

FONCTIONS NUMÉRIQUES

1. Rappels des notions de base :

- 1.1. Calcul dans $\mathbb{Z}$:
- 1.2. Résolution d'équations du premier degré :
- 1.3. Résolution d'équations du second degré :
- 1.4. Développement –Factorisation :

2. Ensemble de définition :

2.1. Fonction polynôme :

L'ensemble de définition d'une fonction polynôme f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est :

$$D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[.$$

Activité :

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

- a) $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + x - 3$
- b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto -x + 2$
- c) $h(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{5} + \sqrt{2}x - 1,5$
- d) $C(q) = 1 + q + q^2$

2.2. Fonctions rationnelles :

Soit u et v deux fonctions polynômes de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

On considère la fonction rationnelle f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}.$$

L'ensemble de définition de f est : $D_f = \{x/x \in \mathbb{R}, v(x) \neq 0\}$.

- Si l'équation $v(x) = 0$ admet des solutions $x_1, x_2, \dots$, alors $D_f = \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, \dots\}$.
- Si l'équation $v(x) = 0$ n'admet pas de solution, alors $D_f = \mathbb{R}$.

Activité :

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

- a) $f(x) = \frac{x-3}{x-1}$
- b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{-x+2}{x+3}$
- c) $h(x) = \frac{x-3}{4x+6}$
- d) $P(x) = \frac{x-3}{(-x+1)(2x+3)}$
- e) $Q(x) = \frac{x-3}{(x-1)^2}$
- f) $f_1(x) = \frac{x-3}{x^2-4}$
- g) $g_1(x) = \frac{x-3}{x^2+1}$
- h) $h_1(x) = \frac{x-3}{x^2-3x+2}$
- i) $f_2(x) = \frac{x-3}{x^2-x+3}$

2.3. Fonctions irrationnelles :

Soit u et v deux fonctions polynômes de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

On considère la fonction rationnelle f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \sqrt{u(x)} \text{ et } g(x) = \sqrt{\frac{u(x)}{v(x)}}.$$

L'ensemble de définition de f est : $D_f = \{x/x \in \mathbb{R}, v(x) \geq 0\}$.

L'ensemble de définition de g est : $D_g = \{x/x \in \mathbb{R}, \frac{u(x)}{v(x)} \geq 0 \text{ et } v(x) \neq 0\}$.

Activité :

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \sqrt{x+2}$

b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \sqrt{-2x+3}$$

c) $h(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

3. Limites :

3.1. Fonctions polynômes :

Formules usuelles :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \\ +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

Propriété :

La limite en l'infini d'une fonction polynôme est égale à la limite en l'infini de son monôme de plus haut degré.

Remarque :

Soit a un nombre réel. On a : $a \times \infty = \infty$

Exemples :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - x^2 + 3x - 1) = +\infty$$

3.2. Fonctions rationnelles :

Propriété 1 :

La limite en l'infini d'une fonction rationnelle est égale à la limite en l'infini du quotient des monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Propriété 2 :

Soit f une fonction définie en a avec $a \in \mathbb{R}$. On a :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Remarque:

$$\frac{k}{0} = \infty \text{ avec } k \neq 0$$

Les formes indéterminées sont : $+\infty - \infty$; $\infty \times 0$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{0}{0}$.

Activité :

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{x + 1}$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x + 5}{x - 1}$

3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x - 1}{2x + 3}$

4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 4}{1 - 2x}$

5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 5x + 1}{4x - 7}$

6) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + 2 + \frac{8}{x} \right)$

7) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x + 2 + \frac{8}{x} \right)$

8) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x + 1}{x - 1}$

9) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x + 1}{x - 1}$

10) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x - 1}$

4. Dérivation :

4.1. Formules usuelles :

Fonction f	Fonction dérivée f'	Ensemble de dérivabilité
$f(x) = a$	$f'(x) = 0$	
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	
$f(x) = ax$	$f'(x) = a$	
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$	
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	

4.2. Opérations sur les dérivées :

Fonction f	Fonction dérivée f'
$f = u + v$	$f' = u' + v'$
$f = ku$	$f' = ku'$
$f = uv$	$f' = u'v + v'u$
$f = u^n$	$f'(x) = nu'u^{n-1}$
$f = \frac{u}{v}$	$f'(x) = \frac{u'v - v'u}{v^2}$
$f = \sqrt{u}$	$f'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

Activité :

Dans chacun des cas suivants, calculer la dérivée de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

1) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 4$

2) $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 100$

3) $f(x) = (2x - 1)^2$

4) $f(x) = (-5x + 3)^4$

5) $f(x) = \frac{2x-3}{x-2}$

6) $f(x) = \frac{-4}{x^2-3x+4}$

7) $f(x) = x + 2 + \frac{8}{x}$

8) $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-1}$

9) $f(x) = (x^2 - 2x)(3x + 1)$

10) $f(x) = (x - 2)^2(1 - 2x)$

4.3. Sens de variation :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- On dit que f est croissante sur I si et seulement si $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$.
- On dit que f est décroissante sur I si et seulement si $\forall x \in I, f'(x) \leq 0$.
- On dit que f est constante sur I si et seulement si $\forall x \in I, f'(x) = 0$.

5. Notion d'asymptote :

5.1. Asymptote verticale :

Soit f une fonction non définie en a avec $a \in \mathbb{R}$.

Lorsqu'on a $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, on dit que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe de f .

5.2. Asymptote horizontale :

Lorsqu'on a $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$, on dit que la droite d'équation $y = b$ est une asymptote horizontale à la courbe de f .

5.3. Asymptote oblique :

On dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe de f si et seulement si :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - y] = 0$$

6. Propriétés graphiques :

6.1. Parité :

- On dit que la fonction f est une fonction paire si et seulement si :
 $\forall x \in D_f, -x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$.
- On dit que la fonction f est une fonction impaire si et seulement si :
 $\forall x \in D_f, -x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$

6.2. Axe de symétrie :

On dit que la droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de la courbe de f si et seulement si :
 $\forall x \in D_f, 2a - x \in D_f$ et $f(2a - x) = f(x)$.

6.3. Centre de symétrie :

On dit que le point $I\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ est un centre de symétrie de la courbe de f si et seulement si :

$$\forall x \in D_f, 2a - x \in D_f \text{ et } f(2a - x) + f(x) = 2b.$$

EXERCICES

Exercice 1 :

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = x^2 + 2x - 3.$$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f .
- 2) Etudier le signe de $f'(x)$. En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
- 3) On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé d'unité graphique 1 cm.
 - a) Etablir l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 2.
 - b) Tracer (T) , (C) et la droite (D) d'équation $y = x - 1$ dans le même repère.
 - c) Déterminer les coordonnées des points communs à (C) et à (D) .

Exercice 2 :

On considère la fonction numérique h de la variable réelle x définie par :

$$h : x \mapsto 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5.$$

On note (C) la représentation graphique de h dans le plan rapporté à un repère orthogonal d'unités graphiques : 5 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

- 1) Calculer $h(0)$, $h\left(\frac{1}{2}\right)$, $h(1)$, $h\left(\frac{3}{2}\right)$, $h(2)$, $h\left(\frac{5}{2}\right)$.
- 2) Déterminer les limites de h en $-\infty$ et en $+\infty$.
- 3) Calculer $h'(x)$ et étudier son signe.
- 4) Etablir une équation de la tangente (T_1) à la courbe (C) au point d'abscisse 0, et une équation de la tangente (T_2) à (C) au point d'abscisse $\frac{3}{2}$.
- 5) Quelles sont les coordonnées des points d'intersection de ces deux tangentes ?
- 6) Tracer soigneusement dans le même repère (T_1) , (T_2) et (C) .

Exercice 3 :

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$; a , b et c étant des nombres réels. On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- 1) Déterminer les réels a , b et c sachant que (C_f) passe par les points $A(-1; 6)$; $B(4; 1)$ et admet une asymptote horizontale d'équation $y = 2$.
- 2) On considère la fonction homographique g définie par : $g(x) = \frac{2x-4}{x}$.
 - a) Montrer que $g(x) = 2 - \frac{4}{x}$.
 - b) Etudier les variations de g et tracer sa courbe représentative (C_g) dans un repère orthonormé.
 - c) Montrer que (C_g) admet le point $C(0; 2)$ comme centre de symétrie.

Exercice 4 :

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $D = \mathbb{R} - \{2\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 15}{x - 2}.$$

On appelle (C) la représentation graphique de f dans un repère orthonormal d'unité 1 cm.

- 1) a) Vérifier que $f(x) = x - 3 + \frac{9}{x-2}$ sur D .
b) En déduire que la droite (Δ) d'équation $y = x - 3$ est asymptote oblique à (C).
c) Préciser la position relative de (C) et (Δ).
- 2) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$.
En déduire une équation de l'asymptote verticale.
- 3) Démontrer que (C) admet le point $I(2; -1)$ comme centre de symétrie.
- 4) a) Calculer $f'(x)$ et prouver que : $f'(x) = \frac{(x-5)(x+1)}{(x-2)^2}$.
b) Dresser le tableau de variation de f et construire (C).
c) Donner une équation de la tangente à (C) au point d'abscisse $x_0 = 1$.
- 5) Tracer la droite d'équation $y = -7$.

En déduire la résolution graphique de l'inéquation $\frac{x^2 - 5x + 15}{x - 2} < -7$.

Exercice 5 :

Soit la fonction numérique de la variable réelle x , définie sur $D = \mathbb{R} - \{3\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x - 1}{x - 3}.$$

On désigne par (C) la représentation graphique de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) Vérifier que $f(x) = x - 1 - \frac{4}{x-3}$ sur D .
- 2) En déduire que (C) admet la droite (Δ) d'équation $y = x - 1$ comme asymptote oblique.
- 3) Etudier la position relative de (C) et (Δ).
- 4) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$.
En déduire une équation de l'asymptote verticale à (C).
- 5) a) Calculer $f'(x)$.
b) Prouver que $f'(x) = \frac{(x-3)^2 + 4}{(x-3)^2}$.
c) Dresser le tableau de variation de f .
- 6) a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C) avec les axes du repère.
Démontrer que (C) admet le point $I(3; 2)$ comme centre de symétrie.