expérimentales

PC-Biof

Tous droits réservés

EDITIONS Plus

4ème édition: 2022

Dépôt légal: 2018MO4587

ISBN: 978-9954-682-80-7

Préface

Cet ouvrage, en deux tomes, s'adresse aux élèves de la deuxième année du Baccalauréat Marocain, séries sciences expérimentales, option: sciences physiques (Français).

Sa conception répond à plusieurs nécessités:

- Vous permettre de mettre en oeuvre vos connaissances du cours vu en classe.
- Vous apprendre à rédiger la résolution d'un exercice.
- Développer vos capacités en vous confrontant à des situations difficiles, exigeant connaissances, organisation et méthode.

Chaque chapitre comprend les rubriques suivantes:

- Un rappel de cours, souvent détaillé et axé sur les notions fondamentales.
- Test de connaissances suivi d'un large éventail d'exercices progressifs, allant des plus simples, aux plus difficiles, ayant fait l'objet de contrôles en classes ou partie d'un sujet proposéaux épreuves de l'Examen national du baccalauréat.
- Des corrigés détaillés accompagnent tous les exercices, avec des commentaires, indiquant clairement l'étape de leur résolution ; ce qui vous permet de juger de la qualité de votre apprentissage, de remédier aux diffultés rencontrées, et d'aborder de nouvelles acquisitions.

Vous disposez ainsi d'un outil dont nous l'espérons, vous profitez au maximum. afin d'acquerir des bonnes méthodes pour aborder avec aisance les contrôles et le baccaleureat.

Les auteurs

SOMMAIRE

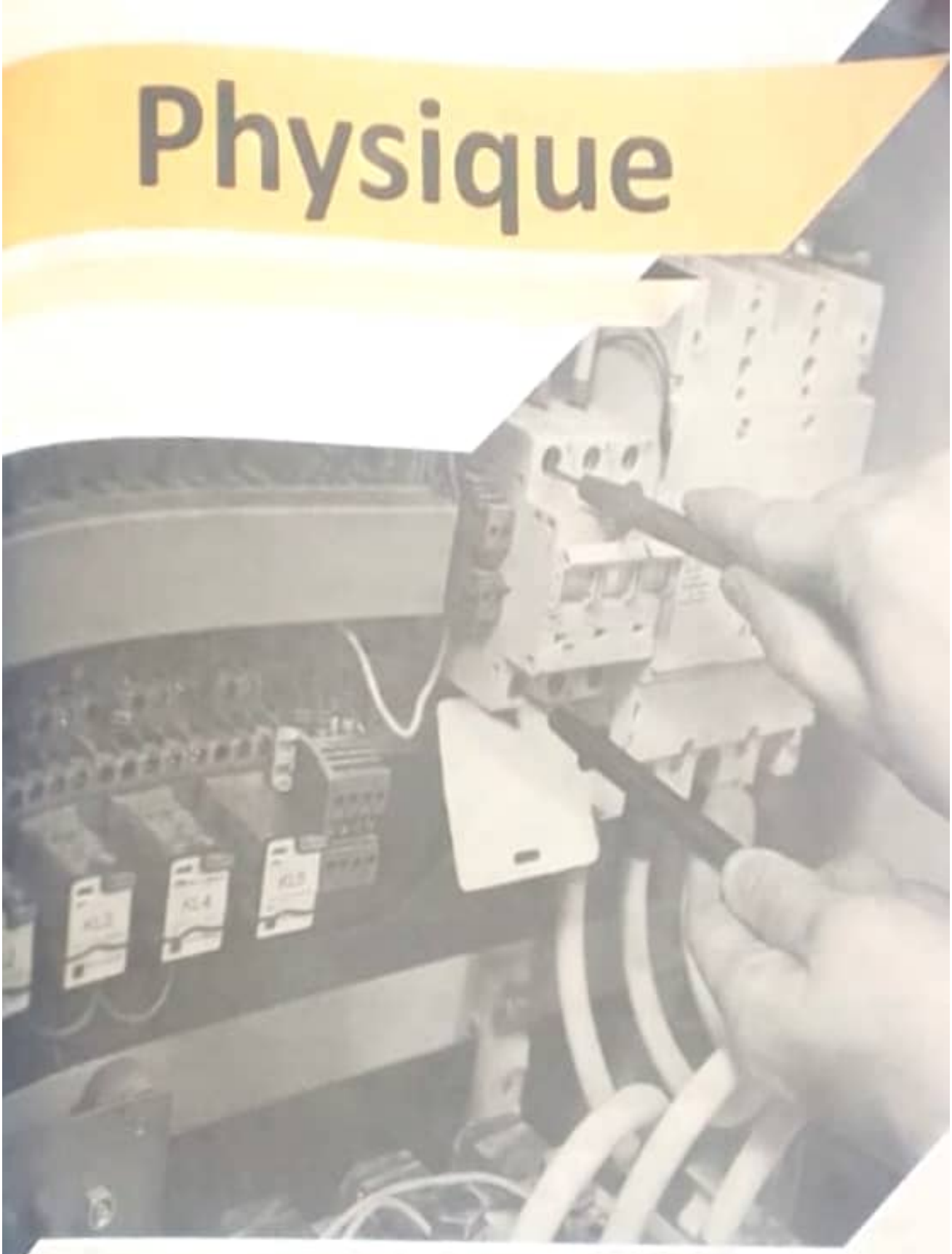
Physique

Modulation d'amplitude.	6
Les lois de Newton.	28
Chute verticale d'un corps solide.	49
Mouvement de projectile dans le champ de pesanteur uniforme.	74
Mouvement d'une particule chargée dans un magnétique uniforme.	103
Mouvement des planètes et des satellites.	117
Mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe.	136
Les systèmes mécaniques oscillants-Aspect energitique.	151
L'atome et la mécanique de Newton.	196

Chimie

Evolution spontanée d'un système chimique.	21
Les piles.	22
Exemples de transformations forcées.	24
Réactions d'estérification et l'hydrolyse.	26
Contrôle de l'évolution d'une transformation chimique.	29

Physique



ELECTRICITE

1 Modulation d'amplitude

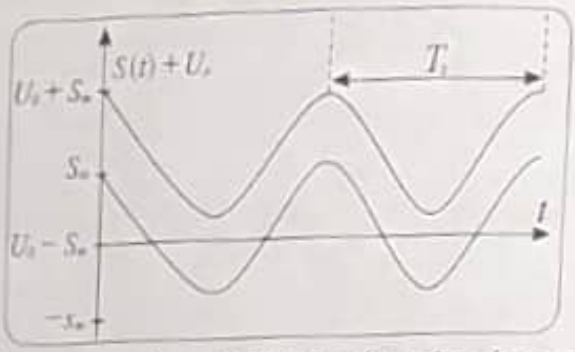
I- Modulation.

La modulation consiste à transmettre une information pour de longs trajets et avec une bonne qualité.

1 Le signal:

Il correspond à l'information à transmettre (audio,vidéo....) c'est un signal électrique (tension sinusoïdale) de basse fréquence f :

$$S(t) = S_m \cos(2\pi f t)$$



Le signal de basse fréquence, sa transmission nécessite des antennes de grande dimension, et ne peut parcourir de longs trajets.

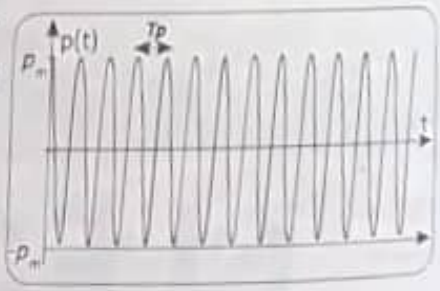
Donc, pour relever ces handicaps, on utilise une onde électromangnétique de haute fréquence appelée onde porteuse.

2 L'onde porteuse.

C'est une onde électromagnétique de haute fréquence F, qui correspond à une tension sinusoïdale.

$p(t) = p_m \cos(2\pi F t)$. «Son choix est tel que, $F \geq 10f$»

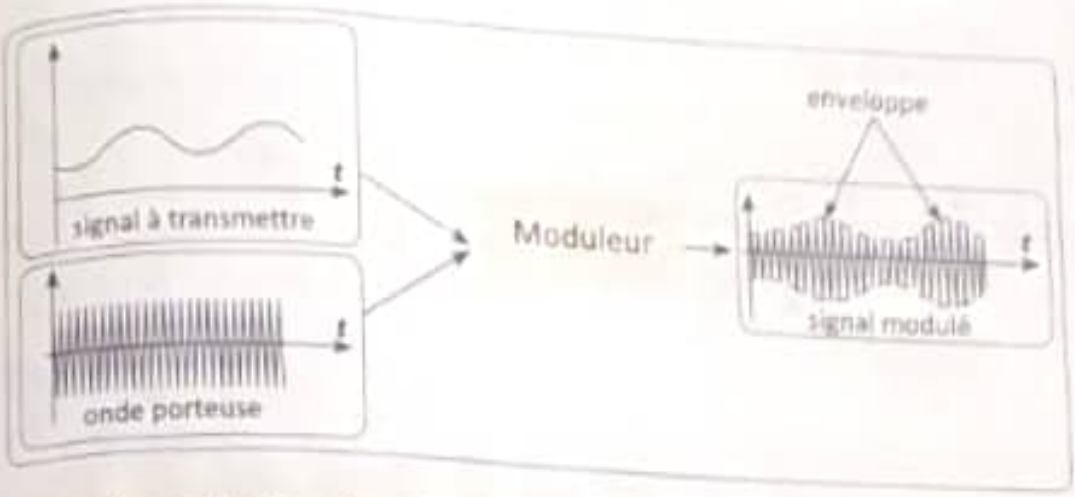
L'onde porteuse est modulée par le signal, qui modifie l'une de ses caractéristiques, c'est le principe de **modulation**.



3 Modulation d'amplitude.

Principe:

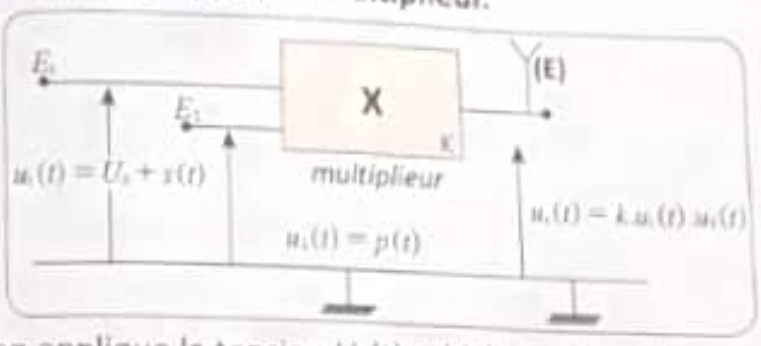
Dans ce type de modulation, l'onde porteuse est modulée en amplitude de telle sorte que son amplitude soit modifiée par le signal à transmettre, appelé signal modulant.



L'enveloppe du signal modulé doit reproduire les variations du signal modulant

Montage de modulation:

On utilise un circuit intégré appelé le multiplieur.



• à l'entrée (E_2) on applique la tension $U_2(t)=p(t)$ (la porteuse)

• L'entrée (E_1) on applique la tension $U_1(t)$ telle que: $U_1(t) = U_0 + S(t)$ cette tension est appelée tension modulante avec: U_0 : tension de décalage.

Pour que la modulation soit correcte, on ajoute au signal $s(t)$ une tension continue U_0 de valeur appelée: La composante continue ou la tension de décalage.

Expression de l'amplitude du signal modulé:

L'expression du la tension modulée $U_s(t)$ à la sortie du multiplieur est:

$$u_s(t) = K.u_1(t).u_2(t) = K[U_0 + s(t)].p(t)$$
$$= K[U_0 + S_m \cos(2\pi f.t)]P_m.\cos(2\pi Ft)$$

En remplaçant $s(t) = S_m.\cos(2\pi ft)$ et $P(t) = P_m.\cos(2\pi Ft)$, et en factorisant par le terme $K.U_0.P_m$; il vient:

$$u_s(t) = KU_0P_m\left[1 + \frac{S_m}{U_0}\cos(2\pi ft)\right]\cos(2\pi F.t).$$

En posant: $m = \frac{S_m}{U_0}$ appelé taux de modulation et $A_0 = KUP_m$; on écrit:

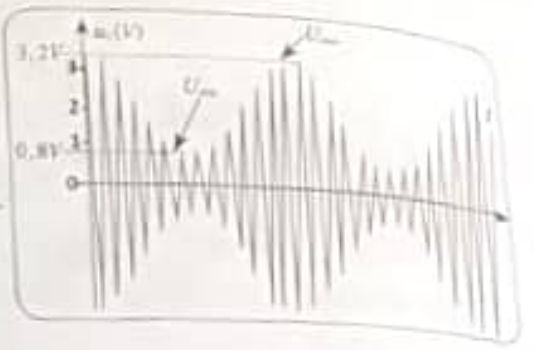
$$u_s(t) = \underbrace{A_0[1 + m\cos 2\pi ft]}_{\text{amplitude } U(t)}\cos 2\pi Ft$$

Le signal modulé a la même fréquence que la porteuse, et, son amplitude a pour expression: $U(t) = A[1 + m.\cos 2\pi ft]$

Cette amplitude varie entre deux valeurs extrêmes U_{max} et U_{min}:

(1) $U_{max} = A[1 + m]$, lorsque $\cos 2\pi ft = 1$

(2) $U_{min} = A[1 - m]$, lorsque $\cos 2\pi ft = -1$.



4 Expression de m en fonction de U_{max} et U_{min}:

Les expressions (1) et (2) donnent: $\frac{U_{max}}{U_{min}} = \frac{1+m}{1-m}$.

d'où: $m(U_{max} + U_{min}) = U_{max} - U_{min}$

alors: $m = \frac{U_{max} - U_{min}}{U_{max} + U_{min}}$

Exemple: sur la figure: $U_{max} = 3,2v$ et $U_{min} = 0,8V$

alors: $m = \frac{3,2 - 0,8}{3,2 + 0,8} = 0,6$.

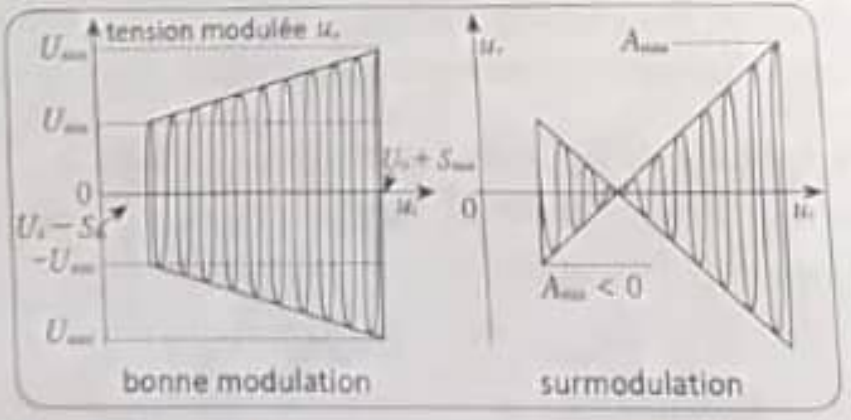
5 Conditions d'une bonne modulation:

L'obtention d'une bonne modulation d'amplitude, nécessite les deux conditions suivantes:

$$F >> f \text{ et } m = \frac{S_m}{U_0} = \frac{U_{max} - U_{min}}{U_{max} + U_{min}} < 1$$

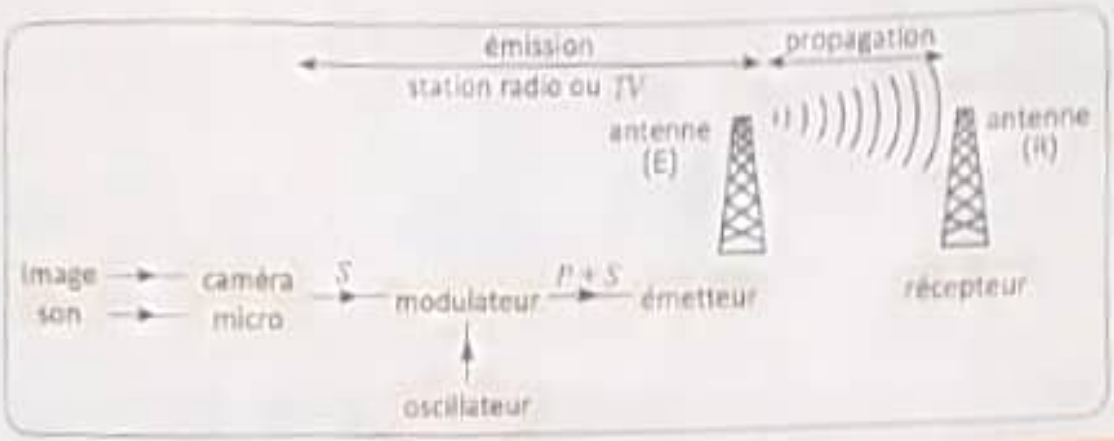
6 Utilisation de la méthode du trapèze:

La qualité de modulation peut être vérifiée graphiquement en visualisant à l'oscilloscope les variations de la tension modulée $u_s(t)$ en fonction de $s(t)$ ou $u_s(t) = s(t) + u_0$ et on élimine la base du temps.



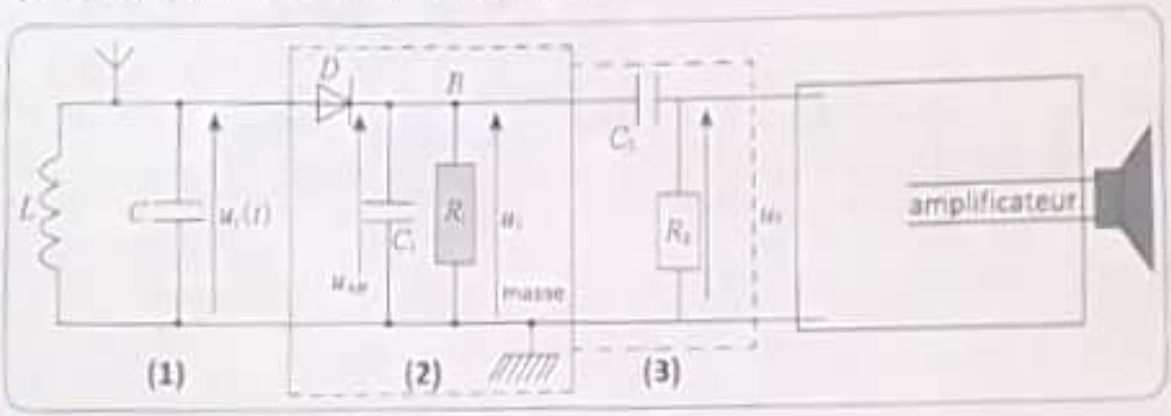
7 Emission du signal modulé:

L'antenne émettrice E transforme la tension modulée $u_s(t)$ en onde électromagnétique se propageant à la vitesse $c = 3.10^8 m.s^{-1}$ jusqu'au circuit de réception.



II- DEMODULATION D'UN SIGNAL MODULÉ D'AMPLITUDE

La station ou poste de réception de l'onde hertzienne portant le message à transmettre comporte une chaîne de circuits électriques.



1 Circuit d'accord circuit (1):

Le circuit (LC) muni d'une antenne, permet; lorsque sa fréquence propre F_0 est réglée sur la valeur F fréquence de l'onde porteuse, de capter le signal modulé $u_1(t)$.

$$F = N_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

2 Circuit détecteur d'enveloppe (circuit (2)):

La détection de l'enveloppe du signal $u_1(t)$ reçu se fait en deux étapes:

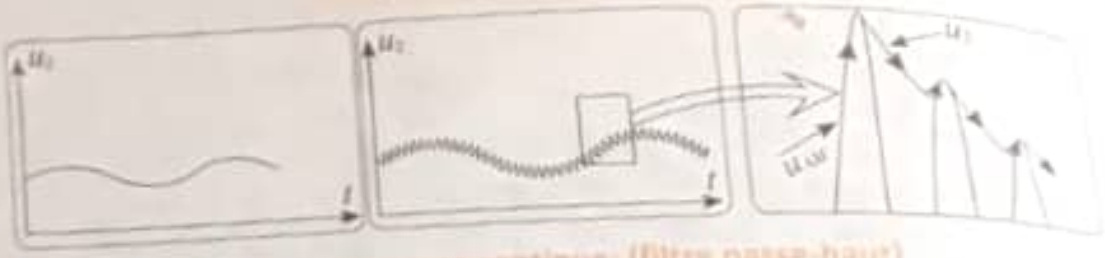
- **Le redressement**: la diode (D) permet d'éliminer les alternances négatives du signal et obtient alors le signal.
- **Elimination de la porteuse**: (filtre passe-bas)

La tension $u_2(t)$ obtenue à la sortie de ce circuit est une reproduction du signal $s(t)$ et à transmettre.

Cette opération se fait grâce à la charge du condensateur C_1 par la tension u_{AM} et sa décharge à travers la résistance R_1.

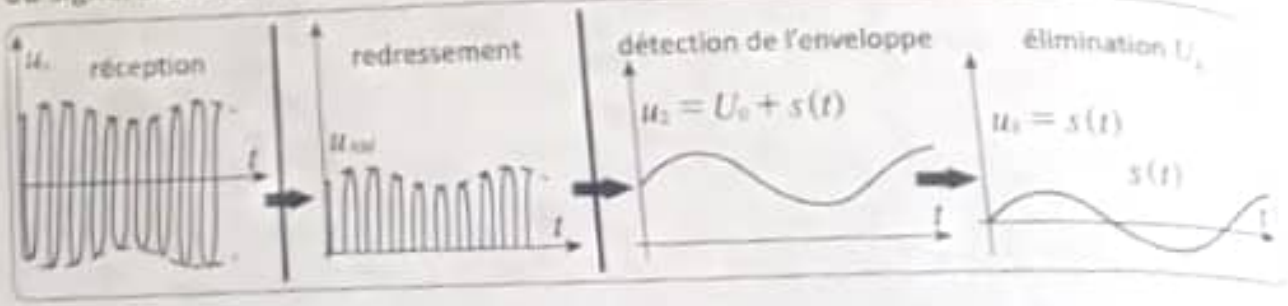
Cette décharge ne doit être ni trop rapide ni trop lente. On montre que la constante de temps du circuit (R_1C_1) doit vérifier la propriété:

$$T_f = \frac{1}{f} << \tau_1 = R_1 C_1 < T_s = \frac{1}{f}$$

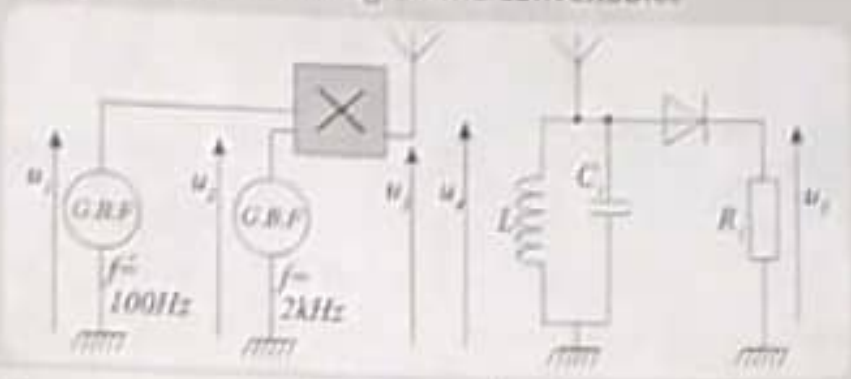


3 Suppression de la composante continue : (filtre passe-haut)

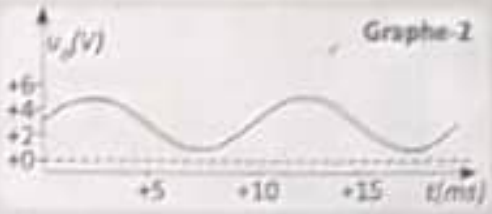
Le circuit (R_1C_1) permet l'élimination de la tension continue U_0 et l'obtention du signal modulant $s(t)$ qui est ensuite amplifié puis converti à l'aide du haut-parleur, au signal sonore étudié.



1- Attribuer à chaque tension l'oscillogramme convenable:



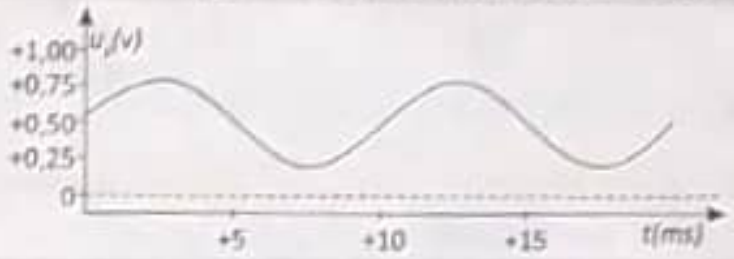








2- Comment compléter le montage de réception afin d'obtenir l'oscillogramme suivant?



Solution

1- Les tensions:

u_1: tension électrique de faible fréquence (100Hz), c'est la somme du signal modulant u et de la tension de décalage U_0: c'est donc l'oscillogramme n°2.

u_2: Tension électrique de haute fréquence $2kHz$), c'est la porteuse, donc le graphe n°3.

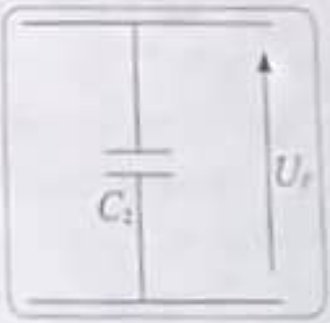
u_3: tenison modulée en amplitude, c'est le signal modulé, donc le graphe n° 1.

u_4: Signal analogue à celui du graphe n°1

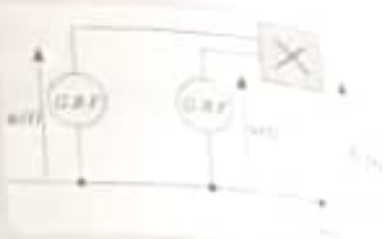
u_5: tension redressée par la diode, c'est le graphe n° 4.

2- Montage:

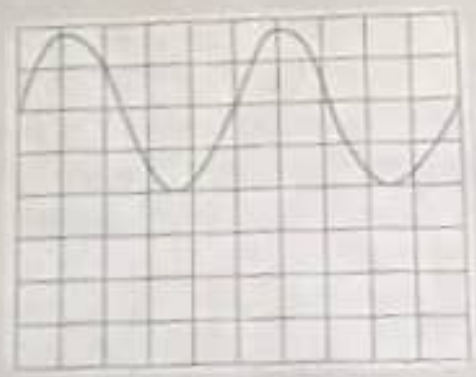
Il faut ajouter un condensateur en parallèle avec la résistance R_1, afin de réaliser le montage «détecteur de crêtes».



2 Un élève a réalisé un montage de modulation et souhaite observer l'évolution de la tension modulante et de la porteuse. Il utilise donc un oscilloscope convenablement connecté.



1- Il obtient les oscillogrammes suivants:



Oscillogramme-1



Oscillogramme-2

Les réglages de l'oscilloscope sont les suivants sensibilité horizontale: $1\ ms/div$; sensibilité verticale: $0,5\ V/div$.

a- Calculer la période et la fréquence de chaque signal.

b- En déduire la nature de chaque signal.

2- Indiquer les branchements de l'oscilloscope permettant d'observer le signal modulé.

3- Représenter l'allure de l'oscillogramme du signal modulé.

Solution

1.a- Calcul des périodes et des fréquences.

Oscillogramme-1:

$$T_1 = 5div \times 1ms/div = 5\ ms$$

$$f_1 = \frac{1}{T_1} ; f_1 = \frac{1}{5.10^{-3}} = 200\ Hz.$$

Oscillogramme-2:

$$5T_2 = 4div = 4ms$$

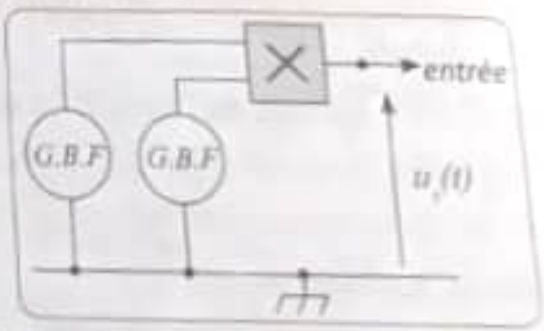
$$T_2 = 0,8div \times 1ms/div = 0,8ms$$

$$f_2 = \frac{1}{T_2} ; f_2 = \frac{1}{0,8.10^{-3}} = 1250\ Hz$$

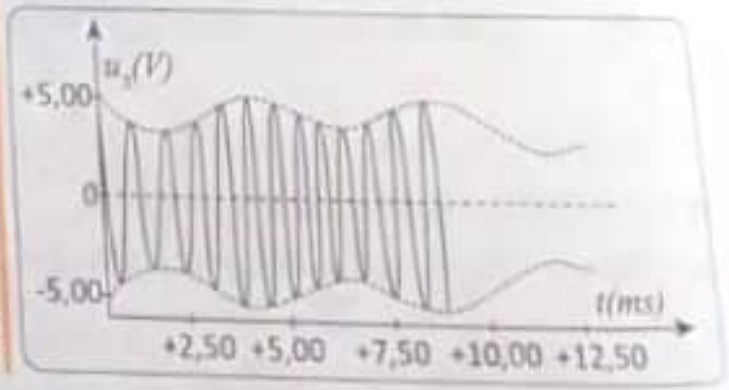
b- Nature du signal:

Le signal n°1 de faible fréquence f_1 correspond à la somme du signal modulant et de la tension de décalage. L'oscillogramme n°2 est donc celui de la porteuse de haute fréquence f_2.

2- branchement:



3- l'allure.



3 On donne ci-après l'expression de la tension obtenue à la sortie du modulateur:

1er cas: $u_s(t) = A[1 + \cos(2\pi.10^4\pi t)]\cos(2\pi.10^5 t)$.

2ème cas: $u_s(t) = 0,9[2 + 1,2\cos(2\pi.10^4 t]\cos(2.10^5\pi t)$.

3ème cas: $u_s(t) = A[1 + 0,7\cos(24\pi.10^2 t)]\cos(2,4\pi.10^5 t)$.

1- Déterminer dans chacun de ces cas; la fréquence F de l'onde porteuse, la fréquence f du signal modulant et la coefficient de modulation m.

2- En déduire la qualité de la modulation dans chaque cas.

Solution

1- 1er cas: $F = 10^5 Hz$, $f = 10^4 Hz$ et $m = 1$.

2ème cas: $u_s(t)$ s'écrit:

$u_s(t) = A[1 + m\cos 2\pi ft]\cos(2\pi Ft)$.

c'est-à-dire:

$u_s(t) = 1,8[1 + 0,6\cos 10^4\pi t]\cos(2.10^5\pi t)$

d'où: $m = 0,6$,

$2\pi F = 2.10^5\pi \Longrightarrow F = 10^5 Hz$

$2\pi f = 10^4\pi \Longrightarrow 5.10^3 Hz$.

3ème cas: $m = 0,7$, $F = f = 1200Hz$.

2- Qualité de la modulation.

- Dans le premier cas:

la modulation est incorrecte car m ne vérifie pas la condition $m < 1$.

- Dans le deuxième cas:

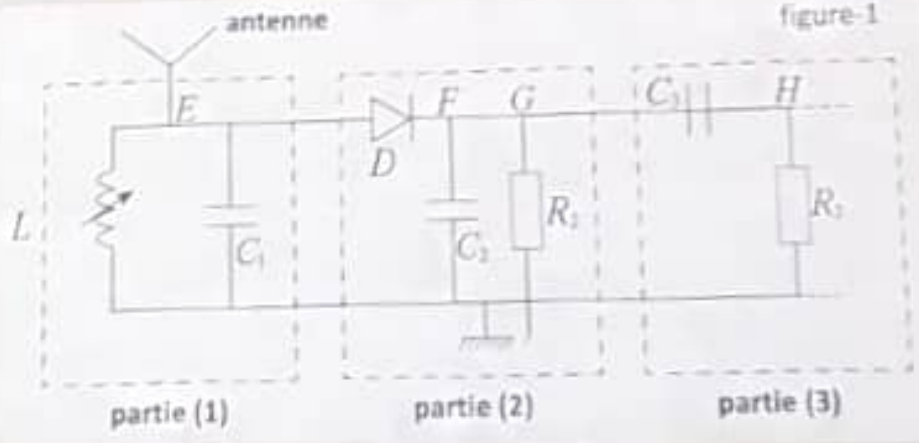
$m < 1$ et $F >> f$.

la modulation est donc correcte.

- Dans le troisième cas: la modulation est incorrecte, la fréquence de la porteuse ne vérifie pas la condition $F >> f$.

4 Pour capter l'onde émise par une station radio, on utilise le montage simplifié contenant les circuits suivants. figure (1).

figure-1



1- La partie (1) est composée d'une bobine d'inductance L variable et d'un condensateur de capacité $C_1 = 47nF$, montés en parallèle.

1.1- Quel est le rôle de la partie (1) de ce montage?

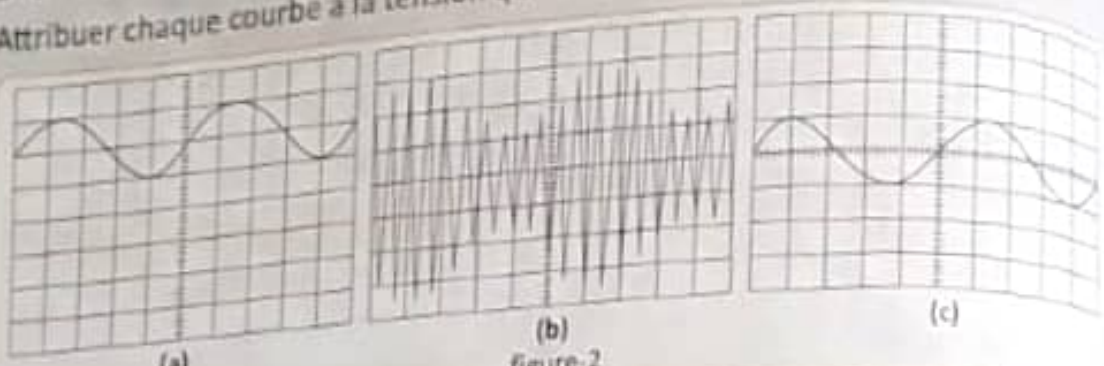
1.2- Pour capter une onde AM de fréquence $F = 160kHz$, il a fallu fixer le coefficient

d'inductance de la bobine sur une valeur L_0. Calculer L_0.

2- Les deux parties (2) et (3) permettent l'obtention d'une démodulation du signal reçu. Quel est le rôle de chacune d'elles dans cette opération?

3- On visualise les tensions u_{EM}, u_{DM} et u_{RM} figure (2).

Attribuer chaque courbe à la tension qui lui convient.



(a) (b) (c)

figure-2

Solution

1.1- La partie (1) permet de sélectionner le signal modulé.

1.2- La partie (1) doit réaliser la condition d'accord des fréquences $F_0 = F$ fréquence de la porteuse c'est-à-dire:

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{L_1.C_1}} = F.$$

d'où: $L_1 = \frac{1}{4\pi^2.C_1.F^2}$.

$$L_1 = \frac{1}{4\pi^2.47.10^{-9}(160.10^3)^2} \simeq 2,1.10^{-4}H$$

2- La partie (2) permet la détection de l'enveloppe du signal modulé.

La partie (3) permet de supprimer la composantes continue.

3- La courbe (a) correspond à u_{RM}, la courbe (b) à u_{EM} et (C) à u_{DM}.

5 (Bac PC Juin 2017)

Modulation d'amplitude: Pour étudier la modulation d'amplitude et vérifier la qualité de la modulation, au cours d'une séance de TP, le professeur a utilisé avec ses élèves, un circuit intégré multiplieur (X). En appliquant une tension sinusoïdale: $u_1(t) = P_m.\cos(2\pi F_p.t)$ à l'entrée E_1 et une tension: $u_2(t) = U_0 + s(t)$ à l'entrée E_2, avec U_0 la composante continue de la tension et $s(t) = S_m.\cos(2\pi f.t)$ la tension modulante figure-1.

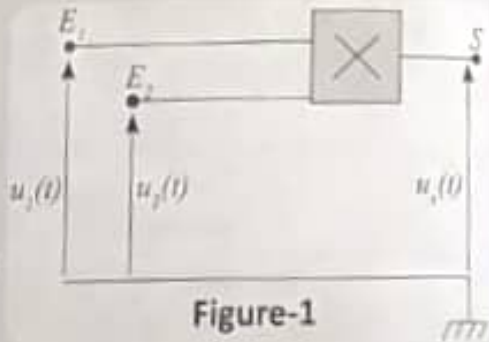


Figure-1

La courbe de la figure-2 représente la tension de sortie $u_s(t) = k.u_1(t).u_2(t)$, visualisée par les élèves sur l'écran d'un oscilloscope.

k est une constante positive caractérisant le multiplieur X.

1- Montrer, en précisant les expressions de A et de m, que la tension $u_s(t)$ s'écrit sous la forme:

$u_s(t) = A[1 + m.\cos(2\pi f_s t)]\cos 2\pi F_p t)$

2- En exploitant la courbe de la figure-2.

2.1- Trouver les fréquences F_p de la porteuse et f_s de la tension modulante.

2.2- Déterminer le taux de modulation et en déduire la qualité de modulation.



Figure-2

Solution

1- Expression de $u_s(t)$:

On a: $u_s(t) = ku_1(t).u_2(t)$.

$u_s(t) = k(u_0 + s_m\cos(2\pi f_s t))p_m\cos(2\pi F_p t)$

$= ku_0p_m\left(1 + \frac{s_m}{u_0}\cos(2\pi f_s t)\right)\cos(2\pi F_p t)$

qui s'écrit:

$u_s(t) = A(1 + m\cos(2\pi F_s t))\cos(2\pi F_p t)$

avec: $\begin{cases} A = ku_0p_m \\ m = \frac{s_m}{u_0} \end{cases}$

2.1- Valeurs de fs et Fp:

On a: $fs = \frac{1}{Ts}$ et: $F_p = \frac{1}{T_p}$.

de la courbe on a:

$T_s = 10ms$ et: $\begin{cases} 5Tp = 5ms \\ Tp = 1ms \end{cases}$

donc • $fs = \frac{1}{10.10^{-3}} = 100Hz$

• $F_p = \frac{1}{10^{-3}} = 1000Hz$

2.2- taux de modulation:

On a: $m = \frac{u_{max} - u_{min}}{u_{max} + u_{min}}$

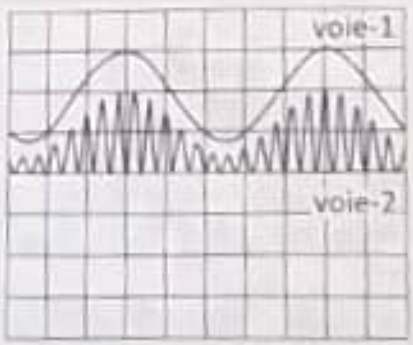
de la courbe:

$m = \frac{3-1}{3+1} = \frac{2}{4} = 0,5$

$m < 0,5$ donc la modulation est bonne.

Démodulation:

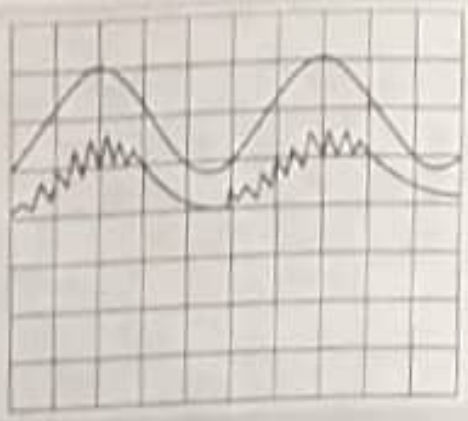
Un signal modulé en amplitude est appliqué à l'entrée d'un montage électronique. L'oscillogramme de la voie-1 représente le signal de modulation ; l'oscillogramme de la voie-2 représente la tension de sortie du montage.



1- Schématiser le montage qui permet d'obtenir l'oscillogramme de la voie-2.

2- Déduire de l'oscillogramme de la voie-1 la fréquence du signal modulant. Quelle est la fréquence de la porteuse? On donne: $S_v = 0,5ms/div$: *sensibilité verticale*

3- La démodulation n'est pas terminée. Comment compléter le montage afin d'obtenir l'oscillogramme suivant?



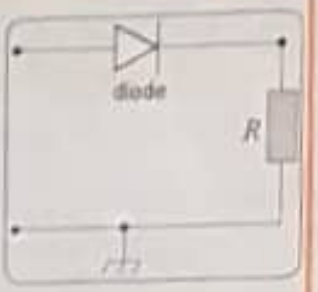
4- Donner un encadrement de la constante de temps τ.

5- On utilise une résistance $R = 10k\Omega$. Quel est le domaine des valeurs possibles pour la capacité C ?

Solution

1- Le montage:

C'est un montage de redressement qui comporte une diode:



2- Fréquence du signal modulant:

$$T_s = 5div \times 0,5ms/div = 2,5ms;$$

Or: $f = \frac{1}{T_s}$;

$$f = \frac{1}{2,5.10^{-3}} = 400Hz$$

Fréquence de la porteuse:

$5T_{porteuse} = 2div \times 0,5ms/div$;

$T_{porteuse} = 0,2ms$;

$f_{porteuse} = \frac{1}{T_{porteuse}}$;

$f_{porteuse} = \frac{1}{0,2.10^{-3}} = 5000Hz$;

3- Montage:

Il faut ajouter un condensateur en parallèle avec la résistance afin de réaliser le montage «détecteur de crêtes».

4- Encadrement:

On a: $\tau = R.C$ et $0,2\,ms < \tau < 2,5\,ms$

La valeur de la constante de temps est supérieure à la période de la porteuse et inférieure à la période du signal modulant.

5- valeurs possibles de c:

On a: $\tau = R.C$, donc:

$0,2ms \ll 10.10^3\,C < 2,5ms$;

$\frac{0,2.10^{-3}}{10.10^3} \ll C < \frac{2,5.10^{-3}}{10.10^3}$;

$0,2.10^{-7}F < C < 2,5.10^{-7}F$.

$20nF << C < 250nF$

La capacité du condensateur doit être supérieure à $20nF$ et inférieure à $250nF$.

Par exemple, on peut choisir:

$C = 100nF$. ou 150nF.

7 Après avoir réglé un poste radio sur une fréquence $F_p = 700KHz$, on obtient une tension U_{AM} modulé par amplitude pour détecter l'enveloppe on utilise le montage representé dans la figure-1 à l'aide d'un oscilloscope on obtient les courbes suivantes:

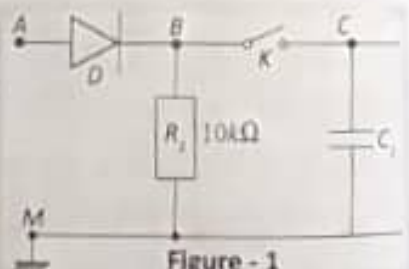
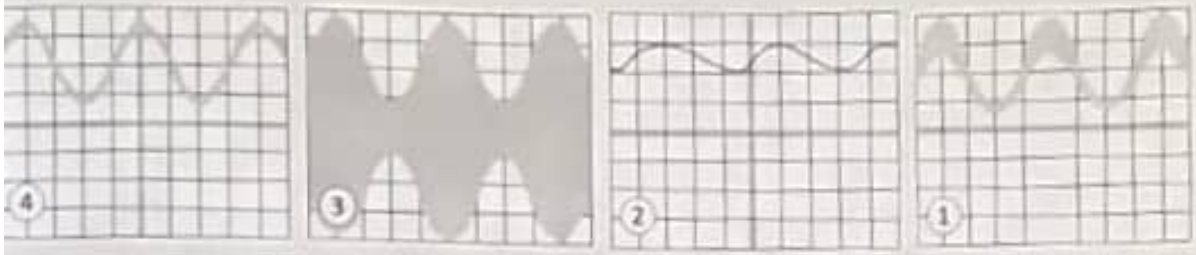


Figure - 1

Sensibilité horizontale: $0,2ms.div^{-1}$

Sensibilité verticale: $1v/div$.



1- Quel est l'oscillogramme correspondant à la tension modulée par amplitude?

2- Déterminer la fréquence fs du signal modulant.

3- Donner l'allure de l'oscillogramme obtenu quand on visualise la tension U_{BM}, quand l'interrupteur k est ouvert.

4- Pour avoir une bonne démodulation, on utilise un condensateur c_1 monté avec le conducteur ohmique de résistance R_1 et on ferme le circuit:

On dispose de 3 condensateurs de fréquences $1nF, 10nF, 100nF$ faire correspondre en justifiant votre réponse l'oscillogramme représentant la tension U_{CM} et la capacité correspondante.

Solution

1- Oscillogramme de tension modulée C'est l'oscillogramme (3).

2- La fréquence f_s:

On a: $f_s = \frac{1}{T_s}$; graphiquement de la figure 4 on a: $T_s = 4 \times 0,2 = 0,8ms$

donc: $f_s = \frac{1}{8.10^{-4}} = 1250Hz$

3- Allure de U_{BM}:

pour k ouvert on obtient l'oscillogramme qui correspond à une tension redressée.



4- L'oscillogramme de U_{CM}:

La tension obtenue à la sortie du détecteur d'enveloppe U_{CM} est la figure (4).

Le condensateur utilisé pour cela doit satisfaire: $\frac{1}{F_p} \ll R_1 C_1 < \frac{1}{f_s}$

$$\frac{1}{F_p R_1} \ll C_1 < \frac{1}{f_s R_1}$$

$$\frac{1}{700.10^3.10^4} \ll C_1 < \frac{1}{1250.10^4}$$

$$1,42.10^{-10}F \ll C_1 < 8.10^{-8}F$$

$$0,42.nF \ll C_1 < 80nF$$

donc la capacité correspondante est: $C_1 = 10nF$.

8 On réalise un circuit de modulation en utilisant deux tensions sinusoïdales et un circuit integré appelé multiplieur.

- On donne l'expression de la valeur de chacune de ces tensions en fonction du temps. $u(t) = 2\cos(2\pi.200.t)$ et $v(t) = 4\cos(2\pi.2000.t)$.

Quelle est la tension modulante? Quelle est la porteuse?

On ajoute à la tension $u(t)$ une tension continue $U_0 = 3V$, ainsi:

$u'(t) = U_0 + u(t) = 3 + 2.\cos(2\pi.200.t)$.

2- Le circuit multiplieur donne à la sortie une tension:

$u_s(t)$ proportionnelle au produit des tension $u'(t)$ et $v(t)$.

$u_s(t) = k.u'(t).v(t)$ Calculer littéralement $u_s(t)$.

3- Quelle serait l'allure de $u_s(t)$ si l'on n'avait pas appliqué la tension continue U_0

Comment se nomme ce phénomène? Quel est le problème en terme de réception

Le module récepteur est composé d'un circuit d'accord et d'un circuit de démodulation.

4- Représenter le circuit d'accord en calculant la valeur de l'inductance de la bobine

On prendra $C = 10^{-6}F$.

5- Donner ensuite le circuit de démodulation en proposant une valeur de la capacité du condensateur. On prendra $R = 10k\Omega$.

Solution

1- tensions modulante et porteuse:

- La tension modulante est de faible fréquence correspond à $u(t)$ de fréquence $f = 200Hz$.
- La porteuse est de haute fréquence correspond à $v(t)$ de fréquence $f = 2000Hz$

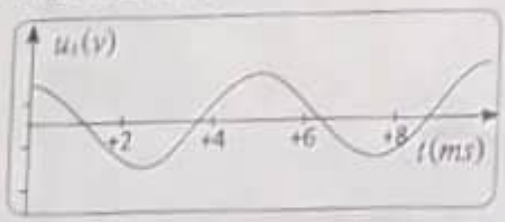
2- Calcul de $U_s(t)$:

On a: $u_s(t) = k.u'(t).v(t)$

$$u_s(t) = k.[3 + 2.\cos(2\pi.200.t)].[4.\cos(2\pi.2000.t)]$$

$$u_s(t) = 12k.[1 + 0,66.\cos(400\pi t)].\cos(400\pi t)$$

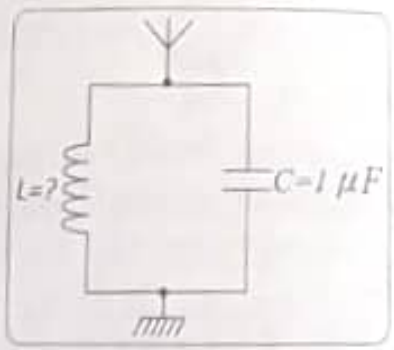
3- Allure de $U_s(t)$:



Si l'on oublie la tension continue, le coefficient de modulation est m=0.

il n'y a pas de modulation.

4- Le circuit d'accord est donné par:



La fréquence propre est:

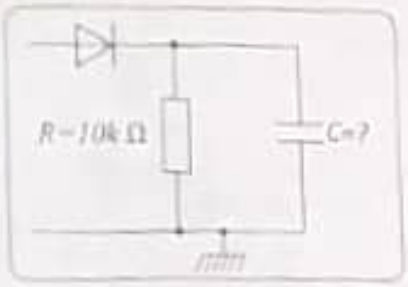
$$f = \frac{1}{2\pi.\sqrt{L.C}}$$

alors: $L = \frac{1}{4\pi^2.C.f^2}$;

$$L = \frac{1}{4\pi^2 - 10^{-6} \times 2000^2} \; ; \; L \approx 6,3mH.$$

5- Valeur de C :

Une bonne détection d'enveloppe est établi si:



$\tau = R.C$ donc: $T_i \ll R.C < T_s$

$$\frac{1}{2000} \ll 10\,000C < \frac{1}{200}$$

$$\frac{1}{2.10^3 \times 10^4} \ll C < \frac{1}{2.10^3 \times 10^4}$$

$$5.10^{-8}F \ll C < 5.10^{-7}F.$$

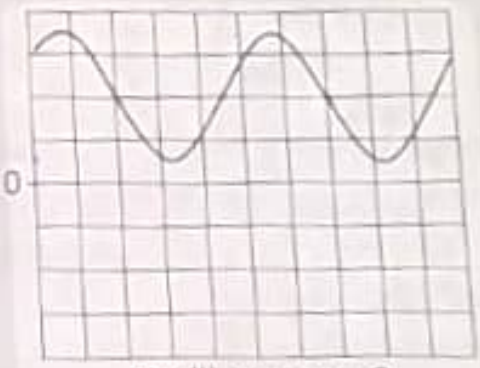
On réalise un montage permettant d'illustrer le principe de modulation d'amplitude.

Un signal basse fréquence BF est modulé par un signal haute fréquence HF nommé porteuse.

Un oscilloscope convenablement connecté permet d'observer successivement les deux oscillogrammes suivants.



Oscillogramme-1



Oscillogramme-2

Les réglages sont les suivants:

Oscillogramme-1	Oscillogramme-2
Sensibilité horizontale: $0,4ms/div$.	Sensibilité horizontale: $5\ \mu s/div$.
Sensibilité verticale: $2\ V/div$.	Sensibilité verticale: $2\ V/div$.

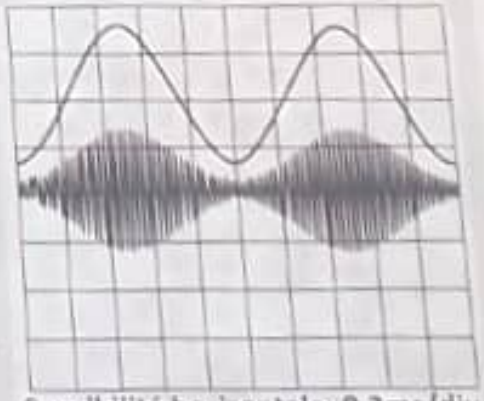
En l'absence de tension, les traces de l'oscilloscope coïncident avec l'axe horizontal.

1- Déterminer la période et la fréquence de chacune des tensions sinusoïdales.

2- En déduire la fréquence du signal modulant et de la porteuse.

3- Quelle est la valeur de la tension de décalage U_0 ?

4- On observe à l'oscilloscope l'allure du signal modulant et du signal modulé.

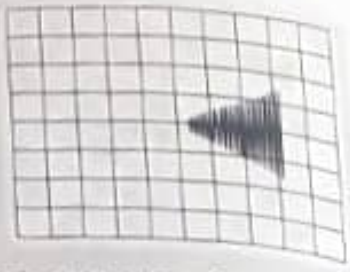


Sensibilité horizontale: 0,2ms/div.

La fréquence du signal modulé est-elle égale à celle du signal modulant ou à celle de la porteuse?

Justifier la réponse.

5- Afin de vérifier si la modulation est satisfaisante, on utilise la méthode du trapèze et on obtient l'oscillogramme suivant.



Quels sont les réglages de l'oscilloscope permettant d'obtenir cette trace?

Conclure sur la qualité de la modulation.

Solution

1- La période de fréquence:

Signal n°1:

$2T_1 = 5div \times 0,4ms/div \Longrightarrow T_1 = 1ms$

$f_1 = \frac{1}{T_1}$; $f_1 = \frac{1}{1.10^{-3}} = 1000Hz$

Signal n° 2:

$T_2 = 5div \times 5\mu s/div = 25\mu s$

$f_2 = \frac{1}{T_2}$; $f_2 = \frac{1}{25.10^{-6}} = 40000Hz$

2- Fréquence du signal modulant:

La porteuse a la plus grande fréquence. Soit: $f_2 = 40KHz$ et $f_1 = kHz$ est la fréquence du signal modulant.

3- Tension de décalage:

La valeur moyenne de la tension sinusoïdale se trouve à deux divisions de l'axe horizontal.

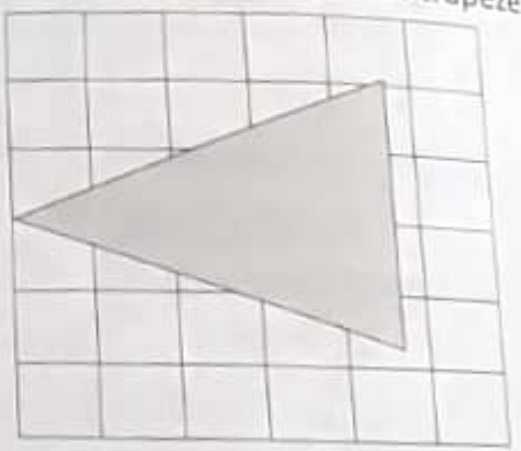
$U_0 = 2div \times 2V/div = 4V$.

4- Justification:

Lors d'une modulation en amplitude, la tension porteuse est modulée en amplitude par le signal modulant. La fréquence de la porteuse est donc conservée. La fréquence du signal modulé est donc égale à la fréquence du signal modulant.

5- Qualtié de modulation:

pour éliminer la base du temps, il faut connecter l'oscilloscope en mode XY. Le signal modulant est en X. Le signal modulé est en Y. La modulation est satisfaisante, car on obtient un trapèze.



10 Emission et réception d'un signal modulé: Pour transmettre un signal sinusoïdal $s(t)$ on utilise un multiplieur. On applique à l'entrée E_1 du multiplieur un signal de tension $u(t) = s(t) + V_0$ avec V_0 la tension continue de décalage, et on applique à l'entrée E_2 une

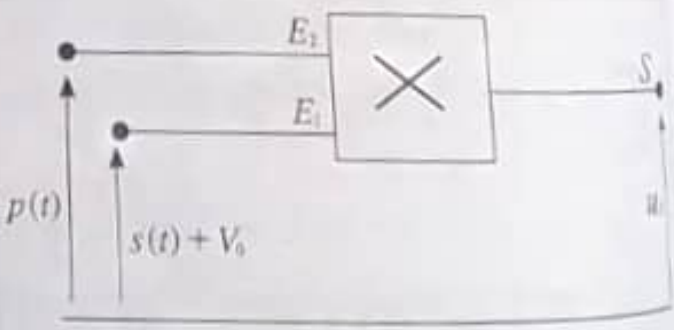


Figure-1

tension $p(t)$ d'une onde porteuse (figure-1).

On obtient à la sortie S du multiplieur la tension modulée en amplitude $u_s(t)$ telle que: $u_s(t) = A[1 + 0,6\cos(10^4\pi t)].\cos(2.10^5\pi t)$.

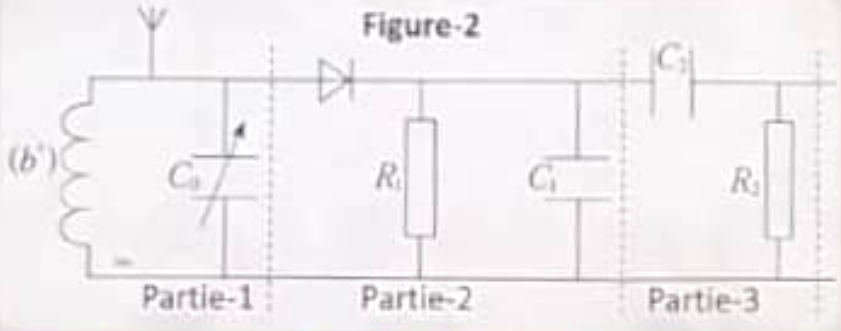
1- Montrer que la modulation d'amplitude obtenue est bonne.

2- La démodulation d'amplitude est réalisée à l'aide du montage de la figure-2.

La partie 1 du montage comprend la bobine (b') et un condensateur de capacité C_0 réglable entre les deux vecteurs $6.10^{-12}F$ et $12.10^{-12}F$.

Le conducteur ohmique utilisé dans la partie-2 du montage a une résistance: $R_1 = 30k\Omega$.

Figure-2



Solution

1- Qualité de la modulation:

On a:

$u_s(t) = A[1 + 0,6\cos(10^4.\pi t)]\cos(2.10^5\pi t)$

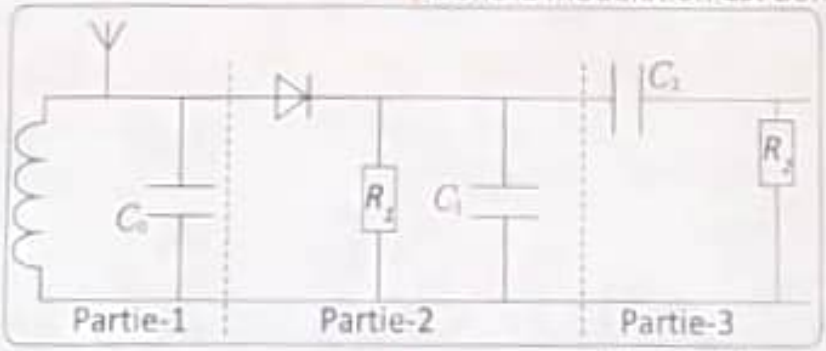
L'amplitude de l'onde modulée:

$A(t) = A_0[1 + m\cos(2\pi f t)]$

Donc, on déduit que: $m = 0,6 < 1$

Donc la modulation est bonne.

2-



a- La sélection du signal est bonne si:

$N_0 = F$.

Avec: $N_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC_0}}$: la fréquence propre du circuit.

F : La fréquence de l'onde modulée avec:

$F = 10^5 Hz$.

Donc: $F = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC_0}}$; $2\pi\sqrt{LC_0} = \dfrac{1}{F}$

$$LC_0 = \left(\frac{1}{2\pi F}\right)^2$$

$$C_0 = \frac{1}{L}\left(\frac{1}{2\pi F}\right)^2$$

$$C_0 = \frac{1}{0,317} \times \left(\frac{1}{2\pi.10^5}\right)^2$$

$$C_0 = 8.10^{-12}F = 8pF$$

$$6.10^{-12}F < C_0 < 12.10^{-12}F$$

Donc la bobine permet une bonne sélection du signal.

b- Détermination de C_1:

Pour obtenir, une bonne détection de l'enveloppe, il faut que:

$T_r << \tau < T_c$; $\frac{1}{F} << RC < \frac{1}{f}$

$\frac{1}{FR} << C < \frac{1}{fR}$

Avec: $F = 10^4 Hz$; $f = \frac{10^4}{2} = 5.10^3 Hz$

$\frac{1}{10^4.30.10^3} << C < \frac{1}{5.10^3.10^3.30}$

$3,33.10^{-10} F << C < 6,6.10^{-9} F$

$0,33nF << C < 6,6\,nF$

La valeur convanable est: $C = 5nF$.

11 Pour transmettre un signal sonore $s(t)$ de forme sinusoïdale et de fréquence f.

On utilise le montage de la figure-1.

On donne: $p(t) = P_m \cos 2\pi Ft$

et: $s(t) = S_m \cos 2\pi ft$.

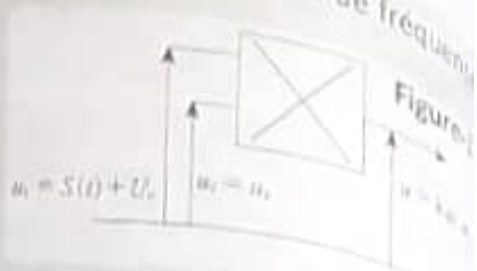


Figure-1

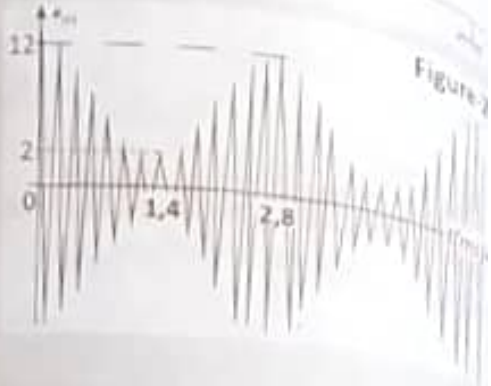


Figure-2

1- Quel est le nom de la composante de symbole (X) dans ce circuit?

2- En utilisant la figure-2 déterminer la fréquence f du signal étudié et la fréquence F de l'onde porteuse.

3- Montrer que l'amplitude U du signal modulé s'écrit sous la forme:

$$U = K P_m U_0 [1 + m.\cos 2\pi ft]$$

4- En déduire l'expression du coefficient de modulation m; en fonction de U_{max} et U_{min}.

5- Justifier que la modulation est correcte.

Solution

1- La composante:

La composante portant le symbole (X) s'appelle le multiplieur.

2- Les fréquence:

D'après la figure, on constate que:

- Pour le signal $s(t)$:

$$T_s = 2,8ms = 2,8.10^{-3}s \Longrightarrow$$

$$f = \frac{1}{T_s} = 357$$

- Pour la porteuse:

$$7T_p = 1,4ms \Longrightarrow$$

$$T_p = 0,2ms = 2.10^{-4}s$$

D'où: $F = 5.10^3 Hz$.

3- Expression:

on a:

$u_1(t) = Ku_1(t).u_2(t) = K[U_0 + s(t)].p(t)$

$= K[U_0 + S_m.\cos 2\pi ft]P_m.\cos 2\pi F$

$= KU_0P_m\left[1 + \frac{S_m}{U_0}\cos 2\pi ft\right].\cos 2\pi F$

$= KU_0P_m[1 + m\cos 2\pi ft]\cos 2\pi Ft$

L'amplitude du signal modulé est donc

$U(t) = KU_0P_m[1 + m.\cos 2\pi ft]$.

4- Valeur de m:

La valeur maximale de cette amplitude est obtenue en posant: $\cos 2\pi ft = 1$:

$U_{max} = KP_mU_0[1 + m]$ (1)

Et la valeur minimale est obtenue en posant $\cos 2\pi ft = -1$:

$U_{min} = KP_mU_0[1 - m]$ (2).

Divisons (1) par (2): $\frac{U_{max}}{U_{min}} = \frac{1+m}{1-m}$.

$(1+m)U_{min} = (-1m)U_{max}$.

$m(U_{max} + U_{min}) = U_{max} - U_{min}$.

D'où: $m = \frac{U_{max} - U_{min}}{U_{max} + U_{min}}$.

5- Modulation:

La courbe du signal modulant permet de lire:

$U_{max} = 12V$ et $U_{min} = 2V$;

alors: $m = \frac{12-2}{12+2} = 0,71$.

Les deux conditions $m < 1$ et $\frac{F}{f} >> 1$, sont bien vérifiées, la modulation est donc satisfaisante.

12 (BAC SM juin 2015)

Modulation d'amplitude d'un signal sinusoïdal.

Afin d'obtenir un signal modulé en amplitude, on utilise un circuit intégré multiplieur X (figure-1).

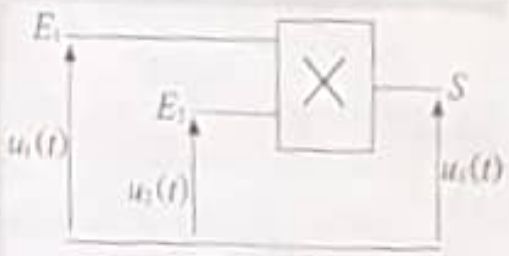


Figure-1

On applique à l'entrée:

- E_1 : la tension $u_1(t) = s(t) + U_0$ avec $s(t) = s_m \cdot \cos(2\pi f_1 t)$ représentant le signal informatif et U_0 une composante continue de la tension.
- E_2 : une tension sinusoïdale représentant la porteuse $u_2(t) = U_m \cdot \cos(2\pi F_1 t)$

La tension de sortie $u_s(t)$ obtenue est: $u_s(t) = k.u_1(t).u_2(t)$; k est une constante qui dépend du circuit intégré X.

Rappel: $\cos(a).\cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

1- Montrer que $u_s(t)$ s'écrit sous la forme:

$u_s(t) = \frac{A.m}{2}\cos(2\pi f_1 t) + A.\cos(2\pi f_0 t) + \frac{A.m}{2}\cos(2\pi f_2 t)$

où m est le taux de modulation et A une constante.

2- La figure-2 représente le spectre de fréquences formé de trois raies de la tension modulée $u_s(t)$.

Déterminer m et la fréquence f_1. La modulation est-elle bonne?

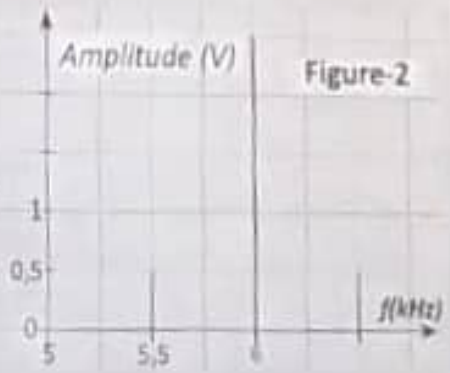


Figure-2

3- Pour une bonne réception du signal modulé, on utilise un circuit bouchon (circuit d'accord) formé d'une bobine d'inductance $L_0 = 60mH$ et de résistance négligeable et de deux condensateurs, montés en série, de capacité $C = 10\mu F$ et C_0.

Déterminer la valeur de C_0.

Solution

1- Expression de $u_s(t)$:

On a: $u_s(t) = ku_1(t).u_2(t)$.

$$u_s(t) = k(u_0 + s_m\cos(2\pi f_1 t)u_m\cos(2\pi F_1 t))$$

$$= kU_0U_m\left(1 + \frac{sm}{U_0}\cos(2\pi f_1 t)\cos(2\pi F_1 t)\right)$$

$$u_s(t) = A\cos(2\pi F_p t) + \cos(2\pi F_s t)\cos(2\pi f_s t)$$

avec: $A = kU_0U_m$ et: $m = \frac{S_m}{U_0}$.

$$u_s(t) = A\cos(2\pi Fpt) + \frac{Am}{2}[\cos(2\pi(Fp+f_s)t + \cos 2\pi(Fp-f_s)t)]$$

qui s'écrit:

$$u_s(t) = A\cos(2\pi Fpt) + \frac{A.m}{2}\cos(2\pi(Fp+fs)t + \frac{A.m}{2}\cos 2\pi(Fp-fs)t$$

$$u_s(t) = \frac{A.m}{2}\cos(2\pi f_1 t) + A\cos(2\pi f_2 t) + \frac{Am}{2}\cos(2\pi f_3 t)$$

avec, $f_1 = F_p - f_s$ et $f_2 = F_p$.

et: $f_3 = F_p + f_s$.

2- Détermination de f_s et m:

de la figure on a:

- $f_1 = 5,5Hz$; et $f_3 = 6,5khz$.
- $\begin{cases} f_1 = F_p - fs \\ f_3 = F_p + fs \end{cases}$ donc: $f_s = \frac{f_3 - f_1}{2}$

A.N.:

$$f_s = \frac{6,5-5,5}{2} = 0,5kHz = 500Hz$$

et: $\frac{Am}{2} = 0,5V$ et $A = 2V$

donc: $m = \frac{1}{A} = \frac{1}{2} = 0,5$

On a:

$m < 1$ donc la modulation est bonne.

3- Détermination de C_0:

Lors de la réception de l'onde modulée on a: $N_0 = F_p$.

avec: $N_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_e}} = F_p$

avec C_e: capacité équivalente.

D'où: $C_e = \left(\frac{1}{2\pi F_p}\right)^2 \cdot \frac{1}{L}$

A.N.:

$$C_e = \left(\frac{1}{2\pi.6.10^3}\right).\frac{2}{60.10^{-3}}$$

$$\simeq 1,174.10^{-8}F = 1,174.10^{-2}F$$

$$C_e = 11,74nF$$

et on a: $\frac{1}{c_e} = \frac{1}{c} + \frac{1}{c_0} \Rightarrow \frac{1}{c_0} = \frac{1}{c_e} - \frac{1}{c}$

$$\frac{1}{c_0} = \frac{1}{11,74.10^{-9}} - \frac{1}{10.10^{-9}} = 0$$

$$c_0 = 11,75.nF.$$

13 La figure- 1 représente le circuit de modulation d'amplitude utilisé pour transmettre un signal sinusoïdal; $s(t) = S_m\cos 2\pi f.t$ à l'aide d'une onde porteuse $p(t) = P_m\cos 2\pi Ft$ de haute fréquence.

On donne: $f = 1kHz$ et $F = 20kHz$.

On applique, à l'entrée E_1 du multiplieur la tension $u_1(t)$ et à l'entrée E_2 la tension $u_2(t)$ telles que:

$u_1(t) = s(t) + U_0$ et $u_2(t) = p(t)$.

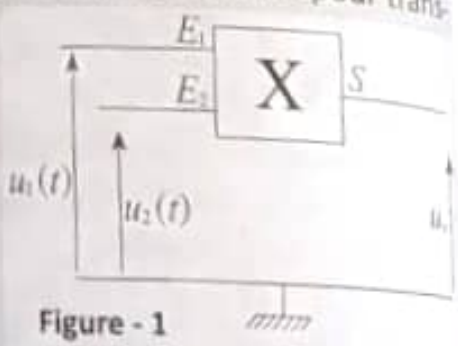


Figure - 1

La tension obtenue à la sortie est: $u_s(t) = k.u_1(t)u_2(t)$.

Sur l'écran d'un oscilloscope bicourbe, on obtient les tensions $u_1(t)$ et $u_s(t)$. Et, en utilisant le mode $(X-Y)$ pour éliminer le temps, on visualise u_s en fonction de u_1.

Le graphe obtenu est représenté sur la figure (2).

1- Montrer que le coefficient de modulation défini par le rapport $m = \frac{S_m}{U_0}$ peut être exprimé par la relation suivante: $m = \frac{H-h}{H+h}$, H étant la distance CD et h étant

la distance AB.

2- Calculer m. Que peut-on déduire?

3- Déterminer, en exploitant le graphe, la valeur de S_m ; amplitude du signal à transmettre.

4- En déduire la valeur de la tension de décalage.

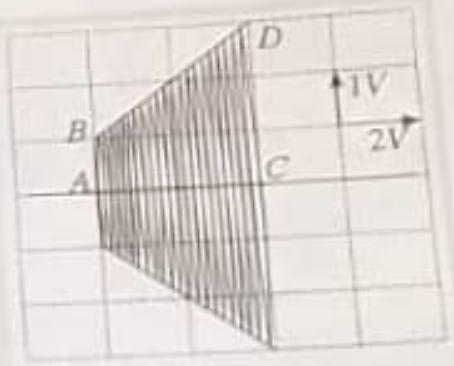


Figure-2

Solution

1- La tension de sortie:

a pour expression:

$$u_s(t) = k.u_i(t).p(t)$$
$$= kP_m.u_i(t).\cos 2\pi F.t$$

Son amplitude $U(t)$ est alors:

$$U(t) = kP_m.u_i(t)$$
$$= kP_m.[U_0 + S_m \cos 2\pi f.t]$$

- Lorsque $u_i(t)$ est maximale (point C), alors $U_s(t)$ est aussi maximale (point D), donc: $U_{max} = H$.

- De la même manière, lorsque $u_i(t)$ est minimale (point A), on a $U_s(t)$ est minimale (point B), donc: $U_{min} = h$.

En revenant à l'expression de $U(t)$ on peut écrire:

$$①\begin{cases} U_{min} = kP_m U_{imin} = kP_m[U_0 - S_m] \\ \quad = kP_m U_0[1-m] \end{cases}$$

$$②\begin{cases} U_{max} = kP_m U_{imax} = kP_m[U_0 + S_m] \\ \quad = kP_m U_0[1+m] \end{cases}$$

En faisant le rapport $\frac{①}{②}$ on obtient:

$$\frac{U_{min}}{U_{max}} = \frac{1-m}{1+m}$$

donne:

$$m = \frac{U_{max} - U_{min}}{U_{max} + U_{min}} = \frac{H-h}{H+h}$$

2- Taux de modulation:

$m = \frac{3-1}{3+1} = 0,5$, la modulation est correcte.

3- Valeur de S_m:

Sur l'axe des abscisses:

au point C: $u_i(C) = U_0 + S_m$ ③.

et au point A: $u_i(A) = U_0 - S_m$ ④.

La différence donne:

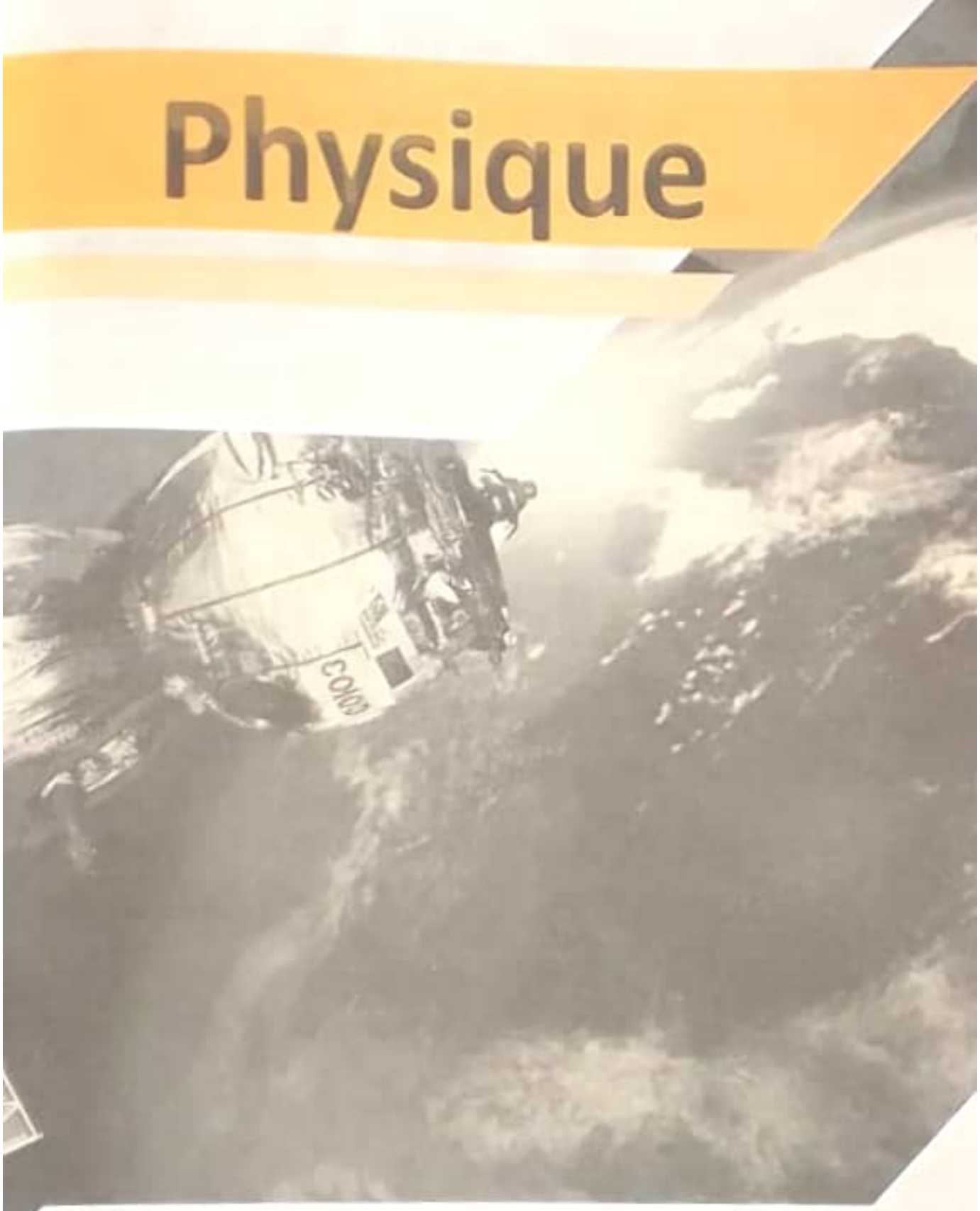
$$AC = (U_0 + S_m) - (U_0 - S_m)$$
$$= 2S_m$$

Ce qui donne: $S_m = \frac{AC}{2} = 2V$

4- La tension de décalage:

est alors: $U_0 = \frac{S_m}{m} = 4V$.

Physique



MECANIQUE

2 les lois de Newton

I- Le mouvement

Le mouvement est relatif, pour l'étudier, il faut choisir un référentiel auquel est lié :
- Un repère d'espace qui permet de repérer la position d'un point du mobile
- Un repère de temps qui permet de déterminer l'instant où le mobile à occupé une position.

1 Vecteur position:

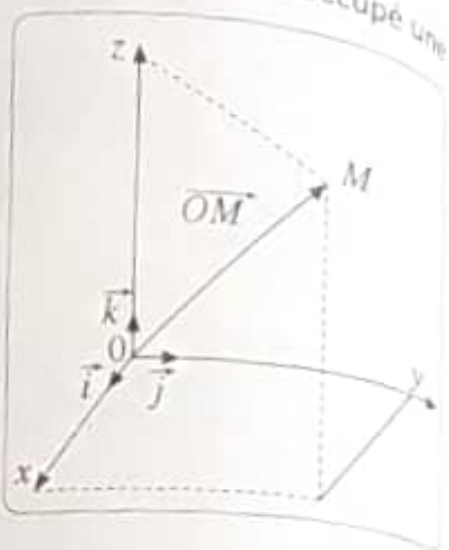
Soit $R(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ un repère, et M un point mobile.

$\overrightarrow{OM}$: vecteur position. tel que:

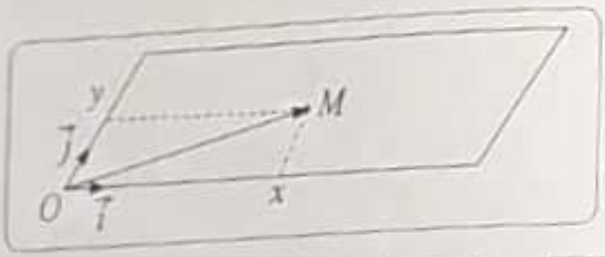
$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

x, y, z sont les coordonnées du point M,

$$\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$



• Dans le plan: on choisit $(o,\vec{i},\vec{j})$ comme repère d'espace.



Le vecteur position s'écrit: $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ tel que: $\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

• Suivant une direction: on choisit $(o,\vec{i})$ comme repère d'espace.

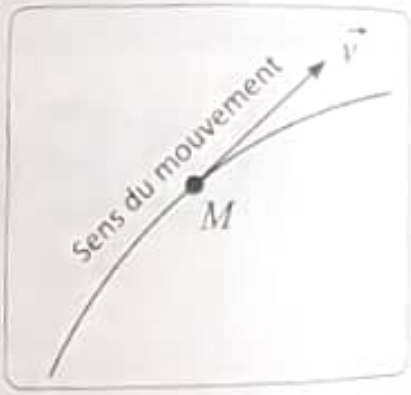


On a: $\overrightarrow{OM} = x\vec{i}$: vecteur position

donc: $\|\overrightarrow{OM}\| = |x|$

2 Vecteur vitesse instantanée

Par définition: $\vec{v}(t) = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$



• Les coordonnées cartésiennes de $\vec{v}(t)$:

On a: $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$

alors: $\vec{v}(t)=\frac{d}{dt}(x\vec{i}+y\vec{j})=\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}$

donc: $\vec{v}(t)=v_x\vec{i}+v_y\vec{j}$ avec $\begin{cases}v_x=\frac{dx}{dt}\\ v_y=\frac{dy}{dt}\end{cases}$

v_x et v_y sont les coordonnées du vecteur vitesse.

le module du vecteur vitesse s'ecrit: $\|\vec{v}(t)\|=\sqrt{v_x^2+v_y^2}$ (en $m.s^{-1}$)

3 Vecteur accélération:

Par définition: $\vec{a}(t)=\frac{d\vec{v}(t)}{dt}=\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$

• Les coordonnées cartésiennes de $\vec{a}(t)$:

On a: $\vec{v}(t)=v_x\vec{i}+v_y\vec{j}$

or: $\vec{a}(t)=\frac{d}{dt}(v_x\vec{i}+v_y\vec{j})$

$=\frac{dv_x}{dt}\vec{i}+\frac{dv_y}{dt}\vec{j}$

donc: $\vec{a}(t)=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}$

avec: $\begin{cases}a_x=\frac{dv_x}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}\\ a_y=\frac{dv_y}{dt}=\frac{d^2y}{dt^2}\end{cases}$; a_x et a_y sont les coordonnées cartésiennes du vecteur accélération

• Dans le repère de Frenet:

Le repère de Frenet est local de base $(M;$ $a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}$ (en $m.s^{-1}$)

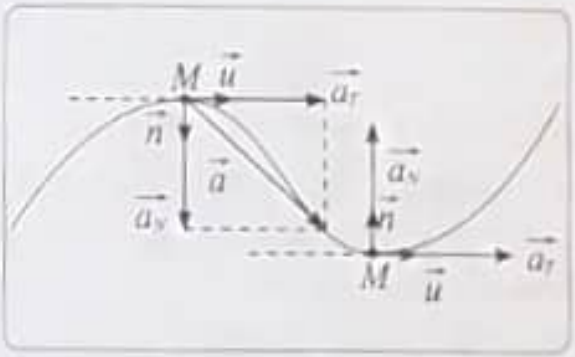
$\vec{a}=a_T\vec{u}+a_N\vec{n}$ avec $\begin{cases}\vec{u}: \text{vecteur tangentiel}\\ \vec{n}: \text{vecteur normal}\end{cases}$

$\begin{cases}a_T=\frac{dv}{dt}: \text{La composante tangentielle}\\ a_N=\frac{v^2}{R}: \text{La composante normale}\end{cases}$

R: rayon de la courbure.

le module du vecteur $\vec{a}$ s'ecrit:

$\|\vec{a}\|=\sqrt{a_T^2+a_N^2}$



II- Les lois de Newton

1 La première loi:

Lorsque un solide est dans un état pseudo-isolé le vecteur vitesse de son centre d'inertie $\vec{v}_G$ est constant.

$$\sum\vec{F}_{ext}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{v}_G=\overrightarrow{cte}$$

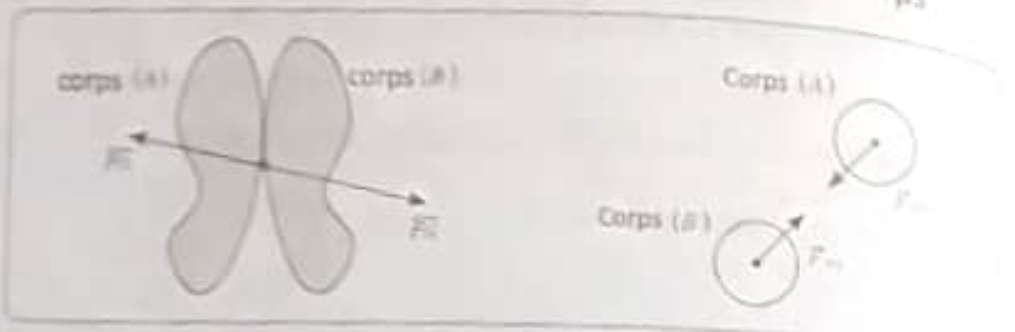
alors si: $v_{0x} = 0$ le corps est au repos.

Si $v_{0x} \neq 0$ Le mouvement de G est rectiligne uniforme

2 Deuxième loi de Newton:

Dans un repère Galilien: $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G$ avec:
- $\sum \vec{F}_{ext}$: forces appliquées sur le corps solide (s)
- $\vec{a}_G$: vecteur accélération de G
- m : la masse du corps

3 Troisième loi de Newton:



On a: $\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A}$

On dit que les corps (A) et (B) sont en intéraction binaire.

III- Le mouvement rectiligne uniformément varié

1 Les grandeurs cinématique

Soit $(O,\vec{i})$ un repère d'espace et M un point mobile de trajectoire rectiligne.

Les grandeurs cinématique du point M sont:

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = x\vec{i} \\ \vec{v}(t) = v_x\vec{i} = \dfrac{dx}{dt}\vec{i} \\ \vec{a}(t) = a_x\vec{i} = \dfrac{dv_x}{dt}\vec{i} \end{cases}$$



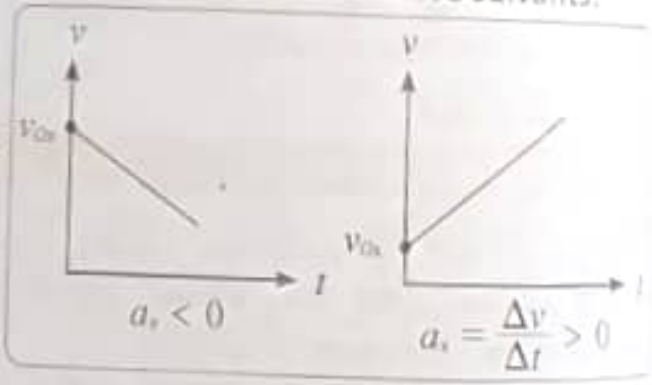
2 Le mouvement rectiligne uniformément varié (MRUV):

Si: $\vec{a} = \overrightarrow{cte}$, on dit le mouvement est rectiligne uniformement varié.

3 Les équations du mouvement:

3.1- Equation de la vitesse: on montre que: $v_x = a_x.t + v_{0x}$

Selon les valeurs de a_x et v_{0x} on distingue les diagrammes de vitesse suivants:



3-2. Equation horaire:

$a_x = \dfrac{dx^2}{dt^2}$ or $v_x = a_x t + v_{0x}$

L'équation horaire des mouvements s'ecrit: $x(t) = \dfrac{1}{2}a_x t^2 + v_{0x}t + x_0$

En éliminant le temps des deux équations précédentes on obtient l'équation indépendante du temps:

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a_x.(x_2 - x_1)$$

Test de connaissances

1 Mots manquants:

a- Le vecteur vitesse est la ..... par rapport au ..... du vecteur .....

b- Le vecteur ..... est la ..... par rapport au ..... du vecteur vitesse.

c- La ..... loi de Newton est vraie. Quel que soit le .....

Solution

a- dérivée - temps - position.

b- accélération - dérivée - temps.

c- 3ème loi - le repère.

2 Vrai ou faux:

a- Quand un solide est soumis à des forces extérieures qui se compensent, tous les points décrivent un mouvement rectiligne uniforme. V F

b- Le vecteur accélération du centre d'inertie est toujours tangent à la trajectoire. V F

c- Pour une même force appliquée à un solide, plus la masse est grande, plus l'accélération du solide est grande. V F

d- Pour résoudre l'équation différentielle de la chute dans un fluide, il faut connaître la vitesse à l'instant de date $t_0 = 0s$. V F

Solution

a- Faux

b- Faux

c- Faux

d- Vrai

3 QCM:

a- Un solide tombe verticalement dans un liquide. Lorsque la vitesse limite est atteinte:

- le vecteur $\sum \vec{F}_{ex}$ est un vecteur constant non nul.
- la force de frottement exercée par le liquide compense le poids.
- le vecteur accélération est nul.

b- La force de frottement exercée par un liquide sur un solide en mouvement:

- est appelée poussée d'Archimède.
- ne dépend pas de la nature du liquide.
- augmente avec la vitesse du solide.

Solution

a- le vecteur accélération est nul.

b- augmente avec la vitesse du solide

Exercices

Un mobile autoporteur est lancé sur une table horizontale. Ce mobile est relié à un point fixe O de la table par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k.

On enregistre le mouvement de son centre d'inertie G.

1- Déterminer graphiquement la variation du vecteur vitesse de G à la date t_2.

2- En déduire les caractéristiques:

a- de l'accélération;

b- de la force exercée par le ressort sur le mobile.

3- Comment peut-on procéder pour vérifier la valeur de cette force?



Données: $\tau = 20ms$; $m = 0,7kg$; $k = 200N.m^{-1}$.

Echelle: $1cm \rightarrow 25cm.s^{-1}$; $l_0 = 1,4\,cm$ longueur initiale

$l_0 = OA_0 = 3,6\,cm$ longueur finale au point A_2.

Solution

1- La variation graphique de $\overrightarrow{\Delta V}$ au point A_2:

On a: $\overrightarrow{\Delta V} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$ avec:

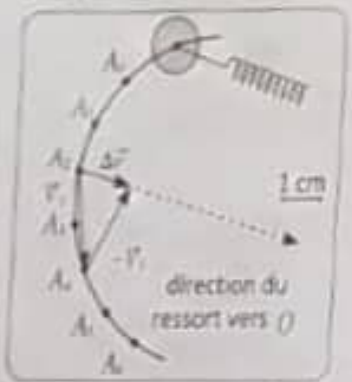
- $V_1 = \dfrac{A_1A_3}{2\tau} = \dfrac{2.10^{-2}}{2.20.10^{-3}} = 0,5m/s$
- $V_2 = \dfrac{A_2A_4}{2\tau} = \dfrac{2.10^{-2}}{2.20.10^{-3}} = 0,5m/s$

Echelle: $0,25m/s \rightarrow 1cm$

$\vec{V}_1 \rightarrow 2cm$

$\vec{V}_2 \rightarrow 2cm$

(voir graphe)



Le vecteur est porté par la droite (A_2O) est de sens de A_2 vers O.

2- Caractéristique de $\vec{a}_2$:

On a: $\vec{a}_2 = \dfrac{\overrightarrow{\Delta V}}{\Delta t} = \dfrac{\overrightarrow{\Delta V}}{2\tau}$

- Origine: le point A_2.
- Direction: même direction de $\overrightarrow{\Delta V}$.
- Sens: même sens que $\overrightarrow{\Delta V}$.
- La norme: $\|\vec{a}_2\| = \dfrac{\|\overrightarrow{\Delta V}\|}{2\tau}$

Graphiquement: $\overrightarrow{\Delta V} \rightarrow 1cm$

Donc: $\|\overrightarrow{\Delta V}\| = 0,25m/s$

D'où: $\|\vec{a}\| = \dfrac{0,25}{2 \times 20 \times 10^{-3}} = 6,25m/s^2$

b- Caractéristique de $\vec{F}$:

- Système étudié: {autoporteur}
- Bilan des forces: $\vec{P}$; $\vec{F}$; $\vec{R}$.

Selon la 2ème loi de Newton:

$$\sum \vec{F}_{ex} = m\vec{a}_G$$

$$\underbrace{\vec{P} + \vec{R}}_{\vec{0}} + \vec{F} = m\vec{a}_G$$

d'où au point A_2: $\vec{F}_2 = m\vec{a}_2$

- Point d'application: point de contact C.
- Ligne d'action: la droite portée par le ressort.
- Sens: même sens que $\vec{a}_2$.

- Intensité: $\|\vec{F}_e\| = m\|\vec{a}_e\|$

$= 0,7 \times 6,25$

$= 4,375N$

3- Vérification de la valeur de $\vec{F}_e$:

On a: $F_e = K\Delta\ell_e$; $\Delta\ell_e = \ell_e - \ell_0$;

$\ell_0 = 1,4cm$

Graphiquement: $\ell_e = OA_1 = 3,6cm$

donc: $\Delta\ell = \ell_e - \ell_0 = 2,2.10^{-2}$

$F_e = 200.2,2.10^{-2} = 4,4N$

2 On lance une bille verticalement à $t_0 = 0s$. Sur un axe (Oz) orienté vers le haut, la position du centre d'inertie de la bille est donnée à chaque instant par la relation:

$z(t) = -4,9t^2 + 2,0t + 1,2$ (unités SI).

1- Quelle est la position du centre d'inertie de la bille à l'instant de date $t_0 = 0s$?

2.a- Donner l'expression en fonction du temps de la coordonnée $v_z(t)$ du vecteur vitesse.

b- Quelle est sa valeur à l'instant de date $t_0 = 0s$?

c- La bille est-elle lancée vers le haut ou vers le bas? Justifier.

d- A quel instant particulier la vitesse de la bille s'annule-t-elle?

e- Quelle est alors sa position?

3.a- Donner l'expression en fonction du temps de la coordonnée $a_z(t)$ du vecteur accélération.

b- Que peut-on dire de ce vecteur?

Solution

1- Détermination de z_0 :

$z_0 = z(t=0) = -4,9 \times 0^2 + 2 \times 0 + 1,2$

$z_0 = 1,2m$

2.a- Expression de $V_z(t)$:

on a: $V_z(t) = \frac{dz(t)}{dt}$

$V_z(t) = (-4,9t^2 + 2t + 1,2)$

$V_z(t) = -9,8t + 2$

b- Valeur de $t = 0$:

on a: $V_{0z} = V_z(t=0) = 2m/s$

c- Sens du mouvement:

On a: $\vec{v}_{0z} = v_{0z}\vec{k}$

$v_{0z} > 0$

alors: $\vec{V}_{0z}$ et $\vec{k}$ ont même sens donc la bille est lancée vers le haut.

d- $V_z(t_1) = 0$

$-9,8t_1 + 2 = 0$

$t_1 = \frac{2}{9,8}$

$t_1 = 0,2s$

3.a- Expression de $a_z(t)$:

on a: $a_z(t) = \frac{dv_z}{dt}$

$a_z(t) = 9,8m/s^2$

b- $\vec{a}_z = -9,8\vec{k}$

$\vec{a}_z$ est de sens vers le bas; il repré

l'accélération de la pesanteur $\vec{g}$.

3 Les équations horaires d'un point mobile M dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ s'écrit:

$$\begin{cases} x = 3t^2 & (m) \\ y = -4t^2 + 5 & (m) \end{cases}$$

1- Donner l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$.

2- Trouver les coordonnées du vecteur vitesse en fonction du temps et calculer sa valeur à $t = 1s$.

3- Même question pour le vecteur accélération.

Solution

1- Expression de $\overrightarrow{OM}$:

On a: $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$

$$\overrightarrow{OM} = 3t^2\vec{i} + (-4t^2 + 5)\vec{j}$$

2- Coordonnées de $\vec{v}(t)$:

Dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ on a:

$$\vec{v}(t) = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$$

avec: $\begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} = 6t \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} = -8t \end{cases}$

donc: $\|\vec{v}(t)\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

$$= \sqrt{36t^2 + 64t^2} = \sqrt{100t^2}$$

$$= 10t$$

à $t = 1s$: $\|\vec{v}(t)\| = 10m/s$

3- Coordonnées de $\vec{a}(t)$:

On a: $\vec{a}(t) = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$

avec: $\begin{cases} a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = 6 \\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = -8 \end{cases}$

donc: $\|\vec{a}(t)\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

$$\|\vec{a}(t)\| = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100}$$

$$\|\vec{a}(t)\| = 10m/s^2$$

4 L'équation horaire du point mobile M s'écrit: $x(t) = t^2 - 4t + 2$ avec $t > 0$

1- Trouver les expressions de la vitesse et de l'accélération.

2- A quel instant s'annule la vitesse; quelle est la valeur de l'abscisse à cet instant?

3- Discuter la nature du mouvement (accéléré, retardé) selon les intervalles.

Solution

1- On a: • $v_x = \dfrac{dv_x}{dt} = (t^2 - 4t + 2)'$

$$v_x(t) = 2t - 4$$

• $a_x(t) = \dfrac{dv_x}{dt} = (2t - 4)'$

$$a_x(t) = 2m/s^2$$

2- On a: $v(t_1) = 0 \Rightarrow 2t_1 - 4 = 0$

donc: $t_1 = 2s$.

alors: $x(t_1) = t_1^2 - 4t_1 + 2$

$$= 2^2 - 4.2 + 2$$

$$x(t_1) = -2(m)$$

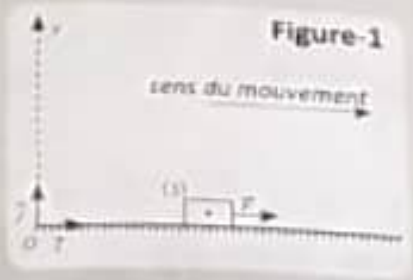
3- Le mouvement de M étant rectiligne uniformément varié tel que: $v_x.a_x = (2t - 4)2$.

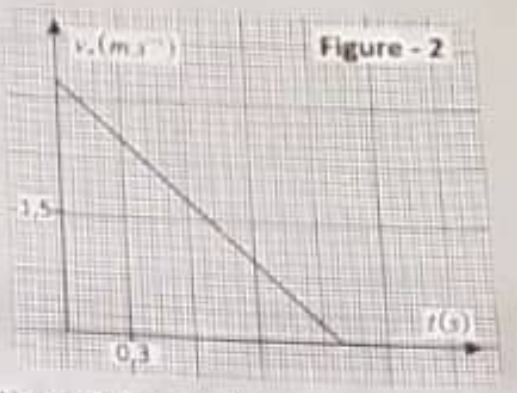
t	0		2		t_f
$v_x.a_x$		-	0	+	

• si $t \in [0;2[$ alors: $v_x.a_x < 0$ le mouvement est retardé.

• si $t \in]2;t_f]$ alors: $v_x.a_x > 0$ le mouvement est accéléré.

5 La figure-1 représente un solide (S) de masse $m = 500g$ en mouvement rectiligne sur un plan horizontal. Le corps (S) est soumis lors de son passage par le point O à une force $\vec{F}$ parallèle à $\vec{Ox}$ et d'intensité $F = 0,75N$.





Le graphe figure - 2 représente les variations de la coordonnée v_x du vecteur vitesse $\vec{v}$ du centre d'inertie de (S) en fonction du temps.

1- Quelle est la nature du mouvement du corps (S)? Justifier.

2- Déterminer graphiquement a_x la coordonnée du vecteur accélération $\vec{a}$ du centre d'inertie de (S).

3- Ecrire l'équation horaire du mouvement du centre d'inertie de (S) sachant que à $t = 0$, $x_0 = 0$.

4- On appliquant la 2ème loi de Newton sur le corps (S) trouver l'intensité de la force $\vec{R}$ due à l'action du plan horizontal sur le corps (S). **On donne:** $g = 10N.kg^{-1}$.

Solution

1- Le diagramme des vitesses est une droite affine alors: $a = \frac{dV}{dt} = cte$.

Donc le mouvement est uniformément varié (retardé).

2- On a: $a_x = \frac{\Delta v_x}{dt}$

graphiquement:

$$a_x = \frac{0-3}{1,2-0} = -2,5m/s^2$$

3- Equation horaire:

Le mouvement est rectiligne uniformément varié d'équation.

$$x(t) = \frac{1}{2}a_x t^2 + v_{0x}t + x_0$$

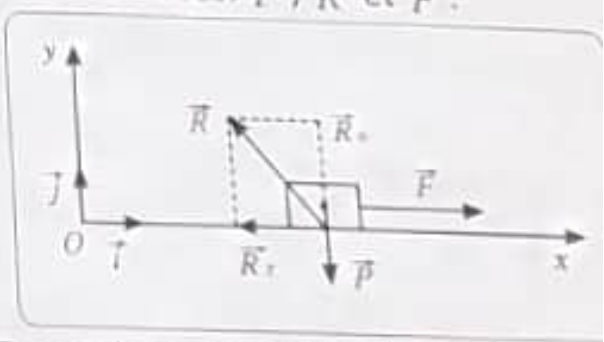
avec: $x_0 = 0$ et $v_{0x} = 3m/s$

donc: $x(t) = -1,25t^2 + 3t$

4- Intensité de $\vec{R}$:

Système étudié: $\{S\}$

bilan des forces: $\vec{P}$; $\vec{R}$ et $\vec{F}$.



On applique la 2ème loi de Newton:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$$

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m\vec{a}$$

projetons $\vec{Ox}$: $P_x + R_x + F_x = ma_x$

$$0 - R_T + F = ma_x$$

$$R_T = F - ma_x$$

projetons $\overrightarrow{Oy}$: $P_y + R_y + F_y = ma_y$

$$-P + R_n + 0 = 0$$

$$R_n = P = mg$$

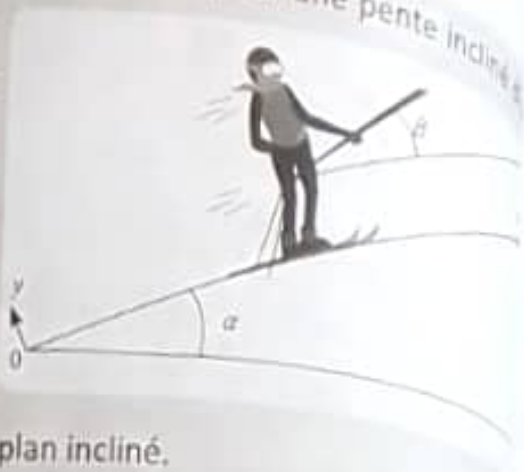
donc: $R = \sqrt{R_t^2 + R_n^2}$

$$R = \sqrt{(F - ma_c)^2 + (mg)^2}$$

$$R = \sqrt{(0,75 + 0,5.2,5)^2 + (0,5.10)^2}$$

$$R \simeq 5,4N$$

Un skieur démarre, tiré par une perche de téléski, sur une pente inclinée d'angle $\alpha = 20°$ par rapport à l'horizontale. La perche fait un angle $\beta = 45°$ avec la direction de la piste.



1- la vitesse du skieur passe de $2m.s^{-1}$ en $0,5s$; calculer l'accélération du centre d'inertie du skieur.

2- Le skieur a une masse $m = 80kg$; calculer la tension de la perche.

3- En déduire l'intensité de la réaction du plan incliné.

Donnée: $g = 9,8N/kg$. On néglige les frottements.

Solution

1- Calcul de l'accélération:

$$a_G = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

A.N.: $a_G = \frac{2-0}{0,5-0} = 4\,m.s^{-2}$

2- Calcul de la tension:

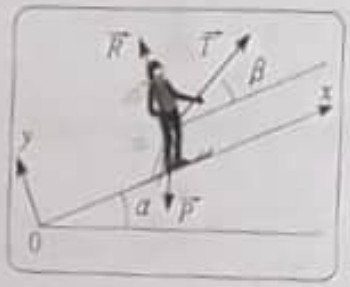
Système étudié: (Skieur)

Bilan des forces: $\vec{P}, \vec{R}, \vec{T}$.

On applique la 2ème loi de Newton:

$$\sum \overrightarrow{F_{ex}} = m.\vec{a_G}$$

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m.\vec{a_G}$$



On projette sur $(\overrightarrow{Ox})$:

$$P_x + R_x + T_x = m.a_{G_x}$$

$$-mg\sin(\alpha) + 0 + T\cos(\beta) = ma_G$$

$$T\cos(\beta) = ma_G + mg\sin(\alpha)$$

$$T = \frac{ma_G + mg\sin(\alpha)}{\cos(\beta)}$$

$$T = 831,76N$$

3- Déduction de R:

On projette sur $(\overrightarrow{oy})$.

$$Py + Ry + Ty = ma_{G_y} = 0$$

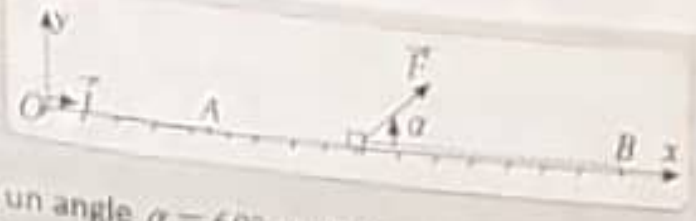
$$-P\cos(\alpha) + R + \sin(\beta) \times T = 0$$

$$R = m.g\cos(\alpha) - \sin(\beta) \times T$$

$$R = 80 \times 9,8 \times \cos(20) - \sin(45) \times 831$$

$$= 149N$$

Un corps S de masse $m = 100g$ se déplace sur une piste rectiligne et horizontale sous l'action d'une force de traction $\vec{F}$ constante faisant avec l'horizontale un angle $\alpha = 60°$ et d'intensité $F = 0,8N$.



Les frottements sont équivalents à une force constante $\vec{f}$ opposée au sens du mouvement et d'intensité $f = 0,1N$.

L'accélération de la pesanteur est constante et d'intensite $g = 10m.s^{-2}$.

1- En utilisant la deuxième loi de Newton, montrer que l'accélération du mouvement s'exprime par: $a_x = \dfrac{F\cos\alpha - f}{m}$, calculer a_x.

2- Sachant que le corps S passe par la position A; $(OA = 1m)$ à la date $t = 0$ à la vitesse $v_A = 2m/s$:

Etablir les équations $v(t)$ et $x(t)$.

3- Le corps passe par la position B avec la vitesse $v_B = 5m.s^{-1}$

3.1- En utilisant les équations $v(t)$ et $x(t)$ montrer que:

$v_B^2 - v_A^2 = 2a_x.AB$

3.2- En déduire la distance AB.

4- Déterminer l'intensité R de la force due à l'action de la piste AB sur le corps S.

Solution

1- $\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m\vec{a}$

La mouvement est une translation rectiligne, tous les points de S ont même accéleration notée $\vec{a}$.

On a $\vec{R} = \vec{f} + \vec{N}$, $\vec{f}$: force de frottement.

Soit donc: $\vec{F} + \vec{P} + \vec{f} + \vec{N} = m\vec{a}$

Ces vecteurs s'expriment dans le système Oxy comme suit:

$$\vec{a}\begin{vmatrix} a_x \\ a_y \end{vmatrix} \quad \vec{P}\begin{vmatrix} P_x = O \\ P_y = -P = -mg \end{vmatrix} \quad \vec{R}\begin{vmatrix} R_x = -f \\ R_y = N \end{vmatrix}$$

$$\vec{F}\begin{vmatrix} F_x = F\cos\alpha \\ F_y = F\sin\alpha \end{vmatrix}$$

En utilisant l'axe Ox on écrit:

$F.\cos\alpha + 0 - f = m.a_x$,

d'où: $a_x = \dfrac{F\cos\alpha - f}{m}$

$$a_x = \frac{0,8.0,5 - 0,1}{0,1} = 3m.s^{-2}$$

2- $\dfrac{dv_x}{dt} = a_x = cte$,

donc: $v_x = a_x.t + C = 1,5t + C$

$\vec{V} = V_x.\vec{i}$, $V_x > 0$ donc

$V = V_x = 3t + C$

à $t = 0$, on a $V = V_A$, donc $C = V_A$ alors

$V = a_x t + V_A$ (1)

• Ensuite: $\dfrac{dx}{dt} = V_x = a_x t + V_A$,

alors: $x = \dfrac{1}{2}a_x t^2 + V_A t + C'$

à $t = 0$, $x = x_A$, d'où $C' = x_A$.

Donc: $x = \dfrac{1}{2}a_x t^2 + V_A t + x_A$ (2)

Soit en remplaçant: $v =, 3 + 2$

$x = 1,5t^2 + 2t + 1$

3- L'équation (1) donne au points B:

$$t_B = \frac{v_B - v_A}{a_x}$$

Et en remplaçant dans (2) on obtient.

$$x_B = \frac{1}{2}a_x t_B^2 + v_A t_B + x_A$$

$$= \frac{1}{2}a_x\left(\frac{v_B - v_A}{a_x}\right)^2 + v_A\left(\frac{v_B - v_A}{a_x}\right) + x_A$$

$$x_B - x_A = \frac{(v_B - v_A)^2 + 2v_A(v_B - v_A)}{2a_x}$$

$$AB = \frac{v_B^2 - v_A^2}{2a_x}$$

d'où: $v_B^2 - v_A^2 = 2a_x AB$

3.2- $AB = \frac{5^2 - 4^2}{2.3} = 1,5m$

4- En utilisant les projections sur oy:

$$P_y + F_y + R_y = m.a_y$$

Le mouvement est rectiligne sur ox:

donc: $\overrightarrow{OM} = x\vec{i}$, $\vec{v} = v_x.\vec{i}$ et $\vec{a} = a_x.\vec{i}$

Donc: $\vec{a} \parallel Ox \Longrightarrow a_y = 0$

En remplaçant: $-P + F\sin\alpha + R_y = 0$

$R_y = P - F\sin x$

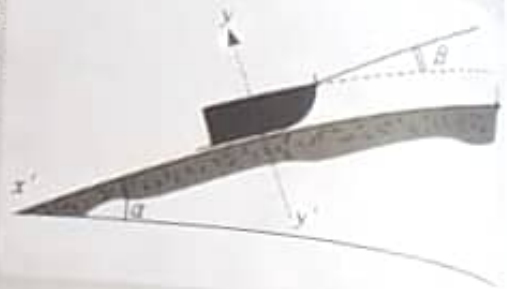
$= 1 - 0,8\sin 60° \simeq 0,31N$

$R = \sqrt{R_x + Ry^2} = \sqrt{f^2 + R_y^2} = 0,32N$.

8 Un traîneau de masse $m = 200\ kg$ est tiré selon un ligne de plus grande pente d'un plan incliné par l'intermédiaire d'un câble faisant un angle β, constant, avec celle-ci. La tension du câble vaut 1250 N.

Sachant que le mouvement est rectiligne et uniforme, déterminer la réaction $\vec{R}$, somme des forces de contact exercées par le sol sur le traîneau.

Données: $\alpha = 20°$; $\beta = 30°$; $g = 9,8\ m.s^{-2}$.



Solution

- Le système étudié: (Le traîneau).
- Bilan des forces: $\vec{P}; \vec{R}; \vec{T}$

Appliquons la 1ère loi de Newton:

$$\sum \vec{F_{ex}} = \vec{0}$$

Donc: $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = \vec{0}$

- Suivant $(\vec{x}'\vec{x})$: $Px + Rx + Tx = 0$

$$-m.g\sin(\alpha) - R_T + T\cos(\beta) = 0$$

$$R_T = T\cos\beta - mg\sin\alpha$$

A.N.:

$R_T = -200 \times 9,8 \times \sin(20) + 1250 \times \cos(30)$

$R_T \simeq 412N$

- Suivant:

$$(\vec{y}'\vec{y}): P_y + R_y + T_y = 0$$

$$-m.g\cos(\alpha) + R_N + T\sin(\beta) = 0$$

$$R_N = mg\cos(\alpha) - T\sin(\beta)$$

A.N.:

$R_N = 200 \times 9,8 \times \cos(20) - 1250\sin(30)$

$R_N = 1217N$

Donc: $R = \sqrt{R_T^2 + R_N^2}$

$$R = \sqrt{(412)^2 + (1217)^2}$$

$$R = 1285N$$

9 Un traîneau peut glisser vers le bas suivant la plus grande pente sur un plan incliné d'un angle α. La réaction $\vec{R}$ somme des forces de contact du sol sur le traîneau, comporte une composante $\vec{R}_N$ normale au plan et une composante $\vec{R}_T$ parallèle au plan incliné et de sens opposé au vecteur vitesse $\vec{v}$ du traîneau. On montre expérimentalement que lorsqu'il y a un mouvement: $\frac{R_T}{R_N} = K$, K : coefficient de frottement il dépend de l'état des surfaces en contact. S'il n'y a pas mouvement: $\frac{R_T}{R_N} < K$.

1- Exprimer l'accélération du traîneau en fonction de α, f et g.

2- Calculer la valeur α_m minimale pour que le glissement ait lieu.

Données: $g = 9,8 m.s^{-2}$; $k = 0,15$

3- Calculer l'accélération pour $\alpha = 2\alpha_m$.

Solution

1- En appliquant la 2ème loi de Newton:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G$$

$$\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}_G$$

suivant l'axe: $(\overrightarrow{xx'})$: $P_x + R_x = ma_x$

$$P\sin\alpha - R_T = ma_x$$

$$R_T = mg\sin x - ma \quad (1)$$

suivant l'axe $(\overrightarrow{yy'})$: $P_y + R_y = ma_y$

$(a_y = 0$ car le mouvement se fait selon $(xx'))$

$$-P\cos\alpha + R_N = 0$$

$$R_N = P\cos\alpha \quad (2)$$

On a: $k = \frac{R_T}{R_N} = \frac{mg\sin\alpha - ma}{mg\cos\alpha}$

$$k = \frac{g\sin\alpha - a}{g\cos\alpha}$$

$$\Leftrightarrow k.g.\cos\alpha = g\sin\alpha - a$$

$$\Leftrightarrow a = g\sin\alpha - k.g.\cos\alpha$$

$$\Leftrightarrow a = g(\sin\alpha - k\cos\alpha)$$

2- Calcul de α_m :

$\Rightarrow$ Pour qu'il y a mouvement il faut que: $a \geq 0$ $(v \neq 0)$.

$$\Leftrightarrow g(\sin\alpha - k\cos\alpha) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\alpha - k\cos\alpha \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\alpha \geq k\cos\alpha \Leftrightarrow \tan\alpha \geq k$$

$$\Leftrightarrow \alpha \geq \tan^{-1}(k)$$

Donc la valeur min: $\alpha_m = \tan^{-1}(0,15)$

$$\alpha_m = 8,5°$$

3- Calcul de a' pour $\alpha = 2\alpha_m$:

Considérons la relation suivante:

$$a' = g(\sin(2\alpha_m) - k\cos(2\alpha_m))$$

A.N.:

$$a' = 9,8(\sin(2\times 8,5) - 0,15\cos(2\times 8,5))$$

$$a' \simeq 1,45 m/s^2$$

10 Un corps solide (S) de masse $m = 0,8kg$ se déplace sur une piste (ABC) dans un plan vertical. le corps (S) est lancé d'un point A avec une vitesse $v_A = 3m.s^{-1}$ pour arriver en B avec une vitesse nulle, il glisse sur l'arc BC sans frottement.

1.1- Par application de la 2ème loi de Newton trouver l'expression de l'intensité f la

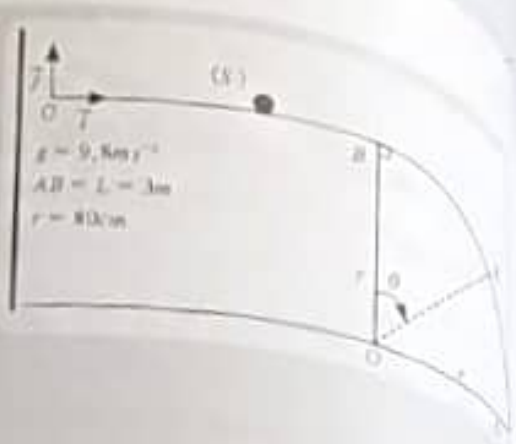
force de frottement considérée comme constante. Calculer f.

1.2- En déduire l'intensité de la force $\vec{R}$ appliquée par la piste AB sur le corps (S).

2.1- Trouver l'expression de la vitesse v_E en fonction de g r et θ.

2.2- Trouver l'expression de l'intensité R_E de la réaction de la piste BC.

2.3- En quel point le corps (S) quitte la piste?



Solution

1.1- Expression de f:

On applique la 2ème loi de Newton:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$$

$$\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$$

Suivant l'axe $(A\vec{T})$: $P_x + R_x = ma_x$

$$0 - f = ma$$

donc: $f = -ma$

avec: $a = \frac{v_B^2 - v_A^2}{2AB}$

A.N.: $a = -\frac{9}{2.3} = -1,5m/s^2$

$$f = 0,8.1,5 = 1,2N$$

1.2- Intensité de $\vec{R}$:

On a: $\vec{R} = \vec{f} + \vec{R}_N$

$$R = \sqrt{f^2 + R_N^2} \quad P_y + R_y = ma_y$$

Suivant l'axe $(A\vec{j})$: $-P + R_N = 0$

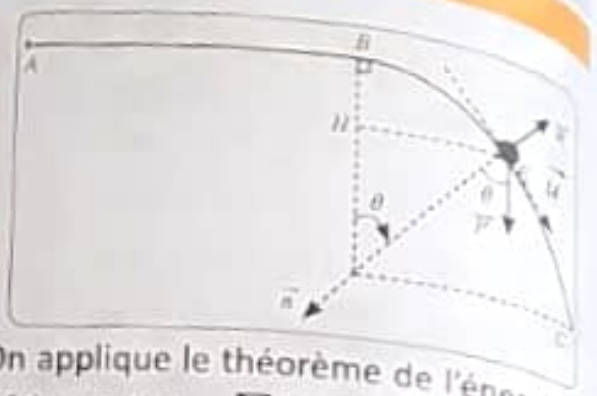
$$\Longrightarrow R_N = P = mg$$

A.N.: $R_N = 0,8.9,8 = 7,84N$

Donc: $R = \sqrt{1,2^2 + 7,84^2}$

$$R \approx 7,93N$$

2.1- Expression de v_E:



On applique le théorème de l'énergie cinétique: $\Delta E_C = \sum W(\vec{F})$

$$\frac{1}{2}mv_E^2 - \frac{1}{2}mv_B^2 = \underbrace{W_{B\to E}(\vec{P})}_{0} + \underbrace{W_{B\to E}(\vec{R})}_{0}$$

$$\frac{1}{2}mv_E^2 = mgh$$

avec: $h = BH = r(1 - \cos\theta)$

donc: $v_E^2 = 2gr(1 - \cos\theta)$

d'où: $v_E = \sqrt{2gr(1 - \cos\theta)}$

2.2- Expression de R_E:

On applique la 2ème loi de Newton:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$$

$$\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$$

On projette suivant la composante $\vec{n}$ du repère de Frenet.

$$P_n + R_n = ma_N$$

$$P\cos\theta - R_E = m\frac{v_E^2}{r}$$

$$R_z = mg\cos\theta - m\frac{2gr(1-\cos\theta)}{r}$$

$$R_z = mg(-2+3\cos\theta)$$

2.3- Point de décollage:

Le solide quitte la piste BC si:

$R_M = 0$.

alors: $mg(-2+3\cos\theta_M) = 0$

$$\cos\theta_M = \frac{2}{3}$$

$$\theta_M \simeq 48°$$

Une piste verticale BCD est constituée par:

- Une partie BC horizontale de longueur $BC = 80cm$.
- Une partie CD circulaire de rayon $r = 30cm$.

1- On lance un corps (S) ponctuel de masse $m = 200g$ du point B avec une vitesse $v_B = 2m.s^{-1}$, sur le trajet BC. On considère que les forces de frottements sont équivalentes à une force $\vec{f}$ constante.



1.1- Trouver l'expression de f ; calculer sa valeur sachant que l'accélération est $a_x = -2m/s^2$.

1.2- Calculer la vitesse v_C au point C.

1.3- Donner l'équation horaire du mouvement.

2- Le corps (S) continue son mouvement sur la partie CD sans frottement.

2.1- Trouver l'expression de $\vec{R}$ la force appliquée par la piste sur le corps (S) au point M tel que, $\theta = (\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OM})$ en fonction de g, r, θ et v_M.

2.2- Trouver l'expression de v_M en fonction de v_C, g, r, θ.

2.3- En déduire l'expression de R en fonction de v_C, g, r, θ.

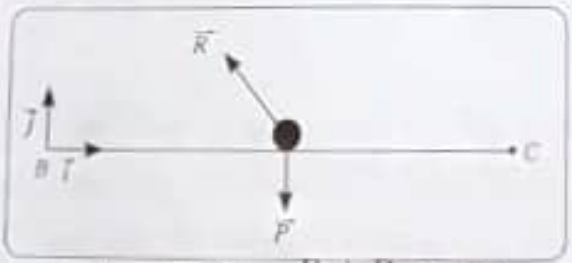
2.4- Trouver la valeur θ_{max} correspondant à l'angle où le solide quitte la piste CD.

On donne $g \approx 10N.kg^{-1}$.

Solution

1.1- On applique la 2ème loi de Newton:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \; ; \; \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$$



Suivant l'axe $(B\vec{i})$; $P_x + R_x = ma_x$

$$0 - f = ma_x$$

$$f = -ma_x$$

A.N.: $f = 0,2.2 = 0,4N$.

1.2- Le mouvement de (S) étant rectiligne uniformément varié on montre que:

$$v_C^2 - v_B^2 = 2a_x.BC$$

$$v_C = v_B^2 + 2a_x.BC$$

A.N.: $v_C = \sqrt{2^2 + 2.(-2.0,8)} \approx 0,9m/s$

1.3- équation horaire:

L'équation du mouvement s'écrit:

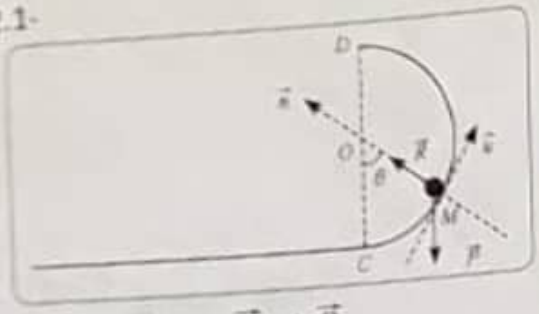
$$x(t) = \frac{1}{2}a_x t^2 + v_0 t + x_0$$

à $t = 0$, $v_0 = v_B = 2m/s$

$$x = x_0 = 0$$

Alors, $x(t) = -t^2 + 2t$

2.1-



Bilan des forces: $\vec{P}$ et $\vec{R}$.

selon la 2ème loi de Newton:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G$$

$$\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}_G$$

On projette suivant la composante $\vec{n}$ du repère de Frenet:

$$P_n + R_n = ma_n$$

$$mg\cos\theta + R = m\frac{v_M^2}{r}$$

$$R = mg\cos\theta + \frac{m}{r}v_M^2$$

2.2- Expression de v_M:

D'après le théorème de l'énergie cinétique: $\Delta E_C = \sum W(\vec{F})$.

$$\frac{1}{2}mv_M^2 - \frac{1}{2}mv_C^2 = W(\vec{P}) + \underbrace{W(\vec{R})}_{0}$$

$$W(\vec{P}) = -mgh = -mgr(1-\cos\theta)$$

donc:

$$\frac{1}{2}mv_M^2 - \frac{1}{2}mv_C^2 = -mgr(1-\cos\theta)$$

$$v_M = \sqrt{v_C^2 - 2gr(1-\cos\theta)}$$

2.3- Expression de R:

On remplace v_M on trouve:

$$R = mg\cos\theta + \frac{mv_C^2}{r} - 2mg(1-\cos\theta)$$

$$R = \frac{mv_C^2}{r} + mg(3\cos\theta - 2)$$

2.4- Valeur de θ_{max}:

Le corps (S) quitte la piste si $R \approx 0$.

donc:

$$\frac{mv_C^2}{r} + mg(3\cos\theta_{max} - 2) = 0$$

$$3\cos\theta_{max} - 2 = -\frac{v_C^2}{g.r}$$

$$\cos\theta_{max} = \frac{2}{3} - \frac{v_C^2}{3g.r}$$

A.N.: $\cos\theta_{max} = \frac{2}{3} - \frac{0,9^2}{3.10.0,3}$

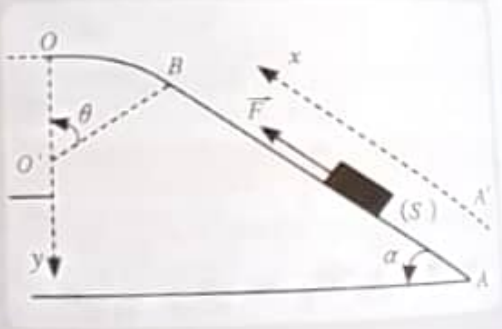
$$\cos\theta_{max} \approx 0,58$$

$$\theta_{max} \approx 54,8°$$

12 Un corps solide (S) de masse $m = 0,5kg$, se déplace sur une piste (ABO), appartenant à un plan vertical, constituée de deux portions.

- La position (AB) rectiligne de longueur $L = 2M$, incliné d'un angle $\alpha = 30°$ par rapport à l'horizontale.

- La portion (BO) circulaire de rayon $r = 10cm$, d'angle $\theta = 30°$ (voir figure - 1)



1- Etude du mouvement de (S) le long du trajet AB.

On applique sur (S) une force $\vec{F}$ constante de direction parallèle à AB, qui le déplace sans vitesse initiale du point A à l'instant $t = 0$, vers le point B. La figure - 2 représente ℓ ; $x = f(t^2)$ dans le repère $(A';x)$. On néglige tous les frottements.

1.1- Déterminer l'accélération du corps (S).

1.2- Écrire l'équation horaire $x = f(t)$ du mouvement du corps (S).

1.3- Calculer la vitesse v_B du corps (S) au point B.

1.4- Trouver l'intensité de la force $\vec{F}$ en appliquant la 2ème loi de Newton.

2- Étude du mouvement du corps (S) sur la portion BO au point B on élimine la force $\vec{F}$.

2.1- En appliquant le théorème de l'énergie cinétique calculer la vitesse v_0 du corps (S) au point O.

2.2- Déterminer l'intensité de la force $\vec{R}_0$, action du portion BO sur le corps (S).



On donne: $g = 10N/kg$.

Solution

1.1- Accélération:

Graphiquement la courbe $x(t)$ est une droite linéaire.

donc: $x = kt^2$

et on a: $v = \frac{dx}{dt} = 2kt$

et: $a = \frac{dv}{dt} = 2k$

k étant le coefficient directeur:

$$k = \frac{\Delta t}{\Delta t^2} = \frac{1-0}{2-0} = 0,5m/s^2$$

D'où: $a = 1m/s^2$.

1.2- Equation horaire:

On a: $a = c^{te}$ donc le mouvement de (S) est rectiligne uniformément varié donc:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$$

avec: $v_0 = v_A = 0$ et $x_0 = x_A = 0$.

donc: $x = t^2$.

1.3- Calcul de v_B:

au point B on a: $x_B = L = t_B^2$

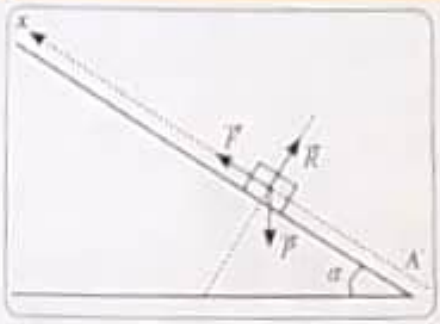
donc: $t_B = \sqrt{L} = \sqrt{2}$

$$t_B \simeq 1,45s$$

donc: $v_B = a.t_B$

$$v_B = 1,4m/s$$

1.4- $\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m\vec{a}$.



Suivant l'axe $(\vec{Ax})$:

$$P_x + P_y + F_x = ma_x$$

$$-mg\sin\alpha + 0 + F = ma$$

$$F = ma + mg\sin\alpha$$

A.N.: $F = 0,5.1 + 0,5.10\sin 30$

$$F = 3N$$

2.1- Calcul de v_0:

Bilan des forces: $\vec{P}$ et $\vec{R}$.

D'après le théorème de l'énergie cinétique: $\Delta E_C = \sum W(\vec{F})$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv_B^2 = W(\vec{P}) + \cancel{W(\vec{R})}^{0}$$

$$\frac{1}{2}m v_0^2 - \frac{1}{2}m v_B^2 = -mgh$$

avec: $h = r(1-\cos\theta)$

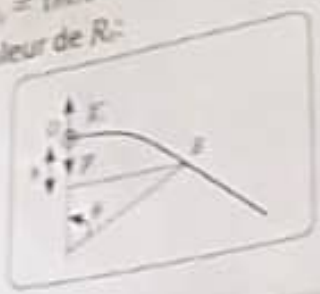
donc: $v_0^2 = v_B^2 - 2gr(1-\cos\theta)$

$$v_0 = \sqrt{v_B^2 - 2gr(1-\cos\theta)}.$$

A.N: $v_0 = \sqrt{1,4^2 - 2.10.0,2(1-\cos 30^\circ)}$

$v_0 = 1m/s$

2.2- Valeur de R_0:



Selon la 2ème loi de Newton:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$$

$$\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$$

Projetons suivant $\vec{n}$.

$$P_n + R_n = ma_n$$

$$+P - R_0 = m\frac{v_0^2}{r}$$

A.N.: $R_0 = 0,5.10 - \frac{0,5.1^2}{0,1}$

$$R_0 = 0$$

Étude du mouvement d'un skieur avec frottements (Bac PC Juin 2017)

Le ski, comme sport, est considéré parmi les meilleures activités de loisirs pendant l'hiver ; c'est un sport d'aventure, de consistance physique, et de souplesse.



On se propose d'étudier dans cette partie, le mouvement du centre d'inertie d'un skieur avec ses accessoires sur une piste de ski.

Un skieur glisse sur une piste de ski, constituée par deux parties:

- Une partie $A'B'$ rectiligne et inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale.
- Une partie $B'C'$ rectiligne et horizontale (voir figure).

Données:

- $g = 9,8m.s^{-2}$;
- Masse totale du skieur et ses accessoires: $m = 65kg$;
- Angle d'inclinaison: $\alpha = 23°$.
- On néglige la résistance de l'air.

I- Étude du mouvement sur le plan incliné:

On étudie le mouvement du centre d'inertie G du système (S), constitué par le skieur et ses accessoires dans le repère $(A;\vec{i};\vec{j})$ lié à un référentiel terrestre considéré galiléen.

Le système (S) se met en mouvement sans vitesse initiale depuis le point A, confondu avec G à l'instant $t = 0$, origine des dates.

Le mouvement de G se fait suivant la ligne de plus grande pente du plan incliné AB $(AB = A'B')$.

Le contact entre le plan incliné et le système (S) se fait avec frottements. La force de frottements est constante d'intensité $f = 15N$.

1.1- En appliquant la deuxième loi de Newton, montrer que l'équation différentielle vérifiée par la vitesse v_G du mouvement de G s'écrit sous forme: $\frac{dv_G}{dt} = g.\sin\alpha - \frac{f}{m}$.

1.2- La solution de cette équation différentielle est de la forme: $v_G(t) = bt + c$. Déterminer les valeurs de b et de c.

1.3- Déduire la valeur de t_B, à l'instant de passage du centre d'inertie G par la position B avec une vitesse égale à $90km.h^{-1}$.

1.4- Trouver l'intensité R de la force exercée par le plan incliné sur le système (S).

2- Étude du mouvement sur le plan horizontal:

Le système (S) continue son mouvement sur le plan horizontal $B'C'$ pour s'arrêter à la position C'. Le contact entre le plan horizontal et le système (S) se fait avec frottements. La force de frottements est constante d'intensité f'.

Le mouvement de G est étudié dans le repère horizontal $(B;\vec{i})$ lié à un référentiel terrestre considéré galiléen.

Le centre d'inertie G passe par le point B avec une vitesse de $90km.h^{-1}$ à un instant considéré comme nouvelle origine des dates.

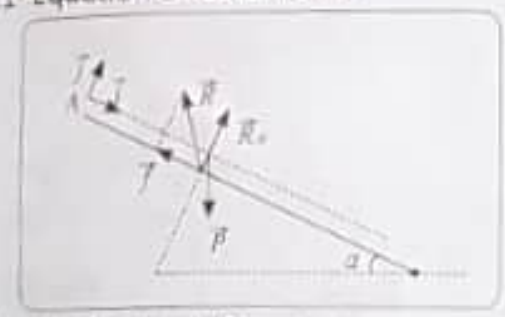
2.1- En appliquant la deuxième loi de Newton, trouver l'intensité f' sachant que la composante horizontale du vecteur accélération du mouvement de G est: $a_x = -3m.s^{-2}$.

2.2- Déterminer t_c, l'instant d'arrêt du système.

2.3- Déduire la distance BC' parcourue par G.

Solution

1.1- Equation différentielle:



selon la 2ème loi de Newton:

$\sum \vec{F}_{ex} = m\vec{a}_G$

$\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}_G$.

suivant $(A,\vec{i})$: $P_x + R_x = ma_x$

$+mg\sin\alpha - f = m\frac{dv_G}{dt}$

donc: $\frac{dv_G}{dt} = g\sin\alpha - \frac{f}{m}$

1.2- Détermination de c et b:

On a: $v_G(t) = bt + c$

donc: $\frac{dv_G}{dt} = b$

• On remplace:

alors: $b = g\sin\alpha - \frac{f}{m}$

A.N.: $b = 9,8\sin 23 - \frac{15}{65} = 3,6m/s^2$

à $t = 0$; $v_G(t=0) = 0$

donc: $c = 0$

1.3- Valeur de t_B:

On a: $v_B = 90km/h = 25m/s$

Or: $v_B = bt_B \Rightarrow t_B = \frac{v_B}{b}$

$t_B = \frac{25}{3,6} = 6,95s$

1.4- Intensité de $\vec{R}$:

On a: $R = \sqrt{f^2 + R_n^2}$

suivant $(A,\vec{j})$ on a:

$P_y + R_y = ma_y$

$-mg\cos\alpha + R_n = 0$

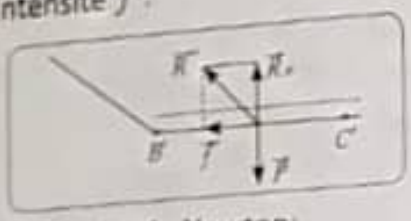
$R_n = mg\cos\alpha$

donc: $R = \sqrt{f^2 + (mg\cos\alpha)^2}$

A.N.: $R = \sqrt{15^2 + (65.9,8\cos(23)^2}$

$R = 586,6N$

2.1- Intensité f' :



selon la 2ème loi de Newton:

$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$

$\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$

suivant l'axe $(B\vec{T}')$: $P_x + R'_x = ma_x$

$0 - f' = ma_x$

$f' = -ma_x$

A.N.: $f' = 65.3 = 195N$

2.2- Détermination de t_c au point C:

On a $v_C = 0$ l'équation de la vitesse s'écrit:

$v(t) = a_x t + v_0$ $(v_0 = v_B = 25m/s)$

$v(t) = -3t + 25$

donc: $-3t_C + 25 = 0$

donc: $t_3 = \frac{25}{3} = 8,33s$

2.3- Distance BC :

L'équation horaire du mouvement s'écrit:

$x(t) = \frac{1}{2}a_x t^2 + v_0 t + x_0$

avec: $x_0 = 0$

donc: $x(t) = -\frac{3}{2}t^2 + 25t$

au point C :

$x_C = BC$

$BC = -\frac{3}{2}(8,33^2 + 25(8,33)$

$BC \simeq 104,1m$

14 La course de vitesse sur glace est l'une des plus anciennes et importantes compétitions des Jeux olympiques d'hiver. En effet l'objectif de chaque participant est de parcourir la pente en une courte durée.

Cet exercice vise à déterminer certaines grandeurs cinématiques caractérisant le mouvement de ce participant.

Un patineur de masse m et de centre d'inertie G ; glisse dans une pente considérée comme une droite formant un angle α avec le plan horizontal.

Pour étudier le mouvement de G ; on choisit un repère $(O,\vec{i})$ (figure 1).

Données: $g = 10m/s^2$; $m = 80kg$; $\alpha = 30°$

Figure-1

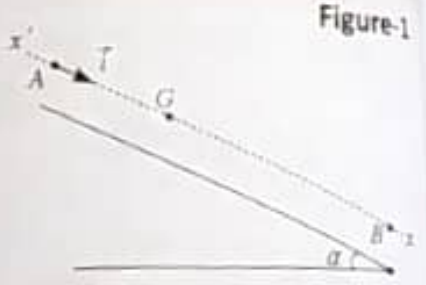
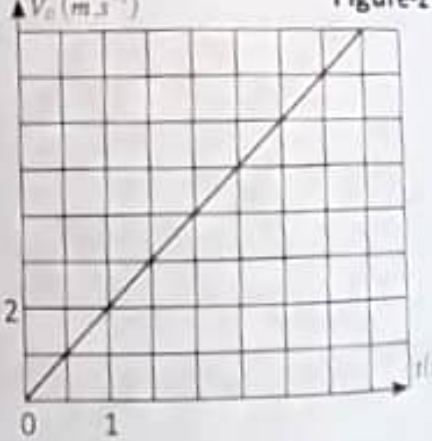


Figure-2



Le patineur fait son départ à $t = 0$, où son centre d'inertie G occupe la position A ; et il poursuit son mouvement selon la trajectoire rectiligne AB ; où il est soumis aux frottements ; représentés par $\vec{f}$ constante dont sa direction est parallèle à la trajectoire et son sens est opposé à celui du mouvement.

1- En appliquant la 2ème loi de Newton, établir l'équation différentielle vérifiée par un coordonné de $\vec{v}_G$ vecteur de vitesse de G.

2- La figure (2) représente la vitesse du centre d'inertie G.
Déterminer la valeur de l'accélération $\vec{a}_G$ du mouvement.

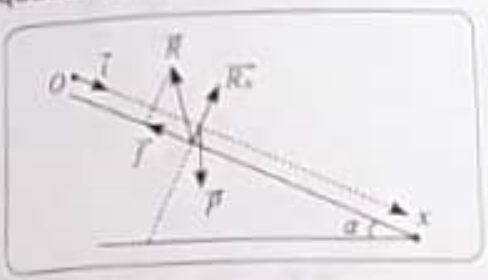
3- En déduire l'intensité de la force $\vec{f}$.

4- Écrire l'équation horaire $x(t)$ du mouvement de G.

5- Le centre d'inertie G passe par le point B avec une vitesse $v_B = 28m/s$. Déterminer la valeur de la distance AB.

Solution

1- Equation différentielle:



Selon la 2ème loi de Newton:

$$\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}_G$$

suivant l'axe $(O\vec{i})$: $P_x + R_x = ma_x$

$$+mg\sin\alpha - f = m\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = g\sin\alpha - \frac{f}{m}$$

2- Selon le graphique, la vitesse v est proportionnelle à t.

donc: $a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{2-0}{1-0} = 2m/s^2$

3- Intensité de f:

On a: $f = mg\sin\alpha - ma$

A.N.: $f = 80.10.\sin 30 - 80.2 = 240N$

4- Le mouvement étant rectiligne uniformément varié.

donc: $x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$

avec, $x_0 = 0$ et $v_0 = 0$

$$x = \frac{1}{2}2t^2 = t^2$$

5- Au point B on a: $x_B = AB = t_B^2$

avec: $x_B = 2t_B$

$$t_B = \frac{v_B}{2} = \frac{28}{2} = 14s$$

donc: $AB = (14)^2 = 196m$.

3 Chute verticale d'un corps solide

I- Etude expérimentale.

L'analyse du mouvement du centre de gravité d'une bille lors de sa chute verticale dans un liquide permet de tracer $v = f(t)$.

v : vitesse du centre de gravité G.

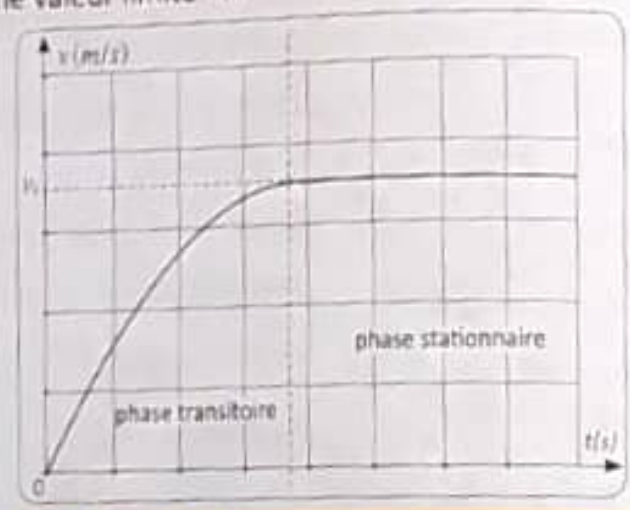
Le mouvement présente deux stades:

1 phase transitoire:

La vitesse croît d'une manière exponentielle.

2 Phase permanente (stationnaire)

la vitesse atteint une valeur limite v_l.



II- La poussée d'Archimède.

C'est la force $\vec{F_a}$ appliqueé par un fluide (gaz ou liquide) sur un corps immergé totalement ou partiellement, d'expression:

$$\vec{F_a} = -m_f \vec{g} = -\rho . v . \vec{g}$$

- m_f : masse de fluide.
- ρ : masse volumique du fluide.
- v : volume du corps ou du fluide deplacé.



III- Les frottements fluides.

Lors du mouvement vertical d'un solide dans un fluide; les forces de frottement sont représentées, par une force $\vec{f}$ de direction verticale; de sens opposé à $\vec{v}$ et d'intensité modelisée par: $f = kv^n$.

K: constante dependante de la nature du fluide et du corps solide.

n= 1: si la vitesse est petite

2: si la vitesse est grande

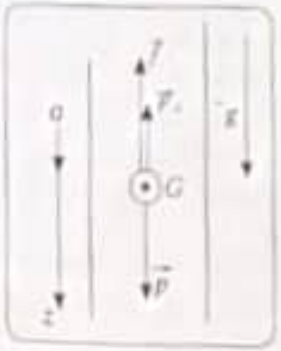
IV- Etude théorique du mouvement.

1 Equation differentielle:

Selon la 2ème loi de Newton: $\sum \vec{F_{ex}} = m\vec{a_G}$

$\vec{P} + \vec{f} + \vec{F_A} = m\vec{a_G}$;

suivant l'axe: $(\vec{oz})$: $f_z + p_z + F_{Az} = ma_z$



$$mg - Kv^n - m_f g = m\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{(m - m_f)}{m}g - \frac{k}{m}v^n$$

s'écrit sous la forme: $\frac{dv}{dt} = A - Bv^n$

- $A = \left(\frac{m - m_f}{m}\right)g = \left(\frac{\rho - f_f}{f}\right)g = \left(1 - \frac{\rho_f}{\rho}\right)g$
- $B = \frac{k}{m} = \frac{k}{\rho.v}$

2 Les grandeurs caractéristiques du mouvement:

2.1- En regime permanent:

on a: $v = v_l = cte$; donc: $\frac{dv}{dt} = 0$

l'équation différentielle s'écrit: $\frac{dv_l}{dt} = 0 = A - Bv_l^n$

$$v_l^n = \frac{A}{B} \Longrightarrow v_l = \left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{n}} = \left[\left(\frac{m - m_f}{k}\right)\right]$$

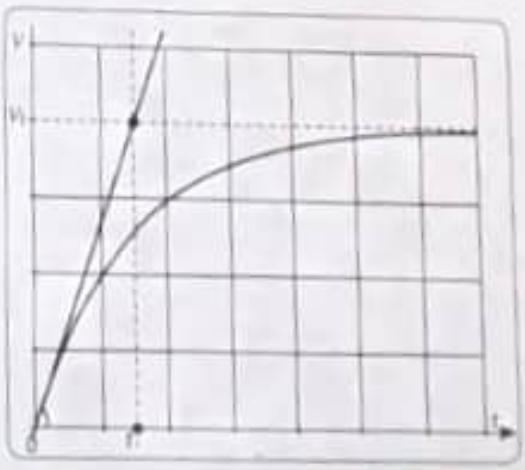
2.2- En régime transitoire: accélération initiale, temps caractéristique.

à $t = 0$; $v(t = 0) = 0$; $a_0 = \left(\frac{dv}{dt}\right)t = o$

l'équation differentielle s'écrit:

$\left(\frac{dv}{dt}\right)t = o = A - \cancel{Bv^n(t = o)^0}$; $a_0 = A$

graphiquement: $a_0 = \left(\frac{dv}{dt}\right)t = o$ le coefficient directeur à la tangente.



$a_0 = \frac{v_l}{\tau}$; $\tau = \frac{v_l}{a_0}$

- a_0 : accéleration initiale.
- τ : temps caractéristique du mouvement.

3 Solution de l'équation différentielle par la méthode d'Euler:

La méthode d'Euler est une méthode numérique itérative, elle permet de calcu
valeur de v_i connaissant v_0 et Δt.

L'équation d'Euler s'écrit: $v_{i+1} = v_i + a_i . \Delta t$

1er pas:

Calcul de a_0 connaissant v_0, $a_0 = \left(\frac{dv}{dt}\right)_{t=0} = A - Bv_0^2$

Calcul de v_1 connaissant a_0 et v_0, l'équation d'Euler, $v_1 = v_0 + a_0 . \Delta t$

2e pas:

Calcul de a_1 connaissant v_1, $a_1 = \left(\frac{dv}{dt}\right)_1 = A - Bv_1^2$

Calcul de t_2 connaissant a_1 et v_1, Euler $v_2 = v_1 + a_1 . \Delta t$.

V- La chute libre.

Un corps est en chute libre quand il est soumis uniquement à son poids

1 Accélération:

Selon la 2e loi de Newton: $\vec{P} = m\vec{g} = m\vec{a}$;donc: $\vec{a} = \vec{g}$.

2 Equation de la vitesse: suivant l'axe $\overrightarrow{oz}$:

$$\frac{dv_z}{dt} = g_z = g \quad (oz \text{ est orienté vers le bas})$$

$$v_z = gt + v_{oz}$$

- conditions initiales: a t=o ; z(t=o)=z_o et v_z(t=o)=v_{oz}.

3 Equation horaire:

$$v_z = \frac{dz}{dt} = g.t + v_{oz} \text{ ; donc: } z(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_{oz}.t + z_o$$

Remarque:

- Si $(\overrightarrow{oz})$ est orienté vers le haut alors:

$$\begin{cases} a_z = -g \\ v_z = -gt + v_{oz} \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{oz}.t + z_o \end{cases}$$

Test de connaissances

1 Vrai ou faux?

a- la force de frottement exercée par un fluide sur un solide existe même si ce solide est immobile par rapport au fluide. V F

b- La valeur de la poussée d'archimède est proportionnelle au volume immergé du solide. V F

c- Une équation différentielle est une équation dans laquelle l'inconnue est une fonction. V F

d- Il existe une vitesse limite parce que la force de frottement dépend de la vitesse.

e- Au cours d'une chute libre, le vecteur accélération du centre d'inertie du solide dépend des conditions initiales. V F

Solution

a- Faux ; b- Vrai ; c- Vrai | d- Vrai ; e- Faux.

2 QCM:

a- La poussée d'Archimède s'exerce sur un solide:

s'il est immobile ou en mouvement dans le fluide;

Seulement s'il est en mouvement dans le fluide.

b- La force de frottement exercée par un fluide sur un solide en chute verticale:

a une valeur qui est toujours proportionnelle à la vitesse du solide par rapport au fluide;

a toujours la même direction que le vecteur vitesse.

c- La vitesse limite d'un solide en chute verticale dans un fluide:

dépend de la nature du fluide ;

dépend de la masse du solide.

Solution

a- S'il est immobile ou en mouvement dans le fluide.

b- a toujours la même direction que le vecteur vitesse.

c- Dépend de la masse du solide dépend de «Nature» fluide.

Un élève de terminale veut étudier le mouvement de la fléchette d'un pistolet.



D'une altitude de 1,75 m, il lance la fléchette verticalement vers le haut avec une vitesse initiale de 5,0 m/s. On considère que l'action de l'air négligeable.

1- Déterminer les caractéristiques de l'accélération $\vec{a_G}$ du centre d'inertie G de la fléchette.

2- On choisit un axe (Oz) vertical orienté vers le haut dont l'origine O est située au niveau du sol. Etablir les expressions de la vitesse $v(t)$ et de l'abscisse $z(t)$ du centre de gravite de la fléchette.

3.a- Quelle est la valeur de la vitesse au sommet de la trajectoire?

b- En déduire la date t_s à laquelle la fléchette atteint le sommet de sa trajectoire.

c- Quelle est la hauteur h_s atteinte par la fléchette?

4- A quelle date la fléchette touchera-t-elle le sol?

On donne: $g = 10\ m/s^2$.

Solution

1- Caractéristiques de $\vec{a_G}$:

système étudié: (flechette).

Bilan des forces: $\vec{P}$

D'après la 2ème loi de Newton:

$$\sum \vec{F_{ex}} = m.\vec{a_G}$$

$$\vec{P} = m.\vec{a_G}$$

$$m.\vec{g} = m.\vec{a_G}$$

$$\vec{a_G} = \vec{g}$$

- Directeur: La verticale passante par G.
- Sens. De même sens que $\vec{P}$.
- Le module $\|\vec{a_G}\| = \|\vec{g}\|$

2- Expression de $v(t)$ et de $z(t)$:

On a: $\vec{a_G} = \vec{g}$

suivant l'axe $(\vec{oz})$ $a_z : a_z = -g$

$$\frac{dv_z}{dt} = -g$$

Par intégration, on trouve:

$$v_z(t) = -gt + v_0$$

On a: $v_z = \frac{dz}{dt} = -gt + v_0$

Par intégration, on trouve:

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0.t + z_0$$

à: $t = 0$: $z_0 = h = 1,75m$ et $v_0 = 5m/s$

$v(t) = -10t + 5$ et:

$z(t) = -5t^2 + 5 + 1,75$

3.a- Valeur v_s du vitesse au sommet:

On a au sommet $v_s = 0$.

b- Valeur t_s.

tel que $v_s = -10t_s + 5 = 0$

$$t_s = \frac{5}{10} = 0,5s$$

c- La hauteur h_s.

On a:

$h_c = z(t_c) = -5t_c^2 + 5t_c + 1,75$

$h_c = -5(0,5)^2 + 5.0,5 + 1,75$

$h_c = 3m$.

4- Date t_c d'atteinte du sol:

On a: $z(t) = -5t^2 + 5 + 1,75 = 0$

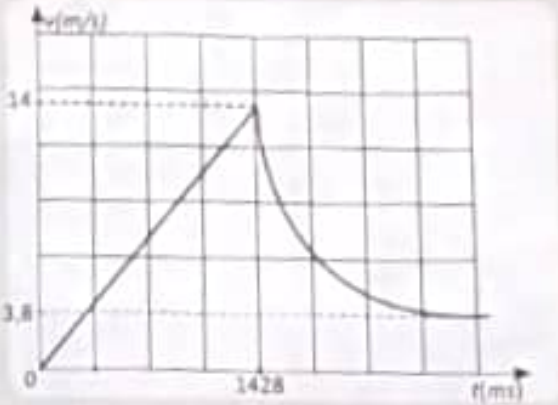
$\sqrt{\Delta} = 7,75$

$t_1 = 1,28\ s$ solution.

$t_2 = -0,27\ s < 0$

Elias jette une pierre dans un puits. Le niveau de l'eau se situe la hauteur h. au dessous de l'ouverture du puits. L'évolution de la vitesse de la pierre au cours de sa chute, de l'ouverture jusqu'au fond du puits, est donnée par la figure suivante.

Donnée: $g = 9,8m.s^{-1}$



1- Commenter les différentes parties de la courbe en dégageant les différents régimes.

2- Comment peut-on qualifier le mouvement de la pierre au cours de sa chute dans l'air?

Déterminer son accélération que peut-on dire des forces de frottement et de la poussée d'Archimède qui s'exercent sur elle?

3- Déterminer la valeur de la hauteur h.

4- Déterminer la valeur de la vitesse limite de la pierre dans l'eau.

Solution

1- Commentaire:

Le diagramme de vitesse illustre 2 phases.

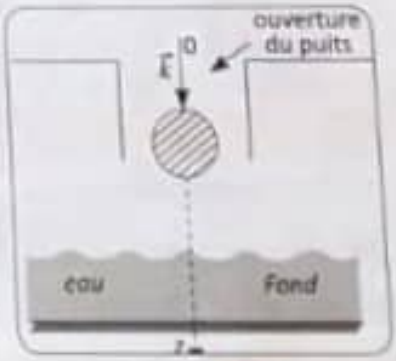
Phase-1: Le mouvement de la pierre dans l'air: mouvement rectiligne uniformement varié.

Phase-2: Le mouvement de la pierre dans l'eau présente 2 régimes: régime transitoire suivi d'un régime permanent.

2- Dans l'air le mouvement est rectiligne d'accélération constante

$a = \frac{dv}{dt} = \frac{14}{0,1428} = 9,8g$

Le mouvement de la pierre est une chute libre, la pierre n'est soumise qu'à son poids. $\vec{P}$ donc les forces de frottement et la pous-



sée d'Archimède sont négligeables.

3- Détermination de v_1 et de h ;

On a:

$z(t) = 10m$ le mouvement étant un mouvement rectiligne uniformément varié: donc l'équation horaire est:

$z = \frac{1}{2}at^2$,

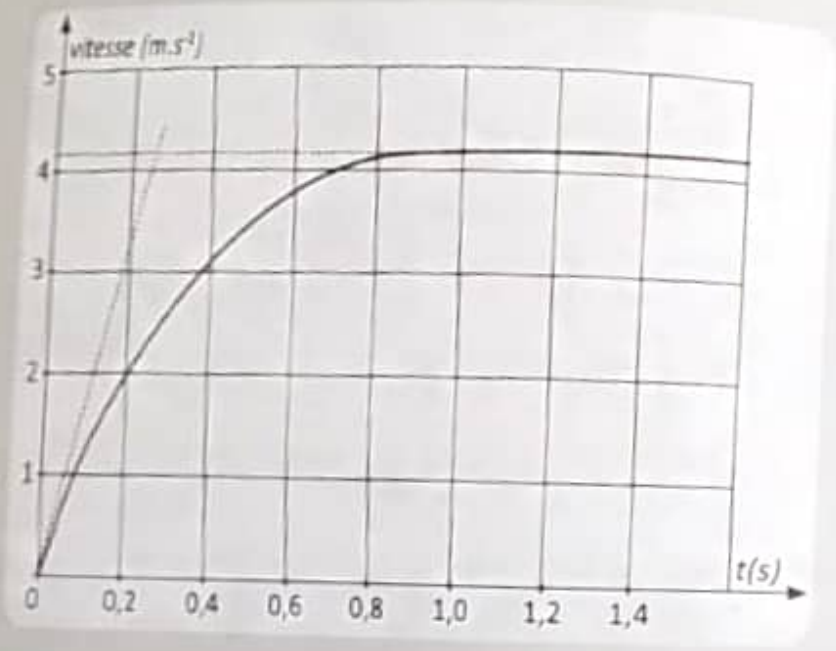
$h = z = \frac{1}{2}gt^2$

$h = \frac{1}{2}.9,8 \simeq 10m$

4- Dans la deuxième phase où la pierre trouve sans l'eau, sa vitesse décroit et teindre une valeur limite v_2 donnée le graphe $v_L = 3,8\ m.s^{-1}$;

donc: $v_1 = 3.8\ m/s$.

3 On étudie l'évolution de la vitesse d'une bille d'acier tombant dans de l'huile cours du temps (Figure ci-dessous).



1- Commenter cette courbe en dégageant notamment les différentes phases de l chute.

2- Déterminer le temps caractéristique τ.

3- La force de frottement fluide est donnée par: $\vec{f} = -\lambda v\vec{v}$.

On néglige la poussée d'Archimède. Établir l'équation différentielle du mouvemen de la bille.

4- Exprimer la vitesse limite atteinte par la bille en fonction des données d l'exercice.

5- La masse de la bille étant $m = 27\ g$, en déduire la valeur du coefficient λ.

Solution

1- **Commentaire**:

Le mouvement de la bille dans l'huile présente 2 phases

Phase transitoire: Au cours de laquelle la vitesse augmente d'une manière expontentielle.

Phase permanente: Au cours de laquelle la vitesse atteint une valeur limite v_l.

2- Détermination du temps caractéristique τ.

Graphiquement:

3- Equationt différentielle:

Système étudié (la bille).



Bilan des forces: $\vec{P}, \vec{f}$

On applique la 2ème loi de Newton: $\sum \vec{F_{ex}} = m.\vec{a_G}$

$$\vec{P} + \vec{f} = m.\vec{a_G}$$

selon l'axe: $(oz): p_z + f_z = m.a_z$

$$mg - \lambda v^2 = m.\frac{dv_z}{dt}$$

$$\frac{dv_z}{dt} = g - \frac{\lambda}{m}v^2$$

4- Expression de v_l:

$$v_l = cte \Longleftrightarrow \frac{dv_l}{dt} = 0$$

L'équation différentielle s'écrit:

$$g - \frac{\lambda}{m}V_l^2 = 0\ ;$$

donc: $$V_l = \sqrt{\frac{mg}{\lambda}}$$

5- Déduction de λ:

on a: $V_l = \sqrt{\frac{mg}{\lambda}} \Leftrightarrow V_l^2 = \frac{mg}{\lambda}$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{mg}{V_l^2}$$

A.N.: $\lambda = \frac{27.10^{-3}.9,8}{(4,2)^2} = 0,015(S.I)$.

4 Un enfant joue avec un parachute en papier qu'il vient de fabriquer. Le parachute est constitue d'un cône en papier relié par quatre fils à un cylindre de volume $V = 1,6 \times 10^{-3} m^3$ et de masse $m = 1,5 \times 10^{-2} kg$.

Le volume et la masse des fils et du papier sont négligeables par rapport à ceux du cylindre.

L'enfant lâche son parachute, sans vitesse initiale, depuis le balcon de sa chambre.

En l'absence de vent, le parachute tombe verticalement.

1- Dresser l'inventaire des forces qui s'exercent sur le parachute. On admettra que l'air exerce sur le cône de papier une force de frottement $\vec{f}$ proportionnelle à la vitesse $\vec{v}$: $\vec{f} = -k\vec{v}$.

2- Montrer que la poussée d'Archimède est négligeable devant le poids.

3- Etablir l'équation différentielle du mouvement et montrer qu'elle se met sous la forme $\frac{dv_z}{dt} = g - \frac{k}{m}v_z(t)$.

On choisira un axe vertical (Oz) orienté vers le bas.

4- Calculer la vitesse limite v_L atteinte par le cylindre.

5- On résout cette équation différentielle par la méthode d'Euler. Calculer les deux premières valeurs non nulles de la vitesse.

Données: $g = 9,8 N.kg^{-1}$; $k = 5,9 \times 10^{-2} kg.s^{-1}$; pas de calcul $\Delta t = 4,0\ ms$; masse volumique de l'air $\rho = 1,3 kg.m^{-3}$.

Solution

1- Inventaire des forces:

Système étudié: (parachute)

• Bilan les forces: $\vec{P}$; $\vec{F}_a$; $\vec{f}$

2- Calcule de F_a et P:

On a: $F_a = m_{fluide} \times g = \rho_{air} \times V \times g$

$= 1,3.1,6.10^{-5}.9,8$

$F_a = 2,03.10^{-4} N$.

$P = mg$

$= 1,5.10^{-2} \times 9,8 = 0,14N$

Donc: $\frac{P}{F_a} = \frac{0,14}{2,03 \times 10^{-4}} = 689,65$

$P > F_a$.

Donc: F_a est négligeable devant P.

3- Equation différentielle:

On applique la 2ème loi de Newton.

$\vec{f} + \vec{P} = m\vec{a_G}$

suivant l'axe: $(\vec{Oz})\ f_z + P_z = ma_z$

$-Kv_z + mg = m.\frac{dv_z}{dt}$

$\frac{dv_z}{dt} = g - \frac{k}{m} v_z$

4- Calcul de v_1:

En régime permanent $v_z = cte$ donc:

$\frac{dv_z}{dt} = 0$

d'où: $g - \frac{k}{m} v_1 = 0 \Rightarrow v_1 \frac{k}{m} = g$

$\Rightarrow v_1 = g.\frac{m}{k}$

A.N.: $v_1 = \frac{9,8 \times 1,5 \times 10^{-2}}{5,9 \times 10^{-2}}$

$v_1 = 2,5\ m/s$.

5- Calcul de v_1 et v_2.

• Calcule de a_0 connaissant $v_0 = 0$.

D'après l'équation differentielle, on a:

$\left(\frac{dvz}{dt}\right)_{t=0} = a_0 = g - \frac{k}{m} v_0 = g$

$a_0 = 9,8\ m/s^2$

Calcul de v_1:

D'après Euler:

On a:

$v_1 = v_0 + a_0\ \Delta t = 9,8 \times 4 \times 10^{-3}$

$= 0,04\ m/s$

On Calcule de a_1 de l'équation différentelle:

$a_1 = g - \frac{k}{m} v_1$

$a_1 = 9,8 - \frac{5.9.10^{-2}}{1,5.10^{-2}} \times 0,04$

$a_1 = 9,64 m/s^2$

Calcul de v_2:

On a: d'après Euler,

$v_2 = v_1 + a_1\ \Delta t$

$= 0,04 + 9,64.4.10^{-3}$

$v_2 = 0,08 m/s$.

5 Bac PC (Juin 2012)

L'Etude de la chute d'un corps homogène dans un fluide visqueux permet de préci quelques ingrédients du moteur et la viscosité du fluide utilisé.

On remplit un tube gradué par un liquide visqueux et transparent de mas volumique ρ puis on laisse tomber dans ce liquide une balle homogène de mas m et de centre d'inertie G sans vitesse initiale à la date $t = 0$.

On étudie le mouvement de G par rapport à un repère terrestre consid galiliéen.

On repère la position de G à l'instant t d'abscisse z sur l'axe (oz) vertical dir

vers le bas (figure-1).

Figue-1



On considère que la position G est confondu avec l'origine de l'axe (oz) à l'origine des dates et que la poussée d'Archimède $\vec{F}$ est non négligeable par rapport aux autres forces exercées sur la balle.

On exprime les forces de frottement exercées par le fluide sur la balle lors de son mouvement par une force $\vec{f}$: seule $\vec{f} = -K\vec{v}_G$ avec $\vec{v}_G$ vecteur vitesse de G à l'instant t et K un coefficient constant positif.

Données:

- **Rayon de la balle:** $r = 6,00.10^{-3} m$
- **masse de la balle:** $m = 4,10.10^{-3} kg$

On rappelle que l'intensité de la poussée d'Archimède est égale à l'intensité du poids du volume déplacée du liquide.

1- En appliquant la 2ème loi de Newton, montrer que l'équation différentielle du mouvement de G s'écrit sous la forme: $\frac{dv_G}{dt} + A.v_G = B$ en donnant l'expression de A en fonction de K, m et l'expression de B en fonction de l'intensité de pesanteur g, m, ℓ et V le volume de la balle.

2- Vérifier que l'expression $v_G(t) = \frac{B}{A}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ est une solution de l'équation différentielle avec $\tau = \frac{1}{A}$ le temps caractéristique du mouvement.

3- Ecrire l'expression de la vitesse limite v_{lim} du centre d'inertie de la balle en fonction de A et B.

4- On obtient à l'aide d'un logiciel adéquat, une courbe figure-2 qui représente la variation de la vitesse V_G en fonction du temps; Déterminer graphiquement les valeurs v_{lim} et τ.

Figue-2



5- Trouver la valeur du coefficient K.

6- Le coefficient K change avec le rayon de la balle et le coefficient de viscosité η du fluide selon la relation suivante: $K = 6\pi\eta r$.

Préciser la valeur η du liquide utilisé dans l'expérience.

7- L'équation différentielle du mouvement de G s'écrit

comme suivant:
$\frac{dv_G}{dt} = 7,57 - 5v_G$; à l'aide de la méthode d'Euler et les données du tablea
Trouver les valeurs de a_1 et V_2.

t(s)	$v(m.s^{-1})$	$a(m.s^{-2})$
0	0	7,57
0,033	0,25	a_1
0,066	v_2	5,27

Solution

1- Equation differentielle:
système étudié (La balle).
bilan des forces: $\vec{P}, \vec{F_A}$ et $\vec{f}$.
Selon la 2ème loi de Newton:

$$\sum \vec{F_{ext}} = \vec{m}.\vec{a}$$

$$\vec{P} + \vec{F_A} + \vec{f} = m\vec{a}_G$$

Suivant l'axe $\overrightarrow{oz}$:

$$P_z + FA_z + f_z = ma_z$$

$$mg - \rho.Vg - kv_G = m\frac{dv_G}{dt}$$

$$\frac{dv_G}{dt} + \frac{k}{m}v_G = g\left(1 - \frac{\rho.V}{m}\right)$$

de la forme: $\frac{dv_G}{dt} + Av_G = B$

avec: $\begin{cases} A = \frac{k}{m} \\ B = g\left(1 - \frac{\rho.V}{m}\right) \end{cases}$

2- Solution:
On a: $v_G(t) = \frac{B}{A}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$;

avec: $\frac{dv_G}{dt} = \frac{B}{A}\cdot\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$

on remplace:

$$A\left(\frac{B}{A} - \frac{B}{A}e^{-\frac{t}{\tau}}\right) + \frac{B}{A}\cdot\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} = B$$

$$B - Be^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{B}{A}\cdot\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} = B$$

$$Be^{-\frac{t}{\tau}}\left(-1 + \frac{1}{A.\tau}\right) = 0$$ cela est verifié quel que soit le temps t.

Si: $-1 + \frac{1}{A.\tau} = 0 \Longrightarrow \tau = \frac{1}{A}$

donc la solution est verifiée.

3- Vitesse limite:
En régime permanent on: $v = v_l = cte$ et $\frac{dv_l}{dt} = 0$.

donc: $0 + Av_l = B$

d'où: $v_l = \frac{B}{A}$

4- Détermination de v_l et τ.
Graphiquement: $v_l = 1,5m/s$;
et: $\tau = 0,2\ s$.

5- Valeur de k.
on a: $A = \frac{k}{m} = \frac{1}{\tau}$; donc: $k = \frac{m}{\tau}$

A.N.: $K = \frac{4,10.10^{-3}}{0,2}$;

$$k = 0,0205\ kg.s^{-1}$$

6- Valeur de η.
on a: $k = 6\pi\eta r$; $\eta = \frac{k}{6\pi r}$.

A.N.: $\eta = \frac{0,0205}{6,3,14.6.10^{-3}}$

$$\eta = 0,113 kg.m^{-1}.s^{-1}$$

7- Valeur de a_1 et v_2 :

• On a de l'équation différentielle:

$$a_1 = 7,57 - 5v_1$$

$$a_1 = 7,57 - 5.0,25 = 6,32 m/s^2$$

• D'après Euler on a:

$$v_2 = v_1 + a_1 \Delta t$$

$$v_2 = 0,25 + 6,32.0,033;$$

$$v_2 = 0,46\ m/s$$

La grêle se forme dans les cumulo-nimbus situés entre 1000 m et 10000 m d'altitude où la température est très basse, jusqu'à $-40\,^{\circ}C$. Le grêlon tombe lorsuqu'il n'est plus maintenu au sein du nuage. Au sol, sa vitesse peut atteindre $160\ km.h^{-1}$.

On étudie un grêlon de masse 13g qui tombe d'un point O d'altitude 1500 m sans vitesse initiale. Il peut être assimilié à une sphère de diamètre 3,0 cm.

Le point O sera pris comme origine d'un axe (Oz) orienté positivement vers le bas.

L'intensité de la pesanteur sera considérée comme constante et de valeur $g_0 = 9,80\ m.s^{-2}$.

Données:

volume d'une sphère $V = \frac{4}{3}\pi r^3$; masse volumique de l'air $\ell = 1,3\ kg.m^{-3}$.

1- Chute libre.

On admettra que le grêlon tombe en chute libre.

1.1- En appliquant la deuxième loi de Newton, déterminer les équations horaires donnant la vitesse et la position du centre d'inertie G du grêlon en fonction de la durée t de la chute.

1.2- Calculer la valeur de la vitesse lorsqu'il atteint le sol, ce résultat est-il vraisemblable? Justifier.

2- Chute réelle.

En réalité, le grêlon est soumis à deux autres forces, la poussée d'Archimède $\vec{F_A}$ et la force de frottement fluide f d'intensité proportionnelle au carré de la vitesse telle que $f = K.v^2$.

2.1- Par une analyse dimensionnelle, déterminer l'unité du coefficient K dans le système international.

2.2- Donner l'expression de la valeur de la poussée d'Archimède; la calculer et la comparer à celle du poids. Conclure.

2.3- On néglige la poussée d'Archimède.

2.3-a- Etablir l'équation différentielle du mouvement.

Montrer qu'elle peut s'écrire sous la forme: $\frac{dv}{dt} = A - B.v^2$.

2.3-b- On veut résoudre cette équation différentielle par une méthode numérique:

la méthode d'Euler.

Le tableau suivant est un extrait d'une feuille de calcul des valeurs de la vitesse v et l'accélération a en fonction du temps (t). Il correspond aux valeurs $A = 9,80\ m.s^{-2}$ et $B = 1,56 \times 10^{-2} m^{-1}$, avec un pas de variation $\Delta t = 0,5s$.

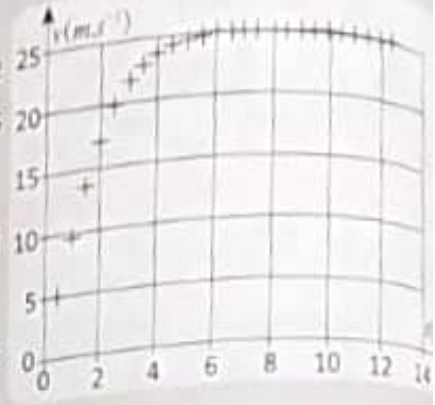
$t(s)$	0,00	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00
$v(m.s^{-1})$	0,00	4,90	9,61	13,8	17,2	v_6	21,6
$a(m.s^{-2})$	9,80	9,43	8,36	6,83	a_4	3,69	2,49

Déterminer a_4 et v_6 en détaillant les calculs.

2.3-c. Exprimer littéralement la vitesse limite atteinte par le grêlon en fonction de A et B, puis calculer sa valeur numérique.

2.3-d. La courbe d'évolution de la vitesse en fonction du temps est donnée ci-dessous.

Retrouver graphiquement la valeur de la vitesse calculée au paragraphe précédent, et en deduire le temps caractéristique.



Solution

1.1- Equations horaires:

système étudié (La grêle)

bilan des forces: $\vec{P}$

Selon la 2ème Loi de Newton: $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$

$\vec{P} = m\vec{a} \Rightarrow m\vec{g} = m\vec{a}$

$\vec{a} = \vec{g}$

à: $t = 0\ ;\ z_0 = 0$

et $v_{0z} = 0$.

Dans le repère $(o\vec{z})$ on a:

$$a_z = g \Rightarrow \frac{dv_z}{dt} = g$$

alors: $v_z = g.t + v_{0z}$ et:

$$z = \frac{1}{2}gt^2 + v_{0z}.t + z_0$$

d'ou: $\begin{cases} v_z = g.t \\ z = \frac{1}{2}g.t^2 \end{cases}$

1.2- Valeur de la vitesse

à l'arrivée au sol $z = h$.

donc: $h = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

A.N.: $t = \sqrt{\frac{2.1000}{9,8}} \simeq 14,3s$

donc: $v_z = 9,8.14,3 = 140m/s$.

$v_z = 504\ km/h$

$v_z > 160\ km/h$ donc la grêle n'est pas chute libre.

2.1- dimension de K.

on a: $[K] = \frac{[F]}{[v]^2} = \frac{[m][a]}{[v][v]}$

$= \frac{[M]}{[v].[T]} = \frac{[M]}{[L]}$

$[K] = [M][L]^{-1}(kg.m^{-1})$

2.2- Poussée d'Archimède:

on a: $F_A = \rho.v.g$

A: $F_A = \rho.\frac{4}{3}\pi.r^3.g$

A.N.: $F_A = 1,3.\frac{4}{3}.\pi(3.10^{-2})^3.9,8$

$F_A = 1,44.10^{-4}N$

Comparaisons de F_A et P.

On a: $P = mg$

A.N.: $P = 13.10^{-4}.9,8$

$P = 0,127N$

$\frac{P}{F_A} = \frac{0,127}{1,44.10^{-4}} = 88,5$

donc: $P \gg F_A$

La poussée d'Archimède est negligeable.

2.3-

a- Equation différentielle:

bilan des forces: $\vec{P}$ et $\vec{f}$.

Selon la 2ème loi de Newton:

$$\sum \vec{F_{ext}} = m\vec{a} \; ; \vec{P} + \vec{f} = m\vec{a}$$

Suivant l'axe $\vec{oz}$: $P_z + f_z = ma_z$

$$mg - kv^2 = m\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v^2$$

s'écrit de la forme:

$\frac{dv}{dt} = A - Bv^2$ avec $A = g$ et $B = \frac{k}{m}$.

2.3-

b- Détermination de a_i et v_2.

• De l'équation différentille on a:

$a_i = A - Bv_1^2$

$a_i = 9,8 - 1,56.10^{-3}.17,2$

$= 5,18m/s^2$

• D'après la methode d'Euler on a:

$v_2 = v_1 + a_i.\Delta t$

$v_2 = 17,2 + 5,18.0,5 = 19,8m/s$

2.3-

c- Vitesse limité:

En régime stationnaire:

$$v = v_l = c^{te} \text{ donc: } \frac{dv}{dt} = 0$$

d'ou: $A - Bv_l^2 = 0 = v_l = \sqrt{\frac{A}{B}}$

A.N.: $v_l = \sqrt{\frac{9,8}{1,5610^{-3}}} \approx 25\,m/s$

2.3-

d- Temps carracteristique:

à partir du graphique on a: $v_l = 25\,m/s$

et on a: $a_0 = \frac{v_l}{\tau}$; donc: $\tau = \frac{v_l}{a_0}$

A.N.: $\tau = \frac{25}{9,8} \simeq 2,56s$.

7

Modélisation des forces de frottement d'un fluide.

Cet exercice mène à modéliser la force de frottement d'un fluide exercée par la glycérol sur un corps solide, pour cela on étudie le mouvement de chute verticale d'une boule métallique de masse m dans la glycérol.

Données: Le rayon de la boule $r = 1cm$, volume de boule: $V = \frac{4}{3}\pi.r^3$

• la masse volumique du métal avec lequel la boule est formée:

$\rho_1 = 2,17 \times 10^3 kg.m^{-3}$

• Du glycerol: $\rho_2 = 1,26 \times 10^3 kg.m^{-3}$

• Valeur champ de pesanteur: $g = 9,81\,m.s^{-2}$.

• L'intensisté de la poussée d'Archimède exercée sur la boule immergée totalement dans la glycerol est: $F = \rho_2.V.g$.

• On modélise la force de frottement exercé sur la boule lors sa chute dans la glycerol par: $\vec{f} = -9\pi.rv^n\vec{k}$ avec n un nombre naturel et v la vitesse de centre d'inerte de la boule.

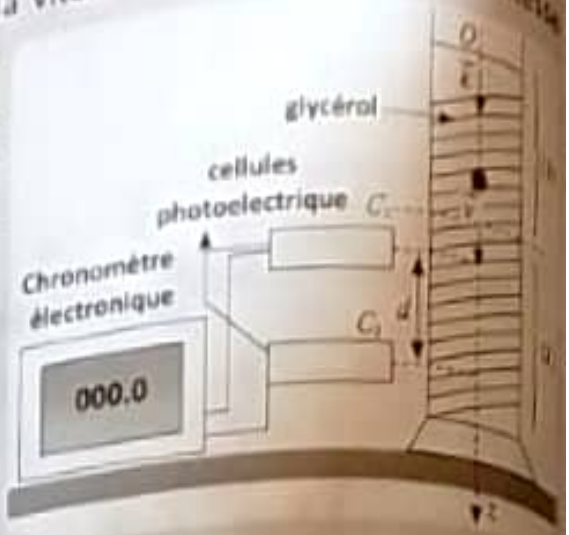
à un instant $(t_0 = 0)$ origine de dates, la boule est liberée sans vitesse initiale du

point O origine de l'axe vertical $(O,\vec{k})$

par 2 phases:

1- phase transitoire: entre les 2 instants t_0 et t_1 augmentation de la vitesse.

2- phase permanante: dès l'instant t_1 la vitesse de la boule prend un vitesse limite v_l L'appareil constitué d'un chronomètre et 2 cellules C_1 et C_2 permettent de mesurer la durée Δt nécessaire pour que la boule, parcoure la distance $d = 20cm$ durant le phase (2).



1- Déterminer la vitesse limite v_l, on donne $\Delta t = 956ms$.

2- En appliquant le 2ème loi de Newton, montrer que l'équation différentielle satisfaisant la vitesse v du centre d'intertie de la boule dans liquide s'écrit sous la forme: $\frac{dv}{dt} + Av^n = B$.

avec: $A = \frac{27}{4\rho_1 r^2}$, $B = g\left(\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1}\right)$

3- Trouver grâce à l'équation différentielle, l'expression de v_l en fonction ρ_1 et ρ_2 et r et g.

4- Déduire le nombre n.

Solution

1- Valeur de v_l:

En regime stationnaire on: $v = v_l = c^{te}$

donc: $v_l = \frac{d}{\Delta t}$

A.N.: $v_l = \frac{20.10^{-2}}{956.10^{-3}} = 0,209 m.s^{-1}$

2- Equation différentielle:

système étudié: {balle}

Bilan des forces: $\vec{P}, \vec{F_A}$ et $\vec{f}$.

Selon la 2ème loi de Newton:

$$\sum \vec{F_{ext}} = m\vec{a}\ ;$$

$$\vec{P} + \vec{F_A} + \vec{f} = m\vec{a}$$

suivant l'axe $(o\vec{k})$.

$$mg - F_A - f = ma$$

$$mg - \rho_2 Vg - 9\pi r v^n = m\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} + \left(\frac{9\pi r}{m}\right)v^n = \left(\frac{m - \rho_2 V}{m}\right)g$$

$$\frac{dv}{dt} + \left(\frac{9\pi r}{\rho_1 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}\right)v^n = \left(\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho^1}\right)g$$

$$\frac{dv}{dt} + \left(\frac{27}{4\rho_1 r^2}\right)v^n = \left(\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1}\right)g$$

s'ecrit sous la forme:

$$\frac{dv}{dt} + Av^n = B$$

avec: $A = \frac{27}{4\rho_1 r^2}$ et $B = \left(\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1}\right)g$

3- Expression de v_l:

En régime permanent on:

$v = v_l = cte$ et $\frac{dv_l}{dt} = 0$.

donc: $Av_l^n = B$

donc: $v_l = \left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{\frac{(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1}}{\frac{27}{4\rho_1 r^2}}\right)^{\frac{1}{n}}$

$$v_l = \left[\frac{4(\rho_1 - \rho_2)gr^2}{27}\right]^{\frac{1}{n}}$$

4- Valeur de n.

On a: $v_l^n = \frac{A}{B}$

donc: $\ln v_l^n = \ln\left(\frac{A}{B}\right)$

$$n \ln v_l = \ln\left(\frac{A}{B}\right)$$

$$n = \frac{\ln\left(\frac{A}{B}\right)}{\ln v_l}$$

A.N.:

- $A = \frac{27}{4\rho_1 r^2} = \frac{27}{4.2,7.10^3.(10^{-2})^2}$

$A = 25(SI)$

- $B = \frac{(\rho_1 - \rho_2)g}{\rho_1}$

$= 9,8\left(\frac{2,17.10^3 - 1,26.10^3}{2,7.10^3}\right)$

$B = 5,23.(SI)$

$n = \frac{\ln\left(\frac{5,23}{25}\right)}{\ln(0,209)} = 1$

8

Chute verticale d'une boule metallique.

L'exercice a pour but d'étudier le mouvement de chute verticale d'une boul métallique dans l'air puis dans un liquide visqueux.

Données:

Masse volumique de la boule: ρ_1

Masse volumique du liquide visqueux: ρ_2

Volume de la boule: V

accélération de la pesanteur: g

A l'instant $t = 0$ on libère la boule d'un point O confondu avec son centre d'inertie G

Le point O est situé à la hauteur H de la surface libre du liquide visqueux plac dans un tube verticale transparent Figure-1.

La courbe representée en figure-2, donne l'évolution de la vitesse v du centre d'inerti G de la boule lors de son mouvement dans l'air et dans le liquide visqueux.

1- Etude du mouvement de la boule dans l'air:

On modélise l'action de l'air sur la boule lors de sa chute par une force verticale $\vec{R}$ d'intensité R constante.

On néglige le rayon de la boule par rapport à la hauteur H.

Le centre d'inertie G de la boule atteint à la surface libre du liquide visqueux l'instant t_1 avec la vitesse v_1.

1.1- En appliquant la deuxième loi de Newton, donner l'expression de R en fonctio de v, g, ρ_1, v_1 et t_1.

1.2- En se référant à la courbe $v = f(t)$, déterminer la valeur de l'intensité R.

2- Etude du mouvement de la boule dans le liquide visqueux:

Lors de son mouvement dans le liquide visqueux, la boule subit en plus de son poi

l'action de:

- La poussée d'Archimède
- La force de frottement du fluide, $\vec{f} = -k.v.\vec{i}$ tel que K constante positive. On modélise l'évolution de la vitesse v du centre d'inertie de la boule dans le système international des unités par l'équation différentielle: $\frac{dv}{dt} = 5,2 - 26v$ (1).

2.1- Etablir l'équation différentielle littérale verifiée par la vitesse v du centre d'inertie de la boule en fonction des données du texte.

2.2- En utilisant cette équation différentielle littérale et la courbe de la figure-2, justifier l'équation différentielle (1).

2.3- En utilisant l'équation aux dimensions, déterminer la dimension de la constante K. Calculer la valeur de K.

2.4- Sachant que la vitesse du centre d'inertie de la boule dans le liquide visqueux à l'instant t_i est $v_i = 2,38 m.s^{-1}$ établir en utilisant la méthode d'Euler que l'expression de la vitesse de G à l'instant $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ est:

$v_{i+1} = (1 - 26\Delta t).v_i + 5,20.\Delta t$ avec Δt est près de calcul.

Calculer v_{i+1} dans le cas $\Delta t = 5,00\ ms$.

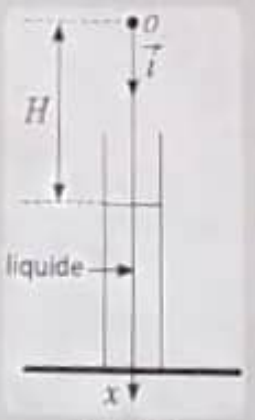


Figure-1

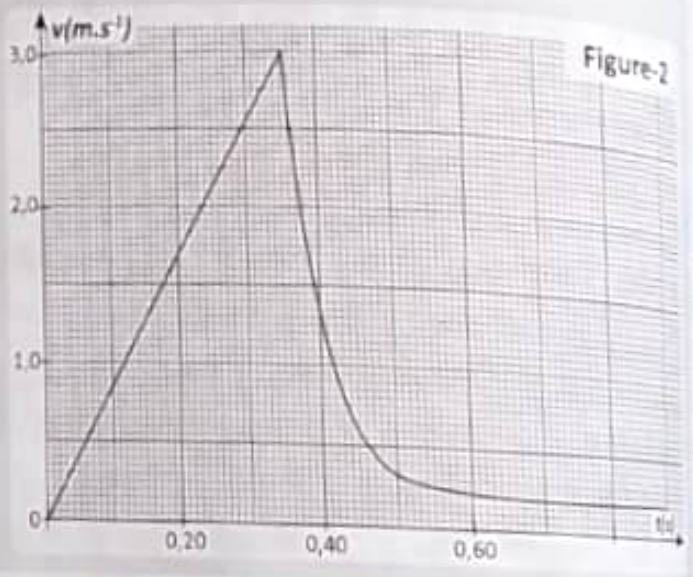


Figure-2

Solution

1- Mouvement dans l'air:

1.1- Expression de R.

Bilan des forces: $\vec{P}$ et $\vec{R}$.

Selon 2e loi de Newton:

$\sum \vec{F_{ext}} = m\vec{a}$; $\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$

Suivant l'axe: $\vec{ox}$; $P_x + R_x = ma_x$

$mg - R = ma_G$

$R = m(g - a_G) = \rho.v(g - a_G)$

Graphiquement; la 1ère phase de la figure 2 montre que: $v = a_G.t$

donc: $a_G = \frac{v}{t} \Rightarrow a_G = \frac{v_1}{t_1}$

d'où: $R = \rho.v\left(g - \frac{v_1}{t_1}\right)$

1.2- Valeur de R.

En utilisant la figure-2 alors:

$R = 2,70.10^3.4,20.10^{-6}\left(9,8 - \frac{3}{0,35}\right)$

$R = 1,4.10^{-2} N$.

2- Mouvement dans le fluide.

bilan des forces: $\vec{P}, \vec{F_A}$ et $\vec{f}$.

Selon 2e loi de Newton:

$$\sum \vec{F_{ext}} = m\vec{a}$$

$$\vec{P} + \vec{F_A} + \vec{f} = ma_G$$

Suivant l'axe $\overrightarrow{ox}$.

$$P_z + F_A + fx = ma_z$$

$$mg - kv - \rho_2 V.g = m\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = g - \rho_2 \cdot \frac{V}{m} g - \frac{k}{m} v$$

$$\frac{dv}{dt} = g\left(1 - \frac{\rho_2 V}{\rho_1 V}\right) - \frac{k}{\rho_1 V} v$$

Alors: $\frac{dv}{dt} = A - B.v$

2.2- Vérification:

On a:

$$A = g\left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right) = 9,8\left(1 - \frac{1,26}{2,70}\right) = 5,2 m/s$$

et: $B = ?$

En régime permanent: $\frac{dv_L}{dt} = 0$

alors: $A - Bv_L = 0 \Rightarrow B = \frac{A}{v_L}$

$$B = \frac{5,2}{0,2} = 26 s^{-1}$$

2.3- Equation de dimension:

on a: $[k] = \frac{[f]}{[V]} = \frac{[M].[a]}{[V]}$

$$= [M].[T]^{-1}$$

donc son unité est: $(kg.s^{-1})$

A.N.:

$k = \rho_1 . v.B = 2,70.10^3.4,20.10^{-4}.26$

$k = 0,3 kg.s^{-1}$

2.4- Expression de v_{i+1}.

D'après Euler on a:

$v_{i+1} = v_i + a_i \Delta t$ avec $a_i = A - Bv_i$

donc: $v_{i+1} = vi + (A - Bv_i).\Delta t$

$$v_{i+1} = (1 - 26\Delta t)v_i + 5,20.\Delta t$$

A.N.:

$v_{i+1} = (1 - 26.5.10^{-3})2,38 + 5,20\,5.10^{-3}$

$v_{i+1} = 2,09 m/s$.

9 On considère la chute verticale d'une goutte d'eau sphérique dans l'atmosphère.

1- Comparer, pour la goutte, le poids et la poussée d'Archimède; conclure.

2- Au cours de sa chute, la goutte est soumise à une force de frottement proportionnelle à sa vitesse v et de valeur $f = 6\pi.r.\eta.v$ avec r le rayon de la goutte et n la viscosité dynamique de l'air.

Etablir l'équation différentielle du mouvement de la goutte.

3- Déterminer la vitesse limite v_L atteinte par la goutte.

4- La goutte étant initialement au repos, exprimer la vitesse $v(t)$ à une date quelconque en fonction de v_L, t et $\tau = \frac{v_L}{g}$. Tracer l'allure de la représentation graphique de $v = f(t)$.

Que représente τ ? Calculer sa valeur numérique.

Données:

masses volumiques: $\mu_{eau} = 1000 kg.m^{-3}$; $\mu_{air} = 1,3 kg.m^{-3}$.

$r = 50\ \mu m$; $\eta = 18,5.10^{-6} N.s.m^{-2}$; $g = 9,8 N.kg^{-1}$.

Solution

1- Comparaison:

Pour comparer ces deux forces, calculons leur quotient:

$\frac{P}{F_a} = \frac{\mu_{eau}.V.g}{\mu_{air}.V.g}$ avec V le volume de la goutte.

$\frac{P}{F_a} = \frac{\mu_{eau}}{\mu_{air}} = 7,7.10^2$.

Pour l'étude du mouvement, on pourra donc négliger l'influence de la poussée d'Archimède.



2- Equation différentielle:

Référentiel terrestre galiléen.

- Système: goutte d'eau.
- Repère: $(O,\vec{k})$ défini sur le schéma.
- Inventaire des forces: $\vec{P} = m.g\vec{k}$ et $\vec{f}$.
- Application de la deuxième loi de Newton: $\vec{P} + \vec{f} = m.\vec{a_G}$

Svuivant sur l'axe (Oz) on obtient:

$m.g - f = m.a_G$ (1).

Or: $f = 6\pi.r.\eta.v$ et $a_G = \frac{dv}{dt}$.

donc (1) s'écrit:

$m.\frac{dv}{dt} = m.g - 6\pi.r.\eta.v$

soit: $\frac{dv}{dt} + \frac{6\pi.r.\eta}{m}.v = g$.

3- Vitesse limite:

Lorsque la vitesse limite est atteinte, $\frac{dv}{dt} = 0$ donc: $v_L = \frac{m.g}{6\pi.r.\eta}$

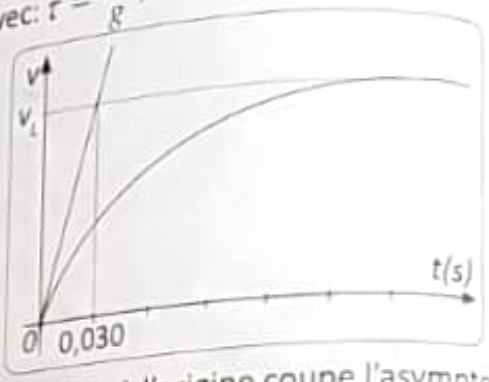
En remplaçant m par $\frac{4}{3}\pi.r^3.\mu_{eau}$, on obtient:

$v_L = \frac{2}{9}\frac{r^2.g.\mu_{eau}}{\eta}$, A.N.: $v_L = 0,29\ m.s^{-1}$

L'équation différentielle peut s'écrire en utilisant l'expression de v_L:

$\frac{dv}{dt} + \frac{g}{v_L}.v = g$, soit: $\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = g$

avec: $\tau = \frac{v_L}{g}$.



La tangente à l'origine coupe l'asymptote au point d'abscisse τ.

4- τ représente le temps caractéristique. Il vaut 0,030 s.

$\tau = \frac{v_L}{g} = \frac{0,29}{9,8} \simeq 0,029s$

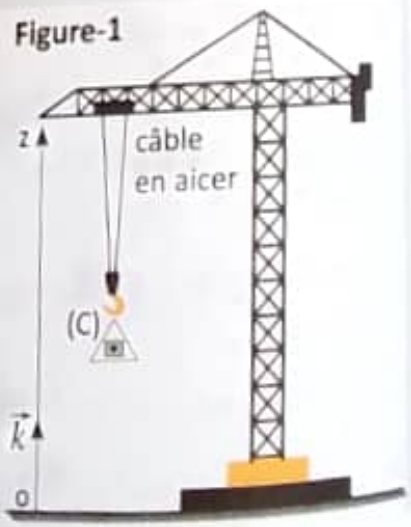
10 BAC PC Juin 2014:

Etude du mouvement d'une charge.

Les grues sont utilisées dans les chantiers de construction pour transporter de lourdes charges avec des câbles en acier liés à des appareils spéciaux.

Cet exercice a pour objectif l'étude du mouvement vertical d'une charge, et l'étude du mouvement de chute verticale dans l'air d'une partie de cette charge.

Figure-1



On prend l'intensité de la pesanteur: $g = 9,8 m.s^{-2}$.

1- Mouvement de soulèvement de la charge.

Dans un chantier de construction, on a filmé le mouvement d'une charge (C), son centre d'inertie est G et sa masse est $m = 400\,kg$ lors de son soulèvement.

Au cours du mouvement, le câble d'acier exerce sur (C) une force constance son vecteur est $\vec{T}$.

On néglige tous les frottements.

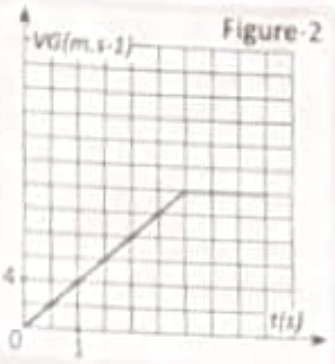


Figure-2

On étudie le mouvement de G dans le repère $(O,\vec{k})$ lié à la Terre et supposé galiléen Figure-1.

Après traitement du film du mouvement de (C) par un logiciel adéquat, on obtient le graphe représenté sur la figure-2, qui représente les variations de la vitesse $v_G(t)$.

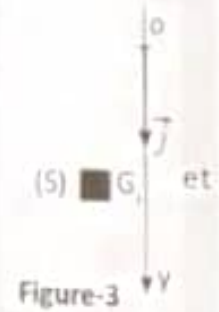


Figure-3

1.1- Déterminer la nature du mouvement de G dans chacun des intervalles $[0;3s]$ et $[3s;4s]$.

1.2- En appliquant la deuxième loi de Newton, déterminer l'intenstité de la force exercicée par le câble d'acier sur la charge dans chacun des intervalles $[0;3s]$ et $[3s;4s]$.

2- Chute verticale dans l'air d'une partie de la charge.

La charge s'arrête à une hauteur donnée. A un instant $t = 0$, une partie (S) de masse $m_1 = 30\,kg$. de la charge tombe sans initiale.

On étudie le mouvement du centre d'inertie G_1 de la partie (S) dans le repère $(O,\vec{j})$ lié avec l'axe $\overrightarrow{Oy}$ orienté vers le bas Figure-3.

La position de G_1 est confondue avec l'origine de l'axe $(O,\vec{j})$ à l'origine des dates.

On modélise l'action de l'air sur la partie (S) au cours de son mouvement par la force: $\vec{f} = -k.v^2\vec{j}$ avec $\vec{v}$ le vecteur vitesse de G_1 à l'instant t, et $k = 2,7$ dans le système international des unités.

On néglige l'action de la poussée d'Archimède devant les autres forces exercées sur (S).

2.1- En se basant sur l'équation du dimensions, déterminer l'unité de k dans le système international des unités.

2.2- Montrer que l'équation différentielle vérifiée par la vitesse v s'écrit comme suit:

$$\frac{dv}{dt} + 9.10^{-2}.v^2 = 9,8$$

2.3- Déterminer la vitesse limite V_{lim} du mouvement.

2.4- Sachant que la vitesse du centre d'inertie G_1 à l'instant t_1 est $v_1 = 2,75\,m.s^{-1}$, trouver en utilisant la méthode d'Euler sa vitesse v_2 à l'instant $t_2 = t_1 + \Delta t$, où Δt sachant que le pas de calcul est: $\Delta t = 2,4.10^{-2}s$.

Solution

1.1- Nature du mouvement.

• Pour $t \in [0;3s]$

on a la vitesse est une fonction lineaire du temps donc: $v = a.t$

$a = c^{te}$ d'où le mouvement est rectiligne uniformement varié.

• Pour $t \in [3s, 4s]$.

La vitesse v est constante donc le mouvement est rectiligne uniforme.

1.2- Détermination de l'intensité T.

• Système etudie $\{c\}$

- bilan des forces: $\vec{P}$ et $\vec{T}$.

Selon la 2e loi de Newton:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_c$$

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}_c$$



Suivant l'axe $\vec{oz}$:

$P_z + T_z = ma_z$

$-P + T = ma$

$T = m(g + a)$

• Pour $t \in [0,3s]$

$a = a_1 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{4-0}{1-0} = 4$

donc: $T_1 = m(g + a_1)$

A.N.: $T_1 = 400(9,8 + 4)$

$T_1 = 5520N$

• Pour: $t \in [3s,6s]$; $a = a_2 = 0$

donc: $T_2 = mg$

A.N.: $T_2 = 400.9,8$; $T_2 = 3920N$

2.1- Unité de k.

On a: $f = kv^2$ donc: $[f] = [k].[v]^2$

$$[k] = \frac{[f]}{[v^2]} = \frac{[m].[a]}{[v].[v]} = \frac{[M][a]}{[a].[T][v]}$$

$$[k] = \frac{[M]}{[L]} = (kg.m^{-1})$$

2.2- Equation différentielle.

Système étudié {le corps (S)}

bilan des forces: $\vec{P}, \vec{F_A}$ et $\vec{f}$.

Selon la 2e loi de Necwton:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G$$

$$\vec{P} + \vec{F_A} + \vec{f} = m\vec{a}_G$$

Suivant l'axe $(\vec{oy})$.

$$P_y + F_{Ay} + f = ma_y$$

$$mg + 0 - kv^2 = m\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{kv^2}{m} = g$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{2,7}{30}.v^2 = 9,8$$

d'où: $\frac{dv}{dt} + 9.10^{-2}v^2 = 9,8$

2.3- Valeur de v_1.

En régime permanent $v = v_1 = c^{te}$

donc: $\frac{dv}{dt} = 0$

d'où: $9.10 - 2v_1^2 = 9,8$

$$v_1 = \sqrt{\frac{9,8}{9.10^{-2}}} = 10,43m/s$$

2.4- Calcul de v_2.

Selon la méthode d'Euler on a:

$$v_2 = v_1 + a_1.\Delta t$$

avec:

$$a_1 = \left(\frac{dv}{dt}\right) = 9,8 - 9.10^{-2}.v_1^2$$

$$= 9,8 - 9.10^{-2}(2,75)^2 \simeq 9,12m/s^2$$

$$a_1 \simeq 9,12m/s^2$$

donc: $v_2 = 2,75 + 9,12.2,4.10^{-2}$

$$v_2 \simeq 2,97m/s.$$

11

1- La vitesse limite d'un objet de masse $93g$ en chute dans l'air est de $2,2m.s^{-1}$. L'objet est soumis à une force de frottement fluide de valeur $f = \lambda v^2$ et il est lâché

d'un point O origine d'un repère $(o,\vec{i})$ sans vitesse initiale.
On néglige la poussée d'Archimède et on donne: $g = 9,8m.s^{-2}$.
a- établir l'équation différentielle qui régit le mouvement de l'objet.
b- Calculer le coefficient de frottement fluide turbulent λ.
2- On ne néglige plus la poussée d'Archimède. L'équation différentielle régissant le mouvement de chute de l'objet est alors: $\frac{dV}{dt} + \frac{\lambda}{m}v^2 = \alpha g$, avec $\alpha = \frac{m - m'}{m}$.
On donne la masse volumique de l'objet $\rho = 1,78 \times 10^3 kg.m^{-3}$ et celle de l'air ambiant $\rho_{air} = 1,27kg.m^{-3}$.
a- Calculer la nouvelle vitesse limite de chute de l'objet.
b- Dans cette étude, est-ce bien nécessaire de tenir compte de la poussée d'Archimède?

Solution

1.a- Equation différentielle:
Le système étudié est (l'objet), il est étudié par rapport à un repère terrestre $(O,\vec{i})$ supposé galiléen.
Les forces agissant: $\vec{p}$, $\vec{f}$.
La deuxième loi de Newton, appliquée à l'objet en mouvement donne:

$$\vec{P} + \vec{f} = m\vec{a}.$$

En projetant cette relation vectorielle sur l'axe $(O,\vec{i})$, on a: $mg - \lambda v^2 = ma_x$.
D'où: $\frac{dV}{dt} + \frac{\lambda}{m}v^2 = g$ (1).

b- Valeur de λ:
Lorsque la vitesse limite est atteinte, $\frac{dv}{dt} = 0$. La relation (1) devient:

$$\frac{\lambda}{m}v_{lim}^2 = g$$

Le coefficient de frottement fluide turbulent λ est donc: $\lambda = \frac{mg}{v_{lim}^2}$;
A.N.: $\lambda = 0,19kg.m^{-1}$.

2.a- Calcul de V_l.
En tenant compte de la poussée d'archimède l'équation différentielle qui régit le mouvement de l'objet est maintenant: $\frac{dV}{dt} + \frac{\lambda}{m}V^2 = \alpha g$ (2), avec $\alpha = \frac{m - m'}{m}$.
Lorsque la vitesse limite est atteinte, $\frac{dV}{dt} = 0$. La relation (2) devient: $\frac{\lambda}{m}V_{lim}^2 = \alpha g$.
L'expression de la vitesse limite est donc: $V_{lim} = \sqrt{\frac{\alpha mg}{\lambda}}$.
Comme $\alpha = \frac{m - m'}{m}$ ou encore: $\alpha = \frac{\rho V - \rho_{air} V}{\rho V} = 1 - \frac{\rho_{air}}{\rho}$, la relation précédente devient:

$$V_{lim} = \sqrt{\frac{mg}{\lambda}\left(1 - \frac{\rho_{air}}{\rho}\right)};$$

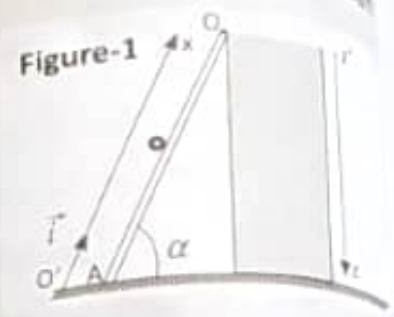
A.N.: $V_{lim} = 2,2m.s^{-1}$.

b- poussé d'archimède:
La poussée d'Archimède peut être négligée dans le cas de cette étude, le facteur $\alpha = 1 - \frac{\rho_{air}}{\rho}$ étant voisin de 1: $\alpha = 0,9993$. Le résultat numérique trouvé est identique à celui calculé dans la première question où l'on ne tenait pas compte de la poussée d'Archimède.

12

I- Etude du mouvement rectiligne d'une bille:

Une bille de masse $m = 23g$ et de diamètre $d = 2,087cm$ est envoyée sur un plan incliné d'un angle $\alpha = 30°$ par rapport à l'horizontale d'un point A avec une vitesse initiale V_A pour arriver au point O avec une vitesse nulle figure-1.



On étudie le mouvement du centre d'inertie G de la bille dans un repère $(o', \vec{i})$ supposé Galilien; l'origine des temps $t = 0$ est l'instant de l'envoi de la bille du point A.

Au cours de son mouvement la bille est soumise à des forces de frottement équivalentes à une seule force $\vec{f}$ constante de sens opposé à la vitesse et d'intensité $f = 2,3.10^{-1}N$.

1.1- Trouver l'équation différentielle du mouvement de G.

1.2- En déduire la nature du mouvement de G.

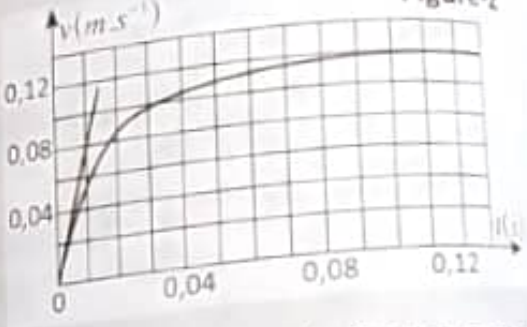
1.3- Déterminer la valeur V_A sachant que le mouvement de A à O a durée $2s$.

on donne: $g = 9,8m.s^{-2}$.

II- chute verticale de la bille:

la bille de volume $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ quitte le plan incliné en O sans vitesse initiale pour prendre un mouvement de chute verticale dans un récipient plein d'huile de masse volumique ρ. le point O est considéré comme l'origine d'un axe (oz) pris comme repère d'espace orienté vers le bas. l'intensité de la force de frottement a pour expression $f = Kv$ avec k constante. Par le biais d'outil informatique, on a obtenu l'évolution de la vitesse en fonction du temps figure-2.

Figure-2



2.1- Montrer que l'equation différentielle s'écrit sous la forme: $\frac{dv}{dt} = A - Bv$.

2.2- Déterminer graphiquement les valeurs de A et de B.

2.3- En déduire les valeurs de K et de ρ.

2.4- Par application de la méthode d'Euler ; compléter le tableau suivant:

Instant	accélération	vitesse
$t_i(s)$	$a_{t_i}(m.s^{-2})$	$V_{t_i}(m.s^{-1})$
0	8	0
0,001	a_1	0,008
0,002	6,969	v_2
0,003	a_3	0,022

Solution

1.1- Equation différentielle:

Système étudié (la bille).

Bilan des forces: $\vec{p}, \vec{f}, \vec{R_N}$.

La 2e loi de Newton s'écrit:

Suivant l'axe $(o'\vec{i})$

$$\sum \vec{Fext} = m\vec{a}$$

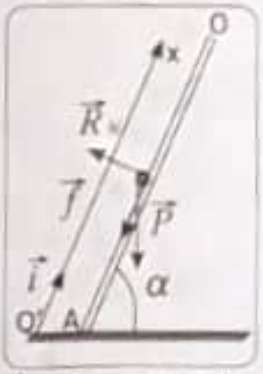
$$\vec{P} + \vec{R}_N + \vec{f} = m\vec{a}$$

$$P_x + R_{Nx} + f_x = ma_x$$

$$-mg\sin\alpha + 0 - f_x = m\frac{dv_x}{dt}$$

$$\frac{dv_x}{dt} = -g\sin\alpha - \frac{f}{m}$$

$$\frac{dv_x}{dt} + g\sin\alpha + \frac{f}{m} = 0$$



1.2- Nature du mouvement:

On a: $\frac{dv_x}{dt} = c^{te}$ donc: $a = c^{te}$

Le mouvement de G centre d'inertie de la bille est rectiligne uniformément varié

1.3- valeur V_A:

L'equation de la vitesse s'écrit:

$$v(t) = a.t + v_0$$

avec: $a = -g\sin\alpha - \frac{f_0}{m}$

A.N.: $a = -9,8.\sin 30 - \frac{2,3.10^{-3}}{23.10^{-3}}$

$$= -5m/s^2$$

et: $v_0 = V_A$ et $v(t = 2s) = 0$

donc: $0 = -5.t + V_A$

$$V_A = 2.5 = 10.m/s$$

2.1- Equation différentielle:

Bilan des forces $\vec{p}, \vec{f}, \vec{F_a}$

On applique la 2e loi de Newton:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$$

$$\vec{P} + \vec{F}_a + \vec{f} = m\vec{a}$$

$$P_z + F_{az} + f_z = ma_z$$

$$(o\vec{z}) \quad mg - m_l g + kv = m\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = \left(\frac{m - m_l}{m}\right)g - \frac{k}{m}v$$

$$\frac{dv}{dt} = \left(\frac{m - \rho v}{m}\right)g - \frac{k}{m}v$$

$$\frac{dv}{dt} = A - B.v$$

avec: $A = \frac{m - \rho v}{m}$ et $B = \frac{K}{m}$.

2.2- Valeurs de A et de B:

du graphe on déduit que:

à $t = 0$; $v_0 = 0$

à t_1 ; $v_1 = 0,12m/s$ et $\tau = 0,015s$.

de l'équation on a à $t = 0$;

$$\frac{dv}{dt} = A = a_0 = \frac{v_1}{\tau}$$

donc: $A = \frac{0,12}{0,015} = \frac{4}{5} = 8m/s^2$.

à: t_1: $\frac{dv_1}{dt} = 0 = A - Bv_1$

donc: $B = \frac{A}{v_1} = \frac{8}{0,12}$

$$\simeq 67s^{-1}$$

2.3- Valeur de ρ et de k:

On a: $A = \left(\frac{m - \rho v}{m}\right)g$

$$\rho = \frac{m(1 - A/g)}{v}$$

$$\rho = \frac{23.10^{-3}(1 - 8/9,8)}{\frac{4\pi}{3}.\left(\frac{2,087.10^{-2}}{2}\right)^3}$$

$$\simeq 888kg/m^3 \simeq 0,888Kg/L$$

et: $B = \frac{k}{m} \Rightarrow K = m.B$

A.N.: $K = 23.10^{-3}.67 \simeq 1,54(SI)$

2.4- Méthode d'Euler:

Calcul de l'accélération a_0 de l'equation différentielle on a:

$$a_0 = A - Bv_0$$

$$a_0 = 8 - 67.0,008 = 7,46 m/s^2$$

- Calcul de v_2:

d'après Euler on écrit:

$$v_2 = v_1 + a_1.\Delta t$$

$$v_2 = 0,008 + 7,46.0,001$$

$$= 0,0155 m/s$$

- Calcul de a_2:

$$a_2 = A - Bv_2$$

$$= 8 - 670,022$$

$$= 6,52\ m/s^2$$

13

A partir de l'altitude $h = 10km$, un sauteur en parachute de masse $m = 20k$ avec son équipement pénètre dans les couches denses de l'atmosphère avec une vitesse initiale $v_0 = 306km.h^{-1}$. Dans cette zone, la valeur de l'accélération de la pesanteur est $g = 9,8m.s^{-2}$.

On admet que l'ensemble des forces exercées par l'air sur le sauteur peut se modéliser par une force de frottement dont la valeur f est reliée à la vitesse v par la relation : $f = k.v^2$, avec $k = 0,78$ unité SI.

1- A partir d'une analyse dimensionnelle, dérerminer l'unité de la constante k dans le système internationnal.

2- Etablir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse $v(t)$: $\frac{dv}{dt} + \alpha v^2 = \beta$

On utilisera un axe vertical dirigé vers le bas

3- Pour déterminer la vitesse limite de la chute.

4- Pour déterminer l'évolution de la vitesse, on utilise la méthode itérative d'Euler avec un pas de résolution $\Delta t = 0,5s$.

Soit v_n la vitesse à l'instant t_n et v_{n+1} la vitesse à l'instant $t_{n+1} = t_n + \Delta t$.

4.1- Montrer que : $v_{n+1} = v_n + A - B.v_n$

4.2- Préciser les unités des constantes A et B

4.3- Calculer A et B.

4.4- Déterminer la valeur de a_0, v_1 et a_1, représentant respectivement l'accelération initiale, la vitesse puis l'accélération à l'instant $t_1 = 0,5s$

Solution

1- L'expression $f = k.v^2$ donne la dimension de k : $k = \frac{[f]}{[v^2]} = \frac{[f]}{[v]^2}$

On sait que l'unité de f est le newton

$1N = 1kg.m.s^{-2}$ (d'après la 2ème loi de Newton)

$[f] = M.L.T^{-2}$ et $[v]^2 = (L.T^{-1})^2 = L^2.T^{-2}$

d'où : $[k] = \frac{M.L.T^{-2}}{L^2.T^{-2}} = M.L^{-1}$

k a pour unité $kg.m^{-1}$

2- Le sauteur est soumis à deux forces : son poids $\overrightarrow{mg}$ est la force $\vec{f}$; $(f = kv^2)$.

La deuxième loi de Newton s'écrit :

$\vec{mg} + \vec{f} = m$

Par projec

$mg - f =$

$mg - kv^2$

$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}$

ou encore

avec $a =$

3- En rég

vitesse d

$a + \alpha.v_L^2$

$v_L = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$

$v_L = \sqrt{\frac{2}{}}$

4.1- Util

$v_{n+1} =$

L'équat

$t = t_n$

$a_n = \left($

alors :

4.2- D

tous l

$[A] =$

A : a

$[B.v$

$m.s^{-}$

$[B]$

$m\vec{g}+\vec{f}=m\vec{a}$.

Par projection sur l'axe oz :

$mg-f=ma_z$

$mg-kv^2=m\frac{dv}{dt}$

$\frac{dv}{dt}+\frac{k}{m}v^2=g$

ou encore : $\frac{dv}{dt}+\alpha v^2=\beta$

avec $\alpha=\frac{k}{m}$ et $\beta=g$

3- En régime permanent, la valeur de la vitesse devient constante $v=v_L$:

$0+\alpha.v_L^2=\beta$

$v_l=\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}=\sqrt{\frac{mg}{k}}$

$v_l=\sqrt{\frac{200.9,8}{0,78}}\simeq 50,13 m.s^{-1}$

4.1- Utilisons la formule d'Euler :

$v_{n+1}=v_n+a_n.\Delta t$

L'équation différentielle s'écrit à l'instant $t=t_n$

$a_n=\left(\frac{dv}{dt}\right)_n=\beta-\alpha v_n^2$

alors : $v_{n+1}=v_n+(\beta-\alpha.v_n^2)\Delta t$

$=v_n+\beta\Delta t-\alpha.\Delta t.v_n^2$

$=v_n+A-\beta.v_n^2$

4.2- Dans une somme ou une différence ; tous les termes ont la même dimenson :

$[A]=[v_{n+1}]=[v_n]=[B.v_n^2]$

A : a la dimension d'une vitesse : $m.s^{-1}$.

$[B.v_n^2]$ a la dimension d'une vitesse : $m.s^{-1}$.

$[B]=\frac{[v]}{[v_n^2]}=\frac{1}{L.T^{-1}}=T.L^{-1}$

B est en $s.m^{-1}$

Deuxième méthode :

On peut vérifier ceci à l'aide d'une autre méthode :

On a : $A=\beta.\Delta t=g.\Delta t$

A est en $m.s^{-2}.s=m.s^{-1}$

Et, on a : $B=\alpha.\Delta t=\frac{k}{m}\Delta t$

B est en $\frac{kg.m^{-1}}{kg}.s=s.m^{-1}$

4.3- Calcul de Δ et B

$A=g.\Delta t=9,8.\ 0,5=4,9 m.s^{-1}$

$B=\frac{k}{m}\Delta t=\frac{0,78}{200}.0,5=1,95.10^{-3} s.m^{-1}$

4.4- L'équation différentielle peut s'écrire :

$\left(\frac{dv}{dt}\right)_n+\alpha.v_n^2=\beta$

$a_n=\beta-\alpha.v_n^2$

$a_0=\beta-\alpha.v_0^2$, $v_0=306 km/h=85 m.s^{-1}$

$\beta=g=9,8 m.s^{-2}$;

$\alpha=\frac{k}{m}=3,9.10^{-3} m^{-1}$

$a_0=9,8-3,9.10^{-3}.(85)^2=-18,38 m.s^{-2}$

$v_1=v_0+A-Bv_0^2$

$v_1=85+4,9-1,95.10^{-3}.(85)^2$

$v_1=75,81 m.s^{-1}$

$a_1=\beta-\alpha.v_1^2$

$a_1=9,8-3,9.10^{-3}(75,81)^2$

$a_1\simeq-12,61 m.s^{-2}$

14 Un skieur de masse $m=80kg$ aborde successivement les différentes parties d'une pente dont le profil est schématisé ci-contre.



1- Il remonte à vitesse constante la piste AB inclinée d'un angle $\alpha = 30°$ par rapport à l'horizontale. Il est tracté par la perche d'un téléski qui exerce une force de traction $\vec{T}$ ayant même direction que la perche. Elle forme un angle $\beta = 20°$ avec la pente. L'ensemble des forces de frottement exercées par la neige sur les skis et l'air sur le skieur est équivalent à une force unique $\vec{F}_1$ de valeur $F_1 = 65N$, opposée au mouvement.



Calculer la valeur de la force de traction exercée par la perche. On donne $g=9,8N/kg$

2- Arrivé au sommet de le pente en B, il lâche la perche avec une vitesse de $3,2m.s^{-1}$. Il est alors sur une surface plane et horizontale.

Quelle distance va-t-il parcourir avant de s'arrêter, en admettant que l'ensemble des forces de frottement est équivalent à une force de valeur $F_2 = 42N$?

3- il aborde ensuite une pente CD inclinée d'un angle $\alpha' = 35°$ par rapport au plan horizontal.

La valeur des forces de frottement ne peut plus être considérée comme constante et on admettra qu'elle est proportionnelle au carré de sa vitesse:

$F_3 = k.v^2$, avec $k = 0,56N.s^2.m^{-2}$.

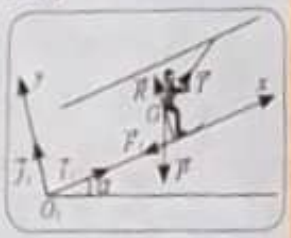
Quelle vitesse limite v_L le skieur peut-il atteindre?

Solution

1- Valeur de la force:

• Système étudié: (skieur)

• Inventaire des forces: le poids $\vec{P}$, forces exercées de frottement $\vec{F}_1$, la force de traction exercée par la perche $\vec{T}$.



• Application de la deuxième loi de Newton:

$$\vec{P}+\vec{R}+\vec{F}_1+\vec{T}=m.\vec{a}_G$$

Le mouvement s'effectue à vitesse constante, donc selon la 1ère loi de Newton:

$$\vec{a}_G=\vec{0} \text{ et } \vec{P}+\vec{R}+\vec{F}_1+\vec{T}=\vec{0}$$

On obtient par projection sur l'axe (O_1x)

$$-F_1 - m.g.\sin\alpha + T.\cos\beta = 0$$

d'où: $T=\dfrac{F_1 + m.g.\sin\alpha}{\cos\beta}$

A.N.: $T=\dfrac{65+80.9,8\sin 30}{\cos 20}=486N$

2- Distance parcourure:

• Inventaire des forces: $\vec{P}$, $\vec{R}$, $\vec{F}_2$.

• Repère: $(O_2;\vec{i}_2;\vec{j}_2)$ défini sur le schéma ci-contre.



• Application de la deuxième loi de

Newton: $\vec{P}+\vec{R}+\vec{F}_s=m\vec{a}_G$

En projetant cette relation sur l'axe (Ox), on obtient: $-F_s=m.a_G$;

soit: $a_G=-\frac{F_s}{m}=-0,525m.s^{-2}$

Le mouvement est rectiligne uniformément varié.

$v_x=a_G.t+v_0$ avec v_0 la vitesse du skieur à $t=0$ lorsqu'il lâche la perche.

$x=\frac{1}{2}a_G.t^2+v_0.t+x_0$ avec x_0 l'abscisse du skieur à $t=0$.

En éliminant t entre ces deux relations, on obtient: $x-x_0=\frac{v_s^2-v_0^2}{2a_G}$

soit avec: $v_s=0$ et $v_0=3,2m.s^{-1}$:

$$x-x_0=9,8m.$$

3- vitesse limite:

• Inventaire des forces: $\vec{P}$, $\vec{R}$, $\vec{F}_s$.

• Repère: $(O_s;\vec{i}_s;\vec{j}_s)$ défini sur le schéma ci-contre.



• Application de la deuxième loi de Newton:

$\vec{P}+\vec{R}+\vec{F}_s=m.\vec{a}_G$

Lorsque la vitesse maximale est atteinte: $\vec{a}_G=\vec{0}$.

En projetant la relation sur l'axe $(O_s\vec{x})$, on obtient: $P.\sin\alpha'-F_s=0$,

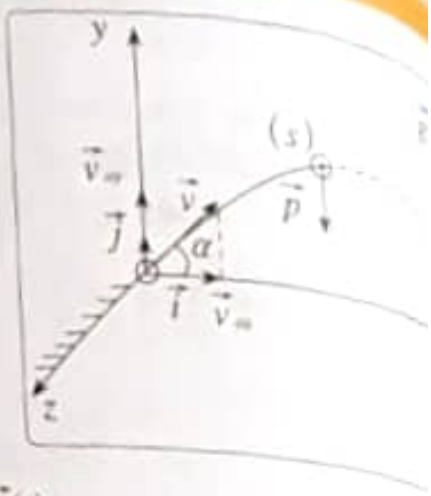
soit: $P.\sin\alpha'=k.v_L^2$

d'où: $v_L=\sqrt{\frac{P.\sin\alpha'}{k}}=\sqrt{\frac{mg\sin\alpha}{K}}$

A.N.: $V_L=\sqrt{\frac{80.9,8\sin35^\circ}{0,56}}\simeq 28m/s$.

4 Mouvement de projectile dans le champ de pesanteur uniforme

Un corps (S) de masse m est lancé avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ faisant un angle α avec l'axe horizontale $\overrightarrow{ox}$, d'un point O origine d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ à l'instant $t=0$.



Conditions initiales $t=0$

$$0\begin{cases}x_0=0\\y_0=0\\z_0=0\end{cases}\quad \vec{v}_0\begin{cases}v_{0x}=v_0\cos\alpha\\v_{0y}=v_0\sin\alpha\\v_{0z}=0\end{cases}$$

1 Les coordonnées du vecteur accélération $\vec{a}(t)$:

Système étudié (projectile: corps (S))

bilan des forces: $\vec{P}$

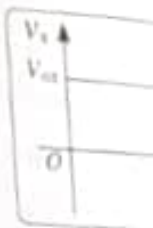
Selon la 2ème Loi de Newton $\vec{P}=m\vec{a}_G \Rightarrow \vec{a}_G=\vec{g}$

Dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ $\begin{cases}a_x=0\\a_y=-g\\a_z=0\end{cases}$

2 les coordonnées du vecteur vitesse $\vec{v}(t)$:

On a: $a_z=\dfrac{dv_z}{dt}=0\Rightarrow v_z=v_{0z}=0$

on déduit que le mouvement se fait dans le plan vertical (xoy)



d'où: $\begin{cases}a_x=0\\a_y=-g\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{dv_x}{dt}=0\\\dfrac{dv_y}{dt}=-g\end{cases}$

Par intégration on trouve:

$$\begin{cases}v_x=v_{0x}\\v_y=-gt+v_{0y}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v_x=v_0\cos\alpha\\v_y=-gt+v_0\sin\alpha\end{cases}$$



3 les équations horaires:

On a: $\begin{cases}\dfrac{dv_x}{dt}=v_0\cos\alpha\\\dfrac{d_y}{dt}=-gt+v_0\sin\alpha\end{cases}$

Par intégration: $\begin{cases}x=(v_0\cos\alpha).t+x_0 & ,x_0=0\\y=-\dfrac{1}{2}gt^2+(v_0\sin\alpha).t+y_0 & ,y_0=0\end{cases}$

4 équation de la trajectoire:

On élimine le temps alors: $t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$

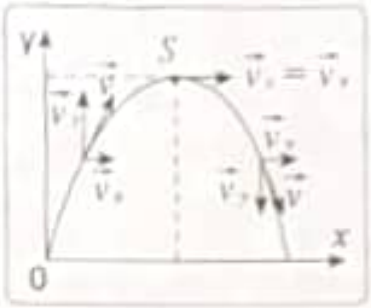
On remplace: $y = \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0\cos\alpha}\right)^2 + v_0\sin\alpha\left(\frac{x}{v_0\cos\alpha}\right)$

$$y = \left(\frac{-g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\right)x^2 + (\tan\alpha)x$$

$$y = ax^2 + bx + c$$

sous forme:

donc la trajectoire est une parabole.



5 Les caractéristiques de la trajectoire.

5.1- Le sommet $S\begin{cases} x_s = ? \\ y_s = ? \end{cases}$; est le point le plus haut de la trajectoire

tel que $(v_y)_s = 0$ ou $\left(\frac{dy}{dx}\right)_s = 0$

on a: $-gt_s + v_0\sin\alpha = 0$

$$t_s = \frac{v_0\sin\alpha}{g}$$

donc: • $x_s = v_0\cos\alpha\left(\frac{v_0\sin\alpha}{g}\right) = \frac{v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}$

$$x_s = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{2g}$$

• $$y_s = -\frac{1}{2}g\left(\frac{v_0\sin\alpha}{g}\right) + v_0\sin\alpha\left(\frac{v_0\sin\alpha}{g}\right)$$

$$y_s = \frac{-v_0^2\sin^2\alpha}{2g} + \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{g}$$

$$y_s = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}$$

5.2- La portée: $P\begin{cases} x_p = ? \\ y_p = ? \end{cases}$; est le point le plus loin que peut atteindre le projectile.

Dans ce cas $y_p = 0$ donc: $\left(\frac{-g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\right)x^2 + \tan\alpha\, x = 0$;

$$x\left(\left(\frac{-g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\right)x + \tan\alpha\right) = 0$$

• $x_0 = 0$ correspond au point de lancement O.

• $\frac{-g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x_p + \tan\alpha = 0$;

$$x_p = \tan\alpha.\frac{2v_0^2\cos^2\alpha}{g} = \frac{2v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}$$

$$x_p = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}$$

1 Mots manquants:

a- La direction du vecteur champ de pesanteur $\vec{g}$ est .....

b- Lors d'une chute ..... le vecteur accélération est égal au vecteur champ de pesanteur.

c- La trajectoire du centre d'inertie d'un solide en chute libre avec une vitesse initiale $\vec{V_0}$ non verticale est une portion de ..... dans le plan vertical contenant .....

Suivant l'axe horizontal, le mouvement est .....

Suivant l'axe vertical, le mouvement est .....

Solution

a: verticale.

b: libre

c: parabole - le vecteur vitesse - uniforme - uniformement varié.

2 Vrai ou Faux?

a- La valeur du champ vecteur de pesanteur varie avec le lieu.

b- Le mouvement du centre d'inertie d'un solide en chute libre dans le champ de pesanteur uniforme est uniforme.

c- La durée d'une chute libre dépend de la masse de l'objet.

d- La trajectoire d'un solide en chute libre est toujours verticale.

Solution

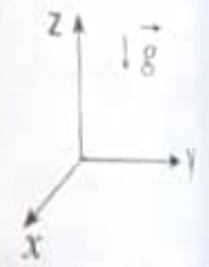
a- Vrai ;

b- Faux ;

c- Faux ;

d- Faux.

3 Q.C.M



a- Pour un objet tombant en chute libre sans vitesse initiale:

$$V_x(t) = -gt \ ; \ V_z(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

b- Pour un objet ayant une vitesse initiale $\vec{V_0}$ située dans le plan vertical et formant un angle α avec l' horizontale:

$V_x(t) = gt + V_0 \sin\alpha$

$V_z(t) = -gt + V_0 \cos\alpha$.

Solution

a- $v_z(t) = -gt$;

b- aucune

Exercices

1 On lance, à un instant $t_0 = 0$ avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ horizontale, un solide (S) de petites dimensions, de masse m, d'un point A qui se trouve à la hauteur h du sol. Le solide (S) tombe sur le sol au point d'impact I (figure 1).

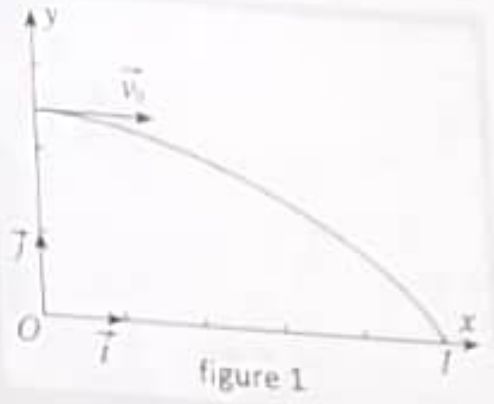


figure 1

On étudie le mouvement du centre d'inertie G dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ lié à la terre supposé galiléen.

Données:

Tous les frottements sont négligeables ;

$g = 9,8 m.s^{-2}$; $h = OA = 1m$; $v_0 = 6 m.s^{-1}$

1- En appliquant la deuxième loi de Newton, établir les expressions littérales des équations horaires $x(t)$ et $y(t)$ du mouvement de G.

2- En déduire l'expression littérale de l'équation de la trajectoire du mouvement de G.

3- Calculer la valeur de t_i, l'instant d'arrivé de (S) au sol en I. En déduire OI.

4- On lance de nouveau, un instant $t_0 = 0$, le solide (S) du point A avec une vitesse initiale $\vec{v'}_0 = 3\vec{v}_0$.

Recopier sur votre copie le numéro de la question et écrire la lettre correspondante à la seule proposition vrai :

4.1- La valeur de l'instant d'arrivé de (S) au sol vaut :

a- $t' = 0,25s$	b- $t' = 0,35s$	c- $t' = 0,45s$	d- $t' = 0,65s$

4.2- L'abscisse x' du point où le solide arrive au sol est :

a- $x' = x_i$	b- $x' = \sqrt{3}\, x_i$	c- $x' = 3x_i$

Solution

1- Le solide n'est soumis qu'à son poids.

D'après la deuxième loi de Newton : $\vec{P} = m\vec{a}_G$, d'où $\vec{a}_G = \vec{g}$

En utilisant les axes ox et oy du plan vertical :

$$\begin{cases} a_x = g_x = 0 \\ a_y = g_y = -g \end{cases}$$

or $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}_G$, alors $\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = a = 0 \\ \frac{dv_y}{dt} = a = -g \end{cases}$

on déduit que :

$$\begin{cases} v_x = cte = v_x(0) \\ v_y = -gt + cte = -gt + v_y(0) \end{cases}$$

D'après la condition initiale sur $\vec{v}_0$

$$\begin{cases} v_x(0) = v_0 \\ v_y(0) = 0 \end{cases}$$

d'où : $\begin{cases} v_x = v_0 \\ v_y = -gt \end{cases}$

Par ailleur $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v_x = v_0 \\ \frac{dy}{dt} = -gt \end{cases}$

On déduit alors :

$$\begin{cases} x = v_0 t + x_0 = v_0 t & (1) \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + y_0 = -\frac{1}{2}gt^2 + h & (2) \end{cases}$$

2- Le système des deux équations (1) et (2) permet d'écrire :

$t = \frac{x}{v_0}$ et $y = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0}\right)^2 + h$

d'où $y = -\frac{g}{2v_0^2}x^2 + h$

3- Au point I on a $y = 0$

$$-\frac{1}{2}gt_1^2 + h = 0$$

$$t_1 = \pm\sqrt{\frac{2h}{g}} = +\sqrt{\frac{2h}{g}} ; (t > 0)$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{2.1}{9,8}} = 0,45s$$

$$OI = x_I = v_0.t_1 = 6.0,45 = 2,7m$$

4.1- Au niveau du sol : $y = 0$

$$-\frac{1}{2}gt_1'^2 + h = 0$$

$$t_1' = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0,45s$$

La valeur de t_1' est indépendante de la valeur de v_0

La bonne réponse est c.

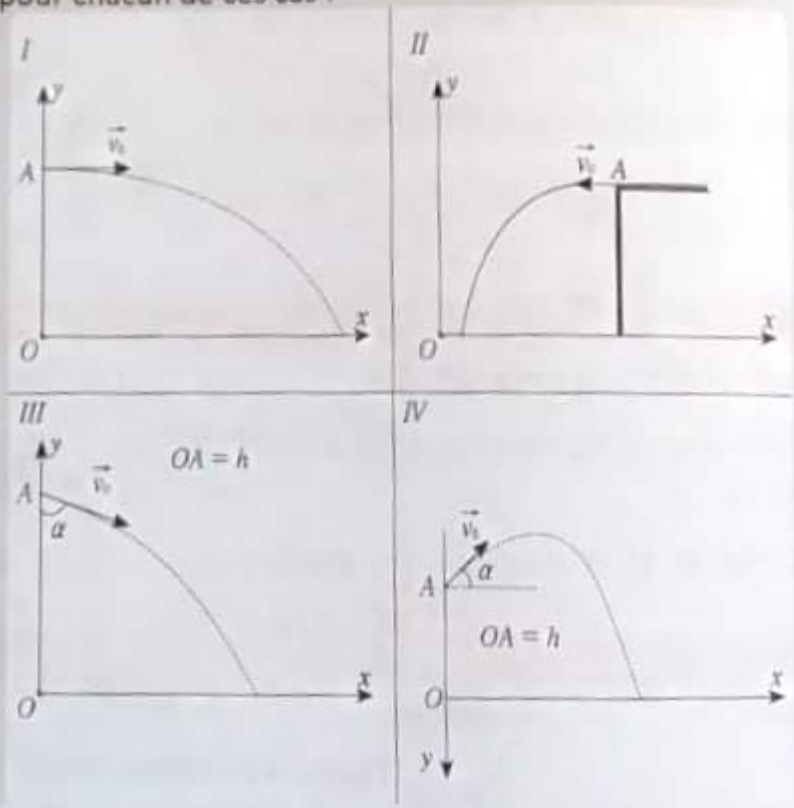
4.2- À l'arrivée au sol : $x' = v_0'.t'$

$$x' = 3v_0.t' = 3.v_0.t = 3x_1$$

La bonne réponse est c

2 On donne dans les figures suivantes des projectives, lancées à l'instant $t =$ à partir d'un point A, à la vitesse $\vec{v}_0$ dans conditions initiales différentes. On considère l'effet de l'air négligeable et g constante.

Déterminer pour chacun de ces cas :



1- Les coordonnées de la vitesse initiale $\vec{v}_0$

2- Les équations de vitesse $v_x(t)$ et $v_y(t)$

3- Les équations horaires $x(t)$ et $y(t)$

Solution

1- cas I $\vec{v}_0 \begin{cases} v_{0x} = v_0 \\ v_{0y} = 0 \end{cases}$

II $\vec{v}_0 \begin{cases} v_{0x} = -v_0 \\ v_{0y} = 0 \end{cases}$

III $\vec{v}_0 \begin{cases} v_{0x} = v_0 \sin\alpha \\ v_{0y} = -v_0 \cos\alpha \end{cases}$

IV $\begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos\alpha \\ v_{0y} = -v_0 \sin\alpha \end{cases}$

2- La deuxième loi de Newton conduit à:

$\vec{a} = \vec{g}$

d'où: $a_x = g_x = 0$ avec $g_y = \pm g$

$a_y = g_y$

cas I $\vec{v} \begin{cases} v_x = cte = v_{0x} = v_0 \\ v_y = g_y t + v_{0y} = -gt \end{cases}$

II $\vec{v} \begin{cases} v_x = cte = v_{0x} = -v_0 \\ v_y = g_y t + v_{0y} = -gt \end{cases}$

III $\vec{v} \begin{cases} v_x = v_0 \sin\alpha \\ v_y = -gt - v_0 \cos\alpha \end{cases}$

IV $\vec{v} \begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha \\ v_y = gt - v_0 \sin\alpha \end{cases}$

3- I $\begin{cases} x = v_0 t \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 + h \end{cases}$

II $\begin{cases} x = -vt + d \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 + h \end{cases}$

III $\begin{cases} x = v_0 \sin\alpha . t \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 - v_0 \cos\alpha . t + h \end{cases}$

IV $\begin{cases} x = v_0 \cos\alpha . t \\ y = \frac{1}{2} g t^2 - v_0 \sin\alpha t - h \end{cases}$

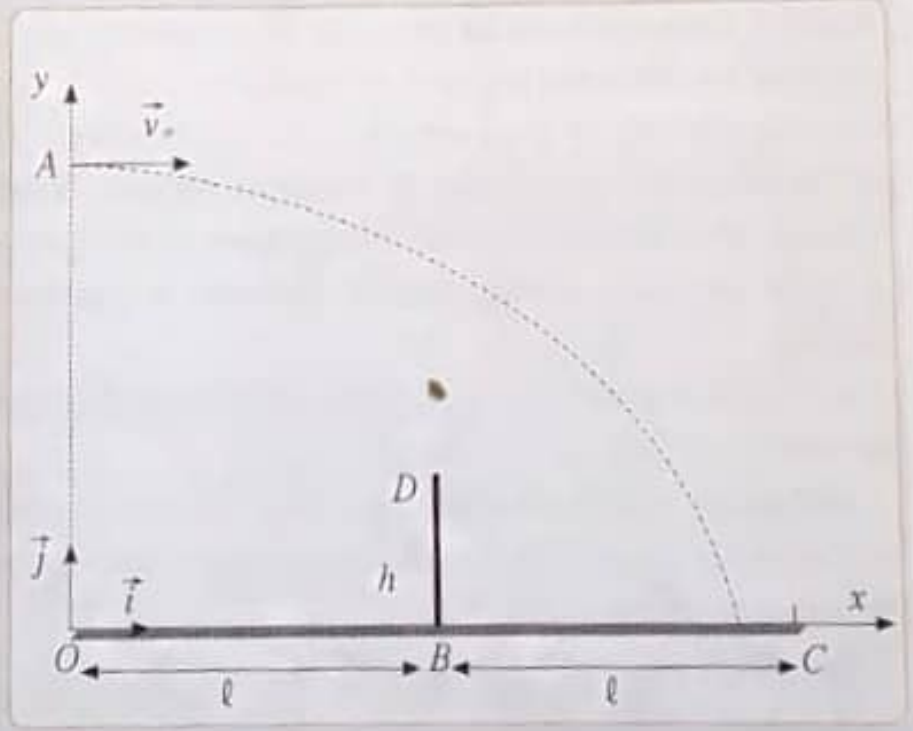
3 Un joueur de tennis effectue un service en lançant la balle à partir d'un point A situé à la hauteur $H = 2m$ du sol, avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ horizontale (figure).

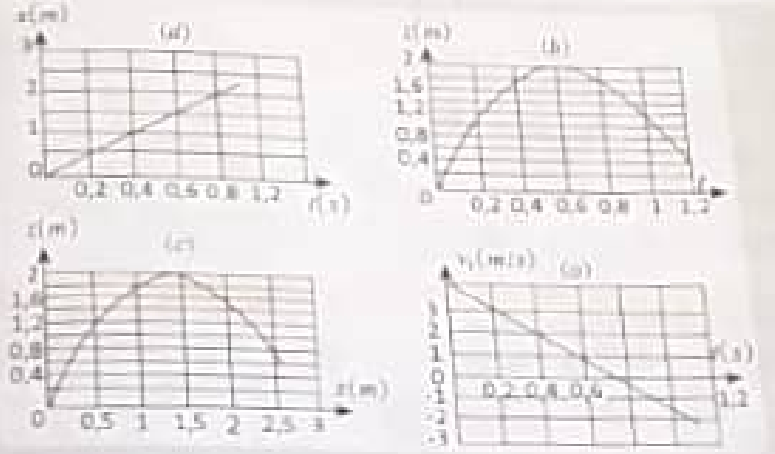
On étudie le mouvement de la balle dans le plan $(O;\vec{i};\vec{j})$.

- On néglige les frottements et on donne : $g = 10 m.s^{-2}$
- Longueur du terrain : $OC = 2\ell$

$OB = BC = \ell = 12m$

- Hauteur du filet : $h = 1m$





Solution

1- La courbe ((c) représente la trajectoire) de balle qui est parabolique et qui représente la variation de l'altitude z en fonction de x (indépendante du temps).

2.a- Nature du mouvement.

Le diagramme d'espace $x = f(t)$ est une droite linéaire qui montre que le mouvement selon l'axe horizontal (ox) et rectiligne uniforme.

b- Calcul de v_x.

d'après le graphe (d) on a:

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{1-0}{0,4-0} = 2,5 m/s$$

3- Calcul de $v_z(0)$:

d'après le graphe (c) on trouve:

$$v_{0z} = v_z(o) = 8 m/s$$

4- Calcul de α :

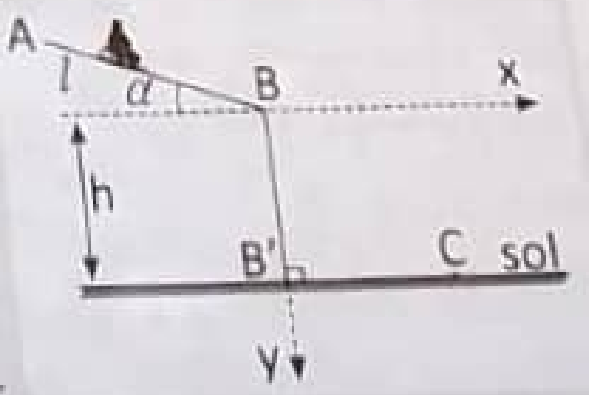
On a: $tg\alpha = \frac{v_{0z}}{v_{ox}} \Leftarrow \begin{cases} v_{ox} = v_o \cos\alpha \\ v_{oz} = v_o \sin\alpha \end{cases}$

$$tg\alpha = \frac{4}{2,5} = 1,6$$

Donc: $\alpha \simeq 56°$.

5 Une luge part sans vitesse initiale et glisse sans frottements le long d'une piste rectiligne AB de longueur ℓ faisant un angle $\alpha = 20°$ avec le plan horizontal.

masse de la luge: m et $g = 9,8 m.s^{-2}$.



1- En appliquant le 2ème loi de Newton, exprimer l'accélération du mouvement de la luge en fonction g et α

2- Préciser la direction et le sens du vecteur vitesse $\vec{v_B}$ de la luge au point B.

Exprimer v_B en fonction de g, α et l.

3- La luge quitte la piste en B avec la vitesse $\vec{v_B}$ et tombe en chute libre sur le sol horizontal.

a- établir l'équation de la trajectoire du centre d'inertie dans le repère indiqué sur la figure. Dans cette phase du mouvement, on prend une nouvelle origine des temps $(t = 0)$ en B.

b- **On donne:** $BB' = h = 1,2m$.

Calculer la longueur l que le mobile a parcourue sur le conduit incliné, sachant qu'il touche le sol en un point C tel que: $x_c = d = 1m$.

Solution

1- Système étudié: [la luge].

bilan des forces: $\vec{P}, \vec{R}$

Selon la 2ème loi de newton:

$$\sum \vec{F}ext = m\vec{a} \ ;$$

$$\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$$

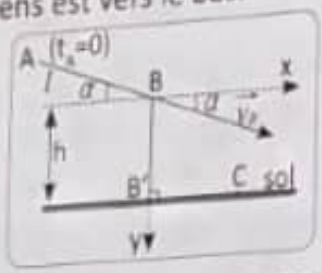
En projetant cette relation sur l'axe: $(A; \vec{i})$ confondu avec $\overrightarrow{AB}$;

$$P\sin\alpha + 0 = m.a \Longrightarrow a = g\sin\alpha$$

2- Expression de V_B:

Le vecteur $\vec{V_B}$ est tangent à la trajectoire AB, donc $\vec{V_B}$ est portée par la droite passant par les deux points A et B.

et son sens est vers le bas.



Puisque: $a = g\sin\alpha = cte$, on déduit que: $v = at + v_0 = at + v_0 = at$

$$X = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}a.\left(\frac{v}{a}\right)^2 = \frac{v^2}{2a}$$

en B: $X_B = \ell = \frac{V_B^2}{2a}$,

d'où: $V_B = \sqrt{2g\ell\sin\alpha}$

3.a- Après le point B; Selon la 2ème loi de Newton:

$$\vec{P} = m\vec{a_G} \Longrightarrow \vec{a_G} = \vec{g} \Longrightarrow \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = g \end{cases}$$

$$\vec{V}\begin{cases} V_x = cte = V_{Bx} = V_B.\cos\alpha \\ V_y = gt + V_{0y} = gt + V_B.\sin\alpha \end{cases}.$$

donc: $\begin{cases} x = V_B.\cos\alpha.t + 0 \\ y = \frac{1}{2}gt^2 + V_B\sin\alpha.t \end{cases}$

en éliminant le temps; on obtient:

$$y = \frac{g}{2V_B^2\cos^2\alpha}x^2 + \tan\alpha.x$$

3.b- Calcul de l:

Au point C on a: $x = d$ et $y = h$.

alors: $h = \frac{g}{2V_B^2\cos^2\alpha}.d^2 + d.\tan\alpha$

Puisque: $V_B = \sqrt{2g\ell\sin\alpha}$

on écrit: $h = \frac{g}{2.2g\ell\sin\alpha.\cos^2\alpha}d^2 + d\tan$

$$\frac{d^2}{4\ell\sin\alpha.\cos^2\alpha} = h - d\tan\alpha$$

$$\ell = \frac{d^2}{4(h - d\tan\alpha)\sin\alpha.\cos$$

A.N.:

$$\ell = \frac{1^2}{4(1,2 - \tan 20).\cos^2 20}$$

$$= 0,99 \simeq 1m$$

6 On étudie la trajectoire du centre d'inertie G d'un ballon de basket-ball lancé vers le cercle du panier de l'équipe adverse par un joueur attaquant.

On ne tiendra pas compte des forces exercées par l'air sur le ballon.

Le lancer est effectué vers le haut ; le ballon est lancé lorsque son centre d'inertie est en A (voir figure).



Sa vitesse initiale est représentée par un vecteur $\vec{v}_0$ situé dans un plan $(O;\vec{j};\vec{k})$ et faisant un angle α avec l'horizontale.

1- Etablir les équations horaires paramétriques du mouvement de G. En déduire l'équation de la trajectoire.

2- Calculer la valeur de la vitesse initiale v_0 du ballon pour que celui-ci passe par le centre C du cercle constituant le «panier».

3- Un défenseur BD, placé entre l'attaquant et le panneau de basket, saute verticalement pour intercepter le ballon ; l'extrémité de sa main se trouve en B à l'altitude $h_B = 3,1m$.

À quelle distance horizontale maximale de l'attaquant doit-il se trouver pour toucher le ballon du bout des doigts.

Solution

1- Equations horaires - Equation de la trajectoire:

Conditions initiales: à $t = 0$ on a:

$$A\begin{cases} y_0 = 0 \\ z_0 = h_A = 2,4m \end{cases};$$

$$\vec{v}_0 = \begin{cases} v_{0y} = v_0 \cos\alpha \\ v_{0z} = v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

système étudié (le ballon)

Bilan des forces: $\vec{P}$.

$\vec{P}$. On applique la 2ème loi de Newton.

$$\vec{P} = m\vec{a}_G \Leftrightarrow m.\vec{g} = m.\vec{a}_G$$
$$\Leftrightarrow \vec{a}_G = \vec{g}$$

Dans le repère $(O;\vec{j};\vec{k})$.

$$\begin{cases} a_y = 0 \\ a_z = -g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dv_y}{dt} = 0 \\ \dfrac{dv_z}{dt} = -g \end{cases}$$

Par intégration:

$$\begin{cases} v_y = v_{0y} \\ v_z = -gt + v_{0z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = v_{0y} \\ \dfrac{dg}{dt} = -gt + v_{0z} \end{cases}$$

Par intégration:

$$\begin{cases} y = v_{0y}t + y_0 \\ z = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t + z_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = v_0.\cos\alpha\, t \\ z = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_0\sin\alpha\, t + h_A \end{cases}$$

→ Equation de la trajectoire, on élimine le temps $t = \dfrac{y}{v_0\cos\alpha}$.

on remplace dans z.

$$z = -\frac{1}{2}g\left(\frac{y}{v_0\cos\alpha}\right)^2 + v_0\sin\alpha\frac{y}{v_0\cos\alpha} + h_A$$

$$z = \frac{-g}{2v_0^2\cos^2\alpha}y^2 + tg\alpha y + h_A$$

$$z = \frac{-9,8}{2v_0^2\cos^2\alpha}y^2 + tg40.y + 2,4$$

$$z = \frac{-8,39}{v_0^2}y^2 + 0,83y + 2,4$$

2- Calcul de v_0:

Le ballon passe par le point C de coordonnées: $y_c = 6,2m$ et $z = 3m$

Donc:

$$z = \frac{-8,39}{v_0^2}y_c^2 + 0,83y_c + 2,4$$

$$z = 3 = \frac{-8,39}{v_0^2}(6,2)^2 + 0,83(6,2) + 2,4$$

On trouve: $v_0 = 8,42m/s$

3- Calcul de: $d_{max} = y_D$

Le defenseur est à: $\begin{cases} y_D = ? \\ z_D = 3,1m \end{cases}$

On remplace dans l'équation de la trajectoire on trouve:

$$z_D = 3,1 = \frac{-8,39}{(8,42)^2}.y_D^2 + 0,83y_D + 2,4$$

Alors: $0,11y_D^2 - 0,83y_D - 0,7 = 0$

La résolution de l'équation donne:

$$y_{D_1} = 6,57m > 6,2m$$

$$y_{D_2} = 0,96m$$

donc la position du défenseur est: $y_D = 0,96m$.

7 Un champion de saut à ski, assimilable à un corps ponctuel, s'élance sur un tremplin de saut à ski. Au moment d'aborder le saut, sa vitesse v_0 est égale à $25m.s^{-1}$. bas de la piste est en outre incliné vers le haut d'un angle α égal à $10°$.

Le skieur quitte la piste au point P.

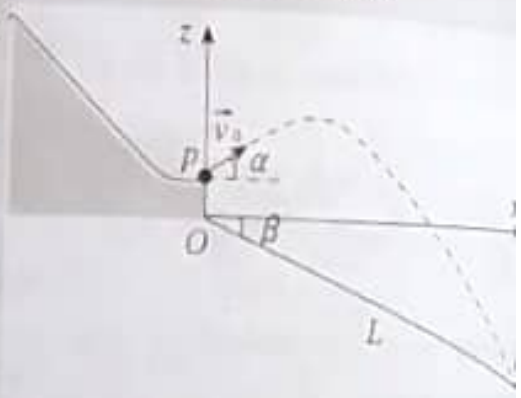
On associe au référentiel terrestre le repère $(O;\vec{i};\vec{k})$ le point P se situe à 6m la verticale du point O. La piste de réception fait un angle $\beta = 50°$ vers le bas p rapport à l'axe horizontale Ox.

1- Quelle est la nature du mouvement du skieur? représenter sa trajectoire.

2- Etablir les équations horaires de sa trajectoire dans l'air, puis donner l'expression de l'équation cartésienne de sa trajectoire.

3- Quelle est l'équation de la droite représentant la piste de réception?

4- Le skieur se réceptionne au point R. Quelles sont les coordonnées de ce point ? quelleestlalongueurdu L dusaut $(L = OR)$.



Solution

1- Nature du mouvement:

Le mouvement du skieur se fait dans un plan vertical $(x;o;z)$.

suivant l'axe horizontal (OX) est rectiligne uniforme.

suivant l'axe vertical (OZ) est rectiligne uniformément varié.

2- Les équations horaires:

Système étudié: {skieur}

Bilan des forces: $\vec{P}$

Selon la 2ème loi de Newton:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G \Leftrightarrow \vec{P} = m\vec{a}_G$$
$$\Leftrightarrow m\vec{g} = m\vec{a}_G$$
$$\Leftrightarrow \vec{g} = \vec{a}$$

Dans le repère $(O;x;Z)$:

$$a\begin{cases} a_x = 0 \\ a_z = -g \end{cases} ; \begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = 0 \\ \frac{dv_z}{dt} = -g \end{cases}$$

Par double intégration, on trouve:

$$\begin{cases} v_x = v_{ox} = v_o \cos\alpha \\ v_z = -gt + v_{oz} = -gt + v_o \sin\alpha \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = v_o \cos\alpha . t \\ Z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_o \sin\alpha . t + z_o \end{cases}$$

• L'équation de la trajectoire:

On a: $t = \frac{x}{v_o \cos\alpha}$

On remplace en Z:

$$Z = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_o \cos\alpha}\right)^2 + v_o \sin\alpha\left(\frac{x}{v_o \cos\alpha}\right) + z_o$$
$$Z = \left(\frac{-g}{2v_o^2 \cos^2\alpha}\right)x^2 + (tg\alpha)x + z_o$$
$$Z = \left(\frac{-9,8}{2,25^2 \cos^2 10}\right)x^2 (tg10)x + 6$$
$$= -8,0810^{-3}x^2 + 0,17x + 6$$

3- L'équation de la droite (piste de réception).

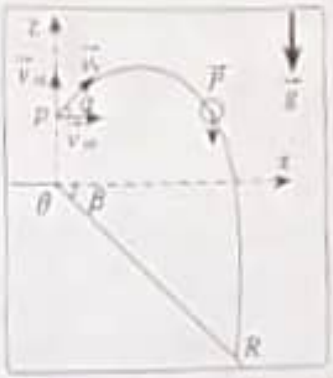
On a: $tg(\beta) = \frac{|Z|}{|x|}$

$$\Rightarrow |Z| = |x| tg(\beta)$$
$$\Rightarrow -Z = x tg(\beta)$$

Donc: $Z = -x.tg(\beta)$

4- coordonnées de R:

Au point R $\begin{cases} x_R = ? \\ z_R = ? \end{cases}$



Il y a intersection entre l'équation de la trajectoire et l'équation de la droite de la piste.

$$Z_R = -x_R.tg(\beta) = -1,19x_R$$
$$Z_R = -8,08.10^{-3}x_R^2 + 0,17x_R + 6$$

D'où: $-1,19x_R = -8,08.10^{-3}x_R^2 + 0,17x_R + 6$

$$8,08.10^{-3}x_R^2 - 1,36x - 6 = 0$$

La résolution de cette équation donne deux solutions:

• $x_R = -4,3m < 0$ (non solution)

• $x_R = 172,6m$.

D'où: $z = -1,19 \times 172,6 = -205,7m$

• La valeur de L

On a au point R: $\cos(\beta) = \frac{x_R}{L}$

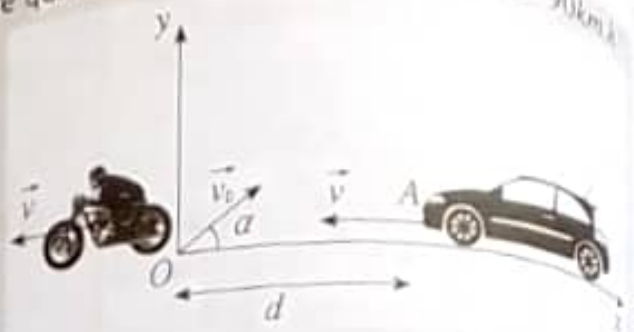
$$\Rightarrow L = \frac{x_R}{\cos(\beta)}$$
$$\Rightarrow L = \frac{172,6}{\cos(50)}$$
$$\Rightarrow L = 268,53m$$

6 Un gravier est projeté par le pneu arrière d'une moto qui roule sur une route horizontale, à la vitesse constante $v = 72km.h^{-1}$ par rapport au référentiel terrestre. Le gravier part avec une vitesse de valeur $v_0 = 20m.s^{-1}$ par rapport au même référentiel, dans une direction qui fait un angle $\alpha = 15°$ par rapport à l'horizontale.

On appelle O le point de départ du gravier, le repère $(\vec{Ox};\vec{Oy})$ est lié au référentiel

La moto est suivie par une voiture qui roule à la vitesse constante $V = 90km/h$

L'avant de la voiture se trouve à la distance d du point O à l'instant où le gravier quitte le point O.



1- Etablir les équations horaires paramétriques $x(t)$ et $y(t)$ du centre d'inertie du gravier, par rapport au référentiel terrestre.

2- Etablir les équations horaires paramétriques $x_A(t)$ et $y_A(t)$ d'un point A situé à l'avant de la voiture, par rapport au référentiel terrestre (on considérera que le point A se trouve pratiquement au niveau du sol.

3- Calculer la valeur minimale de d pour que le gravier retombre sur le sol avant d'atteindre la voiture.

Donnée: • Valeur du champ pesanteur: $g = 9,8m.s^{-2}$.

Solution

1- Equations horaires $x(t)$ et $y(t)$

Conditions initiales:

$$0\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases} ; \vec{v_0}\begin{cases} v_{0x} = v_0\cos\alpha \\ v_{0y} = v_0\sin\alpha \end{cases}$$

Système étudié (le gravier).

Bilan des forces: $\vec{P}$

Selon la 2ème loi de Newton:

$$\sum \vec{F}ext = m\vec{a}_G$$

$$\vec{P} = m\vec{a}_G \Rightarrow \vec{a}_G = \vec{g}$$

Dans le repère (xoy) on écrit:

$$\begin{cases} ax = 0 \\ ay = -g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = 0 \\ \frac{dv_y}{dt} = -g \end{cases}$$

Par double intégration:

$$\begin{cases} v_x = v_{0x} = v_0\cos(\alpha) \\ v_y = gt + v_{0y} = gt + v_0\sin\alpha \end{cases}$$

et $\begin{cases} x = v_0\cos(\alpha)t + x' = v_0\cos(\alpha)t \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin(\alpha)t + y' \end{cases}$

2- L' équation horaire du mouvement de voiture.

La vitesse de la voiture est constante donc son mouvement est rectiligne uniforme: suivant l'axe (ox).

$x_A(t) = v_x.t + x_0$ avec $v_x = -v$

le sens du mouvement opposé à $\vec{ox}$:

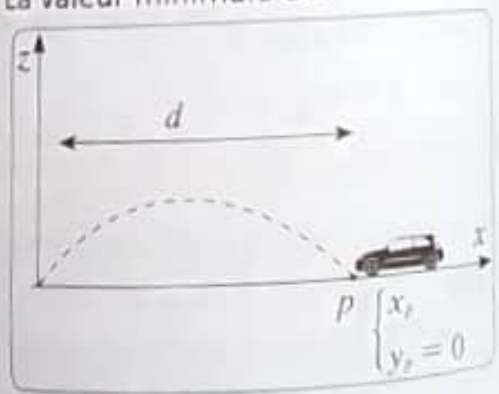
$x_A(t) = -v.t + x_0$.

Avec: $v = 90km/h = 25m/s$;

d'où: $x_0 = d$.

$x_{(A)}(t) = -25t + d$

3- La valeur minimale de:



au moment où le gravier

On a: $y_p(t) = 0$

$$\frac{-1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha t = 0$$

$$t(-4,9t + 6,47) = 0$$

- $t_1 = 0$ (correspond au point O).
- $t_2 = \frac{6,47}{4,9} = 1,32s$
- Pour que le gravier n'intercepte pas la voiture, il faut que:

$$x_v \geq 0 \quad x_v(t_2) \geq x(t_2)$$

donc: $-25t_2 + d \geq v_0 \cos \alpha t_2$

$$d \geq (v_0 \cos \alpha + 25)t_2$$

$$d \geq (20 \cos 15 + 25)1,32$$

$$d \geq 58,5m$$

d'où: $d_{min} = 58,5m$

On se propose d'étudier le mouvement du centre d'inertie d'un plongeur au cours d'un saut modélisé type «saut de l'ange». On négligera dans tout l'exercice le mouvement de la rotation du plongeur autour de son centre d'inertie ainsi que les frottements avec l'air. Le repère d'étude xOy est défini à partir du schéma ci-dessous.



Après s'être lancé, le plongeur quitte le tremplin à l'instant $t = 0$ avec un vecteur vitesse $\vec{v}_0$ incliné de $\alpha = 40°$ par rapport à l'horizontale. Son centre d'inertie est alors au point G_0 de coordonnées $x_0 = 0$ et $y_0 = 6,0m$.

1- Établir l'équation littérale de la trajectoire du plongeur en fonction des données.

2- Le sommet de la trajectoire étant atteint au point F d'abscisse $x_F = 1,0m$, en déduire la vitesse initiale v_0.

3- La plongeur pénètre dans l'eau en H. Détérminer la valeur de t_H et v_H.

Donnée: $g = 9,8m.s^{-2}$.

Solution

1- Equations horaires:

Système étudié: [plongeur];

bilan des forces: $\vec{p}$.

Selon la 2ème loi de Newton:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$$

$$\vec{p} = m\vec{a}$$

donc: $\vec{a} = \vec{g}$

Sur les axes Ox et Oy, on obtient:

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

L'intégration des deux équations précédentes donne:

$$\begin{cases} V_x = V_0 \cos\alpha \\ V_y = -gt + V_0 \sin\alpha \end{cases}$$

ensuite, $x = (V_0 \cos\alpha)t$

et: $y = -\frac{1}{2}gt^2 + (V_0 \sin\alpha)t + y_0$

L'équation de la trajectoire du centre d'inertie s'écrit alors:

$$y = -\frac{g}{2V_0^2 \cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha + y_0$$

C'est l'équation d'une parabole.

2- Valeur de V_0:

Au sommet de la trajectoire on a $(V_y)_S = 0$

c'est-à-dire: $t_S = \frac{V_0 \sin\alpha}{g}$

On déduit alors: $x_S = \frac{V_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g}$

donc: $V_0^2 = \frac{2x_S g}{\sin 2\alpha} \Rightarrow V_0 = \sqrt{\frac{2x_S g}{\sin 2x}}$

A.N.: $V_0 = \sqrt{\frac{2.1,9.8}{\sin 80}} = 4,46m/s$

3- valeur de t_H

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\alpha . t + y_0$$

$$y = -4,9t^2 + 2,867t + 6$$

$$y_H = -4,9t^2 + 2,867t + 6 = 0$$

La résolution de cette équation est donc:

$$\Delta = 125,82$$

$$t = \frac{-2,867 \pm \sqrt{\Delta}}{-9,8} = 1,44s$$

• Valeur de v_H

$$v_y = -gt_H + v_0 \sin\alpha$$

$$v_y = -9,8.1,44 + 4,46.\sin 40 = -11,24_m$$

$$v_H = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

avec $v_x = v_0 \cos\alpha = 3,416m.s^{-1}$

et $y_H = -11,24m.s^{-1}$

on obtient $v_H = 11,74m.s^{-1}$

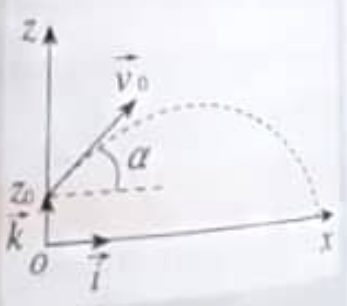
10 Au tennis, un lob est réussi lorsque la balle passe au-dessus de l'adversaire et retombe avant la ligne de fond de court. Le joueur 1, situé à $d_1 = 2,0m$ du filet, tape la balle à une hauteur $z_0 = 0,30m$ et lui communiquer une vitesse $\vec{v}_0$ contenue dans un plan vertical, de valeur $v_0 = 36km.h^{-1}$ et formant un angle $\alpha = 60°$ avec l'horizontale. On négligera les forces de frottement.

1- Déterminer les équations horaires du centre d'inertie G de la balle dans le repère $(O;\vec{i};\vec{k})$ représenté sur la figure (la balle est frappée à la date $t = 0$).

2- En déduire l'équation de la trajectoire de la balle.

3- La balle passe-t-elle au-dessus du filet?

4- Le joueur 2 est de l'autre coté du filet. Il tend sa requette verticalement pour essayer de toucher la balle. le tamis de sa raquette est alors situé à une hauteur $h = 2,30m$. A quelle distance minimale du filet le joueur 2 doit-il se placer pour intercepter la balle?



5- Le joueur 2 se trouve à une distance $d_2 = 4,0m$ du filet.

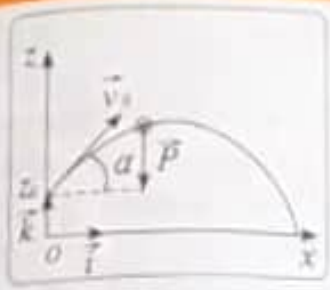
Peut-il intercepter la balle?

le lob est-il réussi?

6- Caractériser le vecteur vitesse $\vec{v}$ de la balle lors de son impact sur le sol.

Données: $g = 9,8m.s^{-2}$ la hauteur du filet h vaut $1,0m$. La ligne de fond de court est située à 12,0m du filet.

Solution



1- Equations horaires:

Référentiel terrestre galiléen $(o,\vec{i},\vec{a})$.

- Système étudié: la balle.

- Bilan des forces est:

$\vec{p}=m.\vec{g}=-m.g.\vec{k}(\vec{g}$ uniforme).

- Repère orthonormé: $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

- Appliquons de la deuxième loi de Newton: $\vec{P}=m.\vec{g}=m.\vec{a}_G$

Soit: $\vec{a}_G=\vec{g}$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{k})$ par intégration on obtient:

$a_x=0$	$a_z=-g$
$V_x=cte$ $V_{0x}=v_0.\cos\alpha$ donc: $V_x=v_0.\cos\alpha$	$V_z=-g.t+cte$ $V_{0z}=v_0.\sin\alpha$ donc: $V_z=-g.t+v_0.\sin\alpha$
$x(t)=v_0.\cos\alpha.t+cte$ $x(0)=0$ donc: $x(t)=v_0\cos\alpha.t$	$z(t)=-\frac{1}{2}.g.t^2+v_0.\sin\alpha.t+cte$ $z(0)=z_0$ donc $z(t)=-\frac{1}{2}.g.t^2+v_0.\sin\alpha.t+z_0$

Le mouvement du centre d'inertie du projectile s'effectue donc dans le plan vertical $(O,\vec{i},\vec{k})$.

On obtient les équations horaires paramétriques.

$$x(t)=v_0.\cos\alpha.t$$

et: $z(t)=-\frac{1}{2}.g.t^2+v_0.\sin\alpha.t+z_0$

2- Equation de la trajectoire:

L'équation $x=v_0.\cos\alpha.t$ donne:

$$t=\frac{x}{V_0.\cos\alpha}$$

En reportant dans z on obtient:

$$z=-\frac{1}{2}.\frac{g}{v_0^2.\cos^2\alpha}x^2+\tan\alpha.x+z_0$$

3- Etat de la balle:

Calculons la valeur de z pour un point d'abscisse $x=2,0m$ à l'aide de l'équation de la trajectoire: $z=3,0m>1,0m$, donc la balle passe au-dessus du filet.

4- Distance minimale:

Pour que le joueur puisse intercepter la balle, la valeur de z doit être inférieure à $h=2,30m$ pour une abscisse x_1 correspondant à la position du joueur 2.

x_1 est solution de l'équation du second degré.

$$h=-\frac{1}{2}.\frac{g}{v_0^2.\cos^2\alpha}x_1^2+\tan\alpha.x_1+z_0$$

On obtient deux solutions $x'_1=1,4m$ et $x'_2==7,5m$. La solution $x'_1<2,0m$ ne convient pas. Le joueur 2 doit se trouver à une distance minimale de 5,5m du filet pour pouvoir intercepter la balle.

5- État du joueur:

Le joueur, trop proche du filet, ne peut pas intercepter la balle.

Le lob est réussi si la balle rencontre le sol en un point d'abscisse x_2, situé avant la ligne de fond de court, c'est-à-dire si pour $z=0$, $x<14,0m$. x_2 est solution de l'équation:

$$-\frac{1}{2}\frac{g}{V_0^2\cos^2\alpha}x_2^2+\tan\alpha.x_2+z_0=0$$

On obtient comme solution:

$x_0 = 9m < 14m$ donc le lob est réussi.

6- Coordonnées de $\vec{V}$:

On a: $\vec{V}_0 \begin{cases} V_x = V_0 \cos\alpha \\ V_y = gt + V_0 \sin\alpha \end{cases}$

et: $x = V_0 \cos\alpha . t \Rightarrow t = \dfrac{x}{V_0 \cos\alpha}$

donc: $\vec{V}_0 \begin{cases} V_x = V_0 \cos\alpha \\ V_y = -\dfrac{g.x}{V_0 \cos\alpha} + V_0 \sin\alpha \end{cases}$

A.N.: $V_x = 5m/s$ et $V_y = -9m/s$

L'angle β que forme le vecteur $\vec{V}$ avec le sol est: $\tan\beta = \dfrac{|V_y|}{V_x} = 1,8 \; ; \; \beta = 61°$

(BAC PC Juin 2008)

Étude du mouvement d'un corps solide dans un champ de pesanteur.

Les hélicoptères sont utilisés dans certain cas pour transporter les aides humanitaires à des régions isolées difficiles à atteindre en voiture.

L'hélicoptère vole à une hauteur constante H de la surface de la terre avec une vitesse horizontale $\vec{V}_0$ constante.

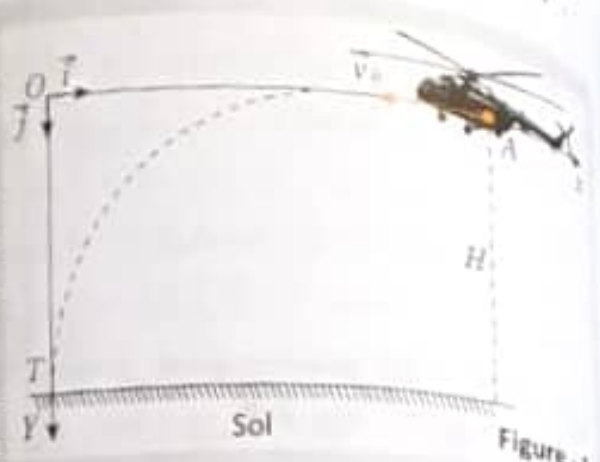


Figure -1

L'hélicoptère fait tomber une boîte de produits alimentaires de centre d'inertie G_0.

La boîte entre en collision avec la surface de la terre au point T (figure 1).

On étudie le mouvement de G_0 dans un repère orthonormé $R(O;\vec{i};\vec{j})$ lié à la terre et que l'on considère galiléen.

On donne $g = 10m.s^{-2}$ et $H = 405m$

On néglige les dimensions de la boîte.

Partie-I: Etude de la chute libre.

On néglige la force de l'air sur la boîte.

La boîte tombe à l'instant $t = 0$ à partir du point $A(X_A = 450m \; ; \; y_A = 0)$ avec une vitesse horizontale $\vec{V}_0$ de valeur $V_0 = 50m/s$.

1-1- En appliquant le 2ème loi de Newton, Trouvez les deux équations horaires $x(t)$ et $y(t)$ du mouvement de G_0 dans le repère $R(O;\vec{i};\vec{j})$.

1-2- Préciser l'instant du choc la boîte avec la surface de la terre.

1-3- Trouver l'équation de la trajectoire du mouvement de G_0.

2- Partie-2 ; Etude de la chute avec frottement

Pour que les produits alimentaires se conservent lors du choc avec le sol, on attache une parachute au boîtier qui lui permet de descendre lentement. L'hélicoptère est immobile à la même hauteur H au point O. Le boîtier tombe verticalement sans vitesse initiale à l'instant $t = 0$.

L'air applique une force de frottement exprimé par la relation $\vec{f} = 100\vec{v}$ avec $\vec{v}$ vecteur vitese de la boite à l'instant t.

On néglige la poussée d'Archimède durant la chute.

On donne la masse de la boite: $m = 150kg$.

2.1- Trouver l'équation dans le repère $R(O;\vec{i};\vec{j})$ de la vitesse G_1 champ de pesanteur.

2.2- La figure 2 présente la variation de la vitesse de G_1 en fonction du temps, déterminer la vitesse limite v_s ainsi que le temps caractéristique τ de la chute.

2.3- Donner la valeur de la durée approximative du régime transitoire.

2.4- A l'aide de la méthode d'Euler et le tableau, déterminer la valeur de v_4 et a_4.

$t_i(s)$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
$v_i(m/s)$	0	1,00	1,93	2,80	v_4	4,37	5,08
$a_i(m/s)$	10	9,33	8,71	8,12	a_4	7,07	6,60

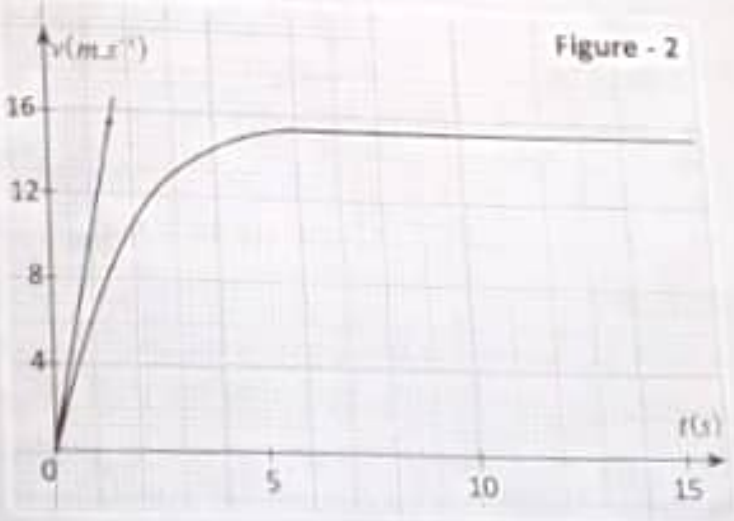


Figure - 2

Solution

Partie-I:

1.1- Equations horaires:

système étudie (boitier)

bilan des forces: $\vec{P}$

Selon la 2ème loi de Newton:

$$\sum \vec{F}ext = m\vec{a}_G$$

donc: $\vec{P} = m\vec{a}_G ; \vec{a}_G = \vec{g}$

dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$:

$$\begin{cases} ax = o \\ ay = g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = c^{te} = v_{ox} \\ v_y = g.t + v_{oy} \end{cases}$$

Or à $t = 0$ $\begin{cases} v_{ox} = -v_o \\ v_{oy} = o \end{cases}$ et $\begin{cases} x_o = x_A \\ y_o = y_A = o \end{cases}$

donc: $\begin{matrix} v_x = -v_o \\ v_y = gt \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -v_o t + x_o \\ y = \frac{1}{2}gt^2 + y_o \end{cases}$

d'où: $\begin{cases} x = -50t + 450 \\ y = 5t^2 \end{cases}$

1.2- Instant du choc:

Lors du choc de la boîtier avec le sol.

on a: $x_f = 0$ et $y_f = H$.

donc: $x_f = 0 = -50t + 450$

$$t = \frac{450}{50} = 9s$$

1.3- Equation de la trajectoire:

on a: $x = -50t + 450$

donc: $t = \frac{450 - x}{50}$

on remplace dans y:

d'où: $y = 5\left(\frac{450 - x}{50}\right)^2$

$$y = \frac{x^2}{500} - 1,8x + 405$$

Partie-II:

2.1- Equation différentielle:

bilan des forces: $\vec{P}$ et $\vec{f}$.

(La poussée d'archimède est negligée)

Selon la 2ème loi de Newton:

$$\sum \vec{Fext} = m\vec{a}_G \; ; \; \vec{P} + \vec{f} = m\vec{a}_G$$

Suivant l'axe $\vec{oy}$.

$$Py + fy = m.ay$$

$$mg - 100v = m\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v$$

avec: $g = 10$ et $\frac{k}{m} = \frac{2}{3}$

donc: $\frac{dv}{dt} = 10 - \frac{2}{3}v$

2.2- Vitesse limite v_l et τ:

Graphiquement on trouve:

$v_l = 15m.s^{-1}$ et $\tau = 1,5s$

2.3- Durée du régime transitoire:

Le régime transitoire prend fin lorsque la vitesse devient constante.

alors on trouve: $\Delta t = 6,5s$

2.4- Valeurs de a_4 et v_4

D'après la méthode d'Euler

on a: $v_4 = v_3 + a_3.\Delta t$

avec: $v_4 = 2,80 + 8,12.0,1$

$$v_4 = 3,16m/s$$

et d'après l'équation différentielle.

on a: $a_4 = 10 - \frac{2}{3}v_4$

$$a_4 = 10 - \frac{2}{3}.3,16$$

$$a_4 = 7,6m.s^{-2}$$

12 **BAC S.V.T Juin 2014**

1- L'étape du glissement du joueur sur une piste rectiligne.

Le joueur masse m et de centre d'inertie G à l'instant $t_0 = o$ part du point A sans vitesse initiale.Au cours de son mouvement on considère que le joueur est soumis aux forces de frottements modelisées par une force constante de module f et de sens opposé au sens du mouvement.

Pour étudier le mouvement de G on choisit le repère $(A;\vec{i})$ relié à la terre tel que $x_0 = x_A = 0$ à $t_0 = o$

Données:

La trajectoire du mouvement de G est rectiligne.

$g = 10ms^{-2}$; $m = 80kg$; $\alpha = 35°$; $f = 45N$; $AB = 100m$.

1.1- Montrer que l'expression du module du vecteur accélération est:

$$a_0 = g\sin\alpha - \frac{f}{m}$$

Calculer a_0.

1.2- Ecrire l'équation horaire $x_0(t)$ de G.

2- L'étape du saut dans l'air:

Le joueur passe par un endroit concave pour sauter dans l'air au point C avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ faisant un angle α avec l'horizontale.

Pour étudier le mouvement de G dans le champ de pesanteur on choisit un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, l'instant du passage de G par C comme origine du temps $t_0 = 0$.

Données:

Les forces du frottements sont négligeables:

$$g = 10ms^{-2} \; ; \; OC = H = 86m \; ; \; v_0 = 25m/s \; ; \; \alpha = 11°.$$

2.1- En appliquant la 2ème loi de Newton, trouver l'expression des équations horaires $x_G(t)$ et $y_G(t)$ au mouvement de G.

2.2- On considère le saut comme réussi si le joueur dépasse à son arrivée le point K d'abscisse $x_K = 90m$. Le joueur tombe sur la glace à l'instant $t_1 = 4s$ à une position où l'abscisse de G est x_G.

a- Calculer v_G la vitesse de G à la pente.

b- Vérifier si le saut du joueur est réussi.

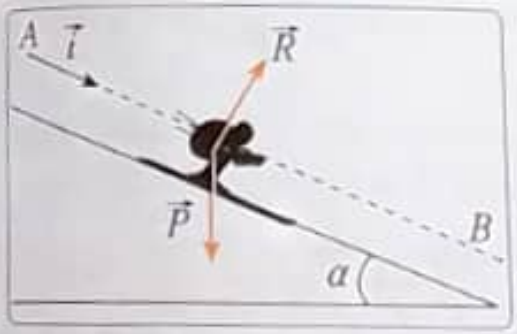


Solution

1.1- Expression de a_G:

système étudié (joueur)

Bilan des forces: $\vec{P}$ et $\vec{R}$



Selon la 2ème loi de Newton:

$$\sum \vec{Fext} = m\vec{a}_G \; ; \; \vec{P} + \vec{R} = ma_G$$

Suivant l'axe $(A\vec{i})$:

$$+mg\sin\alpha_0 - f = ma_G$$

donc: $a_G = g\sin\alpha_0 - \dfrac{f}{m}$

A.N.: $a_G = 10\sin 35 - \dfrac{45}{80} \simeq 5,2m/s^2$

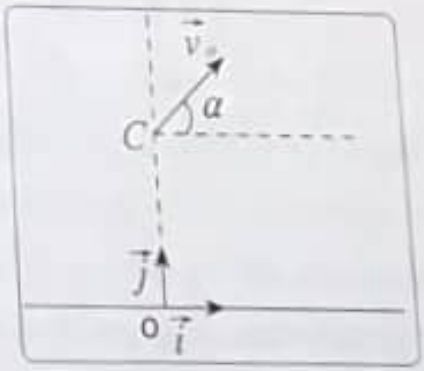
1.2- Equation horaire $x(t)$.

Le mouvement de G est rectiligne uniformément varié.

donc: $x = \dfrac{1}{2}a_G t^2 + v_0 t + x_0$

donc: $x = 2,6t^2$

2.1- Les équations horaires:



Conditions initiales $t=0$.

$C\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = H \end{cases}$; $\vec{v}_0 \begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos\alpha \\ v_{0y} = v_0 \sin\alpha \end{cases}$

Bilan des forces: $\vec{P}$.

Selon la 2ème loi de Newton:

$$\sum \vec{F}ext = m\vec{a}G$$

$$\vec{P} = m\vec{a}_G \Rightarrow \vec{a}_G = \vec{g}$$

Dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ on trouve:

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha \\ v_y = -gt + v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

donc par intégration on trouve.

$$x = v_0 \cos\alpha . t$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\alpha).t + H$$

2.2.a- Calcul de v_0 au point de saut:

on a: $t = 4s$

$v_x = 25\cos 11° \simeq 24,5 m/s$

$v_y = -5(4)^2 + 25\sin m.4 + 86 \simeq 25 m/s$

donc: $v_0 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

A.N.: $v_0 = \sqrt{24,5^2 + 25^2} \simeq 35 m/s$

b- Le saut est réussi:

à la portée on a: $x_0 = v_0 \cos\alpha . t$

$= 25\cos(11).4$

$x_0 = 98,16m > x_1$

donc le joueur a réussi le saut.

(BAC SVT Juin 2015)

La chute libre des corps solides dans le champ de pesanteur uniforme forme un type de mouvements de trajectoire dépendant des conditions initiales.

L'étude de ces mouvements nous a permis de déterminer quelques grandeurs caractéristiques et les relier à des applications dans la vie courante.

Cet exercice a pour but d'étudier le mouvement d'une chute libre d'une bille (S) pour des directions différentes du vecteur vitesse initiale.

Données: - les frottements sont négligeables

- $g = 10 m.s^{-2}$

I- Mouvement de chute libre verticale de la bille. On étudie le mouvement de G centre d'inertie de la bille (S) de masse m dans le repère $(O;\vec{j})$ lié à la terre. On le considère galiléen.

On envoie à l'instant $t = 0$ la bille (S) verticalement vers le haut avec une vitesse initiale $v_0 = 5ms^{-1}$ sachant que G est à la position O d'abscisse $y_0 = 0$ (figure-1).



Figure - 1

1.1- En appliquant la deuxième loi de Newton, vérifier que l'équation différentielle vérifiée par y ordonné G est $\frac{d^2y}{dt^2} = -g$

2.1- Trouvez l'équation de la vitesse $v_0(t)$.

3.1- Déterminez la valeur de l'ordonnée de la position la plus haute de G.

II- Mouvement de chute libre d'une bille dans un plan vertical

On tire de nouveau de la position O la bille (S) précédente avec une vitesse initiale

de vecteur $\vec{v}_0$ faisant une angle α avec la ligne horizontale. On étudie le mouvement de G centre d'inertie de la bille (S) dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ lié à la terre. On le considère galiléen (figure-2).

2.1- En appliquant la 2ème loi de Newton, trouvez les expressions littérales des équations horaires $x(t)$ et $y(t)$ du mouvement de G.

2.2- Montrez que l'abscisse de la portée s'écrit: $x_p = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$

2.3- En utilisant un outil informatique, on obtient le document (fig-3) qui représente des trajectoires du mouvement de G par rapport à la même vitesse initiale v_0 et des angles de tir différentes $\alpha_0 = 45°$; α_1 ; α_2.

2.3.1.a- Déterminer la valeur de la portée correspondant à l'angle de tir.

Déduire la valeur de v_0.

b- Déterminez la valeur de α_1, déduisez la valeur de l'angle α_2 sachant que $\alpha_1 + \alpha_2 = 90°$ et $\alpha_2 > \alpha_1$.

2.3- Au sommet de la trajectoire, la vitesse a pour valeur v_1 pour l'angle de tir α_1 et la valeur v_2 pour l'angle de tire α_2.

Copie la bonne réponse dans ta feuille la relation entre v_1 et v_2

A	$v_1 = 3,2v_2$	B	$v_1 = 1,6v_2$	C	$v_1 = 0,8v_2$	D	$v_1 = 0,4v_2$

Figure - 2

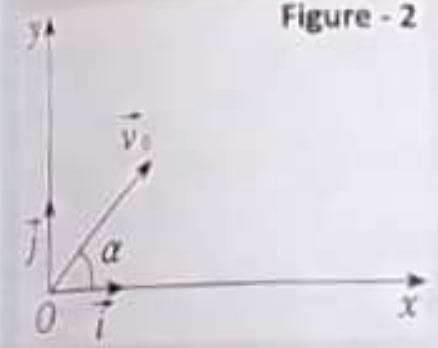
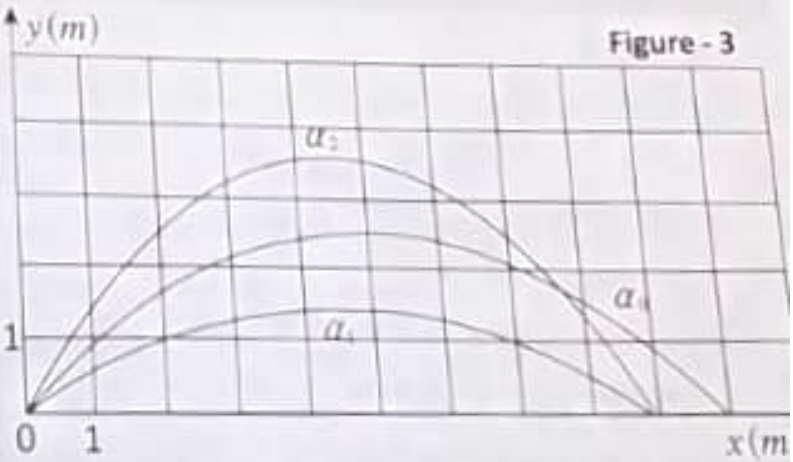


Figure - 3



Solution

I-

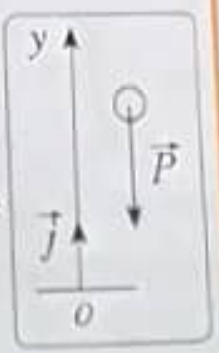
1.1- Equation différentielle:

système étudié {bille}

bilan des forces: $\vec{P}$

On applique la 2ème loi de Newton:

$$\sum \vec{F_{ext}} = m\vec{a}_G ;$$



$$\vec{P} = m\vec{a}$$

Suivant l'axe $(\overrightarrow{oy})$: $-mg = ma_G$

et on a: $a_G = \frac{d^2y}{dt^2}$

donc: $\frac{d^2y}{dt^2} = -g$

2.1- Expression de $v(t)$.

On a: $a_y = \frac{dv_y}{dt} = -g$

Par intégration on a:

$v_y = -gt + v_{oy}$

donc: $v_y(t) = -gt + v_{oy}$

3.1- Valeur de y_{max}.

On a: $\frac{dy}{dt} = v_y = -gt$

donc: $y(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_{oy}t$

y sera maximal si $v_y = 0$

donc: $-10t + 5 = 0 \Rightarrow t = 0,5s$

donc: $y_{max} = -5t^2 + 5t$

$= -5(0,5)^2 + 5.0,5$

$y_{max} = 1,25m$

II-



2.1- Equations horaires:

système étudie: {la bille} bilan des forces: $\vec{p}$.

2ème loi de Newton: $\sum \vec{Fext} = m\vec{a}_G$

$\vec{p} = m\vec{a}_G$; $\vec{a}_G = \vec{g}$

Donc le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ on a:

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = v_{ox} \\ v_y = -gt + v_{oy} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = v_{ox}t + x_o \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{oy}t + y_o \end{cases}$$

Les conditions initiales $t = o$ sont:

$$o\begin{cases} x_o = o \\ y_o = o \end{cases} \text{ et } \vec{v}_o \begin{cases} v_{ox} = v_o\cos\alpha \\ v_{oy} = v_o\sin\alpha \end{cases}$$

donc: $\begin{cases} x = v_o\cos\alpha\, t \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_o\sin\alpha)t \end{cases}$

2.2- L'abscisse x_p:

à la portée on a $y_p = 0$

L'équation de la trajectoire s'écrit:

$$t = \frac{x}{v_o\cos\alpha}$$

donc: $y = \left(-\frac{g}{2v_o^2\cos^2\alpha}\right)x^2 + \tan\alpha_x$

donc: $y_p = 0$ pour:

- $x_p = o$ le point de départ o.

ou:

- $\frac{-g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x_p + \tan\alpha = 0$

donc: $x_p = \tan\alpha.\frac{2v_0^2\cos^2\alpha}{g}$

alors: $x_p = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}$

3.2.1

a- valeur de x_p et de v_0.

graphiquement on trouve: $x_p = 10m$

donc: $v_o = \sqrt{\frac{x_p.g}{\sin 2\alpha o}}$

$$v_o = \sqrt{\frac{10.10}{\sin 90}} = 10m/s$$

b- Valeur de α_1 et de α_2 de la figure-3

a: $x_m = 9m$

donc: $\sin 2\alpha_1 = \frac{x_{p1}.g}{v_0^2}$

$$\sin 2\alpha_1 = \frac{9.10}{10^2} = 0,9$$

$$\alpha_1 = 32°$$

Or on a: $\alpha_1 + \alpha_2 = 45°$

$$\alpha_2 = 45° - 32° = 13°$$

3.2.2- La bonne réponse:

au sommet de la trajectoire on a:

$$v = v_x = v_o\cos\alpha$$

donc: $v_1 = v_o\cos\alpha_1$

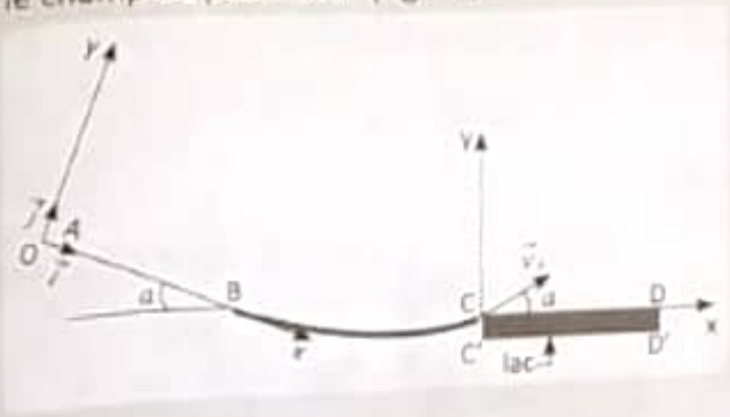
$$v_2 = v_o\cos\alpha_2$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2} = 0,87$$

donc: $v_1 = 0,8v_2$

La bonne réponse est C.

14 Pendant ses entraînements, un skieur s'exerce sur une piste ABC afin d'effec
uer un saut dans le champ de pesanteur (figure).



Données:

- AB : rectiligne faisant un angle $\alpha = 20°$ avec l'horizontale.
- Le lac d'eau de largeur $L = CD = C'D' = 15m$.
- Masse du skieur $m = 80kg$; $g = 9,8m.s^{-2}$
- Les frottements sur la partie AB sont équivalents à une face $\vec{f}$ constante opposée
au sens mouvement du skieur et d'intensité $f = 108N$.

1- Le mouvement du skieur commence à la date $t = 0$, sans vitesse initiale à parti
du point A, confondu avec l'origine O des abscisses dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On assimile le skieur à un point matériel.
Au point B, la vitesse du skieur est $V_B = 20,0m.s^{-1}$.

1.1- En appliquant la deuxième loi de Newton, exprimer l'accélération a du mouve
ment en fonction de m, g, α et f.
Vérifier que: $a = 2m.s^{-2}$

1.2- Calculer la distance AB.

1.3- Déterminer l'intensité de la force $\vec{R}$ exercée par le plan AB sur le skieur.

2- Etape du saut:
A un instant prise comme nouvelle origine des dates $(t = 0)$, le skieur passe par l
point C.
Sa vitesse $\vec{V_C}$ en ce point fait avec l'horizontale un angle $\alpha = 20°$.
Les équations horaires du mouvement dans le repère $(C, \vec{i}, \vec{j})$ sont:

$$\begin{cases} x(t) = v_C \cos\alpha.t \\ y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_c.\sin\alpha.t \end{cases}$$

2.1- Déterminer les coordonnées du sommet S de la trajectoire du skieur, dans
Cas où $v_c = 16,27m.s^{-1}$.

2.2- Trouver la condition sur v_c pour que le skieur ne tombe pas dans l'eau du lac.
En déduire la valeur minimale de v_c.

Solution

1.1- Selon la 2ème loi de newton:

$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$

$\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$;

La projection sur ox ;

$P_x + R_x = ma_x$

Soit: $mg\sin\alpha - f = ma_x$

$a_x = g\sin\alpha - \frac{f}{m}$

$a = a_x = 9,8.\sin 20 - \frac{108}{80} = 2m.s^{-2}$

1.2- Calcul de AB:

Le mouvement est rectiligne uniformement varié donc:

$x = \frac{1}{2}a_x t^2 + v_0 t + x$; or $v_0 = 0$

et: $x_0 = 0$ donc: $x = t^2$

et: $v = a_x t = 2t$, ce qui donne: $t = \frac{v}{2}$

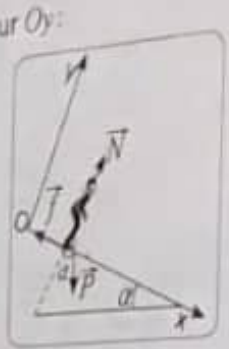
alors: $x = t^2 = \frac{v^2}{4}$

en B: $x_B = AB = \frac{v_B^2}{4} = \frac{(20)^2}{4} = 100m$

1.3- Calcul de R:

On sait que $\vec{R} = \vec{f} + \vec{N}$ et $R = \sqrt{f^2 + N^2}$

On détermine la composante N par projection sur Oy:



Soit: $P_y + R_y = m.a_y$

D'où: $-mg\cos\alpha + N = 0$

$N = mg\cos\alpha = 80.9,8.\cos 20 \simeq 737N$

$R = \sqrt{(108)^2 + (737)^2} \simeq 744,6N$

2.1- Coordonnées de S.

Au sommet de la trajectoire, la vitesse $\vec{V}_S$ est horizontale.

Alors: $V_y = 0$,

d'où: $-gt_s + V_0\sin\alpha = 0$;

$t_s = \frac{V_0\sin\alpha}{g}$.

$x_s = V_{x_0}\cos\alpha . t = V_{x_0}\cos\alpha . \frac{V_0\sin\alpha}{g}$

$= \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{2g}$

$y_s = -\frac{1}{2}gt_s^2 + V_0\sin\alpha . t_s$

$= -\frac{1}{2}g\left(v_0\frac{\sin\alpha}{g}\right)^2 + V_0\sin\alpha . \frac{V_0\sin\alpha}{g}$

$y_s = \frac{V_0^2\sin^2\alpha}{2g}$.

A.N.: $x_s = \frac{(20)^2\sin 40}{2(9,8)} \simeq 13,1m$;

$y_s = \frac{(20)^2\sin^2(20)}{2(9,8)} \simeq 2,38m$.

2.2- Les conditions:

Pour que le skieur dépasse le lac, il faut que $x > CD = L$, lorsque $y = 0$:

$0 = -\frac{g}{2V_0^2\cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha$;

$\frac{gx^2}{2V_0^2\cos^2\alpha} = x\tan\alpha$; $x \neq 0$,

$gx = 2V_0^2\cos^2\alpha . \tan\alpha$

$x = \frac{2V_0^2.\cos^2\alpha}{g}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$= \frac{V_0^2.\sin 2\alpha}{g}$

$x \geq CD = L \Rightarrow \frac{V_0^2\sin 2\alpha}{g} \geq L$

$V_0 \geq \sqrt{\frac{g.L}{\sin 2\alpha}}$

$V_{min} = \sqrt{\frac{gL}{\sin 2\alpha}}$

$= \sqrt{\frac{9,8.15}{\sin 40}} \simeq 15,1\ m.s^{-1}$

BAC PC Juin 2013:

Au cours d'un match de volley-ball on enregistre par vidéo le mouvement de la balle lorsqu'un joueur effectue un service. La balle est lancée à l'instant $t = 0$, à partir d'un point A situé à une hauteur H du sol (figure-1).

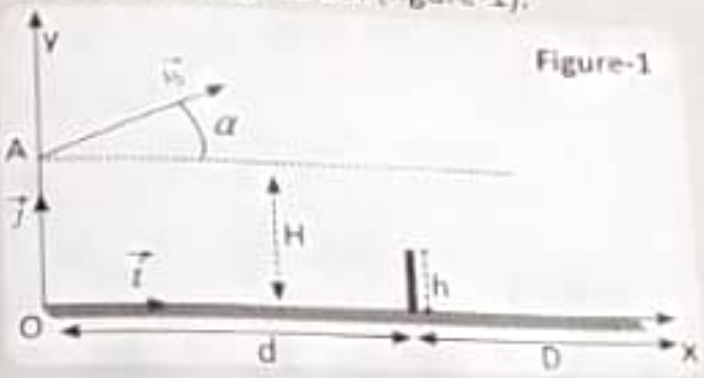


Figure-1

Le joueur, dont les pieds sont en O, se trouve à la distance d du filet de hauteur h.

Le service n'est correct que si deux conditions sont vérifiées:

- La balle doit passer au dessus du filet de de hauteur h.
- La balle doit tomber dans le camp de l'adversaire de longueur D.

Données: On néglige l'action de l'air et les dimensions de la balle:

$g = 10m.s^{-2}$; $H = 2,60m$; $d = D = 9m$ et $h = 2,50m$.

On étudie le mouvement de la balle dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ lié à la terre et considéré galiléen.

La vitesse initiale $\vec{V_0}$ de la balle fait avec la direction horizontale un angle α.

L'analyse de la vidéo a permis d'obtenir les deux courbes de la figure - 2 représentant $V_x(t)$ et $V_y(t)$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

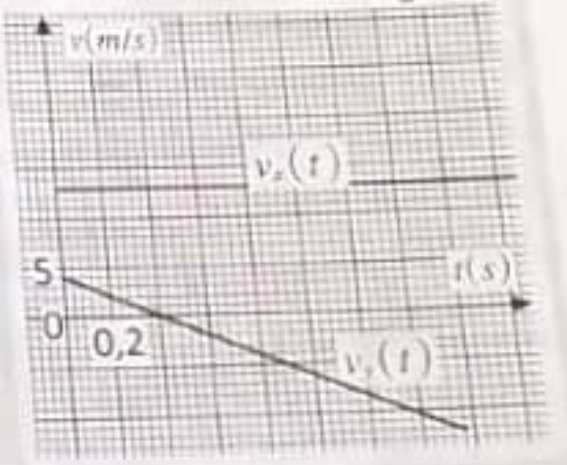


Figure-2

1- En appliquant la deuxième loi de Newton, exprimer $V_x(t)$ en fonction de V_0 et α, et l'expression de $V_y(t)$ en fonction de V_0, α, g et t.

2- En exploitant la figure-2, montrer que:

$V_0 \simeq 13,6m.s^{-1}$ et $\alpha \approx 17°$.

3- Trouver l'équation de la trajectoire de la balle dans le repère $(O;\vec{j};\vec{i})$.

4- Sachant qu'aucun joueur n'a modifié la trajectoire de la balle. Cette dernière a-t-elle réalisé les deux conditions d'un service correct?

Solution

1- Expression de V_0 :

La balle est soumise uniquement à son poids.

La 2ème loi de Newton s'écrit: $\vec{P} = m\vec{g}$

Ceci donne $\vec{a} = \vec{g}$, donc: $a_x = g_x = 0$ et $a_z = g_z = -g$.

. Or: $\frac{dV_x}{dt} = a_x = 0$ donc: $V_x = cte$ c'est-à-dire: $V_x(t) = V_x(0) = V_0 \cos\alpha$

et: $\frac{dV_z}{dt} = -g$;

donc: $V_z = -gt + V_{0z}$

à $t = 0$, on a $V_z = V_0 \sin\alpha$.

d'où: $V_z(t) = -gt + V_0 \sin\alpha$

2- Valeurs de v_0 et de α :

D'après la figure-2, on a:

$V_x = 13,6 m.s^{-1} = V_{0x}$

et: $V_{0z} = 4,8 m.s^{-1}$

or: $V_{0z} = V_0 \sin\alpha$,

donc: $\sin\alpha = \frac{V_{0z}}{V_0} = \frac{V_{0z}}{\sqrt{V_{0x}^2 + V_{0z}^2}}$

$\sin\alpha = \frac{4,8}{\sqrt{(13,6)^2 + (4,8)^2}} \simeq 0,33$.

d'où: $\alpha \simeq 17°$

3- Equation:

On a: $\frac{dx}{dt} = V_x = V_0 \cos\alpha$

et: $\frac{dy}{dt} = -gt + V_0 \sin\alpha$.

par intégration on obtient:

$x = V_0 \cos\alpha \, t$

$y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 \sin\alpha \, t + H$

On tire $t = \frac{x}{V_0 \cos\alpha}$ et le remplace dans la deuxième équation:

$y = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{V_0 \cos\alpha}\right)^2 + V_0 \sin\alpha \left(\frac{x}{V_0 \cos\alpha}\right) + H$

$y = -\frac{g}{2V_0^2 \cos^2\alpha}x^2 + \tan\alpha \, x + H$

4- Service correct:

Au passage sur le filet on a:

$x = d$;

alors:

$y = -\frac{g}{2V_0^2 \cos^2(17)}d^2 + \tan\alpha \, d + H$

$y = -\frac{10}{2.(13,6)^2.(0,91)^2} + (\tan 17)9 + 2,6$

$y = 2,95m > h = 2,50m$.

La 1ère condition est donc réalisée:

- Lorsque la balle touche le sol on a $y = 0$

alors: $-\frac{g.x^2}{2V_0^2 \cos^2\alpha} + x \tan\alpha + H = 0$

$-0,029x^2 + 0,306x + 2,6 = 0$

La solution de cette équation donne:

$x \simeq 16m$;

donc: $9m < x < 18m$.

La balle tombe donc le camp de l'adversaire car: $x \in]9m; 18m[$.

16 (Bac PC Juin 2010)

Dans les piscines, les toboggans permettent aux nageurs de glisser et de plonger dans l'eau.

On modélise le toboggan par une piste ABC formée d'une partie AB rectiligne inclinée d'un angle α par rapport au plan horizontal

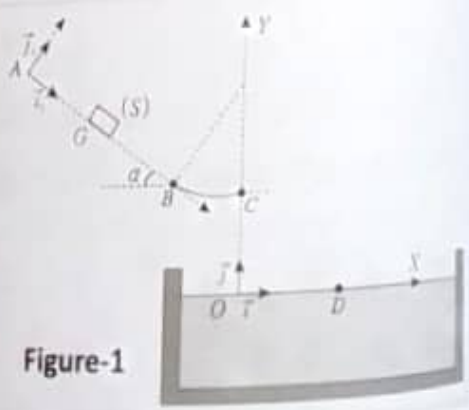


Figure-1

t d'une piste BC circulaire. On modélise le plongeur par un corps solide (S) entre d'inertie G et de masse m (figure-1).

Données: $m = 70kg$; $\alpha = 20^\circ$; $g = 9,8m.s^{-2}$; $AB = 2,4m$

1- Étude du mouvement sur la piste AB

A l'instant $t = 0$, le corps (S) abandonné sans vitesse initiale du point A qui coïnci avec le centre d'inertie G, commence à glisser sans frottement sur la piste A L'étude du mouvement de G se fait dans le repère $\mathcal{R}_1(A;\vec{i}_1;\vec{j}_1)$ supposé galiléen.

En appliquant la deuxième loi de Newton, déterminer:

1.1- Les coordonnées de l'accélération $\vec{a}$ dans le repère. $\mathcal{R}_1(A;\vec{i}_1;\vec{j}_1)$

1.2- La vitesse V_B du centre d'inertie G au point B.

1.3- L'intensité de la réaction $\vec{R}$ exercée par le plan AB sur le corps (S).

On étudie dans la suite de l'exercice le mouvement de G dans le repère terrest $R(O,\vec{i},\vec{j})$ supposé galiléen (figure-1).

2- Etude du mouvement de G dans l'air.

Le corps (S) arrive au point C avec une vitesse horizontale $V_C = 4,67m.s^{-1}$. Il quitt le point C à un instant supposé comme nouvelle origine des dates. Le corps (S) e soumis en plus de son poids, à l'action des vents artificiels modélisée par une forc horizontale constante d'expression: $\vec{f}_1 = -f_1.\vec{i}$.

2.1- Trouver à un instant t l'expression de la composante horizontale v_x du vecteu vitesse en fonction de m ; V_C ; f_1 et t.

2.2- À l'instant $t_0 = 0,86s$, le corps (S) arrive au point D situé à la surface de l'ea où s'annule la composante horizontale de la vitesse.

a- Calculer f_1.

b- Déterminer la hauteur h du point C par rapport à la surface de l'eau.

3- Étude du mouvement vertical du point G dans l'eau.

Le corps (S) poursuit son mouvement dans l'eau avec une vitesse verticale $\vec{V}$.

Il est soumis, en plus de son poids, aux forces suivantes:

- Force de frottement fluide modélisée par le vecteur $\vec{f}$ dont l'expression dans système international des unités est: $\vec{f} = 140.V^2.\vec{j}$.

- La poussée d'archimède $\vec{F}_A$ d'intensité $F_A = 637N$.

On considère l'instant où le corps (S) entre dans l'eau, comme nouvelle origine d dates.

3.1- Montrer que la vitesse $V(t)$ du point G vérifie l'équation différentie suivante:

$$\frac{dV(t)}{dt} - 2V^2 + 0,7 = 0$$

3.2- Déterminer la valeur de la vitesse limite V_l.

3.3- En utilisant la méthode d'Euler et à l'aide du tableau suivant, déterminer les valeurs a_{i+1} et V_{i+1}.

	$V(m.s^{-1})$	$a(m.s^{-2})$
$t_i = (s)$	-1,90	6,52
$t_{i+1} = 1,8.10^{-1}$	-1,80	a_{i+1}
$t_{i+2} = 1,95.10^{-1}$	V_{i+2}	5,15
$t_{i+3} = 2,1.10^{-1}$		

Solution

1.1- Les coordonnées de $\vec{a}(t)$:

Système étudié: {le corps (S)}

Bilan des forces: $\vec{P}$ et $\vec{R}$.



Selon de 2ème loi de Newton:

$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G$

$\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}_G$ (1)

suivant l'axe $(\vec{Ax})$:

$$P_x + R_x = ma_G$$

$$mg\sin(\alpha) + 0 = ma_G$$

Donc: $a_G \begin{cases} a_{G_x} = g\sin(\alpha) = 3,35 m.s^{-2} \\ a_{G_y} = 0 \end{cases}$

1.2- Détermination de v_B:

Le mouvement de (S) est rectiligne uniformément varié donc:

$$V(t) = a_G t + V_0$$

avec: $V(t) = g\sin(\alpha)t$

$$x(t) = \frac{1}{2}g\sin(\alpha)t^2 + x_0$$

au point B: $x(t) = \frac{1}{2}g\sin(\alpha)t^2$

$$\begin{cases} V_B = g\sin(\alpha)t_B \\ x_B = AB = \frac{1}{2}g\sin(\alpha)t_B^2 \end{cases}$$

Donc: $\begin{cases} V_B = g\sin(\alpha)t_B \\ t_B = \sqrt{\frac{2AB}{g\sin(\alpha)}} \end{cases}$

$$V_B = \sqrt{2ABg\sin(\alpha)}$$

A.N.: $V_B \simeq 4 m.s^{-1}$.

1.3- Détermination de R:

On projette (1) suivant l'axe $(\vec{Ay})$.

$$P_y + R_y = ma_G = 0$$

$$-mg\cos(\alpha) + R = 0$$

donc: $R = mg\cos(\alpha)$

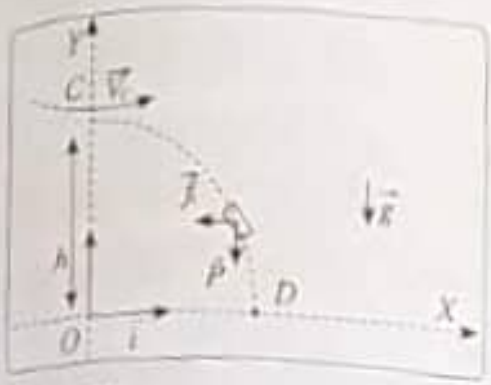
A.N.: $R = 644,62N$

2.1- Expression de V_x:

bilan des forces: $\vec{P}$ et $\vec{f}$.

selon la 2ème loi de Newton: $\vec{P} + \vec{f} = m\vec{a}$

On projette suivant l'axe $(O;\vec{i})$.



$P_x + f_x = ma_{G_x}$

$0 - f = ma_{G_x}$

$a_{G_x} = -\frac{f}{m}$

$V_x = a_{G_x}t + V_{0_x} = -\frac{f}{m}t + V_C$

$V_x = -\frac{f}{m}t + V_C$

$V_x = -\frac{f}{m}t + V_C$

2.2- a- Calcul de f:

à l'instant $t = 0$:

On a: $V_x = 0$

donc: $0 = -\frac{f}{m}t_0 + V_C$

$$f = \frac{mV_C}{t_0}$$

b- Détermination de h:

Projettons suivant l'axe $(O\vec{j})$:

$$P_y + f_y = ma_{G_y}$$

$$-mg + 0 = ma_{G_y}$$

$$a_{G_y} = -g$$

Or: $V_{0_y} = 0$ d'où: $V_y = a_{G_y}t + V_{0_y} = -gt$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h$$

avec: $y = 0$ donc: $0 = -\frac{1}{2}gt_0^2 + h$

donc: $h = \frac{1}{2}gt_0^2$

A.N.: $h = 3,624m$.

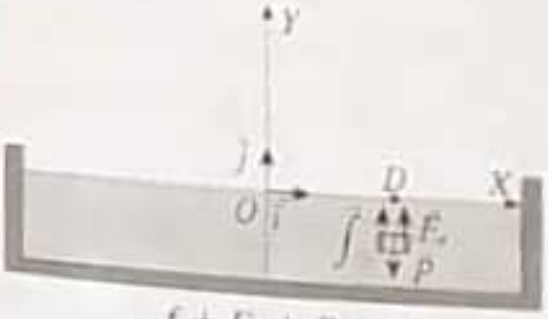
3.1- Equation différentielle:

Bilan des forces: $\vec{P}$, $\vec{F_e}$ et $\vec{f}$.

Selon la 2ème loi de Newton:

$$\sum \vec{F_{ext}} = m\vec{a_G} \Rightarrow \vec{P} + \vec{f} + \vec{F_e} = m\vec{a_G}$$

suivant l'axe $(O\vec{Y})$:



$$f_y + F_{ay} + P_y = ma_{G_y}$$

$$f + F_e - mg = ma_{G_y}$$

$$140V^2 + 637 - 686 = 70\frac{dV(t)}{dt}$$

$$\frac{dV(t)}{dt} = 2V^2 - 0,7$$

on trouve: $\frac{dV(t)}{dt} - 2V^2 + 0,7 = 0$

3.2- Détermination de v_l:

En régime permanent: $v = v_{C_1}$.

donc: $\frac{dV}{dt} = 0$

alors: $-2V_l^2 + 0,7 = 0$

d'où: $V_l = \sqrt{\frac{0,7}{2}} = 0,59m.s^{-1}$

3.3- Détermination des valeurs de: a_{i+1} et V_{i+2}:

l'équation différentielle s'écrit:

$$\frac{dV(t)}{dt} - 2V^2 + 0,7 = 0$$

donc: $a_n - 2V_n^2 + 0,7 = 0$

pour: $n = i + 1$

on a: $a_{i+1} - 2V_{i+1}^2 + 0,7 = 0$

$$a_{i+1} = -0,7 + 2V_{i+1}^2 = 5,78m.s^{-2}$$

d'après Euler: $V_{i+1} = V_i + a_i\Delta t$

$$V_{i+2} = V_{i+1} + a_{i+1}\Delta t$$

$V_{i+2} = -1,8 + 5,78 \times 0,015$

$V_{i+2} = -1,71m.s^{-1} = -1,71\ m.s^{-1}$

et: $a_{i+1} = 5,78m.s^{-2}$.

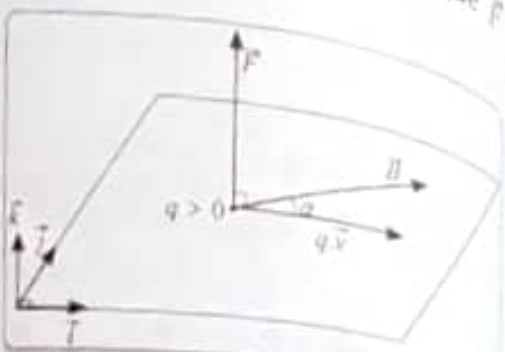
5 Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme

I- Force magnétique.

1 Force de Lorentz

Un porteur de charge électrique q, en mouvement à la vitesse $\vec{v}$ dans une région de l'espace où règne un champ magnétique $\vec{B}$, est soumis à une force magnétique $\vec{F}$ appelée force de Lorentz d'expression: $\vec{F} = q.\vec{v} \wedge \vec{B}$

Cette relation, qui fait intervenir le produit vectoriel étudié en mathématiques, permet, connaissant les caractéristiques des vecteurs $q\vec{v}$ et $\vec{B}$, de déduire celles de la force $\vec{F}$.



La force magnétique $\vec{F}$ est perpendiculaire au plan $(\vec{v},\vec{B})$ et orientée vers le haut si la particule porte une charge positive.

2 Caractéristiques de la force $\vec{F}$.

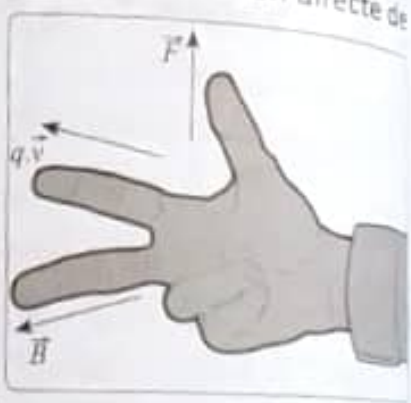
Les caractéristiques de la force sont:

- **La direction:**

orthogonale à la fois au vecteur $\vec{v}$ et au vecteur $\vec{B}$, donc au plan défini par $\vec{v}$ et $\vec{B}$;

- **Le sens:**

Le trièdre formé $(q.\vec{v}, \vec{B}, \vec{F})$ est direct (appliquer une règle d'orientation directe de l'espace);



- **L'intensité:** $F = |q.v.B.\sin\alpha|$;

avec q: charge électrique exprimée en coulomb (C);

v: vitesse de la particule en $m.s^{-1}$;

B: champ magnétique en tesla (symbole: T).

Remarquons que si:

- $\vec{v}$ et $\vec{B}$ sont parallèles, alors $\sin\alpha = 0$ et $F = 0$;
- $\vec{v}$ et $\vec{B}$ sont orthogonaux, alors $\sin\alpha = 1$ et $F = |q|.v.B$.

II- Étude du mouvement.

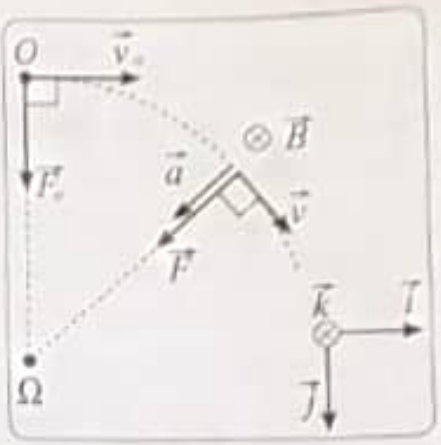
Nous nous intéressons au mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme, dans le cas où le vecteur vitesse initiale $\vec{v}_0$ de la particule est orthogonal au vecteur champ magnétique $\vec{B}$.

1 Expression de l'accélération:

Le système est la particule considérée comme ponctuelle, de masse m et de charge électrique q $(q < 0)$.

Le mouvement est étudié dans le référentiel du laboratoire, considéré comme galiléen.

La seule force agissant sur la particule est la force de Lorentz due au champ magnétique uniforme $\vec{B}$, soit: $\vec{F} = q.\vec{v} \wedge \vec{B}$



Selon la 2ème de Newton: $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$

$\vec{F} = m\vec{a}$

$m.\vec{a} = q.\vec{v} \wedge \vec{B}$

Donc: $\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{v} \wedge \vec{B}$

Le vecteur $\vec{a}$ est toujours orthogonal aux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{B}$ (1)

2 La trajectoire est plane:

Puisque $\vec{a}$ est orthogonal à $\vec{B}$ et $\vec{B} // \vec{k}$, alors $\vec{a}$ est orthogonal à $\vec{k}$; $a_z = 0$

D'où: $v_z = cte$ or: $v_z(0) = 0$ donc: $v_z = 0$

Le mouvement s'effectue dans le plan perpendiculaire à $\vec{B}$

3 Le mouvement est circulaire uniforme:

Dans la base de Frenet $(\vec{u};\vec{n})$: $\vec{a} = a_T.\vec{u} + a_N.\vec{n}$

Puisque $\vec{a} \perp \vec{u}$, alors: $\vec{a}.\vec{u} = 0$

$\vec{a}$ est perpendiculaire à la tangente à la trajectoire, elle est donc normale à cette trajectoire, d'où $\vec{a} = \vec{a}_N$, $a_T = 0$

Le résultat $a_T = \frac{dv}{dt} = 0$ donne $v = cte = v_0$

Le mouvement est donc uniforme.

Revenons à l'expression de $\vec{F}$: $\vec{F} = m\vec{a} = m\vec{a}_N$

Soit en module: $F = ma_N$; ou encore $|q|.V.B = m.\frac{V^2}{\rho}$

D'où: $\rho = \frac{m.V}{|q|.B} = cte$ alors: la trajectoire est circulaire.

• **Conclusion:** Une particule chargée pénétrant dans un champ magnétique uniforme avec un vecteur vitesse $\vec{v}$ orthogonal à $\vec{B}$ est animée, dans le plan orthogonal à $\vec{B}$ et contenant $\vec{v}$, d'un mouvement circulaire de rayon R. Le rayon a pour expression: $R = \frac{m.v}{|q|.B}$. La vitesse angulaire de la particule est égale à: $\omega = \frac{v}{R} = \frac{|q|.B}{m}$

Sa période T de révolution est: $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi.m}{|q|.B}$

Elle ne dépend ni de v ni de R ; elle est d'autant plus faible que B est grand.

1 Testez-vous:

1- On considère une particule de charge q, de masse m, animée d'une vitesse $\vec{v}_0$ dans une région de l'espace où règne un champ magnétique uniforme $\vec{B}$.

1- Comment s'appelle la force magnétique?

2- Quelle est la valeur de la puissance fournie par la force magnétique?

3- Quelle est la valeur de la force magnétique si $\vec{v}_0 \perp \vec{B}$?

4- Quelle est alors l'accélération de la particule?

5- Donner la forme de la trajectoire si $\vec{v}_0 \perp \vec{B}$.

6- La période de rotation dépend-elle:

- de la masse des particules,
- de leur vitesse?

Solution

1- La force de Lorentz.

2- La puissance de $\vec{F}$.

$$P = \vec{F}.\vec{v}$$
$$P = (q\vec{v} \wedge \vec{B}).\vec{v}$$
$$P = (q\vec{v} \wedge \vec{v}).\vec{B}$$
$$P = 0$$

3- La valeur de $\vec{F}$:

$$F = |q|.v_0.B \ (\vec{v}_0 \perp \vec{B}).$$

4- L'accélération de la particule:

$$a = \frac{F}{m} \Longrightarrow a = \frac{|q|.v_0.B}{m}$$

5- $\vec{v}_0 \perp \vec{B} \Rightarrow$ La trajectoire est circulaire

6- Expression de T :

$$T = \frac{2\pi}{w} \ ; \ w = \frac{v_0}{r}$$

or: $r = \frac{m.v_0}{|q|.B}$

$$\frac{r}{v_0} = \frac{m}{|q|.B}$$

donc: $T = \frac{2\pi.r}{v_0}$

T dépend de la masse

T ne dépend pas de la vitesse.

2 Vrai ou Faux?

1- Dans un champ magnétique uniforme, la trajectoire d'une parcticule chargée e toujours circulaire. V

2- La vitesse angulaire de la parcticule trajectoire dépend de la vitesse linéaire d particules. V

3- Un champ magnétique peut accélérer une particule chargée. V

4- Le travail de la force magnétique peut être différent de zéro. V

5- La force de Lorentz est toujours perpendiculaire au champ magnétique. V

Solution

1- Faux

2- $w = \frac{v_0}{R} = \frac{|q|.B}{m}$; Faux

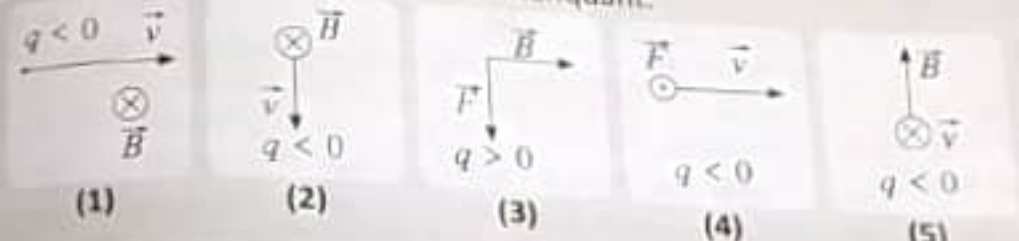
3- Faux

4- Faux $(W(\vec{F}) = P.\Delta t = 0)$

5- $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$; $\vec{F} \perp (\vec{v}, \vec{B})$ vrai.

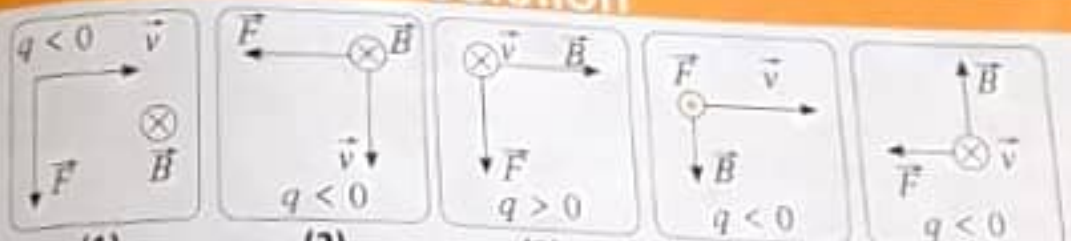
Exercices

1 Sur chacun des schémas suivants doivent figurer les trois vecteurs orthogonaux vitesse $\vec{v}$, champ magnétique $\vec{B}$ et force de Lorentz $\vec{F}$.
Représenter, dans chaque cas, le vecteur manquant.



(1) (2) (3) (4) (5)

Solution



(1) (2) (3) (4) (5)

2 Un électron est animé d'un mouvement circulaire dans un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme orthogonal à sa vitesse $\vec{v}$.

1.a- Donner les caractéristique, de la force de lorentz $\vec{F}$.

b- En déduire le sens de $\vec{B}$.

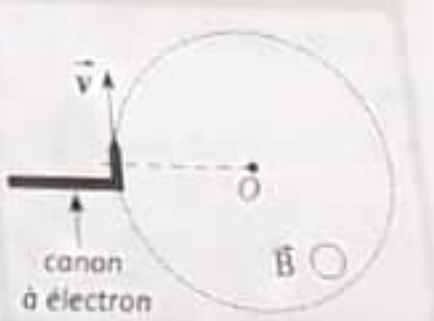
2- Quelle est la nature du mouvement? en déduire la valeur du rayon et de la période.

On donne $R = 5cm$, $B = 10^{-3}T$, $m_e = 9,1.10^{-31}kg$.

3- On augmente la vitesse des électrons, le rayon de la trajectoire circulaire devient $R' = 8cm$.

a- Calculer la nouvelle valeur de la vitesse v.

b- Calculer la nouvelle valeur de la période T. Conclure.



Solution

1.a- Caractéristiques de $\vec{F}$.

• Direction:

$\vec{F} \perp \vec{v}$ et $\vec{F} \perp \vec{B}$

• Intensité: $F = |q|.v \times B = e.v.B$

$F = 1,6.10^{-19} \times 10^{7} \times 1,1 \times 10^{-3}$

$F = 1,76.10^{-15}N$

• Sens: Le trièdre $(q\vec{v}; \vec{B}; \vec{F})$ soit direct.

b- Sens de $\vec{B}$.

On a: $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$.

En appliquant la règle de la main droite, on déduit le sens de $\vec{B}$ ⊗.

2- Nature du mouvement:

Le mouvement des électrons est circulaire uniforme dont la trajectoire appartient au plan $\perp \vec{B}$, de rayon.

$$R = \frac{m \times v}{|q| \times B} = \frac{m \times v}{e \times B}$$

A.N.: $R = 5cm$

de période: $T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = \frac{2\pi . R}{v}$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi . m}{e.B}$$

$$T = 3,24.10^{-8} s$$

3- On a: $R' = 8\,cm$

a- Calcul de v':

on a: $v' = \frac{R \times e \times B}{m} = 1,55.10^{7}\ m.s^{-1}$

b- Calcul de T':

On a: $T' = \frac{2\pi . m}{e \times B}$

$$T' = T = 3,24.10^{-8} s$$

La période est indépendante de la vitesse et du rayon.

3 Dans un accélérateur de particules, des ions hélium He^{2+}, de masse: $m_{He} = 6,68.10^{-27} kg$, sont animés d'une vitesse $\vec{v_0}$ perpendiculaire au vecteur champ magnétique $\vec{B}$.

Données: $B = 1,30T$; $e = 1,6.10^{-19} C$; $g = 10\ N.kg^{-1}$; $V_0 = 1,25.10^{7} m.s^{-1}$

1- Calculer la valeur de la force magnétique F_m. La comparer au poids de la particule α.

2- Donner la nature du mouvement d'une particule α.

3- Calculer:

a- le rayon de la trajectoire.

b- la durée d'un demi-tour.

Solution

1- comparaison:

on a:

- $F_m = |q|.V_0.B.\sin(\vec{v_0}, \vec{B}) = 2e.v_0.B$

$$F_m = 2.1,6.10^{-19}.1,25.10^{7}.1,30$$

$$= 5,2.10^{-12} N$$

- $P = mg = 6,68.10^{-26} N$

Le poids des ions He^{2+} est négligeable devant la force due au champ magnétique.

2- La nature de mouvement:

Le mouvement d'un ion dans un champ magnétique uniforme dans le cas où $\vec{v}$ et $\vec{B}$ sont orthogonaux est un mouvement circulaire uniforme de rayon $R = \frac{m.v}{|q|.B}$.

3.a- Le rayon:

$$R = \frac{mv}{|q|.B} = \frac{6,68.10^{-27}.1,25.10^{7}}{2.1,6.10^{-19}.1,30}$$

$$= 2,0.10^{-1} m$$

$$= 20cm$$

b- La durée:

$$\Delta t = \frac{T}{2} = \frac{\pi R}{v}$$

$$= \frac{\pi m}{|q|.B}$$

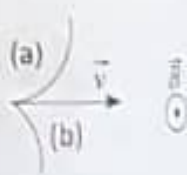
A.N.:

$$\Delta t = \frac{\pi .6,68.10^{-27}}{2.1,6.10^{-19}.1,30}$$

$$\Delta t = 5.10^{-7} s.$$

4 Deux ions X_1^{2+} et X_2^{2-} de masses respectives m_1 et m_2 entrent dans un zone où règne un champ magnétique uniforme de vecteur $\vec{B}$, à la même vitesse $\vec{V_0}$ (voir-figure).

1- Donner l'expression du rayon de la trajectoire R_1 de l'ion X_1^{2+} et R_2 de l'ion X_2^{2-}.

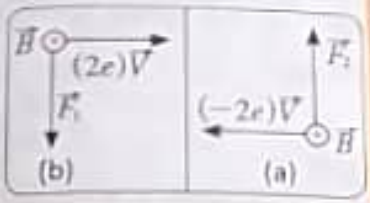


2- La figure donne le trajet de chacun de ces ions dans le champ $\vec{B}$.
Faire correspondre à chacun des ions le trajet qui lui convient.
3- A quoi est due la différence entre R_1 et R_2 ?
4- Sachant que les deux rayons R_1 et R_2 sont tels que $R_1 = 0,85\,R_2$, calculer le rapport $\frac{m_1}{m_2}$.

Solution

1- Expressions des rayons:
Le mouvement de chaque ion est circulaire uniforme de rayon:
on a: $R_1 = \frac{m_1 V_0}{2eB}$ et $R_2 = \frac{m_2 V_0}{2eB}$.

2- Le trajet:
Pour l'ion positif X_1^{2+}, la force de Lorentz $\vec{F}_1$ qui lui est appliqué est donnée, sur la schéma (b) Pour l'ion X_2^{2+} correspond au trajet figure-a.



3- La différence:
La différence entre R_1 et R_2 est due au fait que les masses m_1 et m_2 sont différentes.

4- Calcul du rapport:
on a: $\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{m_1 v_0 / 2eB}{m_2 v_0 / 2eB} = \frac{m_1}{m_2}$
$\frac{m_1}{m_2} = \frac{R_1}{R_2} = 0,85$.

5 Des particules α émises pénètrent en O avec le vecteur vitesse $\vec{V}_0$ dans une zone où règne un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme et perprendiculaire à $\vec{V}_0$ et au plan de la figure. Elles ressortent en C.



1- Quel est le sens du vecteur $\vec{B}$? Justifiez votre réponse.

2- Montrer que le mouvement des particules α est uniforme (c'est-à-dire à vitesse constante) dans l'espace où règne $\vec{B}$.

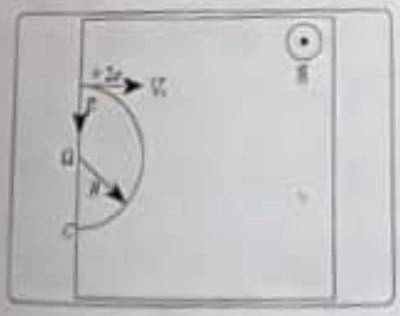
3- On admet que la trajectoire des particules est circulaire.
Exprimer le rayon de cette trajectoire en fonction de V_0, B, e et $m = m\left({}^{4}_{2}He\right)$.
On donne: $V_0 = 15300\ km/s$.

4- Quelle est l'intensité du champ $\vec{B}$ à appliquer pour que $OC = 0,5\,m$?
Le résultat vous paraît-il réaliste?

Données: masse d'une particule α: $m = 6,64.10^{-27}\ kg$.

Solution

1- Sens du vecteur $\vec{B}$.



Tout ion He^{2+} dans le champ magnétique $\vec{B}$ est soumis à une force magnétique (appelée aussi force de lorentz):

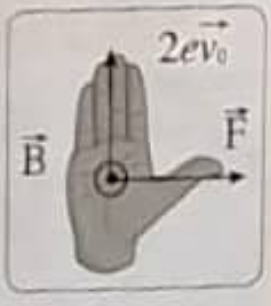
$$\vec{F}_m = 2e\vec{v}_0 \wedge \vec{B}$$

Telle que: $\vec{F} \perp \vec{V}$ et $\vec{F} \perp \vec{B}$.

Pour déterminer le sens de $\vec{B}$ on utilise le fait que le trièdre formé par les vecteurs $(2e\vec{v}_0, \vec{B}, \vec{F}_m)$ est direct.

On peut appliquer la règle la main droite:

2- Uniformité du mouvement:



les particules α, subissent l'influence du champ magnétique $\vec{B}$, ne sont soumises qu'à la force de Lorentz $\vec{F}_m$ et à leur poids $\vec{P}$.

le poids $\vec{P}$ est tout à fait négligeable par rapport à la force de Lorentz $\vec{F}_m$.

Les particules α ne sont donc soumises qu'à la force $\vec{F}_m$.

Or: $\vec{F}_m = 2e\vec{v} \wedge \vec{B}$ est perpendiculaire à $\vec{v}$. dans le repère de Frenet:

$$\vec{a} = a + \vec{u} + a_N.\vec{n}$$

Or: $\vec{a} \perp \vec{v}$ donc: $a_T = \frac{dv}{dt} = 0$.

alors le module de $\vec{v}$ reste constant on aura un mouvement uniforme:

$(\|\vec{v}\| = v_0)$.

3- Rayon de la trajectoire circulaire des particules α:



Selon la 2ème loi de Newton. $\sum \vec{Fext} = m\vec{a}$

soit:

$$\vec{F} = 2e\vec{v} \wedge \vec{B} = m\vec{a}$$

$(\vec{v} \wedge \vec{B} = v.B\vec{n} car \vec{v} \perp \vec{B})$

soit: $2ev_0B\vec{n} = m\vec{a}_n$.

L'accélération d'un mouvement circulaire uniforme est module:

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{R} = \frac{v_0^2}{R}$$

avec R rayon de la trajectoire circulaire

on a: $2ev_0B = m\frac{v_0^2}{R}$

Soit: $R = \frac{mv_0}{2eB}$

4- Détermination de B:

De la relation précédente, on a:

$$B = \frac{mv_0}{2eR}$$

A.N.: $R = \frac{OC}{2} = 0,25m$

$e = 1.60.10^{-19}C$

$m = 6,64.10^{-27}kg$;

$v_0 = 1,53.10^7 m/s$

donc: $B = 1,27\,T$.

6 On considère un paquet d'électrons dans le vide, chaque électron ayant la même vitesse $\vec{v}$ avec $v = 10000\,km.s^{-1}$. Ces électrons abordent une région de l'espace où règne un champ magnétique uniforme, indépendant du temps, de vecteur $\vec{B}$ orthogonal à $\vec{v}$, de valeur $B = 1,1 \times 10^{-3}T$.

1- Déterminer les caractéristiques de la force $\vec{F}$ qui s'exerce sur chaque électron, et faire un schéma sur lequel les directions et les sens des différentes grandeurs vectorielles: $\vec{v}, \vec{B}, \vec{F}$ apparaîtront clairement.

2- Indiquer, avec démonstration, la nature du mouvement des électrons sous l'action de la force $\vec{F}$. On précisera le plan de la trajectoire et la valeur R du rayon.

Calculer alors le temps T mis par les électrons pour faire un tour complet sur leur trajectoire.

3- On fait varier la valeur de la vitesse des électrons pour que le rayon de leur trajectoire devienne $R' = 8,0\ cm$. Calculer:

a- La nouvelle valeur v' de la vitesse des électrons ;

b- Le temps T' mis par les électrons pour faire un tour complet sur cette trajectoire de rayon R'. Justifier le résultat obtenu.

Données numériques:

Charge élémentaire: $e = 1,6 \times 10^{-19} C$;

Masse de l'électron: $m = 9,1 \times 10^{-31} kg$

Solution

1- Caractéristiques de $\vec{F}$:

On: $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$.

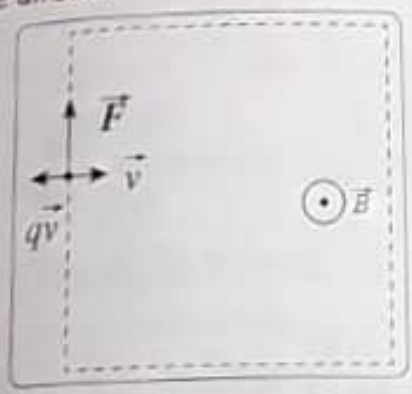
La direction est telle que $\vec{F} \perp \vec{v}$ et $\vec{F} \perp \vec{B}$.

L'intensité: $F = |q|v.B = evB$

$$F = 1,6.10^{-19}.10^{7}.1,1.10^{-1}$$

$$F = 1,76.10^{-15} N$$

Le sens est tel que $(q\vec{v}_0, \vec{B}, \vec{F})$ Soit un trièdre direct.



2- Nature du mouvement $(\vec{v}_0 \perp \vec{B})$

Le mouvement est circulaire uniforme de rayon: $r = \frac{mv_0}{|q|B}$

La trajection circulaire est $\perp$ à $\vec{B}$.

Expression de T.

$$T = \frac{2\pi}{w} \text{ et } w = \frac{v}{r}$$

donc: $T = \frac{2\pi}{v} r$; $T = 2\pi \frac{m}{qB}$

A.N.: on a: $r = 5.10^{-2} m = 5cm$

donc: $T = 3,24.10^{-8} s$.

3- On a: $R' = 8\ cm$

a- Calcul de v' :

On a: $R' = \frac{mv'}{eB}$

$$v' = \frac{R'eB}{m} = 1,55.10^{7}\ m/s$$

b- Calcule de T':

$$T' = 2\pi \frac{m}{qB} = T$$

donc: T ne dépend pas de v et de R.

7 Les particules α (ou noyaux d'hélium) émises lors de la désintégration d'un noyau de polonium sont envoyées en O dans un champ magnétique uniforme de vecteur champ $\vec{B}$. Leur vecteur-vitesse initiale $\vec{v}_0$ est perpendiculaire à $\vec{B}$ et également à une direction (OA) comme il est indiqué sur la figure ci-dessous.

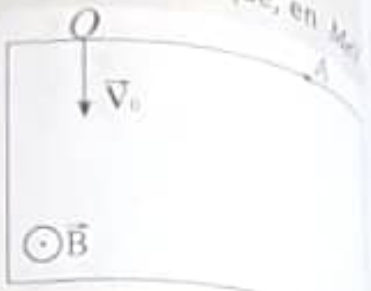
1- Donner les caractéristiques de la force magnétique agissant sur la particule à son entrée dans le champ.

Trouver le sens de $\vec{B}$ pour que la particule puisse sortir du champ en A.

3- Etablir la nature du mouvement de la particule α. On suppose que les particules

α sortent en A. Donner l'expression littérale de la distance OA en fonction de B, v_0 et des caractéristiques de la particule α.

3- Sachant que $OA = 74\,cm$, calculer la vitesse v_0 et l'énergie cinétique, en MeV, des particules α.



Données numériques:

$B = 1,05\,T$; $1u = 1,67 \times 10^{-27}\,kg$;

$e = 1,6 \times 10^{-19}\,C$; $c = 3,00 \times 10^{8}\,m.s^{-1}$

masse de la particule $\alpha = 4\,u$.

On rappelle que les effets du poids d'une particule ne sont pas perceptibles.

Solution

1- Caractéristiques de $\vec{F}$:

la particule α est ^4_2He sa charge est $q = 2e$

On a: $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$

- Direction: $\vec{F} \perp \vec{B}$ et $\vec{F} \perp \vec{V}$.
- Sens: Le trièdre $(q\vec{v}, \vec{B}, \vec{F})$ est direct
- Intensité: $F = |q|vB = 2e.vB$

2- Nature du mouvement:

Bilan des forces: $\vec{F}$

2ème loi de Newton $\sum \vec{F}ext = m\vec{a}$

$$F = m.\vec{a}$$

$$q\vec{v} \wedge \vec{B} = m.\vec{a}$$

donc: $\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{v} \wedge \vec{B}$

Dans le repère de Frênet:

$\vec{a} = a_T\vec{u} + a_N\vec{n}$

- $\vec{a} \perp \vec{v} \Longrightarrow a_T = \frac{dv}{dt} = 0$

donc: $v = c^{te} \Longleftrightarrow$ le mouvement est uniforme.

- $a = a_N$

donc: $\frac{|q|}{m} vB = \frac{v_0}{r}$; $r = \frac{v_0.Bm}{|q|B} = cte$

Le mouvement est circulaire

3- Calcul de v_0.

On a: $OA = 2r$

$$r = \frac{OA}{2} = 37cm\ ;$$

avec: $v_0 = r.2e.\frac{B}{m}$

$$v_0 = 37.10^{-2} \times 2.1,6.10^{-19} \frac{1,05}{4.1,67.10^{-27}}$$

$$v_0 = 1,26.10^{7}\ m/s$$

Calcul de E_c:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

$$= \frac{1}{2} 4.1,67.10^{-27}.(1,86.10^{7})^2$$

$$= 1,15.10^{-12} J$$

$$E_c = \frac{1,15.10^{-12}}{1,6.10^{-13}} = 7.18\ MeV$$

8 Des particules pénètrent dans un champ magnétique après avoir été accélérées, à partir d'une vitesse nulle, par un champ électrique.

Dans le carré $PQRS$ de 5,0 cm de côté, le champ magnétique $\vec{B}$, perpendiculaire au plan du carré est constant, de valeur $2,5 \times 10^{-1}\,T$.

A la sortie du champ électrique, les particules entrent en P dans le champ magnétique avec une vitesse $\vec{V}_0$ colinéaire à $\overrightarrow{PQ}$ (figure ci-contre).



1- Les particules sont les deutons: ${}^2_1D^+$ ou ${}^2_1H^+$.

a- Préciser le sens de $\vec{B}$ pour que les particules parviennent en S.

b- Déterminer la trajectoire des particules entre P et S et les caractéristiques de leur vitesse en S.

2- On injecte maintenant un faisceau de particules α ou noyaux d'hélium.

a- Déterminer la vitesse d'injection $\vec{V}_0$ en P dans le champ magnétique pour que les particules α parviennent en R.

b- Préciser les caractéristiques de leur vecteur vitesse en R.

On donne: deuton ${}^2_1H^+$ ou ${}^2_1D^+$.

$e = 1,6 \times 10^{-19} C$; $1u = 1,66 \times 10^{-27} kg$

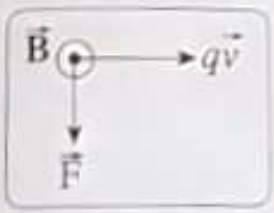
On fera l'approximation: masse du deuton: $2\,u$; masse de la particule α: $4\,u$.

Solution

1.a- Sens de $\vec{B}$.

Les particules chargées sont soumises à la force de Lorentz $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$.

En utilisant la regle de la main droite on détermine le sens de $\vec{B}$.



b- La trajectoire.

Bilan des forces: $\vec{F}, \vec{P}$

$\vec{P}$ est négligeable.

selon 2ème loi de Newton: $\sum \vec{F}ext = m\vec{a}$

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{v} \wedge \vec{B}$$

dans le repère de Frenet:

$$\vec{a} = a_T\vec{u} + a_N\vec{n}$$

On a: $\vec{a} \perp \vec{v}$ donc:

$$a_T = \frac{dv}{dt} = 0 \Longrightarrow v = v_0 = c^{te}$$

donc: $a = a_N = \frac{q}{m}v_0 B = \frac{v_0^2}{r}$

$$r = \frac{mv_0}{qB} = c^{te}$$

D'ou la trajectoire est circulaire donc le mouvement est circulaire uniforme.

2.a- Détermination de v_0.

On a: $q = 2e$

Au point R on a: $r = SR = 5\,cm$

donc le rayon de la trajectoire est:

$$r = \frac{m_\alpha v_0}{qB} \Rightarrow v_0 = \frac{2e\,B.r}{m\alpha}$$

A.N.: $v_0 = \frac{2.1,6.10^{-19}.2,5.10^{-1}.5.10^{-2}}{4.1,66.10^{-27}}$

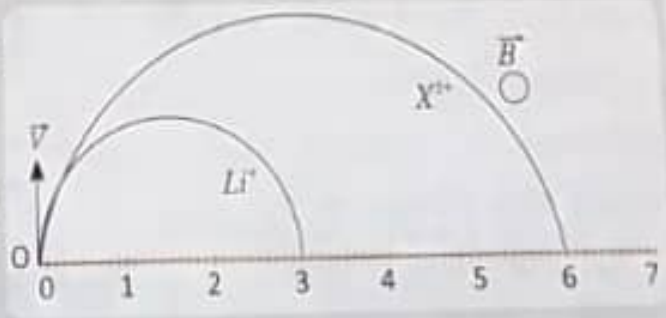
$$v_0 = 6,02.10^5\, m/s$$

b- Caracteristiques de $\vec{v}$ au point $\vec{R}$.

- Direction: perpendiculaire à SR
- Sens: vers le bas
- Module: $v_R = v_0 = 6,02.10^5 m/s$

(Bac PC Juin 2016)

Deux particules chargées Li^+ et X^{q+} arrivent au point O, à la même vitesse $\vec{v}$ dans une région de l'espace où règne un champ magnétique uniforme de vecteur $\vec{B}$ perpendiculaire à $\vec{v}$ (figure ci-contre).



La charge électrique de l'ion X^{2+} est notée q_x et sa masse est notée m_x.

Les deux particules Li^+ et X^{2+} sont soumises uniquement à la force de Lorentz.

Données: $V = 10^5 m.s^{-1}$; $B = 0,5T$; $e = 1,6.10^{-19}C$; $m(Li) = 6,015u$; $1u = 1,66.10^{-27}kg$

Sur la figure, on a représenté la trajectoire de chacune des deux particules.

1- Déterminer la direction, le sens et l'intensité de la force de Lorentz appliquée à la particule Li^+, au point O.

2- Indiquer le sens de $\vec{B}$ en utilisant l'un des deux symboles $\odot$ et $\otimes$.

3- En appliquant la deuxième loi de Newton, dans un repère galiléen, montrer que le mouvement de l'ion Li^+ est uniforme et de trajectoire circulaire, de rayon $R_{Li} = \frac{m_{Li}.V}{e.B}$.

4- En exploitant la figure, déterminer le rapport $\frac{R_X}{R_{Li}}$, où R_X rayon de X^{2+}.

5- Reconnaître la particule X^{2+} parmi les particules qui figurent dans le tableau suivant:

L'ion	$^{24}_{12}Mg^{2+}$	$^{26}_{12}Mg^{2+}$	$^{40}_{20}Ca^{2+}$
sa masse en (u)	23,985	25,983	39,952

Solution

1- Force de Lorentz.

Les deux particules sont déviées vers la droite sur la figure sous l'effet de la force magnétique qui est dirigée vers le centre de la trajectoire circulaire.

$\vec{F}$ est donc dirigée vers la droite.

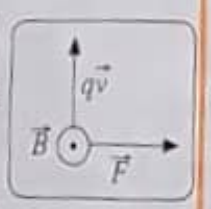
$F = |q|.V.B.\sin(90°) = e.V.B$

$= 1,6.10^{-19}.10^5.0,5 = 8.10^{-14}N$

2- Sens de $\vec{B}$.

on a: $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$

du fait que $(q\vec{v}, \vec{B}, \vec{F})$ est directe on applique la règle de la main droite:



3- Nature du mouvement

Utilisons la notation m et q pour la masse et la charge de Li^+.

La deuxième loi de Newton s'écrit:

$\vec{F} = m\vec{a}$ (1)

Or: $\vec{F} = q\vec{V} \wedge \vec{B}$ (2)

Donc: $m\vec{a} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ ou encore $\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{V} \wedge \vec{B}$

Ce résultat montre que $\vec{a} \perp \vec{V}$.

Puisque $\vec{v}$ est tangent à la trajectoire alors $\vec{a}$ est normale à la trajectoire d'où:

$a = a_n$ et $a_t = 0$

- Le résultat $a_t = 0$ donne $v = cte$; le mouvement est donc uniforme.

- Le résultat $a = a_n$ permet d'écrire:

$F = ma = ma_n$.

ou encore $|q|.V.B = m.\frac{V^2}{R}$; $R = \frac{mV}{e.B} = cte$

La trajectoire est donc circulaire de rayon $R_{Li} = \frac{m_{Li}.V}{e.B}$.

4- Le rapport:

on a: $\frac{R_X}{R_{Li}} = \frac{2R_X}{2.L_i} = \frac{6}{3} = 2$ (1)

5- La particule.

On utilise l'expression de R pour chacun des ions: $R_x = \frac{m_x.V}{2e.B}$ et $R_{Li} = \frac{m_{Li}.V}{e.B}$

D'après (1) on a $R_x = 2L_i$;

donc: $\frac{m_x.V}{2eB} = \frac{2m_{Li}.V}{eB}$; $m_x = 4m_{Li} = 24$

Cette valeur correspond à la particule ${}^{24}_{12}Mg^{2+}$.

10 (BAC-PC Juillet 2018)

Partie - I: Etude du mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme.

Parmi les applications de la force de Lorentz, le spectroscope de masse. C'est un appareil utilisé pour séparer des particules chargées de masses ou de charges différentes.

Le but de cette partie de l'exercice est de déterminer la masse d'une particule chargée en étudiant son mouvement dans un champ magnétique uniforme.

Deux particules chargées He^{2+} et O^{2-} sont introduites en un point A, avec la même vitesse initiale $\vec{V}$, dans un espace où règne un champ magnétique uniforme $\vec{B}$, perpendiculaire au vecteur $\vec{V}$.

On considère que les deux particules He^{2+} et O^{2-} ne sont soumises qu'à la force de Lorentz.

Données:

- On rappelle l'expression de la force de Lorentz: $\vec{F} = q\vec{V} \wedge \vec{B}$;
- La masse de la particule He^{2+} : $m(He^{2+}) = 6,68.10^{-27} kg$;
- La figure-1 représente l'enregistrement des deux trajectoires des particules He^{2+} et O^{2-} dans le champ magnétique uniforme $\vec{B}$.

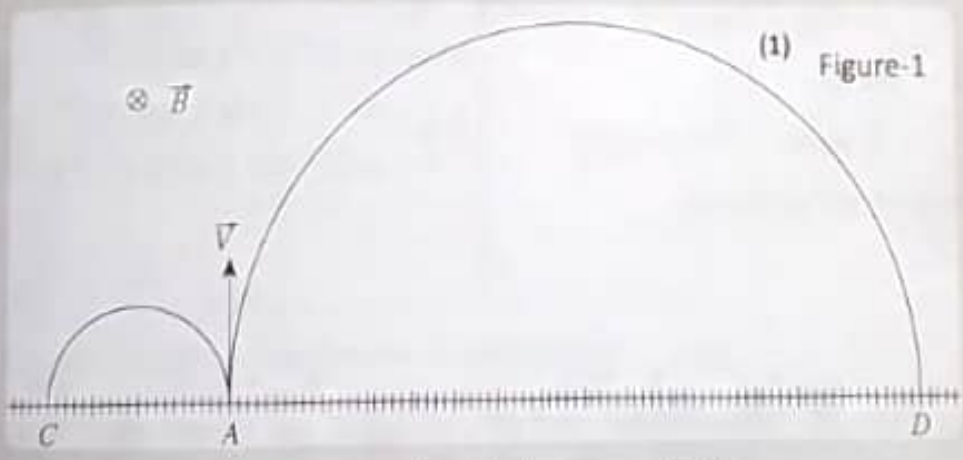


Figure-1

1- Identifier la trajectoire correspondant à chaque particule.

2- En appliquant la deuxième loi de Newton dans un référentiel galiléen, montrer que le mouvement de l'ion He^{2+} est uniforme et de trajectoire circulaire de rayon $R_{He^{2+}} = \frac{m(He^{2+}).V}{2e.B}$.

3- En exploitant la figure-1, déterminer le rapport $\frac{R_{O^{2-}}}{R_{He^{2+}}}$.

($R_{O^{2-}}$ étant le rayon de la trajectoire de la particule O^{2-}).

4- Montrer que la masse de la particule O^{2-} est: $m(O^{2-}) = 2,67.10^{-26} kg$.

Solution

1- La trajectoire:

Etant donné que le trièdre $(q\vec{v};\vec{B};\vec{F})$ est direct, par application de la règle de la main droite, on déduit que:

- La trajectoire (1) correspond à la particule O^{2-}.
- La trajectoire (2) correspond à la particule He^{2+}.

2- Le mouvement:

Système étudié (la particule He^{2+})

bilan des forces: $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ force de Lorentz Selon la 2e loi de Newton:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G$$

$$\vec{F} = m\vec{a}_G$$

$$q\vec{v} \wedge \vec{B} = ma_G$$

$$\vec{a}_G = \frac{q}{m}\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Dans le repère de Frenet:

$$\vec{a}_G = a_T\vec{u} + a_N\vec{n}$$

Or: $\vec{a}_G \perp \vec{v}$ donc:

- $a_T = \frac{dv}{dt} = 0$ alors: $v = v_0 = cte$:

le mouvement est uniforme.

- $a_G = a_N$.

donc: $\frac{|q|v_0 B}{m} = \frac{v_0^2}{\rho}$

$$\rho = \frac{mv_0}{|q|B} = cte$$

le mouvement est circulaire.

3- De la figure, on a: $R_{O^{2-}} = \frac{AD}{2}$

$$R_{He^{2+}} = \frac{AC}{2}$$

et:

donc: $\frac{R_{O^{2-}}}{R_{He^{2+}}} = \frac{AD}{AC}$

On a: $AD = 4AC$

Donc: $\frac{R_{O^{2-}}}{R_{He^{2+}}} = 4$

4- La masse:

On a: $R = \frac{mv}{|q|.B}$

donc: $R_{He^{2+}} = \frac{m(He^{2+}).v}{2.e.B}$

d'où: $\frac{R_{O^{2-}}}{R_{He^{2+}}} = \frac{m(O^{2-})}{m(He^{2+})}$

donc: $m(O^{2-}) = m(He^{2+}).\frac{R_{O^{2-}}}{R_{He^{2+}}}$

d'où: $m(O^{2-}) = 4.m(He^{2+})$

A.N.: $m(O^{2-}) = 4.6,28.10^{-27}$

$m(O^{2-}) = 2,672.10^{-26} Kg$

6 Mouvement des planètes et des satellites

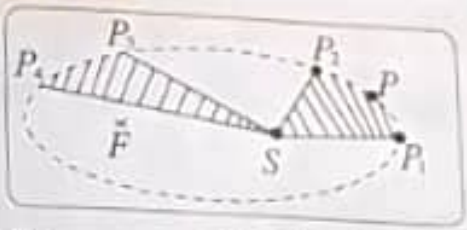
I- Lois de Kepler

1 1ère de kepler: loi des orbites:



l'un des foyers de la trajectoire elliptique lors du mouvement d'une planète autour du soleil et confondu avec le soleil.

2 2ème loi de kepler: loi des Aires:

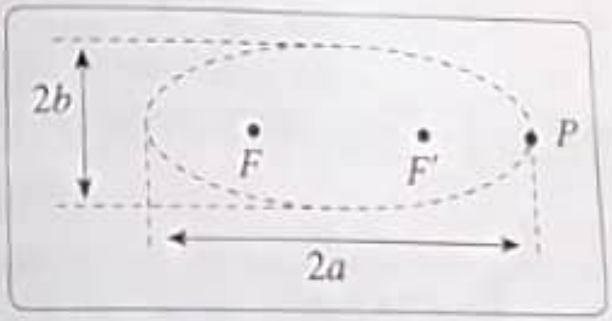


- $\Delta t \rightarrow A(SP_1P_2)$ aire balayée
- $\Delta t' \rightarrow A(SP_3P_4)$ aire balayée

les aires balayées par le segment $[S,P]$ sont égales pendant des durées égales

Si $\Delta t = \Delta t' \rightarrow A(SP_1P_2) = A(SP_3P_4)$

3 3ème loi kepler: loi des périodes



$\frac{T^2}{a^3} = k$ $k = cte$ dépend uniquement du référentiel.

Remarque: Le mouvement des planètes sera considéré comme circulaire et les lois de kepler seront appliquées.

II- Conditions d'obtention d'un mouvement circulaire uniforme:

Le mouvement du point M est circulaire uniforme:

donc: $v = cte$

On a: $v = r.\omega$

avec: $\omega = \frac{d\theta}{dt}$: vitesse angulaire.

Selon la 2ème loi de Newton: $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$

Dans le repère Frenet: $\vec{a} = a_T\vec{u} + a_N\vec{n}$; $\rightarrow a_T = \frac{dv}{dt} = 0$; $\vec{a} = a_N\vec{n}$

On pose: $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{F}$; $\vec{F} = ma_N\vec{n}$

si $\sum \vec{F}$ est centripète le mouvent est circulaire uniforme.

Donc: $\vec{F}$ est centripète.

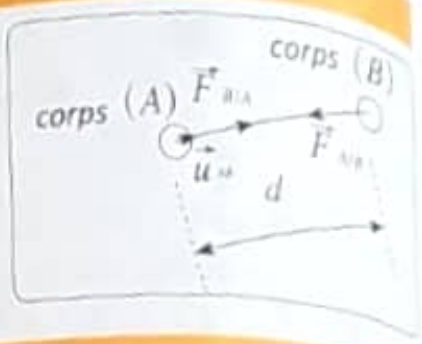


III- Loi de gravitation universelle:

Le mouvement est étudie dans le référentiel héliocentrique.

-D'après la loi de gravitaion de Newton.

$$\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A} = -\frac{Gm_A m_B}{d^2}\vec{u}_{AB}$$



IV- Mouvement des planètes:

1 Expression de la vitesse v:

Système étudié: (planète)

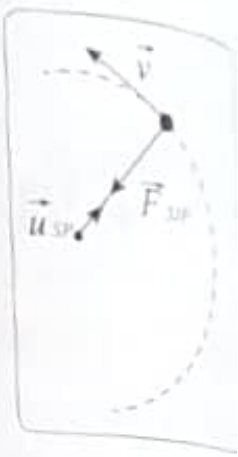
Bilan de force: $\vec{F}_{S/P}$; $\vec{F}_{S/P} = -\frac{GM_S m}{r^2}\vec{u}_{SP}$

La 2ème loi de Newton: $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$; $\vec{F}_{S/P} = m\vec{a}$.

- $\vec{F}_{S/P}$ est centripète donc le mouvement est circulaire uniforme.
- Dans le repère de Frenet:

$$\vec{a} = a_T\vec{u} + a_N\vec{n} \rightarrow a_T = \frac{dv}{dt} = 0$$

$$\rightarrow \vec{a} = a_N\vec{n}$$



d'où: $F_{S/P} = m.a_N$; $\frac{GM_S m}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$; $v = \sqrt{\frac{GM_S}{r}}$

2 Expression de la période T:

On a: $T = \frac{2\pi}{\omega}$; $T = 2\pi r\sqrt{\frac{r}{GM_S}}$

$$\omega = \frac{v}{r} \Rightarrow T = \frac{2\pi r}{v} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_S}}$$

tel que: $T^2 = 4\pi^2\left(\frac{r^3}{GM_S}\right)$; $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S} = cte$; 3ème loi de kepler.

V- Mouvement des satellites terrestres:

1 Expression de v et de T:

Le référentiel d'étude est géocentrique $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

Bilan de forces: $\vec{F}_{/TS}$

avec: $\vec{F}_{/S} = -\frac{GM_T m}{r^2}\vec{u}_{/S}$

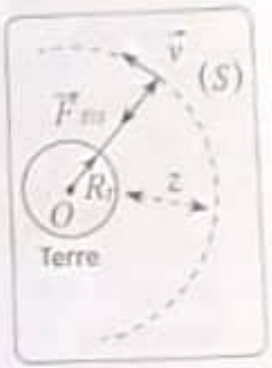
Selon la 2ème loi de Newton: $\vec{F}_{/S} = m\vec{a}$

$\vec{F}_{/S}$ est centripète donc le mouvement est circulaire uniforme.

donc: $a_T = \frac{dv}{dt} = 0$ et $\vec{a} = a_N\vec{n}$.

d'où: $F_{/S} = ma_N$

$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}} = \sqrt{\frac{GM}{R_T + z}}$$



La vitesse dépend uniquement de l'altitude z.

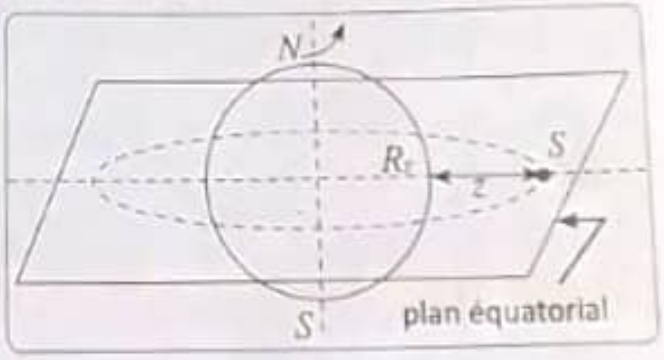
On a: $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi r\sqrt{\frac{r}{GM_T}}$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(R_T + z)^3}{GM_T}}$$

donc: $\frac{T^2}{(R_T + z)^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$ 3e loi de kepler.

2 satellites géostationnaires:

- Un satellite est géostationnaire s'il paraît immobile pour un observateur sur terre.
- Ceci impose que:
  - La trajectoire du satellite doit appartenir au plan équatorial.
  - Le sens du mouvement du satellite est le même que celui du mouvement de la terre autour de ses pôles.



- La période T orbitale du satellite est égale à celle du mouvement de rotation de la terre, égale à 1 jours sédéral.

$J = 86164s$: jour sidérale

L'altitude du satellite géostationnaire est l'ordre de 36000 km.

1 Tester vos connaissances;

Trouver les mots manquants:

a- Le référentiel qui est défini par le centre du Soleil et trois étoiles fixes est appelé .....

b- Dans ce référentiel, la trajectoire du centre d'une planète est une .....

c- Dans un mouvement circulaire uniforme, le vecteur accélération est .....

d- Le rapport du ..... de la période de révolution d'une planète ..... au demi-grand axe de l'ellipse est constant. C'est la ..... loi de .....

e- Un satellite qui est fixe par rapport au référentiel terrestre est appelé satellite .....

Solution

a- héliocentrique
b- ellipse
c- centripète
d- carré - cube - la 3 ème - Kepler.
e- géostationnaire.

2 Vrai ou faux ?

a- La période de révolution de la Terre est égale à un jour.

b- Si une planète a une trajectoire elliptique, sa vitesse est constante.

c- Dans un mouvement circulaire uniforme, l'accélération est nulle.

d- La trajectoire de la plupart des planètes est pratiquement circulaire.

e- La trajectoire d'un satellite géostationnaire est obligatoirement dans le plan de l'équateur.

Solution

a- faux b- faux c- faux d- faux e- vrai

3 QCM: choisir la bonne réponse

a- Dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme:

☐ la valeur de la vitesse est constante; ☐ le vecteur vitesse est constant;

☐ le vecteur accélération est constant; ☐ le vecteur accélération est nul.

b- La durée d'un tour complet d'une planète autour du Soleil est appelée:

☐ période de rotation; ☐ période de révolution.

c- on considère deux satellites S_1 et S_2 en orbite circulaire autour de la Terre. Si la vitesse de S_1 est supérieure à celle de S_2.

☐ l'altitude de S_1 est supérieure à celle de S_2; ☐ l'altitude de S_1 est inférieure à celle de S_2; ☐ ils peuvent avoir la même altitude.

Solution

a- La valeur de la vitesse est constante.
b- Période de révolution.
c- L'altitude de S_1 est inférieure à celle de S_2.

Exercices

1 Masse du Soleil:

Le repère de Copernic est défini de la façon suivante: origine, le centre d'inertie S du Soleil et trois axes vers des étoiles infiniment éloignées. Dans ce repere, la Terre est assimilable à un objet à symétrie sphérique de centre T; décrivant une orbite circulaire de centre S, de rayon $r = 1,498 \times 10^{11} m$ et avec une période de 365,25 jours.

1- Donner l'expression de la force d'interaction gravitationnelle exercée par le Soleil sur la Terre.

2- Exprimer la vitesse v et la période T de révolution de la Terre en fonction de r, de la constante de gravitation universelle G et de la masse M_S du Soleil.

3- En déduire la masse M_S du Soleil.

Solution

1- Expression de $\vec{F}_{ST}$:

D'après la loi de gravitation, on a:

$$\vec{F}_{ST} = -\frac{G M_S M_T}{r^2} \vec{u}_{ST}$$



2- Expression de v et de T:

- Bilan des forces: $\vec{F}_{ST}$
- Selon la 2ème loi de Newton:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m_T \vec{a}_G \; ; \; \vec{F}_{ST} = m_T \vec{a}_G$$

$\vec{F}_{ST}$ est centripète.

- Dans le repère de Frenet:

$$\vec{a}_G = a_T \vec{u} + a_N \vec{n} \; ; \; a_T = \frac{dv}{dt} = 0$$

$$a_G = a_N \Rightarrow F_{ST} = m_T a_N \; ; \; G \frac{M_S m_T}{r^2} = m_T \frac{v^2}{r}$$

$$v = \sqrt{\frac{G M_S}{r}}$$

$$G \frac{M_S m_T}{r^2} = m_T \frac{v^2}{r}$$

$$v = \sqrt{\frac{G M_S}{r}}$$

On a: $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi r \sqrt{\frac{r}{G M_S}}$

d'où: $T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{G M_S}}$

3- Calcul de M_S:

On a: $T^2 = 4\pi^2 \frac{r^3}{G M_S}$

$$M_S = \frac{4\pi^2 r^3}{G T^2}$$

A.N.:

$$M_S = \frac{4\pi^2 (1,498.10^{11})^3}{6,67.10^{-11} . (365,25.24.3600)^2}$$

$$M_S \approx 2.10^{30} kg$$

2 Un satellite de télécommunications a été placé en orbite autour de la Terre. Ce satellite est géostationnaire.

1- Donner les conditions pour qu'un satellite soit géostationnaire.

2- Représenter sur un schéma le satellite sur son orbite, le vecteur vitesse de son centre d'inertie, et la force que la Terre exerce sur lui.

3- Donner l'expression vectorielle de cette force.



4- Calculer l'altitude du centre d'inertie du satellite.

5- Calculer la vitesse du centre d'inertie du satellite.

Solution

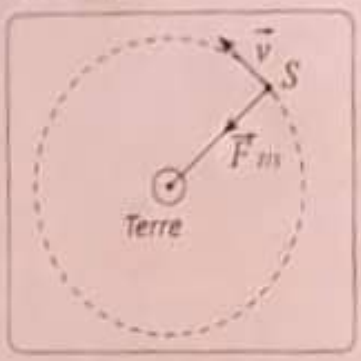
1- Conditions:

Un satellite est géostationnaire s'il satisfait les conditions:

- son orbite appartient au plan équatorial;
- le sens de son mouvement est le même que celui de la terre autour d'elle-même;
- sa période est égale à la période de rotation de la terre autour de l'axe polaires, qui, est égale à 1 jour sidéral.

2- Représentation:

- $\vec{v}$ est tangentielle.
- $\vec{F}_{/S}$ est centripète



3- Expression de $\vec{F}_{/S}$:

D'après la loi de gravition universelle

$$\vec{F}_{/S} = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{u}_r$$

4- Calcul de l'altitude:

Dans le repère géostationnaire la 3ème loi de kepler s'écrit:

$$\frac{T^2}{(R_T+h)^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$$

donc : $R_T + h = \sqrt[3]{\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}}$

$h = \sqrt[3]{\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}} - R_T$

$h = \sqrt[3]{\frac{6,67.10^{-11}.5,97.10^{24}.(8,62.10^4)^2}{4\pi^2}} - 6,38.10^6$

$h = 35,598.10^6 m \approx 36000 Km$

5- Calcul de la vitesse:

On a : $v = (R_T + h)\omega$

avec: $\omega = \frac{2\pi}{T}$

Donc : $v = (R_T + h)\frac{2\pi}{T}$

A.N.:

$v = (6,38.10^6 + 360.10^6).\frac{2\pi}{8,62.10^4}$

$v = 3,35.10^3 m/s$

3 On étudie le mouvement d'un satellite de la planète Saturne.

L'étude est faite par rapport à un référentiel ayant son origine au centre O de Saturne, et qui est considéré comme galiléen. On admet que la planète Saturne, de masse M, et son satellite, de masse m, ont une distribution de masse à symétrie sphérique et que l'orbite du satellite est un cercle de centre O et de rayon r.



1- Indiquer les caractéristiques de la force d'attraction gravitationnelle exercée par Saturne sur son satellite.

2- Montrer que le mouvement du satellite est uniforme.

3- Exprimer la vitesse v et la période T du satellite en fonction de G, r et M.

4- Montrer que le rapport $\frac{T^2}{r^3}$ est constant. Quel est le nom de la loi que ce résultat confirme?

5- Les observations permettent de mesurer la période de révolution T du satellite. On a trouvé $T = 22,6\ heures$.

Sachant que le rayon de l'orbite est: $r = 1,86 \times 10^5 km$, calculer la masse M de Saturne.

Donnée:

• Constante de gravitation universelle: $G = 6,67 \times 10^{-11} N.m^2.kg^{-2}$

Solution

1- Caractéristique de $\vec{F}_{S/S}$:

Dans le repère lié au centre de Saturne, la force de gravitation $\vec{F}_{S/S}$ exercée par Saturne sur son satellite:

$\vec{F}_{S/S} = -G.\frac{M_S.m}{r^2}\vec{u}_{S/S}$ de caractéristiques.

• ligne d'action: radial

• sens: centripète.

• intensité: $F_{S/S} = \frac{G.M_S.m}{r^2}$

2- Nature du mouvement circulaire

La force $\vec{F}_{S/S}$ étant centripète: $F = m.a_N$

$a_T = \frac{dv}{dt} = 0 \Longrightarrow v = cte$

Le mouvement circulaire est donc uniforme.

3- Expression de v:

D'après de 2e loi de Newton on a:

$$\vec{F}_{S/S} = m\vec{a}$$

Dans le repère de Frenet:

$$\vec{a} = a_T.\vec{u} + a_N.\vec{n}$$

avec: $a_T = \frac{dv}{dt} = 0$

donc: $F_{S/S} = m.a_N : \frac{G.M_S.m}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$

Donc: $v = \sqrt{\frac{G.M_S}{r}}$

4- L'expression:

On a: $v = r\omega$ et $\omega = \frac{2\pi}{T}$

donc: $v = r.\frac{2\pi}{T}$

$$\frac{G.M}{r} = r^2\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

d'où: $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G.M}$

Cette expression n'est que la 3e loi de Kepler.

5- Masse de Saturne:

On a: $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G.M}$; $M = \frac{4\pi^2.r^3}{T^2.G}$

A.N.: $M = \frac{4\pi^2(1,86.10^8)^3}{(22,6.24.3600)^2.6,67.10^{-11}}$

$M = 1,012.10^{26} Kg$

4 Des satellites sont animés d'un mouvement circulaire autour du centre de la Terre, avec une vitesse constante.

Dans le tableau ci-contre, on donne leur altitude h et leur vitesse v.

	Météosat	Iridium	Spot	Iss
altitude h en km	35800	780	830	274
vitesse v en $km.s^{-1}$	3,08	7,46	7,44	7,74

1- On veut trouver une relation simple reliant la vitesse v et la distance r au centre de la Terre de chaque satellite en exploitant ce tableau. Parmi les trois propositions suivantes, choisir la bonne relation: $r.v^2 = cte$; $v.r^2 = cte$; $v.r = cte$

Donnée: $R_T = 6,38.10^3 km$

2- On désire lancer un satellite au niveau du sol en effectuant un tir horizontal.

a- Calculer la vitesse v, en $km.s^{-1}$, qu'il faudrait communiquer à ce mobile pour que le rayon de sa trajectoire soit égal à celui de la Terre. On prend 3 chiffres significatifs.

b- Expliquer pourquoi il n'est pas possible de satelliser un objet à cette altitude.

Solution

1- La distance r au centre de la Terre est telle que: $r = R_T + h$

	Météosat	Iridium	Spot	Iss
distance $r(km)$	42180	7160	7210	6654
vitesse $v(km.s^{-1})$	3,08	7,46	7,44	7,74
$r.v^2$	$4,00.10^5$	$3,99.10^5$	$3,99.10^5$	$3,99.10^5$
$v.r^2$	$5,48.10^8$	$3,82.10^8$	$3,87.10^8$	$3,42.10^8$
$v.r$	$1,30.10^4$	$5,34.10^4$	$5,36.10^4$	$5,15.10^4$

Le tableau suivant donne les résultats pour les trois lois proposées:

Nous constatons que seule la quantité $r.v^2$ est constante.

La loi recherchée est donc: $r.v^2 = cte$.

2.a- Calcul de v:

Appliquons la loi précédente: $r.v^2 = cte$.

Prenons la constante égale à la valeur moyenne $3,99.10^5$ du tableau.

Or: $r = R_T = 6,38.10^3 km$;

d'où: $R_T.v^2 = 3,99.10^5$;

donc: $v = \sqrt{\dfrac{3,99.10^5}{6,38.10^3}} = 7,91 km.s^{-1}$

b- Explication:

Cette satellisation n'est pas possible, car le satellite est freiné par l'atmosphère. Pour une satellisation durable, il faut lancer l'engin à une altitude suffisante, nécessairement en dehors de l'atmosphère.

3 (BAC PC Juillet 2008)

Zarkae el yamama est un satellite marocain utilisé pour la surveillance des frontières géographiques du royaume et responsable de la communication et de l'alerte à distance. Ce satellite est réalisé par des scientifiques marocains en collaboration avec d'autres multinationales.

Ce satellite (S) est mis dans sa trajectoire le 10 septembre 2001 à une hauteur h de la surface de la terre. Ce satellite réalise environ 14 tours autour de la terre en une journée. On étudie son mouvement dans le référentiel géocentrique.

On suppose que la terre est de répartion sphérique et on néglige les dimensions de (S) devant la distance séparant (S) et la surface de la terre.

Données: $G = 6,67 \times 10^{-11}(SI)$

Le rayon de la Terre: $r_T = 6350Km$; $g_0 = 9,8ms^{-2}$

La période T de terre autour de l'axe polaire:

$T = 84164s$

La hauteur: $h = 1000Km$

$\vec{u}_{TS}$: vecteur unitaire de O vers S.



1- Copier le schéma et représenter le vecteur vitesse $\vec{v}_s$ de (S) et le vecteur force de l'attraction gravitationnelle qu'exerce la terre sur (S).

2- Donner l'expression vectorielle de la force de l'attraction gravitationnelle qu'exerce la Terre sur (S).

3- En appliquant la 2ème loi de Newton, et en utilisant le repère de Frenet, exprimer l'expression du vecteur accélération de (S).

4- En appliquant la 2ème loi de Newton:

4.1- Montrer que le mouvement de (S) est circulaire uniforme.

4.2- Ecrire l'expression V_s de g_0 et r_T et h. Calculer sa valeur.

5- Montrer que la masse de la terre est: $M_T = 6 \times 10^{24}kg$

6- Montrer que le satellite n'apparaît pas immobile par rapport à un observateur terrestre.

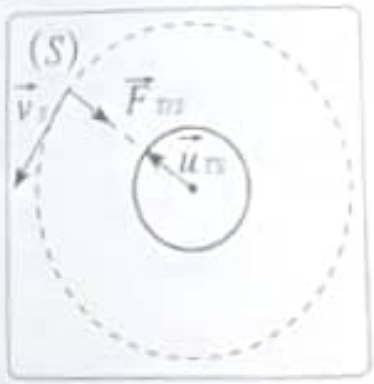
7- Un satellite (S') tourne autour de la Terre avec une vitesse angulaire ω tel qu'il apparaît immobile pour un observateur terrestre.

7.1- Montrer que: $\omega^2(r_T + z)^3 = cte$, avec: z est la distance séparant la surface de la terre et le satellite.

7.2- trouver la valeur de z.

Solution

1- Représentation de $\vec{v}_s$ et $\vec{F}_{TS}$:



La vitesse $\vec{v}_s$ est tangente à la trajectoire, alors que $\vec{F}_{TS}$ centripète.

2- Expression $\vec{F}_{TS}$:

D'après la loi de gravitation de Newton, on a: $\vec{F}_{TS} = -\dfrac{G.M_T.m}{(r_T + h)^2}\vec{u}_{TS}$

3- Expression de $\vec{a}_G$:

On appliquant la 2e loi de Newton:

$$\vec{F}_{TS} = m\vec{a}_G$$

$$-\frac{G.M_T.m}{r^2}\vec{u}_n = m\vec{a}_G$$

$$\vec{a}_G = -\frac{G.M_T}{(r_T + h)^2}\vec{u}_n$$

4.1- Nature du mouvement de (S):

D'après l'expression de $\vec{a}_{ex}$, on déduit que: $a_T = \frac{dv_S}{dt} = 0$

donc: $v = cte$ donc le mouvement de (S) est circulaire uniforme.

4.2- Expression de v_S:

On a: $a_n = a_c$

$$\frac{GM_T}{(r_T+h)^2} = \frac{v_S^2}{r_T+h}$$

d'où: $v_S = \sqrt{\frac{GM_T}{r_T+h}}$

à la surface de la Terre, on a: $F_{/m} = P$

$$\frac{GM_T.m}{r_T^2} = m.g_0$$

donc: $GM_T = g_0.r_T^2$

donc: $v_S = \sqrt{\frac{g_0.r_T^2}{r_T+h}}$

A.N.: $v_S = \sqrt{\frac{9,8.(6350.10^3)^2}{(6350+1000).10^3}}$

$\simeq 7332,4m/s$

5- Masse de la Terre:

On a: $g_0 = \frac{GM_T}{r_T^2}$

donc: $M_T = \frac{g_0.r_T^2}{G}$

A.N.:

$M_T = \frac{9,8.(6350.10^3)^2}{6,67.10^{-11}} \simeq 5,92.10^{24}Kg$

$M_T \simeq 6.10^{24}Kg$

6- Le satellite n'est pas géostationnaire:

Le satellite fait 14 tours par jours donc sa période de révolution est:

$$T_S = \frac{24h}{14} = 1,71h\ ; = 6171,4s$$

or la période de révolution de la Terre autour d'elle est: $T = 86164_s$

donc: $T_S < T$, le satellite (S) n'est pas géostationnaire.

7.1- La relation:

La vitesse v'_S du satellite (S') s'écrit:

$$v'^2_S = g_0.\frac{r_T^2}{r_T+z}$$

et on a: $v'_S = (r_T+z)\omega$

donc: $(r_T+z)^2\omega^2 = g_0.\frac{r_T^2}{r_T+z}$

d'où: $(r_T+z)^3.\omega^2 = g_0.r_T^2$

avec: $g_0.r_T^2 = cte$

donc: $(r_T+z)^3.\omega^2 = cte$

avec: $g_0.r_T^2 = cte$

donc: $(r_T+z)^3.\omega^2 = cte$

7.2- Détermination de z:

La période du satellite (S) est:

$$T'_S = \frac{2\pi}{\omega}$$

(S') étant géostationnaire donc:

$$T'_S = T$$

$\frac{2\pi}{\omega} = T$ donc: $\omega^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$.

alors: $\omega^2 = \frac{g_0.r_T^2}{(r_T+z)^3} = \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2$

donc: $(r_T+z)^3 = \frac{g_0.r_T^2.T^2}{4\pi^2}$

$$z = \sqrt[3]{\frac{g_0.r_T^2.T^2}{4\pi^2}} - r_T$$

A.N.:

$z = \sqrt[3]{\frac{9,8.(6350.10^3).(84164)^2}{4.(3,14)^2}} - 6350.10^3$

$z = 35053,4Km$

(BAC SM Juillet 2011)

Etude du mouvement d'un satellite:

Le satellite «HOTBIRD» est immobile par rapport à un observateur sur la terre. Il est utilisé pour des besoins de télécommunications, pour la télédiffusion et la radiodiffusion.

Les antennes concaves fixées sur la Terre et dirigées vers le satellite «HOTBIRD» captent les signaux provenant de ce satellite, sachant que ces antennes ne possèdent aucun système pour suivre le mouvement du satellite «HOTBIRD».



Figure-1

Données:

- Masse de la Terre: $M_t = 5,98 \times 10^{24} Kg$
- Rayon de la Terre: $R_t = 6400 Km$
- Constante de gravitation universelle: $G = 6,67 \times 10^{-11} (SI)$
- La Terre est sphérique à répartition analogique de masse.
- La durée au bout de laquelle la Terre effectue un tour autour de son axe polaire $T = 23h56\,\text{min}\,4s$
- L'altitude du satellite HOTBIRD par rapport à la terre $h = 36000 Km$.

1- L'antenne concave pour la réception des ondes électromagnétiques:

Une antenne concave fixée sur le toit de la maison se trouve à une latitude $\lambda = 33,5°$

1.1- Calculer dans le repère géocentrique la vitesse v_p de l'antenne concave qu'on considère ponctuel.

1.2- Justifiez pourquoi l'antenne n'a pas besoin d'un système pour suivre le mouvement du satellite «HOTBIRD».

2- Etude du mouvement du satellite «HOTBIRD»:

On pose le satellite «HOTBIRD» et un point physique de masse m_s de façon symétrique.

2.1- En appliquant la 2ème loi de Newton, trouver l'expression de la vitesse v_s du satellite HOTBIRD en fonction de G et M et R et h.

2.2- On considère deux orbites (1) et (2) d'un satellite en mouvement circulaire uniforme représentées sur la figure-2.

Choisissez la bonne réponse en justifiant votre réponse, l'orbite qui peut correspondre au satellite «HOTBIRD» est:

a- l'orbite (1) ; b- l'orbite (2).

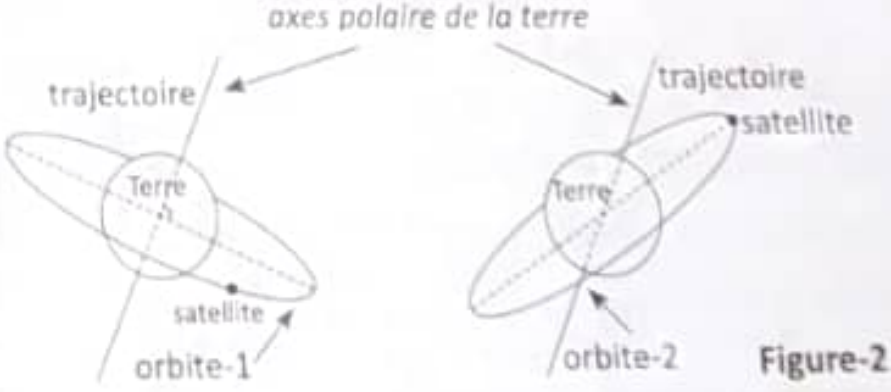


Figure-2

Solution

1.1- Calcul de la vitesse v_P du parabole:

Le mouvement du parabole par rapport a un référentiel géocentrique étant circulaire uniforme de rayon: $r = R_T \cos\lambda$

de vitesse: $v_P = r.\omega$ et $\omega = \frac{2\pi}{T}$

donc: $v_P = \frac{2\pi}{T} R_T . \cos\lambda$

A.N.: $v_P = \frac{2\pi.64.10^3 \cos 33,5}{23\times 3600 + 56\times 60 + 4}$

$v_P = 3,9.10^2 m/s$

1.2- Justification:

Le satellite «HOTBIRD» étant géostationnaire, donc aussi pour la parabole, alors la parabole n'a pas besoin d'un système complémentaire pour poursuivre le mouvement de ce satellite.

2.1- Expression de la vitesse du satellite:

Bilan des forces: $\vec{F}_{/S}$.

Selon la 2e loi de Newton: $\vec{F}_{/S} = m.\vec{a}_S$

dans le repère de Frenet:

$$\vec{a} = a_T\vec{u} + a_N\vec{n}$$

avec: $a_T = \frac{dv}{dt} = 0$ car $\vec{F}_{/S} = F_{/S}\vec{n}$

donc: $F_{/S} = m.a_N$

$$\frac{G.M_T.m}{r} = m\frac{v^2}{r}$$

donc: $v = \sqrt{\frac{G.M_T}{r}} = \sqrt{\frac{G.M_T}{(R_T+h)}}$

A.N.: $v = \sqrt{\frac{6,67.10^{-11}.5,98.10^{24}}{(6,4+3,6).10^7}}$

$= 3,07.10^3 m/s$

2.2- La bonne réponse:

Le satellite étant géostationnaire, sa trajectoire appartenant au plan équatorial, perpendiculaire à l'axe polaire, cela correspond à l'orbite 1.



7 (BAC PC juillet 2010)

Mars est l'une des planètes du système solaire qu'on peut observer facilement à cause de sa luminosité et sa couleur rouge.

Mars a deux satellites phobos et Dimos.

Depuis longtemps, les scientifiques étaient intéressés de l'étudier ainsi ils ont envoyé des satellites qui ont permis d'obtenir des informations importantes.

Cet exercice a pour objectif de déterminer quelques grandeurs physiques de cette planète.

Les données:

- La masse du soleil: $M_S = 2.10^{30} kg$
- Rayon de Mars: $R_M = 3400 Km$

La constante du la gravitation universelle: $G = 6,67.10^{-11} (SI)$.

La période de mouvement de Mars autour de soleil: $T_M = 687 Jours$

$Jour = 86400 s$.

- L'intensité de la pesanteur sur la Terre: $g_0 = 9,8N.kg^{-1}$

1- Détermination du rayon, de la trajectoire, de la nature du mouvement et de la valeur de la vitesse.

On considère que le mouvement de Mars dans le référentiel héliocentrique est circulaire, sa vitesse est v et r le rayon de sa trajectoire. (On néglige des dimensions de Mars par rapport à la distance qui le sépare avec le centre du soleil et on néglige aussi les autres forces appliquées devant la force du gravitation universelle exercée par le soleil).

1.1- Représenter sur un shéma la force appliquée par le soleil sur Mars.

1.2- Ecrire en fonction de G, M_S, M_M, r l'expression de l'intensité F_{SM} de la force de gravitation universelle appliquée par le soleil sur Mars.

(M_M représente la masse de Mars-.

1.3- En appliquant la 2e loi de Newton, montrer que:

1.3.1- Le mouvement de Mars est un mouvement circulaire uniforme.

1.3.2- la relation entre la période et le rayon est $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S}$ et que la valeur de r est: $r \simeq 2,3.10^{11}m$. Cette valeur était mesurée à sa surface par des appareils.

1.4- Trouver la vitesse V.

2- Détermination de la masse de Mars et de l'intensité de pesanteur.

On considère que la satellite Phobos est en mouvement circulaire uniforme autour du centre de Mars à une distance $Z = 6000km$ da la surface.

La période de son mouvement et $T_r = 460\,min$ (on néglige les dimensions de Phobos face aux autres dimensions)

En étudiant la mouvement de Phobos dans le référentiel dont l' origine est confondu avec le centre de Mars et que l'on considére comme galiléen

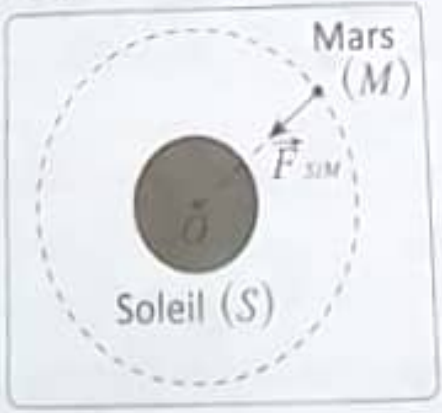
2-1- Trouver le Masse M_M de Mars.

2-2- Déterminer l'intensité de la pesanteur g_{0M} à la surface de Mars et la comparer à $g_{M_m} = 3,8N.kg^{-1}$ mesurée à sa surface par des appareils très preçis.

Solution

1.1- Représentation de $\vec{F}_{SM}$:

la force $\vec{F}_{SM}$ est centripète.



1.2- Expression de $\vec{F}_{SM}$:

d'après la loi de gravitation.

$$\vec{F}_{SM} = -\frac{GM_S.M_M}{r^2}\vec{u}_{SM}$$

1.3.1- Nature de mouvement:

On applique la 2e loi de Newton:

$$\sum \vec{F}_{SM} = M_M\vec{a} \; ; \vec{F}_{SM} = M_M\vec{a}$$

$\vec{F}_{SM}$ étant centripète donc le mouvemen est circulaire uniforme.

1.3.2- La relation:

Dans le repère de Frenet, on a:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = 0$$

donc: $\vec{a} = a_n \vec{n}$

D'où: $F_{S/M} = M_M . a_n$

$$G.\frac{M_S M_M}{r^2} = M_M . \frac{v^2}{r}$$

$$v^2 = \frac{GM_S}{r}$$

et on a: $v = r\omega = r.\frac{2\pi}{T_M}$

Alors: $r^2\left(\frac{2\pi}{T_M}\right)^2 = G.\frac{M_S}{r}$

donc: $\frac{4\pi^2}{T_M^2} = G.\frac{M_S}{r^3}$

$$\frac{T_M^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{T_M^2 . GM_S}{4\pi^2}}$$

A.N.:

$$r = \sqrt[3]{\frac{(687.24.3600)^2 . 6,67.10^{-11} . 2.10^{30}}{4\pi^2}}$$

$r = 2,28.10^{11} m = 2,28.10^8 Km$

1.4- Valeur de la vitesse v:

On a: $v = \sqrt{\frac{GM_S}{r}}$

$$v = \sqrt{\frac{6,67.10^{-11} . 2.10^{30}}{2,28.10^{11}}}$$

$v = 2,42.10^4 m/s$

2.1- Détermination de la masse du Mars

• Système étudié: (Phobos)

• Bilan des forces: $\vec{F}_{M/P}$

On applique la 2e loi de Newton dans le repère lié au centre de Mars.

On écrit: $\vec{F}_{M/P} = m_P . \vec{a}$

puisque le mouvement de photos est circulaire uniforme, on a alors:

$$F = m_P . \frac{v_P^2}{(R_M + z)}$$

$$G.\frac{M_M . m_P}{(R_M + z)^2} = m_P . \frac{v_P^2}{R_M + z}$$

2.2- $M_M = \frac{v_P^2 (R_M + z)}{G} = 6,5.10^{23} kg$

2.2- $g_M = \frac{GM_M}{R_M^2} = 3,75 N.kg^{-1}$

8

1- Le tableau ci-dessous comporte des données relatives à deux types de satellites artificiels de la Terre en rotation uniforme dans le référentiel géocentrique.

	MÉTÉOSAT	SPOT
date de lancement	1977 1981	1986 1990
altitude (km)	35800	832
période (min)	1436	102
champ d'observation au sol	quasiment la moitié de la surface terrestre.	carré de 3600km²

a- L'un de ces satellites est dit géostationnaire. Indiquer lequel et justifier la réponse.

b- L'autre satellite est appelé «satellite à défilement»; il évolue dans le plan contenant l'axe des pôles. Donner une explication de ce terme.

2- Connaissant l'altitude de chacun de ces satellites, on se propose de vérifier par le calcul leur période de révolution.

La valeur du champ de pesanteur (attraction terrestre) à l'altitude h est donnée par: $g_h = g_0 . \frac{R^2}{(R+h)^2}$, avec g_0: intensité de la pesanteur au sol et R: rayon de la Terre.

a- En appliquant la deuxième loi de Newton au mouvement circulaire uniforme du satellite, déterminer l'expression de la vitesse de chaque satellite.

b- Définir la période de révolution de chaque satellite et donner son expression en fonction de g_0, R et h.

c- Calculer les périodes des deux satellites connaissant leurs altitudes.

Données: $R = 6380km$ et $g_0 \approx 9,8m.s^{-2}$.

Solution

1.a- satellite géostationnaire:

Le satellite MÉTÉOSAT placé en orbite auteur de la Terre à environ $36000km$ d'altitude, est géostationnaire.

En effet, sa période donnée dans le tableau ci-dessus est égale au jour sidéral:

$$T = 1436 \times 60 = 86160s.$$

b- Explication: Dans le référentiel terrestre, le plan de la trajectoire de ce satellite n'est pas fixe, mais tourne autour de l'axe des pôles. Ce satellite «balaie» la surface de la Terre.

2.a- Expression de V:



D'après la 2e loi de Newton:

$\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}$,

soit:

$\vec{P} = m.\vec{g} = m.\vec{a}$,

$\vec{a} = \vec{g}$ dans le repère de Frenet:

$$\{a_T = 0 ; a_N = g_0 = \frac{v^2}{r}$$

À l'altitude h, $r = R + h$,

alors: $g_0 = g_0 \cdot \frac{R^2}{(R+h)^2} = \frac{v^2}{(R+h)}$

d'où: $v = R.\sqrt{\frac{g_0}{R+h}}$.

b- Expression de T : Par définition,

$$T = \frac{2\pi . r}{v} = 2\pi . \frac{(R+h)}{R\sqrt{\frac{g_0}{R+h}}}$$

soit: $$T = \frac{2\pi}{R} \cdot \sqrt{\frac{(R+h)^3}{g_0}}$$

c- Calcul des periodes:

A.N.: pour spot:

$T = 86200s$, soit $1437\,\text{min}$

pour MÉTÉOSAT:

$T = 6090s$, soit $102\,\text{min}$.

On donne dans le tableau ci-dessous, quelques caractéristiques de la Terre, celles de Jupiter et de leurs mouvements de révolution autour du soleil, considérés de trajectoire circulaire de rayon r.

Planète	Terre	Jupiter
r	$149,6.10^6 km$	
Période de révolution autour du soleil	1an	$11,86ans$

1- Écrire l'énoncé de la troisième loi de Kepler.

L'exprimer dans le cas d'un mouvement circulaire du centre de gravité d'une planète autour du soleil de masse M_s.

2- En appliquant cette loi, calculer la donnée manquante dans le tableau précédent.

3- Cette loi permet-elle de calculer la masse de Jupiter?

4- Calculer la masse du soleil. On donne $1an = 365$ jours et 1 jour = 24h.

Solution

1- Loi de Kepler:

La troisième loi de Kepler montre en particulier que pour une planète donnée, dans le référentiel héliocentrique le rapport:

$$\frac{T^2}{r^3} = cte = \frac{4\pi^2}{M_S}.$$

avec: - T: période de révolution.

- r: rayon de la trajectoire

2- Valeur manquante:

La troisième loi de Kepler s'écrit $\frac{T^2}{r^3} = c^{te}$ où la constante K_S est indépendante de la planète étudiée.

Donc: $\frac{T_{Terre}^2}{r_{Terre}^3} = \frac{T_{Jupiter}^2}{r_{Jupiter}^3}$.

On en déduit: $r_{Jupiter} = r_{Terre}\left(\frac{T_{Jupiter}}{T_{Terre}}\right)^{\frac{2}{3}}$.

A.N.: $a_{Jupiter} = 778.10^6 km$

3- Masse de Jupiter:

Non, car la constante est liée uniquement à la masse du soleil.

4- Calcul de M_S:

On a: $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G.M_S}$ d'où: $M_S = \frac{4\pi^2 r^3}{G.T^2}$.

En prenant l'une des deux planètes, on peut calculer la masse M_S.

$$M_S = \frac{4\pi^2.r_T^3}{G.T_T^2}$$

$$= \frac{4\pi^2(149,6.10^9)^3}{6,67.10^{-11}.(365.24.3600)^2}$$

$$M_S \simeq 2.10^{30} kg$$

10 La Terre est supposée sphérique, de rayon R_T et de masse M_T. La répartition des masses est de symétrie sphérique. Le champ gravitationnel terrestre, à l'altitude h, a pour expression: $g = G.\frac{M_T}{(R_T + h)^2}$, où G est la constante de gravitation universelle.

Données: $G = 6,67.10^{-11}(U.S.I)$ et $g_0 = 9,8 m.s^{-2}$, $R_T = 6376 km$.

g_0 intensité du champ de gravitation au sol.

1- établir l'expression de la valeur du champ gravitationnel g à l'altitude h en fonction de h, R_T et g_0.

2- On considère un satellite artificiel de la Terre décrivant une trajectoire circulaire de centre O, à l'altitude $h = 350 km$.

a- Nommer le référentiel d'étude du mouvement du satellite.

b- Donner l'expression du vecteur accélération du satellite.

c- Justifier le fait que le mouvement est uniforme.

d- Calculer la vitesse du satellite et calculer sa période.

Solution

1- Expression de g:

Au niveau du sol où $h = 0$, on a:

$$g_0 = G.\frac{M_T}{(R_T + 0)^2} = G.\frac{M_T}{R_T^2}$$

On déduit que: $G.M_T = g_0.R_T^2$.

En revenant à l'expression de g dans l'énoncé, il vient:

$$g = \frac{g_0 R_T^2}{(R_T + h)^2} = g_0\left(\frac{R_T}{R_T + h}\right)^2$$

2.a- Le référentiel:

Le référentiel géocentrique

b- Expression de $\vec{a}$:

D'après la deuxième loi de Newton:

$$\vec{F}_{ms} = m.\vec{a}$$

Avec $\vec{F}_g = m\vec{g}$, il vient $\vec{a} = \vec{g}$.

c- Le mouvement est uniforme

on a: $\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$

$\vec{a}$ est centripète (vers le centre de la terre).

alors: $a_T = 0$, ou encore $\frac{dv}{dt} = 0$,

donc: $v = cte$.

d- Calcul de V et de T:

on a: $F_g = ma_N$;

- Comme $F_g = ma_N = m\frac{V^2}{r}$

$$mg = m.\frac{V^2}{r}$$

$$V^2 = g.r$$

$$V^2 = g_0\left(\frac{R_T}{R_T + h}\right)^2 (R_T + h)$$

$$V^2 = \frac{g_0 R_T^2}{(R_T + h)}$$

$$V = R_T\sqrt{\frac{g_0}{R_T + h}}$$

$$V = 6376.10^3\sqrt{\frac{9,8}{(6376 + 350)10^3}}$$

$$V \simeq 7,7.10^3 m/s$$

la période T est:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi r}{V} = \frac{2\pi (R_T + h)}{V}$$

$$T = \frac{2\pi (6376 + 350).10^6}{7,7.10^3} \simeq 5,486.10^3 s$$

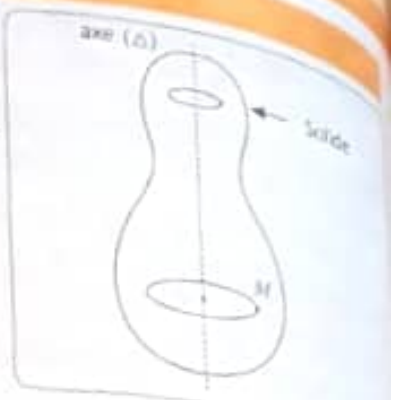
$$T \simeq 1h31\min 26s$$

7 Mouvement de Rotation d'un solide autour d'un axe fixe

I- Grandeurs cinématiques

1 Définition de rotation:

Un solide est en mouvement de rotation autour d'un axe fixe (Δ), si tous ses points, dercrivent des trajectoires circulaires, centrées sur l'axe (Δ).



2 Etude du mouvement:

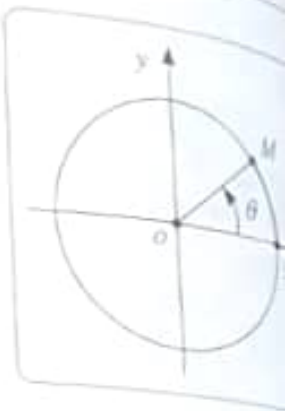
Soit M un point d'un solide en rotation.

2.1- Repérage de M

Pour repérer la position du point M on utilise

a- L'abscisse angulaire

définie par: $\theta(t) = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$ (rad)



b- L'abscisse curviligne

définie par: $s(t) = \widehat{\Omega M}$ (m)

La relation entre $s(t)$ et $\theta(t)$ est:

$$s(t) = r\,\theta(t)$$

2.2- La vitesse

a- La vitesse angulaire

$$\omega = \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} \quad \text{(rad/s)}$$

b- La vitesse lineaire

définie par: $v = \frac{ds}{dt}$ (m/s)

c- La relation entre v et $\dot{\theta}$.

On montre que: $v = r\dot{\theta}$

2.3- L'accélération.

a- L'accélération angulaire

$$(rad/s^2) \quad \ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

b- L'accélération linéaire.

dans le repère de Frenet $\vec{a} = a_T\vec{u} + a_N\vec{n}$

- a_T est l'accélération tangentielle
- a_N est l'accélération normale

avec: $a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(r\dot{\theta}) = r\ddot{\theta}$

$a_T = r\ddot{\theta}$

$a_N = \frac{v^2}{r} = \frac{(r\dot{\theta})^2}{r}$

$a_N = r\dot{\theta}^2$ donc: $a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2}$

II- Relation fondamentale de la dynamique de rotation

Enoncé: La somme des moments des forces appliquées sur un solide en rotation autour d'un axe (Δ) fixe est égale à tout instant au produit de son moment d'inertie J_Δ et son accélération angulaire on écrit:

Expression: $$\sum M_\Delta(\vec{F}) = J_\Delta.\ddot{\theta}$$

J_Δ: le moment d'inertie du corps solide par rapport à l'axe (Δ) exprimé en $(kg.m^2)$ et $\ddot{\theta}$ l'accélération angulaire exprimée en (rad/s^2).

Rappels:

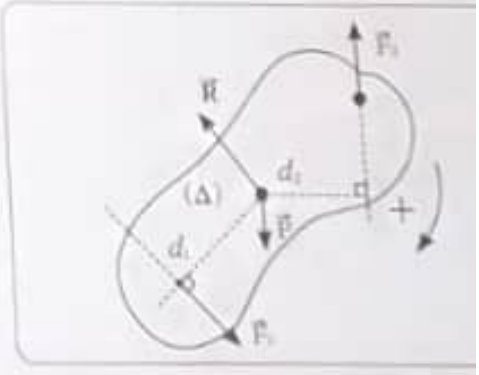
1 le moment d'une force. $M_\Delta(\vec{F}) = \pm F.d$

Exemple: Soit la figure ci-contre:

bilan des forces $\vec{P}, \vec{R}, \vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$.

$M_\Delta(\vec{P}) = M_\Delta(\vec{R}) = 0$

$M_\Delta(\vec{F}_1) = -F_1.d_1$; $M_\Delta(\vec{F}_2) = -F_2.d_2$



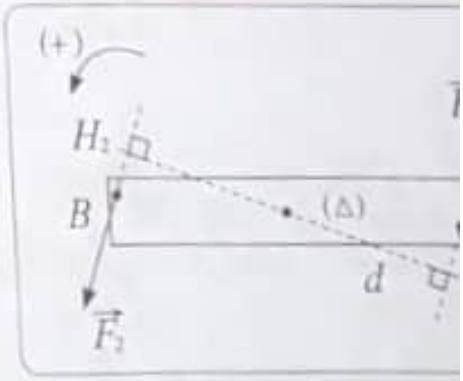
2 Couple de force.

Un couple de deux forces est constitué de deux forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ ayant.

- même intensité $F_1 = F_2 = F$.
- lignes d'actions parallèles et sens opposés.

$(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ forment un couple de force de moment:

$$M_\Delta(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = \pm F.d$$



Couples de plusieurs forces:

1- Couple de torsion $M_C = -c\theta$

2- Couple de frottement $M_C < 0$

3- Couples moteur $M_C > 0$

Analogie entre les mouvements de translation et de rotation

Grandeurs	Translation rectiligne	Rotation
grandeurs cinématiques	x, v, a	$\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$
mouvement uniforme	$M.R.U\ ;\ a = 0\ ;\ v = c^{te}$ equation horaire $x = vt + x_0$	$M.C.U \quad \ddot{\theta} = 0\ ,\ \dot{\theta} = c^{te}$ equation horaire $\theta(t) = \dot{\theta}t + \theta_0$ 
mouvement uniformément varié	$M.R.U.V \quad a = c^{te}$ $\begin{cases} v = at + v_0 \\ x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 + x_0 \end{cases}$	$M.C.U.V \quad \ddot{\theta} = c^{te}$ $\begin{cases} \dot{\theta} = \ddot{\theta}t + \dot{\theta}_0 \\ \theta = \frac{1}{2}\ddot{\theta}t^2 + \dot{\theta}t + \theta_0 \end{cases}$ 
Principe d'inertie	1ère loi de Newton $\sum \vec{F}ext = \vec{0}$ $\vec{v} = c^{te}$	theorème des moments $\sum M_{\Delta}(\vec{F}) = 0 \quad \dot{\theta} = c^{te}$
lois dynamiques	2ème loi de Newton $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G$	R.F.D de rotation $\sum M_{\Delta}(\vec{F}) = J_{\Delta}\ddot{\theta}$
	• m: masse (kg) • $\vec{F}$ la force (N)	• J_{Δ} : moment d'inertie $(kg.m^2)$ • M_{Δ} moment $(N.m)$
Energie cinétique	$E_c = \frac{1}{2}mv^2$	$E_c = \frac{1}{2}J_{\Delta}\dot{\theta}^2$

Mots manquants:

a- Le moment d'une force $\vec{F}$ d'intensité constante par rapport à un axe de rotation (Δ) fixe est égal au ..... de ..... de la force $\vec{F}$ et de la ..... d séparant la ligne ..... de $\vec{F}$ et l'axe (Δ).

b- Dans un repère galiléen la somme algébrique ..... appliquées sur un solide en ..... autour d'un axe (Δ) fixe est ..... au produit du ..... du corps solide par rapport à (Δ) et à son ..... angulaire.

c- L'accélération angulaire d'un corps solide en ..... par rapport à un axe de rotation (Δ) et ..... à la derivée ..... de ..... angulaire.

Solution

a- produit - l'intensité - distance - d'action. | d'inertie - Accéleration.
b- des forces - rotation - égale - moment | c- rotation égale - seconde - l'abscisse.

Vrai ou faux?

1- La vitesse angulaire d'un solide en rotation

a- est la même pour tous les points du corps solide. V F

b- est égale à la vitesse linéaire. V F

c- a la même unité que le temps. V F

2- relation fondamentale de la dynamique s'applique pour à un:

a- solide en translation. V F

b- solide en rotation. V F

c- solide en équilibre. V F

3- Un solide est en mouvement de rotation autour d'un axe (Δ) fixe.

a- Ses points sont en mouvement de rotation. V F

b- Ses points sont en mouvement de translation rectiligne. V F

c- Ses points sont en mouvement circulaire. V F

Solution

1- a- V ; b- F ; c- F
2- a- F ; b- V ; c- V
3- a- F ; b- F ; c- V

Exercice1

Une tige AB homogène de masse $m = 0,25\,kg$ de longueur $L = 60\,cm$ peut tourner autour d'un axe fixe vertical (Δ) passant par son centre d'inertie G. Sous l'action d'un couple moteur de moment constante $M_c = 9.10^{-2}\,N.m$, la tige se met en mouvement à l'instant $t = 0$;



on néglige les frottements.

1- Par application de la relation fondamentale de la dynamique de rotation, trouver l'expression de l'accélération angulaire $\ddot{\theta}$ du mouvement en fonction de M, L et m. Calculer sa valeur.

2- Quelle est la nature du mouvement de la tige?

3- Trouver l'équation horaire du mouvement de la tige, sachant que à $t = 0$; l'abscisse angulaire $\theta_0 = 0$.

4- Trouver l'équation de la vitesse angulaire.

5- Calculer le nombre de tours effetués pendant la durée $\Delta t = 15\,s$.

on donne: $J_\Delta = \frac{1}{12}mL^2$.

Solution

1- Expression de $\ddot{\theta}$

Système etudié (la tige)

-Bilan des forces $\vec{P}, \vec{R}$ et le couple moteur

- On applique la relation fondamentale de la dynamique.

$$\sum M_\Delta(\vec{F}) = J_\Delta \ddot{\theta}$$

$$M_\Delta(\vec{P}) + M_\Delta(\vec{R}) + M_c = J_\Delta \ddot{\theta}$$

$0 \quad 0$

$$M_c = J_\Delta \ddot{\theta} \Longrightarrow \ddot{\theta} = \frac{M_c}{J_\Delta}$$

donc: $\ddot{\theta} = \frac{12M_c}{mL^2}$

A.N.: $\ddot{\theta} = \frac{12.9.10^{-2}}{0,25.(0,6)^2} = 12 rad/s^2$

2- Nature du mouvement:

On a: $\ddot{\theta} = c^{te}$ donc le mouvement de la tige est un mouvement de rotation uninformement varié

3- Equation horaire

L'équation du mouvement:

s'ecrit: $\theta(t) = \frac{1}{2}\ddot{\theta}t^2 + \dot{\theta}_0 t + \theta_0$

à $t = 0 \quad \dot{\theta}_0 = 0$ et $\theta_0 = 0$

donc: $\theta(t) = \frac{1}{2}.12t^2$

$$\theta(t) = 6t^2$$

4- Equation de la vitesse

On a: $\dot{\theta}(t) = \ddot{\theta}t + \dot{\theta}_0$

donc $\dot{\theta}(t) = 12t$

5- Calcul de n nombre de tours.

On a: $\Delta\theta = 2\pi.n$

donc $n = \frac{\Delta\theta}{2\pi}$

avec: $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_0$

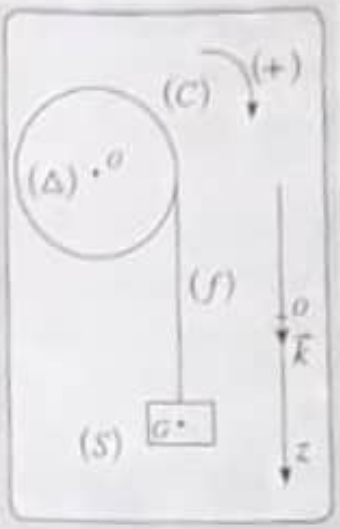
$$= 6t_1^2 - 6t_0^2 = 6\Delta t^2$$

donc: $\Delta n = \frac{6.\Delta t^2}{2\pi}$

A.N.: $n = \frac{6.15^2}{2\pi} \approx 215\ tours$

2 On considère le système ci-contre formé de:

- Un cylindre (C) homogène de rayon $r = 10\,cm$, peut avoir un mouvement de rotation autour d'un axe (Δ) fixe horizontal, confondu avec son axe de symétrie.
- Un corps solide (S) de masse $m = 400g$.
- Un fil (f) inextensible de masse négligeable lié au corps (s) et enroulé sur le cylindre (C).



On abandonne le système à l'instant $t = 0$ sans vitesse initiale, l'etude expérimentale a permis de trouver l'équation de la vitesse du mouvement du corps (S): $v(t) = 5t + 0,55$.

1.1- Quelle est la nature du mouvement du corps (S)? Calculer son accéleration a.

1.2- Donner l'équation horaire du mouvement de (S) sachant que:

$$z(t=0) = z_0 = 3cm.$$

2- Par application de la deuxiéme loi de Newton, trouver l'expression de T, tension de fil.

3- Trouver l'expression de J_Δ moment inertie du cylindre en fonction de m, r, a et g. Calculer sa valeur. On donne: $g = 10\,m/s^2$.

Solution

1.1- Nature du mouvement de (s)

L'équation de la vitesse est une droite affine donc $a = \frac{dv}{dt} = c^{te}$ donc le mouvement de (s) est rectiligne uniformement varié.

On a: $a = \frac{dv}{dt} = 5\,m/s^2$

1.2- équation horaire:

le mouvement de (s) a pour équation horaire.

$$z(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + z_0$$

donc: $z(t) = 2,5t^2 + 0,55t + 0,03$

2- Expression de T:

système étudie {corps (s)}

bilan des forces: $\vec{P}$ et $\vec{T}$.

Selon la 2ème loi de Newton:

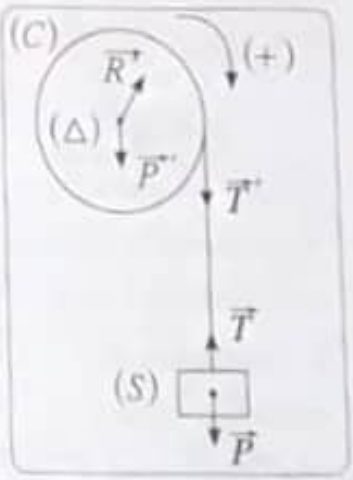
$$\sum \vec{F}ext = m\vec{a} \; ; \; \vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$$

Suivant l'axe $(\vec{oz})$: $P_z + T_z = ma_z$

$$P - T = ma \; ; \; T = m(g - a)$$

A.N.: $T = 0,4(10 - 5)$; $T = 2N$.

3- Expression de J_Δ.



Système étudier {cylindre (C)}

bilan des forces: $\vec{P}', \vec{R}', \vec{T}'$

La relation fondamentale de la dynamique:

$$\sum M_\Delta(\vec{F}) = J_\Delta \ddot{\theta}$$

$$M_\Delta(\vec{P}') + M_\Delta(\vec{T}') + M_\Delta(\vec{R}') = J_\Delta \ddot{\theta}$$

$$T'.r = J_\Delta \ddot{\theta} \; ; T' = \frac{J_\Delta \ddot{\theta}}{r}$$

Le fil est inextensible et de masse négligeable donc: $T = T'$ et $\ddot{\theta} = \frac{a}{r}$.

donc: $m(g-a) = J_\Delta \frac{a}{r^2}$

donc: $J_\Delta = \frac{mr^2(g-a)}{a}$

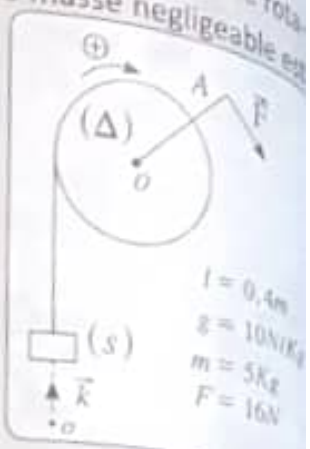
A.N.: $J_\Delta \frac{0,4.0,1^2(10-5)}{5}$

$J_\Delta = 4.10^{-3}\ kg.m^2$

3 Une poulie homogène de moment d'inertie J_Δ peut avoir mouvement de rotation autour d'un axe (Δ) fixe et horizontal. Une tige OA de masse négligeable est fixée sur la poulie ; $OA = \ell = 40\ cm$.

Sur la poulie est enroulé un fil inexensible de masse négligeable, portant à l'autre extrémité un corps (S) de masse m.

Pour lever le corps (S), on applique à l'extrémité de la tige une force $\vec{F}$ d'intensité constante. L'équation du mouvement du centre d'inertie G du corps (S) s'écrit: $z(t) = t^2$.



1- Determiner l'accéleration a du corps (S) ; quelle est la nature du mouvement?

2- Exprimer la tension T en fonction de m, g et a.

3- en appliquant la $R.F.D$, trouver l'expression de J_Δ en fonction de m, ℓ, r, F, a et g.

Calculer sa valeur.

Données: $g = 10m/s^2$; $m = 5\,kg$; $F = 16\,N$; $r = 10\,cm$.

Solution

1- Nature du mouvement de (S).

On a: $\begin{cases} a = \frac{dv}{dt} \\ v = \frac{dz}{dt} \end{cases}$

$v = (t^2)'$ et $a = (2t)' = 2 = c^{te}$

donc le mouvement de (S) est rectiligne uniformément varié.

2- Expression de T,

système étudié $\{S\}$.

bilan des forces: $\vec{P}$ et $\vec{T}$.

Selon la 2ème loi de Newton:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}$$

$$\vec{P} + \vec{T} = m.\vec{a}$$

Suivant: $(\overrightarrow{oz}): -P + T = ma$

$T = m(a+g)$ (1)

3- Expression de J_Δ.

Système étudié: $\{Poulie + tige\}$

bilan des forces $\vec{P}, \vec{R}, \vec{T}, \vec{F}$

RFD: $\sum M_\Delta(\vec{F}) = J_\Delta \ddot{\theta}$

$M_\Delta(\vec{P}) + M_\Delta(\vec{R}) + M_\Delta(\vec{T}) + M_\Delta(\vec{F}) = J_\Delta$

$0 + 0 - T'r + F.OA = J_\Delta.\ddot{\theta}$

$T'r = F\ell - J_\Delta.\ddot{\theta}$

$T' = \frac{F\ell}{r} - J_\Delta.\frac{\ddot{\theta}}{r}$ (2)

Le fil est inextensible alors:

$$a = r\ddot{\theta} \Leftrightarrow \ddot{\theta} = \frac{a}{r}$$

Le fil est de masse négligeable:

$$T = T'$$

donc: $ma + mg = \frac{F\ell}{r} - \frac{J_\Delta}{r}\left(\frac{a}{r}\right)$

$J_\Delta \cdot \frac{a}{r^2} = \frac{F\ell}{r} - m(a+g)$.

A.N.:

$J_\Delta = \frac{(10^{-1})^2}{2}\left(\frac{16.0,4}{0,1} - 5(2+10)\right)$

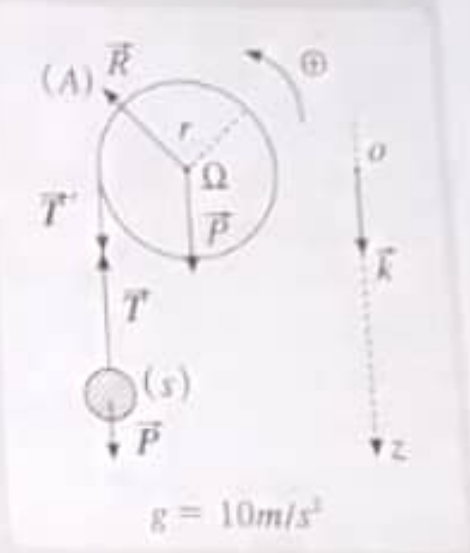
$= 2.10^{-3}\ kg.m^2$

Une poulie homogène de masse M, de rayon $r = 10\ cm$, peut tourner autour d'un axe (Δ) horizontal passant par son centre Ω.

Le moment d'inertie de la poulie par rapport à (Δ) est: $J_\Delta = \frac{1}{2}mr^2$.

On néglige les frottements.

On enroule un fil inextensible de masse negligeable sur la poulie, l'autre extrémité est attachée à un corps (S) de masse $m = 300g$ le système $\{poulie + (S)\}$ est lachée sans vitesse initiale.



$g = 10m/s^2$

1- En appliquant la deuxiéme loi de Newton trouver l'expression de la tension $\vec{T}$ du fil en fonction m, g et a accéleration du corps (S).

2- Par application de la $R.F.D$ à la poulie, trouver l'expression de la tension $\vec{T'}$ du fil en fonction de M, r et $\ddot{\theta}$ accélération angulaire de la poulie.

3- Montrer que: $a = \frac{2mg}{M+2m}$.

4- Calculer M masse de la poulie, on donne: $a = 2m/s^2$.

Solution

1- Expression de la tension du fil $\vec{T}$.

Système étudié: $\{corps\ (S)\}$

Bilan des forces: $\vec{T}$, $\vec{P}$

En appliquant la 2ème loi de Newton:

$$\vec{P} + \vec{T} = m.\vec{a}_G$$

On projette suivant (oz) :

$$P_z + T_z = m.a_z$$

$$P - T = m.a$$

$$T = m(g-a) \quad (1)$$

2- Expression de $\vec{T'}$:

Système étudié $\{poulie\}$

Bilan des forces $\vec{T'}, \vec{P'}, \vec{R'}$

$$M_\Delta(\vec{T'}) + M_\Delta(\vec{P'}) + M_\Delta(\vec{R}) = J_\Delta\ddot{\theta}$$

$$T' \times r + o + o = J_\Delta\ddot{\theta}$$

$$T' = J_\Delta\frac{\ddot{\theta}}{r} \Rightarrow T' = \frac{M.r.\ddot{\theta}}{2} \quad (2)$$

3- Le fil est inextensible donc: $a = r.\ddot{\theta}$

Le fil est de masse negligeable.

donc: $T = T'$.

De (1) et (2): $m(g-a) = \frac{Mr\ddot{\theta}}{2}$

$$\Rightarrow m.g - ma = \frac{M.a}{2}$$

$$\Rightarrow m.g = a\left(m + \frac{M}{2}\right)$$

d'où: $$a = \frac{2m.g}{M+2m}$$

4- Calcul de M :

On a: $a = \frac{2m\,g}{M+2m}$; $M = \frac{2m.g}{a} - 2m$

$M = \frac{2\times 0,3\times 10}{2} - 2\times 0,3$

$M = 2,4\ kg$.

5 Le système ci-contre est constitué de:

- Une poulie (P) homogène de rayon $r = 6\ cm$, mobile autour d'un axe fixe (Δ) vertical passant par son centre de gravité G.



- Un fil (f) inextensible de masse negligeable enroulé sur la poulie.

- Un corps solide (S) de masse $m = 800\ g$, attaché au fil (f) par son centre d'inertie G peut glisser sans frottement sur le plan AB incliné d'un angle $\alpha = 30°$.

A l'instant $t = 0$ le système est abondonné sans vitesse initiale, le corps (S) glisse à partir du point A, dans un mouvement rectiligne d'accéleration $a = 3\ m/s^2$ dans le repère $(A,\vec{i})$.

1- Donner l'équation horaire du mouvement du corps (S) et en déduire la durée du parcours AB on donne: $AB = 1,5m$.

2- Montrer que la tension T du fil s'écrit: $T = m(g\sin\alpha - a)$ calculer sa valeur.

3- Durant son mouvement la poulie est sommise à un couple de frottement de moment $\mathcal{M}$.

Montrer que: $\mathcal{M} = \left(\frac{J_\Delta + mr^2}{r}\right)a - mgr\sin\alpha$ .Calculer $\mathcal{M}$.

donne: $g = 10\ N.kg^{-1}$; $J_\Delta = 2.10^{-3}\ kg\,m^2$: moment d'inertie de la poulie.

Solution

1- Equation horaire:

Le mouvement de (S) est rectiligne uniformément varié donc:

$$x = \frac{1}{2}a\,t^2 + v_0 t + x_0$$

à $t = 0$ on a: $x_0 = 0$ et $v_0 = 0$

donc: $x = \frac{3}{2}t^2$

au point B: $x_B - x_A = AB$

donc: $AB = \frac{3}{2}\Delta t^2$; $\Delta t = \sqrt{\frac{2AB}{3}}$

A.N.: $\Delta t = 1s$.

2- Expression de T :

Système étudié: (Corps (s))

bilan des forces: $\vec{P},\vec{T},\vec{R}$

Selon la 2ème loi de Newton:

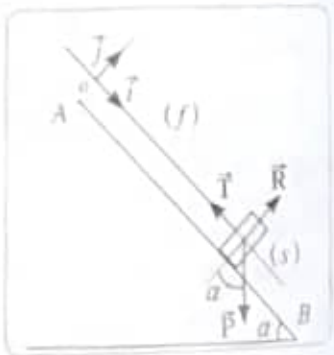
$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$; $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m\vec{a}$

Suivant l'axe: $(A\vec{i})$

$$P_x + R_x + T_x = ma_x$$

$$mg\sin\alpha + 0 - T = ma$$

donc: $T = m(g\sin\alpha - a)$

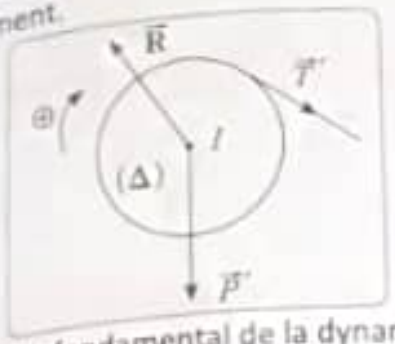


A.N: $T = 0,8(10\sin 30 - 3)$

$T = 1,6\,N$

3- Système étudié (la poulie).

Bilan des forces: $\vec{P}', \vec{R}, \vec{T}$ et couple de frottement.



La relation fondamental de la dynamique:

s'écrit: $\sum M_{\Delta}(\vec{F}) = J_{\Delta}\ddot{\theta}$

$M_{\Delta}(\vec{P}') + M_{\Delta}(\vec{R}) + M_{\Delta}(\vec{T}') + \mathcal{M} = J_{\Delta}\ddot{\theta}$

$0 + 0 + T'r + \mathcal{M} = J_{\Delta}\ddot{\theta}$

donc: $T' = \frac{-\mathcal{M}}{r} + \frac{J_{\Delta}}{r}\ddot{\theta}$

Le fil de masse negligeable et inextensible.

donc: $T = T'$ et $\ddot{\theta} = \frac{a}{r}$.

donc:

$$mg\sin\alpha - ma = -\frac{\mathcal{M}}{r} + J_{\Delta}\cdot\frac{a}{r^2}$$

$$\mathcal{M} = -r\left[mg\sin\alpha - ma - \frac{J_{\Delta}}{r^2}a\right]$$

$$\mathcal{M} = \left(\frac{J_{\Delta} + mr^2}{r}\right)a - mgr\sin\alpha$$

A.N.:

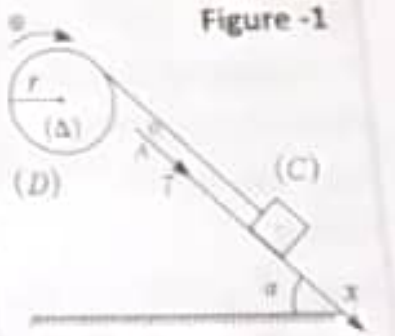
$$\mathcal{M} = \frac{2.10^{-4} + 0,8(6.10^{-2})^2}{6.10^{-2}} - 0,8.10.6.10^{-2}\sin 30$$

$$\mathcal{M} = -9,5.10^{-3}\,N\,m$$

La figure-1 représente le système constitué de:

- Un disque (D) homogène de rayon $r = 5cm$ peut tourner sans frottement autour d'un axe (Δ) horizontal passant par son centre, de moment d'inertie J_{Δ}.
- Un corps solide (C) de masse $m = 0,2\,kg$ peut glisser sans frottement sur un plan incliné d'un angle $\alpha = 30°$ par rapport à l'horizontal.

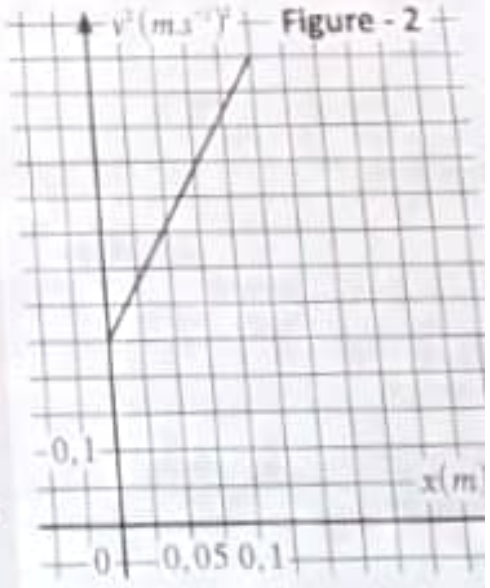
Figure -1



Le corps (C) et le disque (D) sont reliés par un fil inexentensible de masse négligeable.

1- A l'instant $t = 0$; le corps (C) passe par le point A confondu avec l'origine d'un repère $(O, \vec{i})$; son mouvement rectiligne Selon $(O, \vec{i})$. La figure-2 represente le diagramme de variation de vitesse du corps (C) en fonction de l'abscisse x.

Figure - 2



1- En utilisant la figure 2, montrer que l'accélération du corps (C) est: $a = 1,6\,m/s^2$.

2- Ecrire l'équation horaire du mouvement du corps (C)

3- Les forces de frottement appliquées sur le disque ont pour moment M_c constant. Par application de la relation fondamentale de dynamique trouver l'expression de M_c en fonction $J_\Delta, m, r, a, \alpha$ et g.

Calculer M_c.

donnée: $g = 10N/kg$; $J_\Delta = 2,5.10^{-4} kg.m^2$.

Solution

1- Valeur de **a:**

La courbe est une droite linéaire, donc:

$v^2 = kx$ (k: *la pente*)

On drive cette expression par rapport au temps t: $2v.\dot{v} = k.\dot{x}$

$a = \dot{v} = \frac{k}{2}$

$k = \frac{0,4^2}{0,125} = 3,2 m.s^{-2}$; $a = 1,6 m.s^{-2}$

2- L'équation horaire:

s'écrit: $x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$

avec: $v_0 = \sqrt{0,25} = 0,5\ m/s$

$x_0 = 0$

d'où: $x = 0,8t^2 + 0,5t$

3- Expression de M_c:

Etude de la poulie:

Bilan des forces $\vec{P}, \vec{R}, \vec{T}'$, couple de frottement.

$RFD: \sum M_\Delta(\vec{F}) = J_\Delta.\ddot{\theta}$

$M_\Delta(\vec{P}) + M_\Delta(\vec{R}) + M_\Delta(\vec{T}') + M_c = J_\Delta.\ddot{\theta}$

$0 + 0 + T'r + M_c = J_\Delta.\ddot{\theta}$

$T' = \frac{J_\Delta.\ddot{\theta} - M_c}{r}$ (1)

Etude du corps (C):

Bilan des forces: $\vec{P}, \vec{R}$ *et* $\vec{T}$

Selon la 2ème loi de Newton:

$\sum \vec{F}ext = m\vec{a}$

$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m\vec{a}$

Suivant l'axe $(\%\ \overrightarrow{ox})$

$P_x - R_x + T_x = m.a_x$

$mg\sin\alpha + o - T = ma$

$T = mg\sin\alpha - ma$ (2)

Le fil est inextensible et de masse négligeable $T = T'$ et $\ddot{\theta} = \frac{a}{r}$

donc: $mg\sin\alpha - ma = \frac{J_\Delta\ddot{\theta} - M_c}{r}$

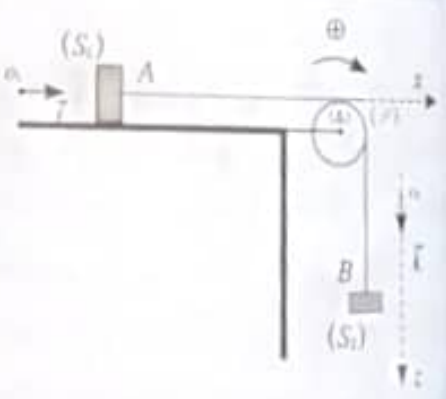
$J_\Delta\ddot{\theta} - M_c = r(mg\sin\alpha - ma)$

$M_c = \frac{J_\Delta.a}{r} - r(mg\sin\alpha - ma)$

$M_c = a\left(\frac{J_\Delta}{r} + mr\right) - mgr\sin\alpha$

$M_c = -2,6.10^{-2} N.m$

7 On considère le système suivant, constitué de deux solides (S_1) et (S_2) de masses respectivement m_1 et m_2 reliés par un fil inextensible et de masse negligeable passant par la gorge d'une poulie de moment d'inertie J_Δ, pouvant tourner autour d'un axe fixe (Δ) horizontal confondu avec son axe de symétrie (figure ci-contre).



On donne: $m_1 = 500g$, $m_2 = 100g$, $r = 10cm$, $r = 10\,cm$, $J_\Delta = 2.10^{-3}\,kgm^2$, $g = 10\,m/s^2$.

Le système est abondonné à l'instant $t = 0$ sans vitesse initiale, il se déplace dans le sens positif indiqué sur la figure.

1- Par application de la deuxiéme loi de Newton à (S_1) et à (S_2), trouver:

a- L'expression de T_1 tension du fil appliquée sur (S_1) en fonction de m_1 et a_1.

b- L'expression de T_2 tension du fil appliquée sur (S_2) en fonction de m_2, g et a_2.

2- Trouver, par application de la relation fondamentale de la dynamique sur la poulie, l'expression de $\ddot{\theta}$ accélération angulaire en fonction de m_1, m_2, r, g et J_Δ calculer $\ddot{\theta}$.

Solution

1.a- Expression de T_1:

Système étudie $\{(S_1)\}$

bilan des forces: $\vec{P}_1, \vec{R}_1$ et $\vec{T}_1$



Selon la 2ème loi de Newton:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m_1\vec{a}_1$$

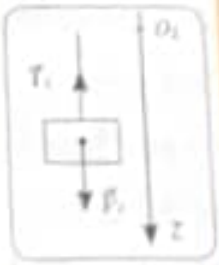
$$\vec{P}_1 + \vec{T}_1 + \vec{R}_1 = m_1\vec{a}_1$$

Suivant l'axe $(0,\vec{x})$:

$$P_{1x} + T_{1x} + R_{1x} = m_1 a_{1x}$$

$$0 + T_1 + 0 = m_1 a_1$$

donc: $T_1 = m_1 a_1$



1.b- Expression de T_2:

Système étudié $\{(S_2)\}$

bilan des forces: $\vec{P}_2, \vec{T}'_2$

Selon la 2ème loi de Newton: $\sum \vec{F}_{ext} = m_2\vec{a}$

$$\vec{P}_2 + \vec{T}_2 = m_2\vec{a}_2$$

Suivant l'axe $(o_2,\vec{z})$ $P_{2z} + T_{2z} = m_2 a_{2z}$

$$P_2 - T_2 = m_2 a_2$$

donc: $T_2 = m_2(g - a_2)$

2- Expression de $\ddot{\theta}$:

Système étudié {La poulie}.

bilan des forces: $\vec{P}, \vec{R}, \vec{T}'_1, \vec{T}'_2$



Le relation fondamentale de la dynamique s'ecrit: $\sum M_\Delta(\vec{F}) = J_\Delta\ddot{\theta}$

$$M_\Delta(\vec{P}) + M_\Delta(\vec{R}) + M_\Delta(\vec{T}'_1) = J_\Delta\ddot{\theta}$$

$$\overset{0}{M_o} + \overset{0}{M_o} - T'_1 r + T'_2 r = J_\Delta\ddot{\theta}$$

$$T'_2 - T'_1 = \frac{J_\Delta}{r}\ddot{\theta}$$

Le fil est inextensible et de masse négligeable donc:

$a_1 = a_2 = a = r\ddot{\theta}$ et $T_1 = T'_1$ et $T_2 = T'_2$

donc: $T_2 - T_1 = J_\Delta \cdot \frac{\ddot{\theta}}{r}$.

$$m_2 g - m_2 a - m_1 a = J_\Delta \frac{a}{r}$$

$$m_2 g = r\ddot{\theta}(m_1 + m_2) + \frac{J_\Delta}{r}\ddot{\theta}$$

$$m_2 gr = \ddot{\theta}[J_\Delta + (m_1 + m_2)r^2]$$

donc: $\ddot{\theta} = \dfrac{m_2 g.r}{J_\Delta + (m_1 + m_2)r^2}$

A.N.: $\ddot{\theta} = \dfrac{100.10^{-3}.10.10.10^{-2}}{2.10^{-3} + 600.10^{-3}.(10.10^{-2})^2}$

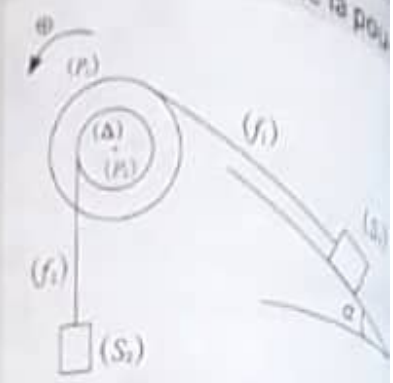
$$\ddot{\theta} = 125\ rad/s^2$$

Le système mécanique ci-contre est formé de:

- Une poulie à double gorge de rayons $r_1 = 5cm$ et $r_2 = 2r_1$, pouvant tourner autour d'un axe fixe (Δ) horizontal passant par son centre o le moment d'inertie de la poulie est: $J_\Delta = 2,75.10^{-3} kg.m^2$.

- Un corps (S_1) de masse $m_1 = 100g$; pouvant glisser sans frottement sur un plan incliné $\alpha = 30°$ par rapport à l'horizontal; le corps (S_1) est lié à la poulie par un fil (f_1) inextensible de masse négligeable.

- Un corps (S_2) de masse $m_2 = 500g$, lié par un fil (f_2) de masse négligeable et inextensible à la poulie.



On abandonne le système sans vitesse initiale à l'instant $t = 0$, il se met en mouvement dans le sens positif indiqué sur la figure.

1- Déterminer l'expression de la tension T_1 du fil (f_1) en fonction de m_1, g et α et a_1.

2- Déterminer l'expression de la tension T_2 du fil (f_2) en fonction de m_2 et g et a_2.

3- On appliquant la relation fondamentale de la dynamique montrer que: $\ddot{\theta} = \frac{(m_2 - m_1 \sin\alpha)gr_1}{(m_1 + 2m_2)r_1^2 + J_\Delta}$, Calculer sa valeur.

Solution

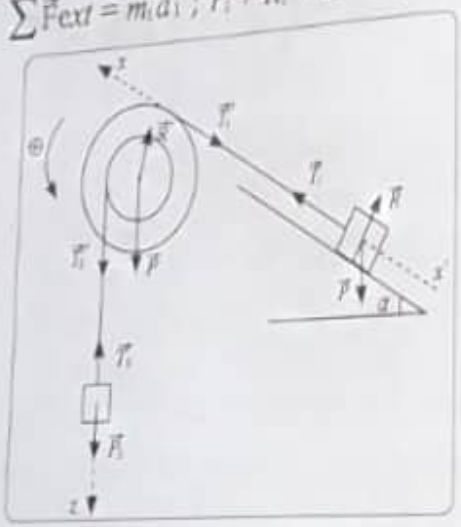
1- Expression de T_1:

Système étudié: $\{corps\,(S_1)\}$

Bilan des forces $\vec{P}_1 \vec{R}_1$ et $\vec{T}_1$

Selon la 2ème loi de Newton:

$\sum \vec{F}ext = m_1\vec{a}_1$; $P_1 + R_1 + T_1 = m_1\vec{a}_1$



Suivant l'axe $(\overrightarrow{x'x})$

$P_x + R_x + T_{1x} = m_1 a_{1x}$

$-m_1 g \sin\alpha + o + T_1 = m_1 a_1$

$T_1 = m_1 g \sin\alpha + m_1 a_1$

2- Expression de T_2.

Système étudié: $\{corps\,(S_2)\}$

bilan des forces: $\vec{P}_2$ et $\vec{T}_2$

Selon la 2ème loi de Newton:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m_2\vec{a}_2$$

$$\vec{P}_2 + \vec{T}_2 = m2\vec{a}_2$$

Suivant l'axe $(\overrightarrow{oz})$:

$P_2z + T_2z = m_2 a_{2z}$

$m_2 g - T_2 = m_2 a_2$

$T_2 = m_2 g - m_2 a_2$

3- Expression de $\ddot{\theta}$

Système étudié: (La poulie)

bilan des forces: $\vec{P}', \vec{R}', \vec{T}'_2$ et $\vec{T}'_1$

La relation fondamentale de la dynamique: $\sum M_{\Delta}(\vec{F}) = J_{\Delta}\ddot{\theta}$

$M_{\Delta}(\vec{P}') + M_{\Delta}(\vec{R}') + M_{\Delta}(\vec{T}'_1) + M_{\Delta}(\vec{T}'_2) = J_{\Delta}\ddot{\theta}$

$0 \quad 0 \quad -T'_1 r_1 + T'_2 r_2 = J_{\Delta}\ddot{\theta}$

$T'_2 - T'_1 = \frac{J_{\Delta}}{r}\ddot{\theta}$

Les fils sont inextensibles et de masse négligeables donc:

$a_1 = 2a_2 = r_1\ddot{\theta}$ et $T'_1 = T_1$ et $T'_2 = T_2$

donc:

$m_2 g - m_2 a_2 - m_1 g \sin\alpha - m_1 a_1 = \frac{J_{\Delta}}{r_1}\ddot{\theta}$

$(m_2 - m_1 \sin\alpha)g = (m_1 + 2m_2)r_1\ddot{\theta} + \frac{J_{\Delta}}{r_1}\ddot{\theta}$

donc: $\ddot{\theta} = \frac{(m_2 - m_1 \sin\alpha)gr_1}{(m_1 + 2m_2)r_1^2 + J_{\Delta}}$

A.N.:

$\ddot{\theta} = \frac{(0,8 - 0,1\sin 30)10.10.10^{-3}}{(0,1 + 2.0,8)(10.10^{-3})^2 + 2,5.10^{-4}}$

$\ddot{\theta} \approx 38,5\ rad/s^2$

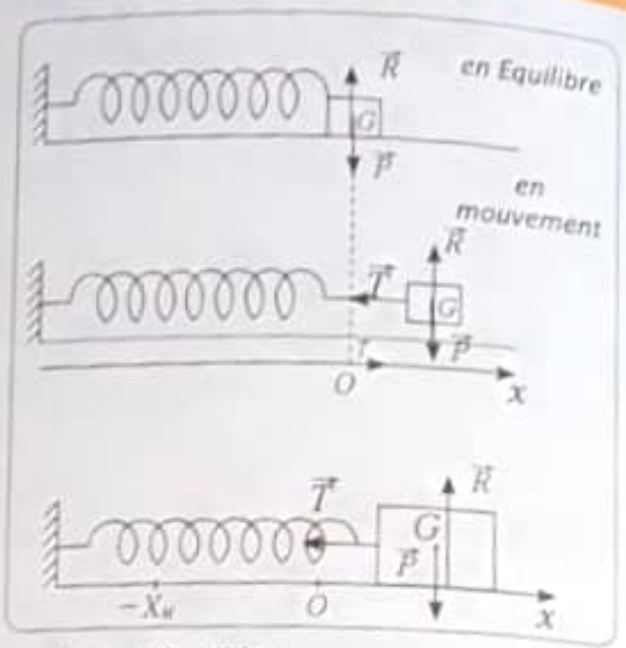
8 Les systèmes mécaniques oscillants-Aspect énergétique

A Le pendule élastique:

Le pendule élastique est constitué d'un corps solide de masse m attaché à l'extrémité d'un ressort de raideur K et de masse négligeable, l'autre extrémité du ressort est fixée à un support.

I- Etude expérimentale

- *Etat d'équilibre*



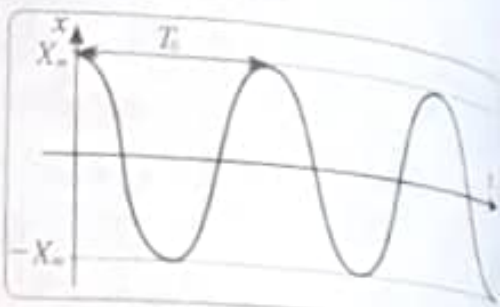
x : abscisse du

- *À un instant pendant le mouvement.*

On écarte le corps (S) de sa position d'équilibre et on le relâche, il effectue un mouvement de va- et-vient, on dit qu'il oscille.

L'enregistrement de la variation de l'abscisse x en fonction du temps.

Le mouvement du solide (S) est oscillatoire rectiligne sinusoïdale.



II- Etude théorique (dynamique)

1 Force de Rappel:

Le ressort applique sur le corps (S) une force de rappel qui tend à le rendre à sa position d'équilibre d'expression: $\vec{T} = -K.\Delta\ell.\vec{i}$

$\Delta\ell = \ell - \ell_0$: allongement de ressort.

Pour un pendule élastique horizontal: $\Delta\ell = x$.

1 Equation différentielle:

Selon le 2ème loi de Newton: $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m\vec{a}$$

$$P_x + R_x + T_x = ma_x$$

Suivant l'axe $(\vec{ox})$: $0 + 0 - T = ma_x$

$$-Kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{K}{m}x = 0$$

Le mouvement de (S) est oscillatoire rectiligne sinusoidale.

2 La solution: équation horaire

s'écrit: $x(t) = X_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$

- X_m: amplitude (m).
- T_0: la période propre de l'oscillateur.
- φ: la phase à $t = 0$: $\cos\varphi = \frac{x(t=0)}{X_m}$

3 Expression de la période propre :

On a: $x(t) = X_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$

avec: $\frac{dx}{dt} = -X_m\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -X_m\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

Donc: $\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 x = 0$

Par comparaison avec l'équation différentielle, on aura: $\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 = \frac{K}{m}$

donc: $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$.

III- Etude énergétique

1 Travail de la force de Rappel:

On montre que: $W_{1\to 2}(\vec{T}) = \frac{1}{2}K(x_1^2 - x_2^2)$

2 Energie cinétique:

on a: $E_c = \frac{1}{2}m.v^2$

avec: $v = \frac{dx}{dt} = -X_m\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{T_0} + \varphi\right)$; donc: $E_c(t) = \frac{1}{2}mX_m^2\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2\sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0} + \varphi\right)$

$$E_c = \frac{1}{2}KX_m^2\sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

3 Energie potentielle élastique:

on montre que l'énergie potentielle élastique E_{pe} s'écrit: $E_p = \frac{1}{2}K(\Delta\ell)^2 + cte$

- $\Delta\ell_0$: allongement à l'équilibre.
- Cte: est une constante qui se détermine en se référant à l'état de référence: $E_{p\,e}$

En cas du pendule élastique horizontal $\Delta\ell_0 = 0$.

donc: $E_p = \frac{1}{2}Kx^2 + cte$

Remarque 1: On montre $W_{(i\to f)}(\vec{F}) = -\Delta E_p$

2- Cas de pendule vertical ou incliné:

On donne: l'énergie potentielle de pesanteur s'écrit: $E_p = mgz + cte$.

4 Energie mécanique:

est la somme des énergies E_c et E_p notée E_m telle que:

$$E_m = E_c + E_p$$

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Kx^2 + cte$$

- En absence des forces de frottement.

l'énergie du système se conserve.

donc: $E_m = cte = 0 \Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = 0$; $\frac{dE_m}{dt} = mv\dot{v} + kx\dot{x} = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x}$

$$= m\dot{x}\left[\underbrace{\ddot{x} + \frac{K}{m}x}_{eq.diff}\right] = 0$$

donc:

$$E_m = \begin{cases} E_{C_{max}} + E_{P_{max}} = \frac{1}{2}KX_m^2 \\ E_{C_{max}} + E_{P_{max}} = \frac{1}{2}mv_{max}^2 \end{cases}$$

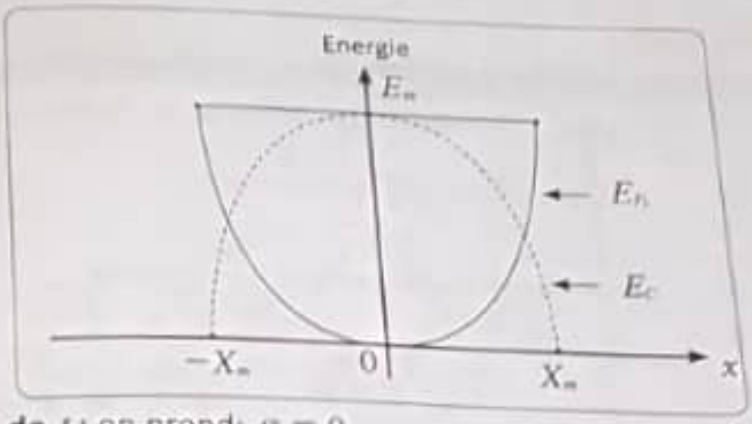
5 Diagramme d'énergie:

5.1- En fonction de x:

$x \in [-X_m + X_m]$, on prend: $Cte = 0$.

donc: $E_p = \frac{1}{2}Kx_0^2$, $E_m = \frac{1}{2}KX_m^2$; $E_c = E_m^2 - E_p$

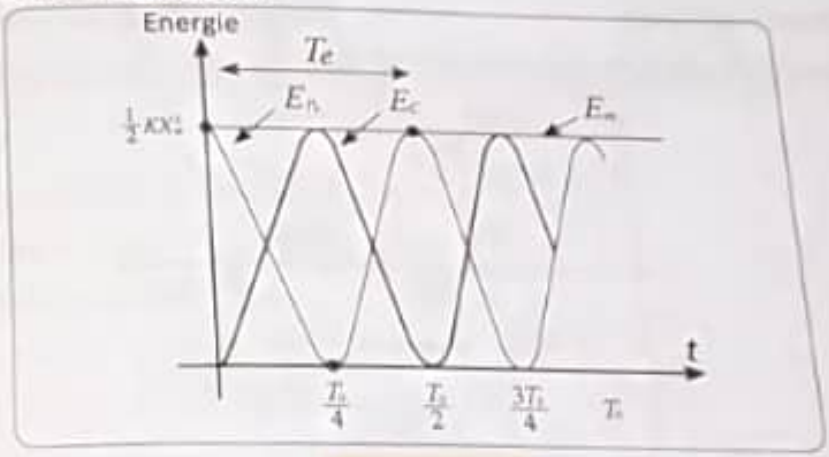
x	$-X_m$	0	$+X_m$
E_p	$\frac{1}{2}KX_m^2$	0	$\frac{1}{2}KX_m^2$
E_m	$\frac{1}{2}KX_m^2$	$\frac{1}{2}KX_m^2$	$\frac{1}{2}KX_m^2$
E_c	0	$\frac{1}{2}KX_m^2$	0



5.2- En fonction de t : on prend: $\varphi = 0$

on a: $E_p = \frac{1}{2}KX_m^2\cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$; $E_c = \frac{1}{2}KX_m^2\sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$; $E_m = \frac{1}{2}KX_m^2$

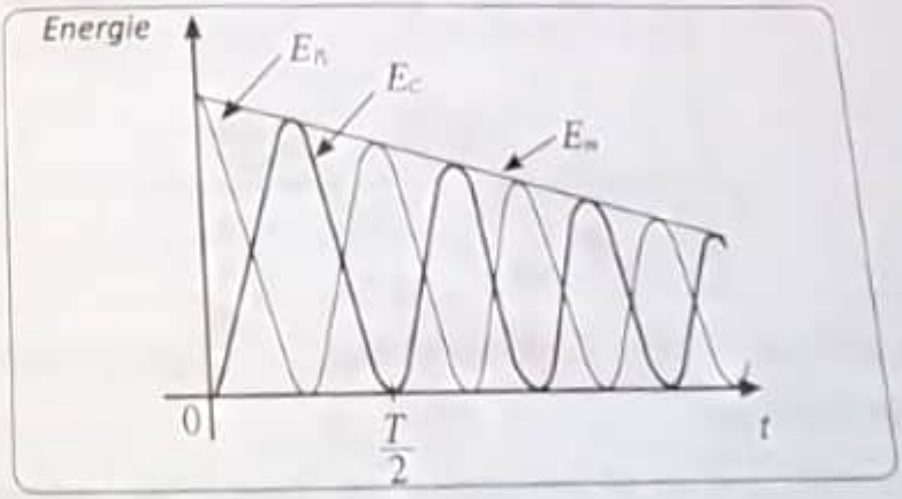
Les diagrammes des énergies sont:



$$T_{énergie} = \frac{T_0}{2}$$

En présence de frottement:

«Il y a phénomène d'amortissement dû à» l'existence de frottement qui conduit à l dissipation de l'énergie sous forme de chaleur.

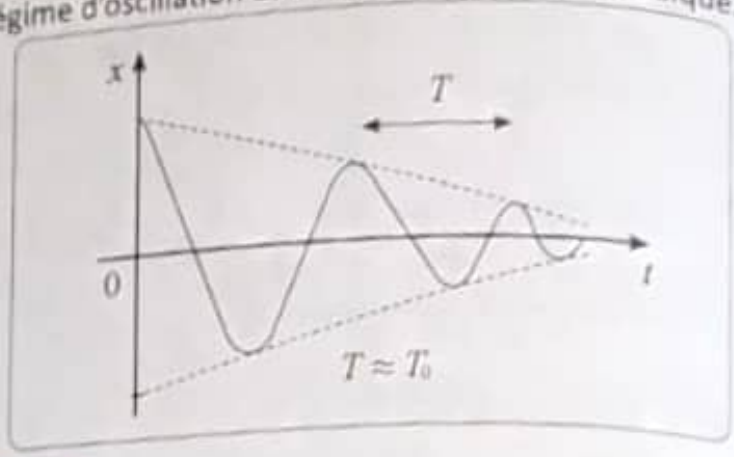


T : pseudo-période des oscillations.

Deux types de frottement:

1 Frottement solide:

dans ce cas le régime d'oscillation est un régime pseudo-périodique.

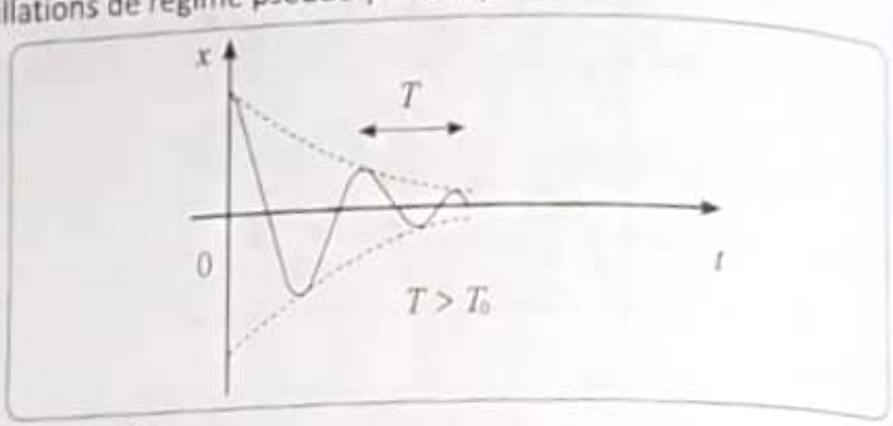


2 Frottement fluide

Deux cas sont envisageables:

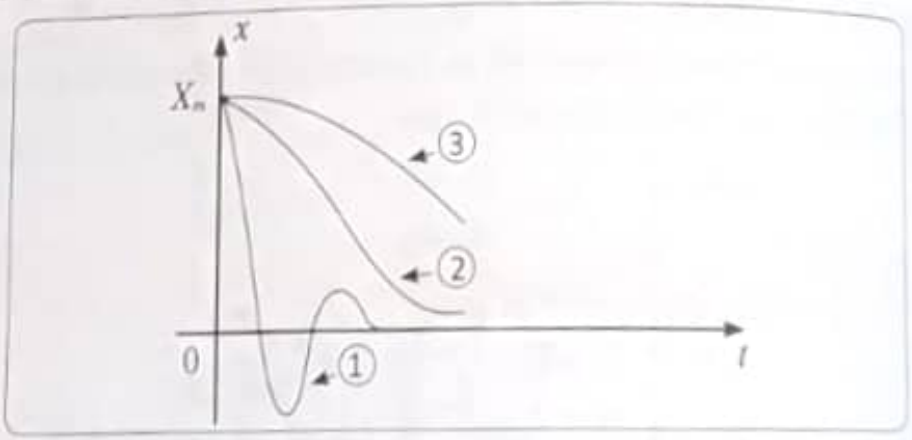
- **Cas de frottement faible.**

- Il y a oscillations de régime pseudo-périodique:



- **Cas de frottement fort:**

- Il y a plus d'oscillations on dit que le régime est apériodique:



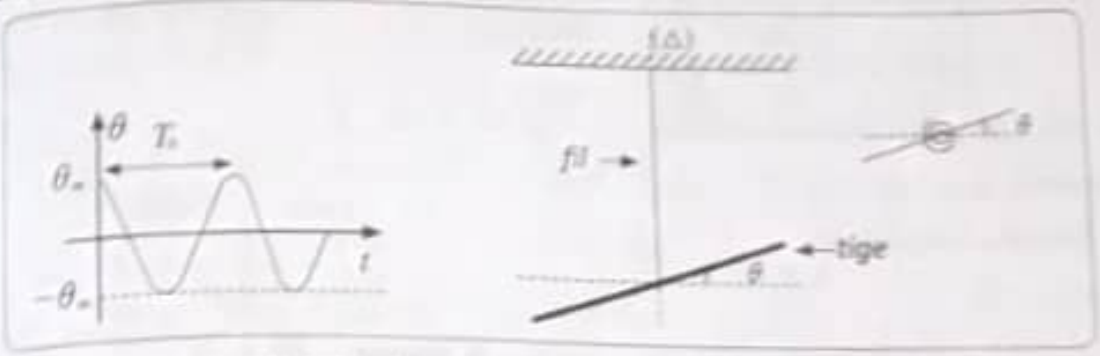
①: Régime sous-critique. ②: Régime critique. ③: Régime hypercritique.

B Le pendule de Torsion:

Ce pendule est constitué d'un fil métalique de constante de torsion C, fixé à support, l'autre extrimité porte un solide (tige, disque...) par son centre d'inerti de moment d'inertie J_Δ.

1 Etude expérimentale:

Quand on écarte la tige de sa position d'équilibre et on l'abandonne sous vitesse initiale, elle oscille autour de sa position d'équilibre.



Le mouvement est oscillatoire de rotation sinusoidale de période T_0.

2 Etude dynamique:

2.1- Le moment du couple de rappel:

Le tige oscille sous l'action d'un couple appelé couple de torsion de moment.

$$\mathcal{M}_C = -C\theta$$

C: Constante de torsion $(N.m.rad^{-1})$.

θ: Angle de torsion (rad).

2.2- Equation différentielle:

Système étudié (tige).

Bilan de forces: $\vec{P}$, $\vec{R}$ et couple de torsion.

R.F.D: $\sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = J_\Delta \ddot{\theta}$

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) + \mathcal{M}_\Delta(C) = J_\Delta \ddot{\theta}$$

$$-C\theta = J_\Delta \ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{C}{J_\Delta}\right)\theta = 0$$

2.3- Equation horaire:

La solution de l'équation s'écrit: $\theta(t) = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$

- θ_m: amplitude (rad).
- φ: La phase à $t = 0$: $\cos\varphi = \frac{\theta(t=0)}{\theta_m}$
- T_0: La période propre.

On montre que: $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{C}}$

3 Etude Energétique:

3.1- Energie cinétique:

d'expression: $E_c = \frac{1}{2}J_\Delta \dot{\theta}^2$

$$\dot{\theta} = \left(\theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)\right)' = -\theta_m\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

donc: $E_c = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}J_\Delta\theta_m^2\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2\sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$

$$= \frac{1}{2}C\theta_m^2\sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

3.2- Energie potentiele de torsion:

on montre que: $E_p = \frac{1}{2}C\theta^2 + cte$

3.3- Energie mécanique:

$$E_m = E_c + E_p$$

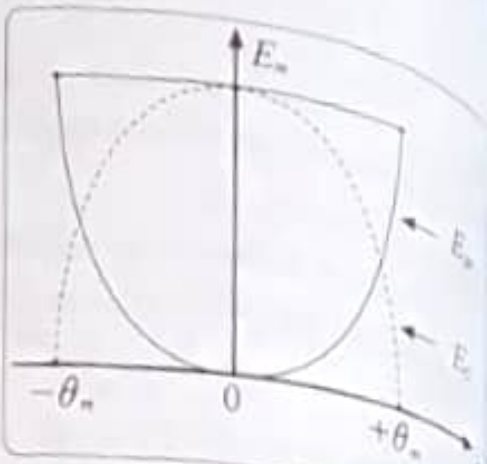
$$= \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}C\theta^2 + cte$$

- En absence de frottement:

L'énergie mécanique se conserve:

$$\frac{dE_m}{dt} = J_\Delta\dot{\theta}\ddot{\theta} + C\theta\dot{\theta} = J_\Delta\dot{\theta}\left[\ddot{\theta} + \frac{C\theta}{J_\Delta}\right] = 0$$

$$E_m = \frac{1}{2}C\theta_m^2 = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}_{max}^2$$



3.4- Diagramme d'énergie $(Cte = 0)$:

a- • En fonction de $\theta \in [-\theta_m + \theta_m]$:

$$E_p = \frac{1}{2}C\theta^2 \; ; \; E_m = \frac{1}{2}C\theta_m^2$$

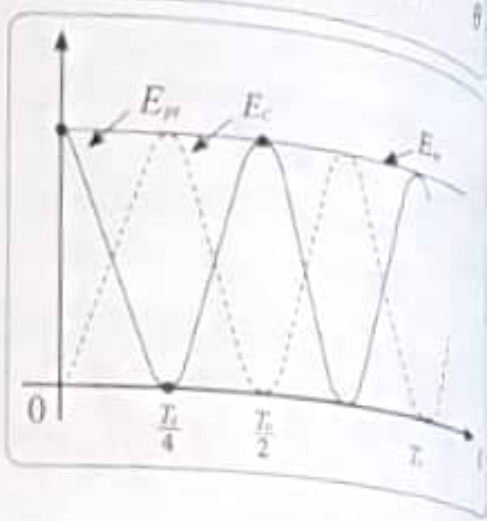
$$E_c = E_m - E_p$$

b- • En fonction de t $(\varphi = 0)$:

$$E_p = \frac{1}{2}C\theta_m^2\cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$$

$$E_c = \frac{1}{2}C\theta_m^2\sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$$

$$E_m = \frac{1}{2}C\theta_m^2$$

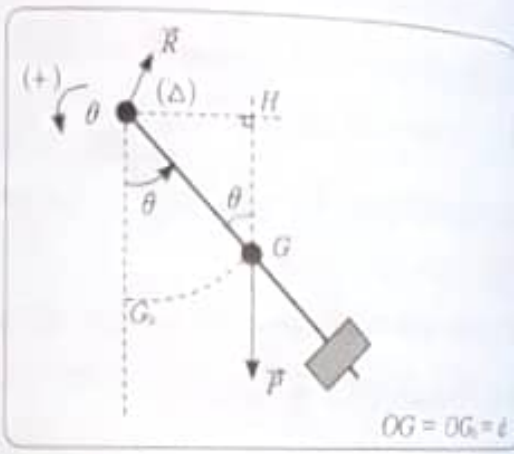


C Le pendule pesant:

Définition:

C'est un corps solide, peut avoir un mouvement de rotation autour d'un axe (Δ) horizontal ne passant pas par son centre G.

Ecartons le corps solide de sa position d'équilibre, une fois lâché, le corps fait un mouvement de rotation oscillatoire autour



de sa position d'équilibre.

1 Etude dynamique:

a- Equation différentielle:

Système étudie (pendule).

Bilan de forces: $\vec{P}$ et $\vec{R}$.

R.F.D:

$$\sum \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}) = J_{\Delta}\ddot{\theta}$$

$$\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P}) + \underbrace{\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{R})}_{=0} = J_{\Delta}\ddot{\theta}$$

$$-P.OH = J_{\Delta}\ddot{\theta}$$

avec:

$$\sin\theta = \frac{OH}{OG} \Rightarrow OH = d\sin\theta$$

donc:

$$-mg.d.\sin\theta = J_{\Delta}\ddot{\theta}$$

d'ou:

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{mgd}{J_{\Delta}}\right)\sin\theta = 0$$

Le mouvement du solide est oscillatoire rotatif.

Dans le cas de petites oscillations:

pour:

$$\theta < 15^{\circ} \quad (\theta < 0{,}26rad)$$

$$\sin\theta \approx \theta \text{ et } \cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

donc:

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{mgd}{J_{\Delta}}\right)\theta = 0$$

l'équation différentielle est second ordre donc le mouvement est sinusoïdal.

b- Equation horaire:

La solution s'écrit:

$$\theta(t) = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

on montre que:

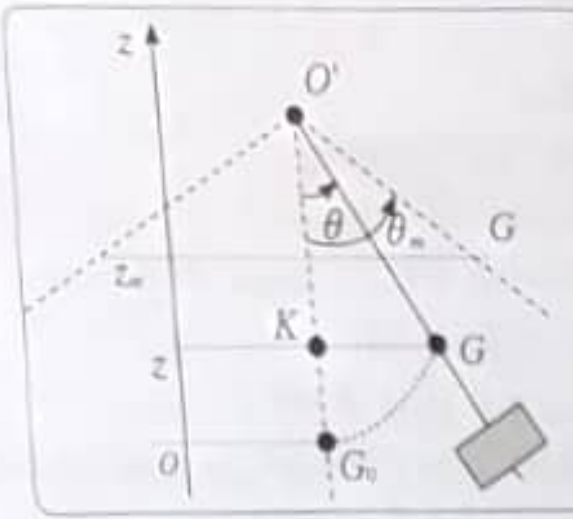
$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_{\Delta}}{mgd}}$$

2 Etude énergétique:

2.1- Energie cinétique:

d'expression: $E_c = \frac{1}{2}J_{\Delta}\dot{\theta}^2$

avec: $\dot{\theta} = -\theta_m\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$



2.2- Energie potentielle de pesanteur:

$$E_{pp} = mgz + cte$$

avec: $z = KG_0 = O'G_0 - O'K$

$$= d - d\cos\theta$$

$$z = d(1 - \cos\theta)$$

$$E_{pp} = mgd(1 - \cos\theta) + cte$$

2.3- Energie mécanique:

$$E_m = E_C + E_{PP}$$

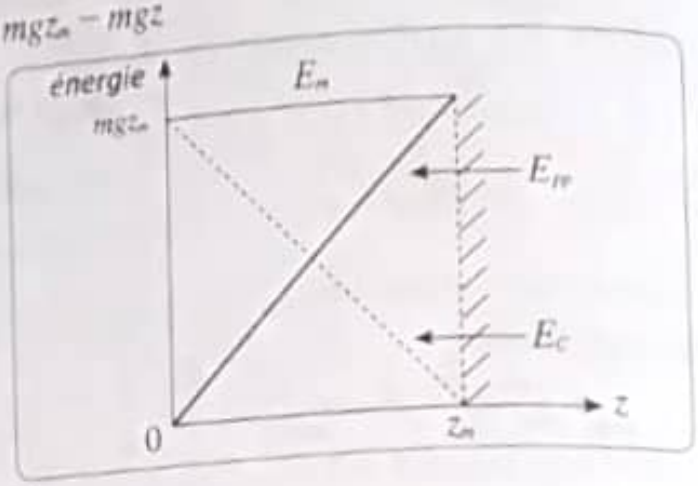
$$E_m = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2 + mgz$$

$$= \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2 + mgd(1 - \cos\theta)$$

2.4- Diagramme d'énergie $(cte = 0)$:

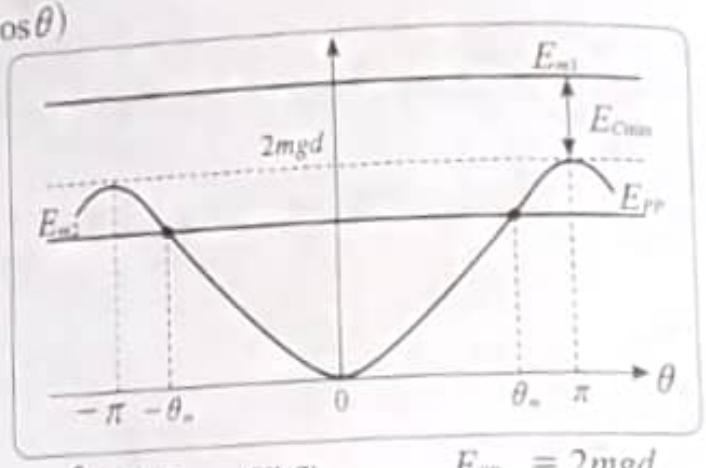
a- en fonction de z : avec $z \in [0, z_m]$

- $E_{PP} = mgz$; • $E_m = mgz_m$
- $E_C = E_m - E_{PP} = mgz_m - mgz$



b- En fonction de θ:

- $E_{PP} = mgd(1 - \cos\theta)$



$\theta = \pm\pi$ on a: $E_{PP_{max}} = 2mgd$

pour: $\theta = 0$ on a: $E_{PP} = 0$

- E_m est constante.

deux cas se présentent.

1er cas: $E = E_m > 2mgd$ dans ce cas:

- $E_C = E_m - E_{PP}$
- $E_{C_{min}} \neq 0$ pour $\theta = \pm\pi$

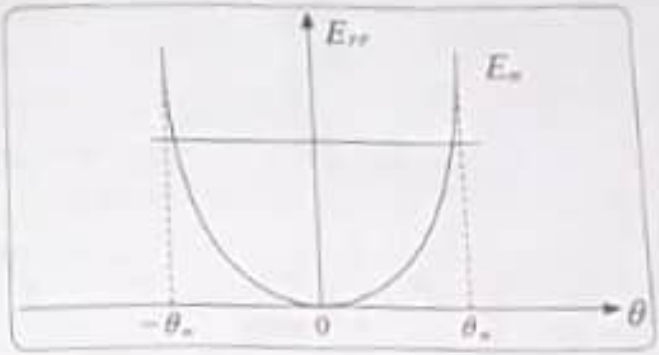
Donc le corps (S) subit un mouvement de rotation continu.

2ème cas: $E = E_m < 2mgd$

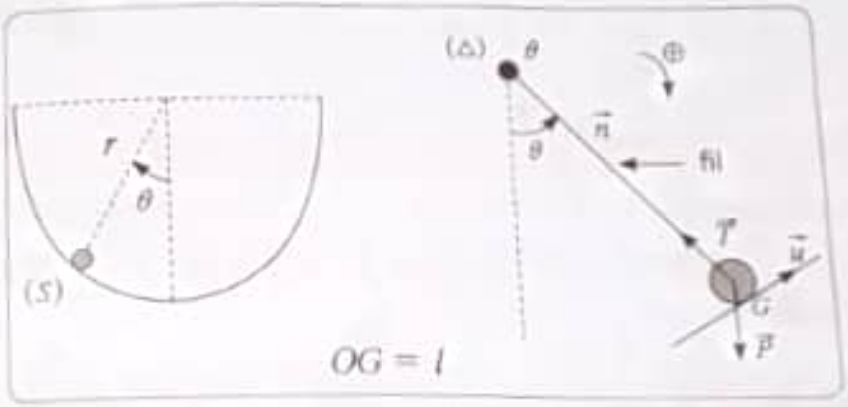
Donc le mouvement du solide est oscillatoire.

si $\theta_m < 15°$ alors le mouvement est sinusoidal. $\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$

donc: $E_{pp} = mgd.\frac{\theta^2}{2}$.



2 Le pendule simple:



Le pendule simple est constitué d'un corps (S) ponctuel attaché à un fil de longueur ℓ et $J_\Delta = m\ell^2$ est son moment d'inertie.

1 Etude dynamique:

a- Equation différentielle: $\sin\theta \approx \theta$

R.F.D.: $\ddot{\theta} + \frac{mgd}{J_\Delta}\theta = 0$ $\ddot{\theta} + \frac{mg\ell}{m\ell^2}.\theta = 0$	2ème loi de Newton : $\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$ suivant $\vec{u}$: $-mg\sin\theta + 0 = ma_t$ $-mg.\theta = m\frac{dv}{dt}$ $+mg\theta + m\ell\ddot{\theta} = 0$

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{\ell}\right).\theta = 0$$

b- Equation horaire:

Elle s'écrit: $\theta(t) = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$

On montre que: $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$

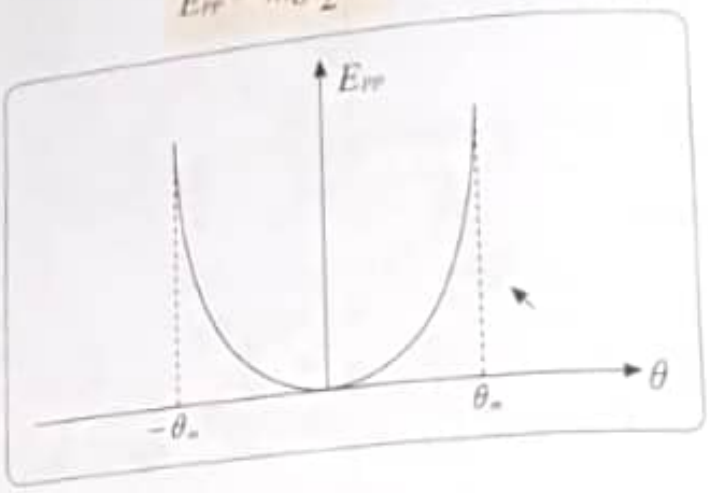
2 Etude énergétique

2.1- Energie potentielle:

$$E_{pp} = mgz$$
$$= mg\ell(1 - \cos\theta)$$

θ petite $\longrightarrow \cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$

donc: $E_{pp} = mg\frac{\ell}{2}\theta^2$



2.2- Energie cinétique:

$$E_c = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2 ;= \frac{1}{2}m\ell^2.\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}m(\ell\dot{\theta})^2$$

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

2.3- Energie mécanique:

$$E_m = E_c + E_{pp}$$

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 + mgz$$

ou: $E_m = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\frac{\theta^2}{2}$

1 Mots manquants:

a- Le travail du poids ne dépend que de la différence ..... entre le point ..... et le point .....

b- Pour calculer le travail ..... d'une force non constante, on décompose le déplacement en déplacements .....

c- La part d'énergie d'un système liée à sa position est l'énergie .....

d- Pour un ressort donné, le travail de la force exercée par un opérateur sur son extrémité libre ne dépend que de la ..... et de la .....

e- Lorsque l'énergie ..... d'un système est conservée, celui-ci n'est soumis à ..... force de .....

f- La ..... de l'énergie mécanique d'un système au cours du temps est ..... au travail des forces de .....

Solution

a- de hauteur - départ - d'arrivée
b- total - élémentaires
c- potentielle
d- raideur - élongation
e- mécanique - aucune - frottement
f- variation - égale - frottement.

2 Vrai ou faux?

a- Le travail du poids dépend du choix de l'axe des altitudes. V F

b- Le newton-mètre est une unité équivalente au $kg.m^2.s^{-2}$. V F

c- Le travail d'une force $\vec{F}$ lors d'un déplacement de son point d'applicationest égal à $\vec{F}.\vec{AB}$. V F

d- L'expression du travail élémentaire d'une force $\delta W = \vec{F}.d\vec{\ell}$ n'est vraie que pour une force dont la direction reste constante au cours du déplacement. V

e- L'énergie potentielle élastique d'un ressort augmente si la longueur du ressort augmente. V

f- L'énergie mécanique d'un système solide-ressort vertical peut se mettre sous forme $E_m = \frac{1}{2}mv^2 + mgz$. V

g- L'énergie mécanique d'un système conservatif peut augmenter V F

Solution

a- F
b- V
c- F
d- F
e- V
f- V
g- F

Q.C.M:

a- Le travail de la force $\vec{F}_{op}$ appliquée par un opérateur à l'extrémité d'un ress
lors d'un déplacement de A vers B de son extrémité libre est:

- $W_{AB}(\vec{F}_{op}) = \frac{1}{2}k(x_B^2 - x_A^2)$
- $W_{AB}(\vec{F}_{op}) = \frac{1}{2}k(x_A^2 - x_B^2)$
- $W_{AB}(\vec{F}_{op}) = \frac{1}{2}k(x_B - x_A)^2$

b- Ce travail est égal à l'aire sous la courbe de la fonction:

- $f(x) = kx$
- $f(x) = \frac{1}{2}kx^2$

c- Lorsque l'allongement d'un ressort est multiplié par 2, son énergie poten
élastique est:

- multipliée par 2.
- multipliée par 4.
- divisée par 2.

d- La période de $\mathscr{E}_c(t)$ pour un oscillateur horizontal de période propre T_0 est

- T_0
- $\frac{T_0}{2}$
- $2T_0$

Solution

a- $W_{AB}(\vec{F}_{op}) = \frac{1}{2}k(x_A^2 - x_B^2)$

b- $f(x) = \frac{1}{2}kx^2$

c- multiple de 4.

d- $\frac{T_0}{2}$

Exercices

Un oscillateur mécanique est constitué d'un ressort de raideur K et de lon gueur au repos ℓ_0 de et d'un mobile autoporteur de masse $M = 800g$, en mouve ment rectiligne sur une table horizontale. figure - 1.

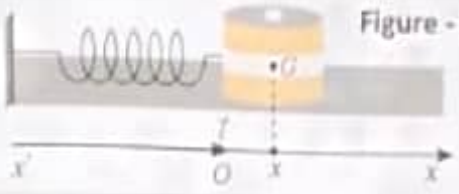


Figure - 1

Un montage relié à un ordinateur, permet d'enregistrer le déplacement du centr d'inertie du mobile en fonction du temps.

Le mobile est écarté de sa position d'équilibre et abandonné sans vitesse initiale L'enregistrement des différentes positions du centre d'inertie donne la courbe de l figure-2. La position du centre d'inertie est repérée par son abscisse x mesurée partir de sa position d'équilibre O.

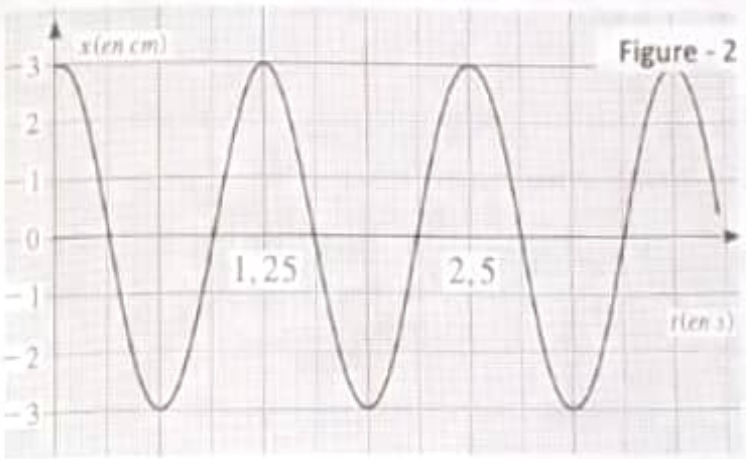


Figure - 2

1- Sans tenir compte des éventuelles forces de frottement, représenter sur un sch ma les forces qui s'exercent sur le mobile:

a- lorsqu'il est à l'équilibre,

b- lorsque le ressort est allongé.

2- Etablir l'équation différentielle qui régit le mouvement du centre d'inertie mobile.

3- La solution de cette équation différentielle est de la forme

$$x(t) = X_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right).$$

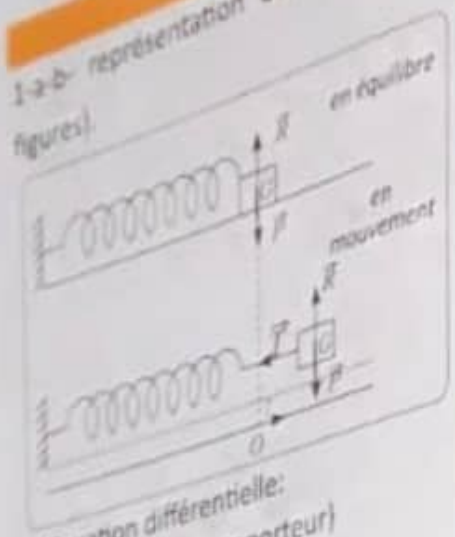
a- Etablir l'expression de la période propre T_0 puis calculer sa valeur.

b- Déterminer la valeur de la constante de raideur K.

4- En s'appuyant sur l'enregistrement, déterminer les valeur de X_m et φ.

Solution

1-a-b- représentation des forces (voir figures).



2- Equation différentielle:

système étudié: (autoporteur)

bilan des forces: $\vec{T}$; $\vec{P}$; $\vec{R}$.

On applique la 2ème loi de Newton.

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$$

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m\vec{a}$$

suivant l'axe: $(x'Ox)$:

$$P_x + R_x + T_x = ma_x$$

$$0 \quad 0$$

$$-Kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + Kx = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m}x = 0$$

3.a- Expression de T_0:

On a: $x(t) = x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$

donc: $\frac{dx}{dt} = -x_m\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$

et: $\frac{d^2x}{dt^2} = -x_m\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 x(t)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 x = 0$$

Comparons avec l'équation différentielle:

$$\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 = \frac{K}{m}$$

$$\frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{K}{m}} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$

b- De l'expression de T_0 on déduit que:

$$T_0^2 = \frac{4\pi^2 m}{K}$$

d'où $K = \frac{4\pi^2 m}{T_0^2}$

$$K = \frac{4\pi^2 . 0,8}{1,25^2} \simeq 20 N.m^{-1}$$

4- Valeur de X_m et φ:

De la courbe: $X_m = 3cm$

Alors:

$$\cos\varphi = \frac{x(t=0)}{X_m} \Longleftrightarrow \cos\varphi = \frac{X_m}{X_m} = 1$$

$$\varphi = 0$$

2 La mesure de la masse d'un astronaute est l'un des éléments du bilan médical auquel doit s'astreindre un astronaute. Mais comment «se peser» dans une navette spatiale où règne l'impesanteur? Alors que l'utilisation d'un pèse-personne n'est plus possible, les scientifiques ont imaginé le dispositif suivant (figure-1): l'astronaute de masse M prend place dans une cabine mobile de masse $m = 20kg$ le long d'un rail à coussin d'air. La cabine peut osciller sous l'action de deux ressorts identiques de raideur $k_1 = 2000 N.m^{-1}$.

Lorsque la soufflerie d'air fonctionne, les frottements sur le rail sont négligeables.

On admet que l'action des deux ressorts est équivalente à celle d'un seul ressort de raideur $k = 2k_1$ (figure 2).

Un dispositif relié à un ordinateur permet d'obtenir les variations de la position x du centre d'inertie G de l'ensemble S par rapport à la position d'équilibre 0). Lor d'un des tests du dispositif sur Terre, l'astronaute, installé dans sa cabine, provoqu un déplacement $X_m = 0,5m$ du centre d'inertie G en tirant sur un câble. A l'instan de date $t_0 = 0s$, il lâche le câble et, avec une vitesse initiale nulle, laisse osciller l'en semble S sur le rail à coussin d'air disposé horizontalement. L'écran de l'ordinateu affiche la courbe de la figure-4.

Figure-1

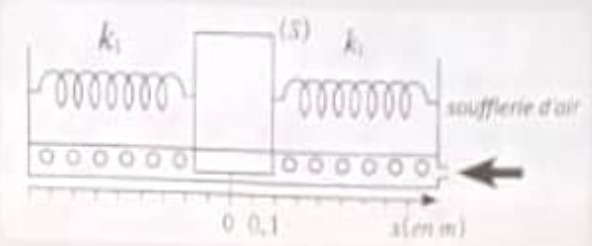


Figure-2

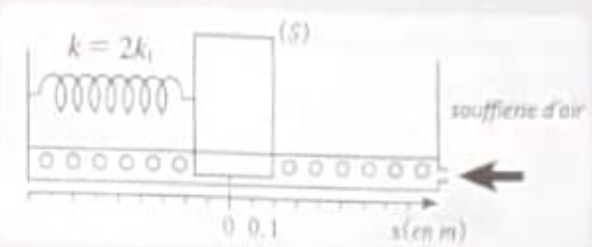


Figure-3

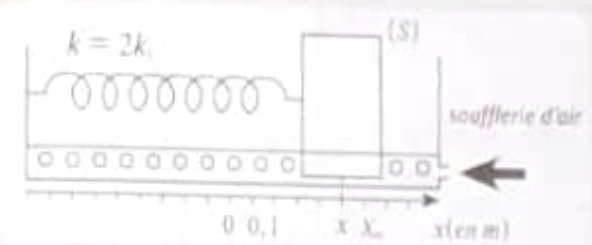
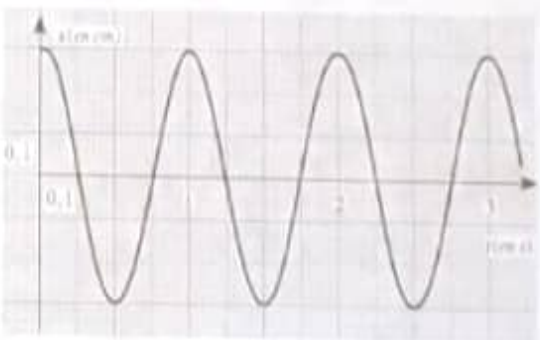


Figure-4



1- Equation horaire des oscillations:

a- A l'instant de date t, le système est dans l'état représenté sur la figure 3. Refair le schéma de la cabine et représenter les forces appliquées à S.

b- En appliquant à S la deuxième loi de Newton, établir l'équation différentielle qui régit le mouvement de G.

c- La solution de l'équation différentielle est: $x(t) = X_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$.

Donner le nom attribué à T_0, son unité et établir son expression en fonction de m et k.

2- Détermination de la masse de l'astronaute:

a- Exprimer la masse M en fonction de T_0, m et k_1.

b- A partir de la figure 4, déterminer la valeur de la période T_0 des oscillations.

c- En déduire la valeur de M.

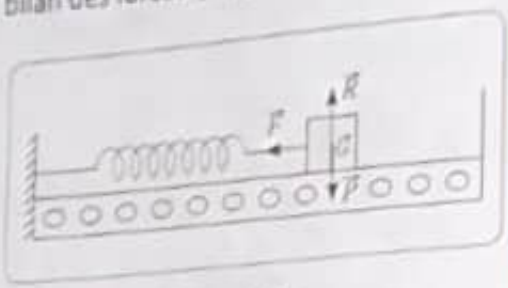
d- Pourquoi le dispositif peut-il être utilisé en impesanteur?

Solution

1- Equation horaire des oscillations:

a- Schéma avec représentation des forces:

bilan des forces: $\vec{P}$, $\vec{R}$ et $\vec{F}$



b- Equation différentielle:

Système étudié (cabine, Astronaute)

D'après la 2e loi:

$$\sum \vec{F}_{ext} = (M+m)\vec{a}$$

$$\vec{P} + \vec{F} + \vec{R} = (M+m)\vec{a}$$

Par projection sur (Ox):

$$P_x + R_x + F_x = (M+m)a_x$$

$$0 + 0 - kx = (M+m)\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{M+m}x = 0$$

c- est de la période T_0:

T_0 s'appelle la période propre.

Elle s'exprime en secondes. On montre que: $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{M+m}{2k_1}}$

2- En se référant à la même méthode utilisée dans l'exercice (1); on obtient:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{M+m}{2k_1}}$$

$$T_0^2 = 4\pi^2\frac{(M+m)}{2k_1}$$

$$M + m = \frac{T_0^2 \times 2k_1}{4\pi^2}$$

$$M = \frac{T_0^2 \times 2k_1}{4\pi^2} - m$$

b- Valeur de T_0:

graphiquement: $T_0 = 1s$

c- Valeur de M:

A.N.: $M = \frac{1^2 \times 2 \times 2000}{4\pi^2} = 81,32kg$

d- L'utilité de tel dispositif dans la station spatiale où règne l'impesanteur, son utilité, est de déterminer la masse d'un être vivant (souris, lapin...) à partir de T_0 qui est indépendante de g.

Etude du mouvement d'un oscillateur (solide (S), ressort)

Un solide de masse $m = 0,2kg$ est fixé à un ressort horizontal à spires non jointives, de masse négligeable et de raideur K.

A l'équilibre, le centre d'inertie G coïncide avec l'origine du repère $(O,\vec{i})$ lié à la terre considéré comme galiléen (figure 1).

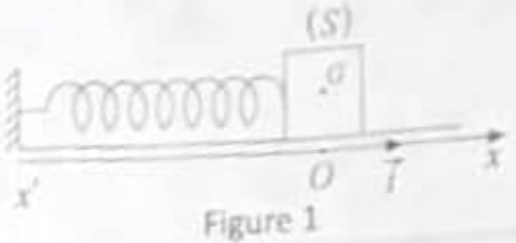


Figure 1

On écarte le solide (S) de sa position d'équilibre d'une distance $X_m = 2cm$ et on le libère sans vitesse initiale à l'instant $t_0 = 0$. Le solide (S) est animé d'un mouvement de translation rectiligne sinusoïdal.

On choisit l'état où le ressort n'est pas déformé comme référence de l'énergie potentielle élastique E_{pe} et le plan horizontal contenant G comme état de référence de l'énergie potentielle de pesanteur E_{pp}.

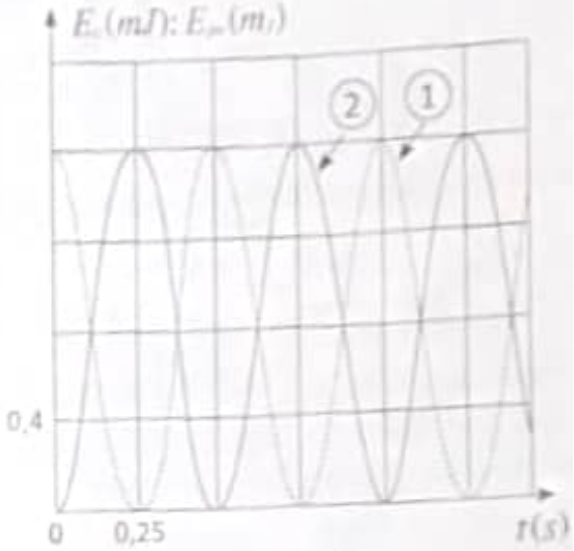


Figure 2

La figure (2) représente les variations de l'énergie potentielle élastique E_{pe} et de l'énergie cinétique E_c en fonction du temps pour l'oscillateur étudié.

1- Montrer , que la courbe (2) correspond à l'énergie cinétique E_c du système oscillant.

2- Déterminer graphiquement , la valeur de l'énergie potentielle élastique maximale $E_{pe,max}$

3- En déduire la valeur de la raideur K .

4- Déterminer lorsque $E_c = E_{pe}$

4,1- La valeur de v_0 module de la vitesse du centre d'inertie du solide S

4,2- L'expression de l'abscisse de G en fonction de 4m.

calculer les valeurs correspondantes

Solution

1- A l'instant $t_0 = 0$, le système est abandonné sans vitesse initiale , son énergie cinétique est donc nulle, c'est la courbe (2) qui correspond à la variation de ce E_c .

Alors que l'énergie potentielle élastique il lui correspond la courbe (1).

2- $E_{pe}(\max) = 1,6mJ$

3- $E_{pe}(\max) = \frac{1}{2}Kxm^2$

$$K = \frac{2E_{pe}(\max)}{xm^2} = \frac{2.1,6.10^{-3}}{(2.10^{-2})^2} = 8N.m^{-1}$$

4,1- Les deux énergies sont liées par:

$E_m + E_c = E_m = E_{pe}(\max)$

or $E_m = E_c$, alors, il vient:

$2E_c = E_{pe}(\max)$

$2\frac{1}{2}mv^2 = E_{pe}(\max)$

$v^2 = \frac{E_{pe}(\max)}{m}$

$V_0 = |\dot{x}| = \sqrt{\frac{E_{pe}(\max)}{m}}$

$V_0 = \sqrt{\frac{1,6.10^{-3}}{0,2}} = 8,9.10^{-2} ms^{-1}$

4.2- Considérons la même expression:

$E_c + E_{pe} = E_{pe}(\max)$

avec $E_c = E_{pe}$ on écrit:

$2E_{pe} = Ep_e(\max)$

Soit $2\frac{1}{2}Kx^2 = \frac{1}{2}KX_m^2$

$x^2 = \frac{X_m^2}{2}$

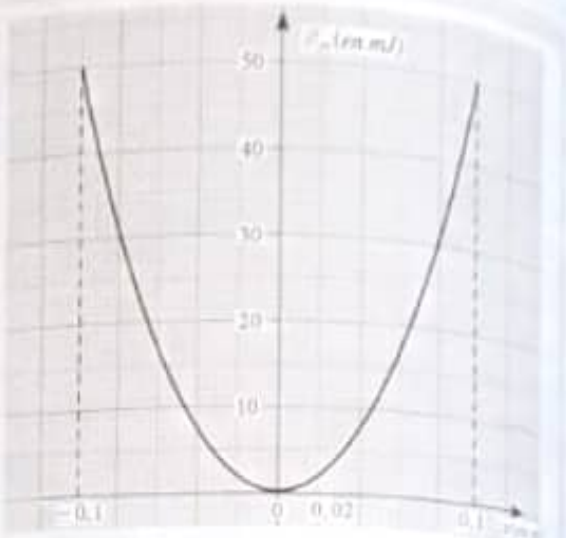
d'où $x = \pm\frac{X_m}{\sqrt{2}}$

Les deux énergies E_c et E_{pe} s'égalisent chaque fois que $x = +\frac{X_m}{\sqrt{2}}$ ou $x = -\frac{X_m}{\sqrt{2}}$

A.N.: $x \simeq \pm 1,41cm$

4 Un pendule élastique est formé d'un solide de masse penctuel, $m = 50g$ fixé à un ressort horizontal, de masse négligeable et de raideur K. On choisit un axe $(x'x)$ parallèle à l'axe du ressort dont l'origine O correspond à la position de repos du solide.

On note x l'abscisse de l'extrémité du ressort reliée à la masse.



a- On donne la courbe $\mathscr{E}_{pe}(x)$.

Justifier son allure.

b- Déterminer la raideur du ressort k.

c- L'énergie mécanique du système est constante et vaut $\mathscr{E}_m = 50mJ$.

En déduire x_{max} et l'allure de la courbe $\mathscr{E}_c(x)$.

d- Compléter le schéma en précisant les valeurs remarquables de $\mathscr{E}_c$ et $\mathscr{E}_{pe}$.

e- Trouver la position du solide qui correspond à: l'égalité $E_c = E_{pe}$ pour la 1ère fois.

f- Montrer que: $v = \sqrt{\frac{k}{m}(X_m^2 - x^2)}$.

Solution

a- Allure de la courbe :

On a: $E_{pe} = \frac{1}{2}kx^2 + cte$ son expression est celle de L'équation d'une parabole ce qui correspond à l'allure de la courbe, avec: $cte = 0$.

b- Valeur de K :

On a: $E_{pe\max} = 50mJ$ et $E_{pe\max} = \frac{1}{2}kX_m^2$

$K = \frac{2E_{pe\max}}{x_m^2}$

N.: $k = \frac{50\,10^{-3}\,2}{(0,1)^2} = 10N.m^{-1}$

Valeur de x_m:

our $E_m = 50mJ$; l'amplitude corres-
ondante est: $x_m = 0,1m$

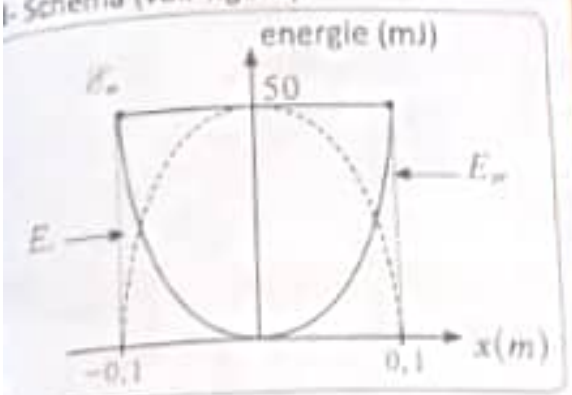
L'allure de E_c :

n a: $E_c = E_m - E_p$

$$E_c = \frac{1}{2}kX_m^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

onc l'allure est une parabole inversée.

- Schéma (voir figure).



2- Valeur de x, telle que: $E_m = E_c$:

On a: $E_m = E_p + E_c$

$$E_m = 2E_p$$

$\frac{1}{2}kX_m^2 = 2.\frac{1}{2}kx^2$ donc: $\frac{X_m^2}{2} = x^2$

Donc: $x = \pm\frac{X_m}{\sqrt{2}}$

Pour la 1ère fois: $x_1 = \frac{X_m}{\sqrt{2}}$

f- Expression de v :

On a: $E_m = E_c + E_p$

$$E_c = E_m - E_p$$

$$\frac{1}{2}mv_x^2 = \frac{1}{2}KX_m^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

$$v_x^2 = \frac{K}{m}(X_m^2 - x^2)$$

$$v_x = \pm\sqrt{\frac{K}{m}(X_m^2 - x^2)}$$

5 Un solide (S), de centre d'inertie G et de masse m est fixé à l'extrémité d'un ressort horizontal à spires non jointives de masse négligeable et de raideur $K = 40N.m^{-1}$. L'autre extrémité est attachée à un support immobile.

On écarte le solide (S) de sa position d'équilibre d'une distance X_m puis on le lâche sans vitesse initiale.

Le solide (S) oscille sans frottements sur un plan horizontal.

On étudie le mouvement du centre d'inertie G dans un repère $(O,\vec{i})$ lié à un référentiel terrestre considéré comme galiléen.

La position de G, lorsque le solide (S) est à l'équilibre, coïncide avec l'origine O de l'axe $(O,\vec{i})$.

On repère la position de G à un instant t par l'abscisse x dans le repère $(O,\vec{i})$. (figure 1)

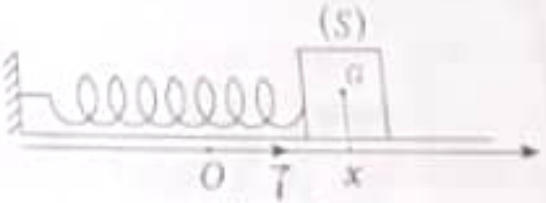


Figure 1

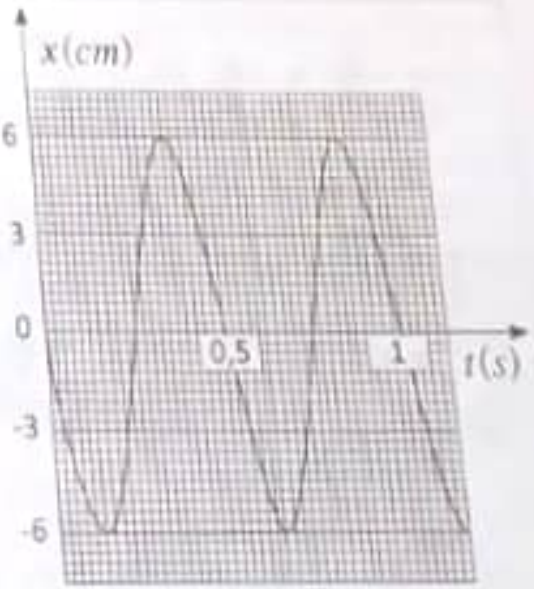


Figure 2

On choisit la position de G à l'état d'équilibre $(x=0)$ comme référence de l'énergie potentielle élastique.

L'équation horaire du mouvement de G s'écrit sous la forme $x(t)=X_m\cos\left(\frac{2\pi t}{T_0}+\varphi\right)$.

La courbe de la figure 2 représente les variations de l'abscisse x en fonction du temps.

1- Déterminer les valeurs de X_m, T_0 et φ.

2- Donner l'expression de T_0. En déduire la valeur de m.

3- Déterminer la valeur de la vitesse maximale v_{max} du centre d'inertie G du solide.

4- Déterminer la valeur maximale a_{max} de l'accélération de G.

5- En quelle position de G l'accélération est-elle nulle?

6- Trouver la valeur de l'énergie potentielle élastique Ep_{el} du système mécanique à la date

$t_1=0,5s$ puis à la date $t_2=0,625s$.

7- Calculer le travail $W_{AB}(\vec{F})$ de la force de rappel, lorsque le centre d'inertie G se déplace de la position

A d'abscisse $x_A=X_m$ à la position B d'abscisse $x_B=-X_m$.

Solution

1- D'après le graphe:

$X_m=6cm$; $T_0=0,5s$

La valeur de φ est donnée par les condition initiales (à $t=0$):

$x(0)=X_m\cos\varphi$, d'où $\cos\varphi=\frac{x(0)}{X_m}=0$

La valeur de φ est alors: $\varphi=\pm\frac{\pi}{2}rad$

En revenant à la courbe on a: $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0<0$

Par dérivation on a:

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{2\pi}{T_0}X_m\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)$$

à $t=0$: $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0=-\frac{2\pi}{T_0}X_m\sin\varphi$

Puisque $\frac{2\pi}{T_0}X_m$ est positif, le signe de $\sin\varphi$ est donc positif:

d'où $\varphi=+\frac{\pi}{2}rad$

2- $T_0=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

$m=\frac{T_0^2K}{4\pi^2}=0,25kg$

3- $v_x=\frac{dx}{dt}=-\frac{2\pi}{T_0}X_m\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)$

Le sinus est majoré par $(+1)$ et minoré par (-1)

donc: $-\frac{2\pi}{T_0}X_m\le v_x\le\frac{2\pi}{T_0}X_m$

La vitesse maximale est donc:

$v_{max}=\frac{2\pi}{T_0}Xm=\frac{2\pi}{0,5}\cdot6.10^{-2}\simeq0,754ms^{-1}$

4- Une dérivation de v_x donne:

$a_x=\frac{dv_x}{at}=-\left(\frac{2\pi}{T0}\right)^2X_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)$

La valeur maximale de cette accélération est:

$a_{max}=\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)2X_m=9,6ms^{-2}$

5- D'après l'expression de a_x (question 4):

L'accélération est:

$a_x=-\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)2\underbrace{X_m.\cos\left(\frac{2\pi}{T0}t+\varphi\right)}_{x(t)}=-\frac{4\pi^2}{T_0^2}$

D'après cette expression a_x est nulle lorsque $x=0$.

L'accélération s'annule lorsque le solide passe par l'origine ses abscisses.

6- Par définition: $E_{pe} = \frac{1}{2}K\Delta\ell^2 + cte$

$E_{pe} = 0$ lorsque $\Delta\ell = 0$, donc $cte = 0$

Le pendule est horizontal donc: pour $t > t_0$ on a:

$\Delta\ell = \ell - \ell_0 = G_0G = x$, d'où:

$E_{pe} = \frac{1}{2}K\Delta\ell^2 = \frac{1}{2}Kx^2$

A l'instant $t_1 = 0\,s$ on a d'après le graphe $x = 0$

$$E_{pe}(x_1) = \frac{1}{2}Kx_1^2 = 0$$

A l'instant $t_2 = 2{,}125s$

$x_2 = X_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t_2 + \frac{\pi}{2}\right)$

$x_2 = 6.10^{-2}.\left(\frac{2\pi}{0{,}5}2{,}125 + \frac{\pi}{2}\right)$

$x_2 = 610^{-2}\cos 9\pi$

$x_2 = -X_m = 6.10^{-2}m$

$E_{pe}(x_2) = \frac{1}{2}Kx_2^2 = \frac{1}{2}KX_m^2 = 7{,}2.10^{-2}J$

7- $W_{A\to B}(\vec{F}) = \frac{1}{2}K(x_A^2 - x_B^2)$

$W_{A\to B}(\vec{F}) = \frac{1}{2}K[X_m^2 - (-X_m)^2] = 0$

On considère un ressort horizontal de spire non jointives, de masse négligeable et de raideur K . l'une de ses extrémités est fixée à un support, l'une porte un corps solide (S) de masse $m = 200\,g$, le corps (S) peut glisser sans frottement sur un plan horizontal (figure-1).

On écarte le corps (S) dans le sens négatif par rapport à sa position d'équilibre O, origine du repère $(o, \vec{i})$, et on l'abandonne sans vitesse initiale.

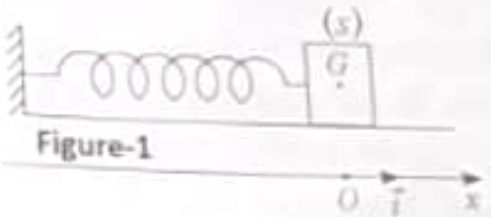


Figure-1

1- Trouver l'équation différentielle en utilisant l'étude énergétique Quelle est la nature du mouvement du corps (S)?

2- La figure (2) représente la variation de l'accélération $\ddot{x}$ en fonction de x.

Trouver à partir de la courbe les valeurs de:

X_m l'amplitude du mouvement

T_0 la période propre du mouvement.

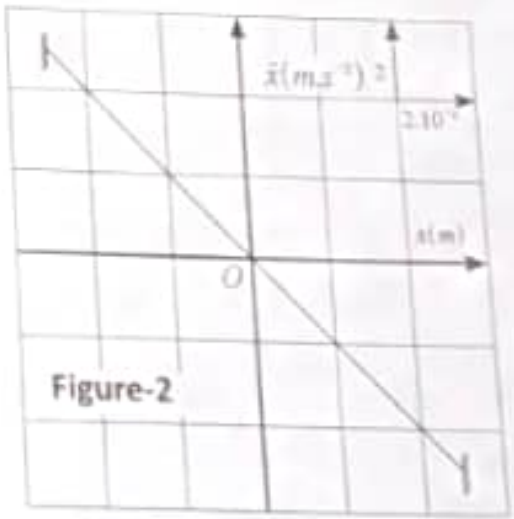


Figure-2

3- Ecrire l'équation horaire du mouvement, en prenant comme origine des date (t=0) le premier passage du corps (S) par la position d'équilibre.

Données: Les énergies potentielles E_{pp} et E_{pe} sont considérées nulles à l'état d'équ libre.

Solution

La conservation de E_m s'écrit :

$E_c(A) + E_{pe}(A) = E_c(O) + E_{pe}(O)$

$\frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}Kd^2 = \frac{1}{2}m(2v_A)^2 + 0$

$\frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}Kd^2 = 2mv_A^2$, d'où : $v_A^2 = \frac{K}{3m}d^2$

Appliquons maintenant cette conservation entre A et B point d'arrêt de (S) à $x_B = -X_m$.

$\frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}Kd^2 = \frac{1}{2}K(-X_m)^2 + \frac{1}{2}mv_B^2$

$mv_A^2 + Kd^2 = KX_m^2 + 0$

$m\frac{K}{3m}d^2 + Kd^2 = KX_m^2$

$d^2\left(\frac{1}{3} + 1\right) = X_m^2$

$X_m^2 = \frac{4}{3}d$

$X_m = \frac{2}{\sqrt{3}}d$

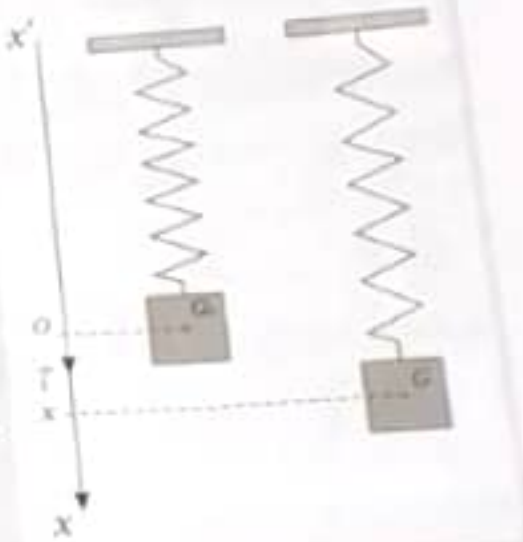
Un ressort de raideur K est suspendu en un point fixe. A son extrémité libre, on suspend un solide S de masse m de centre d'inertie G

1- Déterminer l'allongement $\Delta\ell_0$ du ressort à l'équilibre.

2- On choisit comme origine de l'axe vertical $(x'x)$ la position de G à l'équilibre.

On déplace le solide verticalement vers le bas et on l'abandonne sans vitesse initiale.

Pour une position du centre d'inertie du solide repérée par sa coordonnée x (voir figure):



a- Exprimer l'allongement du ressort ;

b- Représenter sur un schéma les forces qui s'exercent sur le solide.

3- a- En utilisant la deuxième loi de Newton, établir l'équation différentielle des oscillations du solide.

b- Vérifier que l'expression: $x(t) = X_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$ est solution de cette équation différentielle. En déduire l'expression de la période propre.

4- Comparer ce résultat à la période propre de ce dispositif solide-ressort placé en position horizontale.

5- Trouver l'expression de l'énergie potentielle élastique.

On prend $Ep_e = 0$ lorsque $x = 0$.

6- Trouver l'expression de l'énergie potentielle de tel que $Ep = 0$ pour $x = -\Delta\ell_0$

7- En déduire l'expression de l'énergie mécanique .

1- Détermination de $\Delta\ell_0$.

- Bilan des forces $\vec{P}$; $\vec{F}_0$.

Selon la 1ère Loi Newton

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Longleftrightarrow \vec{P} + \vec{F}_0 = \vec{0}$$

suivant l'axe $(\%x'x)$: $mg - k\Delta\ell_0 = o$

$$\Delta\ell_0 = \frac{mg}{k}$$

2.a- Allongement du ressort:

On a: $\Delta\ell = \Delta\ell_0 + x$

b- représentation des forces $\vec{P}$ et $\vec{F}$

(voir schéma)

3.a- L'équation différentielle:

Selon la 2ème loi de Newton:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}$$

$$\vec{P} + \vec{F} = m.\vec{a}$$

Suivant l'axe: $(\%\, xx')$

$$m.g - k\Delta\ell = m.\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$m.g - k(\Delta\ell_0 + x) = m.\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\underbrace{m.g - k\Delta\ell_0}_{0} - kx = m.\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

b- Vérification de la solution:

$$x(t) = x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = -x_m\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{t_0}t + \varphi\right)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x_m\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)2\cos\left(\frac{2\pi}{t_0}t + \varphi\right)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 x = 0$$

Donc la solution est vérifiée avec:

$$\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 = \frac{k}{m}$$

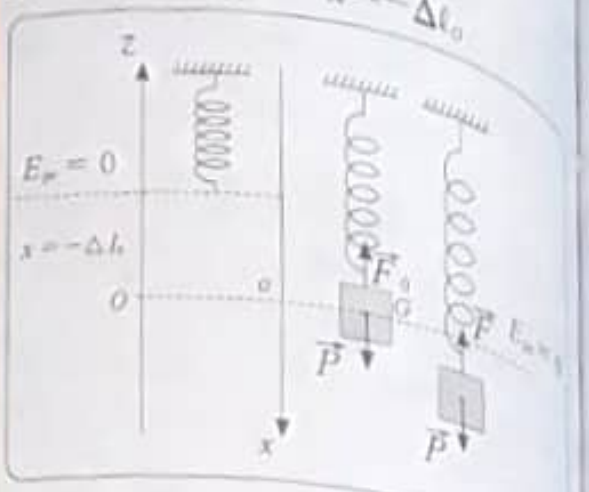
d'où: $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

4- Comparaison:

L'expression de T_0 est la même que celle d'un pendule élastique horizontal.

5- Energie potentielle:

On a: $Ep_e = o$ pour $x = -\Delta\ell_0$



On a: $Ep_p = mgz + c^{te}$ avec $z = -x$

$$Ep_p = -m,gx + c^{te}$$

$$(Ep_p = 0\ si\ x = 0)$$

Donc $c^{te} = o$

$Ep_p = -mgx$ et on a: $mg = K\Delta\ell_0$

Donc: $Ep_p = -K.\Delta\ell_0 x$

6- Expression de Ep_e :

On a: $Ep_e = \frac{1}{2}K(\Delta\ell_0 + x)^2 + c^{te}$

On a: $Ep_e = O$ si $x = -\Delta\ell_0$

$c^{te} = o$ d'où $Ep_e = \frac{1}{2}K(\Delta\ell_0 + x)^2$

7- Expression de E_m

On a: $E_m = E_C + Ep_p + Ep_e$

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 - K.\Delta\ell_0 x + \frac{1}{2}K(\Delta\ell_0 + x)^2$$

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 - K\Delta\ell_0 x + \frac{1}{2}\Delta\ell_0^2 + K\Delta\ell_0 x + K\frac{1}{2}x^2$$

D'où: $E_m = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k\Delta l_0^2 + \frac{1}{2}kx^2$

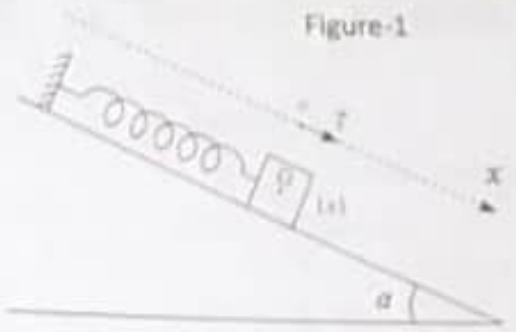
Sur un plan incliné on fixe l'extrémité d'un ressort de masse négligeable, de raideur k. À l'autre extrémité est fixé un corps solide (S) de masse $m = 500\ g$, le plan fait un angle $\alpha = 30°$ avec l'horizontale (figure -1).

1- En étudiant l'equilibre du corps (S); établir la relation: $k\Delta\ell_e = mg\sin\alpha$

$\Delta\ell_e$: L'allongement du ressort à l'équilibre

2- On écarte le corps (S) de sa position d'équilibre O, origine du repère d'espace $(O,\vec{i})$ d'une distance x_m et on l'abandonne sans vitesse initiale.

Figure-1



Etablir l'équation différentielle du mouvement et en déduire l'expression de la période propre T_0.

3- La figure-2 représente le diagramme d'espace du corps (S) d'équation $x(t) = x_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$

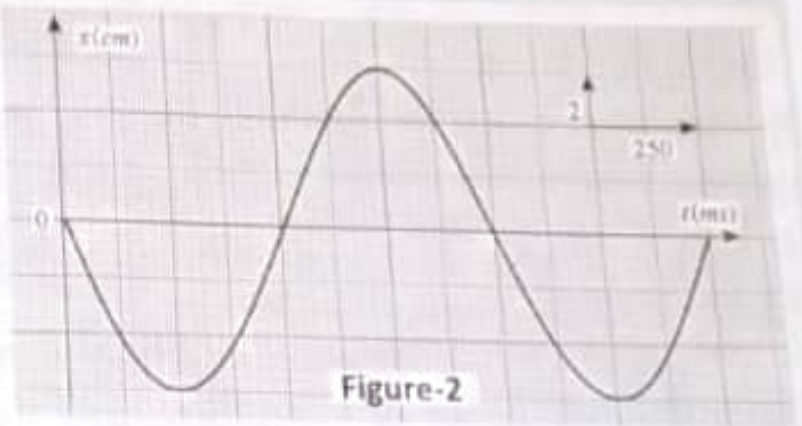


Figure-2

3.1- Nommer et déterminer les valeurs des grandeurs x_m, φ et T_0

3.2- En deduire la raideur k du ressort.

4- Calculer le travail de la force de rappel entre les instants $t_1 = \frac{T_0}{4}$ et $t_2 = \frac{3T_0}{4}$.

Donnée: $g = 10\ N\ kg^{-1}$

Solution

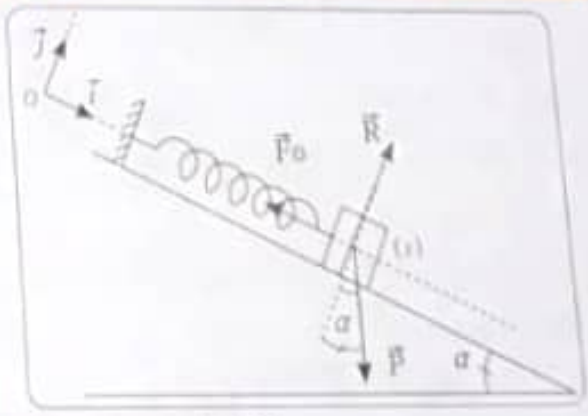
1- La relation:

- Système étudié: {corps (S)}
- Bilan des forces: $\vec{P}$ et $\vec{R}$ et $\vec{F}_e$

Selon la 1ère loi de Newton:

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{o}$$

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = \vec{0}$$



Suivant l'axe $(\vec{x'x})$ on a:

$$P_x + R_x + F_x = o$$

$$mg\sin\alpha + 0 - k\Delta\ell_0 = 0$$

donc: $k\Delta\ell_0 = mg\sin\alpha$

2- Equation différentielle.

bilan des forces: $\vec{P}, \vec{R}$ et $\vec{F}$.

Selon la 2ème loi de Newton:

$$\sum \vec{F}ext = m\vec{a}$$

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m\vec{a}$$

suivant l'axe $(\vec{x}'\vec{x})$:

$$P_x + R_x + F_x = max$$

$$mg\sin\alpha + 0 - k(\Delta\ell_0 + x) = m\ddot{x}$$

$$\underbrace{mg\sin\alpha - k\Delta\ell_0}_{0} - kx = m\ddot{x}$$

donc: $\ddot{x} + \left(\frac{k}{m}\right)x = o$

Le mouvement de (S) est d'oscillation rectiligne sinusoïdale de période m

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

3.1- Les grandeurs.

X_m : Elongation $x_m = 3cm$

T_0 : période propre

$T_0 = 4.250.10^{-3} = 1\,s$

φ : phase à $t = o$

on a: $\cos\varphi = \frac{x(t=o)}{x_m} = 0$

$\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ et

$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=o} = -x_m\left(\frac{2\pi}{To}\right)\sin\varphi < 0$

$\sin\varphi > 0$ donc $\varphi = +\frac{\pi}{2}$

3.2- Valeur de k

On a: $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

donc $k = \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2.m$

$k = \left(\frac{2\pi}{1}\right)^2.0,5 = 20N.m^{-1}$

4- Calcul de $W_{1\to2}(\vec{F})$:

On a: $W_{1\to2}(\vec{F}) = \frac{1}{2}k(x_1^2 - x_2^2)$

avec: $x_1 = -X_m$ et $x_2 = X_m$

donc: $W_{1\to2}(\vec{F}) = \frac{1}{2}k.2X_m^2 = kX_m^2$

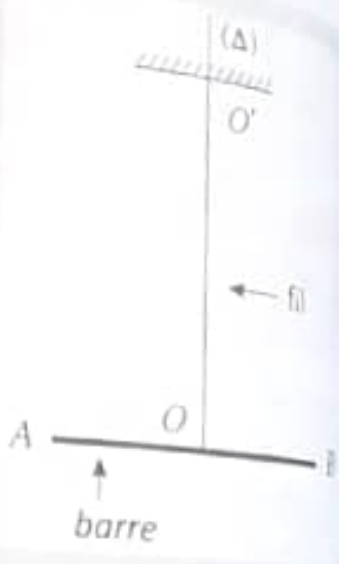
A.N.: $W_{1\to2}(\vec{F}) = 20.(3.10^{-2})^2$

$= 1,8.10^{-2}J$

10 La figure ci-contre représente un pendule de torsion constitué de:

- Un fil de torsion, l'une de ses extrémité est fixée au point O'.
- Une barre homogène de masse $m = 600\,g$, de longueur $\ell = AB = 20\,cm$, fixée par son centre de gravité O au fil de torsion; J_Δ est le moment d'inertie de la barre par rapport à l'axe (Δ) confondu avec le fil:

$J_\Delta = \frac{1}{12}m\ell^2$.



1- Sous l'action d'un couple de forces, la barre tourne horizontalement d'un angle $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$ par rapport à sa position d'équilibre stable.

En étudiant l'équilibre de la barre AB, calculer la valeur de C la constante de torsion, on donne $M = 9,42.10^{-3}\,N.m$ valeur du moment du couple de forces.

2- On lâche la barre sans vitesse initiale à l'instant $t = 0$

2.1- Etablir l'équation différentielle du mouvement de l'oscillateur

2.2- Calculer la valeur T_0 du période propre.

2.3-Ecrirenumériquementl'équationhorairedumouvement: $\theta(t) = \theta_m \cos(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi)$.

3.4- A la même distance x de l'axe (Δ), on fixe sur la barre deux solides (S_1) et (S_2) ponctuels de masse $m_1 = m_2 = \frac{m}{6}$.

Déterminer l'expression de x en fonction de ℓ pour que la période T_0 du système soit $T_0 = T_0\sqrt{2}$.

4.1- Donner l'expression de l'énergie mécanique, de l'oscillateur en absence des masses (S_1) et (S_2).

4.2- Montrer que l'énergie du système se conserve.

Solution

1- Valeur de C.

Système étudié {la barre}

Bilan des forces $\vec{P};\vec{R}$; couple de force, couple de torsion.

A l'équilibre, $\sum M_\Delta(\vec{F}_{ext}) = 0$

$$M_\Delta(\vec{P}) + M_\Delta(\vec{R}) + M + M_C = 0$$

$$0 + 0 + M - C\theta_0 = 0$$

$$C = \frac{M}{\theta_0}$$

A.N.: $C = \frac{9,42.10^{-3}}{\frac{\pi}{4}} = 0,01 N.m.rad^{-1}$

2.1- Equation différentielle:

Bilan des forces $\vec{P};\vec{R}$; couple de torsion

on applique la relation fondamental de la dynamique.

$\sum M_\Delta(\vec{F}_{ext}) = J_\Delta.\ddot{\theta}$;

$0 + 0 - C\theta = J_\Delta.\ddot{\theta}$

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{C}{J_0}\right)\theta = 0.$$

2.2- Valeur de T_0

On a: $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_0}{C}}$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{1}{12}\frac{m\ell^2}{C}}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m\ell^2}{12C}}$$

A.N.: $T_0 = 2,8\,s$

2.3- Equation horaire:

L'équation différentielle est du second ordre donc le mouvement est oscillatoire d'équation horaire.

$$\theta(t) = \theta m \cos\left(\frac{2\pi}{To}.t + \varphi\right)$$

avec: $\theta_m = \theta_0 = \frac{\pi}{4} rad$

à $t = 0$; $\cos(\varphi) = \frac{\theta(t=o)}{\theta_m} = \frac{\theta_m}{\theta_m} = 1$

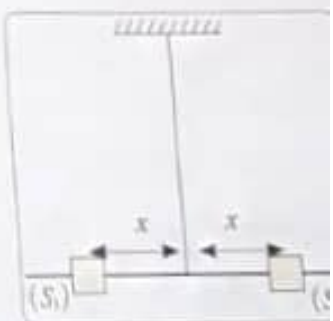
$$\varphi = 0.$$

D'où: $\theta(t) = \frac{\pi}{4}\cos(2,24\,t)$

3- On a:

$T_0' = \sqrt{2}\,T_0$ La période T_0' du système s'écrit:

$$T_0' = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{C}}$$



Avec:

$J_\Delta = J_0 + m_1x^2 + m_2x^2$

$$J_\Delta = J_0 + 2\frac{m}{6}x^2$$

Donc: $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{J_\Delta + \frac{m}{3}x^2}{C}}$

D'où: $2\pi\sqrt{\dfrac{J_\Delta + \frac{m}{3}x^2}{C}} = 2\pi\sqrt{2}\sqrt{\dfrac{J_\Delta}{C}}$

$$J_\Delta + \frac{m}{3}x^2 = 2J_0 \Leftrightarrow \frac{m}{3}x^2 = J_\Delta$$

$$x^2 = \frac{3}{m}J_\Delta = \frac{3}{m}\cdot\frac{1}{12}m\ell^2 = \frac{\ell^2}{4}$$

donc: $x = \dfrac{\ell}{2}$

4.1- Expression de E_m.

On a: $E_m = E_c + E_p$

$$E_m = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}C\theta^2 + cte$$

4.2- Montrons que: $E_m = cte$

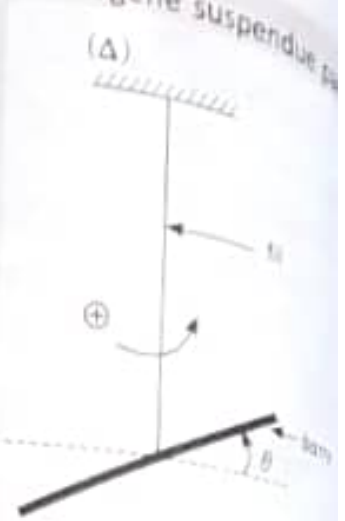
On a: $\dfrac{dE_m}{dt} = \left(\frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}C\theta^2 + cte\right)'$

$$= \frac{1}{2}2J_\Delta\dot{\theta}\ddot{\theta} + \frac{1}{2}2C\theta\dot{\theta}$$

$$= J_\Delta\dot{\theta}\left[\ddot{\theta} + \frac{C}{J_\Delta}\theta\right] = 0$$

Donc: E_m est constante.

11 Une pendule de torsion est constitué d'une barre homogène suspendue par son centre d'inertie à un fil de torsion de constante $C = 0{,}65\,N.m.rad^{-1}$. La barre est de moment d'inertie J_Δ par rapport à l'axe (Δ).



On écarte la barre de sa position d'équilibre d'un angle $\theta_m = \dfrac{\pi}{4}$ et on l'abandonne sans vitesse initiale à l'instant $t = 0$. La barre subit un mouvement d'oscillation horizontale. Pendant une durée de 24 s, elle oscille 20 fois, on repère la position de la barre par rapport à sa position d'équilibre par l'angle θ.

Tous les frottements sont négligeables.

1- Etablir l'expression de l'énergie mécanique du système oscillant en fonction de J_Δ, C, θ et $\dot{\theta}$ (l'état de référence $E_{pp} = 0$ correspond à $\theta = 0$.

2- Trouver l'équation différentielle du mouvement de la barre ;

3- Calculer la valeur de To et en déduire la valeur de J_Δ .

4- Donner l'équation horaire du moment de la barre.

5- On remplace le fil de constante C par un autre fil de constante C' , et on mesure la période T_0' on trouve $T_0' = \dfrac{To}{2}$.

Trouver l'expression de C' en fonction de C, calculer sa valeur.

Solution

1- Expression de E_m

L'énergie mécanique s'écrit:

$$E_m = E_c + Ep$$

avec: $E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2$

et: $E_p = \frac{1}{2} C\theta^2 + 0$

donc: $E_m = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} C\theta^2$

2- Equation différentielle:

L'énergie mécanique se conserve.

donc: $\frac{dE_m}{dt} = 0$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} C\theta^2\right) = 0$$

$$J_\Delta \dot{\theta}\ddot{\theta} + C\theta\dot{\theta} = 0$$

d'où: $\ddot{\theta} + \frac{C}{J_\Delta}\theta = 0$

3- Valeur de T_0 et de J_Δ :

On a: $\Delta t = 20\, T_0$

On a: $\Delta t = 20\, T_0$

$$T_0 = \frac{24}{20} = 1,2\ s$$

Or: $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{C}}$

donc: $J_\Delta = \left(\frac{T_0}{2\pi}\right)^2 C$

$$J_\Delta = \left(\frac{1,2}{2\pi}\right)^2 .0,65$$

$$J_\Delta = 2,37.10^{-2}\ kg.m^2$$

4- Equation horaire:

Le solution de l'équation s'écrit

$$\theta(t) = \theta_m . \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right)$$

avec: $\theta_m = \frac{\pi}{4}$

$$T_0 = 1,2s$$

$$\cos\varphi = \frac{\theta(t=0)}{\theta_m} \Rightarrow \varphi = 0$$

donc: $\theta(t) = \frac{\pi}{4} . \cos(5,24t)$

5- Expression de C'

On a: $T_0 = \frac{T}{2}$

$$2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{C'}} = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{C}} . \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{C'} = \frac{1}{4C}$$

donc: $C' = 4C$

A.N.: $C' = 4.0,65$

$$C' = 2,6\ N.m.rad^{-1}$$

12 Etude énergétique d'un pendule de torsion

Historiquement, Cavendish a utilisé le pendule de torsion pour déterminer la valeur de G, la constante d'attraction universelle.

Ce type de pendule est utilisé parfois, pour déterminer la constante de torsion des matériaux solides et déformables.

On se propose de déterminer la valeur de la constante de torsion d'un fil en acie ainsi que le moment d'inertie d'une tige en exploitant les diagrammes d'énergie.

Un pendule de torsion est constitué d'un fil en acier vertical, de constante de torsic C, et d'une tige AB homogène de moment d'inertie J_Δ par rapport à un axe ver cal (Δ) confondu avec le fil et passant par le centre d'inertie G de la tige.

On écarte la tige horizontalement, dans le sens positif, d'un angle $\theta_m = 0,8\ rad$

rapport à sa position d'équilibre et on l'abandonne sans vitesse initiale à un instant $t = 0$.

On repère la position de la tige à chaque instant par l'abscisse angulaire θ par rapport à la position d'équilibre. (figure-1).



Figure-1

On étudie le mouvement du pendule dans un référentiel terrestre considéré galiléen.

On considère la position d'équilibre du pendule comme référence de l'énergie potentielle de torsion et le plan horizontal passant par G comme référence de l'énergie potentielle de pesanteur.

On néglige tout frottement.

La courbe de la figure-2, représente les variations de l'énergie cinétique E_c du pendule en fonction de l'angle θ.

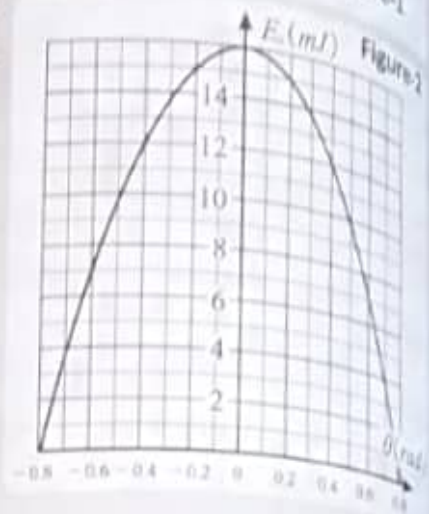


Figure-2

1- Ecrire l'expression de l'énergie mécanique du pendule en fonction de C, J_Δ, θ et la vitesse angulaire $\dot{\theta}$.

2- Déterminer la valeur de la constante de torsion C du fil en acier.

3- Sachant que la vitesse angulaire maximale est $\dot{\theta}_{max} = 2,31\ rad.s^{-1}$, trouver la valeur de J_Δ.

Solution

1- Expression de E_m.

On a: $E_m = E_c + E_{pt}$.

$E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2$ et $E_{pt} = \frac{1}{2} C\theta^2 + C^{te}$

donc: $E_m = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} C\theta^2$

2- Valeur de C.

L'energie mécanique se conserve

donc: $E_m = E_{pt_{max}} = E_{c\,max} = 16\ mJ$

$\frac{1}{2} C\theta_m^2 = E_m\ ;\ C = \frac{2E_m}{\theta_m^2}$

$\theta_m = 0,8\ rad$

donc: $C = \frac{2.16.10^{-3}}{(0,8)^2} = 0,05\ N.m.rad^{-1}$

3- Valeur de J_Δ

On a: $E_{c_{max}} = E_m\ ;\ \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2_{max} = E_m$

$$J_\Delta = \frac{2E_m}{\dot{\theta}^2_{max}}$$

A. N.: $J_\Delta = \frac{2.16.10^{-3}}{(2,31)^2}$

$= 7,05.10^{-3}\ kg.m^2$

On néglige tous les frottements.

Un pendule pesant est constitué d'une tige homogène de masse $m = 200g$ et de longueur, mobile autour d'un axe fixe (Δ) passant par O distant de son extrémité A de $\frac{1}{4}$ $\ell = OA$ figure-1.

Soit J_Δ le moment d'inertie de la tige. On écarte le tige de sa position d'équilibre d'un angle $\theta = \frac{\pi}{30}\ rad$ et on l'abandonne sans vitesse initiale à l'instant $t = 0$.

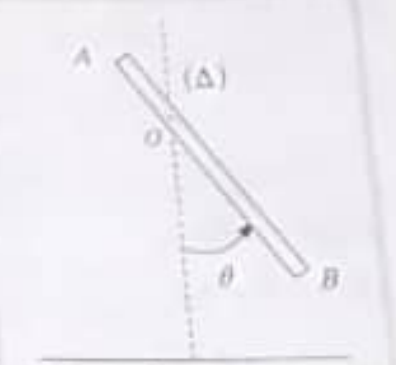


Figure-1

1- Etablir l'équation différentielle vérifiée par θ.

2- Quelle est la nature du mouvement de la tige? en déduire l'équation horaire du mouvement, on donne: $\Delta t = 9,60$ la durée de 10 oscillations

3- Calculer la valeur de J_Δ.

4- La figure-2 ci contre représente la variation de l'énergie potentielle de pesanteur en fonction de θ.

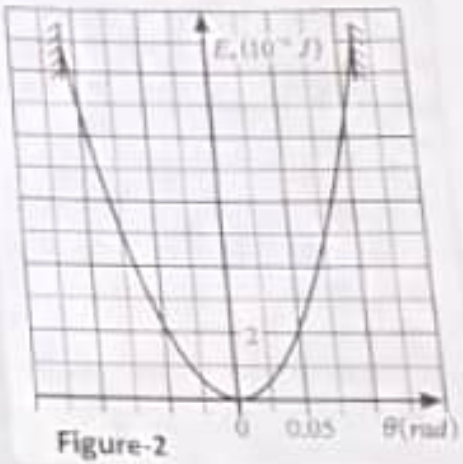


Figure-2

4.1- Exprimer E_{pp} du pendule en fonction de ℓ, m, g et θ.

4.2- Donner l'expression de E_c énergie cinétique et E_m l'énergie mécanique.

4.3- Déterminer les deux valeurs de θ satisfaisant l'égalité de l'énergie E_{pp} et l'énergie E_c.

On donne $g = 10\ N.kg^{-1}$ pour θ petit on prend: $\sin\theta \approx \theta$ et $\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$.

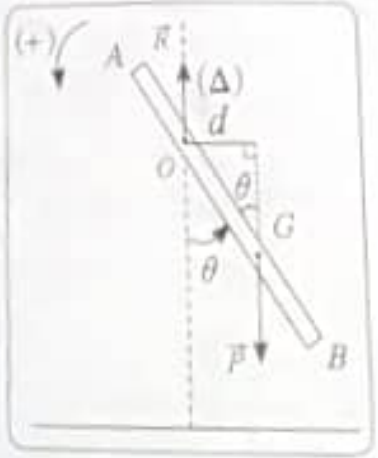
Solution

1- Equation différentielle.

système étudié {la tige}

bilan des forces: $\vec{P}$ et $\vec{R}$.

La relation fondamentale de la dynamique s'écrit: $\sum M_\Delta(\vec{F}) = J_\Delta\ddot{\theta}$.



$M_\Delta(\vec{P}) + M_\Delta(\vec{R}) = J_\Delta\ddot{\theta}$

$-mgd\sin\theta + o = J_\Delta\ddot{\theta}$ avec :

$d = OG = \frac{\ell}{4}$ et $\sin\theta \approx \theta$

Donc: $\ddot{\theta} + \frac{mgL}{4J_\Delta}\theta = 0$

2- Equation horaire

l'équation différentielle est du 2ème ordre donc le mouvement de la tige est oscillatoire de rotation sinusoïdale d'équation horaire:

$$\theta(t) = \theta_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

avec: $\theta_m = \frac{\pi}{30}$

$$T_0 = \frac{\Delta t}{10} = 0{,}96s$$

$$\cos\varphi = \frac{\theta(t=0)}{\theta_m} = \frac{\theta_m}{\theta_m} = 1$$

$$\Rightarrow \varphi = 0$$

$$\theta(t) = \frac{\pi}{30}\cos(6{,}54t)$$

3- Valeur de J_Δ.

On a: $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{4J_\Delta}{mgL}}$

donc $J_\Delta = \left(\frac{T_0}{2\pi}\right)^2 \cdot \frac{mgL}{4}$

A.N: $J_\Delta = \left(\frac{0{,}96}{2\pi}\right)^2 \cdot \frac{0{,}2.10.0{,}4}{4}$

$$J_\Delta \simeq 4{,}66.10^{-3}\, kg.m^2$$

4.1- Expression de E_m

On a: $E_m = mgz + c^{te}$

$$= mg\frac{L}{4}(1-\cos\theta)$$

$$E_m \approx mg\frac{L}{4}\left(\frac{\theta^2}{2}\right)$$

donc: $E_m = \frac{1}{8}mgL\theta^2$

4.2- Expression de E_c et E_m:

On a: $E_c = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2$

avec $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = -\theta_m\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$

et $E_m = E_c + E_{pp} = E_{c_{max}} + E_{pm}$

Donc: $E_m = \frac{1}{8}mgL\theta_{max}^2$

4.3- Valeurs de θ.

On a: $E_c = E_{pp}$

donc: $E_m = 2E_{pp}$

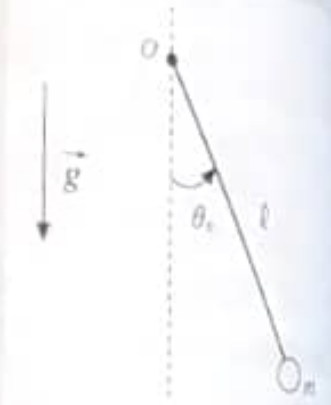
$$\frac{1}{8}mgL\theta_m^2 = 2.\frac{1}{8}mgL\theta^2$$

$$\theta = \pm\theta m/\sqrt{2}$$

$$\theta_1 = \theta_m/\sqrt{2}$$

et: $\theta_2 = -\frac{\theta_m}{\sqrt{2}}$.

14 Un pendule simple de longueur $\ell = 58\,cm$, de masse $m = 42\,g$, est écarté de sa position d'équilibre d'un angle $\theta_0 = 30°$ et lâché sans vitesse initiale.



1- Reproduire et compléter le schéma ci-contre en précisant la référence de l'énergie potentielle de pesanteur et le sens d'orientation du plan.

2- Rappeler l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur E_{pp} en fonction de m, g, ℓ et θ.

3- Exprimer l'énergie cinétique du pendule et son énergie potentielle de pesanteur en fonction des paramètres du système.

a- Pour la position d'amplitude maximale ;

b- Lorsque le pendule passe par sa position d'équilibre.

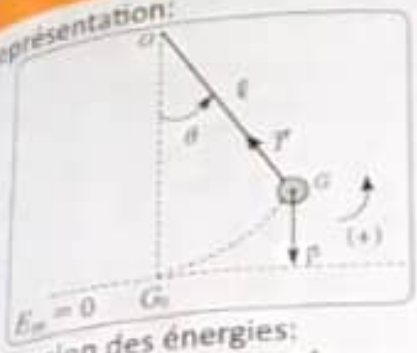
4.a- Donner l'expression de l'énergie mécanique du pendule ; en déduire sa valeur.

b- En supposant que le pendule n'est pas soumis à des forces de frottement, déterminer la vitesse maximale atteinte par le pendule.

On donne: $g = 10\,N/kg$.

Solution

1- Représentation:



2- Expression des énergies:

• L'énergie cinétique: $E_c = \frac{1}{2}mv^2$

• L'énergie potentielle de pesanteur:

$$E_{pp} = mg\ell(1-\cos\theta)$$

3.a- Pour $\theta = \theta_{max}$

On a: $E_{c_{min}} = 0$:

$$E_{pp_{max}} = mg\ell(1-\cos\theta_0)$$

$$= mg\ell\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

b- à l'équilibre $\theta = 0$; $E_{pp_{min}} = 0$.

$$E_{c_{max}} = \frac{1}{2}mv_{max}^2$$

4.a- Energie mécanique:

On a: $E_m = E_c + E_{pp}$

$$= \frac{1}{2}mv^2 + mg\ell(1-\cos\theta)$$

tel que: $E_m = E_{pp_{max}}$

$$E_m = mg\ell(1-\cos\theta_0)$$

A.N.:

$$E_m = 42.10^{-3}.1058.10^{-4}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$E_m = 3,4.10^{-3}\,J$$

b- vitesse maximale:

On a: $E_{c_{max}} = E_m$

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2E_m}{m}}$$

A.N.: $v_{max} = \sqrt{\frac{2.3,4.10^{-3}}{4210^{-4}}}$

$$v_{max} = 0,40\,m/s$$

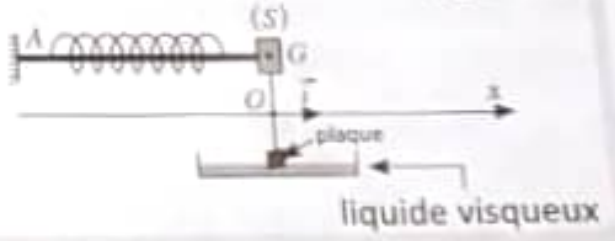
15 Bac PC Juin 2015.

Première partie: étude d'un oscillateur horizontal.

On étudie dans cette partie le mouvement d'un système oscillant (corps solide- ressort) dans une situation où les frottements fluides ne sont pas négligeables.

On considère un corps solide (S), de masse m et de centre d'inertie G, fixé à l'extrémité d'un ressort de masse négligeable; à spires non jointives et de raideur $K = 20$ N.m^{-1}. L'autre extrémité du ressort est fixée en A à un support fixe.

Figure-1



A l'aide d'une tige, on fixe une plaque au corps (S), et on plonge une partie d'elle dans un liquide visqueux comme indiqué sur la figure-1.

On nélige la masse de la tige et de la plaque devant celle du corps (S) .

On repère la position de G à l'instant par l'abscisse x sur l'axe (Ox)

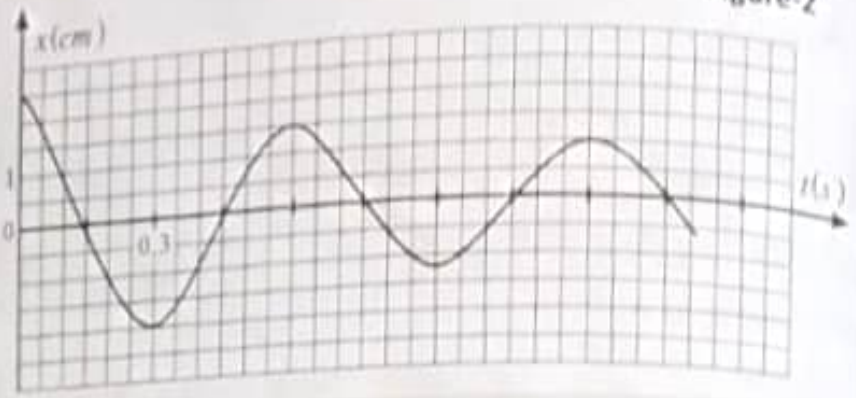
L'abscisse de G_0, position de G à l'équilibre, correspond à O, origine de l'axe (Ox).

On étudie le mouvement de G dans un référentiel terrestre supposé galiléen.

On choisit la position G_0 comme référence de l'énergie potentielle élastique et le plan horizontal passant par G comme état de référence de l'énergie potentielle de pesanteur.

- A l'équilibre le ressort n'est pas déf
- On écarte le corps (S) de la distance d de sa position d'équilibre et on le lâche
vitesse initiale.
Un appareil de saisie informatique a permis de tracer la courbe de variation de l'
cisse du centre d'inertie G en fonction du temps, figure-3.

Figure-2



1- Quel régime des oscillations est mis en évidence par la courbe représentée sur
figure-2?
2- En calculant la variation de l'énergie potentielle élastique de l'oscillateur entr
instants $t_0 = 0$ et $t_1 = 1,2s$. Trouver le travail $W(\vec{F})$ de la force de rappel exerc
par le ressort entre ces deux instants.
3- Déterminer la variation de l'énergie mécanique ΔE_m du système entre les instan
t_0 et t_1 et donner une explication au résultat obtenu.

Solution

1- Régime d'oscillation:
La courbe présente un régime d'oscillations pseudo-périodique.
2- Calcul de $W(\vec{F})$.

On a: $W(\vec{F})_{t_0 \to t_1} = -\Delta Ep_e$

$= Ep_e(t_0) - Ep(t_1)$

avec $Ep_e(t_0) = \frac{1}{2}Kx^2(t_0) = \frac{1}{2}Kd^2$

$= \frac{1}{2}20.(2,5.10^{-2})^2$

$= 6,25.10^{-3}J$

et $Ep(t_1) = \frac{1}{2}K\,x^2(t_1)$

$= \frac{1}{2}.20(10^{-2})^2 = 10^{-3}J$

donc: $W(\vec{F})_{t_0 \to t_1} = +5,25.10^{-3}J$

$= 5,25mJ$

3- Determination de ΔE_m

On a: $\Delta E_m = \Delta E_c + \Delta Ep_e + \Delta Epp$

avec: $\Delta E_{pp} = W(\vec{P}) = 0$

$\Delta E_c = 0$ car pour les deux valeurs x_1 et x_0 les vitesses $v(t_1)$ et $v(t_0)$ sont nulles

donc: $\Delta E_m = \Delta Ep_e = -W(\vec{F})$

donc: $\Delta E_m = -5,25\,mJ$

Bac PC Juillet 2015.

Étude d'un système mécanique oscillant.

Le pendule de torsion permet de déterminer quelques grandeurs physique relative à la matière comme la constante de torsion des matières solides déformables et le moment d'inertie des systèmes mécaniques oscillants.

On étudie de manière simplifiée comment déterminer la constance de torsion d'un fil métallique et quelques grandeurs cinématiques et dynamiques en exploitant les diagrammes d'énergie d'un pendule de torsion.

Un pendule de torsion est constitué d'un fil métallique vertical de constante de torsion C et d'une tige homogène AB, de moment d'inertie $J_\Delta = 2,4.10^{-4}\ kg.m^2$ par rapport à l'axe vertical (Δ) confondu avec le fil et passant par G le centre d'inertie de la tige.

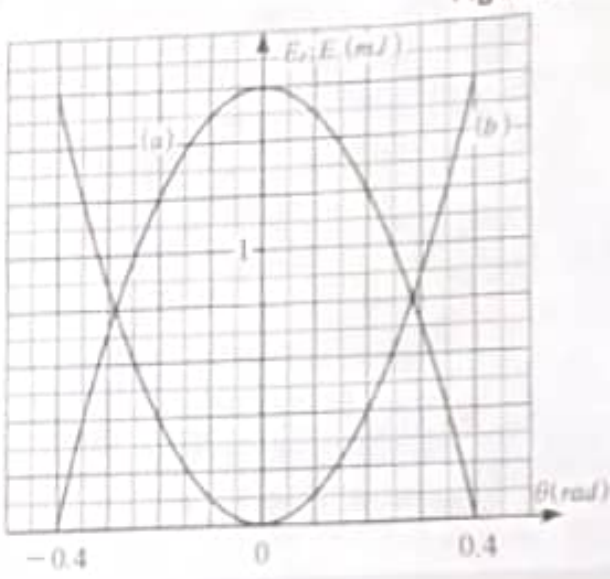


Figure-1

On fait tourner la tige AB horizontalement dans le sens positif autour de l'axe (Δ) de l'angle $\theta_m = 0,4\ rad$ par rapport à sa position d'équilibre, et on la libère sans vitesse initiale à l'instant $t = 0$ pris comme origine des dates. On repère la position de la tige à tout instant à l'aide de son abscisse angulaire θ par rapport à la position d'équilibre (Figure-1).

On étudie le mouvement du pendule dans un référentiel lié à la Terre considéré comme galiléen.

Figure-2



On considère la position d'équilibre comme référence de l'énergie potentielle de torsion et le plan horizontal passant par G comme référence de l'énergie potentielle de pesanteur.

On néglige tous les frottements.

Les deux courbes (a) et (b) de la figure-2 représentent les variations de l'énergie potentielle de torsion E_p de l'osocillateur et son énergie cinétique E_c en fonction de θ.

1- Relier en justifiant votre réponse chaque courbe à l'énergie correspondante.

2- Déterminer la constante de torsion C du fil métallique.

3- Trouver la valeur absolue de la vitesse angulaire θ_1 du pendule au passage par position d'abscisse angulaire $\theta_1 = 0,2\,rad$.

4- Calculer le travail du moment du couple de torison $W(C)$ lors du déplacement de l'oscillateur de la position d'abscisse angulaire $\theta = 0$ à la position d'abscisse angulaire θ_1.

Solution

1- Courbes correspondantes.

à $t = 0$ on a: $E_c(t=0) = 0$

et $\theta = 0,4rad$

donc la courbe (a) correspond à E_c et la courbe (b) correspond à Ep_t.

2- Détermination de C.

On a: $Ep_t = \frac{1}{2}C\theta^2 + C^{te}$;

avec: $C^{te} = 0$ car $E_p(0) = 0$

Or: $Ep_{max} = \frac{1}{2}C\theta_m^2$;

$$C = \frac{2Ep_{max}}{\theta_{max}^2}$$

A.N.: $C = \frac{2.1,6.10^{-3}}{0,4^2}$

$= 0,02N.m\,rad^{-1}$

3- Valeur de $\dot{\theta}_1$

Pour $\theta_1 = 0,2\,rad$; on a: $E_{c1} = 0,4mJ$

donc: $E_{c1} = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}_1^2$; $|\dot{\theta}_1| = \sqrt{\frac{2E_{c1}}{J_\Delta}}$

A.N.: $|\dot{\theta}_1| = \sqrt{\frac{2.1,2.10^{-3}}{2,4.10^{-3}}}$

$= 1,00rad/s$

4- Calcul de $W_{0\to\theta_1}(C)$

On a:

$$W_{0\to\theta_1}(C) = -\Delta Ep_t$$

$$= -Ep_t(\theta_1) + Ep(0)$$

graphiquement on trouve:

$$W_{0\to\theta_1}(C) = -0,4 + 0$$

$$= -0,4\,mJ$$

17 Bac PC Juillet 2009.

Les oscillateurs mécaniques sont employés dans différents secteurs industriels et quelques appareils de sport, les jeux et autres. Parmi ces oscillateurs la balançoire qu'on considère comme en pendule.

Un enfant se balance à l'aide d'une balançoire constituée d'une barre qu'il utilise comme siège, suspendue par deux cordes fixées à un support fixe.

On modélise le système (enfant+balançoire) par un pendule simple composé d'un fil, inextensible de masse négligeable et de longueur L, et un corps (S) de masse m, il peut tourner autour d'un axe fixe horizontal (Δ) perpendiculaire au plan vertical. Le moment d'inertie du pendule par rapport à l'axe (Δ) est $J_\Delta = mL^2$.

Données:

- Intensité de la pesanteur: $g = 9,8m.s^{-2}$; longueur du fil: $L = 3m$; masse du corps (S): $m = 18\,kg$.

Dans le cas de petites oscillations on prend: $\sin\theta = \theta$ et $\cos\theta = 1 - \theta^2/2\,(rad)$.

On néglige les dimensions du corps (S) par rapport à la longueur du fil et tous les frottements.

1- Etude dynamique du pendule:

On écarte le pendule de sa position d'équilibre stable d'un angle $\theta_m = \frac{\pi}{20}(rad)$ dans le sens positif et on le libère sans vitesse initiale à l'instant $t = 0$.

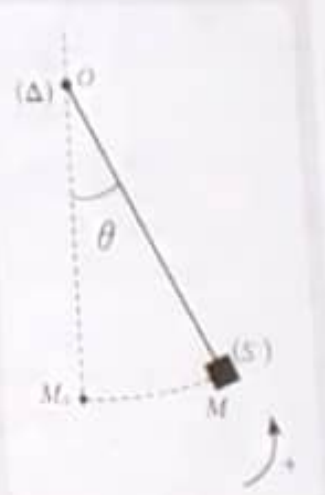
On repère la position du pendule à un instant t par l'abscisse angulaire θ défini entre le pendule et la verticale passant par le point O tel que $\theta = (\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM})$ (voir figure).

1.1- Montrer en utilisant la relation fondamentale de la dynamique de rotation autour d'un axe fixe, que l'équation différentielle du mouvement du pendule dans un référentiel galiléen lié à la Terre s'écrit: $\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0$

1.2- Calculer la période propre T_0 du pendule.

1.3- Ecrire l'équation horaire du mouvement du pendule.

1.4- En appliquant la deuxième loi de Newton dans la base de Frenet, trouver l'expression de la tension du fil T à un instant t en fonction de m, g, θ, L et v la vitesse linéaire du pendule simple. Calculer la valeur de T à l'instant $t = \frac{T_0}{4}$



2- Etude énergétique:

On fournit au pendule qui est immobile dans sa position d'équilibre stable une énergie cinétique de valeur $E_c = 264,6J$, et il tourne dans le sens positif.

2.1- On choisit le plan horizontal passant par le point M_0 comme référence de l'énergie potentielle de pesanteur.

Ecrire l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur Ep du pendule à l'instant t en fonction de θ, m, L et g.

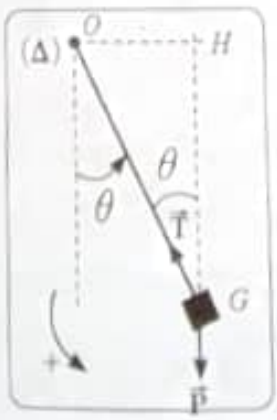
2.2- Déterminer la valeur θ_{max} de l'abscisse angulaire, en utilisant une étude énergétique.

Solution

1.1- Equation differentielle:

système étudié: $\{S\}$;

bilan des forces: $\vec{P}$ et $\vec{T}$ on applique la relation fondamentale de la dynamique.



$\sum M_{\Delta}(\vec{F}) = J_{\Delta}\ddot{\theta}$

$M_{\Delta}(\vec{P}) + M_{\Delta}(\vec{T}) = J_{\Delta}\ddot{\theta}$

- $P.OH + 0 = J_{\Delta}\ddot{\theta}$

- $mgL(1 - \cos\theta) = mL^2\ddot{\theta}$

- $g\left(1 - 1 + \frac{\theta^2}{2}\right) = L\ddot{\theta}$

donc: $\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0$

1.2- Calcul de T_0

On a: $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

A.N.: $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{3}{9,8}} \simeq 3,48s$

1.3- Equation horaire:

Le mouvement de (S) est d'oscillation de circulation uniforme donc:

$$\theta(t) = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

avec: $\theta_m = \frac{\pi}{20}$ et $\cos\varphi = \frac{\theta(t=0)}{\theta_m} = 1$

donc: $\varphi = 0$

d'ou: $\theta(t) = \frac{\pi}{20}\cos(1,80t)$.

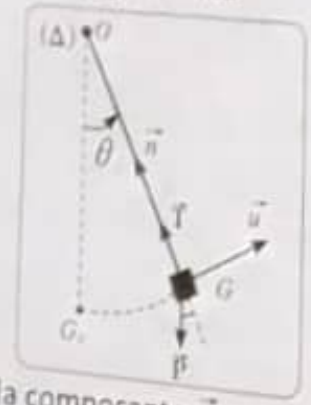
1.4- Expression de la tension T.

dans la base de Frenet on a:

$$\vec{a} = a_t\vec{u} + a_n\vec{u}$$

Selon la 2e loi de Newton:

$$\sum \vec{F_{ext}} = m\vec{a}$$



Suivant la composante $\vec{n}$ on a:

$$P_n + T_n = ma_n$$

$$-mg\cos\theta + T = m\frac{v^2}{L}$$

$$T = mg\cos\theta + m\frac{v^2}{L}$$

• Pour $t = \frac{T_0}{4}$ on a: $\theta = 0$ et $V_0 = \dot{\theta}_0$

avec $\dot{\theta}_0\left(t = \frac{T_0}{4}\right) = -\theta_m\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)$

$$= -\theta_m\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)$$

A.N.: $\dot{\theta}_0 = -0,28rad/s$

donc: $v_0 = -3.0,28 = -0,84m/s$

d'où: $T = mg + \frac{mv_0^2}{L}$

A.N.: $T = 18.9,8\frac{18.(0,84)^2}{3}$

$$T \simeq 180,6N$$

2.1- Expression de E_{pp}.

On a: $E_{pp} = mg.z + C^{te}$

avec: $z = L(1-\cos\theta)$

donc: $E_{pp} = mgL(1-\cos\theta) + C^{te}$

pour: $\theta = 0$ on a: $E_{pp} = 0$ donc: $C^{te} = 0$

d'où $E_{pp} = mgL(1-\cos\theta)$

2.2- Valeurs de θ_m

On a: $E_m = E_c + E_{pp}$

On abscence de frottement l'energie E_m se conserve donc: $E_m = E_{cmax} = E_{ppmax}$

donc: $E_{cmax} = mgL(1-\cos\theta m)$

$$\cos\theta m = 1 - \frac{E_c}{mgL}$$

A.N.: $\cos\theta_m = 1 - \frac{264,6}{18.9,8.3} = 0,5$

$$\theta_m = 60° = \frac{\pi}{3}rad$$

18 Bac PC Juillet 2013.

Depuis longtemps l'homme a utilisé la montre pour mesurer le temps, et a inventé différents types de montres, comme la montre solaire, la montre à eau et le sablier jusqu'à ce que Hygens fabrique la première montre murale en 1657.

Ce type de montre est basé sur une balançoire qu'on modélise dans cette étude par un pendule pesant effectuant des petites oscillations libres sans frottements.

Le pendule étudié est composé d'une barre homogène AB,

e masse $m = 0,203kg$, de longueur $AB = \ell = 1,5m$; nobile dans un plan plan vertical autour d'un axe hori- ontal (Δ) fixe passant son extrémité A (figure-1).

On étudie le mouvement dans un repère lié à un réfé- entiel terrestre supposé galiléen.

On repère; à chaque instant t, la position du pendule ar son abscisse angulaire θ.

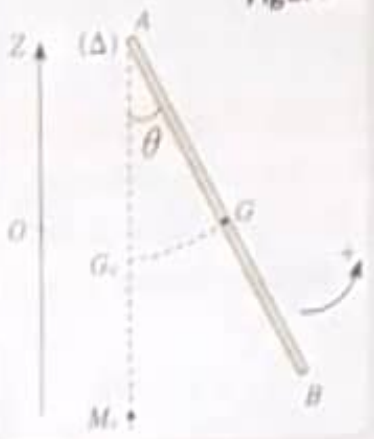
On donne le moment d'inertie par rapport à l'axe de ro- ation (Δ): $J_\Delta = \frac{1}{3} m\ell^2$.

On admet dans le cas des petites oscillations que: $\sin\theta \approx \theta$ avec θ en radian.

On note g l'intensité de la pesanteur.

On écarte le pendule pesant de sa position d'équilibre stable d'un petit angle θ_m dans le sens positif et on le lâche sans vitesse initiale à un instant pris comme origine des dates $(t = 0)$.

Figure-1



1- Etude dynamique du pendule pesant

1.1- En appliquant la relation fondamentale de la dynamique de rotation, établir l'équation différentielle du mouvement du pendule.

1.2- Déterminer la nature du mouvement du pendule pesant et écrire l'équation horaire $\theta(t)$ en fonction de t, θ_m et la période propre T_0.

1.3- Montrer que l'expression de la période propre de ce pendule est:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2\ell}{3g}}.$$

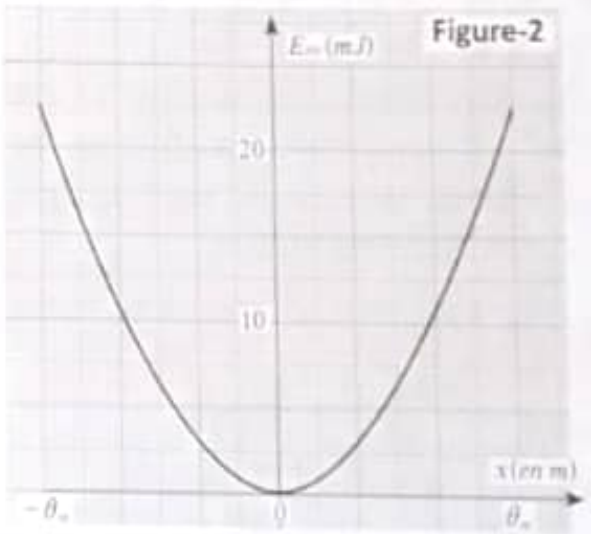
1.4- Calculer la longueur L du pendule simple synchrone avec le pendule pesant étudié.

2- Etude énergétique du pendule pesant

On choisi le plan horizontal passant par G_0, position du centre d'inertie de la barre AB à l'équilibre stable, comme référence de l'énergie potentielle de pesanteur $(Epp(0) = 0)$.

La figure-2 représente les variations de l'énergie potentielle de pesanteur $E_{pp}(\theta)$ du pendule étudié en focntion du temps dans l'intervalle $[-\theta_m, \theta_m]$.

Figure-2



En exploitant le diagramme d'énergie:

2.1- Déterminer la valeur de l'énergie mécanique E_m du pendule.

2.2- Trouver la valeur absolue de la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ du pendule au passage par la position d'abscisse angulaire: $\theta = \frac{2}{3}\theta_m$.

Solution

1.1- Equation différentielle:

- système étudié (la barre);
- bilan des forces: $\vec{P}$ et $\vec{R}$.



Selon la relation fondamentale de la dynamique: $\sum M_{\Delta}(\vec{F}_{ext}) = J_{\Delta}\ddot{\theta}$

$M_{\Delta}(\vec{P}) + M_{\Delta}(\vec{R}) = J_{\Delta}\ddot{\theta}$

$-mgOH + 0 = J_{\Delta}\ddot{\theta}$

$-mg\frac{\ell}{2}(\sin\theta) = \frac{1}{3}m\ell^2\ddot{\theta}$

$\ddot{\theta} + \frac{3}{2}\frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$ avec $\sin\theta \approx \theta$ donc

$\ddot{\theta} + \frac{3}{2}\frac{g}{\ell}\theta = 0$

1.2- Nature du mouvement:

l'equation différentielle est du 2ème ordre donc le mouvement est d'oscillatoire de rotation sinusoïdale, ayant comme solution l'équation horaire:

$\theta(t) = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi\right)$

$\cos\varphi = \frac{\theta(t=0)}{\theta_m} = \frac{\theta_m}{\theta_m} = 1$

donc: $\varphi = 0$

d'où: $\theta(t) = \theta_m.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t\right)$

1.3- Expression de T_0

On a: $\theta(t) = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t\right)$

t: $\frac{d\theta}{dt} = -\theta m\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}.t\right)$

et: $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\theta m\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)2\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t\right)$

donc: $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2\theta = 0$

par analogie avec l'équation différentielle

on déduit que: $\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 = \frac{3g}{2L}$

d'où: $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2\ell}{3g}}$

1.4- Calcul de L:

La période propre du pendule simple s'écrit: $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$.

Les deux pendules sont synchrones

donc: $T_0 = T_0$;

$2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2\ell}{3g}}$

donc: $L = \frac{2\ell}{3}$

A.N.: $L = \frac{2.1,5}{3} = 1m$

2.1- Valeur de E_m

On a: $E_m = E_c + Epp$

E_m est conservative donc: $E_m = E_{pmax}$

graphiquement $E_m = 22,5\,mJ$.

2.2- Valeur de $\dot{\theta}$

pour $\theta_1 = \frac{2}{3}\theta_m$ on trouve $E_{pm} = 10mJ$

donc $E_{c1} = 22,5 - 10 = 12,5mJ$.

et on a: $E_{c1} = \frac{1}{2}J_{\Delta}\dot{\theta}_1^2$

donc: $\dot{\theta}_1 = \pm\sqrt{\frac{2E_{c1}}{J_{\Delta}}}$; $\dot{\theta}_1 = \pm\sqrt{\frac{6E_{c1}}{m\ell^2}}$

A.N.: $\dot{\theta}_1 = \pm\sqrt{\frac{6.12,5.10^{-3}}{0,203.1,5^2}}$

$\dot{\theta}_1 \approx \pm 0,41 rad/s$

Bac PC Juin 2016.

Étude énergétique du mouvement du pendule de torsion.

Le fonctionnement d'un ensemble d'appareils de mesure comme le pendule de Cavendish et le galvanomètre, est basé sur la propriété de torsion puisqu'ils contiennent des ressorts spiraux ou des fils métaliques rectilignes.

On considère un pendule de torsion composé d'un fil d'acier vertical de constante de torsion C et d'une tige homogène AB suspendu à l'extrémité libre du fil par son centre G. (figure-1)



Figure-1

On note J_Δ le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe de rotation (Δ) confondu avec le fil.

On fait tourner la tige AB autour de l'axe (Δ) dans le sens positif d'un angle θ_m de sa position d'équilibre, et on le libère sans vitesse initiale à uninstant pris comme origine des date; il effectue un mouvement de rotation sinusoïdal.

On considère la position d'équilibre comme référence de l'énergie potentielle de torsion $(E_{pt} = 0 \text{ à } \theta = 0)$ et le plan horizontal passant par G comme référence de l'énergie potentielle de pesanteur $(E_{pp} = 0)$.

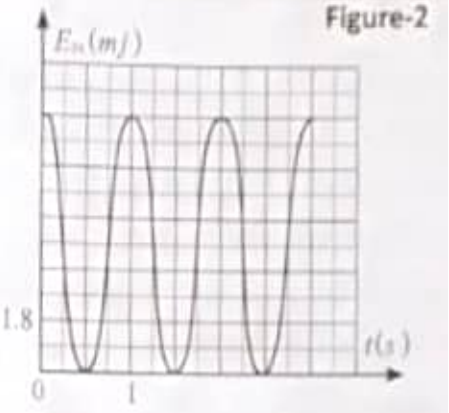


Figure-2

On donne: le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe de rotatio (Δ): $J_\Delta = 2,9.10^{-3} kg.m^2$

La courbe de la figure-2 représente les variation de l'énergie potentielle de torsio E_p en fonction du temps. En vous aidant de cette courbe ;

1- Déterminerl'énergie mécanique E_m de ce pendule.

2- Trouver la valeur de la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ à l'instant $t_1 = 0,5\,s$.

3- Calculer le travail W du couple de torsion entre les instants $t_0 = 0$ et t_1.

Solution

1- Détermination de E_m:

On a: $E_m = E_c + E_{pt}$

E_m étant conservative donc: $E_m = E_{ptmax}$

du graphe on trouve $Em = 9mJ$

2- Valeur de $\dot{\theta}$:

à $t_1 = 0,5s$ on a: $E_{pt_1} = 0$

donc: $E_m = E_{c_1} = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}_1^2$; $\dot{\theta}_1 = +\sqrt{\frac{2E_m}{J_\Delta}}$

A.N.: $\dot{\theta}_1 = \sqrt{\frac{2.9.10^{-3}}{2,9.10^{-3}}} \simeq 2,49 rad/s$

3- Calcul de $W_{0\to t}(C)$:

On a: $W_{0\to t}(C) = \frac{1}{2} C\theta^2(t=0) - \frac{1}{2} C\theta^2(t_1)$

$= -\Delta E_m$

$W_{0\to t_1}(C) = 9 - 0 = 9mJ$.

20 **Bac PC Juillet 2014.**

Étude énergétique du mouvement d'un pendule simple.

Pour étudier quelques lois physiques régissant le mouvement d'un pendule simple, considéré comme un cas particulier du pendule pesant, un professeur et ses élèves ont utilisé un pendule simple constitué de:

- Un fil inextensible de longueur L et de masse négligeable.
- Une bille de dimension négligeable et de masse $m = 0,1kg$.
- Une caméra numérique et un dispositif informatique adéquat.

Figure-1



A l'instant $t = 0$, l'un des élèves a écarté la bille de sa position d'équilibre stable d'un angle petit θ_m et l'a libérée sans vitesse initiale. U autre élève a filmé la bille pendant son mouvement à l'aide de la caméra.

Le mouvement du pendule a lieu dans un plan vertical autour d'un axe horizonta (Δ) passant par l'extrémité O du fil.

θ représente l'abscisse angulaire du pendule à l'instant t. figure-1.

Données:

- Tous les frottements sont négligés.
- L'intensité de la pesanteur: $g = 10m.s^{-2}$.
- On choisit le plan horizontal passant par la position de la bille à l'équilibre stable d pendule comme origine de l'énergie potentielle de pesanteur ($E_{pp} = 0$).

L'étude est faite dans un référentiel terrestre supposé galiléen.

Le professeur a traité les données du film enregistré à l'aide du dispositif informatiqu et a obtenu les deux courbes représentées sur la figure-2 représentant les variations l'abscisse angulaire θ et de l'énergie potentielle de pesanteur E_{pp} en fonction du tem

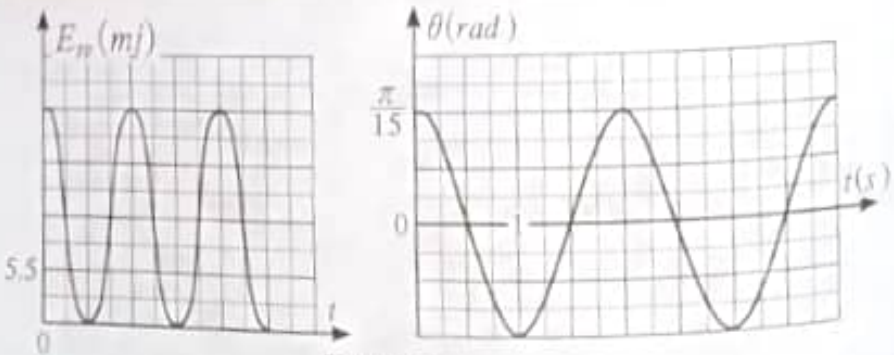


Figure-2

1- Déterminer graphiquement l'amplitude θ_m et la période propre T_0.

2- Parmi les deux expressions suivantes: $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{g}{L}}$ et $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$, choisir l'expression juste dela période propre en se basant sur l'équation aux dimensions.

3- Calculer la longueur L du pendule étudié.

4- En exploitant le diagramme d'énergie, déterminer:

4.1- L'énergie mécanique E_m du pendule simple.

4.2- La valeur absolue de la vitesse linéaire de la bille au moment de son passage par la position d'équilibre stable.

Solution

1- Valeurs de θ_m et T_0

graphiquement, on a: $\theta_m = \frac{\pi}{15} rad$

et: $T_0 = 2s$.

2- Expression de T_0.

On a: $[T_0] = \left(\frac{[L]}{[g]}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{[L]}{[L][T]^{-2}}\right)^{\frac{1}{2}}$

$= [T]$

donc l'expression de T_0 est: $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

3- Calcul de L

On a: $\left(\frac{T_0}{2\pi}\right)^2 = \frac{L}{g}$

donc: $L = g\left(\frac{T_0}{2\pi}\right)^2$

A.N.: $L = 10\left(\frac{2}{2\pi}\right)^2 = 1\,m$

4.1- L'énérgie mécanique.

On a: $E_m = E_c + E_{pp}$

or: $E_m = E_{ppmax} = E_{Cmax}$

donc graphiquement:

$E_m = E_{ppmax} = 22mJ$.

4.2- Valeur de v_{max}.

Lors du passage de la bille par la possition d'équilibre on a:

$E_m = E_{Cmax}$ car: $E_{ppmin} = 0$

$E_m = \frac{1}{2}mv_{max}^2$ donc: $|v_{max}| = \sqrt{\frac{2E_m}{m}}$

A.N.: $|V_{max}| = \sqrt{\frac{2.22.10^{-3}}{0,1}}$

$\simeq 0,66\,m/s$

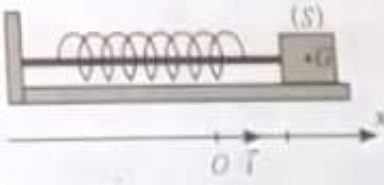
21 Bac PC Juin 2014.

Étude énergétique d'un système oscillant (corps solide-ressort)

Les ressorts se trouvent dans plusieurs appareils mécanique, comme les voitures et les bicyclettes.. et produisent des oscillations mécaniques.

Cette partie a pour objectif, l'étude énergétique d'un système oscillant (corps solide-ressort) dans une position horizontale.

Figure-1



Soit un oscillateur mécanique horizontal composé d'un corps solide (S) de m m et de centre d'inertie G fixé à l'extrémité d'un ressort à spires non jointive masse négligeable et de raideur $K = 10\,N.m^{-1}$.

L'autre extrémité du ressort est fixée à un support fixe.

Le corps (S) glisse sans frottement sur [illegible]

On étudie le mouvement de l'oscillateur dans le repère $(O,\vec{i})$ lié à la Terre et dont l'origine est confondue avec la position de G à l'équilibre de (S).

On repère la position de G à l'instant t par son abscisse x (Figure-1).

On écarte le corps (S) horizontalement de sa position d'équilibre dans le sens positif d'une distance X_0 et on le libère sans vitesse initiale à l'instant pris comme origine des dates (t=0).

On choisit le plan horizontal passant par G comme référence de l'énergie potentielle de pesanteur, et l'état dans lequel le ressort n'est pas déformé comme référence de l'énergie potentielle élastique.

A l'aide d'un dispositif informatique convenable, on obtient les deux courbes représentant les variations de l'énergie cinétique E_c et l'énergie potentielle élastique E_{pe} du système oscillant en fonction du temps Figure-2.

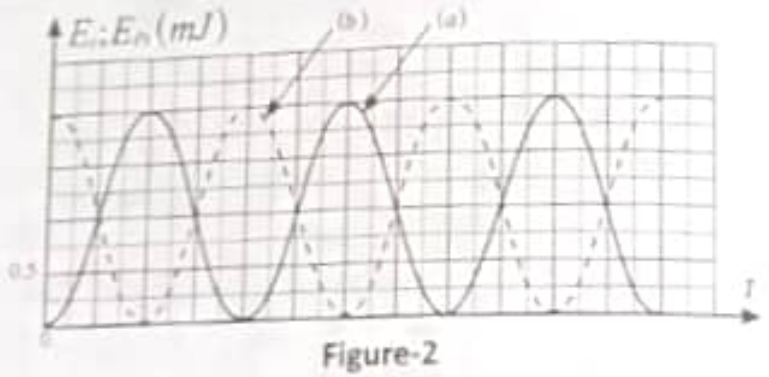


Figure-2

1- Indiquer parmi les courbes (a) et (b) celle qui représente les variations de l'énergie cinétique E_c. Justifier votre réponse.

2- Déterminer la valeur de l'énergie mécanique E_m du système oscillant.

3- En déduire la valeur de la distance X_0.

4- En considérant la variation de l'énergie potentielle élastique du système oscillant trouver le travail $W_{A\to O}(\vec{T})$ de la force de rappel $\vec{T}$ exercice par le ressort sur (S) lors du déplacement de G de la position A d'abscisse $x_A = x_0$ vers la position O.

Solution

1- Courbe de E_c :

à l'instant $t = 0$ on a $v_0 = 0$

donc: $E_c(0) = 0$ alors la courbe (a) correspond bien aux variations de E_c.

2- Valeur de E_m :

On a: $E_m = E_c + E_{pe}$

vu que les frottements sont negligeables, l'energie E_m se conserve;

donc: $E_m = E_{Cmax} = E_{pemax}$

donc: $E_m = 2mJ$

3- Valeur de X_0.

On a: $E_{pemax} = \frac{1}{2}KX_0^2$; $X_0 = \sqrt{\frac{2E_{pemax}}{K}}$

A.N.: $X_0 = \sqrt{\frac{2.2.10^{-3}}{10}} = 2.10^{-2}m$

$X_0 = 2cm$

4- Calcul de $W(\vec{T})$:

On a: $W_{A\to 0}(\vec{T}) = \frac{1}{2}Kx_0^2 - \frac{1}{2}Kx_{(ressort)}^2(0)$

Or: En O $x = 0$ et $x_0 = x_0$

donc: $W_{A\to 0}(\vec{T}) = \frac{1}{2}Kx_0^2$

A.N.: $W_{A\to 0}(\vec{T}) = \frac{1}{2}10.(2.10^{-2})^2$

$W_{A\to 0}(\vec{T}) = 2.10^{-3}J = 2mJ$

Bac PC Juillet 2016.

Le gravimètre est un appareil qui permet de déterminer, avec une grande précision, la valeur de l'intensité du champ de pesanteur en un lieu donné.

Les domaines d'utilisation des gravimètres sont nombreux: la géologie, l'océanographie, la sismologie, l'étude spatiale, la prospection minière, etc.

On modélise un type de gravimètres par un système mécanique oscillant constitué de :

- une tige de masse négligeable et de longueur L, pouvant tourner dans un plan vertical autour d'un axe (Δ) fixe passant par son extrémité A.

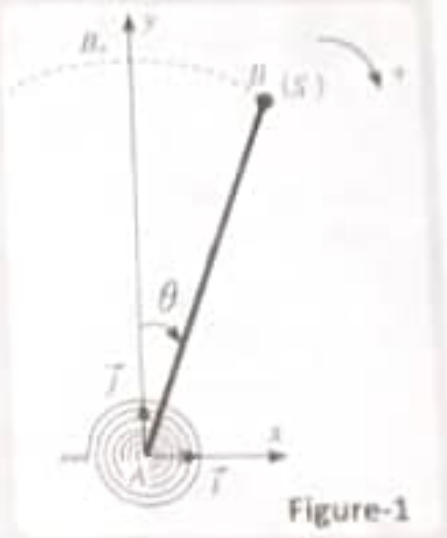


Figure-1

- un corps solide (S) de masse m et de dimensions négligeables, fixé à l'extrémité B de la tige:

- Un ressort spiral, de constante de torsion C, qui exerce sur la tige AB un couple de rappel de moment $\mu_c = -C\theta$; où θ désigne l'angle que fait AB avec la verticale ascendante Ay (figure-1).

On étudie le mouvement de ce système mécanique dans un repère orthonormé $(A,\vec{i},\vec{j})$ lié à un référentiel terrestre considéré comme galiléen.

Données:

- Masse du solide (S): $m = 5.10^{-4}kg$;
- Longueur de la tige: $L = 7.10^{-1}m$;
- Constante de torsion du ressort spiral: $C = 1,31N.m.rad^{-1}$.
- Expression du moment d'inertie du système par rapport à l'axe (Δ) : $J_\Delta = mL^2$
- Pour les angles faibles: $\sin\theta \approx \theta$ et $\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$ avec θ en radian.

On écarte le système mécanique de sa position d'équilibre vertical d'un angle petit θ_{max} dans le sens positif puis on le lâche sans vitesse initiale à un instant $t = 0$.

Le système est repéré, à chaque instant t, par son abscisse angulaire θ.

On néglige tous les frottements.

1- Etude dynamique

1.1- En appliquant la relation fondamentale de la dynamique dans le cas de la rotation autour d'un axe fixe, montrer que l'équation différentielle du mouvement du système étudié s'écrit, pour les faibles oscillations, sous la forme: $\ddot{\theta} + \left(\frac{C}{m.L^2} - \frac{g}{L}\right)\theta = 0$.

1.2- En utilisant les équations aux dimensions, déterminer la dimension de l'expression $\left(\frac{C}{m.L^2} - \frac{g}{L}\right)$.

1.3- Pour que la solution de l'équation différentielle précédente soit sous la forme: $\theta(t) = \theta_{max}.\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$, il faut que la constante de torsion C soit supérieure à une valeur minimale C_{min}. Trouver l'expression de C_{min} en fonction de L, m et g.

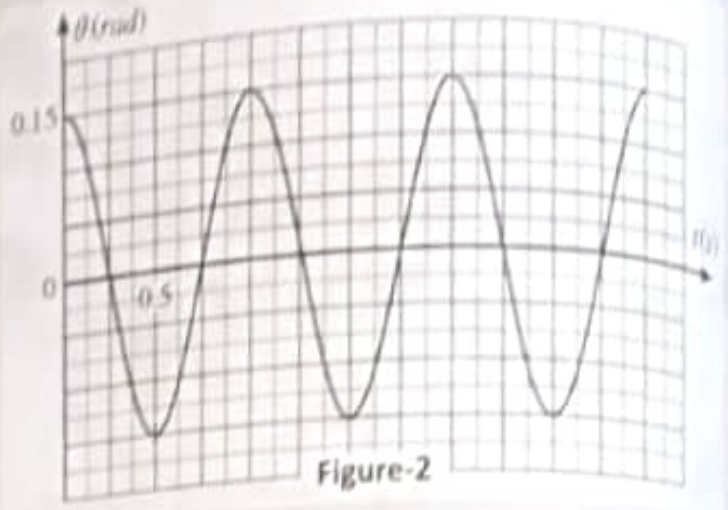


Figure-2

1.4- La courbe de la figure-2 représente l'évolution de l'abscisse angulaire $\theta(t)$ dans le cas où $C > C_{min}$.

1.4- Déterminer la période T, l'amplitude θ_{max} et la phase à l'origine φ.

1.4.2- Trouver l'expression de l'intensité de pesanteur g en fonction de L, m, C et T. Calculer sa valeur. (On prend $\pi = 3,14$).

2- Etude énergétique:

Un système d'acquisition informatisé a permis de tracer la courbe de la figure 3, qui représente les variations de l'énergie cinétique E_c du système étudié en fonction de l'abscisse angulaire θ dans le cas de faibles amplitudes.

On choisit le niveau horizontal passant par B_0 comme état de référence pour l'énergie potentielle de pesanteur ($E_{pp} = 0$), et on choisit l'énergie potentielle de torsion nulle ($E_p = 0$) pour $\theta = 0$.

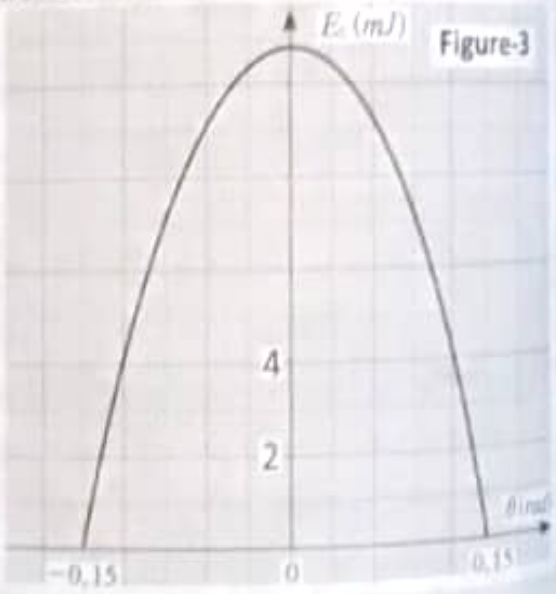


Figure-3

En exploitant la courbe de la figure-3, déterminer:

2.1- La valeur de l'énergie mécanique E_m du système étudié.

2.2- La valeur de l'énergie potentielle E_p du système à la position $\theta_1 = 0,10\ rad$.

2.3- La valeur absolue de la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ du système à l'instant de son passage par la position $\theta = 0$.

Solution

1.1- Equation différentielle:

Système étudié: $\{la\ tige\ AB + (S)\}$

Bilan des forces: $\vec{P}$, $\vec{R}$ et le couple de torsion.



On applique la relation fondamentale de la dynamique: $\sum M_{\Delta}(\vec{F}) = J_{\Delta}\ddot{\theta}$

$$-PAH + 0 - C\theta = J_{\Delta}\ddot{\theta}$$

$$+mgL\sin\theta - C\theta = mL^2\ddot{\theta}$$

avec: $\sin\theta \simeq \theta$

donc: $\ddot{\theta} = +\frac{g}{L}\theta - \frac{C}{mL^2}\theta$

d'où: $\ddot{\theta} + \left(\frac{-g}{L} + \frac{C}{mL^2}\right)\theta = 0$

1.2- Dimension de l'expression

On a: $\left[\frac{C}{mL^2} - \frac{g}{L}\right] = \left[\frac{C}{mL^2}\right] - \left[\frac{g}{L}\right]$

$$= \left[\frac{g}{L}\right] = \left[\frac{L.T^{-2}}{L}\right]$$

$$\left[\frac{C}{mL^2} - \frac{g}{L}\right] = [T^{-2}]$$

1.3- Expression de C_{min}:

L'oscillateur a pour periode propre T telle que: $T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{\frac{C}{mL^2} - \frac{g}{L}}}$

avec $\frac{C}{mL^2} - \frac{g}{L} > 0$; donc: $C > mgL$

La valeur minimale et alors: $C_{min} = mg.L$

1.4.1- Valeur de T et θ_{max} et φ:

à partir de la courbe on a:

$\theta_{max} = 0,15\ rad$ et $T = 1s$

$\cos\varphi = \frac{\theta(t=0)}{\theta_m} = \frac{\theta_m}{\theta_m} = 1$

donc: $\varphi = 0$

1.4.2- Expression de g:

On a: $T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{\frac{C}{mL^2} - \frac{g}{L}}}$

donc: $\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = \frac{1}{\frac{C}{mL^2} - \frac{g}{L}}$

d'où: $\frac{C}{mL^2} - \frac{g}{L} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$

donc: $g = L\left[\frac{C}{mL^2} - \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2\right]$

A.N.: $g = 0,7\left(\frac{1,31}{5.10^{-2}.0,7^2} - \left(\frac{2\pi}{1}\right)^2\right)$

$$g = 9,79\ m/s^2.$$

2.1- Valeur de E_m.

On a: $E_m = E_c + E_{pe} + E_{pp}$

E_m étant conservative:

donc pour $\theta = 0$ on a $E_c = 0$ et $E_{pp} = 0$ et $E_{pe\,max}$.

donc: $E_m = E_{pe\,max} = 10,8\ mJ$

2.2- Valeur de E_p.

Pour $\theta_1 = 0,10rad$, on a: $E_{e_1} = 6mJ$

donc: $E_p = E_m - E_{e_1}$

$$= 10,8 - 6 = 4,8mJ$$

2.3- Valeur de $|\dot{\theta}_1|$:

On a pour $\theta = 0$: $E_p = 0$

donc: $E_m = E_{c_1} = \frac{1}{2}J_{\Delta}\dot{\theta}_1^2$

donc: $|\dot{\theta}_1| = \sqrt{\frac{2E_m}{J_{\Delta}}} = \sqrt{\frac{2E_m}{mL^2}}$

A.N.: $|\dot{\theta}_1| = \sqrt{\frac{2.10,8.10^{-3}}{5.10^{-2}.0,7^2}}$

$$|\dot{\theta}_1| \simeq 0,94rad/s$$

9 L'atome et la mécanique de Newton

I- Interactions binaires

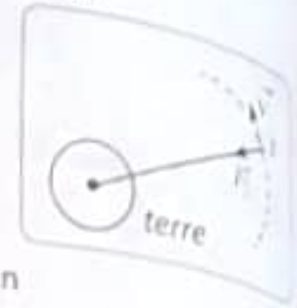
1 gravitionnelle

L'intensité de la force de gravitation terrestre selon newton s'écrit:

$$F_t = F_{T/t} = \frac{G.M_T.m}{r^2}$$

r: rayon de la trajectoire

Selon Newton r, peut prendre n'importe quelle valeur.



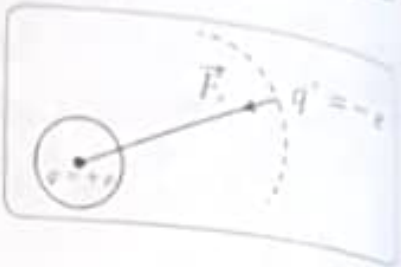
2 Electrostatique pour l'atome d'hydrogène ^1H

L'interation électrostatique entre le noyau d'un atome et un électron: $F_e = k.\frac{Q.(q')}{r^2} = \frac{ke^2}{r^2}$

selon Newton r est quelconque.

Alors que les atomes d'un même élément sont identiques.

selon la mécanique de newton.



- Pour l'atome ^1H de rayon r_1 son volume est v_1.
- Pour l'atome ^1H de rayon r_2 son volume est v_2.

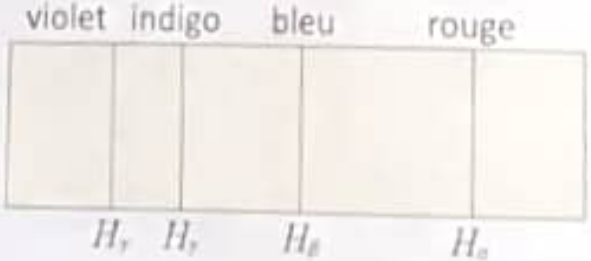
si $r_1 \neq r_2$ alors $v_1 \neq v_2$

ce qui est absurde

Donc les lois de Newton sont inccapables d'expliquer les phénomènes à l'échelle microscopique (atome, nayau ...).

II- Quantification de l'énergie.

Le spectre d'émission de l'atome d'hydrogène est constitué de raies lumineuses discontinus.



Pour expliquer cela plusieurs hypothèses ont été proposées:

1 Hypothese de Max Planck.

En1900 Planck émet l'hypothèse que la lumière et toute onde electromagnétique est caractérisée par une fréquence υ et une longueur d'onde λ dans le vide; alors l'échange d'énergie se fait par des quanta d'énergie bien déterminés.

2 Théorie d'Einstein.

En 1905 Einstein emet la théorie du photon: l'échange d'énergie au niveau de l'atome se fait par des particules sans masse et sans charge appelées photons.

portant chacun une énergie: $E = h\upsilon = \frac{hc}{\lambda}$

avec: $h = 6,62.10^{-34} Js$: constante de la Planck

λ: Longueur de d'onde dans la vide.

$c = 3.10^8 m/s$: vitesse la lumière dans la vide.

III- Application

1 Au niveau de l'atome.

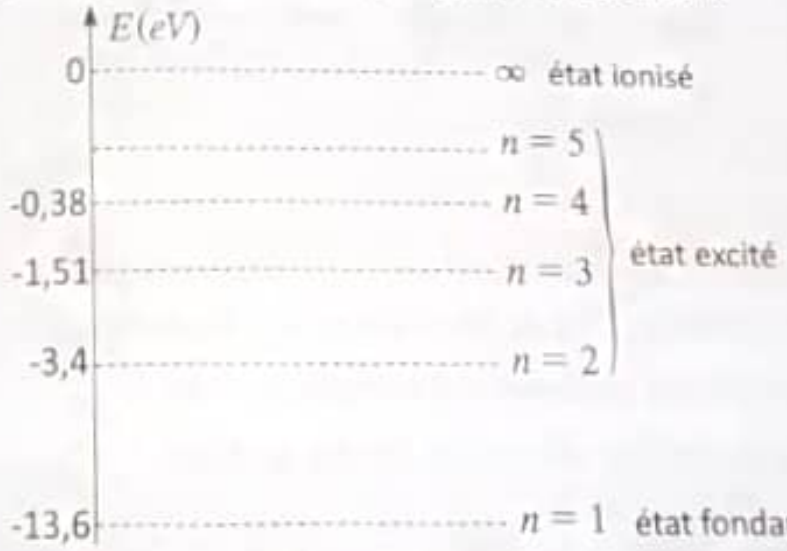
L'énergie de l'atome d'hydrogène est quantifiée donnée par la relation.

$$E_n = -\frac{E_0}{n^2} (n \in \mathbb{N}^*)$$

$E = 13,6eV$: constante corrèspond à l'énergie d'ionisation

- $n = 1 \rightarrow E_1 = -13,6eV$
- $n = 2 \rightarrow E_2 = \frac{-13,6}{4} = -3,4eV$
- $n = 3 \rightarrow E_3 = \frac{-13,6}{9} = -1,51eV$
- $n = 4 \rightarrow E_4 = \frac{-13,6}{16} = -0,85eV$
- $n = \infty \rightarrow E\infty = 0.$

le diagramme d'énergie de l'atome d'hydrogène est le suivant:



La transition de l'atome à un même niveau d'énergie est appelé série de raises.

Lors de la transition, il ya émission d'un photon d'énergie:

$$E_p - E_n = h\lambda \;;\; \frac{1}{\lambda} = \frac{E_0}{h.c}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2}\right)$$

$$-\frac{E_0}{p^2} + \frac{E_0}{n^2} = \frac{hc}{\lambda} \quad \frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2}\right)$$

$R_H = \frac{E_0}{hc}$: c^{te} de Rhydberg: $R_H = 1,09.10^7 m^{-1}$

Série de Balmer: Les transitions correspond à $n = 2$

donc: $\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{p^2}\right)(p > 2)$

$p = 3 \to 2; \lambda_r = 648nm$ (rouge)

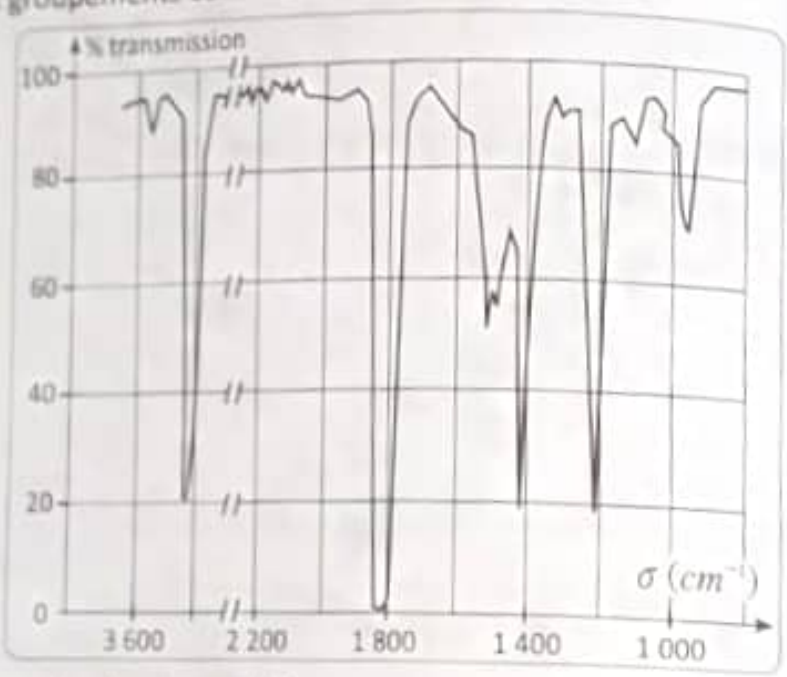
$p = 4 \to 2; \lambda_b = 486nm$ (bleu)

$p = 5 \to 2; \lambda_v = 434nm$ (violet)

$p = 6 \to 2; \lambda_i = 410nm$ (indigo)

2 Au niveau de la molécule.

Le spectre d'absorption de la molécule est constitué d'une bande bien déterminée et large due aux groupements constituant la molécule.



L'énergie de la molécule est quantifiée.

3 au niveau de noyau.

Lors de la désintégration γ le noyau fils X^* excité se désexcite pour donner un noyau plus stable X, il perd partiellement de l'énergie selon l'équation.

$X^* \longrightarrow X + \gamma$ en émettant des photons γ d'énergie $E_\gamma = h\nu$.

L'énergie du noyau est quantifiée, elle est de l'ordre du MeV.

Test de connaissances

1 Mots manquants:

Le modèle de l'atome présenté par Rutheford en 1911est un modèle ..... ; il ne permet pas d'expliquer certaines ..... des atomes.

b. La constante de Planck à la dimension d'une ..... multipliée par un .....

c. L'énergie des photons ..... lorsque la longueur d'onde des radiations augmente.

d. Lorsqu'un atome passe d'un ..... d'énergie supérieur à un niveau inférieur, il ..... un .....

e. Un atome ..... des radiations qu'il est capable d'aborder

Solution

1.a - planétaire
- Energies

b- Energie - temps (J.S)

c- diminue

d- niveau - emet -photon

e- emet

2 Vrai ou faux.

a- La constante de Planck h dépend du milieu matériel. V F

b- En valeur absolue, l'énergie du niveau fondamental est la plus petite. V F

c- La différence d'énergie entre deux niveaux est proportionnelle à la fréquence de l'onde émise. V F

d- Un spectre de raies d'émission correspond à des transitions du niveau fondamental vers des niveaux supérieurs. V F

e- Un noyau est capable d'absorber un rayonnement correspondant à une énergie de quelques MeV. V F

Solution

a- F

b- V

c- V

d- F

e- V

3 QCM.

L'interaction coulombienne est:

toujours attractive

toujours répulsive

tantôt attractive, tantôt répulsive.

Dans la relation $\mathscr{E} = h\nu$, avec $h = 6{,}63 \times 10^{-34} SI$ et ν en Hertz, l'énergie s'exprime en:

joule

- électronvolt

c. L'entité qui absorbe les radiations de plus petite énergie est:
- la molécule
- l'atome
- le noyau

d. 1 MeV est égal à :
- $1,6 \times 10^{-19} J$
- $1,6 \times 10^{-16} J$
- $1,6 \times 10^{-13} J$

Solution

3- a- tantôt attractive, tantôt répulsive.

b- joule

c- l'atome

d- $1,6 \times 10^{-13} J$

Exercices

1 Une lampe émet une lumière monochromatique de longueur d'onde dans le vide $\lambda_0 = 4,50 \times 10^{-7} m$. Calculer:

1- La fréquence de la radiation émise;

2- L'énergie en eV des photons émis.

on donne:

$h = 6,62.10^{-34} J.s$: constante de Planck

$c = 3.10^8 m.s$: célérite de la lumière.

Solution

1- La fréquence

on a: $\lambda_0 = c/\upsilon$

donc: $\upsilon = \frac{c}{\lambda_0}$

A.N.: $\upsilon = \frac{3.10^8}{4,50.10^{-7}} = 6,67.10^{14} Hz$

2- L'énergie

On a: $E = h\upsilon$

A.N.:

$E = 6,62.10^{-34}.6,67.10^{14}$

$E \simeq 4,45.10^{-19} J$

$E \simeq 2,78 eV$

2 Les niveaux de plus basse énergie de l'atome d'hydrogène ont pour énergie: $\mathscr{E}_1 = -13,6eV$; $\mathscr{E}_2 = -3,4eV$ et $\mathscr{E}_3 = -1,51eV$.

1- Identifier les trois transitions possibles pour cet atome lorsqu'il émet la lumière.

2- Calculer les variations d'énergie correspondantes.

Solution

1- Les transitions:

Lors du spectre d'emission les transitions se font d'un niveau d'energie plus bas donc les transitions possibles sont $3 \xrightarrow{émi} 2$ et $3 \xrightarrow{émi} 1$ et $2 \xrightarrow{émi} 1$

2- Calcul des variations des énergies:

- $\Delta E_{3\to1} = E_3 - E_1 = 12,09eV$
- $\Delta E_{3\to2} = E_3 - E_2 = 1,89\ eV$
- $\Delta E_{2\to1} = E_2 - E_1 = 10,2eV$

3 Les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène vérifient la relation:

$\mathscr{E}_n(eV) = -\frac{\mathscr{E}_0}{n^2}$ où $\mathscr{E}_0 = 13,6eV$ et $n > 0$, entier.

1- Quelle est l'énergie d'ionisation d'un atome d'hydrogène?

2- Quelle est l'énergie cinétique minimale d'un électron capable de provoquer p choc l'excitation d'un atome d'hydrogène de son niveau fondamental $(n = 1)$ à s premier niveau excité $(n = 2)$?

3- Les atomes d'une lampe à vapeur d'hydrogène sont dans leur état fondamental, une lumière composée de trois radiations de longueur d'onde dans le vide $\lambda_1 = 122,0nm$, $\lambda_2 = 111,2nm$, $\lambda_3 = 103,0nm$ traverse ce gaz.

Quelles sont les radiations absorbées? On donne $h = 6,62.10^{-34} J.s$.

Solution

1- L'énergie d'ionisation:

c'est l'énergie qu'il faut fournir pour faire passer l'atome de l'état fondamental à l'état d'ionisation:

$$E_i = E_\infty - E_0$$
$$E_i = E_\infty = 13,6eV$$

2- Energie cinétique:

$$E_c = \Delta E = E_2 - E_1$$
$$E_c = \frac{-\mathscr{E}_0}{2^2} + \frac{E_0}{1^2} = \frac{3\mathscr{E}_0}{4}$$

A.N.: $E_c = \frac{3.13,6}{4} = 10,2eV$

3- Radiations absorbées:

L'énergie correspondant à l'atome lors de l'absorption est:

$$E_\infty - E_1 = h\upsilon = \frac{hc}{\lambda} ; E_\infty = E_1 + \frac{hc}{\lambda}$$

• pour $\lambda_1 = 122,0nm$

$$E_\infty = -13,6 + \frac{6,62.10^{-34}.3.10^8}{122.10^{-9}} \frac{1}{1,6.10^{-19}}$$

$E_\infty = -3,42eV$

correspond au niveau d'energie 2.

donc le radiation sera absorbée

• Pour la radiation $\lambda_2 = 111,2nm$.

$$E_\infty = -13,6 + \frac{6,62.10^{-34}.3.10^8}{111,2.10^{-9}} \frac{1}{1,6.10^{-19}}$$

$E_\infty = -2,44eV$ ne correspond à aucu niveau d'énergie.

donc le radiation ne sera pas absorbé pour:

$$\lambda_3 = 103,0nm$$

on trouve: $E_\infty = -1,55eV$ donc la radiation ne sera pas absorbée.

4 Les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène vérifient la relation:

$\mathscr{E}_n(eV) = -\frac{\mathscr{E}_0}{n^2}$ où $\mathscr{E}_0 = 13,6eV$ et $n > 0$, entier.

1- Pour $n = 1$ à $n = 6$, représenter le diagramme des niveaux d'énergie électro que de l'atome d'hydrogène (échelle: $1cm$ correspond à $1eV$).

2- À quoi correspond le niveau d'énergie le plus bas?

3- À quoi correspond le niveau d'énergie $\mathscr{E} = 0eV$?

4- L'atome étant considéré dans son état fondamental, une transition s'accom gnant d'une variation d'énergie $\mathscr{E} = 1,09 \times 10^{-18} J$ est-elle possible?

5- A quelle transition correspond une variation d'énergie $\mathscr{E} = 10,2eV$?

6- Calculer la variation d'énergie en électronvolt, puis en joule, pour une transi du niveau $n = 6$ au niveau $n = 4$. On donne $h = 6,62.10^{-34} J.s$.

Solution

1- Représentation du diagramme d'énergies:

On a: $E_n = -\frac{E_0}{n^2}$

$n = 1 \longrightarrow E_1 = -13,6eV$

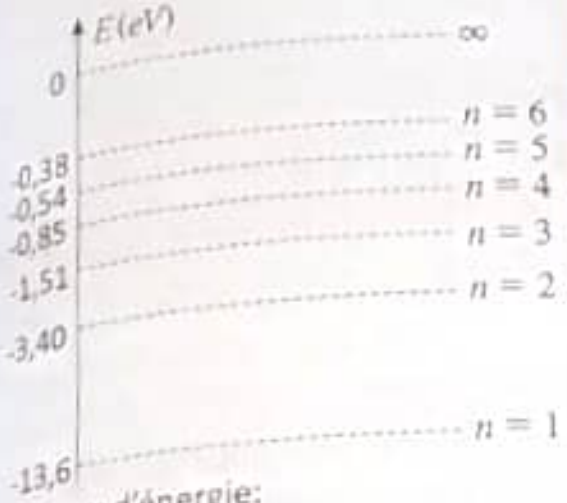
$n = 2 \longrightarrow E_2 = -3,40eV$

$n = 3 \longrightarrow E_3 = -1,51eV$

$n = 4 \longrightarrow E_4 = -0,85eV$

$n = 5 \longrightarrow E_5 = -0,54eV$

$n = 6 \longrightarrow E_6 = -0,38eV$



2- Niveau d'énergie:

correspond à: $n = 1$

3- Niveau d'énergie: $\mathscr{E} = 0\,eV$

correspond à l'état d'ionisation

A- La transition:

Il y a transition si:

$$\Delta E = \mathscr{E}$$

$$\Delta E = \frac{1,09.10^{-18}}{1,6.10^{-19}} = 6,81eV$$

ne correspond à aucune transition

5- La transition

On a: $\Delta E_{1\to 2} = -3,40 + 13,6 = 10,2eV$

donc la transition du niveau d'énergie 2 vers le niveau d'énergie 1.

6- Calcul de ΔE et de λ.

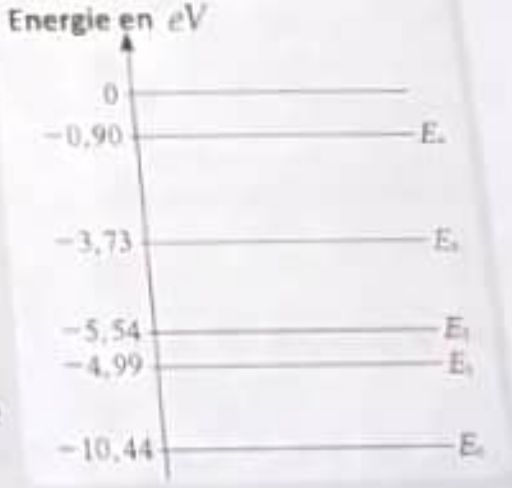
$$\Delta E = E_B - E_A$$
$$= -0,38 + 0,85 = 0,47eV$$

$$\Delta E = \frac{hC}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{hC}{\Delta E}$$

A.N.:

$$\lambda = \frac{6,62.10^{-34}.3.10^{8}}{0,47.1,6.10^{-19}} = 2,64.10^{-6}m$$
$$= 2,64\mu m$$

5 Le diagramme ci-dessous représente quelques niveaux d'énergie de l'atome de mercure.



1- Comment désigne-t-on le niveau le plus bas E_0 sur le diagramme énergétique?

2- Un électron cède une partie de son énergie à un atome de mercure. L'énergie de celui-ci passe du niveau E_0 au niveau E_1.

Comment qualifie-t-on l'état dans lequel se trouve alors l'atome de mercure?

3- Retour vers E_0.

Lors de la transition du niveau E_1 vers le niveau E_0, l'atome de mercure perd de l'énergie.

On donne:

La valeur de la constance de Planck: $h = 6,63 \times 10^{-34} SI$;

La valeur de la célérité de la lumière dans le vide: $c = 3,00 \times 10^{8} m.s^{-1}$.

$1\,eV = 1,60 \times 10^{-19} J$.

a- Comment se manifeste cette perte d'énergie?

b- Calculer la longueur d'onde $\lambda_{1\to 0}$ correspondante dans le vide.

c- Après avoir rappelé les limites des longueurs d'onde dans le vide du spectre visible, dire dans quel domaine, ultraviolet $(U.V.)$, visible ou infrarouge $(I.R.)$, se situe la radiation de longueur d'onde $\lambda_{1\to 0}$.

4- Les niveaux d'énergie de l'atome de mercure sont quantifiés.

a- Que signifie cette phrase?

b- Justifier à partir de ce terme la discontinuité du spectre d'émission de l'atome de mercure.

Solution

1- Le niveau le plus bas est appelé niveau fondamental.

2- L'atome de mercure passe dans un état excité.

3.a- L'atome de mercure perd cette énergie sous forme d'énergie lumineuse: il y a émission d'un photon.

b- On a: $\Delta E = E_1 - E_0 = \dfrac{h.c}{\lambda_{1\to 0}}$;

donc: $\lambda_{1\to 0} = \dfrac{h.c}{(E_1 - E_0)}$

Attention pour calculer λ, il faut convertir les énergies données en joules.

Or: $E_1 - E_0 = (-5,54) - (-10,44)$

$= 10,44 - 5,54 = 4,90eV$

$= 4,90 \times 1,60 \times 10^{-19} J$

Donc: $E_1 - E_0 = 7,84 \times 10^{-19} J$

Alors: $\lambda_{1\to 0} = \dfrac{6,63 \times 10^{-34} \times 3,00 \times 10^{8}}{7,84 \times 10^{-19}}$

$\lambda_{1\to 0} = 2,54 \times 10^{-7} m$

$= 254 \times 10^{-9} m = 254nm$

Il faut penser à convertir la longueur d'onde en nm pour pouvoir comparer sa valeur aux longueurs d'onde du visible.

c- Les longueurs d'onde du spectre visible sont comprises entre 400 et 800 nm.

Ici, $\lambda_{1\to 0} < 400nm$, donc la longueur d'onde $\lambda_{1\to 0}$ correspond à un rayonnement situé dans le domaine $U.V.$.

4.a- «Les niveaux d'énergie de l'atome sont quantifiés» siginfie que l'énergie de l'atome ne peut prendre que des valeurs bien déterminées.

b- Alors, quand l'atome passe d'un état d'énergie E_a à un état d'énergie E_b inférieur, il perd une énergie

$\Delta E = E_a - E_b$ qui ne peut prendre que des valeurs bien déterminées.

Or: $\Delta E = \frac{h.c}{\lambda}$, donc les radiations émises ne peuvent avoir que des longueurs d'onde bien déterminées.

Ce qui explique la discontinuité du spectre d'émission.

On utilise les lampes à vapeur de sodium pour éclairer des tunnels routiers. Ces lampes contiennent de la vapeur de sodium à très faible pression. Cette vapeur est excitée par un faisceau d'électrons qui traverse le tube. Les atomes de sodium absorbent l'énergie des électrons.

L'énergie est restituée lors du retour à l'état fondamental sous forme de radiations lumineuses. Les lampes à vapeur de sodium émettent surtout de la lumière jaune.

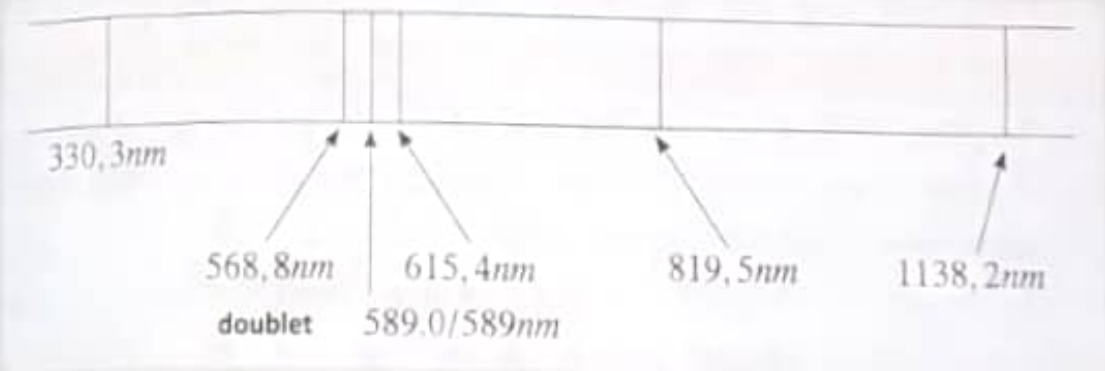
Données: $h = 6,62 \times 10^{-34} J.s$;

$c = 3,00 \times 10^{8} m.s^{-1}$;

$e = 1,60 \times 10^{-19} C$.

1- L'analyse du spectre d'émission d'une lampe à vapeur de sodium révèle la présence de rais de longueur d'onde λ bien définie.

Spectre d'émission d'une lampe à vapeur de sodium



1- Que représentent les grandeurs h, c et e (données présentées au début de l'exercice?

2- Quelles sont les longueurs d'onde des raies appartenant au domaine du visible? au domaine ultraviolet? au domaine infrarouge?

3- S'agit-il d'une lumière polychromatique ou monochromatique? Justifier la réponse.

4- Quelle est la valeur de la fréquence f de la raie de longueur d'onde: $\lambda = 589,0nm$?

Solution

1- h est la constante de Planck, c la vitesse de la lumière dans le vide et e la charge électrique élémentaire (ou valeur absolue de la charge de l'électron).

2- Les radiations qui sont dans le domaine:

• du visible ($400nm < \lambda < 800nm$)

sont: $568n8nm$; $589,0/589,6nm$

et $615,4nm$;

• des $UV(\lambda < 400nm)$.

sont: $330,3nm$;

• des $IR(\lambda > 800nm)$

sont: $819,5nm$ et $1138,2nm$.

3- Il s'agit d'une lumière polychromatique car elle contient plusieurs radiations (de longueurs d'onde différentes).

4- On a $\lambda = \frac{c}{f}$.

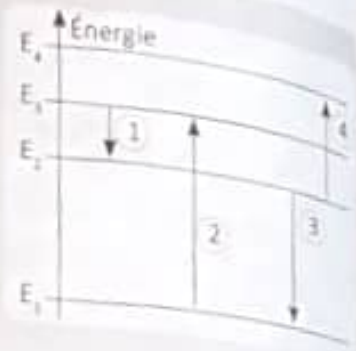
donc la fréquence:

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3,00 \times 10^{8}}{589,0 \times 10^{-9}} = 5,09 \times 10^{14} Hz$$

7 Le schéma ci-contre représente différents niveaux d'énergie d'un atome.

Les flèches (1, 2, 3 et 4) représentent des transitions d'un niveau à un autre.

Préciser, pour chacune de ces transitions, si elle s'accompagne de l'émission ou de l'absorption d'un photon.



Solution

L'émission d'un photon a lieu lorsque l'atome passe d'un niveau d'énergie supérieur un niveau d'énergie inférieur: c'est le cas ici pour les transitions 1 et 3.

En revanche, un photon est absorbé lorsque l'atome passe d'un niveau d'énergie inférieur à un niveau d'énergie supérieur:

c'est le cas ici pour les transitions 2 et 4.

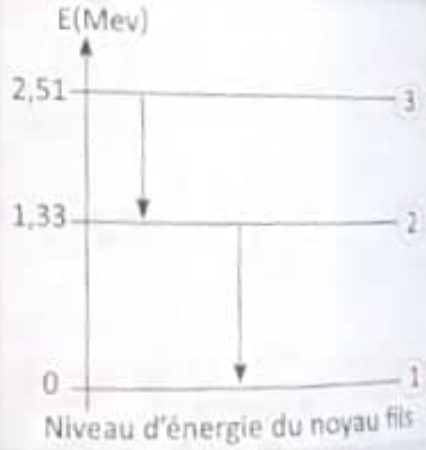
8 La désintégration radioactive β^- de l'isotope $^{60}_{27}Co$ produit un noyau de nickel Ni.

1- écrire l'équation associée à cette réaction nucléaire de désintégration radioactive.

2- On donne le diagramme énergétique du noyau fils:

2.1- Quelles sont les différentes transitions énergétiques que peut donner ce diagramme énergétique?

2.2- Calculer les longueurs dans le vide correspondant à ces différentes transitions.



Solution

1- ${}^{60}_{27}Co \longrightarrow {}^{60}_{28}Ni + {}^{0}_{-1}e$

2.1- D'après la figure, les transitions possibles sont:

- du niveau 3 au niveau 2;
- du niveau 2 au niveau 1.

2.2- La longueur d'onde du photon libéré par chacune de ces transitions est donnée par la relation:

$$E_n - E_p = h\upsilon_{np} = \frac{hc}{\lambda_{np}}$$

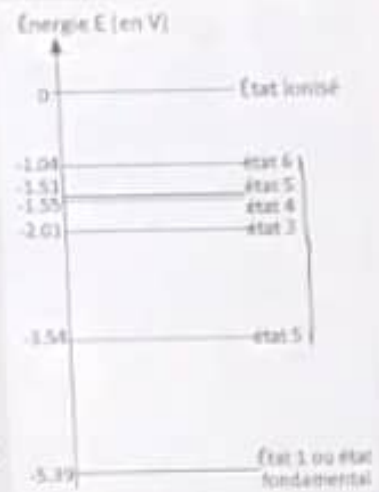
D'où: $\lambda_{np} = \frac{hc}{E_n - E_p}$

$$\lambda_{32} = \frac{6,63 \times 10^{-34} \times 3,00 \times 10^{8}}{1,33 \times 10^{-6} \times 1,602 \times 10^{-19}}$$

$$= 9,34 \times 10^{-13} m$$

$$\lambda_{21} = 1,05 \times 10^{-12} m$$

On donne ci-contre les niveaux d'énergie de l'atome de lithium.



Données: $h = 6,62 \times 10^{-34} Js$; $c = 3,00 \times 10^{8} ms^{-1}$;

$1eV = 1,60 \times 10^{-19} J$.

1- On appelle énergie d'ionisation l'énergie nécessaire à l'atome pour qu'il passe de l'état fondamental à l'état ionisé.

Déterminer cette énergie en Joule.

2- On envoie sur un atome de lithium pris dans son état fondamental les deux photons suivants:

- un photon (a) de longueur d'onde $\lambda = 528nm$;
- un photon (b) de longueur d'onde $\lambda = 367nm$.

2.1- Déterminer les énergies de ces photons en eV.

2.2- Lequel de ces photons sera absorbé par l'atome de lithium? Dans quel état d'énergie se trouve alors l'atome de lithium?

Solution

1-L'énergie d'ionisation est donc l'énergie à apporter pour passer de $E = -5,39eV$ à $E' = 0$.

Donc:

$$E_{ionisation} = E' - E = 0 - (-5,39)$$

$$= +5,39eV$$

$$= 5,39 \times 1,60 \times 10^{-19}$$

$$= 8,62 \times 10^{-19} J$$

2.1-

- Pour $\lambda_a = 528nm$:

$$E_a = \frac{h.c}{\lambda_a}$$

$$= \frac{6,62 \times 10^{-34} \times 3,00 \times 10^{8}}{528 \times 10^{-9}}$$

$$E_a = 3,76 \times 10^{-19} J$$
$$= \frac{3,76 \times 10^{-19}}{1,60 \times 10^{-19}}$$
$$= 2,35eV$$

• Pour $\lambda_a = 367nm$:

$$E_a = \frac{hc}{\lambda_a} = \frac{6,62 \times 10^{-34} \times 3,00 \times 10^{8}}{367 \times 10^{-9}}$$
$$E_a = 5,41 \times 10^{-19} J$$
$$= \frac{5,41 \times 10^{-19}}{1,60 \times 10^{-19}}$$
$$= 3,38eV$$

2.2- Supposons que l'atome capte un photon de longueur d'onde $\lambda_a = 528nm$, alors son énergie deviendra:

$$E' = E_1 + E_a$$
$$= (-5,39) + 2,35$$
$$= -3,04eV$$

Ce niveau d'énergie n'existe pas, donc l
photon (a) ne peut être absorbé.

Supposons que l'atome capte un photon
de longueur d'onde $\lambda_a = 367nm$, alors son
énergie deviendra:

$$E' = E_1 + E_a$$
$$= (-5,39) + 3,38$$
$$= -2,01eV$$

Cette énergie est l'énergie du niveau 3
donc ce photon sera absorbé et l'atome
passera dans l'état 3.

Chimie



1 Evolution spontanée d'un système chimique

1 Quotient de réaction Q_r dans un état quelconque:

On considère un système chimique constitué des espèces $A_{(aq)}$, $B_{(aq)}$, $C_{(aq)}$ et $D_{(aq)}$ siège d'une transformation chimique non totale, modélisée par la réaction d'équation:

$$\underbrace{aA_{(aq)} + bB_{(aq)}}_{\text{les réactifs}} \rightleftharpoons \underbrace{cC_{(aq)} + dD_{(aq)}}_{\text{les produits}}$$

Le quotient de réaction dans un état quelconque noté Q_r a pour expression:

$$Q_r = \frac{[C]^c[D]^d}{[A]^a[B]^b}$$

est une grandeur sans unité.

- Son expression ne comporte que les espèces dissoutes à l'exclusion du solvant: $[H_2O] = 1$ et [solide]=1.

Sa valeur se calcule à partir des valeurs des concentrations, exprimées en $molL^{-1}$, dans un état donné du système.

- L'état initial d'un système chimique est l'état dans lequel se trouvent les constituants avant réaction. Il met en jeu les concentrations initiales apportées des espèces introduites.

2 Le quotient de réaction initiale:

s'écrit: $Q_{r,i} = \frac{[C]_i^c[D]_i^d}{[A]_i^a[B]_i^b}$

3 L'état d'équilibre:

L'état final est l'état d'équilibre atteint par le système. Il met en jeu les concentrations effectives dans l'état final espèces en solution.

Cet état est caractérisé par une constante d'équilibre notée K tel que:

$$K = Q_{r,éq}$$

4 Critère d'évolution spontanée:

Le critère d'évolution spontanée:

- Tout système évolue spontanément de manière à ce que la valeur du quotient de réaction tende vers celle de la constante d'équilibre K.
- Le sens d'évolution d'un système se détermine en comparant la valeur du quotient de réaction dans l'état initial $Q_{r,i}$ à la valeur de la constante d'équilibre K

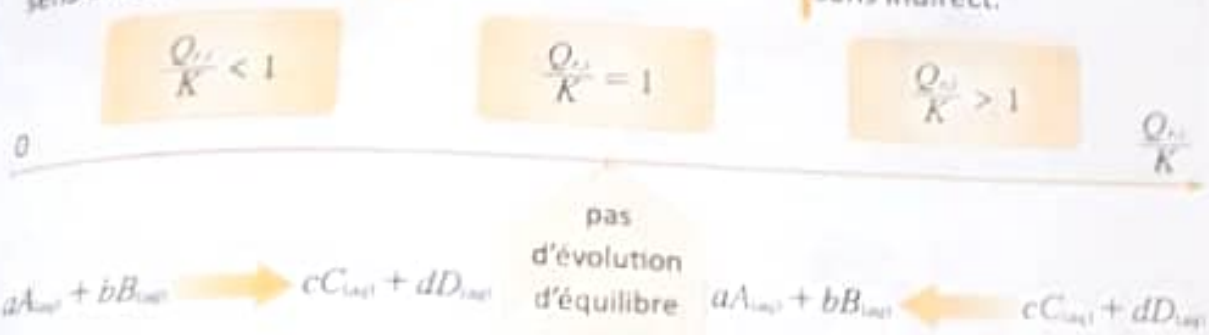
ou en examinant la valeur du rapport $Q_{r,i}/K$.

Trois cas se présentent:

- le quotient de réaction pour l'état est inférieur à K:
$Q_{r,i} < K$, soit $\frac{Q_{r,i}}{K} < 1$:
le système évolue dans le sens direct.

- le quotient de réaction pour l'état initial est égal à K:
$Q_{r,i} = K$, soit $\frac{Q_{r,i}}{K} = 1$:
le système n'évolue pas.

- le quotient de réaction pour l'état initial est supérieur à K:
$Q_{r,i} > K$, soit $\frac{Q_{r,i}}{K} > 1$:
le système évolue dans le sens indirect.



Test de connaissances

1 Trouver les mots manquants:

a- Dans l'expression du quotient de réaction n'interviennent que les espèces.....

b- Les constituants ..... ne figurent pas dans l'expression du quotient de réaction.

c- Pour déterminer le sens spontané d'évolution d'un système, on calcule la valeur du ....., et on la compare à celle de la .....

d- Les transformations chimiques de dosage sont ..... car la constante d'équilibre associée à l'équation de la réaction correspondante est élevée.

Solution

a- dissoutes.
b- solides.
c- quotient de réaction initiales - constante d'équilibre.
d- totales.

2 Vrai ou faux?

a- Un quotient de réaction s'exprime en $molL^{-1}$. V F

b- Pour la réaction d'équation: $aA_{(aq)} + bB_{(aq)} \rightleftharpoons cC_{(aq)} + dD_{(aq)}$, le quotient de réaction s'écrit:

$$Q_r = \frac{[C]^c[D]^d}{[A]^a[B]^b}$$ V F

c- Le sens direct de la réaction d'équation: $aA_{(aq)} + bB_{(aq)} \rightleftharpoons cC_{(aq)} + dD_{(aq)}$. correspond au sens: $aA_{(aq)} + bB_{(aq)} \longrightarrow cC_{(aq)} + dD_{(aq)}$. V F

d- Pour qu'un système évolue dans le sens direct il faut que le quotient de réaction dans l'état initial soit supérieur à la constante d'équilibre. V F

e- La valeur de la constante d'équilibre suffit pour déterminer le sens d'évolution d'un système. V F

f- Le constituant H_2O n'apparaît pas dans l'expression du quotient de réaction pour une réaction en milieux aqueux. V F

g- On doit tenir compte de l'autoprotolyse de l'eau pour déterminer la valeur du quotient de réaction dans l'état initial. V F

h- Si, dans l'état initial, $Q_{r,i} < K$, la transformation s'effectue dans le sens inverse. V F

Solution

a- F
b- V
c- V
d- F
e- F
f- V
g- F
h- F.

QCM:

a- Soit la réaction acido-basique d'équation:

$$HCO_2H_{(aq)} + CH_3CO_2^-{}_{(aq)} \rightleftharpoons HCO_2^-{}_{(aq)} + CH_3CO_2H_{(aq)}.$$

Le quotient de réaction dans un état quelconque a pour expression:

$Q_r = \dfrac{[HCO_2^-][CH_3CO_2H]}{[HCO_2H][CH_3CO_2^-]}$

$Q_r = \dfrac{[HCO_2H][CH_3CO_2^-]}{[HCO_2^-][CH_3CO_2H]}$

b- Cette réaction acido-basique a pour constante d'équilibre $K = 10$. On considère un mélange de solutions d'acide éthanoïque, d'éthanoate de sodium, d'acide méthanoïque et de méthanoate de sodium tel que:

$$[CH_3CO_2H] = [CH_3CO_2^-] = [HCO_2H] = [HCO_2^-].$$

Le système:

évoluera dans le sens direct.

évoluera dans le sens inverse.

n'évoluera pas.

c- On donne le pK_a des couples $HF_{(aq)}/F^-_{(aq)}(pK_a = 3,3)$ et $NH_4^+{}_{(aq)}/NH_{3(aq)}(pK_a = 9,2)$. Dans une solution où l'on a introduit des quantités des différentes espèces $F^-_{(aq)}$, $NH_{4(aq)}^+$, $HF_{(aq)}$ et $NH_{3(aq)}$, quelle réaction présente la constante d'équilibre le plus élevée:

$HF_{(aq)} + NH_{3(aq)}$; $F^-_{(aq)} + NH_4^+{}_{(aq)}$?

La transformation correspondante est:

quasi totale ; peu avancée.

Solution

a- $Q_r = \dfrac{[HCO_2^-][CH_3CO_2H]}{[HCO_2H][CH_3CO_2^-]}$

b- évoluera dans le sens direct.

c - $HF + NH_3$

- quasi totale.

Exercices

1 Donner les expressions des quotients de réactions suivantes:

a- $HCO_2H_{(aq)} + CH_3CO_{2(aq)}^- \rightleftharpoons HCO_{2(aq)}^- + CH_3CO_2H_{(aq)}$.

b- $HF_{(aq)} + HCO_{2(aq)}^- \rightleftharpoons F_{(aq)}^- + HCO_2H_{(aq)}$.

c- $NH_{4(aq)}^+ + HCO_{2(aq)}^- \rightleftharpoons NH_{3(aq)} + HCO_2H_{(aq)}$.

d- $2I_{(aq)}^- + 2Fe_{(aq)}^{3+} \rightleftharpoons I_{2(aq)} + 2Fe_{(aq)}^{2+}$.

e- $Cu_{(aq)}^{2+} + Fe_{(s)} \rightleftharpoons Cu_{(s)} + Fe_{(aq)}^{2+}$.

f- $Ag_{(s)} + Fe_{(aq)}^{3+} \rightleftharpoons Ag_{(aq)}^+ + Fe_{(aq)}^{2+}$.

Solution

a- $Q_r = \dfrac{[HCO_2^-][CH_3CO_2H]}{[HCO_2H][CH_3CO_2^-]}$.

b- $Q_r = \dfrac{[HCO_2H][F^-]}{[HF][HCO_2^-]}$.

c- $Q_r = \dfrac{[HCO_2H][NH_3]}{[NH_4^+][HCO_2^-]}$.

d- $Q_r = \dfrac{[Fe^{2+}]^2.[I_2]}{[I^-]^2[Fe^{3+}]^2}$.

e- $Q_r = \dfrac{[Fe^{2+}]}{[Cu^{2+}]}$.

f- $Q_r = \dfrac{[Fe^{3+}][Ag^+]}{[Fe^{3+}]}$.

2

1- écrire l'équation de la réaction acido-basique susceptible de se produire entre l'acide méthanoïque $HCO_2H_{(aq)}$ et l'ion benzoate $C_6H_5CO_{2(aq)}^-$.

2- Donner l'expression de son quotient de réaction.

3- Calculer sa constante d'équilibre.

pK_a des couples: $HCO_2H_{(aq)}/HCO_{2(aq)}^-$: $pK_{a_1} = 3,8$.

$C_6H_5CO_2H_{(aq)}/C_6H_5CO_{2(aq)}^-$: $pK_{a_2} = 4,2$.

Solution

1- équation de la réaction:

$$HCO_2H_{(aq)} + C_6H_5CO_{2(aq)}^- \rightleftharpoons HCO_{2(aq)}^- + C_6H_5CO_2H_{(aq)}$$

2- Expression de Q_r:

$$Q_r = \frac{[HCO_2^-][C_6H_5CO_2H]}{[HCO_2H][C_6H_5CO_2^-]}$$

3- Calcul de K:

On a: $K = Q_{r,éq}$

tel que: $K = \dfrac{K_{a_1}}{K_{a_2}} = \dfrac{10^{-pK_{a_1}}}{10^{-pK_{a_2}}} = 10^{pK_{a_2}-pK_{a_1}}$.

A.N.: $K = 10^{4,2-3,8} = 2,51$.

3 Un volume $V = 1,0L$ d'une solution contient les quantités de matière d'espèces suivantes:

Espèce	$Fe_{(aq)}^{2+}$	$Fe_{(aq)}^{3+}$	$Ag_{(aq)}^+$	$Ag_{(s)}$
quantité de matière (mol)	0,20	0,10	0,20	0,020

1- écrire l'équation de la réaction d'oxydation des ions ferreux Fe^{2+} par les ions argent.

2- Calculer le quotient de réaction dans l'état initial du système.

3- Sachant que la constante d'équilibre associée à cette réaction est $K = 3,2$, préciser le sens d'évolution spontanée du système chimique. Y a-t-il formation ou disparition d'argent métallique?

Solution

1- équation de le réaction:

$$Fe^{2+}_{(aq)} + Ag^{+}_{(aq)} \rightleftharpoons Fe^{3+}_{(aq)} + Ag_{(s)}$$

2- Calcul de $Q_{r,i}$:

On a: $Q_{r,i} = \dfrac{[Fe^{3+}]}{[Fe^{2+}][Ag^{+}]}$.

$$Q_{r,i} = \frac{n_i(Fe^{3+})}{n_i(Fe^{2+}).n_i(Ag^{+})}.V.$$

A.N.: $Q_{r,i} = \dfrac{0,10}{0,20.0,20} = 2,5$.

3- Sens d'évolution:

On applique le critère d'évolution spontanée:

$Q_{r,i} < K$.

Donc le système évolue dans le sens direct de formation d'argent.

Divers mélanges de volume $V = 100mL$ contiennent les quantités de matière d'espèces suivantes:

mélange	CO_3^{2-}	HCO_3^-	NH_4^+	NH_3
1	$0,050mol$	$1mmol$	$0,050mol$	$1mmol$
2	$0,050mol$	$1,0mol$	$0,050mol$	$1,0mol$
3	$0,20mol$	$8mmol$	$0,20mol$	$8mmol$

Données:

Couple ion hydrogénocarbonate/ion carbonate: $HCO^-_{3(aq)}/CO^{2-}_{3(aq)}$; $pK_{A_1} = 6,4$.

Couple ion ammonium/ammoniac: $NH^+_{4(aq)}/NH_{3(aq)}$; $pK_{A_2} = 9,2$.

Ecrire l'équation de la réaction acido-basique entre les ions carbonate et ammonium.

Calculer la constante d'équilibre associée à cette réaction.

Dans quel sens évolue le système chimique dans les divers mélanges?

Solution

équation de la réaction:

$CO^{2-}_{3(aq)} + NH^+_{4(aq)} \rightleftharpoons HCO^-_{3(aq)} + NH_{3(aq)}$.

Calcul de K:

a: $K = Q_{r,éq}$; $K = \dfrac{K_{A_2}}{K_{A_1}} = 10^{pK_{A_2} - pK_{A_1}}$

N.: $K = 10^{-9,2+6,4} = 1,58.10^{-3}$

$\simeq 1,6.10^{-3}$

3- Sens d'évolution:

On applique le critère d'évolution spontanée pour chaque mélange.

$$Q_{r,i} = \frac{[NH_3][HCO_3^-]}{[NH_4^+][CO_3^{2-}]}$$

Les résultants sont groupés dans le ta-

bleau suivant:

mélange	1	2	3
$Q_{r,i}$	4.10^{-4}	400	$1,6.10^{-1}$

alors on trouve:

- mélange-1: $Q_{r,i} < K$ le système évolue dans le sens direct.
- mélange-2: $Q_{r,i} > K$ le système évolue dans le sens inverse.
- mélange-3: $Q_{r,i} \approx K$ le système est en équilibre.

On réalise le mélange des volumes de solutions suivants:

- $V_1 = 40,0mL$ de solution de fluorure d'hydrogène: $(C_1 = 0,20molL^{-1})$;
- $V_2 = 10,0mL$ de solution de fluorure de sodium: $(C_2 = 0,10molL^{-1})$;
- $V_3 = 25,0mL$ de solution d'acide méthanoïque: $(C_3 = 0,10molL^{-1})$;
- $V_4 = 25,0mL$ de solution de méthanoate de sodium: $(C_4 = 0,20molL^{-1})$.

Envisageons la réaction acido-baique d'équation:

$$HF_{(aq)} + HCO_{2(aq)}^- \rightleftharpoons F_{(aq)}^- + HCO_2H_{(aq)}.$$

Données:

$HF_{(aq)}/F_{(aq)}^-$; $pK_{A_1} = 3,2$; $HCO_2H_{(aq)}/HCO_{2(aq)}^-$; $pK_{A_2} = 3,8$.

On peut admettre que dans leur solution respective, les concentrations des espèces chimiques $HF_{(aq)}$, $F_{(aq)}^-$, $HCO_2H_{(aq)}$ et $HCO_{2(aq)}^-$ sont égales aux concentrations des solutés apportés.

1- Exprimer puis calculer le quotient de la réaction dans l'état initial.

2- Exprimer le quotient de réaction à l'équilibre puis calculer la constante d'équation associée à cette réaction.

3- Comparer $Q_{r,i}$ et K. Dans quel sens évolue le système?

4- Calculer le taux d'avancement final de la réaction. Conclure.

Solution

1- Quotient de réaction:

On a: $Q_{r,i} = \dfrac{[F^-][HCO_2H]}{[HF][HCO_2^-]} = \dfrac{\frac{C_2V_2}{V}\frac{C_3V_3}{V}}{\frac{C_1V_1}{V}\frac{C_4V_4}{V}}$

$$= \frac{C_2V_2C_3V_3}{C_1V_1C_4V_4} = \frac{1}{16}V$$

2- À l'équilibre:

$$K = Q_{r,éq} = \frac{[F^-]_{éq}[HCO_2H]_{éq}}{[HF]_{éq}[HCO_2^-]_{éq}} \times \frac{[H_3O^+]}{[H_3O^+]}$$

$$= \frac{K_{A_1}}{K_{A_2}} = \frac{10^{-3,2}}{10^{-3,8}} = 4,0$$

3- Comparaison:

Le quotient de réaction initial est inférieur à la constante d'équilibre:

$(Q_{r,i} < K)$.

D'après critère d'évolution, le système évolue dans le sens direct:

$$HF_{(aq)} + HCO_{2(aq)}^- \longrightarrow F_{(aq)}^- + HCO_2H_{(aq)}.$$

4- Le tableau d'évolution de la transformation s'écrit:

Équation		$HF_{(aq)} + HCO_{2(aq)}^- \rightleftharpoons F_{(aq)}^- + HCO_2H_{(aq)}$			
État	avancement $x(mol)$	quantités de matière (mol)			
Initial	0	$8,0\times10^{-3}$	$5,0\times10^{-3}$	$1,0\times10^{-4}$	$2,5\times10^{-3}$
À l'équilibre	$x_{éq}$	$8,0\times10^{-3}-x_{éq}$	$5,0\times10^{-3}-x_{éq}$	$1,0\times10^{-4}+x_{éq}$	$2,5\times10^{-3}+x_{éq}$

Les concentrations des diverses espèces à l'équilibre doivent vérifier l'expression:

$$K=\frac{[F^-]_{éq}[HCO_2H]_{éq}}{[HF]_{éq}[HCO_2^-]_{éq}} \text{ soit: } 4,0=\frac{\left(\frac{1,0\times10^{-4}+x_{éq}}{100\times10^{-3}}\right)\left(\frac{2,5\times10^{-3}+x_{éq}}{100\times10^{-3}}\right)}{\left(\frac{8,0\times10^{-3}-x_{éq}}{100\times10^{-3}}\right)\left(\frac{5,0\times10^{-3}-x_{éq}}{100\times10^{-3}}\right)}$$

On trouve: $3x_{éq}^2-0,055x_{éq}+1,575.10^{-4}=0$

La résolution conduit à $x_{éq}=15\times10^{-3}mol$; ou $x_{éq}=3,6\times10^{-3}mol$.

Or: $x_{max}=5,0\times10^{-3}mol$;

d'où: $x_{éq}\leq x_{max}$; Donc: $x_{éq}=3,6\times10^{-3}mol$.

Le taux d'avancement final:

$$\tau=\frac{x_{éq}}{x_{max}}=\frac{3,6\times10^{-3}}{5,0\times10^{-3}}=0,72 \text{ soit: } 72\%.$$

Le système évolue dans le sens direct mais la transformation n'est pas totale ce sens.

On mélange des volumes égaux $(V=100mL)$ des solutions suivantes:

- **Iodure de potassium:** $KI(c_1=0,10molL^{-1})$.
- **chlorure de de fer (III):** $FeCl_3(c_2=0,10molL^{-1})$.
- **diiode:** $I_2(c_3=5,0\times10^{-2}molL^{-1})$.
- **sulfate de fer (II):** $FeSO_4(c_4=1,0molL^{-1})$.

La constante d'équilibre associée à l'équation d'oxydation des ions iodure par les ions fer (III) a pour valeur: $K=1,0\times10^3$.

1- Écrire l'équation de cette réaction.

2- Donner l'expression du quotient de réaction dans l'état initial en fonction des concentrations des solutions mélangées.

3- En déduire le sens spontané d'évolution du système.

4- On réalise un mélange semblable au précédent, en utilisant des concentrations c_3 et c_4 égales à $1,0\times10^{-2}molL^{-1}$.

Dans quel sens se produit alors la transformation chimique?

Solution

1- équation de la réaction:

$$2I^-_{(aq)} + 2Fe^{3+}_{(aq)} \rightleftharpoons I_{2(aq)} + 2Fe^{2+}_{(aq)}$$

2- Expression de Q_r:

telle que: $Q_r = \dfrac{[I_2][Fe^{2+}]^2}{[Fe^{3+}]^2[I^-]^2}$

$$Q_r = \frac{\left(\frac{C_1V}{4V}\right)\left(\frac{C_4V}{4V}\right)^2}{\left(\frac{C_2V}{4V}\right)^2\left(\frac{C_3V}{4V}\right)^2} = \frac{C_1C_4^2}{C_2^2C_3^2}\frac{1}{4V}$$

$$Q_r = \frac{4C_1C_4^2V}{C_2^2C_3^2}$$

3- Sens d'évolution:

On a: $Q_{r,i} = \dfrac{4.5.10^{-2}.1^2.100.10^{-3}}{(0,1)^2(0,1)^2}$

$$Q_{r,i} = 200$$

tel que: $Q_{r,i} < K$

Donc le système évolue dans le sens direct.

4- Sens de transformation:

On a: $Q_{r,i} = \dfrac{4C_1C_4^2.V}{(C_2.C_3)^2}$

A.N.: $Q_{r,i} = \dfrac{4,5.10^{-2}.1^2.100.10^{-3}}{(10^{-2}.10^{-2})^2}$

$$Q_{r,i} = 2.10^8$$

tel que: $Q_{r,i} > K$

Donc le système évolue dans le sens inverse.

7 On verse dans un bécher $100mL$ de solution de sulfate de cuivre $CuSO_4$ de concentration $c_1 = 0,10mol.L^{-1}$ de solution de sulfate de zinc $ZnSO_4$ de concentration $c_2 = 1,0mol.L^{-1}$. On ajoute (sans variation notable de volume) $3,27g$ de poudre de zinc et $3,18g$ de poudre de cuivre.

Données:

Masses molaires atomiques (en $g.mol^{-1}$): $M_{Zn} = 65,4$; $M_{Cu} = 63,5$.

1- Ecrire l'équation d'oxydation du zinc par l'ion $Cu^{2+}_{(aq)}$.

2- Exprimer le quotient de réaction dans l'état initial et calculer sa valeur.

3- Sachant que la constante d'équilibre associée à l'équation, écrire en a. a pou valeur $K = 4,4 \times 10^{38}$, déterminer le sens spontané d'évolution du système chimi que contenu dans le bécher.

4- Comment peut-on qualifier cette transformation?

5- Donner la composition du contenu du bécher dans l'état final du système.

Solution

1- Equation de la réaction:

$$Cu^{2+}_{(aq)} + Zn_{(s)} \rightleftharpoons Cu_{(s)} + Zn^{2+}_{(aq)}$$

2- Calcul de $Q_{r,i}$:

On a: $Q_{r,i} = \dfrac{[Zn^{2+}]}{[Cu^{2+}]}$; $Q_{r,i} = \dfrac{\frac{C_2V_2}{V_S}}{\frac{C_1V_1}{V_S}} = \dfrac{C_2}{C_1}$

A.N.: $Q_{r,i} = \dfrac{1}{0,10} = 10$

3- Sens d'évolution:

On a: $Q_{r,i} < K$

Donc le système évolue dans le sens d rect.

4- Nature de la transformation:

On a: $K = 4,4.10^{38}$ très grande ce q qualifie telle transformation comm quasi totale.

5- Composition du système les quantité

initiales sont:

$n(Zn) = \frac{m(Zn)}{M(Zn)} = \frac{3,27}{65,4} = 0,05mol$

$n(Cu) = \frac{m(Cu)}{M(Cu)} = \frac{3,18}{63,5} = 0,05mol$

$n(Cu^{2+}) = C_1V_1 = 0,10.10^{-3} = 5.10^{-2}mol$

$n(Zn^{2+}) = C_2V_2 = 1.100.10^{-3} = 10^{-1}mol$

Donc le réactif limitant est Cu^{2+}.

Donc la composition sera: $x_{max} = 10^{-2}mol$

Mélange	$Cu^{2+}_{(aq)} + Zn_{(s)} \longrightarrow Cu_{(s)} + Zn^{2+}_{(aq)}$				
E.I	0	0,01	0,05	0,05	0,1
E.F	x_{max}	$0,01 - x_{max}$	$0,05 - x_{max}$	$0,05 + x_{max}$	$0,1 + x_{max}$
		0	0,04	0,06	0,11

On prépare une solution A en mélangeant $10mL$ d'une solution de fluorure d'hydrogène HF de concentration molaire $0,10mol.L^{-1}$ avec $40mL$ d'une solution de fluorure de sodium NaF de concentration molaire $0,20mol.L^{-1}$.

On prépare une solution B en mélangeant $25mL$ d'une solution d'acide méthanoïque de concentration molaire $0,20mol.L^{-1}$ avec $25mL$ d'une solution de méthanoate de sodium de concentration molaire $0,10mol.L^{-1}$.

La mesure du pH de ces deux solutions conduit à $pH_A = 4,1$ et $pH_B = 3,5$.

Données: pK_A des couples acide/base: $HF_{(aq)}/F^-_{(aq)}$; $pK_{A_1} = 3,2$;

$H-COOH_{(aq)}/H-COO^-_{(aq)}$; $pK_{A_2} = 3,8$.

1- En calculant le rapport [Base]/ [Acide] initial et final, montrer que pour chacun des solution A et B ainsi obtenues, tout se passe comme si les entités acido-basiques introduites dans les diverses solutions ayant servi à préparer ces mélanges n'avaient pas réagi avec l'eau.

2- On mélange les solutions A et B.

a- Donner l'équation de la réaction acido-basique qui se produit lors du mélange.

b- Exprimer sa constante d'équilibre et calculer sa valeur.

c- Déterminer dans quel sens se produit la transformation correspondante.

d- Calculer l'avancement final et le taux d'avancement de la réaction lors de cette transformation.

Solution

1- Etat du système:

• Pour la solution A:

$$pH_A = pK_{A_1} + \log_{10}\frac{[F^-]_{éq}}{[HF]_{éq}}$$

On en déduit:

$$\log_{10}\frac{[F^-]_{éq}}{[HF]_{éq}} = pH_A - pK_{A_1}$$

$$= 4,1 - 3,2 = 0,9$$

D'où: $\frac{[F^-]_{éq}}{[HF]_{éq}} = 10^{0,9} = 8,0$.

Calculons le rapport de ces concentrations dans l'état initial:

$$\frac{[F^-]_i}{[HF]_i} = \frac{c_{NaF}V_{NaF}}{c_{HF}V_{HF}}$$

$$= \frac{0,20 \times 40 \times 10^{-3}}{0,10 \times 10 \times 10^{-3}} = 8,0$$

Le rapport des concentrations des espèces conjuguées n'a pas varié entre l'état initial et l'état final d'équilibre. Tout se passe comme si ces espèces n'avaient pas réagi avec l'eau.

• Pour la solution B on détermine de même

$$\frac{[H-COO^-]_0}{[H-COOH]_0} = 10^{pH-pK_A}$$
$$= 10^{3,8-3,8} = 10^{-0,3} \approx 0,5$$

$$\frac{[H-COO^-]_0}{[H-COOH]_0} = \frac{c_{B-COOH} V_{B-COOH}}{c_{A-COOH} V_{A-COOH}}$$
$$= \frac{0,10 \times 25 \times 10^{-3}}{0,20 \times 25 \times 10^{-3}} = 0,5$$

On vérifie aussi que:

$$\frac{[H-COO^-]_0}{[H-COOH]_0} = \frac{[H-COO^-]}{[H-COOH]}$$

Les espèces introduites n'ont réagi.

2.a- équation de réaction.

L'équation de la réaction acido-basique qui se produit est:

$$HF_{(aq)} + H-COO^-_{(aq)} \rightleftharpoons F^-_{(aq)} + H-COOH_{(aq)}$$

b- expression de K.

La constante d'équilibre associée à cette équation s'écrit:

$$K = \frac{[F^-][H-COOH]}{[HF][H-COO^-]}$$
$$= \frac{[F^-][H_3O^+]}{[HF]} \times \frac{[H-COOH]}{[H-COO^-][H_3O^+]}$$
$$K = \frac{K_A}{K_{A'}} = \frac{10^{-pK_A}}{10^{-pK_{A'}}} = 10^{pK_{A'}-pK_A}$$
$$= 10^{3,8-3,2} = 10^{0,6} \approx 4,0$$

c- sens d'évolution.

Calculons le quotient de réaction $Q_{r,i}$, dans l'état initial du système, les résultats de la question-1:

$$Q_{r,i} = \frac{[F^-][H-COOH]}{[HF][H-COO^-]}$$
$$= \frac{8,0}{0,5} = 16,0$$

Alors: $Q_{r,i} > K$

le sens spontané de la transformation est le sens indirect.

d- Calcul de τ .

Équation	$F^-_{(aq)} + H-COOH_{(aq)} \rightleftharpoons HF_{(aq)} + H-COO^-_{(aq)}$			
État initial (en $10^{-3}mol$)	8,0	5,0	1,0	2,5
État final (en $10^{-3}mol$)	$8,0-x_f$	$5,0-x_f$	$1,0+x_f$	$2,5+x_f$

Dans ce tableau, x_f est, comme les autres quantités de matière, en millimoles $(10^{-3}mol)$.

La constante d'équilibre K', associée à cette équation, est:

$$K' = \frac{[HF][H-COO^-]}{[F^-][H-COOH]}$$
$$= \frac{\frac{1,0+x_f}{V} \times \frac{2,5+x_f}{V}}{\frac{8,0-x_f}{V} \times \frac{5,0-x_f}{V}}$$
$$= \frac{(1,0+x_f)(2,5+x_f)}{(8,0-x_f)(5,0+x_f)}$$
$$= \frac{1}{4}$$

Cette expression conduit à l'équation:

$$3x_f^2 + 27x_f - 30 = 0$$

soit: $x_f^2 + 9x_f - 10 = 0$, dont la résolution fournit une seule racine positive:

$$x_f = 1mmol$$

L'avancement final de la réaction est:

$$x_f = 1,0 \times 10^{-3}mol$$

Le réactif limitant est l'acide méthanoïque; l'avancement maximal est donc: $x_{max} = 5,0 \times 10^{-3}mol$; d'où l'on déduit le taux d'avancement de la réaction:

$$\tau = \frac{x_f}{x_{max}} = \frac{1,0 \times 10^{-3}}{5,0 \times 10^{-3}} = 20\%$$

On dispose des solutions aqueuses suivantes:

Solution	Espèce	Concentration ($mol.L^{-1}$)
Acide méthanoïque	$HCO_2H_{(aq)}$	0,050
Benzoate se sodium	$C_6H_5CO_{2(aq)}^- + Na_{(aq)}^+$	0,050
Acide benzoïque	$C_6H_5CO_2H_{(aq)}$	0,025
Méthanoate de sodium	$HCO_{2(aq)}^- + Na_{(aq)}^+$	0,025

On réalise des solutions en mélangeant les volumes indiqués ci-dessous (en mL) de ces quatre solutions:

Solution	$C_6H_5CO_2H_{(aq)}$	$C_6H_5CO_{2(aq)}^-$	$HCO_2H_{(aq)}$	$HCO_{2(aq)}^-$
S_1	100	100	100	100
S_2	400	100	100	400

1- Écrire l'équation de la réaction entre l'acide méthanoïque et l'ion benzoate et calculer la constante d'équilibre associée.

2- Calculer pour chaque solution S_i le quotient de réaction dans l'état initial.

3- En déduire dans quel sens évolue le système chimique pK_A des couples acid/base:

- $C_6H_5CO_2H_{(aq)}/C_6H_5CO_{2(aq)}^-$; $pK_{A_1} = 4,2$;
- $HCO_2H_{(aq)}/HCO_{2(aq)}^-$; $pK_{A_2} = 3,8$.

Solution

1- Équation de la réaction:

$$HCO_2H_{(aq)} + C_6H_5COO^-$$
$$\rightleftharpoons HCO_{2(aq)}^- + C_6H_5CO_2H$$

2- Calcul de $Q_{r,i}$:

On a: $Q_{r,i} = \dfrac{[HCO_2^-]_i[C_6H_5CO_2H]_i}{[HCO_2H]_i[C_6H_5CO_2^-]_i}$.

On a: calcul pour chaque solution, on trouve:

- $Q_{r,1} = \dfrac{\left(\dfrac{0,025.100}{400}\right)\left(\dfrac{0,025.100}{400}\right)}{\left(\dfrac{0,050.100}{400}\right)\left(\dfrac{0,050.100}{400}\right)}$

$$Q_{r,1} = \frac{1}{4} = 0,25$$

- $Q_{r,2} = \dfrac{\left(\dfrac{0,025.400}{1000}\right)\left(\dfrac{0,025.400}{1000}\right)}{\left(\dfrac{0,050.100}{1000}\right)\left(\dfrac{0,050.100}{1000}\right)}$

$$Q_{r,2} = 4$$

3- Sens d'évolution:

La constante d'équilibre relative au sens 1 de la réaction:

$$K = Q_{r,éq} = 10^{pK_{A_2} - pK_{A_1}}.$$

$$K = 10^{4,2-3,8} = 2,51.$$

Donc:

- pour le système 1: $Q_{r,1} < K$

le système évolue dans le sens direct.

- pour le système 2: $Q_{r,2} > K$

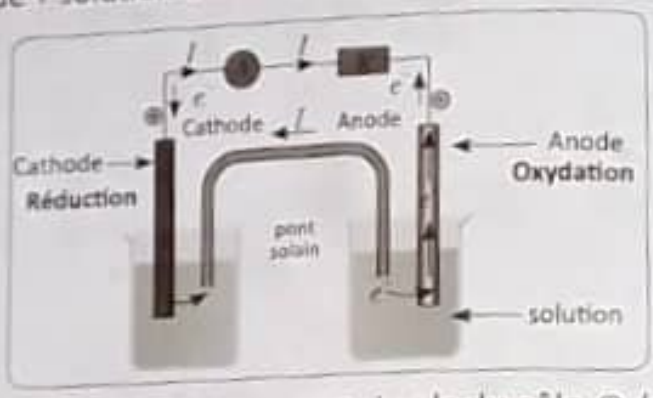
le système évolue dans le sens inverse.

2 Les piles

I Constitution et fonctionnement d'une pile électro-chimique:

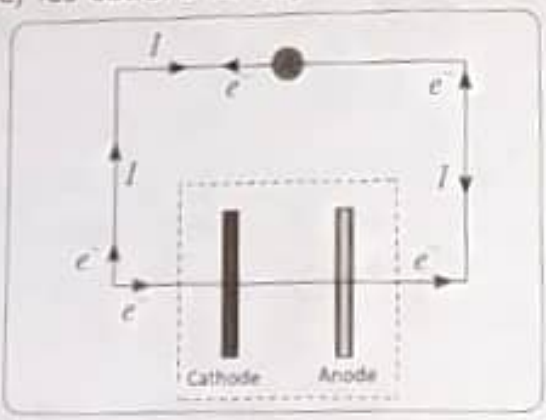
• Une pile électrochimique est un générateur qui convertit l'énergie chimique issue d'une réaction d'oxydoréduction spontanée en énergie électrique.

• Une pile électrochimique est constituée de deux demi-piles, c'est-à-dire de deux ensembles [électrode + solution électrolytique], reliées par un pont salin.



• Dans le circuit extérieur à la pile, le courant circule du pôle ⊕ (cathode) vers le pôle ⊖ (anode).

• A l'intérieur de la pile, les cations se déplacent vers la cathode, les anions vers l'anode.



• Le pont salin contient une solution conductrice concentrée et chimiquement inerte qui assure le passage du courant électrique et la neutralité électrique des solutions.

• Ce sont les mouvements spontanés des porteurs de charge qui assurent le passage du courant électrique:

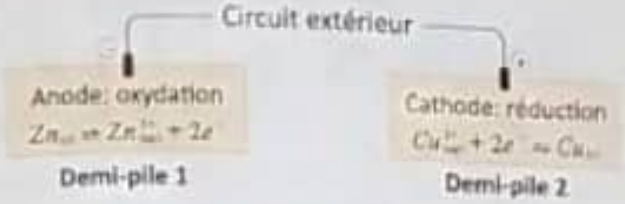
- les électrons se déplacent dans les électrodes et le circuit électrique extérieur, de l'anode vers la cathode;

- les cations du pont salin se déplacent vers la demi-pile cathodique et les anions vers la demi-pile anodique.

- Au niveau de la cathode ⊕ il y a réduction.
- Au niveau de l'anode ⊖ il y a oxydation.

Exemple:

• Dans la pile Daniell, le zinc fournit des électrons qui sont captés par les ions $Cu^{2+}_{(aq)}$: le zinc et les ions $Cu^{2+}_{(aq)}$ n'étant pas en contact direct.



2 Représentation conventionnelle d'une pile:

Exemple: le schéma conventionnel de la pile Daniell.

$$\ominus Zn/Zn^{2+}_{(aq)} \;//\; Cu^{2+}_{(aq)}/Cu \oplus$$

3 Etude quantitative d'une pile:

• Une pile est le siège d'une réaction d'oxydoréduction spontanée entre les couples oxydoréducteurs qui sont présents dans les deux demi-piles.

• L'intensité du courant est égale à la quantité de charge électrique transportée par unité de temps. Si la transformation chimique a pour durée Δt: $I = \dfrac{Q}{\Delta t} \Rightarrow Q = I.\Delta t$.

Si n électrons sont échangés dans l'oxydoréduction, alors dans l'état d'avancement x de la transformation, on aura: $Q = N.e = n(e^-).N_A.e$. $\qquad Q = n(e^-).F$

n(e⁻): quantité de matière des électrons

Avec: $N_A = 6,02.10^{23} mol^{-1}$: Nombre d'Avogadro

$e = 1,6.10^{-19} C$: charge élementaire

• Le Faraday représente une mole de charges électriques élémentaires:

$F = N_A \times e$; $F = 9,65 \times 10^4 C/mol$.

4 Piles usuelles:

• Les piles les plus utilisées sont les piles alcalines et salines. De même f.é.m., mais de fonctionnements différent par la nature des réactifs, elles n'ont pas les mêmes usages.

Test de connaissanc

1 Mots manquants:

a- Lorsqu'une pile fonctionne, il y transfert ..... d'électrons.

b- Une pile est constituée de deux .....-..... reliées par un .....

c- Chaque demi-pile contient l' ..... et le ..... d'un des deux couples oxydant/réducteur mis en jeu.

d- Une demi-pile est composée d'une ..... qui plonge dans un .....

e- Le passage du courant est possible grâce aux mouvements des ..... de .....

f- La pile en fonctionnement est un système ..... équilibre. Le pile usée est un système en .....

Solution

1- a- spontanné
b- demi-pile ; pont salin
c- oxydant ; réducteur
d- électrode ; électrolyte
e- porteurs ; charge
f- hors ; équilibre.

2 **Vrai ou faux?**

a- Une pile convertit l'énergie électrique en énergie chimique. vrai ☐ faux ☐

b- Une pile ne fonctionne que si ses demi-piles sont reliées. vrai ☐ faux ☐

c- A l'anode a lieu une oxydation et à la cathode une réduction. vrai ☐ faux ☐

d- L'anode d'une pile constitue le pôle positif. vrai ☐ faux ☐

e- Une pile qui fonctionne constitue un système en équilibre. vrai ☐ faux ☐

f- Il est possible d'interpréter le fonctionnement d'une pile en connaissant uniquement le mouvement des porteurs de charges. vrai ☐ faux ☐

Solution

2- a- F ; b- V ; c- V
d- F ; e- F ; f- V.

3 **QCM:**

Pour chaque question, indiquer la (ou les) bonne (s) réponse (s).

1- Lors de son fonctionnement, une pile:

a- évolue par transfert direct d'électrons entre ses réactifs;

b- évolue vers un état d'équilibre;

c- transforme une partie de l'énergie chimique en énergie électrique.

2- Le bilan global de fonctionnement d'une pile:

a- est l'inverse de celui de la réaction qui se produit par transfert direct d'électrons;

b- est prévu par le critère d'évolution.

3- Les porteurs de charge:

a- sont des électrons dans les parties métalliques du circuit;

b- se déplacent dans le sens du courant à l'extérieur de la pile;

c- sont des électrons dans le pont salin;

d- sont des ions dans les solutions contenues dans la pile.

4- La quantité d'électricité mise en jeu par la pile:

a- dépend de l'intensité du courant débité;

b- s'exprime en coulomb.

5- L'électrode d'argent constitue pôle ⊕ de la pile cuivre-argent.

Le courant qui y circule pendant une durée Δt a une intensité notée I.

a- Le schéma conventionnel de cette pile s'écrit:

- $Ag_{(s)}/Ag^{+}_{(aq)} \;//\; Cu^{2+}_{(aq)}/Cu_{(s)}$
- $Cu_{(s)}/Cu^{2+}_{(aq)} \;//\; Ag^{+}_{(aq)}/Ag_{(s)}$
- $Cu^{2+}_{(aq)}/Cu_{(s)} \;//\; Ag^{+}_{(aq)}/Ag_{(s)}$

b- à la surface de l'électrode d'argent:

- il y a consommation du métal argent.
- il y a dépôt de métal argent.
- il n'y a ni consommation ni dépôt d'argent car elle est inerte.

Solutions

3-1- b

2- b

3- a et d.

4- a-b

5- a- $Cu/Cu^{2+}_{(aq)} \;//\; Ag^{+}_{(aq)}/Ag$

b- il y a dépôt du métal argent.

Exercices

2 La représentation symbolique d'une pile zinc-nickel s'écrit:

$$\ominus Zn_{(s)} | Zn^{2+}_{(aq)} | \, | Ni^{2+}_{(aq)} | Ni_{(s)} \oplus$$

On branche un voltmètre aux bornes de la pile: il mesure une tension $U = 0,53V$.

1- A quelle électrode est branchée la borne COM du voltmètre?

2- a- Les électrons rentrent-ils ou sortent-ils de l'électrode constituant le pôle positif?

b- La réaction qui se produit à ce pôle est-elle une réduction ou une oxydation?

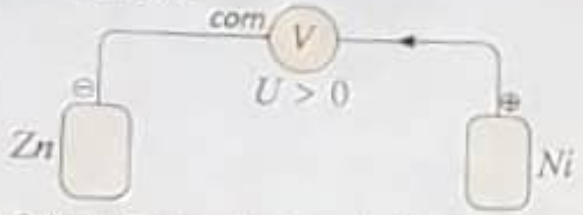
c- Déduire des réponses précédentes l'équation de la transformation spontanée qui a lieu dans la pile zinc-nickel.

3.a- Que se passe-t-il si on plonge une lame zinc dans une solution contenant des ions nickel $Ni^{2+}_{(aq)}$?

b- Si on plonge une lame de nickel dans une solution contenant des ions $Zn^{2+}_{(aq)}$?

Solution

1- L'électrode:



du fait que $U > 0$ donc la borne «COM» est relié au pôle ⊖ l'électrode de Zn.

2.a- Les électrons:

Le sens de déplacement des électrons est opposé au sens du courant donc, ils arrivent à l'électrode ⊕.

b- La réaction:

Au niveau du pôle ⊕ la cathode se produit une réduction.

c- Réaction chimique:

- Au niveau du pôle ⊕: électrode Ni.

$$Ni^{2+} + 2e^- = Ni$$

- Au niveau du pôle ⊖: électrode Zn.

$$Zn_{(s)} = Zn^{2+} + 2e^-$$

Réaction globale:

$$Ni^{2+}_{(aq)} + Zn_{(s)} = Ni_{(s)} + Zn^{2+}_{(aq)}$$

3.a- y'a-t-il une réaction?

Si on plonge une lame de zinc dans une solution de Ni^{2+}, il y a transfert direct des électrons et spontané selon la réaction. $Ni^{2+}_{(aq)} + Zn_{(s)} = Ni_{(s)} + Zn^{2+}_{(aq)}$

qui se manifeste par un dépôt de Nickel sur la lame de Zn.

b- y'a-t-il une réaction?

Aucune réaction spontanée ne se produit si on plonge une lame de nickel dans une solution de Zn^{2+}.

1 Soit le circuit représenté ci-après:

1- Quel est le sens du courant dans le circuit extérieur à la pile?

2- Quelle est la polarité de cette pile?

3- Préciser la nature des porteurs de charge dans les différentes sorties de ce circuit et indiquer le sens de leur déplacement.



4- Quelles sont les réactions qui se produisent à la surface des électrodes de cette pile?

Solution

1- Sens du courant:

L'ampèremètre indique une valeur de courant négative ($I < 0$) dont le courant entre par «Com» c'est-à-dire le sens du courant est de l'électrode Sn vers l'électrode Fe.

2- Polarité du pile:

L'électrode Sn est la cathode ⊕ l'électrode Fe est l'anode ⊖.

3- Porteurs de charge:

Dans le circuit extérieur et les électrodes ce sont les électrons qui se déplacent dans le sens opposé au courant.

- Dans les solutions et le pont salins ce sont les ions NH_4^+ ; NO_3^- ; Fe^{2+} ; Sn^{2+} ... les cations se déplacent dans le sens du courant alors que les anions se déplacent dans le sens opposé.

4- Les réactions:

- Au niveau de la cathode Sn : se produit une réduction $Sn^{2+}_{(aq)} + 2e^- = Sn_{(s)}$.
- Au niveau de l'anode Fe : se produit une oxydation: $Fe_{(s)} = Fe^{2+}_{(aq)} + 2e^-$.

1 On constitue une pile aluminium-argent mettant en jeu les couples oxydoréducteurs $Al^{3+}_{(aq)}/Al_{(s)}$ et $Ag^+_{(aq)}/Ag_{(s)}$. En branchant un circuit extérieur à ses bornes contenant un ampèremètre et un conducteur ohmique, on mesure pendant 2,0h, un courant continu d'intensité $I = 20mA$. La réaction spontanée a lieu entre les ions argent et l'aluminium.

1- Ecrire l'équation de l'oxydoréduction qui se produit dans la pile.

2- Dresser un tableau d'avancement des quantités de matière présentes dans l'état du système, puis dans l'état d'avancement x.

3- Au bout d'une durée Δt, le système est dans l'état d'avancement x. Quelle est l'expression de la quantité d'électricité transportée en fonction de I et de Δt?

4- Quelle est son expression en fonction de x et de F, le Faraday?

5- Calculer l'avancement x du système en utilisant les relations précédentes et les données de l'énoncé.

6- En déduire la masse d'argent produite au bout de 2,0h de fonctionnement.

Données: $1F = 9,65 \times 10^4 C$; $M_{Ag} = 108 g.mol^{-1}$.

Solution

1- Equation de la réaction:

$$3 \times (Ag^+_{(aq)} + e^- = Ag_{(s)})$$

$$\underline{Al_{(s)} = Al^{3+}_{(aq)} + 3e^-}$$

$$3Ag^+_{(aq)} + Al_{(s)} = 3Ag_{(s)} + Al^{3+}_{(aq)}$$

2- Tableau d'évolution:

	$3Ag^+_{(aq)} + Al_{(s)} = 3Ag_{(s)} + Al^{3+}_{(aq)}$					$3e^-$
à $t = 0$	0	n_1	n_2	n_3	n_4	0
à t	x	$n_1 - 3x$	$n_2 - x$	$n_3 + 3x$	$n_4 + x$	$3x$

3- Expression de Q:

On a: $Q = I.\Delta t$

4- Expression de Q:

On a: $Q = n(e^-).F$

et: $n(e^-) = 3x$

donc: $Q = 3x.F$

5- Calcul de x:

On a: $I.\Delta t = 3x.F$

Donc: $x = \frac{I.\Delta t}{3F}$

A.N.:

$x = \frac{20.10^{-3}.2.3600}{3.9,65.10^4} \simeq 4,97.10^{-4} mol$

6- Calcul de $\Delta m(Ag)$:

du tableau d'évolution on a:

$\Delta n(Ag) = 3x$

$\Delta m(Ag) = 3x.M(Ag)$

A.N.: $\Delta m(Ag) = 3.4,97.10^{-4}.108$

$\Delta m(Ag) = 0,161g$

4 Dans un bécher de $250mL$, on verse $V_1 = 50mL$ d'une solution de sulfate de cuivre $(Cu^{2+} + SO_4^{2-})$ de concentration $c_1 = 0,010 mol.L^{-1}$ et $V_2 = 50mL$ d'une solution de nitrate d'argent $(Ag^+ + NO_3^-)$ de concentration $c_2 = 0,010 mol.L^{-1}$. Dans ce mélange homogène, on plonge une lame de cuivre et une plaque d'argent.

Données:

réaction entre	$Ag^+_{(aq)}$ et $Cu_{(s)}$	$Ag_{(s)}$ et $Cu^{2+}_{(aq)}$
constante d'équilibre	$K_1 = 2 \times 10^{15}$	$K_2 = 6 \times 10^{-16}$

1- prévoir l'évolution spontanée du système $\{Cu_{(s)}; Cu^{2+}_{(aq)}; Ag_{(s)} \text{ et } Ag^+_{(aq)}\}$.

2- prévoir ce que l'on observa lorsque l'expérience sera menée.

3- Construire le tableau d'évolution en considérant l'état initial et l'équilibre.

4- Calculer la valeur du taux d'avancement final de la réaction qui se produit. Conclure.

5- En s'aidant des réponses précédentes, prévoir ce qu'on devrait observer si on séparait les deux couples oxydant/réducteur par un vase poreux, le fil de cuivre et la plaque d'argent reliés par un circuit extérieur.

Solution

1- Evolution:

Les étapes des raisonnements sont regroupées dans le tableau ci-dessous.

	$Cu_{(s)} + 2Ag^+_{(aq)} \rightleftharpoons Cu^{2+}_{(aq)} + 2Ag_{(s)}$	$2Ag_{(s)} + Cu^{2+}_{(aq)} \rightleftharpoons 2Ag^+_{(aq)} + Cu_{(s)}$
K	2×10^{15}	6×10^{-16}
$Q_{r,i}$	$2000 < K_1$	$5.10^{-4} > K_2$

En appliquant le critère d'évolution spontanée, on constate que le système chimique évolue spontanément par réaction entre les ions $Ag^+_{(aq)}$ et le cuivre métallique pour donner de l'argent métallique et des ions $Cu^{2+}_{(aq)}$.

2- Observation:

On observe la formation d'un dépôt d'argent sur la lame de cuivre et la couleur bleue de la solution devient plus intense.

3- Le tableau d'évolution:

Equation		$Cu_{(s)} + 2Ag^{+}_{(aq)} \longrightarrow Cu^{2+}_{(aq)} + 2Ag_{(s)}$			
état	avancement	quantités de matière (mol)			
initial	$x = 0$	excès	$5,0 \times 10^{-4}$	$5,0 \times 10^{-4}$	excès
à l'équilibre	$x = x_{éq}$	excès	$5,0 \times 10^{-4} - 2x_{éq}$	$5,0 \times 10^{-4} - x_{éq}$	excès

4- A l'équilibre, on a: $K_1 = \dfrac{[Cu^{2+}]_{éq}}{[Ag^{+}]^2_{éq}}$.

Pour calculer l'avancement à l'équilibre, il faut résoudre l'équation:

$K_1 = \dfrac{(5,0 \times 10^{-4} + x_{éq})}{(5,0 \times 10^{-4} - 2x_{éq})^2}$ ce qui donne comme solutiion: $x_{éq} = 2,5 \times 10^{-4} mol$.

L'avancement maximal est donné par la relation: $(5 \times 10^{-4}) - 2x_{max} = 0$;

soit: $x_{max} = 2,5 \times 10^{-4} mol$.

La réaction totale.

donc: $\tau = \dfrac{x_{éq}}{x_{max}} = 1$

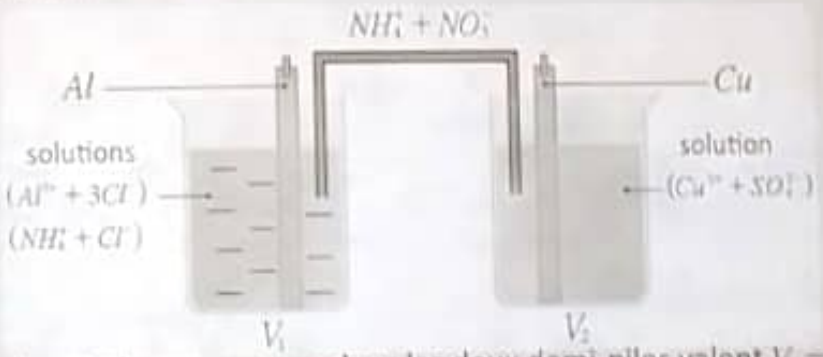
5- Observation:

Dans ce cas, la transformation est identique à celle étudiée à la question-1. L'équation de la réaction s'écrit:

$$Cu_{(s)} + 2Ag^{+}_{(aq)} \longrightarrow Cu^{2+}_{(aq)} + 2Ag_{(s)}.$$

On observe un dépôt d'argent sur l'électrode d'argent (et non plus de cuivre) ; la couleur bleue de la solution de sulfate de cuivre devient plus intense. Le fil de cuivre est consommé.

5 Réalisons la pile suivante:



Les volumes de solutions aqueuses dans les deux demi-piles valent $V_1 = V_2 = 50mL$.

$[Cu^{2+}]_i = 0,10 mol.L^{-1}$ et $[Al^{3+}]_i = 0,010 mol.L^{-1}$.

Lorsqu'on branche un voltmètre électronique avec sa borne COM reliée à l'électrode d'aluminium, on mesure une différence de potentiel $U = +1,6V$.

1- Quelle est la polarité de cette pile?

2- On relie la pile à un petit moteur électrique. quel est le sens du courant dans le circuit? Préciser la nature et le sens de déplacement des porteurs de charges dans ce circuit.

3- Donner les équations des réactions qui se produisent aux électrodes.

4- La pile fonctionne pendant $1,0h$ en débitant un courant d'intensité $I = 50mA$.

Quelles sont les variations de la masse d'aluminium métallique et de la concentration en ions Cu^{2+} ?

Solution

1- Polarité:

Le branchement du voltmètre indique que l'électrode Al constitue «l'anode» ⊖ tandis que l'électrode Cu est «la cathode» ⊕.

2- Sens du courant:



• Sens du courant: de la cathode Cu vers l'anode Al via le moteur.

Dans le circuit extérieur	Dans les solutions	Pont salin
Electrons dans le sens opposé au courant.	• Al^{3+} ; NH_4^+ ; Cu^{2+} (sens du courant) • Cl^- ; SO_4^{2-} (sens opposé)	• NH_4^+ (sens courant) • NO_3^- (sens opposé)

• Porteur de charge:

3- Equation de réaction:

- Au niveau de la cathode ⊕ Cu:

réduction: $(Cu^{2+}_{(aq)} + 2e^- \rightarrow Cu_{(s)}) \times 3$

- Au niveau de l'anode ⊖ Al:

oxydation: $(Al \rightarrow Al^{3+} + 3e^-) \times 2$

• Equation globale:

$$3Cu^{2+}_{(aq)} + 2Al_{(s)} \rightarrow 3Cu_{(s)} + 2Al^{3+}_{(aq)}$$

4- Détermination de $\Delta m(Al)$ et $\Delta[Cu^{2+}]$:

	$3Cu^{2+}_{(aq)} + 2Al_{(s)} \rightarrow 3Cu_{(s)} + 2Al^{3+}_{(aq)}$					$6e^-$
E.I	0	n_1	n_2	n_3	n_4	0
Int	x	$n_1 - 3x$	$n_2 - 2x$	$n_3 + 3x$	$n_4 + 2x$	$6x$
F	x_f	$n_1 - 3x_f$	$n_2 - 2x_f$	$n_3 + 3x_f$	$n_4 + 2x_f$	$6x_f$

Calcul de $\Delta m(Al)$:

On a: $\Delta m(Al) = n_2 - 2x_f - n_2 = -2x_f$

donc: $\Delta m(Al) = -2x_f.M(Al)$

On a: $Q = I.\Delta t = n(e^-).F$

$$\Rightarrow n(e^-) = \frac{I.\Delta t}{F}$$

et: $$n(e^-) = 6x_f \Leftrightarrow x_f = \frac{n(e^-)}{6}$$

d'où: $$x_f = \frac{I.\Delta t}{6F}$$

A.N.:

$$x_f = \frac{50 \times 10^{-3} \times 3600}{6 \times 9,65 \times 10^4} = 3,108 \times 10^{-4} mol$$

Donc: $\Delta m(Al) = -2x_f.M(Al)$

A.N.:

$\Delta m(Al) = -2 \times 3,108 \times 10^{-4} \times 27$

$\Delta m(Al) = -0,016g$.

• Calcul de $\Delta[Cu^{2+}]$:

On a: $\Delta n(Cu^{2+}) = n_1 - 3x_f - n_1$

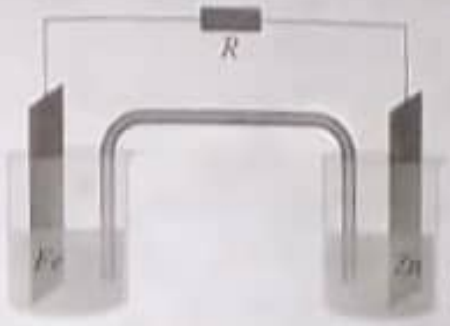
$\Delta n(Cu^{2+}) = -3x_f$

$\Delta[Cu^{2+}].V_1 = -3x_f$

$$\Delta[Cu^{2+}] = -\frac{3x_f}{V_1}$$

A.N.: $\Delta[Cu^{2+}] = -0,0186mol/l$.

On réalise l'expérience schématisée ci-après:



$[Fe^{2+}] = 0,10 mol.L^{-1}$ $[Zn^{2+}] = 0,10 mol.L^{-1}$

1- Ecrire l'équation des réactions ayant lieu à la surface de chaque plaque métallique sans préjuger du sens spontané. En déduire l'équation de la réaction d'oxydoréduction.

2- Appliquer le critère d'évolution spontanée et conclure.

3- Qu'observe-t-on au niveau des électrodes et des électrolyte?

Constantes d'équilibre:

réaction entre $Fe_{(s)}$ et $Zn^{2+}_{(aq)}$	$K_1 = 1,4 \times 10^{-11}$
réaction entre $Fe^{2+}_{(aq)}$ et $Zn_{(s)}$	$K_2 = 7 \times 10^{13}$

• Les ions $Fe^{2+}_{(aq)}$ sont légèrement verts ; les autres ions cités sont incolores.

4- Donner la représentation conventionnelle de la pile.

Solution

1- Equations des réactions:

- au niveau de l'électrode Zn :

$$Zn_{(s)} = Zn^{2+}_{(aq)} + 2e^-$$

- au niveau de l'électrode Fe :

$$Fe^{2+}_{(aq)} + 2e^- = Fe_{(s)}$$

L'équation globale:

$$Zn_{(s)} + Fe^{2+}_{(aq)} = Zn^{2+}_{(aq)} + Fe_{(s)}$$

2- Critère d'évolution:

Calculons $Q_{r,i}$ relatif à l'équation:

$$Q_{r,i} = \frac{[Zn^{2+}]_i}{[Fe^{2+}]_i}$$

$$Q_{r,i} = 1$$

alors: $Q_{r,i} < K = 7.10^{13}$

Donc le système évolue dans le sens direct.

3- Observations:

On a: $K > 10^4$ donc la réaction est quasi totale.

- Au niveau de l'électrode Fe:

il y aura dépôt de fer et disparition de la coloration vertes caractérisant les ions Fe^{2+}.

- Au niveau de l'électrode Zn :

On observe dégradation au niveau de la lame du Zinc et il y aura apparition des ions Zn^{2+} qui sont incolores.

4- Représentation conventionnelle:

$$\ominus Zn|Zn^{2+}||Fe^{2+}|Fe_{\oplus}$$

On étudie une pile fonctionnant avec les couples oxydant/réducteur: $Al^{3+}_{(aq)}/Al_{(s)}$ et $Zn^{2+}_{(aq)}/Zn_{(s)}$

L'équation de la réaction correspondant à la transformation spontanée dans la pile s'écrit: $2Al_{(s)} + 3Zn^{2+}_{(aq)} \rightleftharpoons 2Al^{3+}_{(aq)} + 3Zn_{(s)}$ L'intensité I lue à l'ampèremètre vaut $10,0mA$.

On laisse la pile fonctionner pendant 12 heures.

1- Calculer la quantité de matière $n(e^-)_{transf}$ d'électrons transférés spontanément pendant cette durée de fonctionnement.

2- En s'aidant d'un tableau d'évolution, calculer la quantité de matière de zinc formé.

3- En s'aidant d'une tableau d'évolution, calculer la quantité de matière d'aluminium consommé. **On donne:** $F = 9,65.10^4 C/mol$.

Solution

1- Calcul de $n(e^-)_{transf}$:

On a: $Q = I\Delta t$ et $Q = n(e^-).\mathcal{F}$

donc: $n(e^-) = \frac{I\Delta t}{\mathcal{F}}$

A.N.: $n(e^-) = \frac{10.10^{-3}.12.3600}{9,65.10^4}$

$n(e^-) \simeq 4,5.10^{-3} mol$

2- Calcul de $\Delta n(Zn)$:

Dressons le tableau d'évolution:

	$2Al_{(s)} + 3Zn^{2+}_{(aq)} \longrightarrow 2Al^{3+}_{(aq)} + 3Zn_{(s)}$					$6e^-$
à $t = 0$	0	n_1	n_2	n_3	n_4	0
à t	x	$n_1 - 2x$	$n_2 - 3x$	$n_3 + 2x$	$n_4 + 3x$	$6x$

Donc: $\Delta n(Zn) = 3x$ et on a:

$n(e^-) = 6x$

Donc: $\Delta n(Zn) = \frac{n(e^-)}{2}$

A.N.: $\Delta n(Zn) = \frac{4,6.10^{-3}}{2}$

$\Delta n(Zn) = 2,25.10^{-3} mol$

3- Calcul de $\Delta n(Al)$:

On a: $\Delta n(Al) = -2x$

donc: $\Delta n(Al) = -\frac{n(e^-)}{3}$

A.N.: $\Delta n(Al) = -\frac{4,5.10^{-3}}{3}$

$\Delta n(Al) = -1,5.10^{-3} mol$

On considère une pile fer-étain mettant en jeu les couples Sn^{2+}/Sn et Fe^{2+}/Fe

1- Faire un dessin d'une telle pile.

2- chaque demi-pile contient $100mL$ de solution de sulfate du cation métallique correspond à $C_0 = 0,10 mol.L^{-1}$.

La réaction pouvant se produire a pour équation: $Fe^{2+}_{(aq)} + Sn_{(s)} \longrightarrow Fe_{(s)} + Sn^{2+}_{(aq)}$

Se constante d'équilibre vaut $K = 6,8.10^{-1}$. Quel est le sens de la transformation qui se produit lorsque la pile débite?

3- Quelle est la polarité de cette pile?

Donner son schéma conventionnel.

4- La pile débite un courant d'intensité constante $I = 8,5mA$ pendant $5,0h$.

a- Quelle est la quantité d'électricité mise en jeu?
b- Quelles sont les concentrations en ions étain (II) et fer (II) à la fin de cette expérience? **On donne:** $\mathcal{F} = 9,65.10^4 C/mol$.

Solution

1- Schéma de la pile:



2- Sens de transformation:

On calcule $Q_{r,i}$ tel que: $Q_{r,i} = \dfrac{[Sn^{2+}]_i}{[Fe^{2+}]_i} = 1$

donc: $Q_{r,i} > K$, la transformation se fait dans le sens inverse.

3- Polarité de la pile:

Au niveau de l'électrode Fe, il y a réduction donc cette électrode constitue le pôle $\ominus$ et celle de Sn le pôle $\oplus$.

Le schéma conventionnel:

$$^{\ominus}Fe\,;Fe^{2+}\,;Sn^{2+}\,;Sn^{\oplus}$$

4.a- Calcul de Q:

On a: $Q = I.\Delta t$; $Q = 8,5.10^{-3}.5.3600$

$$Q = 153C$$

b- Les concentrations $[Fe^{2+}]$ et $[Sn^{2+}]$:

Dressons le tableau d'évaluation:

	$Fe^{2+}_{(s)} + Sn^{2+}_{(aq)} \longrightarrow Fe^{2+}_{(aq)} + Sn_{(s)}$					$2e^-$
à $t=0$	0	n_1	n_2	n_3	n_4	0
à t_f	x_f	$n_1 - x_f$	$n_2 - x_f$	$n_3 + x_f$	$n_4 + x_f$	$2x_f$

avec: $n(e^-) = \dfrac{Q}{\mathcal{F}} = 2x_f$;

$$x_f = \frac{Q}{2\mathcal{F}}$$

A.N: $x_f = \dfrac{153}{2.9,65.10^4} \approx 7,93.10^{-4} mol$

Donc: • $[Fe^{2+}] = \dfrac{n_3 + x_f}{V} = C_0 + \dfrac{x_f}{V}$

$$= 0,10 + \frac{7,93.10^{-4}}{100.10^{-3}}$$

$$\simeq 0,108 mol/L$$

• $[Sn^{2+}] = \dfrac{n_2 - x_f}{V} = C_0 - \dfrac{x_f}{V}$

$$= 0,10 - \frac{7,93.10^{-4}}{100.10^{-3}}$$

$$\simeq 0,092 mol/L$$

L'équation de la réaction d'oxydoréduction de la pile étain-cuivre s'écrit:

$$Sn(s) + Cu^{2+}(aq) \longrightarrow Sn^{2+}(aq) + Cu(s)$$

Les quantités initiales en étain et en ions $Cu^{2+}(aq)$ sont égales à $n_i = 1,0 \times 10^{-2} mol$.

L'intensité du courant débité par la pile est égale à $I = 9,7\ mA$ pendant toute la durée de fonctionnement de la pile.

1- En s'aidant d'un tableau d'évolution, calculer la quantité de matière $n(e^-)_{max}$ d'électrons transférés spontanément pendant toute la durée de vie de la pile.

2- Calculer la quantité d'électricité maximale débitée par la pile.

3- Calculer la durée de vie de cette pile.

Donnée: $1\ \mathcal{F} = 9,65 \times 10^4 C.mol^{-1}$.

Solution

1- Calcul de $n(e^-)_{max}$:

On dresse le tableau d'évolution:

	$Sn(s) + Cu^{2+}_{(aq)} \longrightarrow Sn^{2+}_{(aq)} + Cu_{(s)}$					$2e^-$
à $t = 0$	0	n_1	n_2	n_3	n_4	0
à t_f	t_f	$n_1 - x_f$	$n_2 - x_f$	$n_3 + x_f$	$n_4 + x_f$	$2x_f$

tel que $x_f = n_1 = n_2 = 10^{-3}$ et on a:

$n(e^-)_{max} = 2x_f$

Donc: $n(e^-) = 2.10^{-3} mol$.

2- Calcul de Q_{max}

On a: $Q_{max} = n(e^-)_{max}.\mathcal{F}$.

$Q_{max} = 2.10^{-3}.9,65.10^4$

$Q_{max} = 1930\,C$

3- Calcul de Δt_{max} :

On a: $Q_{max} = I.\Delta t_{max}$

$\Delta t_{max} = \dfrac{Q_{max}}{I}$

A.N.: $\Delta t_{max} = \dfrac{1930}{9,7.10^{-3}}$

$= 198969\,s$

$\Delta t_{max} \simeq 55h\,16\,\min\,9s$.

10 On considère la pile obtenue en reliant par un pont salin une demi-pile constituée d'une solution de sulfate de cuivre à $C = 0,10\,mol.L^{-1}$ dans laquelle plonge une lame de cuivre bien décapée et une demi-pile constituée par une solution de sulfate de fer (II), $(Fe^{2+} + SO_4^{2-})$, et de sulfate de fer (III), $(2\,Fe^{3+} + 3SO_4^{2-})$, dans laquelle plonge une lame de platine et telle que $[Fe^{2+}]_i = [Fe^{3+}]_i = 0,10\,mol.L^{-1}$. Lorsque la pile débite, des réactions se produisent à la surface des électrodes:

- à l'électrode de cuivre, le cuivre est oxydé en ions $Cu^{2+}(aq)$.
- à l'électrode de platine, les ions $Fe^{3+}(aq)$ sont réduits en ions $Fe^{2+}(aq)$.

1- Ecrire l'équation de la réaction de fonctionnement de la pile.

2- Quel est le mouvement des différents porteurs de charges dans le circuit?

3- En déduire le sens du courant et la polarité de cette pile.

4.a- Donner l'expression de la constante d'équilibre K qui est associée à la réaction de fonctionnement de cette pile.

b- Quelle est la valeur du quotient de réaction initial $Q_{r,i}$ du système constituant la pile? Situer $Q_{r,i}$ par rapport à K.

Solution

1- Equation de la réaction:

Au niveau de la cathode $\oplus$:

$$Fe^{3+}_{(aq)} + e^- \rightleftharpoons Fe^{2+}_{(aq)}$$

Au niveau de l'anode $\ominus$:

$$Cu_{(s)} \rightleftharpoons Cu^{2+} + 2e^-$$

Equation globale:

$$2Fe^{3+}_{(aq)} + Cu(s) \longrightarrow 2Fe^{2+}_{(aq)} + Cu^{2+}_{(aq)}$$

2- Mouvements de porteurs de charge:

- Les électrons se déplacent de l'électrode Cu vers l'électrode de platine (Pt) à travers le circuit extérieur

Les ions:

• Les cations Cu^{2+}, Fe^{2+}, Fe^{3+} se déplacent en solutions dans le sens opposé à celui des électrons.

• Les anions SO_4^{2-} se déplacent en solution dans le sens des électrons.

3- Sens du courant:



Le courant passe de l'électrode (Pt) vers l'électrode Cu.

4.a- Expression de K

On a: $K = Q_{r,eq} = \dfrac{[Fe^{3+}]^2[Cu^{2+}]}{[Fe^{2+}]^2}$

b- Quotient de réaction:

$$Qr_i = \frac{[Fe^{3+}]^2[Cu2+]}{[Fe^{2+}]^2}$$

A.N.: $Qr_i = \dfrac{(0,10)^2(0,10)}{(0,10)^2} = 0,10$

Le système se déplace spontanément dans le sens direct, donc: $Qr_i < K$.

On considère une pile qui contient d'une part une suspension de zinc dans un gel d'hydroxyde de potassium $(K^+(gel) + HO^-(gel))$ et d'autre part une électrode en carbone poreux en liaison avec des trous d'accès pour l'oxygène de l'air. Les couples qui interviennent lors du fonctionnement de la pile sont $ZnO_{(s)}/Zn_{(s)}$ et $O_2(g)/HO^-(gel)$.

L'intensité du courant débité par cette pile est $I = 0,80mA$; la quantité maximale d'électricité $Q_{max} = 2,2.10^3 C$.

1- Ecrire les équations des réactions aux électrodes, l'équation de la réaction d'oxydoréduction puis le schéma conventionnel de cette pile.

2- Déterminer la nature du réactif limitant dont l'épuisement conduit à l'état d'équilibre de la pile.

3- Calculer la durée de vie de cette pile.

4- En s'aidant d'un tableau d'évolution:

- Calculer la masse de zinc présente dans une telle pile neuve.
- Calculer le volume d'air nécessaire au fonctionnement de cette pile.

Données: • Masse molaire atomique: $M(Zn) = 65,4\ g.mol^{-1}$.

• L'air est composé à 20% de dioxgène.

• Volume molaire d'un gaz: $V_m = 24\ L.mol^{-1}$.

Solution

1- Les équations:

• Au niveau de la cathode: ⊕

Il y a réduction de l'oxydant O_2

$$O_{2(g)} + 2H_2O_{(l)} + 4e^- \rightleftharpoons 4HO^-_{(aq)}$$

• Au niveau de l'anode ⊖.

Il y a oxydation:

$$2\times(Zn_{(s)} + 2HO^-_{(aq)} \rightleftharpoons ZnO_{(s)} + H_2O_{(l)} + 2e^-)$$

L'équation globale:

$$O_{2(g)} + 2Zn_{(s)} \longrightarrow 2ZnO_{(s)}$$

• Le schéma conventionnel:

$$\ominus\ Zn/ZnO//O_2/HO^-/C\ \oplus$$

2- Le réactif limitant:

- C'est le zinc (Zn), puisque la pile au cours de son fonctionnement est alimen-

tée de manière continue par O_2.

3- La durée de vie de la pile:

On a: $Q_{max} = I\Delta t_{max}$

Donc: $\Delta t_{max} = \frac{Q_{max}}{I}$.

A.N.:

$$\Delta t_{max} = 2,2\frac{10^5}{0,8\times10^{-4}} = 2,75\times10^9 s$$
$$= 31,82\ Jours$$

4- Tableau d'évolution:

		$O_2 + 2Zn \longrightarrow 2ZnO$		
E.I	O	n_1	n_2	n_3
E.Int	x	$n_1 - x$	$n_2 - 2x$	$n_3 + 2x$
E.F	x_m	$n_1 - x_m$	$n_2 - 2x_m$	$n_3 + 2x_m$

• La masse de Zinc (Zn):

On a: $n_2 - 2x_{max} = 0 \Longrightarrow n_2 = 2x_{max}$

$$Q_{max} = n_{max}(e^-).$$

$$n_{max}(e^-)F = I\times\Delta t \Longrightarrow n_{max}(e^-) = \frac{I\Delta t_{max}}{F}$$

Avec: $n(e^-) = 4x_{max} \Longrightarrow \frac{n(e^-)}{4} = x_{max}$.

Par suite: $x_{max} = \frac{I\times\Delta t_{max}}{4F}$

et $n_2 = n(Zn) = \frac{2I\Delta t}{4F}$

Donc: $m(Zn) = \frac{I\Delta t}{2F}\times M(Zn)$

A.N.:

$$m(Zn) = \frac{0,8\times10^{-4}\times2,75\times10^4}{2\times9,65\times10^4}\times65,4$$

$$m(Zn) = 0,74\ g$$

Calcul de $V(O_2)$:

On a:

$$n_1 - x_{max} = 0 \Longrightarrow n_1 = n(O_2) = \frac{V(O_2)}{V_m}$$
$$V(O_2) = x_{max}\times V_m$$
$$V(O_2) = \frac{I\Delta t_{max}}{4F}\times V_m$$

A.N.:

$$V(O_2) = \frac{0,80\times10^{-4}\times2,75\times10^4}{4\times9,65\times10^4}\times24$$
$$= 0,16\ \ell$$

Donc le volume de l'air nécessairement

$$V_{air} = 5\times V(O_2) = 0,68\ \ell.$$

12 La pile la plus performante que Volta construisit était constituée de l'empilement des «étages» (disque de zinc- disque de papier imbibé d'eau salée légèrement acidifié ; disque d'argent).

Le pied et la tête de cette «pile» étaient des disques d'argent. La réaction d'oxydoréduction de fonctionnement de chaque ensemble a pour équation:

$$2Zn(s) + O_2(g) + 4H^+(aq) = Zn^{2+}(aq) + 2H_2O(\ell).$$

Données: • Masses molaires atomiques $(g.mol^{-1})$:

$M(H) = 1,0$; $M(O) = 16$; $M(Zn) = 65$.

• Volume molaire des gaz: $V_m = 24\ L.mol^{-1}$.

• Masse volumique de l'eau: $\rho = 2,0\ g.cm^{-3}$; $F = 9,65.10^4\ mol/L$

1.a Ecrire l'équation de réactions à l'anode et à la cathode.

b-Quel était le rôle des disques en argent? Comment qualifie-t-on de telles électrodes?

c- de l'empilement?

2- Cette pile pouvait débiter un courant d'intensité $I = 10\ mA$ pendant 10 heures.

a- Calculer la quantité de matière $n(e^-)_{max}$ d'électrons transférés spontanément pendant cette durée.

b- A l'aide d'un tableau d'évolution, calculer la masse de zinc consommé.
c- A l'aide d'un tableau d'évolution, calculer:
- Le volume de dioxygène consommé ;
- Le volume d'air consommé sachant que l'air est constitué à 20% en dioxygène ;
- Le volume d'eau ainsi produit.

Solution

1.a- Equations des réactions
- Au niveau de la cathode: il y a réduction de l'oxygène:

$$O_2 + 4H^+ + 4e^- \rightleftharpoons 2H_2O.$$

- Au niveau de l'anode: il y a oxydation du Zn

$$Zn(s) \rightleftharpoons Zn^{2+}_{(aq)} + 2e^-.$$

b- Rôle des disques en argent:
Ils jouent le rôle des électrodes qui permettent de relier les solutions életrolytiques au circuit extérieur àfin de faire fonctionner la pile, De telles électrodes sont inertes.

2.a- Calcul de $n(e^-)_{max}$:
Dressons le tableau d'évolution:

	$2Zn_{(s)} + O_2(g) + 4H^+ \longrightarrow 2Zn^{2+} + 2H_2O_{(l)}$						$4e^-$
à $t=0$	0	n_1	n_2	Excés	n_3	Excés	0
à t_f	x_f	$n_1 - 2x_f$	$n_2 - x_f$	//	$n_3 + 2x_f$	//	$4x_f$

$$n(e^-)_{max} = 4x_f$$

avec: $Q = n(e^-)_{max}.F = I.\Delta t$

$$n(e^-)_{max} = \frac{I.\Delta t}{F}$$

A.N.: $n(e^-)_{max} = \frac{10.10^{-3}.10 \times 3600}{9,65.10^4}$

$$n(e^-)_{max} = 3,73.10^{-3} mol$$

b- Calcule de $\Delta m(Zn)$.
On a: $|\Delta n(Zn)| = +2x_f$

$$|\Delta m(Zn)| = +2\left(\frac{n(e^-)}{4}\right).M(Zn)$$

A.N.: $|\Delta m(Zn)| = +2.\frac{3,73.10^{-3}}{4}.65$

$$|\Delta m(Zn)| \simeq 0,121g$$

c- Calcul de $\Delta V(O_2)$ et V_{air} et $V(H_2O)$.
On a: $|\Delta n(O_2)| = x_f$

$$\left|\frac{\Delta V(O_2)}{V_M}\right| = x_f$$

$$|\Delta V(O_2)| = x_f.V_M.$$

A.N.: $|\Delta V(O_2)| = \frac{3,73.10^{-3}}{4}.24$

$$\simeq 0,0224\ L \simeq 22,4\ mL$$

On a: $\Delta V(O_2) = \frac{20}{100}.V_{air}$

$$V_{air} = 5\Delta V(O_2)$$

A.N.: $V_{air} \approx 112\ mL.$

D'après le tableau on a:

$$\Delta n(H_2O) = 2x_f$$

$$\Delta m(H_2O) = \frac{n(e^-)}{2}.M(H_2O)$$

$$\rho.V(H_2O) = \frac{n(e^-)}{2}.M(H_2O)$$

$$V(H_2O) = \frac{n(e^-).M(H_2O)}{2\rho}$$

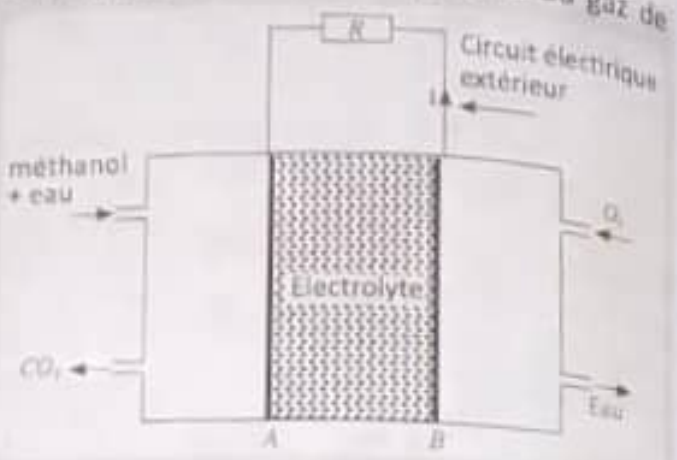
A.N.: $V(H_2O) = \frac{3,73.10^{-3}.18}{2.1}$

$$V(H_2O) \simeq 0,0336\ L \simeq 33,6\ mL$$

Etude d'une pile à combustible: (Bac PC Juin 2010)

a pile à combustible est constituée de deux compartiments séparés par un électro-te acide qui joue le rôle d'un pont salin ionique et aussi de deux électrodes A et B.

Lors du fonctionnement de la pile on y ajoute du méthanol liquide et du gaz de dioxygène (Voir-figure).



Données:

- Constante de Faraday:

$$F = 96500 C.mol^{-1}$$

- La masse volumique du méthanol liquide: $\rho = 0,97\ g.cm^{-3}$

- La masse molaire du méthanol: $M(CH_3OH) = 32\ g.mol^{-1}$.

- Les couples (oxydant /réducteur) mis en jeu dans cette transformation sont:

$(O_{2(g)}/H_2O_{(l)})$ et $(CO_{2(g)}/CH_3OH_{(l)})$

Durant le fonctionnement de la pile, au niveau d'une électrode, on a une transformation chimique modélisée par l'équation suivante:

$$CH_3OH + H_2O \longrightarrow CO_2 + a.H^+ + b.e^-$$

1- Déterminer les coefficients a et b.

2- Indiquer sur quels électrodes A ou B, cette réaction a eu lieu. Justifier votre réponse.

3- Ecrire l'équation modélisant la réaction chimique au niveau de l'autre électrode et nommer les électrodes A et B.

4- La pile fournie au circuit électrique externe, un courant électrique d'intensité $I = 45\ A$, pendant la durée $\Delta t = 1h30\,\text{min}$ de fonctionnement.

Déterminer le volume V du méthanol consommé durant le temps Δt.

Solution

1- Détermination des coefficients a et b

$$CH_3OH + H_2O \longrightarrow CO_2 + aH^+ + be^-$$

La conservation du nombre d'hydrogène:

$4 + 2 = a$; donc: $a = 6$

La conservation de charge:

$$a - b = 0 \Longleftrightarrow a = b = 6$$

2- L'électrode.

Le sens du courant indiqué dans le schéma montre que l'électrode A est siège d'oxydation donc la réaction se produit à l'électrode A.

3- Réaction au niveau de B.

Au niveau de B il y a réduction de O_2

$$O_{2(g)} + 4H^+ + 4e^- \rightleftharpoons 2H_2O_{(l)}$$

- L'électrode A est «Anode»

- L'électrode B est «Cathode».

4- Calcul de V :

Dressons le tableau d'avancement:

		$CH_3OH + H_2O \longrightarrow CO_2 + 6H^+ + 6e^-$				
E.I	O	n_1	Excès	O	Excès	0
E.Int	x	$n_1 - x$	//	x	//	$6x$
E.F	x_{max}	$n_1 - x_{max}$	//	x_{max}	//	$6x_{max}$

Lors du fonctionnement de la pile, on a: $n_1 = x_{max}$ et $Q = I\,.\,\Delta t = n(e^-).F$.

donc: $n(e^-) = \frac{I\,\Delta t}{F}$

avec: $n(e^-) = 6x_{max} \Rightarrow x_{max} = \frac{n(e^-)}{6}$

et $n_i = \frac{m}{M} = \frac{\rho V}{M}$

donc: $\frac{\rho V}{M} = \frac{n(e^-)}{6}$

$V = \frac{I\,\Delta t\,M}{6\,F\,\rho}$

A.N.: $V = \frac{45 \times 90 \times 60 \times 32}{6 \times 9,65 \times 10^4 \times 0,97}$

$= 13,8\ cm^3$

Une pile plate débite un courant d'intensité constante $I = 20\ mA$ pendant une durée de 80 heures.

L'on associe les deux couples $ox/red.$ Zn^{2+}/Zn et $MnO_2/MnO(OH)$.

Le dioxyde de manganèse s'y réduit en milieu gélifié acidifié.

Données: masse molaire atomique (en $g.mol^{-1}$): $Mn = 55; O = 16; Zn = 65,4$.

1- Préciser les deux bornes négative et positive, puis les équations se produisant aux électrodes.

2- Donner l'équation globale de fonctionnement.

3- Préciser la quantité d'électricité Q mise en jeu par la pile.

4- En déduire les masses minimales de réactifs à conditionner dans la pile pour satisfaire ces données.

Solution

1- les bornes:

Puisque le dioxyde de manganèse MnO_2 est réduit, au niveau de l'électrode jouant le rôle du pôle positif. Le pôle négatif est Zn.

$Zn \rightleftharpoons Zn^{2+} + 2e^-$ (1)

$MnO_2 + H^+ + e^- \rightleftharpoons MnO(OH)$ (2)

2- Equation:

La combinaisons des deux équations précédentes:

$Zn + 2MnO_2 + 2H^+ \longrightarrow Zn^{2+} + 2MnO(OH)$

3- Calcule de Q:

On a: $Q = I\Delta t$

A.N.: $Q = 20.10^{-3}.80.3600$

$= 5,8.10^2 C$

4- Les masse:

Le tableau descriptif de l'oxydation (1) permet d'obtenir.

$n_i(Zn) = n_i(Zn) - x$ et $n(e^-) = 2x$.

Un réactif est pris initialement en quantité minimale, lorsqu'il disparait totalement.

$n_f(Zn) = 0 = n_i(Zn) - x$

$n_i(Zn)_{min} = x = \frac{n(e^-)}{2} = \frac{Q}{2F}$

$\frac{m_i(Zn)}{M(Zn)} = \frac{Q}{2F}$;

d'où: $m_i(Zn) = \frac{I\,\Delta t\,M(Zn)}{2F}$

On trouve: $m_i(Zn) = 1,96g$

De la même manière, la quantité de matière minimale en MnO_2 est:

$n_f(MnO_2) = n_i(MnO_2) - x$ (tableau de la réaction (2)).

$n_i = x = n(e^-) = \frac{Q}{F}$

$m_i(MnO_2) = \frac{I\,\Delta t\,M(MnO_2)}{F}$

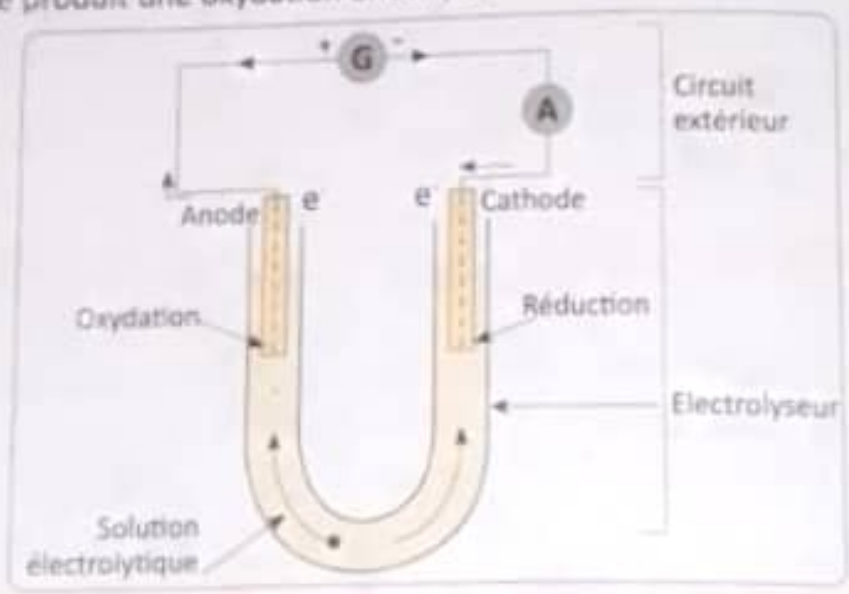
On trouve: $m_i(MnO_2) = 5,23g$.

3 Transformations chimiques forcées: électrolyse

I- L'électrolyse.

Une électrolyse est une transformation d'oxydoréduction forcée due à la circulation d'un courant électrique imposé par un générateur.

- Dans un électrolyseur, une transformation forcée a lieu: c'est une oxydoréduction.
- Dans l'électolyseur, les ions assurent la conduction du courant: les cations circulent vers la cathode et les anions vers l'anode.
- A la cathode se produit une réduction cathodique.
- A l'anode se produit une oxydation anodique.



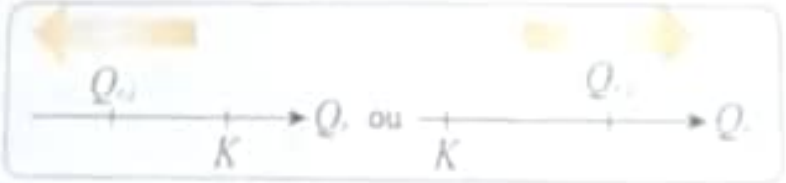
II- Transformations forcées.

Lors de la transformation spontanée d'un système chimique, celui-ci évolue vers un état d'équilibre.



évolution spontanée

Lors de la transformation forcée d'un système chimique, celui-ci évolue par apport d'énergie en s'éloignant de son état d'équilibre.



évolution forcée

Lors d'une transformation forcée, le quotient de réaction Q_r s'éloigne toujours de la constante d'équilibre K.

III- Energie électrique et transformations chimiques.

• L'électrolyseur est un récepteur électrochimique. Si on impose une tension U_{AB} à ses bornes pendant une durée Δt,

Pour un courant d'intensité I pendant ne durée Δt, la valeur de quantité d'électricité transportée s'écrit:

$$Q = I.\Delta t \quad \text{I: exprimé en ampère } (A)$$

$$\Delta t \text{ Exprimé en seconde } (s)$$

• La quantité d'électricité Q qui traverse une section du circuit est liée à la quantité d'électrons transférés $n(e^-)$ d'une électrode à l'autre:

$$Q = n(e^-)\mathcal{F} \quad Q \text{ exprimé en coulomb } (C)$$

$$n(e^-)_{transf} \text{ exprimé en mole (mol)}$$

la constante de Faraday $\mathcal{F}$ exprimée en coulomb par mole $(C.mol^{-1})$. Telle que: $\mathcal{F} = N_A.e = 9,65.10^4 C.mol^{-1}$

IV- Applications de l'électrolyse.

• Une application très courante de l'électrolyse est la recharge de l'accumulateur au plomb d'un véhicule automobile.

• Lorsqu'un accumulateur se décharge, il fonctionne selon le principe d'une pile. Lorsqu'on le recharge, on le branche en opposition avec un générateur et on provoque une électrolyse.

• Dans le langage courant, certains accumulateurs sont appelés «piles rechargeables».

• Lors de certaines électrolyses, un dépôt métallique peut se former sur une électrode. Ce phénomène est utilisé dans l'industrie pour la purification de métaux et le revêtement métallique d'objets.

1 Mots manquants:

a- Lors d'une transformation spontanée le quotient de réaction se.....de la constante d'équilibre, alors qu'il s'en .....dans le cas d'une transformation forcée.

b- .....est un exemple de transformation forcée.

c- Lors d'une électrolyse, les .....en solution se déplacent dans le sens du courant électrique.

d- L'électrode siège de l'oxydation est nommée .....

e- Lors de la décharge d'un accumulateur, il s'y déroule une transformation .....

f- Dans le domaine de la vie, la respiration des êtres vivants est une transformation ....., alors que la photosynthèse chez les végétaux est une transformation .....

Solution

a- Rapproche - éloigne ;

b- L'électrolyse ;

c- Cations ;

d- Anode ;

e- Spontanée ;

f- Spontanée-forcée

2 Vrai ou faux:

a- Lors d'une électrolyse, le quotient de réaction tend vers la constante d'équilibre V F.

b- Pendant une électrolyse, les électrons circulent dans le même sens que les anions V F.

c- Les électrons sont les porteurs de charges en solution aqueuse V F.

d- Lors d'une électrolyse, il y a oxydation d'espèces chimiques à la cathode V F.

e- Une pile peut toujours être rechargée grâce à un autre générateur V F.

f- Pour déposer un métal sur un support conducteur, ce dernier doit être relié à la borne négative du générateur V F.

g- A l'intérieur d'un électrolyseur, les porteurs de charges sont les électrons V F.

h- Un générateur de tension continue qui fait passer un courant dans un système chimique, lui impose nécessairement d'évoluer en sens inverse de son sens d'évolution spontanée V F.

j- Lors d'une électrolyse, il est toujours possible de prévoir la réaction qui va se produire V F.

Solution

a- F
b- V
c- F
d- F
e- F
f- V
g- F
h- V
e- F

QCM:

1- Lors d'une électrolyse, les porteurs de charges qui se déplacent en solution aqueuse sont:
a- Les cations ;
b- Les anions ;
c- Les atomes ;
d- Les électrons.

2- L'électrode d'un électrolyseur où se produit la réaction d'équation $Cu^{2+}(aq) + 2e^- \rightleftharpoons Cu(s)$, est:
a- L'anode ;
b- La cathode.

3- Au cours d'une électrolyse, la quantité de matière d'une espèce chimique formée dépend:
a- De l'intensité du courant ;
b- De la température ;
c- De la durée de l'électolyse.

4- Il est possible de forcer un système à évoluer de façon notable dans le sens inverse de celui de son évolution spontanée:
a- En lui fournissant de l'énergie électrique ;
b- En partant d'un mélange ne comportant que certaines espèces du système ;
c- En imposant le sens du courant électrique qui le traverse.

5- L'anode est l'électrode d'un électrolyseur à laquelle:
a- Le courant débité par le générateur arrive ;
b- Une oxydation se produit ;
c- Un dégagement gazeux se produit.

6- La cathode est l'électrode d'un électrolyseur à laquelle:
a- Le courant débité par le générateur arrive ;
b- Une réduction se produit ;
c- Un solide se dépose.

Solution

1- a et b
2- b
3- a et c
4- a
5- a et b
6- a et b.

Exercices

1

1- Faire le schéma du montage permettant de réaliser l'électrolyse d'une solution aqueuse de bromure de cuivre (II) en précisant le sens de branchement des appareils électriques et en utilisant des électrodes de graphite.

2- Parmi les réactions suivantes, préciser celles qui peuvent avoir lieu:

a- à l'anode ; **b-** à la cathode

(1) $Cu^{2+}(aq) + 2e^- \rightleftharpoons Cu(s)$

(2) $Cu(s) \rightleftharpoons Cu^{2+}(aq) + 2e^-$

(3) $H_2O + e^- \rightleftharpoons 1/2 H_2(g) + HO^-(aq)$

(4) $H_2O \rightleftharpoons 1/2\, O_2(g) + 2H^+(aq) + 2e^-$

(5) $2Br^-(aq) \rightleftharpoons Br_2(aq) + 2e^-$

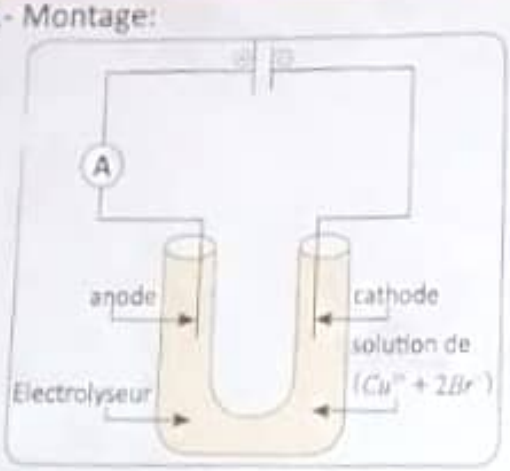
3- C'est la réaction (5) qui a effectivement eu lieu.

Son avancement étant noté y, si Q est la quantité d'électricité mise en jeu et $\mathcal{F}$ la constante de Faraday:

a- $y = 2Q.\mathcal{F}$; b- $2y = \frac{Q}{\mathcal{F}}$; c- $y = \frac{2Q}{\mathcal{F}}$; d- $y = \frac{Q}{\mathcal{F}}$.

Solution

1- Montage:



2- Réactions possibles:

a- à l'anode: il y a oxydation

(4) $H_2O(\ell) \rightleftharpoons \frac{1}{2} O_2(g) + 2H^+ + 2e^-$

(5) $2Br^-_{(aq)} \rightleftharpoons Br_{2(aq)} + 2e^-$

b- à la cathode, il y a réduction:

(1): $Cu^{2+} + 2e^- \rightleftharpoons Cu(s)$

(3) $H_2O + e^- \rightleftharpoons \frac{1}{2} H_2(g) + HO^-_{(aq)}$

3- Quantité d'électricité:

On a: $Q = n(e^-).\mathcal{F}$

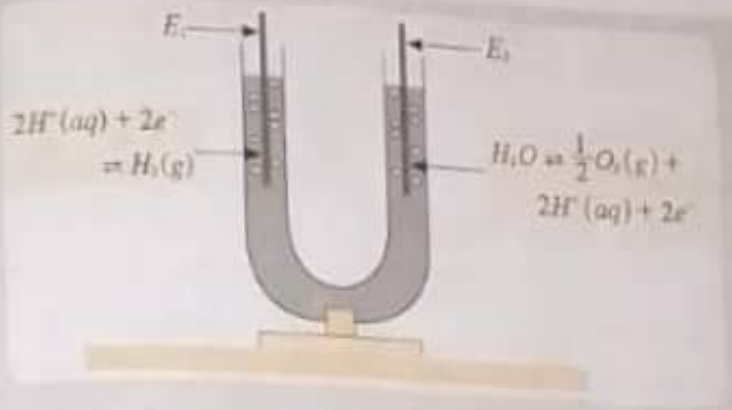
avec: $n(e^-) = 2y$

donc: $Q = 2y.\mathcal{F}$

$y = \frac{Q}{2.\mathcal{F}}$ (b).

2

1- Compléter le schéma ci-dessous relatif à l'électrolyse d'une solution d'acide sulfurique, $2H^+(aq) + SO_4^{2-}$ en précisant le sens de branchement du générateur et le sens du courant:



2- Comment peut-on mettre en evidence les espèces produites?

3- Dresser le tableau d'évolution et montrer que: $V(H_2) = 2V(O_2)$.

Solution

1- Sens de branchement du générateur.

- Au niveau de l'électrode E_1, il y a réduction c'est la cathode, elle est branchée au pôle $\ominus$ du générateur.

- Au niveau de l'électrode E_2, il y a oxydation c'est l'anode est banchée au pôle $\oplus$ du générateur.

2- Test d'identification:

On recupère chaque gaz dans un tube à essai et on approche une allumette à chaque tube.

• Pour le tube où il y a détonation le gaz contenu est le dihydrogène H_2.

• Pour le tube où il y a flamation le gaz contenu est le dioxygène O_2.

3- Tableau d'evolution:

	$H_2O(\ell) = H_2(g) + \frac{1}{2}O_2(g)$				$2e^-$
à $t = 0$	0	Excès	0	0	0
à t	x	Excès	x	$\frac{x}{2}$	$2x$

On a: $n(H_2) = x$; $n(O_2) = \frac{x}{2}$

Donc: $n(H_2) = 2\frac{n(O_2)}{2}$

$$\frac{V(H_2)}{V_M} = \frac{2V(O_2)}{2V_M}$$

d'où: $V(H_2) = 2V(O_2)$.

3 Une solution aqueuse d'acide sulfurique $(2H^+(aq) + SO_4^{2-}(aq))$ est introduite dans un électrolyseur à électrodes inattaquables en platine.

1- Dresser l'inventaire de toutes les espèces chimiques présentes en solution.

2- Ecrire les demi-équations des réactions d'oxydoréduction susceptibles de se produire à chacune des électrodes.

3- On observe le dégagement d'un gaz à chacune des électrodes.

Ecrire l'équation de la réaction d'électrolyse.

Couples oxydant/réducteur:

$$H^+(aq)/H_2(g) ; S_2O_8^{2-}(aq)/SO_4^{2-}(aq) ; O_2(g)/H_2O(\ell)$$

Solution

1- Inventaires des espèces chimique présentes. H^+, SO_4^{2-}, H_2O

2- Les demi-équations:

• Au niveau de l'anode il y a réduction des oxydants:

$$2H^+_{(aq)} + 2e^- \rightleftharpoons H_{2(g)}$$

• Au niveau de la cathode il y a oxydation du réducteur.

$$2SO_4^{2-}(aq) \rightleftharpoons S_2O_8^{2-}{}_{(aq)} + 2e^-$$

$$H_2O(\ell) \rightleftharpoons \frac{1}{2}O_2(g) + 2H^+_{(aq)} + 2e^-$$

3- Equation de la réaction:

$$2H^+_{(aq)} + 2e^- \rightleftharpoons H_{2(g)}$$

$$\frac{H_2O(\ell) \rightleftharpoons \frac{1}{2}O_{2(g)} + 2H^+_{(aq)} + 2e^-}{H_2O(\ell) \rightleftharpoons H_{2(g)} + \frac{1}{2}O_{2(g)}}$$

4 Afin de nickeler une plaque en cuivre par électrolyse, on plonge celle-ci dans une solution aqueuse de sulfate de nickel (II) $(Ni^{2+}(aq) + SO_4^{2-}(aq))$.

1- Indiquer la demi-équation de la réaction d'oxydoréduction qui doit avoir lieu sur la plaque de cuivre et en déduire à quelle borne du générateur la plaque doit être reliée.

2.a- On souhaite déposer une couche de nickel de $20\mu m$ d'épaisseur sur la plaque en cuivre dont la surface est telle que $S = 350\ cm^2$.

Quelle masse m_{exp} de Nickel doit être déposée?

b- Déterminer la quantité d'électricité Q nécessaire pour réaliser ce dépôt.

Données: • Couples oxydant/réducteur: $Ni^{2+}(aq)/Ni(s)$;

• Masse molaire atomique: $M(Ni) = 58,7\ g.mol^{-1}$;

• Masse volumique du nickel: $\rho(Ni) = 8,9 \times 103\ kg.m^{-3}$.

$\mathcal{F} = 9,65.10^4 C/mol$.

Solution

1- La demi-équation:

• Sur la plaque il y a depôt de Nickel donc il y a réduction de Ni^{2+} selon la demi-équation:

$$Ni^{2+}_{(aq)} + 2e^- \rightleftharpoons Ni_{(s)}$$

• La plaque est alors reliée à la borne ⊖ du générateur.

2.a- Calcul de la masse m du Nickel.

	$Ni^{2+} + 2e^- \rightleftharpoons Ni$		
à $t = 0$	n_0	0	0
à t_f	$n_0 - x_f$	$2x_f$	x_f

n a: $n(Ni) = \dfrac{m}{M(Ni)}$ et ;

On a: $m = \rho.v$ et $m = \rho.S.e$

A.N.: $m = 8,9.10^3.350.10^{-4}.20.10^{-6}$

$m = 6,23.10^{-3}\ kg$; $m = 6,23g$

b- Calcul de Q:

On a: $Q = n(e^-).\mathcal{F}$

avec: $n(e^-) = 2x_f = \dfrac{n(Ni)}{2}$

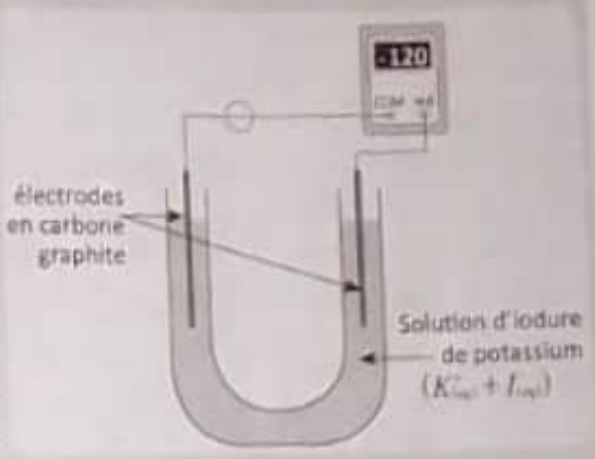
Donc: $Q = \dfrac{n(Ni)}{2}.\mathcal{F}$

$$Q = \frac{m}{2M(Ni)}.\mathcal{F}$$

A.N.: $Q = \dfrac{6,23}{2.58,7}.9,65.10^4$

$Q \simeq 5121C$

On réalise le dispositif expérimental suivant.



1- Préciser le sens du courant.

2- Reproduire le schéma et y indiquer le sens de circulation de tous les porteurs de charges.

3- Quelles sont les demi-équations d'oxydoréduction susceptibles de se produire à la cathode?

4- Quelles sont les demi-équations d'oxydoréduction susceptibles de se produire à l'anode?

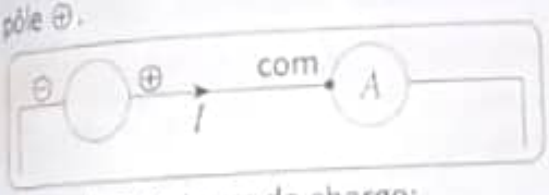
5- Aucun dégagement gazeux n'est observé au niveau de l'anode. En déduire la réaction qui s'y déroule effectivement et proposer un test permettant de mettre en évidence l'espèce chimique produite.

Couples oxydant/réducteur: $H_2O(\ell)/H_2(g)$; $K^+(aq)/K(s)$; $I_2(aq)/I^-(aq)$; $O_2(g)/H_2O(\ell)$.

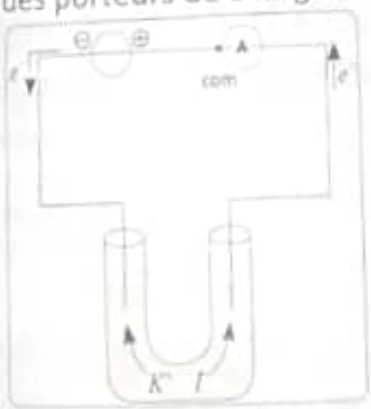
Solution

1- Sens du courant:

L'ampèremètre numérique indique une valeur négative du courant $(I < O)$ cela montre que la borne «com» est reliée au pôle ⊕.



2- Sens des porteurs de charge:



3- Les demi-équations senceptibles:

• Au niveau de la cathode:

réduction $K^+_{(aq)} + e^- \rightleftarrows K_{(s)}$

$2H_2O(\ell) + 2e^- \rightleftarrows H_{2(g)} + 2HO^-_{(aq)}$

4- Les demi-équations succeptibles:

• Au niveau de l'anode oxydation:

• $2I^-_{(aq)} \rightleftarrows I_{2(aq)} + 2e^-$

• $H_2O(\ell) \rightleftarrows \frac{1}{2}O_2(g) + 2H^+_{(aq)} + 2e^-$

5- La réaction:

• à l'anode, il n'y a pas de dégagement gazeux donc la demi-équation est:

$2I^-_{(aq)} \rightleftarrows I_{2(aq)} + 2e^-$

Le diiode est caractérisé par sa couleur jaune-brune.

• à la cathode il y a dégagement gazeux:

$2H_2O + 2e^- \rightleftarrows H_{2(g)} + 2HO^-$

en présence du feu, après récupération de H_2 dans un tube à essai, on entend une détonation, l'équation bilan est:

$2I^-_{(aq)} + 2H_2O_{(\ell)} \rightleftarrows I_{2(aq)} + H_{2(g)} + 2HO^-_{(aq)}$

Le cadmium entre dans la composition de certains accumulateurs, de fusibles, de pigments colorés... Il est obtenu industriellement par électrolyse.
La solution traitée est une solution de sulfate de cadmium et d'acide sulfurique. On utilise une cathode en aluminium et une anode en plomb. L'intensité du courant utilisé, maintenue constante, est égale à 25,0 kA; la tension entre les électrodes étant de l'ordre de 1,7 V.

Données: Couples oxydant/réducteur: $Al^{3+}(aq)/Al(s)$; $Pb^{2+}(aq)/Pb(s)$; $Cd^{2+}(aq)/Cd(s)$; $O_2(g)/H_2O$; $H^+(aq)/H_2(g)$; $S_2O_8^{2-}(aq)/SO_4^{2-}(aq)$; $SO_4^{2-}(aq)/SO_2(g)$; $\mathcal{F} = 9,65.10^4 C.mol^{-1}$.

1- Ecrire les équations des réactions qui peuvent se dérouler à chaque électrode.
2- Lors de cette électrolyse, on observe la formation d'un dépôt métallique à la cathode et la formation d'un gaz à l'anode. Quels sont les produits formés? Ecrire l'équation de la réaction qui a lieu.
3- Quelle est la masse de métal déposée au bout de 12,0 h d'électrolyse?

Solution

1- Equation:
Le système comporte du plomb (anode), de l'aluminium (cathode), de l'eau, des ions $H^+(aq)$, Cd^{2+} et SO_4^{2-}.
A l'anode, on peut envisager les oxydations suivantes:

$$Pb(s) \rightleftharpoons Pb^{2+}(aq) + 2e^-$$
$$2SO_4^{2-}(aq) \rightleftharpoons S_2O_8^{2-}(aq) + 2e^-$$
$$H_2O \rightleftharpoons 2H^+(aq) + 1/2O_2(g) + 2e^-$$

A la cathode, on peut envisager les réductions suivantes:

$$Cd^{2+}(aq) + 2e^- \rightleftharpoons Cd(s)$$
$$2H^+(aq) + 2e^- \rightleftharpoons H_2(g)$$
$$SO_4^{2-}(aq) + 4H^+(aq) + 2e^- \rightleftharpoons SO_2(g) + 2H_2O$$

2- Les produits:
D'après les observations expérimentales, il se produit:
- Un dégagement gazeux à l'anode: ce ne peut être que du dioxygène ;
- Un dépôt à la cathode: ce ne peut être que du cadmium.

L'équation de la réaction qui se produit lors de l'électrolyse s'en déduit:

$$Cd^{2+}(aq) + H_2O \rightleftharpoons 2H^+(aq) + 1/2O_2(g) + Cd(s)$$

3- Calcul de $m(Cd)$:
La quantité d'électricité mise en jeu vaut: $Q = I.\Delta t$.
Un tableau d'avancement de la réduction cathodique conduit à:

Equation	Cd^{2+}	+ $2e^-$	$\rightleftharpoons Cd$
Quantités initiales	n_0		0
Quantités finales	$n_0 - x$	$2x$	x

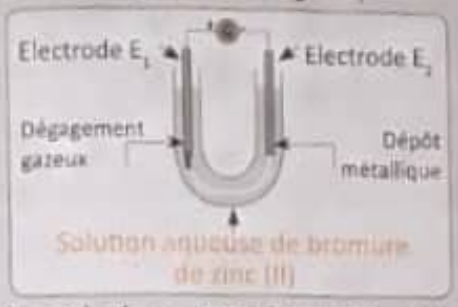
La quantité d'électrons consommée vaut: $n(e^-) = 2x = \frac{Q}{\mathcal{F}}$
La quantité de cadmium déposé s'en déduit: $n(Cd) = x = \frac{Q}{2\mathcal{F}}$

D'où: $m(Cd) = n(Cd).M_{Cd} = \frac{I.\Delta t.M_{Cd}}{2\mathcal{F}}$

$$m(Cd) = \frac{25,0.10^3 \times 12,0 \times 3600 \times 112,4}{2 \times 9,65.10^4}$$
$$= 629.10^3 g$$

Soit: $m(Cd) = 629\ kg$.

On réalise l'électrolyse d'une solution de bromure de zinc ($2Br^-_{(aq)} + Zn^{2+}_{(aq)}$) entre deux électrodes inattaquables de graphite (Figure).



Les ions contenus dans la solution appatiennent aux couples oxydoréducteurs $Br_{2(aq)}/Br^-_{(aq)}$ et $Zn^{2+}_{(aq)}/Zn_{(s)}$. On constate qu'il se forme un dépôt métallique sur la partie immergée de l'élecrode E_2 et un dégagement gazeux sur l'électrode E_1.

1- Utiliser les observations expérimentales pour écrire les équations des réactions aux électrodes.

2.a- Quelle est l'oxydation? La réduction?

b- Identifier l'anode et la cathode de l'électrolyseur.

3.a- Représenter sur un schéma le sens de circulation du courant imposé par le générateur.

b- En déduire le sens de circulation des électrons.

4.a- Dans quel sens circulent les ions présents dans la solution électrolytique?

b- La réponse est-elle cohérente avec les équations écrites en 1?

5- Ecrire l'équation de la réaction d'oxydoréduction qui se produit dans l'électrolyseur.

Solution

1- Equations:

Sur l'électrode E_2, il se forme un dépôt métallique de zinc: $Zn^{2+}_{(aq)} + 2e^- = Zn_{(s)}$

Sur l'électrode E_1, il se forme un dégagement gazeux de dibrome:

$$2Br^-_{(aq)} \rightleftharpoons Br_{2(s)} + 2e^-$$

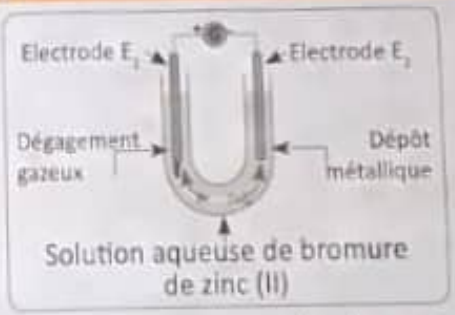
2.a- L'oxydation:

L'oxydation est subie par les ions bromure, la réduction par ions zinc (II).

b- L'anode:

L'anode de l'électrolyseur est donc l'électrode E_1 et la cathode est l'électrode E_2.

3.a- Shéma:



Circulation des porteurs de charge.

b- Sens du courant:

A l'extérieur du générateur, les électron circulent en sens inverse du courant.

4.a- Les cations:

Les cations circulent dans le même sen que le courant donc vers l'électrode E

Les anions circulent en sens inverse donc vers E_1.

b- Les réactions aux électrodes correspondent à cette circulation des ions:

Les ions zinc (II) sont réduits sur E_2 les ions bromure oxydés sur E_1.

5- Equation:

L'oxydoréduction qui se produit dans l'électrolyseur a pour équation:

$$Zn^{2+}_{(aq)} + 2Br^-_{(aq)} \longrightarrow Zn_{(s)} + Br_{2(aq)}$$

La duplication en grande quantité d'un disque compact nécessite la réalisation d'un glassmaster en nickel. Le procédé se déroule en plusieurs étapes:

• Fabrication du glassmaster: le disque de base gravé (Glassmaster) est métallisé par une fine couche d'argent.

• Galvanoplastie: Le glassmaster métallisé est immergé pendant deux heures dans une solution acide de sulfamate de nickel (II) où il subit une électrolyse, l'autre électrode étant du nickel. Il se forme un dépôt de nickel sur le glassmaster. Ce dépôt de nickel constitue le «père», un disque de nickel d'une masse $m = 113g$.

On place le «père» dans le moule d'une presse qui permet de dupliquer le disque en grand nombre.

Données: • Couple oxydant/réducteur: $Ni^{2+}(aq)/Ni(s)$.

• Masse volumique et masse molaire du nickel: $\rho = 8,90g.cm^{-3}$; $M = 58,7g.mol^{-1}$.

• Charge élementaire $e = 1,60 \times 10^{-19}C$.

• Constante d'Avogadro $N_A = 6,02 \times 10^{23}mol^{-1}$.

1- Schématiser l'électrolyse en précisant le sens du courant et la polarité des bornes du générateur. Justifier la réponse.

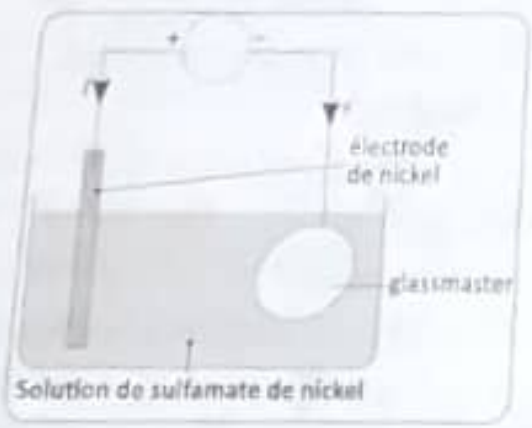
2- Nommer les électrodes et préciser les équations des réactions qui s'y déroulent.

3- Déterminer la quantité de matière de nickel déposé lors de l'électrolyse.

4- Quelle doit être la valeur de l'intensité constante du courant qui circule dans le circuit?

Solution

1- Schema:



Pour être réduits en nickel métallique, les ions nickel (II) captent des électrons au contact du glassmaster.

Celui-ci doit donc être relié à la borne négative du générateur qui fournit ces électrons. Par convention, le courant circule de la borne positive à la borne négative du générateur à l'extérieur de celui-ci.

2- Noms:
Le glassmaster est la cathode puisqu'il s'y déroule la réaction de réduction:
$Ni^{2+}(aq) + 2e^- \rightleftharpoons Ni(s)$
L'électrode de nickel est l'anode où a lieu la réaction d'oxydation:
$Ni(s) \rightleftharpoons Ni^{2+}(aq) + 2e^-$.

3- Calcul de $n(Ni)$:

La quantité de matière de nickel contenue dans le glassmaster est:

$$n(Ni) = \frac{m}{M} = \frac{113}{58,7} = 1,93\ mol$$

4- Calcul de I:

Le tableau d'évolution du système chimique à la cathode s'écrit:

Equation		$Ni^{2+}(aq) + 2e^- \rightleftharpoons Ni(s)$		
Etat	avancement (mol)	quantités de matière (mol)		
Initial	$x = 0$	$n(Ni^{2+})_i$	$n(e^-)_i$	0
Final	$x = x_f$	$n(Ni^{2+})_i - x_f$	$n(e^-)_i - 2x_f$	x_f

La quantité de matière de nickel formé au cours de l'électrolyse est telle que $n(Ni) = x_f$.

Ceci nécessite la consommation de la quantité de matière d'électrons $n(e^-)$, soit:

$$n(e^-)f = n(e^-)_i - 2x_f = 0\ ;$$

d'où: $n(e^-)_i = 2x_f = 2n(Ni)$

Cette quantité de matière d'électrons transférés est liée à la quantité d'électricité Q.

$$Q = n(e^-)_i \mathcal{F} = 2n(Ni)\mathcal{F}\ ;$$

or: $\mathcal{F} = N_A e$

et: $Q = |I\Delta t\ donc| = \frac{2n(Ni)N_A e}{\Delta t}$.

A.N.:

$$I = \frac{2 \times 1,93 \times 6,02 \times 10^{23} \times 1,60 \times 10^{-19}}{2 \times 3600} = 51,5\ A$$

Le fer-blanc est un acier recouvert d'étain.

Il est utilisé pour fabriquer certaines boîtes de conserve. L'étamage est réalisé par voie électrolytique grâce à une solution contenant des ions étain (II) $Sn^{2+}(aq)$.

Une des électrodes utilisées est en étain, l'autre électrode est la boîte de conserve.

Actuellement, les dépôts d'étain ont une épaisseur de $90\mu m$ et une masse de $0,50g$ par mètre carré d'acier.

On souhaite étamer l'intérieur et l'extérieur d'une boîte de conserve cylindrique de rayon $r = 4,0cm$ et de hauteur $h = 8,0\ cm$ grâce à un courant d'intensité: $I = 6,0A$.

Données:

- Couples oxydant/réducteur: $Sn^{2+}(aq)/Sn(s)$; $O_2(g)/H_2O(\ell)$;
- Masse molaire atomique: $M(Sn) = 118,7g.mol^{-1}$.

1- La boîte de conserve joue-t-elle le rôle d'anode ou de cathode?

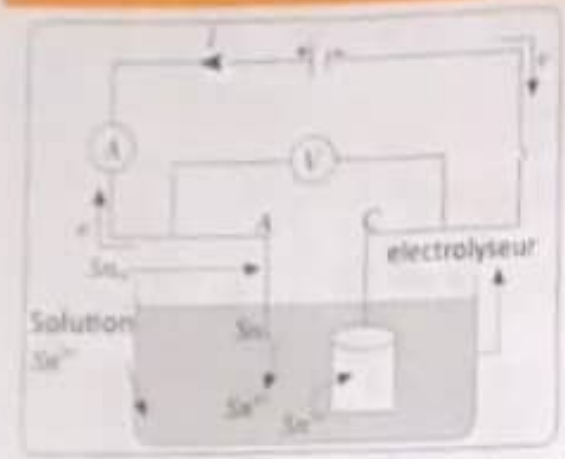
2- Ecrire les demi-équations des réactions d'oxydoréduction aux électrodes.

3- Montrer que la surface à étamer est telle que:

$S = 6,0 \times 10^{-4} m^2$.

4- Calculer la masse d'étain à déposer et la durée Δt de l'électrolyse.

Solution



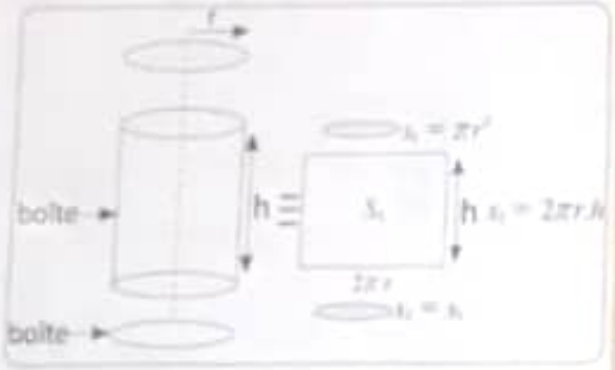
1- La boîte joue le rôle de la cathode où il y a dépôt de l'étain Sn.

2- Equations:

• Au niveau de la cathode: Il y a réduction de l'oxydant: $Sn^{2+} + 2e^- = Sn$

• Au niveau de l'anode: Il y a oxydation du réducteurs $Sn = Sn^{2+} + 2e^-$.

3- Surface à étamer:



donc le surface totale est:

$S = s_1 + s_2 + s_3$

$= 2\pi r^2 + 2\pi rh$

A.N.:

$S = 2\pi.(4.10^{-2})^2 + 2\pi(4.10^{-2}).8.10^{-2}$

$s \simeq 6.10^{-4} m^2$

4- Calcul de $m(Sn)$ de posé et de Δt

on a: $0,50g$ de $S_n \longrightarrow 1m^2$

$m(Sn) \longrightarrow s$

$m(Sn) = 0,50.6.10^{-4}$

$m(Sn) = 3.10^{-4} g \approx 0,03g$

et on a: $Q = I\Delta t = n(e^-).\mathcal{F}$

$$\Delta t = \frac{n(e^-).\mathcal{F}}{I}$$

avec: $n(e^-) = 2x_f$

et: $n(Sn) = x_f$

donc: $n(e^-) = 2.\frac{m(Sn)}{M(Sn)}$

d'où: $$\Delta t = \frac{2m(s_n).\mathcal{F}}{M(s_n).I}$$

A.N.: $$\Delta t = \frac{2.0,03.9,65.10^4}{118,7.6}$$

$= 8,13s$

10 L'énergie électrique fournie par une cellule photovoltaïque permet la production de dihydrogène gazeux H_2 par électrolyse de l'eau.

Le dihydrogène produit est stocké, puis utilisé dans une pile à combustible.

I- Electrolyse de l'eau:

Afin de réaliser l'électrolyse de l'eau, les bornes de la cellule photovoltaïque sont reliées à deux électrodes de platine immergées dans une solution diluée d'acide

sulfurique. Les gaz formés sont récupérés.
L'équation modélisant la transformation ayant lieu lors de l'électrolyse est:

$$2H_2O_{(l)} \rightleftharpoons 2H_{2(g)} + O_{2(g)}$$

Les couples oxydant/réducteur mis en jeu sont $O_{2(g)}/H_2O_{(l)}$ et $H^+_{(aq)}/H_{2(g)}$.

1- L'électrolyse de l'eau est-elle une transformation spontanée? Justifier.

2- Ecrire les deux équations d'oxydoréduction correspondant aux transformations ayant lieu aux électrodes.

3- Quel type de réaction a eu lieu à l'électrode reliée à la borne négative de la cellule photovoltaïque? Nommer cette électrode.

4- Fonctionnement de la pile:

Après douze heures de fonctionnement, l'électrolyseur a produit une quantité de dihydrogène $n(H_2) = 6,0 \times 10^{-3} mol$. Ce dihydrogène est entièrement utilisé comme combustible dans une pile schématisée sur la figure-1. La pile consomme, lors de son fonctionnement, du dihydrogène et du dioxygène gazeux qui sont introduits au contact d'électrodes poreuses séparées par une solution acide jouant le rôle d'électrolyte. Le seul produit formé est de l'eau.

L'équation modélisant la transformation ayant lieu lors de l'électrolyse est:

$2H_{2(g)} + O_{2(g)} \rightleftharpoons 2H_2O_{(l)}$.

La valeur d'un faraday est: $F = 9,65 \times 10^4 C.mol^{-1}$.

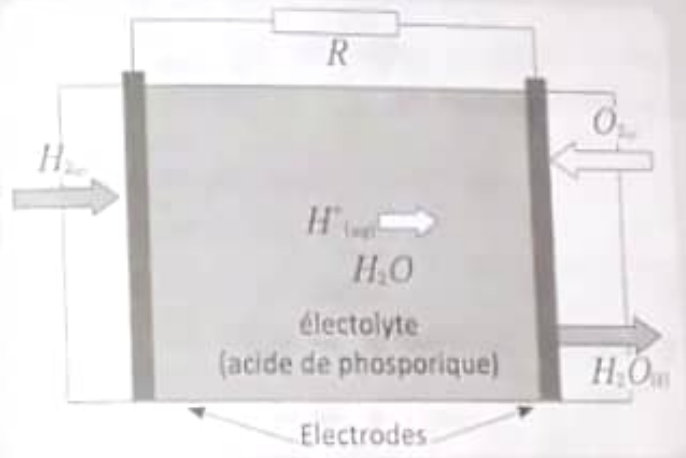


Figure-1: Fonctionnement de la pile à combustible avec un électrolyte acide

1- Indique sur la figure 1 les bornes positive et négative du générateur ainsi que la nature et le sens de circulation des porteurs de charges hors de la pile.

2- Donner l'expression de la quantité d'électrons $n(e^-)$ échangée lors de la «combusion» de la quantité $n(H_2)$ de dihydrogène dans la pile.

En déduire la valeur de la quantité d'électricité Q échangée.

3- La pile permet de faire fonctionner correctement une lampe (L) avec une tension à ses bornes de $1,0\,V$ et une intensité constante du courant de $0,70\,A$.

Déterminer la durée de fonctionnement de la pile pour cette intensité.

Solution

I- Electrolyse:

1- Spontanée ou forcée.

L'électrolyse n'est pas une transformation spontanée mais forcée.

En effet, elle nécessite un apport d'énergie extérieur pour qu'elle se produise.

2- Les équations:

A l'une des électrodes se produit l'oxydation de l'eau selon:

$$H_2O_{(l)} \rightleftharpoons \frac{1}{2}O_{2(g)} + 2H^+_{(aq)} + 2e^-$$

tandis que les ions oxonium se réduction simultanément à l'autre électrode suivant la réaction d'équation:

$$2H^+_{(aq)} + 2e^- \rightleftharpoons H_{2(g)}$$

3- Type de réaction:

Des électrons arrivent à l'électrode reliée à la borne négative de la cellule photovoltaïque. Par conséquent, il va s'y produire une réaction de réduction. Cette électrode est par définition la cathode.

II- La pile:

1- Les bornes.

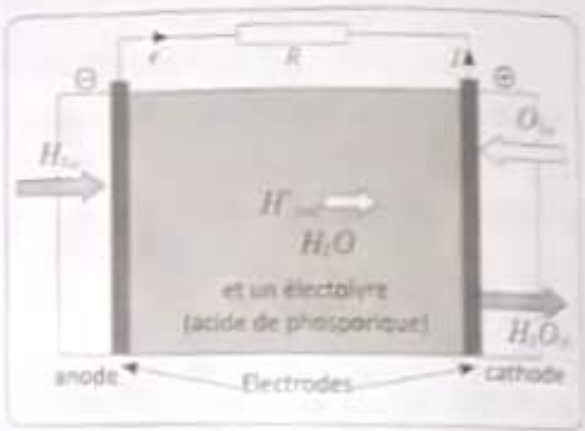
Lors du fonctionnement de la pile à combustible, ce sont les réactions opposées aux précédentes qui ont lieu, à savoir:

$$(H_{2(g)} \rightleftharpoons 2H^+_{(aq)} + 2e^-) \times 2$$

$$\left(\frac{1}{2}O_{2(g)} + 2H^+_{(aq)} + 2e^- \rightleftharpoons H_2O_{(l)}\right) \times 2$$

$$2H_{2(g)} + O_{2(g)} \rightleftharpoons 2H_2O_{(l)}$$

Ainsi, des électrons sont libérés au niveau de l'électrode sur laquelle arrive le dihydrogène, lesquels circulent hors de la pile jusqu'à l'électrode où arrive le dioxygène. Puisque par convention, le sens du courant est opposé au sens de circulation des électrons hors de la pile,



Nous pouvons alors donner la polarité de la pile sachant que le courant sort de la borne positive de celle-ci.

2- Le tableau d'évolution au niveau de l'anode on a:

Equation chimique		$H_{2(g)} \rightleftharpoons 2H^+_{(aq)} + 2e^-$		
Etat du système	Avancement	Quantité de matière (mol)		
Etat initial	$x = 0mol$	$n(H_2)$	$n(H^+)$	0
Etat intermédiaire	x	$n(H_2) - x$	$n(H^+) + 2x$	2x
Etat final	x_f	$n(H_2) - x_f$	$n(H^+) + 2x_f$	2x

L'état final du système est atteint après consommation totale du dihydrogène puisque l'énoncé nous indique qu'il est «entièrement utilisé comme combustible», soit: $n(H_2)_f = 0\ mol = n(H_2) - x_f$

$$x_f = n(H_2)$$

Par ailleurs le tableau d'évolution du système chimique nous indique que la quantité d'électrons transférés dans

l'état final est telle que:

$n(e^-) = 2x_f$ soit d'après ce qui précède

$n(e^-) = 2 \times n(H_2)$

Remarque: L'adjectif «échangé» pour qualifier la quantité d'électrons nous semble inapproprié car il n'y a ici aucune réciprocité. Les électrons ne vont que dans un seul sens ! Nous lui préférons le terme «transféré».

Nous pouvons alors exprimer la quantité Q d'électricité débitée par la pile:

$Q = n(e^-).F$.

donc $Q = 2 \times n(H_2).F$

Numériquement, avec:

$n(H_2) = 6,0 \times 10^{-2}\ mol$;

et: $F = 9,65 \times 10^4 C.mol^{-1}$

nous calculons:

$$Q = 1,2 \times 10^4 C$$

3-Expression: la durée de fonctionnement compte tenu de l'intensité I du courant qui traverse la lampe: $\Delta t = \frac{Q}{I}$.

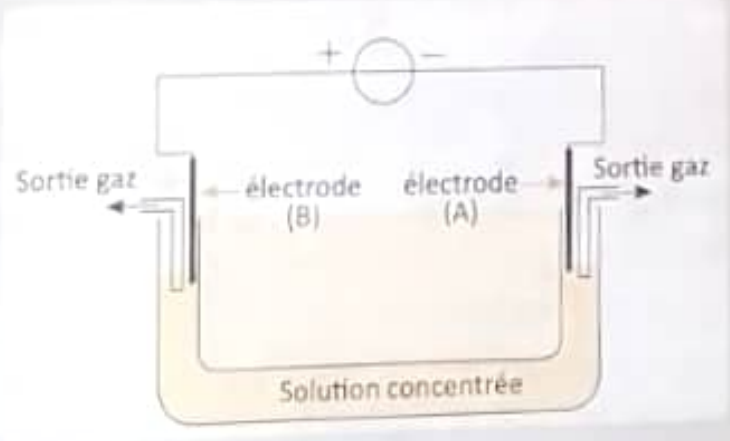
Numériquement, avec: $Q = 1,2 \times 10^4 C$ et $I = 0,70\ A$, nous trouvons:

$$\Delta t = 1,7 \times 10^4 s = 4,7h$$

Soit environ 4 heures et 43 minutes.

Cette durée d'éclairage est bien supérieure à celle obtenue avec la condensateur. La pile à combustible semble donc plus adaptée pour cette application.

11 Le gaz dichlore est préparé à l'aide de l'électrolyse d'une solution aqueuse de chlorure de sodium: $(Na^+_{(aq)} + Cl^-_{(aq)})$. Ce gaz est recupéré sur l'une des électrodes et sur l'autre électrode il se forme du dihydrogène gazeux. Le mélange réactionnel prend un caractère basique au cours de la transformation chimique.



onnées:

Couples mis en jeu dans cette transformation: $H_2O_{(\ell)}/H_{2(g)}$, $Cl_{2(g)}/Cl^-_{(aq)}$

Constante de Faraday $F = 9,65.10^4 C.mol^{-1}$

Volume molaire gazeux dans les conditions de l'expérience: $V_m = 25,0L.mol^{-1}$

Volume de la solution: $V = 200mL$; $Ke = 10^{-14}$.

montage de l'expérience utilisé est représenté sur la figure ci-dessus.

1- Parmi les électrodes (A) et (B) de la figure, laquelle joue le rôle d'anode et laquelle joue le rôle de cathode?

2- Ecrire l'équation de la réaction qui se produit sur chaque électrode et l'équation bilan de la transformation.

3- Le générateur fournit au circuit un courant électrique d'intensité constante $I = 0,3A$.

3.1- Calculer le volume du dichlore gazeux formé pendant une durée $\Delta t = 25\,\text{min}$.

3.2- Quel est le volume du dihydrogène formé pendant cette durée.

3.3- Calculer le pH de la solution à la fin de cette expérience.

Solution

1- L'oxydation se produit sur l'électrode (B): anode

La réduction se produit sur l'électrode (A): cathode

2- Oxydation: $2Cl^-_{(aq)} \longrightarrow Cl_{2(g)} + 2e^-$

Réduction:

$2H_2O_{(l)} + 2e^- \longrightarrow H_{2(g)} + 2HO^-_{(aq)}$

Equation bilan:

$2Cl^-_{(aq)} + 2H_2O_{(l)} \longrightarrow H_{2(g)} + Cl_{2(g)} + 2HO^-_{(aq)}$

3.1- $n(Cl_2) = \frac{n(e^-)}{2}$

$\frac{V(Cl_2)}{V_m} = \frac{n(e^-)}{2} = \frac{Q}{2F} = \frac{I\Delta t}{2F}$

$V(Cl_2) = \frac{I\Delta t V_m}{2F}$

$V(Cl_2) = \frac{0,3.25.60.25,0}{2.9,65.10^4} = 5,8.10^{-2}L$

3.2- D'après l'équation bilan, on a:

$v(H_2) = v(Cl_2) = 5,8.10^{-2}L$

3.3- $n(HO^-) = 2x = 2n(H_2) = 2.\frac{V(H_2)}{V_m}$

$[HO^-] = \frac{2V(H_2)}{VV_m} = \frac{25,8.10^{-3}}{0,2.25} = 2,3.10^{-2}mol.L^{-1}$

$pH = -\log\frac{10^{-14}}{[HO^-]} = 14 + \log[HO^-] \simeq 12,4$

12 Une pièce métallique a la forme d'un cylindre dont la hauteur est $h = 5cm$ et le rayon de la base est $r = 1cm$

On désire recouvrir cette pièce de l'extérieur d'une fine couche de cuivre d'épaisseur $e = 25\mu m$, à l'aide de la technique d'électrolyse.

Le matériel utilisé à cet effet est le suivant:

- La pièce métallique, une électrode de cuivre ;
- Une solution de sulfate de cuivre II: $Cu^{2+}_{(aq)} + SO^{2-}_{4(aq)}$
- Un générateur de courant débitant un courant d'intensité constante $I = 5A$;
- Une cuve à électrolyse, des fils de connexion et un ampèremètre.

Données: masse volumique du cuivre: $\rho = 8,9.10^3 kg/m^3$; $M(Cu) = 63,5g.mol^{-1}$; $F = 9,65.10^4 C.mol^{-1}$;

Couple $ox/réd$ mis en jeu: $Cu^{2+}/Cu_{(s)}$

1- Représenter le schéma du montage utilisé, en précisant le pôle du générateur auquel doit-être connecté la pièce métallique.

3- Écrire l'équation au niveau de chaque électrode.

3- Montrer que la quantité de matière initiale des ions Cu^{2+} est conservée au cours de la réaction.

4- Montrer que la masse $m(cu)$ à déposer sur la pièce métallique peut s'écrire. $m(Cu) = 2\pi.r.e(r+h)$. Calculer sa valeur.

5- Déterminer la durée Δt nécessaire à cette électrolyse.

Solution

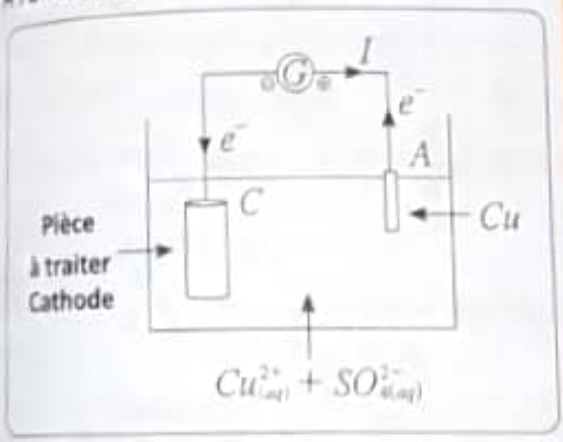
1- Pour obtenir un dépôt de cuivre métallique sur la pièce, il faut que cette dernière soit le siège de la réaction suivante:

$$Cu^{2+} + 2e^- \rightleftharpoons Cu\,.$$

Elle doit être reliée au pole ⊖ du générateur.

2- A la cathode: $Cu^{2+}_{(aq)} 2e^- \rightleftharpoons Cu_{(s)}$

A l'anode: $Cu_{(s)} \rightleftharpoons Cu^{2+}_{(aq)} + 2e^-$



3- Equation bilan:

Cu^{2+} + $Cu_{(s)}$ ⟶ $Cu_{(C)}$ + Cu^{2+} (formé)		
$t = 0$	n_0	0
à t	$n_0 - x$	x

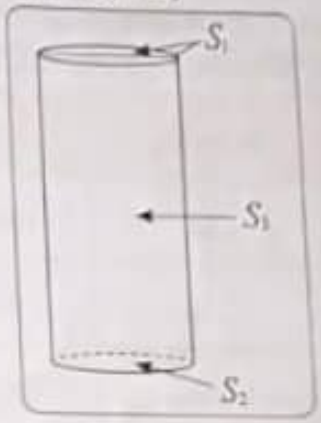
A l'état final:

$$n(Cu^{2+}) = n_0 - x + x = n_0\,.$$

Tout se passe comme si la masse de cuivre perdue par l'anode A était récupérée par la cathode C et les ions Cu^{2+} de la solution initiale sont conservés.

4- $m(Cu) = \rho.V(Cu)$; V : volume

$$V(Cu) = S.e$$
$$= S_1 + S_2 + S_3$$



On a: $S_1 = S_2 = \pi r^2$ et $S_3 = 2\pi r.h$

alors, $S = \pi r^2 + \pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r(r+h)$;

donc: $m(Cu) = 2\pi r.e.\rho.(r+h)$

$$m(Cu) = 2\pi.10^{-2}.25.10^{-4}.8{,}9.10^{3}(10^{-2} + 5.10^{-2})$$
$$= 8{,}388.10^{-4} kg \simeq 0{,}84g$$

5-

$$\Delta t = \frac{Q}{I} = \frac{n(e^-).F}{I} = \frac{2F}{I} = \frac{2n(Cu).F}{I}$$

d'où: $\Delta t = \dfrac{2m(Cu).F}{I.M(Cu)}$

$$= \frac{2.0{,}84.96500}{5.63{,}5}$$
$$\simeq 8\,\text{min}\,30s$$

4 Réaction d'estérification et hydrolyse

I- Familles chimiques.

1 Les alcanes:

Ce sont des hydrocarbures de formule brute $CnH_{2n+2}(n \in \mathbb{N}^*)$, on distingue:

a- Les alcanes à chaînes linéaires: dont la chaîne principale est composée de carbone lié au plus à deux autres atomes de carbone. La nom est composé d'un préfixe induquant le nombre d'atomes de carbone et d'un suffixe «ane».

n	formule	nom	n	formule	nom
1	CH_4	méthane	4	C_4H_{10}	butane
2	C_2H_6	éthane	5	C_5H_{12}	pentane
3	C_3H_8	propose	6	C_6H_{14}	hexane

b- Les alcanes à chaînes ramifiées: la chaîne principale comporte au moins un atome de carbone relié à trois atomes de carbone.

Exemples:

1- $CH_3-\underset{\displaystyle CH_3}{\underset{|}{CH}}-CH_2-CH_3$ 2-méthyle butane

2- $CH_3-CH_2-\underset{\displaystyle C_2H_5}{\underset{|}{CH}}-\underset{\displaystyle CH_3}{\underset{|}{CH}}-CH_3$

3- éthyle - 2- méthyle pentane.

2 Nomenclature des composés mis en jeu:

Les alcools:

Un alcool contient le groupe caractéristique hydroxyle $-OH$ lié à un groupe alkyle.

Un alcool se note généralement $R-OH$ où $R-$ est le groupe alkyle.

L'atome de carbone lié au groupe $-OH$ est le carbone fonctionnel.

Exemples:

CH_3-OH :méthanol	CH_3-CH_2-OH : éthanol

$CH_3-CH_2-CH_2-OH$ propan $-1-ol$	$H_3C-\underset{\displaystyle OH}{\underset{\vert}{CH}}-CH_3$ propan $-2-ol$
$CH_3-\underset{\displaystyle CH_3}{\underset{\vert}{CH}}-CH_2-OH$ 2- méthylpropan $-1-ol$	$C_5H_3-\underset{\displaystyle CH_3}{\underset{\vert}{CH}}-\underset{\displaystyle OH}{\underset{\vert}{\overset{\displaystyle CH_3}{\overset{\vert}{C}}}}-CH_3$ 2.3- diméthylbutan $-2-ol$

On distingue trois types d'alcools selon le nombre (1,2 ou 3) d'atome (s) de carbone porté(s) par le carbone fonctionnel (lié à OH).

On désigne ainsi trois classes d'alcools: alcool primaire, secondaire ou tertiaire.

$-\underset{\displaystyle \vert}{\overset{\displaystyle \vert}{C}}-CH_2-OH$	$-\underset{\displaystyle \vert}{\overset{\displaystyle \vert}{C}}-\underset{\displaystyle \vert}{\overset{\displaystyle H}{\overset{\vert}{C}}}-OH$ $-C-$	$C-\underset{\displaystyle \vert}{\overset{\displaystyle C}{\overset{\vert}{C}}}-C$ OH
alcool primaire	alcool secondaire	alcool tertiaire

$CH_3-CH_2-CH_2-CH_2-OH$ butan $-1-ol$	$CH_3-\underset{\displaystyle OH}{\underset{\vert}{CH}}-CH_3$ propan $-2-ol$	$CH_3-\underset{\displaystyle CH_3}{\underset{\vert}{\overset{\displaystyle CH_3}{\overset{\vert}{C}}}}-OH$ méthylpropan $-2-ol$
alcool primaire	alcool secondaire	alcool tertiaire

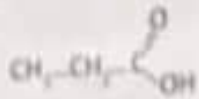
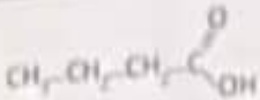
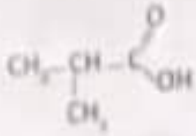
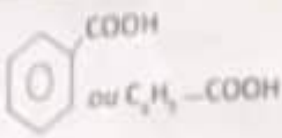
* Les acides carboxyliques

Un acide carboxylique contient un groupe caractéristique carboxyle $-\overset{\displaystyle O}{\overset{\Vert}{C}}-O-H$

Un acide carboxylique se note souvent: $R-\overset{\displaystyle O}{\overset{\Vert}{C}}-OH$

(avec R: groupe alkyle).

$H-\overset{\displaystyle O}{\overset{\Vert}{C}}-OH$ acide méthanoïque	$CH_3-CO-OH$ acide éthanoïque

 acide propanoïque	 acide butanoïque
 acide 2-méthyl propanoïque	 acide benzoïque

• Les esters

Les esters possèdent un groupe caractéristique ester: $-COOR'$, qu'on peut noter aussi: $-CO_2R'$

Leur formule générale est:

$R-C-OR'$ $(R-COOR'$ ou $R-CO_2R')$

R et R' sont des chaînes carbonées.

Le nom d'un ester $R-COOR'$ comporte deux termes:

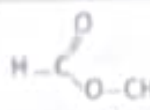
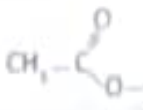
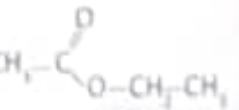
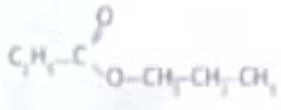
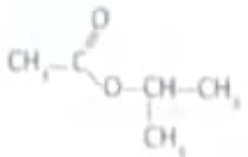
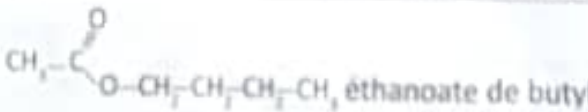
- Le premier terme désigne la chaîne carbonée $R-C$ contenant le carbone fonctionnel. Il dérive du nom de l'acide carboxydique correspondant.

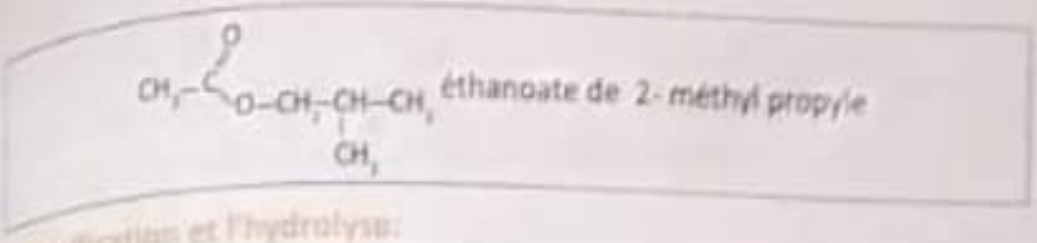
La terminaison «-oïque» est remplacée par -oate:

- Le second terme désigne la chaîne carbonée R' liée à l'atome d'oxygène. S'il s'agit d'un groupe alkyle, il prend la terminaison -yle.

Dans le cas de chaînes carbonées ramifiées, la chaîne $R-C$ est numérotée à partir du carbone fonctionnel, la chaîne R' à partir du carbone lié à l'atome d'oxygène.

Exemples:

 méthanoate de méthyle	 Ethanoate de méthyle	 éthanoate d'éthyle
 Propanoate de propyle	 éthanoate de méthyléthyle	
 éthanoate de butyle		

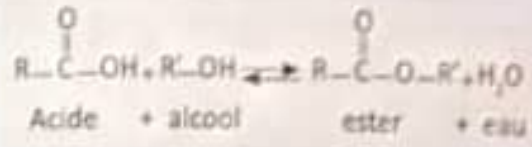


éthanoate de 2- méthyl propyle

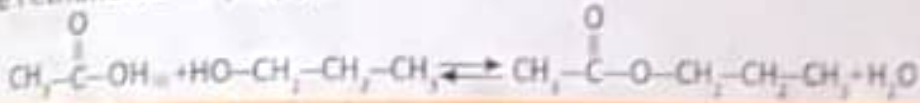
3 L'estérification et l'hydrolyse:

3.1 Estérification:

L'estérification est la réaction entre un acide carboxylique et un alcool. Cette réaction conduit à un ester et à de l'eau:



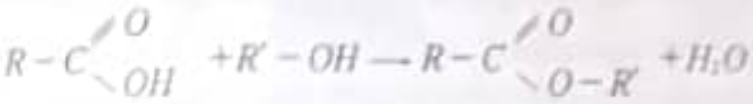
Exemple: La réaction entre l'acide éthanoïque et le propan – 1 – ol conduit à la formation de l'éthanoate de propyle.



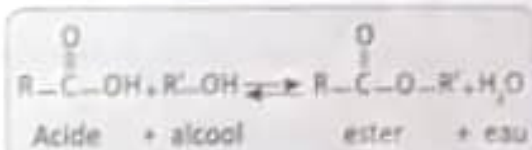
3 Estérification et hydrolyse.

3.1 Estérification: L'équation de la réaction s'écrit:

Acide carboxylique + alcool ⟶ ester + eau

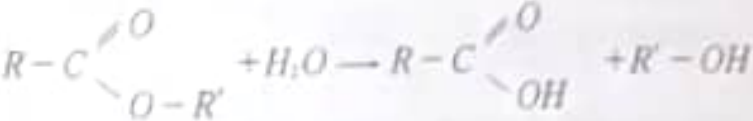


Exemple:

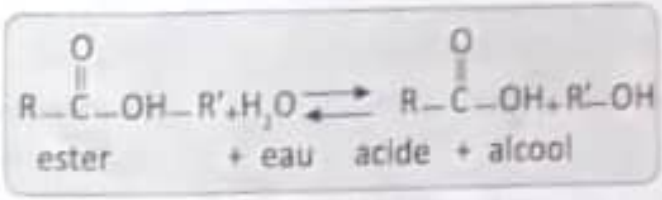


3.2 Hydrolyse: L'équation de la réaction s'écrit:

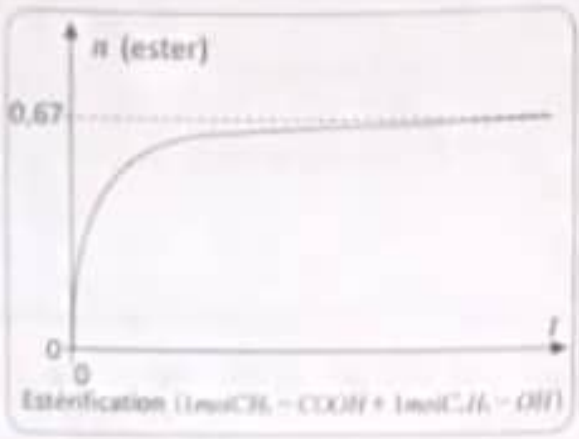
Ester + eau ⟶ acide carboxylique + alcool.



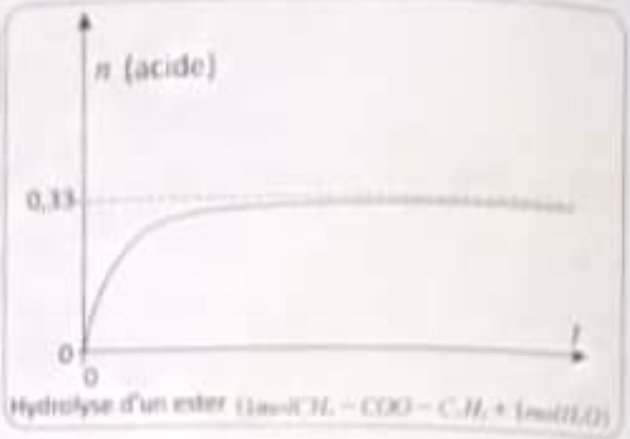
Exemple:



• La réation d'estérification ou la réaction d'hydrolyse d'un ester peuvent être suivies expérimentalement en titrant au cours du temps l'acide carboxylique présent dans le système en évolution.



Estérification ($1mol C_3H_7-COOH + 1mol C_4H_9-OH$)



Hydrolyse d'un ester ($1mol C_3H_7-COO-C_4H_9 + 1mol H_2O$)

3 Équilibre estérification - hydrolyse:

Réaction d'estérification et réaction d'hydrolyse d'un ester sont deux réaction inverses l'une de l'autre qui conduisent à un état d'équilibre où coexistent les quatre constituants; on écrit l'équation de la réaction:

$$R-C(=O)-OH + R'-OH \rightleftharpoons R-C(=O)-O-R' + H_2O$$

acide carboxylique — alcool — ester — eau

- Les transformations associées à ces réactions sont très lentes et limitées; elles conduisent à un même état d'équilibre à partir d'un mélange équimolaire des réactifs soit: acide+alcool, soit ester+eau.
- La constante d'équilibre associée à l'équation de la réaction d'estérification a pour expression:

$$K = \frac{(n_{ester})_{éq}(n_{eau})_{éq}}{(n_{acide})_{éq}(n_{alcool})_{éq}}$$

- Exceptionnellement, K ne dépend pas de la température (du fait du caractère athermique de la réaction).

K dépend de la classe de l'alcool.

4 Rendement:

Le rendement r d'une transformation chimique est égal au rapport suivant:

$r = \frac{n_{exp}}{n_{max}}$

n_{exp} est la quantité de matière obtenue du produit synthétisé.

n_{max} est la quantité de matière attendue du même produit si la réaction est totale.

$r = \frac{m_{exp}}{m_{max}}$

m_{exp} est la masse obtenue expérimentalement du produit synthétisé.

m_{max} est la masse attendue du même produit si la réaction est totale.

Contrôle de la vitesse de réaction:

• Une augmentation de la température permet d'atteindre l'état d'équilibre plus rapidement mais est sans effet sur la composition de cet état.

• L'emploi d'un catalyseur, ici l'ion H^+, permet d'atteindre l'état d'équilibre plus rapidement mais est sans effet sur sa composition, car le catalyseur agit de la même façon sur la réaction directe et sur la réaction inverse.

Contrôle de l'état final:

• L'utilisation d'un excès de l'un des réactifs ou l'élimination de l'un des produits de la réaction déplace l'état d'équilibre d'un système dans le sens direct.

• Pour améliorer le rendement d'une estérification, on peut:

- prendre un excès du réactif le moins coûteux
- et/ou éliminer l'un des produits, soit l'eau, soit l'ester (par distillation s'il est plus volatil que les réactifs).

Test de connaissanc

1 Mots manquants:

a- Un ester possède le groupe caractéristique 1..... la formule d'un ester s'écrit 2 ..... où R est soit un groupe alkyle, soit un 3 ..... d' 4 ..... et R' est exclusivement un groupe 5 .....

b- L'estérification est la réaction d'un 6 ..... avec un 7 ..... Elle conduit à un ester et à de 8 .....

c- L'hydrolyse est la réaction 9 ..... de l'estérification.

d- L'estérification, tout comme 10 sont des réactions 11 ..... et 12 .....

e- Un 13 ..... permet d'atteindre l'équilibre plus rapidement; il n' 14 ..... pas dans l'équation de réaction. Une augmentation de 15 ..... permet également d'accélérer la réaction d'estérification.

Solution

a-

1- $C^{\neq O}_{\backslash O-\overset{|}{C}-}$; 2- $R-C^{\neq O}_{\backslash O-R'}$

3- atome C ; 4- hydrogène ;

5- alkyle.

b- 6- acide carboxylique ; 7- alcool

8- eau.

c- 9- inverse.

d- 10- hydrolyse ; 11- lente,

12- limitée et athermique.

e- 13- catalyseur ; 14- intervient

15- température.

2 Vrai ou faux?

a- L'ester:

$$CH_3-\overset{O}{\overset{\|}{C}}-O-CH_2-CH_2-CH_3$$

est l'éthanoate de propyle. V F

b- L'hydrolyse d'un ester est une réaction lente et totale. V F

c- Le rendement r d'une transformation chimique est égale au rapport: $r=\frac{n_{exp}}{n_{th}}$. V F.

d- L'estérification est la réaction entre un ester et l'eau. V F

e- L'acide sulfurique peut être utilisé comme catalyseur de la réaction d'estérification V F.

f- L'eau n'intervient pas dans l'expression de la constante d'équilibre associée à l'équation de la réaction d'estérification. V F

Solution

a- Vrai b- Faux c- Faux d- Faux e- Vrai f- Faux

QCM:

a- L'estérification est une réaction:

- rapide
- lente
- limitée

b- à la fin d'une estérification d'un mélange d'acide carboxylique et d'alcool primaire, que contient le ballon du chauffage à reflux?

- l'acide carboxylique, l'alcool primaire, l'eau et l'ester.
- l'eau et l'ester.
- l'acide carboxylique, l'alcool primaire.
- l'eau et l'acide carboxylique.

c- On peut accroître le rendement d'une estérification:

- en utilisant de l'acide sulfurique
- à l'aide d'un montage de Dean-Stark
- en augmentant la température
- en distillant l'ester au cours de sa formation.

Solution

a- lente - limitée.

b- l'eau et l'ester l'acide carboxylique l'alcool.

c- en distillant l'ester.

1 Nommer les composés suivant en précisant la fonction:

a- $CH_3-CO_2-C_2H_5$ b- $H-\overset{O}{\overset{\|}{C}}-O-\overset{CH_3}{\overset{|}{CH}}-CH_3$

c- $CH_3-\overset{O}{\overset{\|}{C}}-O-\overset{CH_3}{\overset{|}{CH}}-CH_2-CH_3$

d- $CH_3-\overset{O}{\overset{\|}{C}}-O-CH_2-CH_2-\overset{CH_3}{\overset{|}{CH}}-CH_3$

e- $CH_3-CH_2-CH_2-\overset{O}{\overset{\|}{C}}-O-CH_2-CH_3$

f- $CH_3-\underset{OH}{\underset{|}{CH}}-CH_3$ g- CH_3-CH_2-OH h- $H\overset{O}{\overset{\|}{C}}-OH$

j- $H\overset{O}{\overset{\|}{C}}-O-C_2H_5$ k- $CH_3-\underset{CH_3}{\underset{|}{CH}}-\overset{O}{\overset{\|}{C}}-O-CH_3$

l- $CH_3-CH_2-\overset{O}{\overset{\|}{C}}-OH$ m- CH_3-OH

2- Représenter en formule semi-développée les esters portant les noms suivants:

a- éthanoate de méthyle;

b- méthanoate de butyle;

c- butanoate d'éthyle;

d- méthyl propanoate de propyle;

e- éthanoate de éthyle propyle.

Solution

1- Nomenclature:

a- éthanoate d'éthyle

b- méthanoate de méthyl éthyle

c- éthanoate de 1-méthyl propyle

d- éthanoate de 3-méthyl butyle

e- butanoate d'éthyle

f- propanol

g- ethanol

h- acide méthanoïque

j- méthanoate d'éthyle

k- 2-methyl propanoate de méthyle

l- Acide propanoique

m- méthanol

2- Formules semi-développée:

a- ethanoate de methyle:

$$CH_3-C\overset{O}{\diagdown}O-CH_3$$

b- Methanoate de butyle

$$H-C\overset{O}{\diagdown}O-CH_2-CH_2-CH_2-CH_3$$

c- Butanoate d'ethyl:

$$CH_3-CH_2-CH-C\overset{O}{\diagdown}O-CH_2-CH_3$$

d- methyl propanoate de propyle

$$CH_3-\underset{CH_3}{\underset{|}{CH}}-C\overset{O}{\diagdown}O-CH_2-CH_2-CH_3$$

e- ethanoate d'ethyl propyle:

$$CH_3-C\overset{O}{\diagdown}O-\overset{C_2H_5}{\overset{|}{CH}}-CH_2-CH_3$$

Écrire l'équation de réaction d'estérification des mélanges suivants:

a- acide éthanoïque et propanol.

b- acide méthanoïque et méthanol.

c- acide méthanoïque et 3,3-diméthlbutan-1-ol.

2- Écrire l'équation de réaction d'hydrolyse des esters suivants:

a- éthanoate de méthyle.

b- propanoate de 1-méthylpropyle.

c- 2-méthylbuanoate de méthyle.

d- méthanoate de méthyléthyle.

Solution

1- équation de réaction de estérification:

a-

$$CH_3-C(=O)-OH + CH_3-CH_2-CH_2-OH \rightleftharpoons CH_3-C(=O)-O-CH_2-CH_2-CH_3 + H_2O$$

b-

$$H-C(=O)-OH + CH_3-OH \rightleftharpoons H-C(=O)-O-CH_3 + H_2O$$

c-

$$H-C(=O)-OH + CH_3-\underset{CH_3}{\overset{CH_3}{C}}-CH_2-CH_2-OH \rightleftharpoons H-C(=O)-O-CH_2-CH_2-\underset{CH_3}{\overset{CH_3}{C}}-CH_3 + H_2O$$

2- équation d'hydrolyse:

a- $$CH_3-C(=O)-O-CH_3 + H_2O \rightleftharpoons CH_3-C(=O)-OH + CH_3-OH$$

b-

$$CH_3-CH_2-C(=O)-O-\underset{CH_3}{CH}-CH_2-CH_3 + H_2O \rightleftharpoons CH_3-CH_2-C(=O)-OH + CH_3-CH_2-\underset{CH_3}{CH}-OH$$

c-

$$CH_3-CH_2-\underset{CH_3}{CH}-C(=O)-O-CH_3 + H_2O \rightleftharpoons CH_3-CH_2-\underset{CH_3}{CH}-C(=O)-OH + CH_3OH$$

d-

$$H-C(=O)-O-\underset{CH_3}{CH}-CH_3 + H_2O \rightleftharpoons H-C(=O)-OH + CH_3-\underset{OH}{CH}-CH_3$$

3 En faisant réagir $30g$ d'acide éthanoïque avec $74g$ de butan-1-ol, on a obtenu une masse $m = 49g$ d'ester.

1- Écrire l'équation de réaction modélisant cette transformation et nommer l'ester obtenu.

2- Déterminer le rendement r de cette transformation.

3- Calculer le quotient de réaction dans l'état final du système.

4- Cet état final était-il un l'état d'équilibre, sachant que la constante d'équilibre associée à la réaction étudiée a pour valeur $K = 4,0$?

Données: Masses molaires atomiques $(g.mol^{-1})$:

$$M(H) = 1,0;\ M(C) = 12;\ M(O) = 16.$$

Solution

1- Équation de réaction:

$$\underset{(AC)}{CH_3-C(=O)-OH} + \underset{(Al)}{CH_3-CH_2-CH_2-CH_2-OH} \rightleftharpoons \underset{(E)}{CH_3-C(=O)-O-CH_2-CH_2-CH_2-CH_3} + H_2O$$

(E) : éthanoate de butyle.

2- Rendement:

On a: $r = \dfrac{m_{exp}}{m} = \dfrac{x_f}{x_{max}}$

Avec: $x_f = n(E) = \dfrac{m}{M(E)}$

Et: $M(E) = 118g/mol$

Donc: $x_f = \dfrac{49}{118} \simeq 0,45g$

Et: $x_{max} = \dfrac{m(AC)}{M(AC)}$

$= \dfrac{30}{60} = 0,5mol$

$x_{max} = \dfrac{m(Al)}{M(Al)}$

$= \dfrac{74}{74} = 1mol$

Donc: $r = \dfrac{0,42}{0,5} = 0,84$

$r = 84\%$

3- Calcul de $Q_{r,f}$:

Dressons le tableau d'avancement:

$AC + Al \rightleftharpoons E + H_2O$					
$E.I$	0	0,5	1	0	0
E_{in}	x	$0,5-x$	$1-x$	x	x
$E.F$	x_f	$0,5-x_f$	$1-x_f$	x_f	x_f

On a: $Q_{r,f} = \dfrac{[E][H_2O]}{[AC][Al]}$

$Q_{r,f} = \dfrac{x_f}{(0,5-x_f)(1-x_f)}$

A.N.: $Q_{r,f} = \dfrac{(0,42)^2}{(0,5-0,42)(1-0,42)}$

$Q_{r,f} = 3,80$

4- État du système:

On a: $K = 4$

Alors: $Q_{r,f} \simeq K$

Donc l'état final du système est un éta d'équilibre.

L'éthanoate d'isoamyle ou l'ethanoate de 3- methyl butyl est un composé à odeur de banane dont la formule semi-développée est:

$$CH_3-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-O-CH_2-CH_2-\overset{\overset{CH_3}{|}}{CH}-CH_3$$

On réalise l'hydrolyse de cet ester.

Données: Masses molaires atomiques $(g\,mol^{-1})$:

$M(H)=1,0$; $M(C)=12$; $M(O)=16$.

1- Écrire l'équation de la réaction correspondante et nommer les produits obtenus.

2- La réaction d'hydrolyse est réalisée dans les proportions stoechiométrique avec une masse $m=10g$ d'ester et conduit à une masse $m'=3,0g$ d'alcool.

Calculer le rendement de cette réaction.

3- Comment peut-on améliorer le rendement de cette réaction?

4- Quelle est la masse de l'acide obtenu?

5- Calculer la constante d'équilibre.

Solution

1- équation de réaction:

$$CH_3-C\overset{O}{\underset{O-CH_2-CH_2-\underset{CH_3}{\underset{|}{CH}}-CH_3}{\diagup\!\!\diagdown}}\ +H_2O \rightleftharpoons$$

(E)

$$CH_3-C\overset{O}{\underset{OH}{\diagup\!\!\diagdown}}\ +CH_3-\underset{CH_3}{\underset{|}{CH}}-CH_2-CH_2-OH$$

(AC) (Aℓ)

(AC): Acide éthanoïque

(Aℓ): 3-méthyl butanol

2- Calcul du rendement:

On a: $r=\dfrac{x_f}{x_{max}}$

- $x_f=n(A\ell)=\dfrac{m'}{M(A\ell)}$

$=\dfrac{3}{88}\approx 0,034mol$

- $x_{max}=n(E)=\dfrac{m}{M(E)}$

$=\dfrac{10}{130}=0,077mol$

Donc: $r=\dfrac{0,034}{0,077}\approx 0,442\approx 44,2\%$

3- Amélioration du rendement:

On peut améliorer le rendement de la réaction par:

- élimination d'un produit.
- ajouter un réactif.

4- Masse de l'acide:

On a: $n(AC)=n(A\ell)=x_f$

$$\frac{m(AC)}{M(AC)}=\frac{m(A\ell)}{M(A\ell)}$$

Donc: $M(AC)=\dfrac{m'}{M(A\ell)}M(AC)$

A.N.: $m(AC)=\dfrac{10}{88}60$

$M(AC)\simeq 6,82g$.

5- Constante d'équilibre:

On a: $K=Q_{r,éq}$;

$$K=\frac{[AC]_é[A\ell]_é}{[E]_é[H_2O]_é}$$

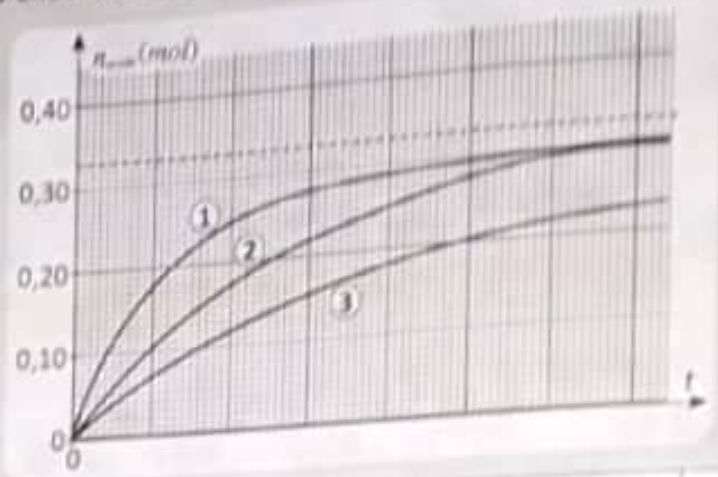
$$K = \frac{\left(\frac{x_f}{V}\right)^2}{\left(\frac{n_0 - x_f}{V}\right)^2} = \left(\frac{x_f}{n_0 - x_f}\right)^2$$

A.N.: $K = \left(\frac{0,034}{0,077 - 0,034}\right)^2$

$K = 0,62$.

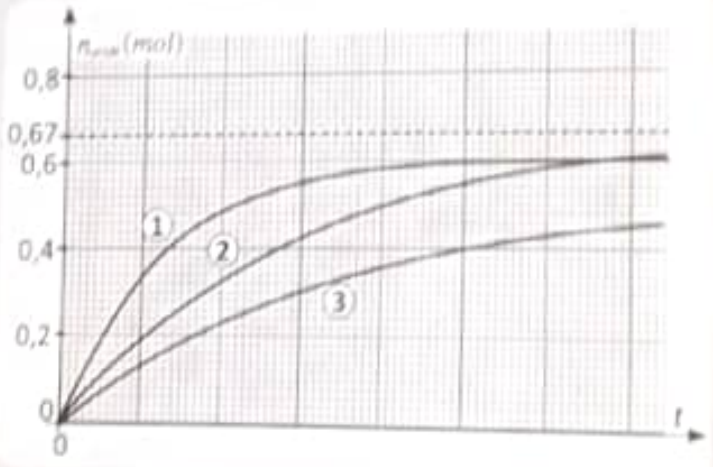
Analyse de résultats:

1- Les graphes des documents ci-dessous donnent la quantité d'acide obtenu lorsqu'on fait réagir $1,00mol$ d'éthanoate d'éthyle et $1,00mol$ d'eau, dans des conditions expérimentales différentes. Associer, en justifiant la réponse, le graphe correspondant à chacune des expériences.



Expérience	A	B	C
$\theta(°C)$	50	50	80
$V(H_2SO_4)(mL)$	0	2	2

2- Même question, en analysant les graphes ci-dessous qui donnent la quantité d'ester obtenu lorsqu'on fait réagir $1,00mol$ d'acide éthanoïque et $1,00mol$ d'éthaonl et que l'on fait varier les conditions expérimentales.



Expérience	A	B	C
$\theta(^{\circ}C)$	50	50	80
$V(H_2SO_4)(mL)$	0	2	2

3- Quels facteurs de l'équilibre d'estérification mettent en évidence ces tracés?

Solution

1- équation de réaction:

$$CH_3 - C(=O)-O-C_2H_5 + H_2O \rightleftharpoons CH_3 - COOH + C_2H_5 - OH$$

Le graphe (1) correspond à l'expérience C.

La plus rapide du fait que la température est plus élevée et par la présence du catalyseur.

• Le graphe (2) correspond à l'expérience B la moins rapide que C : $\theta(B) < \theta(C)$ et plus rapide que A (existence du catalyseur).

• Le graphe (3) correspond à l'expérience A.

2- équation de réaction:

$$CH_3 - COOH + C_2H_5 - OH \rightleftharpoons CH_3 - C(=O)-O-C_2H_5 + H_2O$$

Courbe	Expérience	Justification
(1)	C est la plus rapide	température d'élevée ⊕ catalyseur
(2)	B est moins rapide que C	$\theta(B) < \theta(C)$ catalyseur ⊕
(3)	A est lente par rapport à B et à C	équation

Expérience	facteurs cinétiques
A	température
B	température + catalyseur (H_3O^+)
C	température + catalyseur (H_3O^+)

Le tableau ci-dessous donne les grandeurs physiques des réactifs et produits de la réaction.

	Densité	Masse molaire $(g.mol^{-1})$	$T_{éb}$ $(°C)$
Acide méthanoïque	1,22	46	100,7
Éthanol	0,79	46	78,5
Méthanoate d'éthyle	0,91	74	54,3
Eau	1,00	18	100,0

• Afin de synthétiser du méthanoate d'éthyle (ou formiate d'éthyle), un ester à l'odeur de rhum, un groupe d'élèves prépare un mélange équimolaire des réactifs. En prélevant un volume $V_1 = 25,0mL$ d'éthanol absolu et un volume V_2 d'acide méthanoïque. On introduit ce mélange équimolaire et quelques gouttes d'acide sulfurique dans un ballon, puis on réalise un montage à reflux. Après 45 minutes de chauffage, on laisse refroidir et on analyse le système chimique à cette date. Par dosage, on montre qu'il reste $144mmol$ d'acide formique.

1- Montrer que la quantité de matière d'alcool mis en jeu est $430mmol$.

2- En déduire le volume d'acide méthanoïque à prélever.

3- Écrire l'équation e la réaction de la transformation.

4- En déduire la composition molaire du système chimique et la la masse d'ester obtenue à la transformation chimique?

5- Quel est le rendement de la transformation chimique?

6- Montrer que l'état d'équilibre est atteint $(K = 4)$.

Solution

1- Quantité de matière:

Soit $n_0(Al)$ la quantité de matière de l'éthanol.

On a: $n_0(Al) = \frac{m(Al)}{M(Al)} = \frac{\rho(Al).V_1}{M(Al)}$

A.N.: $n_0(Al) = \frac{d.\rho_{eau}.V_1}{M(Al)}$

$= \frac{0,79.1.25}{46} \simeq 0,430mol$

$n_0(A) \approx 430mmol$

2- Volume de l'acide:

On a: $n_0(AC) = n_0(Al)$

Donc: $\frac{d\rho_{AC}.V_2}{M(Al)} = n_0(Al)$;

$V_2 = \frac{n_0(Al).M(AC)}{d.\rho_{AC}}$

A.N.: $V_2 = \frac{0,430.46}{1,22.1}$; $V_2 = 16,2mL$

3- équation de réaction:

$$\underset{(AC)}{H-C(=O)-OH} + \underset{(Al)}{CH_3-CH_2-OH} \rightleftharpoons \underset{(E)}{H-C(=O)-O-CH_2-CH_3} + H_2O$$

4- Composition du système:

Dressons le tableau d'avancement:

	$AC + A\ell \rightleftharpoons E + H_2O$				
EI	0	$n_0(AC)$	$n_0(A\ell)$	0	0
E_{tr}	x	$n_0 - x$	$n_0 - x$	x	x
EF	x_f	$n_0 - x_f$	$n_0 - x_f$	x_f	x_f

Avec: $n_0 - x_f = n(AC) = 0,144mol$

Donc: $x_f = n_0 - 0,144$

$= 0,430 - 0,144 = 0,286mol$

EF	0,144	0,144	0,286	0,286

5- Le rendement:

On a: $r = \frac{x_f}{x_{max}}$;

$$r = \frac{0,286}{0,430} \approx 0,67 = 67\%$$

6- État du système:

On a: $Q_{r,f} = \frac{[E].[H_2O]}{[AC].[A\ell]}$;

$$Q_{r,f} = \left(\frac{x_f}{n_0 - x_f}\right)^2$$

A.N.: $Q_{r,f} = \left(\frac{0,286}{0,144}\right)^2 \approx 4$

l'équilibre est atteint.

On étudie expérimentalement l'hydrolyse d'un ester, de formule brute $C_3H_6O_2$.

On introduit un mélange équimolaire d'ester ($m_1 = 6,000g$) et d'eau (masse m_2), puis quelques gouttes d'acide sulfurique dans un ballon équipé d'un montage à reflux et placé dans un bain-marie. Après 30 minutes, le ballon est placé dans de l'eau glacée.

Le titrage de l'acide carboxylique par une solution d'hydroxyde de sodium concentrée montre qu'il s'est formé la masse $m = 1,533g$ d'acide.

1- Écrire la formule semi-développée et nommer l'ester, puis donner l'équation de la réaction d'hydrolyse.

2- Déterminer la masse m_2 d'eau introduite.

3- Expliquer les rôles du bain-marie et de l'eau glacée.

4.a- Décrire la composition du mélange au bout de 30 min.

b- En déduire le rendement de la transformation chimique et le quotient de réaction à la date $t = 30\,\text{min}$.

5- La constante de réaction est $K = 0,25$: l'état d'équilibre est il-atteint?

Solution

1- Equation:

Formule semi-développée $C_3H_6O_2$: $H-C(=O)-O-CH_3$

- Le nom: Méthanoate de méthyl
- L'équation de la réaction d'hydrolyse.

$$\underset{\text{(ester)}}{H-C(=O)-O-CH_3} + \underset{\text{(eau)}}{H_2O} \rightleftharpoons \underset{(Ac)}{H-C(=O)-OH} + \underset{(A\ell)}{CH_3-OH}$$

2- Détermination de m_2 :

Le mélange est équimolaire, donc:

$$n_0(ester) = n_0(eau)$$

$$\frac{m_1}{M_1} = \frac{m_2}{M_2} \Leftrightarrow m_2 = \frac{m_1 M_2}{M_1}$$

A.N.: $m_2 = 6.\frac{18}{20} = 1,8g$

3- rôle:

Le bain marie: favorise le chauffage à température constante ce qui permet d'accélerer la réaction.

l'eau glacée: fait arrêter la réaction

4- Tableau d'avancement:

On a: $n_0 = \frac{m_1}{M_1} = 0,1mol$

$ester + eau \rightleftharpoons Ac + Al$					
$E.I$	0	n_0	n_0	0	0
$E.F$	x_f	$n_0 - x_f$	$n_0 - x_f$	x_f	x_f

Avec:

$$n(Al) = xf$$

$$n(AC) = \frac{m}{M(AC)}$$

$$n(AC) = \frac{1,533}{46}$$

$$= 0,033mol$$

D'où: $x_f = 0,033mol$

$E.F$	0,067	0,067	0,033	0,033

b- rendement:

On a: $r = \frac{m_{exp}}{m_0} = \frac{x_f}{x_{max}}$

Avec: $x_m = n_0 = 0,1mol$

Donc: $r = \frac{0,033}{0,1} = 0,33 = 33\%$

• Calcul de Q_r : son expression s'écrit:

$$Q_r = \frac{[Al][AC]}{[Ester][Eau]} = \frac{\frac{x_f}{V}.\frac{x_f}{V}}{\frac{n_0 - x_f}{V}.\frac{n_0 - x_f}{V}}$$

$$Q_r = \left(\frac{x_f}{n_0 - x_f}\right)^2$$

A.N.: $Q_r = \left(\frac{0,033}{0,067}\right)^2 \simeq 0,25$

5- constante d'équilibre:

On a: $K = Q_r$ Donc l'état équilibre est atteint.

6 Constante d'équilibre:

On étudie la synthèse d'un ester E en faisant réagir $n_1(0)mol$ d'acide éthanoïque et $n_2(0)mol$ de propan-1-ol. Dans son état d'équilibre, le système de volume V, contient $n_{1eq} = 0,18mol$ d'acide éthanoïque et $n_{2eq} = 0,11mol$ de propan-1-ol, $n_{eq} = 0,28mol$ d'ester et $n_{eq} = 0,28mol$ d'eau.

1- Écrire l'équation de la réaction et nommer l'ester E.

2- Écrire l'expression du quotient de réaction Q_r, en fonction des concentrations des espèces puis en fonction de leurs quantités de matière.

3- Déterminer la constante d'équilibre de cette réaction.

4- En utilisant un tableau d'avancement déterminer les valeurs de $n_1(0)$ et $n_2(0)$.

5- Définir puis calculer le rendement de cette synthèse.

Solution

1- Équation de réaction:

$$\underset{(AC)}{CH_3 - C(=O) - OH} + \underset{(Al)}{CH_3 - CH_2 - CH_2 - OH} \rightleftharpoons \underset{(E)}{CH_3 - C(=O) - O - CH_2 - CH_2 - CH_3} + H_2O$$

2- Expression de Q_r:

On a: $Q_r = \dfrac{[E].[H_2O]}{[AC].[A\ell]}$

$$Q_r = \frac{\left(\frac{n_3}{V}\right)\left(\frac{n_4}{V}\right)}{\left(\frac{n_1}{V}\right)\left(\frac{n_2}{V}\right)} = \frac{n_3.n_4}{n_1.n_2}$$

3- Constante d'équilibre:

On a: $Q_r = K$

Donc: $K = \dfrac{n_{3,éq}.n_{4,éq}}{n_{1,éq}.n_{2,éq}}$

$$K = \frac{0,28.0,28}{0,11.0,18} \; ; \; K \approx 3,96 \approx 4$$

4- Valeurs de $n_1(0)$ et $n_2(0)$.

Dressons le tableau d'avancement:

$AC + A\ell \rightleftharpoons E + H_2O$			
$n_1(0)$	$n_2(0)$	0	0
$n_1(0) - x$	$n_2(0) - x$	x	x
$n_1(0) - x_f$	$n_2(0) - x_f$	x_f	x_f

Alors: $\begin{cases} n_1(0) - x_f = 0,18 \\ n_2(0) - x_f = 0,11 \end{cases}$

Et: $n_{3,éq}(E) = n_{4,éq}(H_2O) = x_f = 0,28mol$

Donc: $\begin{cases} n_1(0) = 0,18 + x_f = 0,46mol \\ n_2(0) = 0,11 + x_f = 0,39mol \end{cases}$

5- Le rendement par de finition on a:

$$r = \frac{m_{exp}}{m_{th}}$$

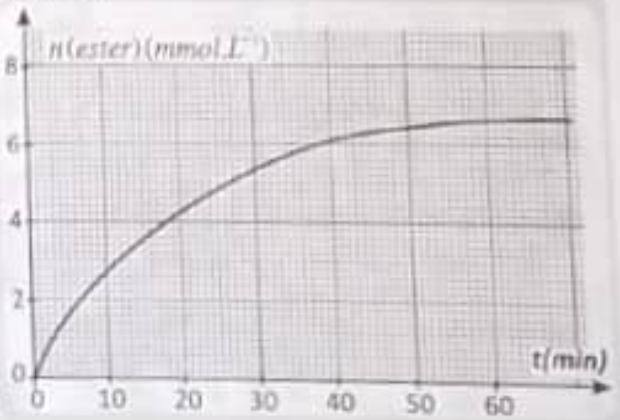
- m_{exp} : masse expérimentale obtenue du produit.
- m_{th} : masse théorique calculée du même produit en soupposant que la réaction est totale.

Alors: $r = \dfrac{x_f}{x_{max}} \; ; \; r = \dfrac{0,28}{0,39} \approx 0,72$

$r \simeq 72\%$.

On étudie la cinétique de la réaction entre l'acide méthanoïque et le pentan-1-ol. Initialement, on réalise un mélange contenant $n_{acide}(0) = n_{alcool}(0) = 0,100mol$ et quelques gouttes d'acide sulfurique concentré. Ce mélange est réparti en 10 échantillons identiques dans des ampoules scellées que l'on plonge dans une enceinte isotherme à $80°C$. À intervalles de temps réguliers, une ampoule est brisée et son contenu dilué dans $50mL$ d'eau glacée. Par dosage avec une solution de soude, on détermine la quantité d'acide présent.

On a pu tracer le graphe: $n_{ester} = f(t)$ ci-contre.



1- écrire l'équation de la réaction étudiée.

2- Trouver, dans le protocole, deux moyens utilisés pour augmenter la vitesse de la réaction.

3- Comment appelle-t-on l'opération consistant à diluer le contenu d'une ampoule dans de l'eau glacée? Quel est son rôle?

4- Déterminer le rendement final de la réaction.

5- à quelle date la vitesse de la réaction est-elle maximale?

6- Que se passe-t-il pour $t > 60\,\text{min}$?

Solution

1- Equation:

L'acide méthanoïque HCO_2H et le pentan-1-ol $CH_3(CH_2)_4OH$ réagissent selon l'équation:

$$HCO_2H + CH_3(CH_2)_4OH \rightleftharpoons HCO_2(CH_2)_4CH_3 + H_2O$$

2- Protocole:

Pour augmenter la vitesse de la réaction, le protocole impose une température élevée $(80°C)$ et l'emploi d'un catalyseur, l'acide sulfurique, source d'ions H^+.

3- L'opération:

L'opération consistant à diluer le contenu d'une ampoule dans de l'eau glacée s'appelle une trempe.

Son rôle est de ralentir considérablement la vitesse d'évolution du système en jouant sur deux facteurs cinétiques:

la concentration des réactifs (dilution) et leur température (eau glacée).

4- Rendement:

Le rendement final de la réaction vaut:

$$r = \frac{n_{ester}}{n_{acide\,initial}} = \frac{n_{ester}}{n_{acide}}$$

Avec: $n_{acide} = \frac{n_{acide}(0)}{10}$,

$$r = \frac{6.10^{-3}}{10,0.10^{-3}} = 0,6 = 60\%.$$

5- La date:

La vitesse de la réaction est donnée par la pente de la tangente à la courbe $n_{ester} = f(t)$ Elle est maximale pour $t = 0$, c'est-à-dire lorsque:

- les concentrations des réactifs sont maximales;
- la réaction d'hydrolyse de l'ester n'a pas encore commencé.

6- Etat du système:

Pour $t > 60\,\text{min}$, la pente de la tangente à la courbe est nulle; la vitesse d'évolution du système est alors nulle. Les réactions d'estérification et d'hydrolyse se compensent alors; leurs vitesses ne sont pas nulles, elles sont égales:

l'équilibre chimique est un équilibre dynamique.

10 Deux élèves étudient la réaction d'estérification. Dans un tube placé à température constante $(\theta = 80°C)$, on introduit $n_a = 50,0mmol$ d'acide éthanoïque (acétique) et la même quantité de matière de propan-1-ol.

1- Donner l'équation de cette transformation chimique.

2- Après $10\,\text{min}$ de chauffage, le tube est refroidi dans l'eau glacée. Un titrage de l'acide restant montre qu'il reste la quantité $n_a = 42,0mmol$ d'acide éthanoïque. Calculer le quotient de réaction Q_r à l'instant $t_1 = 10\,\text{min}$?

3- La même opération menée après $t_2 = 1h$ et $t_3 = 3h$, montre qu'il reste dans les deux cas $n'_a = 16,6mmol$ d'acide éthanoïque.

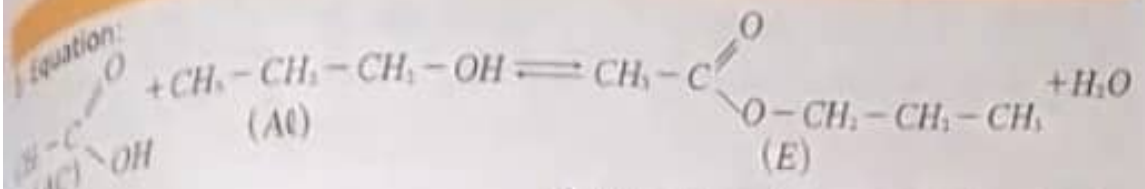
a- Que peut-on dire du système chimique?

b- En déduire la constante d'équilibre K.

4- Un autre binôme introduit, dans les mêmes conditions de température, $n'_a = 70,0mmol$ d'acide éthanoïque et $n_a = 50,0mmol$ de propan-1-ol. Déterminer le rendement final qu'il peut espérer, lorsque l'état d'équilibre sera atteint.

Solution

1- Équation:



2- Calcul de Q_r:

On dresse le tableau d'avancement:

	$ac + al \rightleftharpoons ester + eau$			
EI	50,0	50,0	0	0
E.Int.	$50,0-x$	$50,0-x$	x	x
EF	$50,0-x_1$	$50,0-x_1$	x_1	x_1

À partir de $n_{ac} = 42,0$, on retrouve la composition du système chimique à l'instant 1.

A $t_1 = 10\,\text{min}$;

$n_{ester} = x_1$ et $n_{ac} = n_{ac} - x_1$;

donc: $n_{ester} = 50,0 - 42,0 = 8,0mmol$.

Quotient de réaction:

$$Q_{r1} = \frac{(n_{ester} \times n_{eau})}{(n_{acide} \times n_{alcool})} ;$$

$$Q_{r1} = \frac{(8,0 \times 8,0)}{(42,0 \times 42,0)} = 3,6 \times 10^{-2}.$$

3- Calcul de Qr :

Aux dates t_1 et t_3, la quantité n_{ester} et la même quantité d'eau se sont formées:

$$Q_{r3} = \frac{(n_{ester} \times n_{eau})}{(n_{acide} \times n_{alcool})} ;$$

$$Q_{r3} = \frac{(33,4 \times 33,4)}{(16,6 \times 16,6)} = 4,0.$$

À l'équilibre, le quotient de réaction $Q_r = K$ (constante de réaction). La constant d'équilibre est donc: $K = 4,0$.

4- Le rendement:

On recherche l'avancement final:

	acide + alcool ⇌ ester + eau			
É.I	70,0	50,0	0	0
É.Int.	$70,0-x$	$50,0-x$	x	x
É.F.	$70,0-x_f$	$50,0-x_f$	x_f	x_f

À l'état d'équilibre:

$$K = \frac{x_f^2}{[(70,0-x_f)\times(50,0-x_f)]} = 4,0;$$

soit: $3x_f^2 - 480x_f + 14000 = 0$.

La résolution de cette équation donne deux solutions, dont une seule est acceptable: $x_f = 38,4mmol$.

L'état d'équilibre se définit donc comme:

	acide + alcool ⇌ ester + eau			
État final	$70,0-38,4$ $= 31,6$	$50,0-38,4$ $= 11,6$	38,4	38,4

Le rendement de la transformation chimique est: $r = \frac{38,4}{50,0} = 76,8\%$.

On réalise le chauffage à reflux d'un mélange de $0,40mol$ d'acide méthanoïque et de $0,40mol$ de propan-2-ol. On ajoute à ce mélange quelques gouttes d'acide sulfurique concentré. Au bout d'une heure, on arrête la réaction et l'on détermine par titrage acido-basique la quantité restante d'acide méthanoïque, soit $n = 0,18mol$.

1- Quel ester obtient-on? Le nommer.

2- Établir le tableau d'évolution de la réaction étudiée.

3.a- Quelle est la valeur de l'avancement à l'équilibre $x_{éq}$?

b- Exprimer la constante d'équilibre K en fonction de $x_{éq}$ et la calculer.

4- Calculer le rendement de cette estérification.

Solution

1- Nom de l'ester:

$H-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-O-\overset{\overset{CH_3}{|}}{CH}-CH_3$ L'ester est le méthanoate de méthyléthyle.

2- Tableau d'évolution:

Équation	$H-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-OH(\ell) + CH_3-\overset{\overset{OH}{|}}{CH}-CH_3(\ell) \rightleftharpoons H-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-O-\overset{\overset{CH_3}{|}}{CH}-CH_3(\ell) + H_2O(\ell)$				
É. Initial	0	$n_{ac} = 0,40$	$n_{al} = 0,40$	0	0
É. Équilibre	$x_{éq}$	$n_{ac} - x_{éq}$	$n_{al} - x_{éq}$	$x_{éq}$	$x_{éq}$

3.a- Valeur de $x_{éq}$:

À l'état final, on a $0,40 - x_{éq} = 0,18$.

donc: $x_{éq} = 0,22mol$.

b- Expression de K:

La constante d'équilibre d'une estérification s'exprime par:

$$K = \frac{[ester]_{éq} \times [eau]_{éq}}{[acide]_{éq} \times [alcool]_{éq}}$$

$$= \frac{n_{ester} \times n_{eau}}{n_{acide} \times n_{alcool}}$$

donc: $K = \frac{x_{éq}^2}{(0,40 - x_{éq})^2}$.

A.N.: $K = 1,5$.

4- Le rendement:

Le rendement d'une réaction est donné par la relation: $r = \frac{n_{éq}}{n_{max}}$ soit:

avec: $n_{éq} = 0,22mol$

et: $n_{max} = 0,40mol$.

donc: $r = \frac{0,22}{0,40} = 0,55 = 55\%$

12 Par chauffage d'un mélange constitué de $1,0mol$ de propan-2-ol A et de $1,0mol$ d'acide méthanoïque B, on a obtenu, après traitement approprié, $53g$ d'un composé organique C.

1- Écrire l'équation de la réaction modélisant la transformation effectuée.

2- Donner le nom et la formule semi-développée du composé C.

3- Calculer le rendement de la transformation réalisée.

4- En supposant que l'on a isolé l'intégralité du composé C présent à l'équilibre, calculer la constante d'équilibre K associée à l'équation donnée en 1.

5- Quel rendement pourrait-on obtenir en effectuant la même transformation à partir d'un mélange de $1,0mol$ de A et de $2,0mol$ de B?

6- Au mélange à l'équilibre obtenu initialement par chauffage de $1,0mol$ de A et de $1,0mol$ de B, on ajoute $1,0mol$ de B.

a- Dans quel sens évolue le système?

b- Déterminer sa composition lorsque le nouvel état d'équilibre est atteint?

c- Quel est alors le rendement en ester?

d- Comparer ce résultat à celui de la question 5.

Données: • Masses molaires atomiques $(g.mol^{-1})$:

$$M_H = 1,0;\ M_C = 12;\ M_O = 16.$$

Solution

1- Équation de la réaction:

$$H-COOH + CH_3-CHOH-CH_3 \rightleftharpoons H-COOCH(CH_3)_2 + H_2O$$

2- Le nom:

Le composé C est le méthanoate de méthylethyle, de formule semi-développée est: $H-C(=O)-O-CH(CH_3)-CH_3$

3- Le rendement:

par définition

on a: $r = \frac{n_f}{n_{max}}$; avec: $n_{max} = 1,0mol$.

et: $n_f = \frac{m_{ester}}{M_{ester}}$

avec: $M_{ester} = 4\times 12 + 8\times 1,0 + 2\times 16.$

$= 88g.mol^{-1}$

D'où: $n_f = \frac{53}{88} = 0,60mol$.

donc: $r = \frac{n_f}{n_{max}} = \frac{,60}{1,0} = 0,60 = 0,60\%$

4- Calcul de K:

On peut dresser le tableau d'évolution du système suivant, en considérant que l'état final est l'état d'équilibre et en tenant compte du fait que l'avancement à l'équilibre est: $x_f = n_f = 0,60mol$

Équation	$H-COOH + CH_3-CHOH-CH_3 \rightleftharpoons H-COOCH(CH_3)_2 + H_2O$			
État initial (mol)	1,0	1,0	0	0
État d'équilibre (mol)	$1,0-x_f = 0,40$	$1,0-x_f = 0,40$	$x_f = 0,60$	$x_f = 0,60$

La constante d'équilibre K a pour expression:

$$K = \frac{(n_{ester})_{éq}(n_{eau})_{éq}}{(n_{acide})_{éq}(n_{alcool})_{éq}}$$

$$K = \frac{0,60\times 0,60}{0,40\times 0,40} = 2,25$$

5- Le rendement:

Avec les quantités initiales indiquées, le tableau d'évolution devient:

Équation	$H-COOH + CH_3-CHOH-CH_3 \rightleftharpoons H-COOCH(CH_3)_2 + H_2O$			
E.I	2,0	1,0	0	0
E.éq	$2,0-x_f$	$1,0-x_f$	x_f	x_f

On calcule alors l'avancement à l'équilibre, à l'aide de la constante K:

$K = \frac{x_f x_f}{(2-x_f)(1-x_f)} = 2,25$ qui conduit à l'équation $1,25x_f^2 - 6,75x_f + 4,5 = 0$ dont la seule solution est: $x_f = 0,78mol$.

Le réactif limitant est l'alcool, on a:

$n_{max} = 1mol$, alors que la quantité effectivement obtenue est $n_f = x_f$.

Le rendement en ester est donc:

$\eta = \frac{x_f}{n_{max}} = 0,78$, soit 78%.

6.a- Sens:

à l'état initial on a:

$$Q_{r0} = \frac{(0,60)^2}{1,40.0,40} = 0,36$$

alors: $Q_{r0} < k$.

Le système évolue, dans le sens direct.

b- Composition:

Dressons le tableau décrivant l'évolution du système lorsqu'au mélange à l'équilibre, on ajoute $1,0mol$ de B.

		$H-COOH + CH_3-CHOH-CH_3 \rightleftharpoons H-COOCH(CH_3)_2 + H_2O$			
E.I	$x'=0$	1,40	0,40	0,60	0,60
E.éq	x'_f	$1,40-x'_f$	$0,40-x'_f$	$0,60+x'_f$	$0,60+x'_f$

On détermine l'avancement final x'_f dans le nouvel état d'équilibre à l'aide de la constante K:

$$K = \frac{(0,60+x'_f)^2}{(1,40-x'_f)(0,40-x'_f)} = 2,25$$

qui conduit à l'équation:

$$1,25x'^2_f - 5,25x'_f + 0,90 = 0.$$

dont la solution comprise entre 0 et: 0,40 est: $x'_f = 0,18mol$.

D'où la composition du mélange dans le nouvel état d'équilibre:

1,22	0,22	0,78	0,78

c- Le rendement:

Se calcule par rapport au réactif limitant A dont $1,0mol$ a été mise en jeu:

$$r = \frac{n_c}{n_{A\,mol}} = \frac{0,78}{1,0} = 78\%$$

d- Comparaison:

Le rendement est le même que celui obtenu à partir d'un mélange initial de $1,0mol$ de A et de $2,0mol$ de B. Que l'excès de réactif soit apporté dans l'état initial ou dans l'état d'équilibre ne modifie pas le rendement dans l'état d'équilibre final.

13 On réalise la réaction d'estérification entre un alcool A et un acide B. L'ester est de formule brute: $C_5H_{10}O_2$.

1- Donner les formules semi-développées des quatre ester à chaîne carbonée non ramifiée de formule brute $C_5H_{10}O_2$. Nommer ces esters.

2- La formule brute de l'alcool A est $C_nH_{2n+1}OH$. Déterminer n sachant que la masse molaire de l'alcool est: $M_A = 46,0g.mol^{-1}$.

3- Déduire de la question précédente l'ester effectivement formé. Préciser quel acide B a réagi avec l'alcool A. Écrire l'équation de la réaction.

4- Le mélange réactionnel initial comprenait $m_A = 138g$ d'alcool et $m_B = 370g$ d'acide.

a- Est-on dans les proportions stoechiométriques?

b- Le rendement de la réaction d'estérification est: $r = 81,0\%$. Définir la notion de rendement.

En déduire la quantité de matière de chaque espèce présente en fin de réaction.

c- Calculer la constante d'équilibre de l'estérification.

Données: $M_O = 16,0g.mol^{-1}$; $M_C = 12,0g.mol^{-1}$; $M_H = 1,0g.mol^{-1}$.

Solution

1- Les esters:

Les esters de formule brute $C_5H_{10}O_2$, à chaîne non ramifiée:

$$CH_3-CH_2-CH_2-C\overset{O-CH_3}{\underset{=O}{\swarrow}}$$

Butanoate de méthyle:

$$CH_3-CH_2-C\overset{O-CH_2-CH_3}{\underset{=O}{\swarrow}}$$

Propanoate d'éthyle:

$$CH_3-C\overset{O-CH_2-CH_2-CH_3}{\underset{=O}{\swarrow}}$$

Éthanoate de propyle:

$$H-C\overset{O-CH_2-CH_2-CH_3}{\underset{=O}{\swarrow}}$$

Méthanoate de butyle:

2- Détermination de n:

Soit l'alcool de formule brute:

$C_nH_{2n+1}-OH$.

Sa masse molaire s'écrit:

$$M=16+12n+2n+2=46g.mol^{-1}$$

d'où: $14n+18=46$, soit: $n=2$.

Il s'agit de l'éthanol: CH_3-CH_2-OH.

3- L'ester:

L'ester effectivement formé est le propanoate d'éthyle, obtenu lors de l'action de l'acide propanoïque sur l'éthanol:

$$CH_3-CH_2-C\overset{OH}{\underset{=O}{\swarrow}}+CH_3-CH_2OH \rightleftharpoons CH_3-CH_2-C\overset{O-CH_2-CH_3}{\underset{=O}{\swarrow}}+H_2O$$

4.a- Les proportions:

Quantité de matière d'alcool (A):

$$n_{alcool}=\frac{m_A}{M_A}=\frac{138}{46,0}=3,00mol.$$

Quantité de matière d'acide (B):

$$n_{acide}=\frac{m_B}{M_B}=\frac{370}{74,0}=5,00mol.$$

L'acide est en excès, acide et alcool ne sont pas dans les proportions stoechiométriques.

b- Le rendement:

Se définit comme: $r=\frac{n^f_{ester}}{n^{max}_{ester}}$.

L'alcool est en défaut, la quantité maximale d'ester que l'on peut obtenir est donc égale à celle d'alcool initial:

n_{alcool}.

Donc: $r=\frac{n^f_{ester}}{n_{alcool}}$.

En fin de réaction, on dispose de:

$$n^f_{ester}=n^f_{eau}=3,00\times 0,810=2,43mol$$

et: $n^f_{acide}=n^i_{acide}-n^f_{ester}=5,00-2,43=2,57mol$

$$n^f_{alcool}=n^i_{alcool}-n^f_{ester}=3,00-2,43=0,570mol$$

c- Calcul de K:

$$K=\frac{[ester]_{éq}[eau]_{éq}}{[alcool]_{éq}[acide]_{éq}}=\frac{\frac{n^f_{ester}}{V}\times\frac{n^f_{eau}}{V}}{\frac{n^f_{alcool}}{V}\times\frac{n^f_{acide}}{V}}=\frac{(2,43)^2}{2,57\times 0,570}\simeq 4$$

14 On réalise une réaction d'estérification entre l'acide A et l'alcool B.

a constante d'équilibre de la réaction est $K=2,25$.

On dispose initialement de $n_A=1,0mol$ d'acide et $n_B=2,0mol$ d'alcool.

On travaille en milieu acide (le catalyseur est l'acide sulfurique H_2SO_4) et en

chauffant à l'aide d'un montage à reflux.

1- Faire un schéma du montage, préciser le rôle de l'acide et du chauffage à reflux.

2- Écrire l'équation de la réaction d'estérification. Donner ses caractéristiques.

3- En dressant un tableau d'avancement, calculer la quantité de matière finale en réactifs et en produits à l'équilibre.

4- Déduire de la question précédente le rendement de la réaction.

5- Une fois l'équilibre atteint, on ajoute une mole d'acide A. On négligera la variation de volume liée à cet ajout de matière.

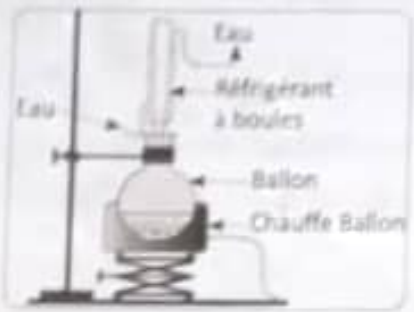
a- Calculer le quotient de réaction initial $Q_{r,i}$ et en déduire le sens de la réaction.

b- En faisant un tableau d'avancement, calculer la quantité de matière de chaque espèce chimique dans le nouvel état d'équilibre.

c- En déduire le rendement r' de la réaction. Conclure en comparant avec le rendement r de la question.

Solution

1- Montage et rôle de H_2SO_4:



• L'acide sulfurique H_2SO_4 est un catalyseur accélère la réaction sans modifier la composition molaire du mélange final.

• Le chauffage a reflux a deux rôles:

- Accélérer la réaction par chauffage.

- Eviter les pertes de matière par condensation.

2- Équation: On peut écrire:

acide A+alcoolB ⇌ ester+eau

c'est une réaction lente et limitée.

3- Tableau d'avancement:

		Acide A	Alcool B ⟺	Ester	Eau
E.I	0	$1,0mol$	$2,0mol$	0	0
E.Int.	x	$1,0-x(t)$	$2,0-x(t)$	$x(t)$	$x(t)$
E.F	x_f	$1,0-x_f$	$2,0-x_f$	x_f	x_f

À l'équilibre final, on a:

$$K=\frac{\frac{x_f^2}{V^2}}{\frac{(1-x_f)(2-x_f)}{V^2}}=\frac{x_f^2}{(1-x_f)(2-x_f)}$$

on a donc: $x_f^2=K(2x+x_f^2-3x_f)$

soit: $x_f^2(K-1)-3Kx_f+2K=0$;

et numériquement:

$$1,25x_f^2-6,75x_f+4,5=0.$$

On trouve: $\begin{cases} x_1=4,62mol>1mol \\ x_2=0,78mol \ \ solution \end{cases}$

On retient $x_f=0,78mol$, et on en déduit les quantités de matière:

$0,22$	$1,22$	$0,78$	$0,78$

4- Rendement:

on a: $r=\frac{n'_{ester}}{n_{max}}=\frac{0,78}{1}=78\%$

5.a- Calcule de $Q_{r,i}$:

Après l'ajout d'acide et avant que la réaction ne démarre, on a:

$$Q_{r,i}=\frac{\frac{n_{ester}}{V}\times\frac{n_{eau}}{V}}{\frac{n_{alcool}}{V}\times\frac{n_{acide}}{V}}$$

$$=\frac{0,78\times0,78}{1,22\times(1+0,22)}=0,41$$

Comme $Q_{r,i}<K$, le système chimique va

évoluer spontanément dans le sens de la formation de l'ester.

b- Bilan de matière:

Dressons le nouveau tableau d'avancement:

	Acide A	Alcool B	Ester	Eau	$x(mol)$
Etat initial	1,22	1,22	0,78	0,78	0
Etat final	$1,22-x'_f$	$1,22-x'_f$	$0,78+x'_f$	$0,78+x'_f$	x'_f

A l'équilibre chimique on a:

$$K=\frac{(0,78+x'_f)^2}{(1,22-x'_f)^2};$$

soit: $\sqrt{K}=\frac{0,78+x'_f}{1,22-x'_f}$

$1,5(1,22-x'_f)=(0,78+x'_f)$

soit: $1,83-1,5x'_f=0,78+x'_f$;

soit: $x'_f=0,42mol$; $x'=1,044mol$.

donc la composition final du mélange est:

0,80	0,80	1,20	1,20

Pour obtenir un ester E, on prépare un mélange constitué de $n_1=0,35mol$ d'acide éthanoïque et de $n_2=0,20mol$ d'alcool benzylique de formule $C_6H_5-CH_2-OH$.

On ajoute au mélange quelques gouttes d'acide sulfurique concentré et on chauffe à reflux pendant 20 minutes. La masse d'ester formé à la fin de l'expérience est : $m=21,6g$.

On donne en $g.mol^{-1}$: $M(H)=1$; $M(C)=12$ et $M(O)=16$.

1- Quel est le rôle:

a- de l'acide sulfurique.

b- du chauffage à reflux.

2- écrire l'équation de la réaction.

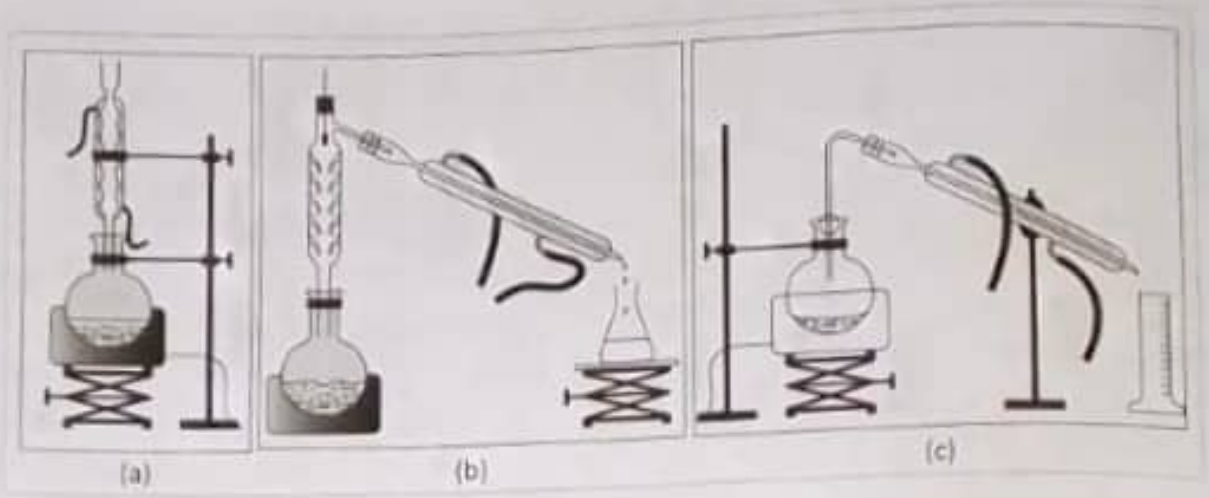
3- Déterminer son rendement.

4- Quels sont les moyens permettant d'améliorer ce rendement?

5- En exploitant les données figurant dans le tableau suivant, proposer une méthode qui permet d'améliorer le rendement de la réaction étudiée.

Composé	acide éthanoïque	alcoo benzylique	l'ester (E)	l'eau
Température d'ébullition	$118°C$	$205°C$	$215°C$	$100°C$

6- Lequel des montages suivants convient à cette manipulation?



Solution

1.a- Catalyseur.

1.b- Augmenter la vitesse de réaction et éviter les pertes de matière volatile.

2-

$$CH_3-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-OH_{(l)} + C_4H_9-CH_2-OH_{(l)} \rightleftarrows CH_3-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-O-CH_2-C_4H_{9(l)} + H_2O_{(l)}$$

3- $r=\dfrac{n_f(E)}{nx_{max}}=\dfrac{m(E)}{M(E)x_{max}}=\dfrac{21,6}{150.0,2}=72\%$.

4- Les moyens permettant d'améliorer cette réaction sans changement de réactif sont:

- L'ajout d'un des réactifs au mélange réactionnel.
- Le retrait d'un des produits du mélange.

5- Les données de ce tableau nous permettent de penser à la distillation fractionnée, pour retirer le produit le plus volatil.

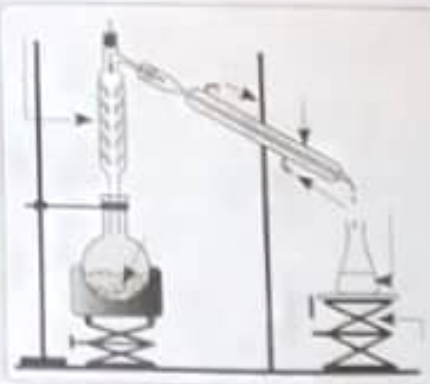
En effet. Lorsqu'on règle la température du mélange dans l'intervalle: $100°C<\theta<118°C$. C'est l'eau qui s'évapore.

Alors Q_r devient constamment inférieur à K. Et, l'équilibre se déplace donc dans le sens de l'estérification jusqu'à épuisement du réactif limitant.

6- Montage de la figure (b).

16 On mélange $2,00mol$ de méthanol CH_3OH et $2,00mol$ d'acide méthanoïque $HCOOH$ dans un ballon dans lequel on ajoute de l'acide sulfurique concentré et des billes de verre.

On réalise une distillation du mélange réactionnel pendant $30\,min$.



Le distillat recueilli a une masse $m = 116g$ et une odeur de fruits.

1- Écrire la formule de l'ester formé. Le nommer.

2- Écrire l'équation de l'estérification. Donner ses caractéristiques.

3- Légender le montage. À quoi sert le réfrigérant à eau?

4- Calculer le rendement de la réaction.

Données: $M_C = 12,0g.mol^{-1}$; $M_O = 16,0g.mol^{-1}$; $M_H = 1,00g.mol^{-1}$.

Solution

1- L'ester:

Il s'agit du méthanoate de méthyle:

$$H-C(=O)-O-CH_3$$

Sa masse molaire est: $M = 60,0g.mol^{-1}$.

2- Équation:

$$HCOOH + CH_3OH \rightleftharpoons H-C(=O)-O-CH_3 + H_2O$$

C'est une réaction lente, limitée et athermique.

Elle est catalysée par l'acide sulfurique H_2SO_4.

3- Schéma:

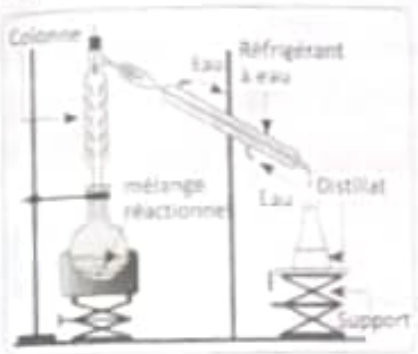


Schéma du montage de distillation:

Le réfrigérant à eau permet de condenser les vapeurs qui vont donner le distillat.

4- Rendement:

Le distillat (odeur de fruits) doit être l'ester soit:

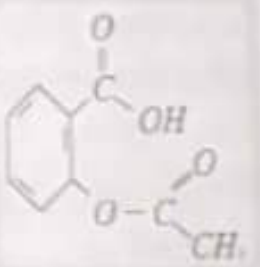
$$n_{ester} = \frac{116}{60,0} = 1,93mol$$

Les proportions sont stoechiométriques, donc:

A.N.: $r = \frac{1,93}{2,0} = 96,6\%$.

17

1- On donne ci-contre la formule de la molécule d'aspirine: dont le nom officiel est: l'acide acétylsalicylique.

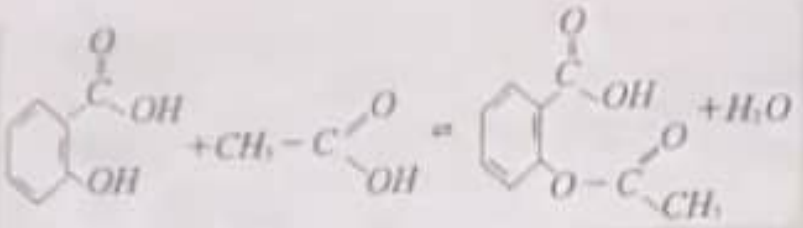


1.1- Quel(s) groupement(s) fonctionnels se trouve(nt) dans cette molécule?

1.2- Quel(s) rôle(s), cette molécule peut-elle jouer?

2- Système de l'aspirine:

L'aspirine a été synthétisée pour la première fois, par le chimiste allemand Gerhardt, en 1853. Selon un protocole de plusieurs étapes, dont la dernière est, modélisée par l'équation ci-après et fait intervenir l'acide éthanoïque et l'acide salicylique:



2.1- S'agit-il d'une estérification? Justifiez.

2.2- Quel rôle a joué l'acide salicylique dans cette réaction?

2.3- Quelles sont les caractéristiques de cette réaction?

3- En 1897, le chimiste allemand Hoffman, arriva à obtenir l'aspirine à l'aide d'une réaction totale, en changeant l'acide éthanoïque par l'anhydrique correspondant.

3.1- Ecrire l'équation de cette synthèse.

3.2- Quelle masse d'aspirine peut-on obtenir à partir de $250kg$ d'acide salicylique et de l'anhydride éthanoïque en excès, dans des conditions expérimentales où le rendement de la synthèse est estimé à 90%.

On donne les masses molaires:

- acide salicylique: $M_1 = 138g.mol^{-1}$; - aspirine: $M_2 = 180g.mol^{-1}$.

Solution

1- groupe fonctionnel:

La molécule d'aspirine porte deux groupements fonctionnels qui sont:

- Le groupement carboxyl $-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-OH$, caractérisant les acides carboxyliques, et:

- Le groupement ester $-C\overset{O}{\underset{O-}{\diagup\!\diagdown}}$, caractérisant les esters.

1.2- rôle:

La molécule d'aspirine joue à la fois, le rôle d'un acide et d'un ester.

2.1- réaction:

Oui, car il y a formation d'un ester.

2.2- rôle:

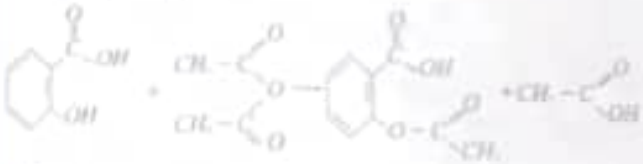
L'acide salicylique a réagi à l'aide du groupement hydroxyl caractéristique des alcools.

L'autre groupement qu'il porte $-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-OH$ est inactif.

2.3- caractéristiques:

L'estérification par un acide et un alcool est limitée et lente.

3.1- Equation:



3.2- La masse:

L'anhydride est en excès, donc l'acide salicylique limite la réaction:

$$x_{max} = n_0(sal)$$

$$r = \frac{n_{exp}(asp)}{n_0(sal)} = \frac{m(asp)}{M(asp)} \cdot \frac{M(sal)}{m(sal)}$$

$$= \frac{m_2}{M_2} \cdot \frac{M_1}{m_1}$$

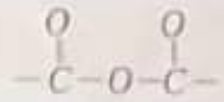
Alors: $m_2 = \frac{r.M_2.m_1}{M_1} = \frac{0,9.180.250}{138}$

$$= 293,5kg$$

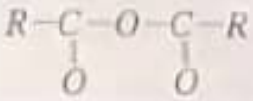
5 Contrôle de l'évolution d'une transformation chimique

II- Anhydride d'acide:

• Le groupe caractéristique $-CO-O-CO-$ est le groupe anhydride d'acide, décrit par la formule développée:



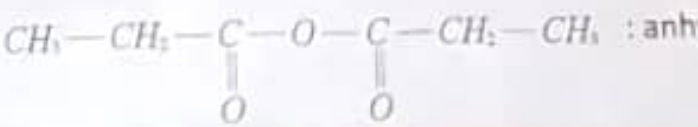
Un anhydride d'acide a pour formule générale:



$R-$ est une chaîne carbonée.

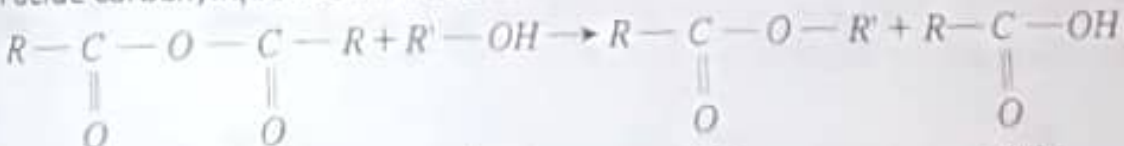
Le nom de l'anhydride dérive de l'acide dont il provient, en remplaçant le terme acide par anhydride

Exemple: CH_3-CH_2-COOH : acide propanoïque

 : anhydride propanoïque

III- Estérification avec un anhydride d'acide:

La réaction d'un anhydride d'acide avec un alcool conduit à la formation d'un ester et d'un acide carboxylique selon la réaction:



anhydride d'acide — alcool — ester — acide

• La synthèse d'un ester à partir d'un anhydride et d'un alcool est une réaction totale, rapide et exothermique:

IIII- Hydrolyse basique d'un ester:

L'hydrolyse basique d'un ester conduit à la formation d'ions carboxylate de sodium ou de potassium, bases conjuguées d'acides carboxyliques.

Cette réaction est lente et totale:

$$R-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-O-R' + OH^- + Na^+ \rightarrow (R-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-O^- + Na^+) + R'-OH$$

La réaction est lente et totale.

IV- Les savons.

• Un savon est le mélange de carboxylates de sodium ou de potassium. Ces ions carboxylate sont les bases conjuguées d'acides gras.

• Les acides gras sont des acides carboxyliques à longue chaîne carbonée non ramifiée.

V- Saponification d'un triglyceride

Le savon du commerce est obtenu par hydrolyse basique d'un corps gras. Un corps gras possède des chaînes carbonées (non ramifiées) à plus de 10 carbones. Un corps gras est un triester de glycérol et d'acide carboxylique.

Le glycérol est un trialcool. **l'équation de saponification s'écrit:**

$$\begin{array}{l} CH_2-O-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-R \\ CH-O-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-R \\ CH_2-O-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-R \end{array} + 3(Na^+ + OH^-) \rightarrow \begin{array}{l} CH_2\ \ OH \\ CH-OH \\ CH_2-OH \end{array} + 3\underbrace{(R-COO^- + Na^+)}_{\text{savon}}$$

On utilise parfois de la potasse KOH (savon mou) à la place de la soude NaOH (savon dur).

• Micelles:

L'ion carboxylate d'un savon a une partie hydrophile et une partie hydrophobe (qui n'aime pas l'eau) ou lipophile.



En solution, un savon forme des micelles enserrant des particules de graisse (schéma ci-dessous). Un savon a ainsi des propirétés détergentes.



1 Mots manquants:

a- L'action d'un anhydride d'acide sur un alcool conduit à un ..... et à un .....

b- L'utilisation d'un anhydride d'acide rend la réaction d'estérification ..... et .....

c- L'hydrolyse ..... des esters conduit à alcool et à un ion ..... l'avancement ..... est alors atteint.

d- Les corps gras sont essentiellement constitués par des .....

e- Un savon provient de la ..... des corps gras. Il est un mélange de ..... de sodium ou de .....

f- Pour faire précipiter un savon, on réalise un .....

g- L'ion carboxylate d'un savon est une molécule .....; c'est-à-dire qu'il possède une partie ..... et une partie .....

Solution

a- ester - acide carboxylique.
b- totale - rapide.
c- basique ; - carboxylate ; - maximal.
d- triglyceride.
e- saponification ; - carboxylate ; - potassuim.
f- relargage.
g- polaire ; -hydrophile ; -hydropobe.

2 QCM:

Pour chaque question, indiquer la (ou les) bonne (s) réponse (s)

1- La réaction d'un acide carboxylique avec un alcool est:

a- lente; b- totale ; c- limitée par la réaction d'hydrolyse.

2- La réaction d'un anhydride d'acide avec un alcool:

a- est assez rapide ; b- est limitée ; c- produit de l'eau.

3- Les réactifs d'une réaction de saponification peuvent être:

a- un ester et de l'eau ;

b- un ester et un acide ;

c- un alcool et l'ion hydroxyde.

4- Un savon peut résulter de l'action:

a- de la soude sur un glucide ;

b- de la soude sur un triglycéride ;

c- de la potasse sur un corps gras.

Solution

1- a et c
2- a
3- c
4- b et c

Vrai ou faux:

a- Les anhydrides d'acide sont bien moins réactifs que les acides carboxyliques V F .

b- La réaction d'un anhydride d'acide avec un alcool est totale V F .

c- Pour réaliser une hydrolyse basique des esters, on utilise de l'hydroxyde de sodium ou de l'hydroxyde de potassium V F .

d- L'hydrolyse basique des esters est une réaction rapide mais limitée V F .

e- Un relargage est la séparation des savons V F .

f- L'hydrolyse basique d'une mole de triglycéride conduit à une mole de glycérol et à trois moles de savon V F .

g- La chaîne carbonée d'un ion carboxylate d'un savon est hydrophile V F .

Solution

a- F ; b- V
c- V ; d- F
e- V ; f- V
g- F.

Exercices

1- Nommer les molécules suivantes:

A: CH_3-COOH ; B: CH_3-CH_2-COOH ;

C: $CH_3-COO-CH_3$;

D: $CH_3-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-O-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-CH_3$; E: $H-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-O-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-H$

2- Donner les formules semi-développées des molécules suivantes:

A' : anhydride propanoïque ; B' : acide butanoïque ;

C' : acide 2-méthylpropanoïque ; D' : acide 3-méthylbutanoïque.

3- À partir de quel acide peut-on former l'anhydride éthanoïque?

Solution

1- Nomenclature:

A: acide éthanoïque

B: acide propanoïque

C: éthanoate de méthyle

D: anhydride ethanoïque

E: anhydride méthanoïque

2- Formules semi-developpées.

A' :

$$CH_3-CH_2-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-O-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-CH_2-CH_3$$

B' : $CH_3-CH_2-CH_2-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-OH$

C' : $CH_3-\underset{\underset{CH_3}{|}}{CH}-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-OH$

D' : $CH_3-\underset{\underset{CH_3}{|}}{CH}-CH_2-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-OH$

3- L'acide:

L'anhydride éthanoïque peut être synthétiser à partir de l'acide éthanoïque.

3 Donner l'équation de réaction et nommer les produits obtenus lorsqu'on fait réagir:

1- Le propan-2-ol et l'anhydride éthanoïque ;

2- L'anhydride propanoïque et l'éthanol ;

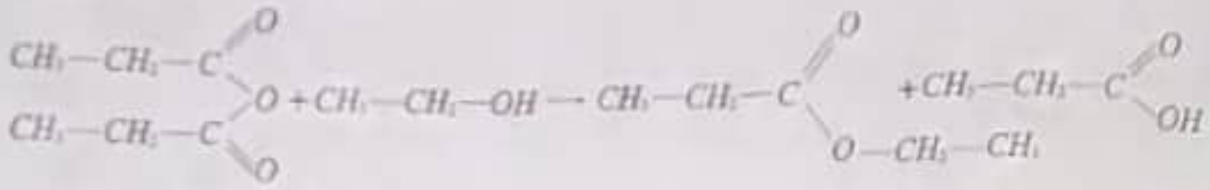
3- Le 2-méthylpropan-2-ol et l'anhydride éthanoïque.

Solution

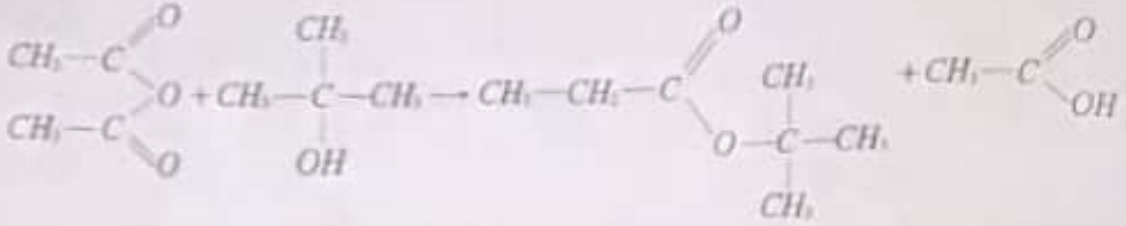
1- Équation de réaction:

$$CH_3-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-O-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-CH_3 + CH_3-\underset{\underset{OH}{|}}{CH}-CH_3 \rightarrow CH_3-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-O-\underset{\underset{CH_3}{|}}{CH}-CH_3 + CH_3-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-OH$$

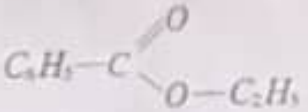
2- Équation de réaction:



3- Équation de réaction:

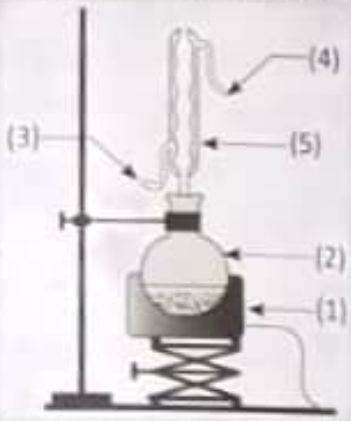


3 Dans un ballon, on introduit un volume $V = 10,0\ mL$ de benzoate d'éthyle:



et un volume $V' = 25\ mL$ de solution de soude à $C' = 4\ mol.L^{-1}$ et quelques grains de pierre ponce. On adapte un réfrégirant et l'on chauffe à reflux pendant vingt minutes. Le mélange obtenu est refroidi.

Un solide précipite. Après filtration, il est séché et pesé. Sa masse est $m = 7,2g$.



1- Compléter les légendes du montage à reflux ci-contre

2- Ecrire l'équation de la réaction de saponification et déterminer la quantité de chacun des réactifs introduits dans le ballon.

3- Déterminer le rendement de la réaction de saponification.

Donnée: $\mu(ester) = 1,05\ g.mL^{-1}$

On donne (en $g.mol^{-1}$): $C = 12$; $O = 16$; $H = 1$; Na:23

Solution

1- Les légendes:

(1) Chauffe ballon

(2) Ballon

(3) Entrée d'eau

(4) Sortie d'eau

(5) refrégirant droit.

2- Equation de réaction:

$C_2H_5-C(=O)-O-C_2H_5$ (E) $+ (Na^+ + HO^-) \longrightarrow$

$C_2H_5-C(=O)-O^- , Na^+$ (I) $+ C_2H_5-OH$ (Al)

• Quantités de matière initiale:

$$n_0(E) = \frac{m(E)}{M(E)} = \frac{\mu . v}{M(E)}$$

$$= \frac{1,05.10}{150} = 0,07\ mol$$

• $n_0(HO^-) = c' . v' = 4.25.10^{-3} = 0,1 mol$

3- Calcul de rendement:

On a: $r = \frac{m_{exp}}{m_{th}} = \frac{x_f}{x_{max}}$

$x_f = n(I) = \frac{m}{M(I)} = \frac{7,2}{144} = 0,05\ mol$

donc: $r = \frac{0,05}{0,07} = 0,714 = 71,4\%$

4

1- On veut préparer un ester E à odeur de banane en faisant réagir sur du butan-1-ol soit l'acide éthanoïque, soit l'anhydride éthanoïque.

a- En utilisant les formules semi-développées, écrire les équations de ces deux réactions.

Nommer l'ester formé.

b- Préciser les différences entre ces deux réactions.

2- On fait réagir 0,100 mol d'anhydride éthanoïque avec 0,100 mol de butan-1-ol.

Après séparation, lavage et distillation de la phase organique, on obtient 10,4 cm^3 d'ester E.

a- Calculer le volume de butan-1-ol utilisé.

b- Calculer le rendement de cette préparation. Commenter le résultat trouvé.

Données: Masses volumiques:

butan-1-ol: $0,81 g.cm^{-3}$;

ester E: $0,88 g.cm^{-3}$.

Solution

1.a- Les équations:

Les réactifs mis en jeu ont pour formule:

- butan-1-ol: $CH_3-(CH_2)_3-OH$
- acide éthanoïque: CH_3-CO_2H
- anhydride éthanoïque:

$$CH_3-\underset{\underset{O}{\|}}{C}-O-\underset{\underset{O}{\|}}{C}-CH_3$$

Les équations des synthèses sont alors:

$CH_3CO_2H + CH_3(CH_2)_2-CH_2-OH$ (1)
$\rightleftharpoons CH_3CO_2(CH_2)_3CH_3 + H_2O$

$(CH_3CO)_2O + CH_3(CH_2)_2CH_2OH$ (2)
$\rightleftharpoons CH_3CO_2(CH_2)_3CH_3 + CH_3CO_2H$

L'ester formé est l'éthanoate de butyle.

b- La différence:

La réaction (1) est lente et limitée, la réaction (2) est totale et relativement rapide.

2.a- volume du butanol:

La quantité de matière $n(Al)$, la masse molaire $M(Al)$, la masse volumique $\ell(Al)$ et le volume $V(Al)$ d'alcool sont liés:

$$n(Al) = \frac{m(Al)}{M(Al)} ;$$

soit: $n(ol) = \frac{(\mu(ol).V(ol))}{M(ol)} ;$

d'où: $V(Al) = \frac{(n(Al).M(Al))}{\ell(Al)}$

$$= \frac{0,100 \times 74}{0,81}$$

soit: $V(Al) = 9,1\,mL$

b- Le rendement:

ℓ de cette synthèse est donné par la relation: $\ell = \frac{n(E)_{exp}}{n(E)_{th}}$

Les quantités initiales n_i d'alcool et d'anhydride d'acide sont égales, d'où:

$$\ell = \frac{n(E)_{exp}}{n_i} = \frac{(\ell(E).V(E))}{(M(E).n_i)}$$

$$\ell = \frac{(0,88 \times 10,4)}{(116 \times 0,100)} = 0,79 ;$$

$\ell = 79\%$.

En utilisant un mélange équimolaire d'alcool et d'acide éthanoïque, on aurait obtenu au mieux un rendement de 67%. L'utilisation de l'anhydride éthanoïque à la place de l'acide éthanoïque permet d'améliorer le rendement de la synthèse.

5 On fait réagir une masse $m = 20,4\,g$ d'anthydride éthanoïque avec une masse $m' = 6,40\,g$ de méthanol.

Après chauffage à reflux, séparation, lavage, séchage et distillation de la phase organique, on isole une masse $m' = 12,6\,g$ d'ester.

1- Ecrire l'équation de la réaction effectuée.

2- Calculer les quantités initiales des réactifs et la quantité de l'ester produit.

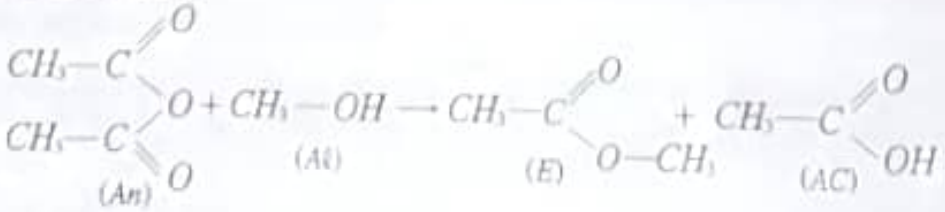
3- Déterminer le rendement de cette synthèse.

Données: $M_{Na} = 23 g.mol^{-1}$; $M_O = 16 g.mol^{-1}$;

$M_H = 1 g.mol^{-1}$; $M_C = 12 g.mol^{-1}$.

Solution

1- Equation de réaction:



2- Quantité de matière:

$$n_i(An) = \frac{m}{M(An)} = \frac{20,4}{86} = 0,24\,mol$$

$$n_i(Al) = \frac{n'}{M(Al)} = \frac{6,40}{32} = 0,2 mol$$

$n(E) = \frac{m^*}{M(E)}$

$= \frac{12,6}{74} \approx 0,17\ mol$

3- Le rendement:

On a: $r = \frac{x_f}{x_{max}}$

avec: $x_{max} = 0,2mol$;

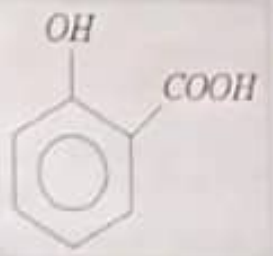
et: $x_f = 0,17\ mol$

donc: $r = \frac{0,17}{0,2} = 0,85$; $r = 85\%$.

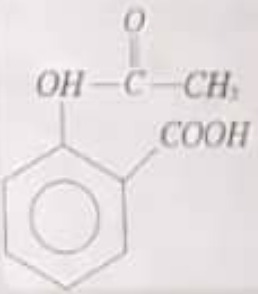
Partie I

On cherche à synthétiser l'aspirine (acide acéthylsalicylique) à partir d'acide salicylique:

et d'acide éthanoïque: CH_3COOH.



L'aspirine a pour formule:



1- Ecrire l'équation de la réaction de synthèse de l'aspirine. De quel type de réaction s'agit-il?

2- Quelles sont les principales caractéristiques de cette réaction chimique?

3- On a fait réagir initialement une masse d'acide éthanoïque $m = 21\ g$ avec une masse d'acide salicylique $m' = 5,0\ g$.

On obtient finalement une masse d'aspirine $m^* = 5,2\ g$.

a- Faire un tableau d'avancement de la réaction.

b- Calculer le rendement de la réaction.

c- Comment pourrait-on améliorer ce rendement?

Partie II

Dans un ballon de $200cm^3$ on introduit $m = 5,0g$ d'acide salicylique, un volume $V = 7,0\ cm^3$ d'anhydride éthanoïque et $1\ mL$ de H_2SO_4 (catalyseur concentré). Le ballon, surmonté d'un réfrigérant à eau est chauffé au bain-marie pendant $t = 20\ \text{min}$.

On laisse ensuite refroidir le mélange, puis on ajoute $V' = 75\ cm^3$ d'eau.

L'aspirine précipite. Elle est récupérée par filtration sur Büchner, puis séchée.

On vérifie que l'aspirine - ou acide acétylsalicylique - est pure en mesurant sa température de fusion:

$T_f = 135\ ^\circ C$ sur un banc Köfler, après avoir recristallisé le produit brut obtenu en fin de synthèse.

1- Ecrire l'équation de la réaction de formation de l'aspirine.

2- En dressant un tableau d'avancement, sachant que le rendement est: $r = 95\%$, calculer la masse d'aspirine obtenue.

Données: Anhydride éthanoïque: $C_4H_6O_3$;

densité $d = 1,08$; acide salicylique ou acide hydroxy-2-benzoïque: $C_7H_6O_3$.

$$M_{(\text{acide salicylique})} = 138\ g.mol^{-1}\ ;$$

$$M_{(\text{aspirine})} = 180\ g.mol^{-1}\ ;$$

$$\ell_{eau} = 1,0\ g.cm^{-3}.$$

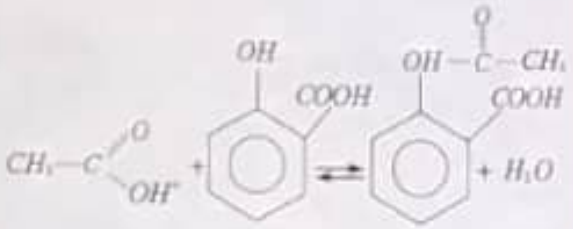
Solution

Partie-I:

1- Equation:

L'acide salicylique réagit avec l'acide éthanoïque pour donner l'aspirine.

On tient compte ici de la fonction alcool de l'acide salicylique. Il s'agit donc d'une estérifiaction:



Il s'agit d'une réaction lente, limitée, athermique et catalysée par exemple par l'acide sulfurique.

2.a- On calcule les quantités de matière initiales des réactifs:

$$\begin{cases} n^{\circ}_{(\text{éthanoïque})} = \dfrac{21}{60} = 0,35\ mol\ (exces) \\ n^{\circ}_{(\text{salicylique})} = \dfrac{m^{\circ}}{M} = \dfrac{5,0}{138} = 0,036\ mol\ (defaut) \end{cases}$$

On peut dresser le tableau d'avancement avec:

$$x_f = \frac{m^{\circ}}{M_{(\text{aspirine})}} = \frac{5,2}{180} = 0,018\ mol$$

	alcool	acide	ester	eau
Etat initial	0,036	0,35	0	0
Etat final	$0,036 - x_f = 0,007$	$0,35 - x_f = 0,321$	$x_f = 0,029$	$x_f = 0,029$

b- Le rendement de l'estérification: se définit comme:

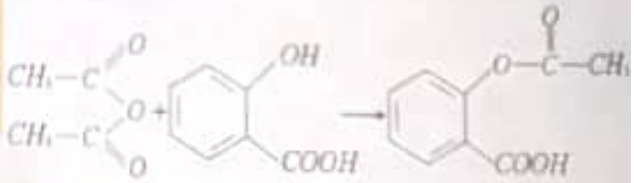
$\tau = \dfrac{x_f}{x_{max}}$ où x_{max} est l'avancement maximal:

$$\tau = \frac{0,029}{0,036} = 80,5\%$$

c- Amélioration du rendement: On peut augmenter le rendement en ajoutant encore de l'acide éthanoïque ou on éliminant l'eau.

Partie-II:

1- Equation:



La réaction est totale.

2- Calcul de la masse de l'aspirine.

On calcule les quantités de matière initiale des réactifs:

$$n^i_{anhydride} = \frac{\ell_{anhydride} \times V}{M_{anhydride}} = \frac{d_{anhydride} \times \ell_{eau} \times V}{M_{anhydride}} = \frac{1,08 \times 1,0 \times 7,0}{102} = 0,074 mol$$

$n^i_{acide\ salicylique} = \frac{5}{138} = 0,036\ mol$ (en défaut).

On dresse le tableau d'avancement:

	acide salicylique		anhydride éthanoïque	ester	eau
Etat initial	0	0,036	0,074	0	0
Etat final	x_f	$2,0.10^{-3}$	0,04	0,034	0,034

On calcule x_f à l'aide du rendement:

$$r = 0,95 = \frac{x_f}{n^i_{acide\ salicylique}}$$

donc: $x_f = 0,95 \times 0,036 = 0,034\ mol$

La masse d'aspirine correspondante est:

$$m_{aspirine} = x_f \times M_{aspirine} = 0,034 \times 180 = 6,1\ g$$

On réalise l'hydrolyse basique du méthanoate de butyle par une solution d'hydroxyde de potassium.

Pour cela on fait réagir $n = 0,25\ mol$ d'ester avec un volume V d'hydroxyde de potassium de concentration $4,0\ mol.L^{-1}$.

En fin de réaction il est possible d'isoler une masse $m = 16,1\ g$ d'alcool.

1- Ecrire l'équation de la réaction et nommer les produits obtenus.

2- Déterminer la valeur minimale de V pour que l'ester soit le réactif limitant.

3- Calculer le rendement de cette hydrolyse et commenter le résulat trouvé.

Données: $M(C) = 12g/mol$, $M(O) = 16g/mol$,

$M(H) = 1g/mol$, $M(K) = 39\ g/mol$

Solution

1- Equation de réaction:

$$\underset{(E)}{H-C(=O)-O-C_4H_9} + (K^+ + OH^-) \rightarrow \underset{(S)}{\left(H-C(=O)-O^-,K^+\right)} + \underset{(Al)}{C_4H_9-OH}$$

(S) méthanoate de potassium.

Al: butanole.

2- Valeur minimale de V :

$n(HO^-) \geq n(E)$

$CV \geq n$; $v \geq \frac{n}{C}$

A.N.: $v \geq \frac{0,25}{4} = 0,0625\ L$

$V \geq 62,5\ mL$

donc: $v_{min} = 62,5\ mL$.

3- Rendement:

on a: $r = \frac{x_f}{x_{max}}$

$x_f = n(s) = \frac{m}{M(s)}$

$= \frac{16,1}{84} \simeq 0,192$

$r = \frac{0,192}{0,25} \simeq 0,77 \simeq 77\%$

L'oléine est le corps gras prépondérant de l'huile d'olive. C'est un triglycéride provenant de la réaction entre le glycérol et l'acide oléique.

Dans un ballon, on chauffe à reflux une masse $m = 10,0g$ d'oléine (sous forme d'huile d'olive), un volume $V = 20\ mL$ d'hydroxyde de sodium de concentration $C = 7,5\ mol.L^{-1}$ et quelques grains de pierre ponce.

$CH_2-O-CO-C_{17}H_{33}$

$CH-O-CO-C_{17}H_{33}$

$CH_2-O-CO-C_{17}H_{33}$

1- Calculer sa masse molaire.

2- Ecrire l'équation de réaction de saponification de l'oléine avec l'hydroxyde de sodium. Identifier le savon parmi les espèces et calculer sa masse molaire.

3- Rappeler les caractéristiques de la réaction de saponification.

4- a. Déterminer le réactif limitant (on pourra s'aider d'un tableau d'évolution).

b- En déduire la masse de savon attendue en fin d'expérience.

Données:

acide oléique: $C_{17}H_{33}-CO_2H$; glycérol: $CH_2OH-CHOH-CH_2OH$.

Masse molaires atomiques: $(g.mol^{-1})$; $M(H) = 1,0$; $M(C) = 12$;

$M(O) = 16$; $M(Na) = 23$.

Solution

1- La formule:

formule de l'oleine: $CH_2-O-CO-C_{17}H_{33}$

$CH-O-CO-C_{17}H_{33}$ et $M(oléine) = 884 g.mol^{-1}$

$CH_2-O-CO-C_{17}H_{33}$

2- Equation de réaction:

$$C_{17}H_{33}-CO_2-CH_2 \qquad CH_2-OH$$
$$C_{17}H_{33}-CO_2-CH(\ell) + 3[HO^-(aq) + Na^+(aq)] \rightarrow CH-OH(\ell) + 3(\underbrace{C_{17}H_{33}-CO_2Na}_{savon})(s)$$
$$C_{17}H_{33}-CO_2-CH_2 \qquad CH_2-OH$$

Le savon est le carboxylate de sodium « $C_{17}H_{33}-CO_2Na(s)$ ».

$M(savon) = 18 \times M(C) + 33 \times M(H) + 2 \times M(O) + M(Na) = 304 g\,mol^{-1}$

3- Caractéristiques:

La réaction de saponification est une réaction totale et rapide à chaux.

4- a- Réactif limitant:

Dressons le tableau d'évolution de la réaction de saponification.

Équation	oléine $(\ell) + 3(HO^-(aq) + Na^+) \rightarrow 3(C_{17}H_{33}CO_2Na(s)) + glycerol$				
État initial	0	$n_i(oleine)$	$n_i(HO^-)$	0	0
Intermédiaire	x	$n_i(oleine) - x$	$n_i(HO^-) - 3x$	$3x$	x
État final	x_{max}	$n_i(oleine) - x_{max}$	$n_i(HO^-) - 3x_{max}$	$3x_{max}$	x_{max}

Déterminons les quantités de matière à l'état initial.

$ni(oleine) = \frac{m_{oleine}}{M(oleine)} = \frac{10,0}{884} = 1,13 \times 10^{-2} mol$;

$n_i(HO^-) = C \times V = 7,5 \times 20 \times 10^{-3} = 1,5 \times 10^{-1} mol$.

Déterminons le réactif limitant.

• Soit $n_i(oleine) - x_{max} = 0$; d'où $x_{max} = 1,13 \times 10^{-2} mol$

• Soit $n_i(HO^-) - 3x_{max} - 3x_{max} = 0$ d'où $x_{max} = \frac{ni(HO^-)}{3} = 5,0 \times 10^{-2} mol$.

Donc: $x_{max} = 1,13 \times 10^{-2} mol$ l'oléine (corps gras) est le réactif limitant.

b- la masse du savon:

La quantité de matière de savon formé est égale à $n_f(savon) = 3x_{max}$.

La masse de savon obtenue est:

$m_{savon} = n_f(savon) \times M(savon) = 3x_{max} M(savon)$

$= 3 \times 1,13 \times 10^{-2} \times 304 = 10,3 g$

La butyrine est un corps gras présent dans le beurre. C'est un triglycéride provenant de la réaction de la réaction d'estérification entre le glycérol et l'acide butanoïque (ou butyrique).

Formule du glycérol

$$\begin{array}{l} CH_2-OH \\ | \\ CH-OH \\ | \\ CH_2-OH \end{array}$$

1.a- Donner la formule semi-développée de la butyrine.

b- Calculer sa masse molaire.

2- On réalise un montage à reflux en plaçant dans un ballon une masse $m = 10g$ de butyrine en présence d'un excès d'hydroxyde de sodium.

Ecrire l'équation de la réaction. Comment se nomme(nt) le(s) produit(s) obtenu(s)?

3- Après refroidissement, on verse le mélange réactionnel dans une solution saturée de chlorure de sodium.

On recueille après séchage un solide pâteux de masse $m = 8,3g$.

Quel est l'intérêt d'utiliser une solution saturée de chlorure de sodium? Comment se nomme cette opération?

4- Déterminer le rendement de la réaction.

Données:

- masses molaires atomiques $(g.mol^{-1})$:

$M(H) = 1,0$; $M(C) = 12$;

$M(O) = 16$; $M(Na) = 23$.

- glycérol: propane-1,2,3-triol.

Solution

1.a- formule semi-developpée:

$$(B)\quad \begin{array}{l} CH_2-O-C(=O)-CH_2-CH_2-CH_3 \\ | \\ CH-O-C(=O)-CH_2-CH_2-CH_3 \\ | \\ CH_2-O-C(=O)-CH_2-CH_2-CH_3 \end{array}$$

b- masse molaire:

$$M(B) = 15M(C) + 6M(O) + 26M(H)$$
$$= 15.12 + 6.16 + 26.1$$
$$M(B) = 302g.mol^{-1}$$

2- Equation de réaction:

$$\begin{array}{l} CH_2-O-CO-C_3H_7 \\ | \\ CH-O-CO-C_3H_7 \\ | \\ CH_2-O-CO-C_3H_7 \end{array} + 3(Na^+ + HO^-) \rightarrow \underset{(S)}{3(C_3H_7-COO^-, Na^+)} + \underset{(G)}{\begin{array}{l} CH_2-OH \\ | \\ CH-OH \\ | \\ CH_2-OH \end{array}}$$

(B)

(S): butanoate de soduim:

(G): Glycérol

3- utilité:

L'ajout de la solution de chlorure de sodium (eau salée) conduit à la précipitation du savon, car ce dernier est insoluble dans l'eau salée cette opération

est appelée relargage.

4- Rendement:

dressons le tableau d'avancement:

	$B + 3(Na^+ + HO^-) \longrightarrow 3S + G$				
E.I	o	n_o	Excès	o	o
E.int	x	$n_o - x$	Excès	$3x$	x
E.F	x	$n_o - x$	Excès	$3x$	x

On a: $r = \frac{m_{exp}}{m_{th}}$;

avec: $m_{exp} = 8,3g$

On a: $n(s) = 3x$

et: $x_{max} = n_0$

donc: $n(s) = 3n_o$;

$\frac{m_{th}}{M(s)} = 3.\frac{m(B)}{M(B)}$

$$m_{th} = \frac{3.m(B)}{M(B)} M(s)$$

d'où: $= \frac{3.10}{302}.110$

$= 10,93g$

donc: $r = \frac{8,3}{10,93}$.

$\approx 0,76$

$= 76\%$

Proétudes.blogspot.com
PROÉTUDES
Surfer en toute confiance

Imprimerie Najah Al Jadida - (CTP) - Casablanca