

# COURS ET EXERCICES CORRIGÉS SUR LES PRIMITIVES

## 1. Définitions et propriétés :

### 1.1. Définition :

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ .

On appelle primitive de  $f$  sur  $I$  toute fonction  $F$  de  $I$  vers  $\mathbb{R}$ , dérivable sur  $I$  et telle que, pour tout élément  $x$  de  $I$ ,  $F'(x) = f(x)$ .

Activité 1 :

Dans chacun des cas suivants, vérifier que la fonction  $F$  est une primitive de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $I$ .

a)  $F(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$  ;  $f(x) = 3x^2 - 6x + 4$  ;  $I = \mathbb{R}$

b)  $F(x) = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 7$  ;  $f(x) = 6(2x - 1)^2$  ;  $I = \mathbb{R}$ .

### 1.2. Propriétés :

#### • Propriété 1 :

Soit  $f$  une fonction admettant une primitive  $F$  sur un intervalle  $I$ .

- Pour tout nombre réel  $c$ , la fonction  $x \mapsto F(x) + c$  est une primitive de  $f$  sur  $I$ .
- Toute primitive de  $f$  sur  $I$  est de la forme  $x \mapsto F(x) + c$ , où  $c \in \mathbb{R}$ .

#### • Propriété 2 :

Soit  $f$  une fonction admettant une primitive sur un intervalle  $I$ ,  $y_0$  un nombre réel et  $x_0$  un élément de  $I$ .

Il existe une primitive de  $f$  sur  $I$  et une seule qui prend la valeur  $y_0$  en  $x_0$ .

## 2. Calcul de primitives :

### 2.1. Primitives de fonctions élémentaires :

La connaissance des dérivées des fonctions élémentaires permet de dresser le tableau suivant, où  $c$  désigne un nombre réel.

| Fonction $f$ | Primitives de $f$ | Sur l'intervalle |
|--------------|-------------------|------------------|
|--------------|-------------------|------------------|

|                                                                |                                         |                                          |
|----------------------------------------------------------------|-----------------------------------------|------------------------------------------|
| $x \mapsto a \ (a \in \mathbb{R})$                             | $x \mapsto ax + c$                      | $\mathbb{R}$                             |
| $x \mapsto x^n \ (n \in \mathbb{N})$                           | $x \mapsto \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$   | $\mathbb{R}$                             |
| $x \mapsto \frac{1}{x^n} \ (n \in \mathbb{N} \setminus \{1\})$ | $x \mapsto \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + c$ | $] -\infty; 0[ \text{ ou } ]0; +\infty[$ |
| $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$                                 | $x \mapsto 2\sqrt{x} + c$               | $]0; +\infty[$                           |

## 2.2. Primitives de la somme de deux fonctions :

Soit  $u$  et  $v$  deux fonctions admettant respectivement pour primitives sur un intervalle  $I$  les fonctions  $U$  et  $V$ .

La fonction  $u + v$  admet pour primitive sur  $I$  la fonction  $U + V$ .

## 2.3. Primitives du produit d'une fonction par un nombre réel :

Soit  $u$  une fonction admettant pour primitive sur un intervalle  $I$  la fonction  $U$  et  $k$  un nombre réel.

La fonction  $ku$  admet pour primitive sur  $I$  la fonction  $kU$ .

Activité 2 :

Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $I$ .

a)  $f(x) = 4x^3 - 5x^2 - 1 ; I = \mathbb{R}$ .

b)  $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} ; I = ]-\infty; 0[$ .

c)  $f(x) = x + \frac{1}{2\sqrt{x}} ; I = ]0; +\infty[$ .

## 2.4. Primitives de $u' \times (v' \circ u)$ :

Soit  $u$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  et  $v$  une fonction dérivable sur un intervalle contenant  $u(I)$ .

La fonction  $u' \times (v' \circ u)$  admet pour primitive sur  $I$  la fonction  $v \circ u$ .

En effet,  $v \circ u$  est dérivable sur  $I$  et sa dérivée est  $u' \times (v' \circ u)$ .

On en déduit le tableau suivant :

| Fonction $f$                 | Une primitive $F$ de $f$ | Sur tout intervalle où |
|------------------------------|--------------------------|------------------------|
| $u'u^n \ (n \in \mathbb{N})$ | $\frac{1}{n+1} u^{n+1}$  | $u$ est dérivable.     |

|                                                     |                           |                                            |
|-----------------------------------------------------|---------------------------|--------------------------------------------|
| $\frac{u'}{u^n} (n \in \mathbb{N} \setminus \{1\})$ | $\frac{-1}{(n-1)u^{n-1}}$ | $u$ est dérivable et ne s'annule pas.      |
| $\frac{u'}{\sqrt{u}}$                               | $2\sqrt{u}$               | $u$ est dérivable et strictement positive. |

### Activité 3 :

Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

a)  $f(x) = 10x(5x^2 - 7)^4$

b)  $f(x) = (2x - 3)(x^2 - 3x + 1)$

c)  $f(x) = \frac{2x+5}{(x^2+5x+1)^2}$

d)  $f(x) = \frac{2x-3}{(2x^2-6x+11)^3}$

e)  $f(x) = \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+1}}$

### Activité 4 :

Dans chacun des cas suivants, déterminer la primitive  $F$  de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $I$ , qui vérifie les conditions indiquées.

a)  $f(x) = x^2 - 3x + 1$  ;  $I = \mathbb{R}$  et  $F(0) = 3$

b)  $f(x) = x^3 - \frac{2}{x^2}$  ;  $I = ]0; +\infty[$  et  $F(2) = 0$

c)  $f(x) = 2x - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$  ;  $I = ]0; +\infty[$  et  $F(1) = 1$