

FICHE DE SEQUENCE MATHÉMATIQUES N°2 :

Classe : 12^{ème} T.S.S

Durée : 2h

1- **Domaine :** S.M.T

Discipline : Maths

2- **Compétences :**

- Résoudre une situation problème
- Mettre à profit ses connaissances scientifiques et technologiques
- Communiquer des messages en utilisant le langage et symbolisme mathématique

Composantes et manifestations :

- ❖ Diagnostiquer la situation problème
 - sélectionner les données mathématiques ; scientifiques et technologiques qui sont en rapport avec la situation.
 - Etablir des relations avec les données retenues
 - Formuler le problème
 - ❖ Mettre à l'essai des pistes de solutions
 - Inventorier les différentes pistes de solutions
 - Choisir une piste parmi un éventail de possibilités
 - Appliquer cette piste
 - ❖ Partager les informations relatives à la démarche scientifique et mathématique
 - Se servir de contre exemples pour ajuster des démarches
 - Expliquer des résultats
 - Tirer une conclusion
 - ❖ Comprendre des phénomènes naturels
 - Expliquer les phénomènes à l'aide de lois et de modèles
 - Vérifier la cohérence de l'explication donnée
 - S'approprier les concepts pertinents
 - ❖ Partager des savoirs ou des résultats scientifiques, technologiques et mathématiques
 - Recourir à divers formats de présentation (symbole, tableau, dessin technique, etc.)
 - Sélectionner des modes et représentations selon l'objet du message et l'interlocuteur.
- 3- **Contenu :** DERIVATION - PRIMITIVE
- 4- **Ressources éducatives :**
- **Ressources matérielles :** Les matériels didactiques (livre, cahier, craie, tableau, règle, etc.)
 - **Ressources humaines :** Le Professeur et les Elèves
- 5- **Stratégies d'animation :**
- Travail en groupe
 - La recherche collective des idées
- 6- **Déroulement des activités (situation d'apprentissage) :**
- **Pré-Evaluation :** Calcule : 2^5 ; 0^3 ; $(-1)^4$. Qu'avons-nous fait ?
 - **Situation problème :**
 - **Situation d'apprentissage et d'Evaluation (S.A.E) :**
- Activités :**

Activité 1 : Nombre dérivé d'une fonction en un point x_0 .

On considère la fonction f définie par : $f(x) = x^2 + 4x + 7$ et $x_0 = 1$

Consigne 1 :

- a) Détermine l'ensemble de définition de f .
- b) Soit $h(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$; Calcule $f(x_0)$; $h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x)$. Que constates-tu ? Que conclure ?

Synthèse 1 : On constate que $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \in \mathbb{R}$. On dit que la fonction f est dérivable en x_0 et son nombre dérivé est $f'(x_0) = f'(1) = 6$.

Activité 2 : Dérivée d'une fonction

Soit la fonction g définie par : $g(x) = x^3$ et $x_0 \in \mathbb{R}$.

Consigne 2 :

- a) Calcule $g(x_0)$.
- b) Soit $h(x) = \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$; calcule $h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x)$. Que constates-tu ? Que conclure ?

Synthèse 2 : On constate que pour $x_0 \in \mathbb{R}$; $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \in \mathbb{R}$. On dit que pour $x_0 = x$; $3x^2$ est la fonction dérivée de $g(x) = x^3$ et l'on note $g'(x) = 3x^2$.

Activité 3 : Opérations sur les dérivées

Soient les fonctions f, g et h suivantes : $f(x) = x^2$; $g(x) = 2x^2$ et $h(x) = 4x^5$.

Consigne 3 :

- a) Calcule les dérivées suivantes : $f'(x)$; $g'(x)$; $h'(x)$; $f'(x)+g'(x)$ et $f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$.
- b) On pose : $S(x) = f(x) + g(x)$; $P(x) = g(x) \times h(x)$ et $q(x) = \frac{h(x)}{f(x)}$.
Calcule $S(x)$; $P(x)$; $q(x)$ et dérive les fonctions S, P et q .
Que constates-tu ? Que conclure ?

Synthèse 3 : On constate que :

- $S'(x) = f'(x) + g'(x) = 6x$; On dit que la dérivée d'une somme est égale à la somme des dérivées.
- $P'(x) = f'(x) \times g(x) + g'(x) \times f(x) = 8x^3$; On dit que si U et V sont deux fonctions dérivables sur intervalle alors le produit de U et V est aussi dérivable sur cet intervalle et vaut :
 $(U \times V)' = U' \times V + V' \times U$.
- $q'(x) = \frac{h'(x) \times f(x) - f'(x) \times h(x)}{[f(x)]^2} = 12x^2$; On dit que si U et V sont deux fonctions dérivables sur un intervalle et V non nul alors le rapport $\frac{U}{V}$ est dérivable et son dérivé vaut :
 $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U' \times V - V' \times U}{V^2}$.

Activité 4 : Primitive d'une fonction

On considère les fonctions F et f définies par : $F(x) = 2x^2 + x + 3$ et $f(x) = 4x + 1$.

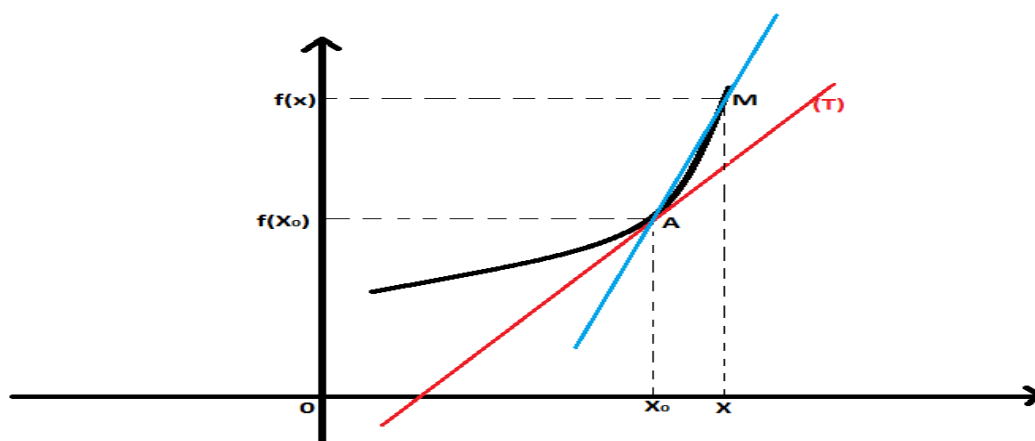
Consigne 4 : calcule la fonction dérivée F' de F puis compare les fonctions $F'(x)$ et $f(x)$. Que conclure ?

Synthèse 4 : On dit que $F(x)$ est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$ (ensemble de définition de F et f).

Pour toute fonction $f(x) = ax^n$ (avec $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$) ; on a : $F(x) = \frac{a}{n+1}x^{n+1} + k$ avec $k \in \mathbb{R}$ est la primitive.

Activité 5 : Equation de la tangente en un point

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et A d'abscisse $x_0 \in I$ de courbe représentative ci-dessous.



Consigne 5 :

- Détermine le nombre dérivé de la fonction f au point A d'abscisse x_0 .
- Pour $M \rightarrow A$ et $x \rightarrow x_0$; trouve l'expression de $f(x)$. Que conclure ?

Synthèse 5 : L'expression : $f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ ou $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ est l'équation de la tangente à la courbe de f au point A d'abscisse x_0 notée (T) de coefficient directeur $f'(x_0)$.

Activité 6 : Dérivée et sens de variations

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x + 2$

Consigne 6 :

- Calcule la fonction dérivée de f .
- Etudie le signe de la fonction dérivée de f ; Que constates-tu ? Que conclure ?

Synthèse 6 : On constate que :

- Pour $f'(x) > 0$; on dit que la fonction f croît (f est croissante).
- Pour $f'(x) < 0$; On dit que la fonction f décroît (f est décroissante).
- Pour $f'(x) = 0$; On dit que f est constante.

Activité 7 : Etude de fonction

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

Consigne 7 :

- a) Détermine l'ensemble de définition de la fonction f .
- b) Calcule les limites aux bornes de l'ensemble de définition. Que constates-tu ? Que conclure ?
- c) Calcule la fonction dérivée de f .
- d) Etudie le signe de la fonction dérivée de f et dresse un tableau de variations de f sur son ensemble de définition.
- e) Trace dans un repère orthonormé la courbe représentative de la fonction f . Que conclure ?

Synthèse 7 : Pour étudier une fonction ; on suit le plan suivant :

- ✓ Détermination de l'ensemble de définition
- ✓ Etude des limites aux bornes de l'ensemble de définition
- ✓ Calcul de la fonction dérivée
- ✓ Etude des variations de la fonction
- ✓ Tracé d'un tableau de valeurs et identifications des points remarquables (si possible).
- ✓ Construction de la courbe représentative de la fonction.

7- SYNTHESE GENERALE :

I. Nombre dérivé d'une fonction en un point x_0 :

1) Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle K contenant x_0 .

- On dit que f est dérivable à gauche de x_0 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et est finie.
- On dit que f est dérivable à droite de x_0 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et est finie.
- Si f est dérivable à gauche de x_0 et à droite de x_0 et si les deux nombres dérivés sont égaux alors f est dérivable en x_0 et $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ est le nombre dérivé de f au point x_0

2) Notation : Si f est une fonction dérivable sur un intervalle ; alors son nombre dérivé

est noté f' tel que : $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ où pour tous réel h on a :

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

N.B : Toute fonction dérivable sur un intervalle (en un point) est continue sur cet intervalle (en ce point) ; mais la réciproque n'est pas évidente.

II. Fonction dérivée :

- 1) **Définition** : Etant donnée une fonction f . Si f admet un nombre dérivé en tout point x_0 d'un intervalle I ; on dit que f est dérivable sur I .

La fonction dérivée de f que l'on note $f'(x)$ est telle que à tout point $x_0 \in I$ fait correspondre le nombre dérivé $f'(x_0)$.

- 2) **Tableau récapitulatif des dérivées usuelles** :

Fonctions f	Dérivées f'	Ensemble de dérivabilité
$f(x) = a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax^2$	$f'(x) = 2ax$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax^n \ (n \in \mathbb{Z}^*)$	$f'(x) = anx^{n-1}$	$\mathbb{R}$ si $n > 0$ et $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ ou $1 + \tan^2 x$	$\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$

- 3) **Opérations sur les dérivées** :

Etant donnée U et V deux fonctions numériques définies et dérivables sur un intervalle I .

Fonctions	Dérivées	Conditions
$U + V$	$U' + V'$	I
$aU \ (a \in \mathbb{R})$	aU'	I
UV	$U'V + V'U$	I
$\frac{1}{V}$	$-\frac{V'}{V^2}$	I si $V \neq 0$
$\frac{U}{V}$	$\frac{U'V - V'U}{V^2}$	I si $V \neq 0$
$\frac{1}{V^n}$	$-\frac{nV'}{V^{n+1}}$	I si $V \neq 0$
$U^n \ (n \in \mathbb{Z}^*)$	$nU'U^{n-1}$	I si $U > 0$
$U(ax + b)$	$aU'(ax + b)$	I
$\sqrt{U}$	$\frac{U'}{2\sqrt{U}}$	I si $U > 0$
$\cos U$	$-U' \sin U$	I
$\sin U$	$U' \cos U$	I

- 4) **Dérivées successives** :

Soit f une fonction et I un intervalle.

Si f est dérivable sur I ; sa dérivée f' est appelée dérivée première de f et notée f^1 .

Si f' est dérivable sur I ; sa dérivée f'' est appelée dérivée seconde de f et notée f^2 .

Si f'' est dérivable sur I ; sa dérivée f''' est appelée dérivée tierce de f et notée f^3 .

De proche en proche la fonction dérivée d'ordre $n^{\text{ième}}$ de f est notée f^n .

- 5) **Dérivée et extremum** :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $]a ; b[$ et $x_0 \in]a ; b[$.

Si f' s'annule et change de signe en x_0 ; alors f admet un extremum relatif en x_0 .

- 6) **Tangente en un point A** :

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et A d'abscisse $x_0 \in I$ de courbe représentative (C_f).

On appelle tangente en A ; la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(x_0)$. Elle a pour équation $(T): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

III. Primitive d'une fonction :

- 1) **Définition** : Etant donnée une fonction f définie sur un intervalle I non vide de $\mathbb{R}$. On nomme primitive de f sur I , toute fonction F définie et dérivable sur I telle que $F'(x) = f(x)$ sur I .

2) Tableau récapitulatif des primitives usuelles :

Fonction f	Primitive F	Ensemble de dérivation
$f(x) = a$ avec $a \in \mathbb{R}$	$F(x) = ax + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax$	$F(x) = \frac{a}{2}x^2 + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax + b$	$F(x) = \frac{a}{2}x^2 + bx + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{Z} - \{-1; 0\}$)	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$	$\mathbb{R}$ si $n > 0$ et $\mathbb{R}^*$ si $n \leq -2$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + k$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = \frac{-1}{x} + k$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ ($n \in \mathbb{N} - \{1\}$)	$F(x) = \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + k$	$\mathbb{R}^*$

IV. Plan d'étude d'une fonction :

Pour étudier une fonction ; on suit le plan suivant :

- 1) Détermination de l'ensemble de définition
- 2) Etude des limites aux bornes de l'ensemble de définition
- 3) Calcul de la fonction dérivée
- 4) Etude des variations de la fonction
- 5) Traçage d'un tableau de valeurs et identifications des points remarquables (si possible).
- 6) Construction de la courbe représentative de la fonction.

Evaluations :

Exercice 1 : Calculer les dérivées des fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{P}$:

a – $f(x) = 2x^2 - 7x + 9$

b – $f(x) = 3x^2 - 4x - 5$

c – $f(x) = 3 - 4x$

d – $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 4x + 3$

e – $f(x) = 4x^3 - 5x^2 - 2$

g – $f(x) = (x^3 + 3x)(x^4 - 3)$

h – $f(x) = \frac{2-3x}{x^2-1}$

i – $f(x) = \frac{2x^2+7x+4}{x+3}$

Exercice 2 : Dériver la fonction f dans les cas suivants :

1) $f(x) = -4x^3 + 2x^2 - 3x + 1$

2) $f(x) = \frac{3x^2 - 4x}{-2}$

3) $f(x) = \frac{1}{1-4x}$

4) $f(x) = \frac{-3}{2x-1}$

$$5) f(x) = \frac{2x-1}{3x+2}$$

$$7) f(x) = (-5x^2 + 1)^2$$

$$6) f(x) = \frac{3x^2 - 4x + 1}{2x - 3}$$

Exercice 3: calcule la fonction dérivée des fonctions suivantes:

$$a) f(x) = x^2 + x + 1$$

$$b) g(x) = \frac{x}{4} - 3$$

$$c) h(x) = 2x + 1 \frac{1}{x}$$

$$d) m(x) = (x^2 - x - 1)(x^4 - 3)$$

$$e) t(x) = \frac{x+1}{x^2-3}$$

$$f) i(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x + 1$$

$$g) n(x) = 2x - \frac{1}{x+3}$$

$$h) s(x) = \frac{2}{3}x^4 - \frac{5}{6}x^3 + 2x^2 - 4$$

$$i) k(x) = 2x^5 - 3x^2 + 8$$

$$j) p(x) = \frac{2x^2-3}{x^2+7}$$

Exercice 4: soit f une fonction définie par $f(x) = \frac{1-2x}{x+3}$ et (C) sa courbe représentative.

- 1) Préciser l'ensemble de dérivabilité de f , puis déterminer sa fonction dérivée.
- 2) a) Déterminer une équation de la tangente à (C) au point d'abscisse -1 .
b) Dresser le tableau de variation de la fonction f .

Exercice 5 : Dans chacun des cas suivants, préciser l'ensemble de dérivabilité de la fonction f , calculer sa dérivée et dresser son tableau de variation.

$$a) f(x) = -x^2 + 3x - 2$$

$$b) f(x) = \frac{5x^2-3x}{3}$$

$$c) f(x) = x + 2 + \frac{1}{x-2}$$

$$d) f(x) = \sqrt{2x-3}$$

$$e) f(x) = x^3 - 12$$

$$g) f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 6x - 1$$

$$i) f(x) = \frac{1}{2x+1} - \frac{1}{2x-1}$$

$$h) f(x) = x^2 + 1 + \sqrt{x}$$