

FONCTIONS LOGARITHME – FONCTIONS EXPONANETIELLES

A/ Fonction logarithme :

I/ Fonction logarithme népérien (ou de base e) :

1. Définition et notation :

1.1. Activité :

Dans chacun des cas donner une primitive f sur $I =]0, +\infty[$:

$$a^{\circ}) f(x) = \frac{1}{x^2} ;$$

$$b^{\circ}) f(x) = \frac{1}{x^3} ;$$

$$c^{\circ}) f(x) = \frac{1}{x^8}$$

Synthèse partielle :

On appelle fonction logarithme népérien, la primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction $\frac{1}{x}$ qui s'annule en 1. Elle est notée "Log" ou "ln".

$$\ln :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \ln x$$

Si $f(x) = \frac{1}{x}$ alors sa primitive est $F(x) = \text{Log} x = \ln x$ avec $\ln 1 = 0$.

1.2. Conséquences immédiates :

- L'ensemble de définition de la fonction $\ln$ est $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$;
- La fonction $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;
- $\ln 1 = 0$;
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ alors la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$

On déduit de ce résultat les propriétés suivantes : $\forall a, b, x \in \mathbb{R}_+^*$

- $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$
- $\ln a \geq \ln b \Leftrightarrow a \geq b$
- Compléter le tableau suivant :

x	0	0,1	0,3	0,5	0,8	0,9	1	1,1	1,5	2	e	5
$\ln x$	-	-2,30	-1,20	-0,69	-0,22	-0,10	0	0,09	0,40	0,69	1	1,60

$$\forall x \in]0; 1] ; \ln x \leq 0 ; \quad \forall x \in [1; +\infty[; \ln x \geq 0$$

- Le nombre e :

Il existe un seul nombre dans $]0; +\infty[$, conventionnellement noté e tel que $\ln e = 1$. $e = 2,7182818285... \approx 2,72$.

Attention : Un nombre négatif ou nul n'admet pas de logarithme népérien.

Exemples :

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$1^\circ) \ln(x+2) = \ln(3-x); \quad 2^\circ) \ln(4-2x) \leq 0$$

Réponses :

$$1^\circ) \ln(x+2) = \ln(3-x)$$

Déterminons le domaine de validité :

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
$x+2$	/	-	0	+
$3-x$	/	+	0	-

$$D_v =]-2; 3[$$

Tapez un

$$\ln(x+2) = \ln(3-x) \Leftrightarrow x+2 = 3-x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \in D_v; \quad S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}.$$

$$2^\circ) \ln(7-2x) \leq 0; \quad D_v = \left] \frac{7}{2}; +\infty \right[$$

$$\ln(7-2x) \leq 0 \Leftrightarrow \ln(7-2x) \geq \ln 1 \Leftrightarrow 7-2x \geq 1 \Leftrightarrow x \leq 3 \in D_v; \quad S = \emptyset = \{ \}.$$

2. Étude de la fonction $\ln$: Soit $f(x) = \ln x$

2.1. Domaine de définition :

$$D_f = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\} = \mathbb{R}_+^* =]0; +\infty[$$

2.2. Limites aux bornes de D_f (Limites remarquables) :

$$\text{On admet que : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = \ln(0) = -\infty \Rightarrow x=0 \text{ (AV)}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = \ln(+\infty) = +\infty$$

2.3. Autres limites :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

2.4. Dérivée et sens de variation :
1

$$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} > 0 ; f \text{ est strictement croissante sur }]0; +\infty[.$$

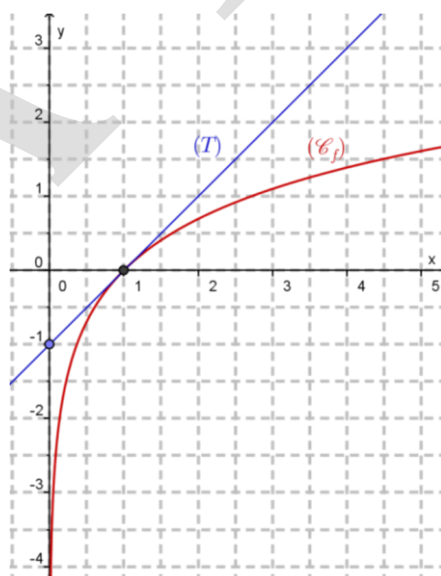
De façon générale, si $f(x) = \ln(u)$ alors $f'(x) = \frac{u'}{u}$.

2.5. Tableau de variation :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$\ln x$	 $-\infty$	$+\infty$

2.6. Représentation graphique : Tableau de valeurs de $\ln x$:

x	0	0,1	0,3	0,5	0,8	0,9	1	1,1	1,5	2	e	5
$\ln x$	-	-2,30	-1,20	-0,69	-0,22	-0,10	0	0,09	0,40	0,69	1	1,60



3. Propriétés algébriques :

3.1. Propriétés fondamentale :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*, \ln(a \times b) = \ln a + \ln b$$

3.2. Autres propriétés :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*, \ln(a^n) = \ln \underbrace{a \times a \times a \dots \times a}_{n \text{ facteurs}} = \ln a + \ln a + \ln a \dots + \ln a = n \ln a$$

$$\ln(a^{-1}) = -\ln a ; \quad \ln(\sqrt{a}) = \ln(a^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} \ln a ; \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln(a \times b^{-1}) = \ln a - \ln b$$

Exercices :

1°) Écrire en fonction de $\ln 2$ les expressions suivantes :

$$A = 4\ln 2 - \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 32 + \ln(2^3) ; \quad B = \frac{1}{2} - 2\ln(\sqrt{2\sqrt{e}}) - 6\ln 2 + \ln 16$$

2) Calculer :

$$C = \ln e\sqrt{e} + \ln e^2 - \ln \frac{1}{e^3} + 2\ln \frac{1}{\sqrt{2}} ; \quad D = \ln e^3 - \ln \frac{1}{e^2} + \ln \sqrt{e^4} + 3\ln \sqrt{e} .$$

3°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$:

$$a^\circ) \ln(x-3) = \ln(2x+1) ; \quad b^\circ) \ln(2x^2-3x+2) - \ln(4x-5) = 0 ; \quad l^\circ) \ln(2x+1) + 2\ln(x+1) =$$

$$\ln(6x-3) ; \quad c^\circ) \ln(x+2) + \ln(x+1) = \ln(x+10) ; \quad d^\circ) \ln(x+2) + \ln(x+1) <$$

$$\ln(x+10) ; \quad e^\circ) (1-\ln x)(-3+\ln x) \geq 0 ; \quad f^\circ) (\ln x)^2 - 10(\ln x) + 9 = 0 ; \quad g^\circ) (\ln$$

$$x)^2 - 10(\ln x) + 9 \leq 0 ; \quad h^\circ) 2(\ln x)^2 - 5\ln x + 3 = 0 ; \quad i^\circ) 2(\ln x)^2 - 5\ln x$$

$$> -3 ;$$

$$j) \begin{cases} 2\ln x - 3\ln y = 9 \\ \ln x + 5\ln y = -2 \end{cases} ; \quad k) \begin{cases} 2\ln(x+3) - 3\ln(4-y) = 9 \\ 5\ln(x+3) + 3\ln(4-y) = -2 \end{cases}$$

II/ Fonction logarithme de base quelconque ($a > 0$; $a \neq 1$)

1. Définition et notation :

Étant donné un réel a , positif autre que 1 ; on appelle fonction logarithme de base a , la fonction notée $\log_a$ définie par :

$$\log_a : \mathbb{R}_+^* =]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \log_a(x)$$
$$= \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

2)

Quelques bases usuelles :

Le logarithme népérien (ou de base e) noté $\ln$ et le logarithme décimal (ou de base 10) noté

$\log_{10}$ ou simplement $\log$ sont les logarithmes les plus utilisés. $\log x = \log_{10} x = \frac{\ln x}{\ln 10}$

Exercices : Résoudre dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$

a°) $2 \log_3(x-1) + \log_3(2x+3) = 1$; b°) $\log_3^x = \frac{1}{2} + \log_9(4x+15)$;

c°) $\begin{cases} 5 \log_2 x + 2 \log_2 y = 8 \\ 4 \log_2 x - 3 \log_2 y = 11 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 5x - y = 2 \\ \log(y+6) - \log x = 3 \log 2 \end{cases}$

B/ Fonction exponentielle :

I/ Fonction exponentielle népérien (ou de base e) :

1. Définition et notation :

On appelle fonction exponentielle de base e , la bijection réciproque de la fonction logarithme de base e ($\ln$) notée $\exp$.

$$\exp: \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+^* =]0; +\infty[$$

$$x \mapsto \exp(x)$$

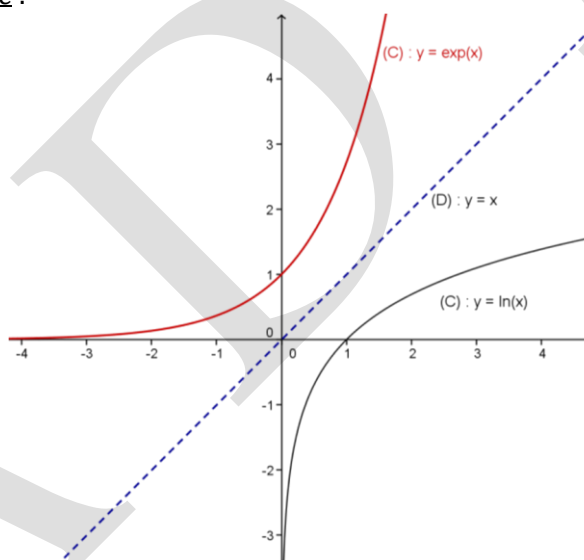
Conséquences immédiates :

- $\forall x \in \mathbb{R} ; \forall y \in \mathbb{R}_+^* ; y = \exp(x) \Leftrightarrow x = \ln y$
- $\forall x \in \mathbb{R} ; \exp(x) > 0$
- $\forall a ; b \in \mathbb{R} ; \exp(a) = \exp(b) \Leftrightarrow a = b$
- $\forall a ; b \in \mathbb{R} ; \exp(a) < \exp(b) \Leftrightarrow a < b$
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^* ; \exp(\ln x) = x$

- Pour $x = 1 ; \exp(\ln 1) = 1 \Leftrightarrow \exp(0) = 1$ -

Pour $x = e ; \exp(\ln e) = e \Leftrightarrow \exp(1) = e$

2. Représentation graphique :



3. Notation e^x :

On sait que $\forall m \in \mathbb{R} , \ln [e^m] = m$

$\ln (e^m) = m \Leftrightarrow \exp (\ln [e^m]) = \exp (m) \Leftrightarrow e^m = \exp (m).$ Donc $\forall x \in \mathbb{R} ; \exp (x) = e^x$

4. Propriétés algébriques :

4.1. Propriété fondamentale :

$$e^a \times e^b = e^{a+b}$$

4.2. Autres propriétés :

$$\frac{1}{e^a} = e^{-a} ; \frac{e^a}{e^b} = e^a \times \frac{1}{e^b} = e^{a-b} ; (e^a)^n = e^{n \times a}$$

Exercices :

1°) Écrire plus simplement les réels : $A = e^{2 \ln 5}$; $B = e^{-\ln \frac{1}{2}}$; $C = e^{\sqrt{2}}$; $D = \ln \frac{1}{e^3}$

2°) : Résoudre dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$

a°) $e^{2x} \times e^{3x+1} e^{-4}$; b°) $\frac{e^2}{e^{4x}} = \frac{1}{e^{1-x}}$; c°) $e^{1-x} > 1$; d°) $\frac{e^2}{e^{4x}} \leq \frac{1}{2}$;

e) $3e^{2x} - 7e^x + 2 = 0$; f°) $3e^{2x} - 7e^x + 2 < 0$;
g°) $\begin{cases} 3e^x - 4e^y = -6 \\ 2e^x + e^y = 7 \end{cases}$

5. Variations de la fonction exponentielle de base e : Soit $f(x) = e^x$

5.1. Domaine de définition :

$$D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$$

5.2. Limites aux bornes de D_f (Limites remarquables) :

On admet que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \Rightarrow y = 0$ (AH) ; $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

Autres limites : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$;

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

5.3. Dérivée et sens de variation :

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x > 0 ; f \text{ est strictement croissante sur }]-\infty; +\infty[$$

De façon générale, si $f(x) = e^{u(x)}$ alors $f'(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$

5.4. Tableau de variation :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$\exp(x)$	0	$+\infty$

II/ Fonction exponentielle de base quelconque a ($a > 0$; $a \neq 1$) :

1. Définition et notation :

Soit a un réel strictement positif et différent de zéro. On appelle fonction exponentielle de base a , la réciproque de la fonction logarithme de base a . elle est symbolisée par : $\exp_a$ ou

a^x Et définie par :

$$\begin{aligned} \text{Expa} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x &\mapsto \exp_a^{(x)} = a^x \end{aligned}$$

$$y = \exp_a(x) \Leftrightarrow \log_a(y) = x ; y > 0.$$

2. Propriétés :

$\forall a; b \in \mathbb{R}$ on a :

$$a^0 = 1 ; a^1 = a ; a^{-n} = \frac{1}{a^n} ; a^n \times a^m = a^{n+m} ; (a^n)^m = a^{n \times m}$$

Remarque : $\forall x \in \mathbb{R} ; 1^x = 1$

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 - 3x - 10 = 0$

En déduire la résolution des équations suivantes :

a°) $9^x - 3^{x+1} - 10 = 0$; b°) $4^x - 3 \times 2^x - 10 = 0$

Exercices :

N°1 :

Déterminer l'ensemble des couples de nombres réels $(x; y)$ vérifiant :
$$\begin{cases} \ln(x^2) + \ln(y^2) = 2 \ln 6 \\ e^x = \frac{1}{e^{1+y}} \end{cases}$$

N°2 : (BAC 2008 Exercice 1 – 5 points)

On considère le polynôme $P(x) = 2x^3 - 9x^2 - 8x + 15$.

1°) a°) Calculer $P(1)$

b°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.

2°) Utiliser la première question pour résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : a°)

$2(\ln x) - (\ln x)^2 - 8(\ln x) + 15 = 0$ ($\ln$ désigne le logarithme népérien)

b°) $2e^{3x} - 9e^{2x} - 8e^x + 15 = 0$

1.