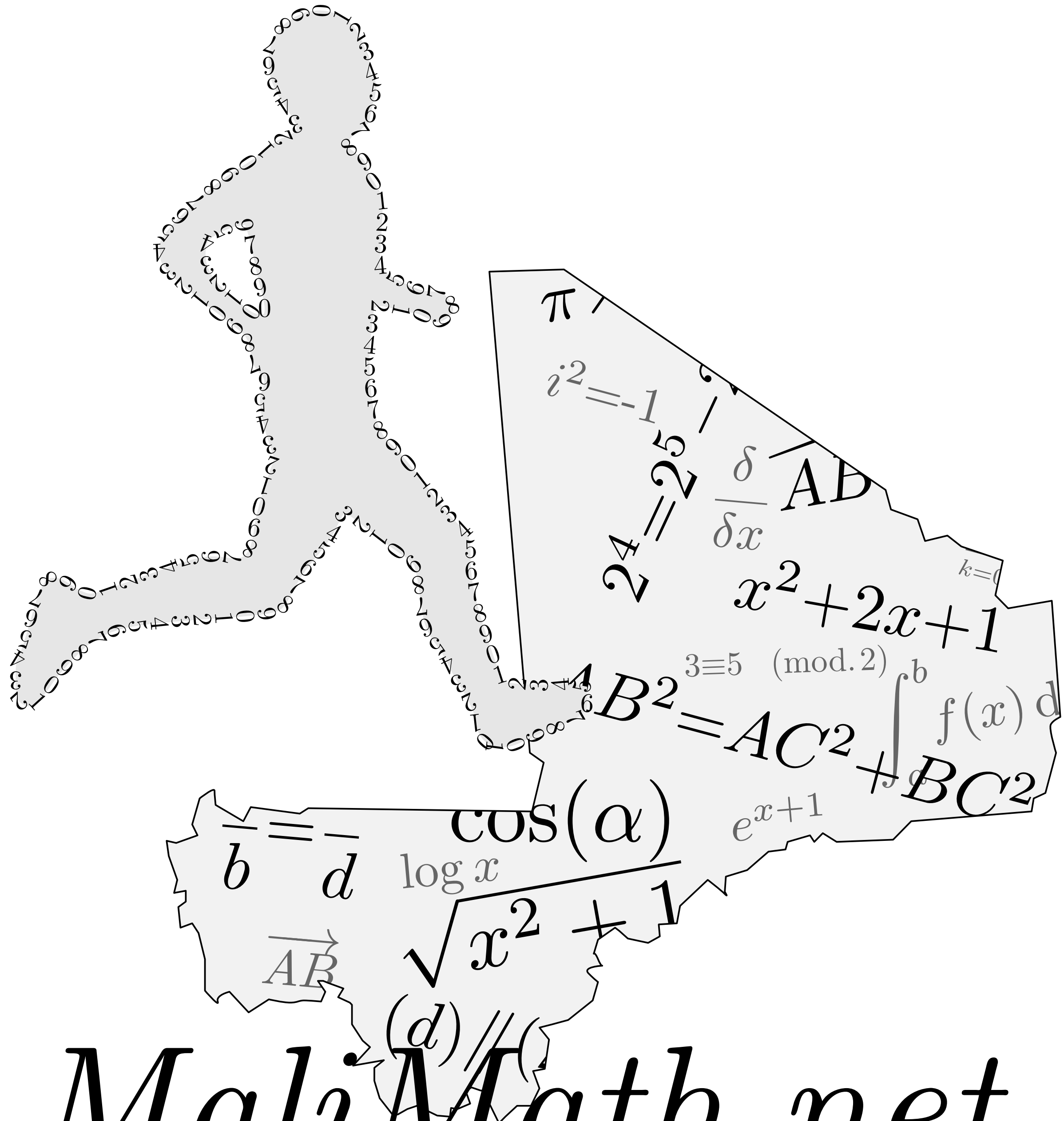
Cahier d'exercices

Dixième



MaliMath.net

Dixième

Sommaire :

A. Trigonométrie:

Exercice A.1

1. a. Dessiner un triangle ABC rectangle en C.

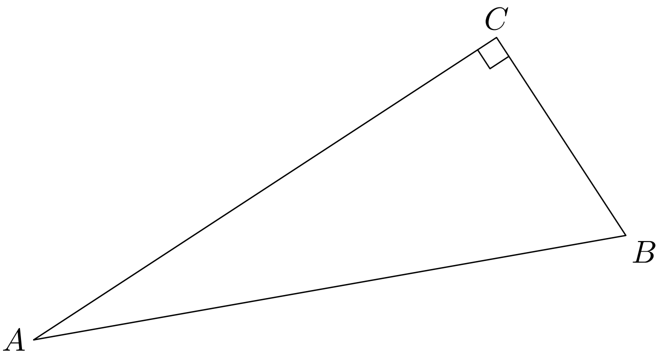
   b. En fonction des longueurs des côtés du triangle ABC, exprimer le rapport trigonométrique du sinus de l'angle $\widehat{ABC}$.

2. a. Dessiner un triangle DEF rectangle en E.

   b. En fonction des longueurs des côtés du triangle DEF, exprimer le rapport trigonométrique de la tangente de l'angle $\widehat{ABC}$.

Exercice A.2

On considère le triangle ABC rectangle en C représenté ci-dessous :



1. Compléter chaque case du tableau ci-dessous par le côté correspondant du triangle ABC :

Angle considéré	Côté adjacent	Côté opposé	Hypothénuse
$\widehat{CAB}$			
$\widehat{CBA}$			

2. a. Relativement au triangle ABC, compléter chaque case du tableau ci-dessous par le quotient définissant la valeur recherchée, puis par sa valeur approchée au centième près :

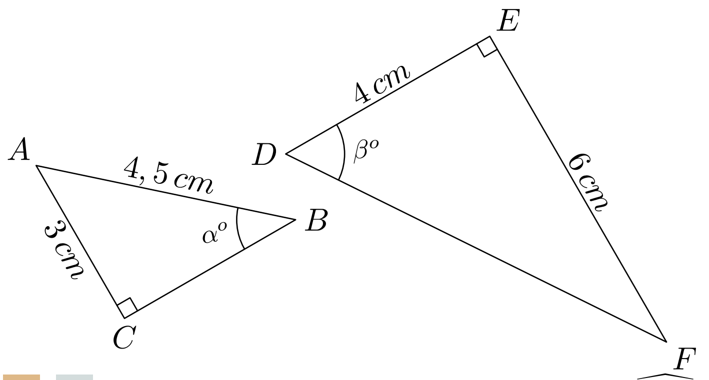
α	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\tan\alpha$
$\widehat{CAB}$	$\frac{\quad}{\quad} \simeq$	$\frac{\quad}{\quad} \simeq$	$\frac{\quad}{\quad} \simeq$
$\widehat{CBA}$	$\frac{\quad}{\quad} \simeq$	$\frac{\quad}{\quad} \simeq$	$\frac{\quad}{\quad} \simeq$

   b. A l'aide d'une table trigonométrique, déterminer une valeur approchée de la mesure des angles $\widehat{CAB}$ et $\widehat{ABC}$.

3. A l'aide d'un rapporteur, vérifier l'exactitude des résultats observés à la question 2. b..

Exercice A.3

On considère les deux triangles rectangles ABC et DEF ci-dessous :



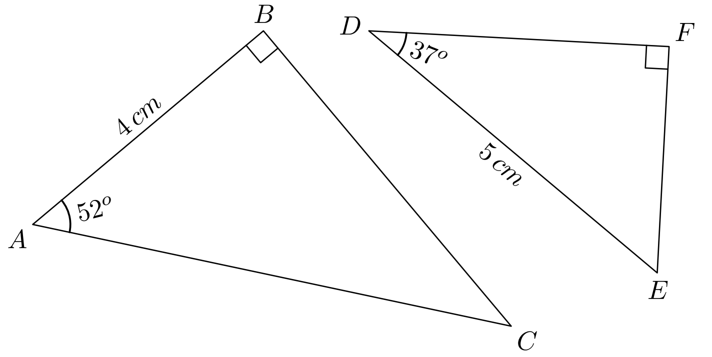
1. a. Dans le triangle ABC, relativement à l'angle $\widehat{ABC}$, déterminer la valeur du rapport suivant au centième près :
$$\frac{\text{longueur du côté opposé}}{\text{longueur de l'hypothénuse}}$$

   b. Dans le triangle DEF, relativement à l'angle $\widehat{DEF}$, déterminer la valeur du rapport suivant au centième près :
$$\frac{\text{longueur du côté opposé}}{\text{longueur du côté adjacent}}$$

2. En vous servant de la table trigonométrique, déterminer la valeurs des angles α et β au degré près.

Exercice A.4

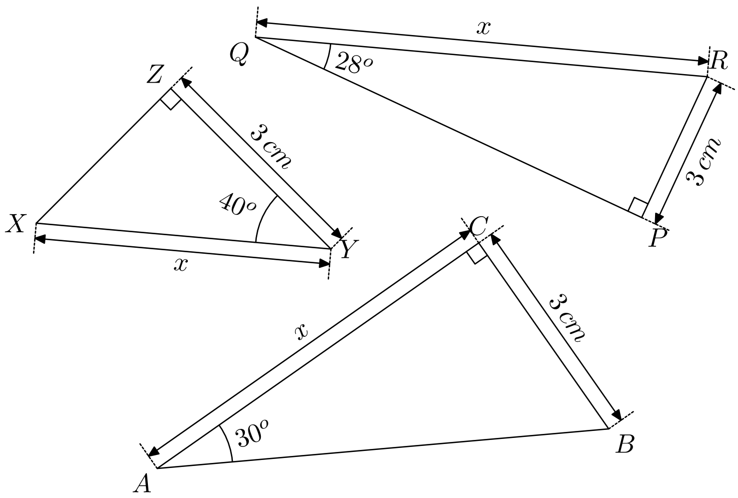
On considère les deux triangles ci-dessous :



Déterminer les mesures des segments $[AC]$ et $[DF]$ arrondies au millimètre près.

Exercice A.5

Pour chaque triangle représenté ci-dessous, déterminer la longueur inconnue indiquée au millimètre près :



Exercice A.6

Soit ABC un triangle isocèle rectangle en B et tel que $AB = 4\,cm$.

1. Tracer la figure, puis donner, sans justification, la valeur de chacun des angles du triangle ABC..
2. Donner la valeur exacte de la tangente d'un angle de 45^o.
3. a. Donner la mesure exacte du segment $[AC]$.
   b. Donner la valeur exacte du sinus et du cosinus de 45^o.

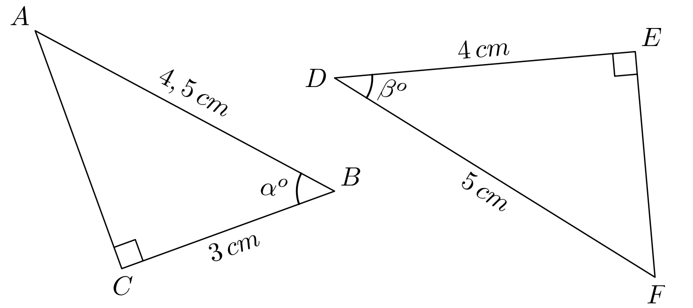
Exercice A.7

1. a. Tracer le triangle ABC équilatéral de côtés $6\,cm$.
   b. Tracer la médiatice (d) du segment $[AC]$ au compas. Nommer le point I, le point d'intersection de (d) avec $[AC]$.
   c. Vérifier que la médiatrice est aussi la hauteur.
2. Donner toutes les valeurs *exactes* des longueurs du triangle AIB.
3. Donner la mesure de chacun des angles du triangle AIB. Justifier, puis les marquer sur votre dessin.
4. Remplissez le tableau suivant avec des *valeurs exactes* :

	30^o	60^o
sin		
cos		
tan		

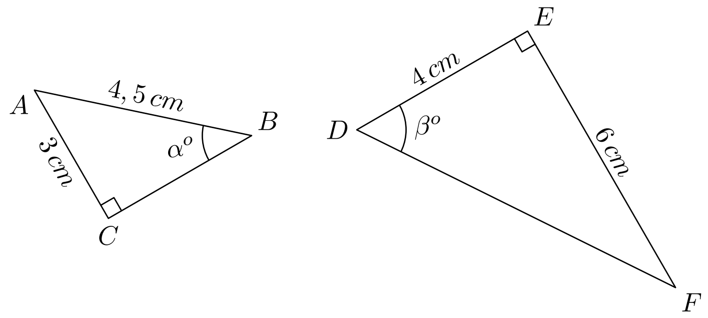
Exercice A.8

Calculer l'arrondi au dixième de degrès près des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{EDF}$ indiqués ci-dessous :



Exercice A.9

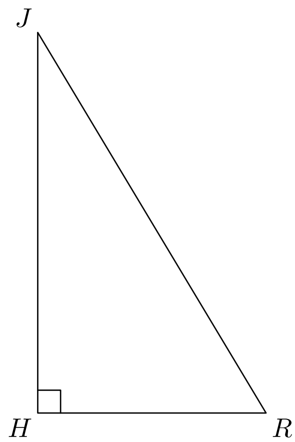
Calculer l'arrondi au dixième de degrès près des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{EDF}$ indiqués ci-dessous :



Exercice A.10

L'unité de longueur est le mètre.
Le dessin n'est pas à l'échelle.

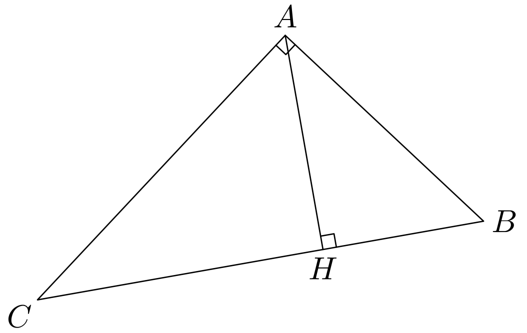
1. Roméo (R) veut rejoindre Juliette (J) à sa fenêtre. Pour cela, il place une échelle $[JR]$ contre le mur $[JH]$. Le mur et le sol sont perpendiculaires. On donne :
   $HR = 3 \quad ; \quad JH = 4.$
   a. Calculer JR.
   b. Calculer $\cos \widehat{HJR}$ puis la valeur de l'angle $\widehat{HJR}$ arrondie au degré.



2. L'échelle glisse : elle change de position.
   On donne : $JR = 5$ et $\widehat{HJR} = 40^o$.
   a. Calculer HR (donner la valeur arrondie au dixième)
   b. Ecrire l'expression de $\tan \widehat{HJR}$ puis calculer JH *((donner la valeur arrondie au dixième).*

Exercice A.11

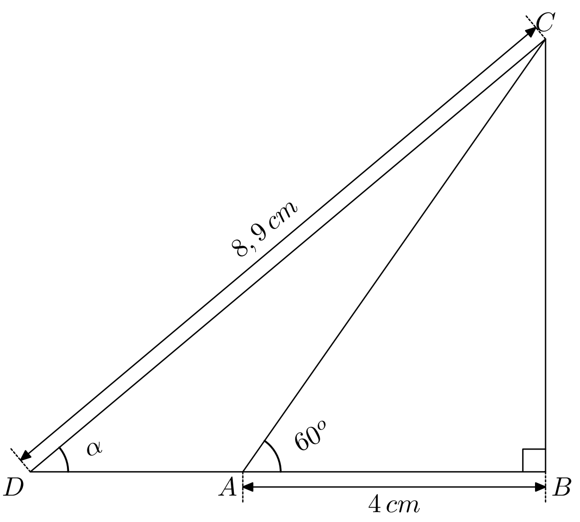
La figure n'est pas faite en vraie grandeur. Elle n'est pas à reproduire
AHC est un triangle rectangle en H.
La droite passant par A est perpendiculaire à la droite (AC) coupe la droite (HC) en B.
On sait que :
$AH = 4{,}8\,cm$; $HC = 6{,}4\,cm$



1. a. Justifier l'égalité : $\widehat{ACH} = 90^o - \widehat{HAC}$
   b. Justifier l'égalité : $\widehat{BAH} = 90^o - \widehat{HAC}$
   c. Que peut-on déduire pour les angles $\widehat{ACH}$ et $\widehat{BAH}$?
2. a. Montrer que : $\tan(\widehat{ACH}) = \dfrac{3}{4}$
   b. En utilisant le triangle BAH, exprimer $\tan(\widehat{BAH})$ en fonction de BH
3. Déduire des questions 1. et 2. que : $BH = 3{,}6\,cm$
4. Calculer la mesure en degré, arrondie au degré, de l'angle $\widehat{ACH}$.

Exercice A.12

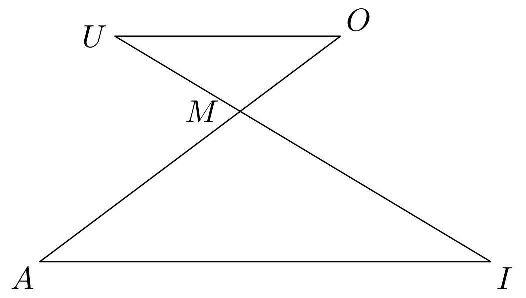
On considère le triangle ABC rectangle en B représenté ci-dessous :



1. Déterminer la longueur du segment $[BC]$ arrondie au millimètre près.
2. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{CDB}$ arrondie au degré près.

Exercice A.13

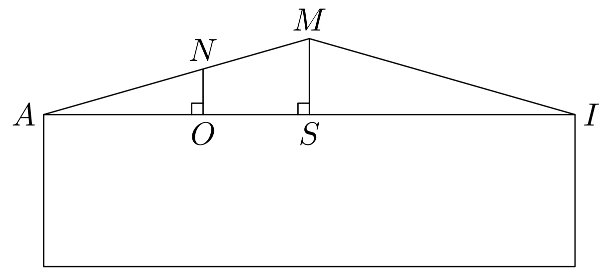
Les segments $[OA]$ et $[UI]$ se coupent en M.
On a : $MO = 21$; $MA = 27$; $MU = 28$; $MI = 36$; $AI = 45$
(l'unité de longueur éatnt le millimètre)



1. Prouver que les droites (OU) et (AI) sont parallèles
2. Calculer la longueur OU.
3. Prouver que le triangle AMI est un triangle rectangle.
4. Déterminer, à un degré près, la mesure de l'angle $\widehat{AIM}$
5. Montrer que les angle $\widehat{MAI}$ et $\widehat{MOU}$ ont la même mesure.

Exercice A.14

L'unité de longueur est le mètre
Le dessin ci-contre représente la coupe d'une maison.
Le triangle MAI est isocèle, de sommet principal M.
La droite perpendiculaire à la droite (AI), passant par M, coupe (AI) en S.
On sait que : $MS = 2{,}5$ et $AI = 11$



1. a. Calculer AS. (justifier)
   b. Calculer la valeur arrondie à 0,1 degré près de la mesure de l'angle $\widehat{AMS}$.
2. Dans le toit, il y a une fuite en N qui fait une tache en O, sur le plafond.

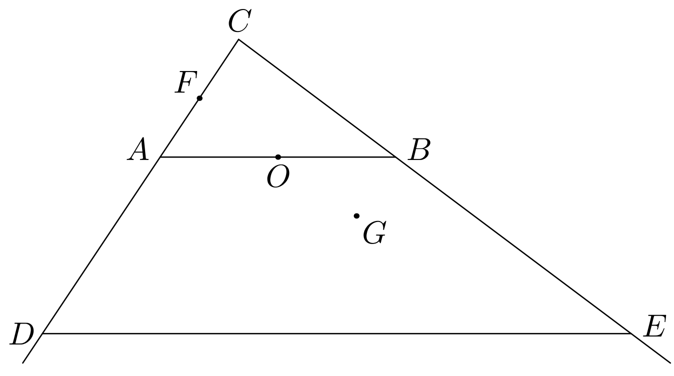
   La droite (NO) est perpendiculaire à la droite (AI).

   $AO = 4{,}5$

   Pour effectuer les calculs, on prendra : $\widehat{OAN} = 24^o$.
   Calculer AN. On donnera la valeur arrondie à 0,1 près.

Exercice A.15

On considère la figure ci-dessous :



Données de la figure ci-dessus :
CDE est un triangle rectangle en C.

A appartient au segment $[CD]$, B appartient au segment $[CE]$ et la droite (AB) est parallèle à la droite (DE).

Le point F est le milieu du segment $[AC]$ et le point O est le milieu de $[AB]$.

Le point G est le symétrique de F par rapport à O.

$DE = 12\,cm$; $AB = 4{,}5\,cm$; $AC = 1{,}8\,cm$

Les questions suivantes sont indépendantes les unes des autres :

1. Quelle est la nature du quadrilatère $AFBG$? Justifier.
2. Montrer que la droite (FO) est parallèle à la droite (CB).
3. Calculer la longueur CD.
4. Calculer une valeur approchée au degré près de l'angle $\widehat{BAC}$.

Exercice A.16

1. Tracer sur la copie un segment $[EF]$ de longueur $7\,cm$ et de milieu O.
Tracer le cercle de diamètre $[EF]$ puis placer un point G sur le cercle tel que : $\widehat{FEG} = 26^o$.
2. Démontrer que le triangle EFG est un triangle rectangle en G.
3. Calculer une valeur approchée de la longueur FG, arrondie au millimètre.
4. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{GOF}$ *(justifier votre réponse)*

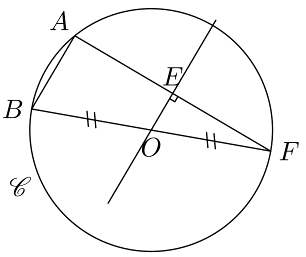
Exercice A.17

Sur le croquis ci-contre :

$\mathscr{C}$ est un cercle de centre O et de diamètre $BF = 40\,mm$;

A est un point du cercle $\mathscr{C}$ tel que $AB = 14\,mm$;

la perpendiculaire à la droite (AF) passant par O coupe le segment $[AF]$ en E.



1. Quelle est la nature du triangle ABF ? Justifiez votre réponse.
2. Calculer la valeur arrondie au dixième de degré près de l'angle $\widehat{AFB}$.
3. Calculer la valeur arrondie au millimètre près de la longueur EF.

Exercice A.18

On considère un cercle de $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$; soit C un point appartenant au segment $[AB]$. On considère les deux cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ de diamètre respectif $[AC]$ et $[BC]$.

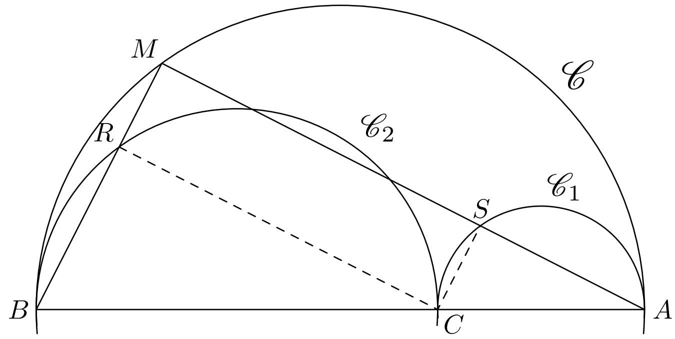
Le point M est un point du cercle $\mathscr{C}$; on note :

Le point R est le point d'intersection du cercle $\mathscr{C}_2$ avec le segment $[MB]$;

le point S est le point d'intersection du cercle $\mathscr{C}_1$ et du segment $[AM]$.

On donne les mesures suivantes :

$BM = 3{,}64\,cm$; $AM = 7{,}13\,cm$; $BC = 5{,}28\,cm$



Les résultats seront donnés au degré près ou au millimètre près.

1. a. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{MBA}$.
   b. Déterminer la mesure du segment $[AB]$.
2. a. Justifier que le triangle BCR est rectangle en R.
   b. Déterminer la mesure du segment $[BR]$.
3. a. Justifier que les droites (BM) et (CS) sont parallèles.
   b. Déterminer la mesure de SA.

Exercice A.19

On considère les quatres figures ci-dessous :

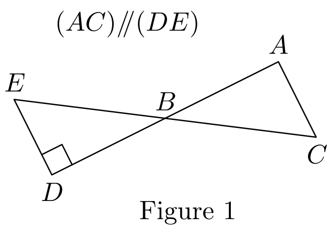


Figure 1

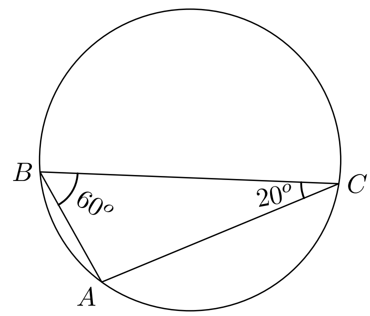


Figure 2

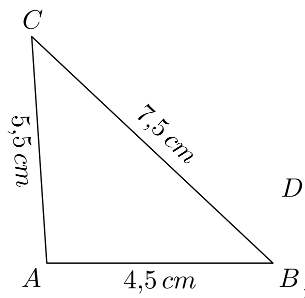
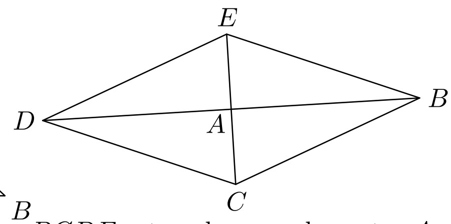


Figure 3



$BCDE$ est un losange de centre A
Figure 4

Recopier et compléter le tableau suivant en utilisant la liste des propriétés présente en fin d'exercice :

	Figure 1	Figure 2	Figure 3	Figure 4
Le triangle ABC est rectangle en A ?				
Numéro(s) de la ou des propriétés permettant de le prouver				

Liste des propriétés :

1. Si un quadrilatère est un losange, alors ses diagonales ont le même milieu et sont perpendiculaires.
2. Si deux droites sont perpendiculaires à une même

troisième, alors elles sont parallèles entre elles.

3. Si dans un triangle, le carré de la longueur du plus grand côté n'est pas égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors ce triangle n'est pas rectangle.

4. Dans un triangle, la somme des mesures des trois angles est égale à 180^o.

5. Si deux droites sont parallèles et si une troisième est perpendiculaires à l'une, alors elle est perpendiculaire à l'autre.

6. Si un quadrilatère a ses quatre côtés de même longueur, alors c'est un losange.

7. Si deux angles inscrits dans un cercle interceptent le même arc, alors ils ont la même mesure.

8. Si dans un triangle, le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des longueurs des autres côtés, alors ce triangle est rectangle et l'angle droit est l'angle opposé au plus grand côté.

Exercice A.20

L'unité de longueur est le centimètre

1. Construire un triangle DOS tel que :
$DS = DO = 6 \quad ; \quad \widehat{ODS} = 120^o$
Quelle est la nature du triangle DOS ? Justifier.

2. Dans le triangle DOS, tracer la hauteur issue de D. Elle coupe $[OS]$ en H.
On donne le tableau suivant :

x	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\times$

a. Calculer la valeur exacte de OH.

b. En déduire que : $OS = 6\sqrt{3}$

3. Placer le point M de $[DS]$ tel que $SM{=}5$. Tracer la parallèle à (OS) passant par M ; elle coupe $[DO]$ en N. Calculer la valeur exacte de MN.

Exercice A.21

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et de rayon $4\,cm$.
Soit B et C deux points diamétralement opposés et A un troisième point du cercle tel que $AC{=}4\,cm$.

1. Faire le dessin.

2. Montrer que le triangle ABC est rectangle.

Le triangle ABC a une aire égale à $8\sqrt{2}$.

3. En déduire la longueur de $[AB]$.

4. Calculer la mesure de $\widehat{ABC}$

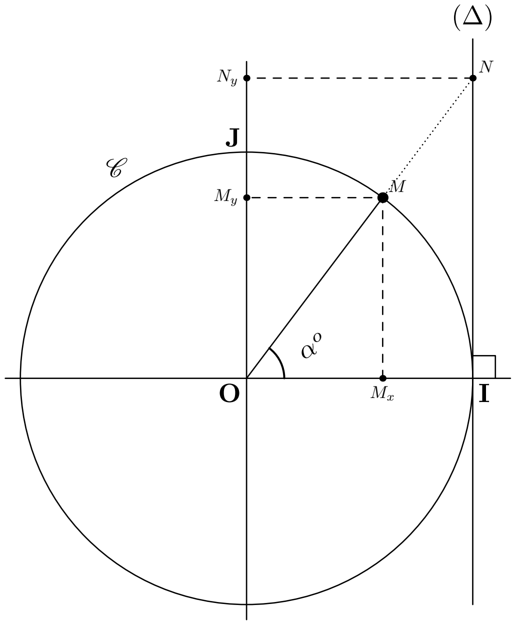
Soit A' le symétrique de A relativement à l'axe (BC). On note H le point d'intersection de $[AA']$ et (BC).

5. Montrer que : $\widehat{ABA'}{=}60^o$

6. Montrer que ABA' est un triangle équilatéral.

Exercice A.22

On considère le plan muni du repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$.
Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et **de rayon 1** : ce cercle s'appelle le *cercle trigonométrique*.



On considère la tangente (Δ) au cercle $\mathscr{C}$ passant par le point I et perpendiculaire à l'axe des abscisses.

On place un point M sur le cercle $\mathscr{C}$, on note :
On repère ce point par l'angle $\alpha{=}\widehat{IOM}$

M_x le projeté orthogonal de M sur l'axe (OI) ;

M_y le projeté orthogonal de M sur l'axe (OJ) ;

On repère ainsi le point M par l'angle qu'il définit : on note $M(\alpha)$, ou par ses coordonnées cartésiennes $M\,(M_x\,;M_y)$.

Le point N, s'il existe, est l'intersection de la droite (Δ) avec la droite (OM). On note :
N_y le projeté orthogonal de N sur (OJ) ;

1. On se place dans le triangle OMM_x :

a. Quel est la nature du triangle OMM_x. Justifier.

b. Etablir les égalités suivantes :
$\cos\alpha = OM_x \quad ; \quad \sin\alpha = MM_x$

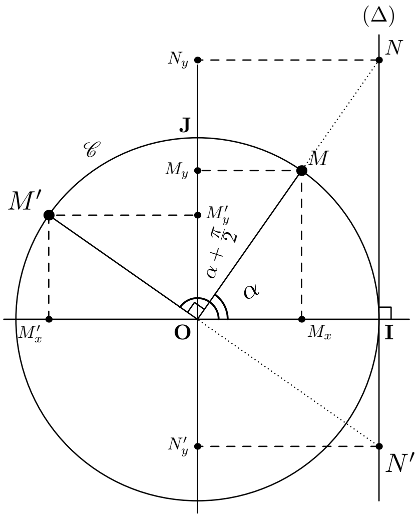
2. Dans le triangle ONI rectangle en I, établir l'égalité suivante :
$\tan\alpha = NI$

3. Relativement à l'angle α, dire ce que représente les longueurs OM_x, OM_y et ON_y.

4. Aux vues du travail effectué précédemment, justifier l'égalité :
$(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1$

Exercice A.23

Dans le plan munit d'un repère orthonormé et pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère deux points $M(\alpha)$ et $M'\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)$ du cercle trigonométrique.

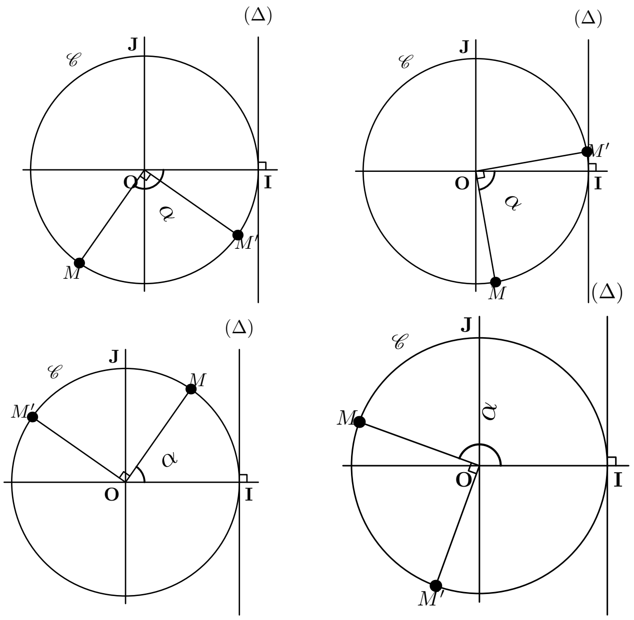


1. A l'aide des coordonnées des points figurant sur la figure, donner les valeurs du cosinus, sinus et tangente pour les angles α et $\alpha+\dfrac{\pi}{2}$.

2. a. Par quel transformation, le triangle OMM_x a pour image le triangle $OM'M'_y$?

   b. En déduire les valeurs de $\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)$ et $\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)$ en fonction de $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$.

3. Nous allons déterminer le signe des différentes valeurs des fonctions trigonométriques pour les angles α et $\alpha+\dfrac{\pi}{2}$. Ceci afin de s'assurer de la validité des formules trouvées à la question 2. quel que soit la valeur de l'angle α :



	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\tan\alpha$
$\alpha \in \left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$			
$\alpha \in \left]\dfrac{\pi}{2}\,;\,\pi\right[$			
$\alpha \in \left]-\pi\,;\,-\dfrac{\pi}{2}\right[$			
$\alpha \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,0\right[$			

	$\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)$	$\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)$	$\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)$
$\alpha \in \left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$			
$\alpha \in \left]\dfrac{\pi}{2}\,;\,\pi\right[$			
$\alpha \in \left]-\pi\,;\,-\dfrac{\pi}{2}\right[$			
$\alpha \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,0\right[$			

On en déduit que :

$$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha}=-\tan\alpha.$$

Question subsidiaire :
Nous allons montrer d'une autre manière que :

$$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{\tan\alpha}\ :$$

4. a. Exprimer ON en fonction de α.

   b. En utilisant le fait que $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$, exprimer la valeur de ON' en fonction de α

   c. En déduire l'aire du triangle ONN'.

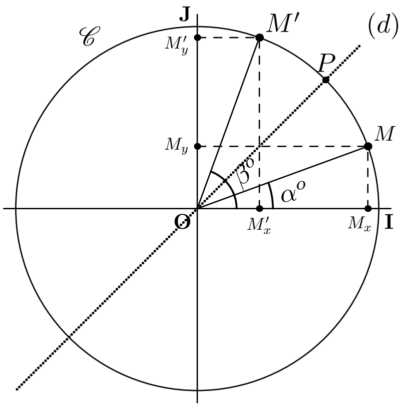
5. En utilisant le fait que (OI) est la hauteur du triangle ONN' issue de O, exprimer l'aire du triangle ONN' d'une autre façon.

6. Etablir la formule suivante :
   $$IN'+\tan\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}\times\frac{1}{\sin\alpha}$$

7. En déduire la relation : $\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{1}{\tan\alpha}$.

Exercice A.24

Dans le repère orthonormal $(O\,;\,I\,;\,J)$, on considère le cercle $\mathscr{C}$ trigonométrique : c'est à dire le cercle de centre O et de rayon 1.
On note les points M et M' respectivement repéré par les angles complémentaires α et β $\left(\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}\right)$.
On note :
$M(\alpha)$ et $M'(\beta)$



On note (d) la bissectrice de l'angle $\widehat{JOI}$ et P le point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec (d)

1. Dans cette question, nous allons montrer que les deux points M et M' sont symétriques relativement à la droite (d). Pour cela, notons N le symétrique du point M par rapport à la droite (d) :

   a. Justifier que le point N est un point du cercle $\mathscr{C}$.

   b. Donner la mesure de l'angle $\widehat{JON}$ en fonction de α. En déduire que le point N appartient à la demi-droite $[OM')$.

   c. Justifier que le symétrique de M relativement à la droite (d) est le point M'.

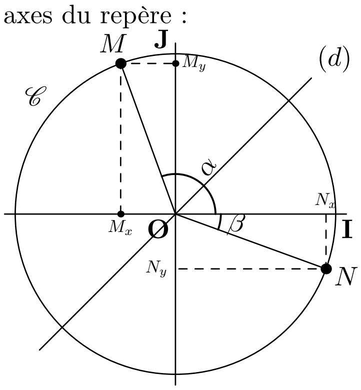
On note M_x *(resp. M'_x)* le projeté orthogonal sur l'axe des abscisses et M_y *(resp. M'_y)* le projeté orthogonal sur l'axe des ordonnées du point M *(resp. M')*

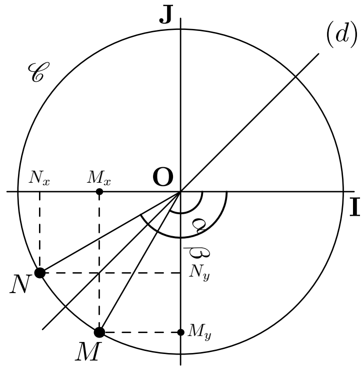
2. a. Etablir des liens entre les coordonnées des points M et M' dans le repère $(O\,;\,I\,;\,J)$.

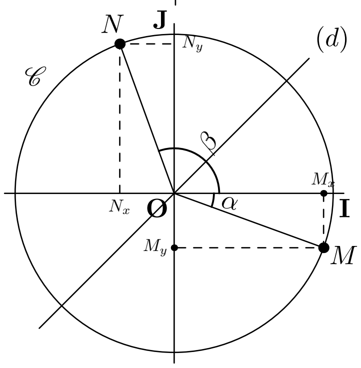
b. En déduire les relations suivantes :

$$\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \quad ; \quad \sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

Pour finir l'étude de comparaison du cosinus et du sinus de deux angles complémentaire, il faut aussi voir ce qui se passe si le point M se trouve sur un autre quadrant sur le cercle trigonométrique. On considère deux points M et N du cercle trigonométrique caractérisés respectivement par les angles α et β ainsi que leurs projetés orthogonaux respectifs sur les axes du repère :







3. a. Pour chacune des trois figures ci-dessous, établir oralement la véracité de l'assertion ci-dessous :

Les angles α et β sont complémentaire si, et seulement si, les points M et N sont symétriques relativement à la droite (d)

b. Justifier que ceci nous suffit pour établir pour toute valeur de α, les égalités suivantes :

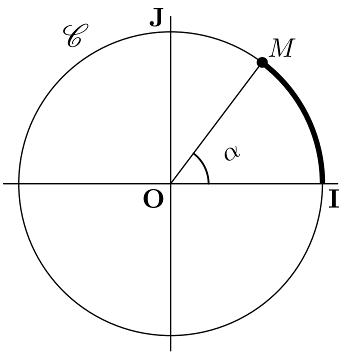
$$\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \quad ; \quad \sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

4. En déduire la relation liant $\tan\alpha$ et $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

Exercice A.25

Dans un repère orthonormal $(O\,;\,I\,;\,J)$, on considère un cercle de centre O et de rayon 1 *(ce cercle passe par les points I et J)*.

Un point M du cercle est repéré par la mesure de l'angle $\widehat{MOI}$



1. a. Donner la mesure de la circonférence du cercle.

b. Remplir le tableau suivant :

Valeur de α	0	360	180	90
Longueur de l'arc $\widehat{IM}$				

c. Que peut-on dire du tableau ci-dessus ?

2. A l'aide de la proportionnalité, remplir le tableau ci-dessous :

Valeur de α	36	45	60	30
Longueur de l'arc $\widehat{IM}$				

Exercice A.26

1. Déterminer la mesure en radian des angles suivants :

a. 90^o b. 60^o c. 45^o

d. 30^o e. 72^o f. 1^o

2. Déterminer la mesure en degré des angles suivants :

a. $\frac{\pi}{2}$ rad b. $\frac{\pi}{3}$ rad c. $\frac{\pi}{6}$ rad

d. $\frac{3\cdot\pi}{5}$ rad e. $\frac{\pi}{12}$ rad f. $\frac{3\cdot\pi}{4}$ rad

Exercice A.27

1. Simplifier chacune des expressions suivantes :

a. $\cos(x-\pi)$ b. $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

c. $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ d. $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

2. A l'aide de la relation : $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, où $x \neq \frac{\pi}{2}+k\cdot\pi$, simplifier les expressions suivantes :

a. $\tan(x+\pi)$ b. $\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

Exercice A.28

1. Etablir l'égalité : $\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{5\pi}{6}=0$

2. Déterminer la valeur des coefficients α et β réalisant l'égalité suivante :

$$2\cdot\cos\left(-\frac{\pi}{7}\right)+3\cdot\cos\frac{8\pi}{7}-2\cdot\sin\frac{6\pi}{7}+\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)=\alpha\cdot\cos\frac{\pi}{7}+\beta\cdot\sin\frac{\pi}{7}$$

Exercice A.29

Simplifier l'écriture de chacune des expressions ci-dessous :

a. $\sin(3\pi+x)$ b. $\cos\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)$

c. $\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ d. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$

e. $\sin(\pi-x)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

f. $3\cdot\sin(\pi+x)-2\cdot\sin(\pi-x)+4\cdot\sin(x-\pi)$

Exercice A.30

α	$\cos\alpha$	α	$\cos\alpha$	α	$\cos\alpha$	α	$\cos\alpha$	α	$\cos\alpha$	α	$\cos\alpha$
0^o	1,0000	15^o	0,9659	30^o	0,8660	45^o	0,7071	60^o	0,5000	75^o	0,2588
1^o	0,9998	16^o	0,9612	31^o	0,8571	46^o	0,6946	61^o	0,4848	76^o	0,2419
2^o	0,9993	17^o	0,9563	32^o	0,8480	47^o	0,6820	62^o	0,4694	77^o	0,2249
3^o	0,9986	18^o	0,9510	33^o	0,8386	48^o	0,6691	63^o	0,4539	78^o	0,2079
4^o	0,9975	19^o	0,9455	34^o	0,8290	49^o	0,6560	64^o	0,4383	79^o	0,1908
5^o	0,9961	20^o	0,9396	35^o	0,8191	50^o	0,6427	65^o	0,4226	80^o	0,1736
6^o	0,9945	21^o	0,9335	36^o	0,8090	51^o	0,6293	66^o	0,4067	81^o	0,1564
7^o	0,9925	22^o	0,9271	37^o	0,7986	52^o	0,6156	67^o	0,3907	82^o	0,1391
8^o	0,9902	23^o	0,9205	38^o	0,7880	53^o	0,6018	68^o	0,3746	83^o	0,1218
9^o	0,9876	24^o	0,9135	39^o	0,7771	54^o	0,5877	69^o	0,3583	84^o	0,1045
10^o	0,9848	25^o	0,9063	40^o	0,7660	55^o	0,5735	70^o	0,3420	85^o	0,0871
11^o	0,9816	26^o	0,8987	41^o	0,7547	56^o	0,5591	71^o	0,3255	86^o	0,0697
12^o	0,9781	27^o	0,8910	42^o	0,7431	57^o	0,5446	72^o	0,3090	87^o	0,0523
13^o	0,9743	28^o	0,8829	43^o	0,7313	58^o	0,5299	73^o	0,2923	88^o	0,0349
14^o	0,9703	29^o	0,8746	44^o	0,7193	59^o	0,5150	74^o	0,2756	89^o	0,0174

α	$\sin\alpha$	α	$\sin\alpha$	α	$\sin\alpha$	α	$\sin\alpha$	α	$\sin\alpha$	α	$\sin\alpha$
0^o	0,0000	15^o	0,2588	30^o	0,5000	45^o	0,7071	60^o	0,8660	75^o	0,9659
1^o	0,0174	16^o	0,2756	31^o	0,5150	46^o	0,7193	61^o	0,8746	76^o	0,9703
2^o	0,0349	17^o	0,2923	32^o	0,5299	47^o	0,7313	62^o	0,8829	77^o	0,9743
3^o	0,0523	18^o	0,3090	33^o	0,5446	48^o	0,7431	63^o	0,8910	78^o	0,9781
4^o	0,0697	19^o	0,3255	34^o	0,5591	49^o	0,7547	64^o	0,8987	79^o	0,9816
5^o	0,0871	20^o	0,3420	35^o	0,5735	50^o	0,7660	65^o	0,9063	80^o	0,9848
6^o	0,1045	21^o	0,3583	36^o	0,5877	51^o	0,7771	66^o	0,9135	81^o	0,9876
7^o	0,1218	22^o	0,3746	37^o	0,6018	52^o	0,7880	67^o	0,9205	82^o	0,9902
8^o	0,1391	23^o	0,3907	38^o	0,6156	53^o	0,7986	68^o	0,9271	83^o	0,9925
9^o	0,1564	24^o	0,4067	39^o	0,6293	54^o	0,8090	69^o	0,9335	84^o	0,9945
10^o	0,1736	25^o	0,4226	40^o	0,6427	55^o	0,8191	70^o	0,9396	85^o	0,9961
11^o	0,1908	26^o	0,4383	41^o	0,6560	56^o	0,8290	71^o	0,9455	86^o	0,9975
12^o	0,2079	27^o	0,4539	42^o	0,6691	57^o	0,8386	72^o	0,9510	87^o	0,9986
13^o	0,2249	28^o	0,4694	43^o	0,6820	58^o	0,8480	73^o	0,9563	88^o	0,9993
14^o	0,2419	29^o	0,4848	44^o	0,6946	59^o	0,8571	74^o	0,9612	89^o	0,9998

α	$\tan\alpha$	α	$\tan\alpha$	α	$\tan\alpha$	α	$\tan\alpha$	α	$\tan\alpha$	α	$\tan\alpha$
0^o	0,0000	15^o	0,2679	30^o	0,5773	45^o	1,0000	60^o	1,7320	75^o	3,7320
1^o	0,0174	16^o	0,2867	31^o	0,6008	46^o	1,0355	61^o	1,8040	76^o	4,0107
2^o	0,0349	17^o	0,3057	32^o	0,6248	47^o	1,0723	62^o	1,8807	77^o	4,3314
3^o	0,0524	18^o	0,3249	33^o	0,6494	48^o	1,1106	63^o	1,9626	78^o	4,7046
4^o	0,0699	19^o	0,3443	34^o	0,6745	49^o	1,1503	64^o	2,0503	79^o	5,1445
5^o	0,0874	20^o	0,3639	35^o	0,7002	50^o	1,1917	65^o	2,1445	80^o	5,6712
6^o	0,1051	21^o	0,3838	36^o	0,7265	51^o	1,2349	66^o	2,2460	81^o	6,3137
7^o	0,1227	22^o	0,4040	37^o	0,7535	52^o	1,2799	67^o	2,3558	82^o	7,1153
8^o	0,1405	23^o	0,4244	38^o	0,7812	53^o	1,3270	68^o	2,4750	83^o	8,1443
9^o	0,1583	24^o	0,4452	39^o	0,8097	54^o	1,3763	69^o	2,6050	84^o	9,5143
10^o	0,1763	25^o	0,4663	40^o	0,8391	55^o	1,4281	70^o	2,7474	85^o	11,430
11^o	0,1943	26^o	0,4877	41^o	0,8692	56^o	1,4825	71^o	2,9042	86^o	14,300
12^o	0,2125	27^o	0,5095	42^o	0,9004	57^o	1,5398	72^o	3,0776	87^o	19,081
13^o	0,2308	28^o	0,5317	43^o	0,9325	58^o	1,6003	73^o	3,2708	88^o	28,636
14^o	0,2493	29^o	0,5543	44^o	0,9656	59^o	1,6642	74^o	3,4874	89^o	57,289

B. Nombres réels:

Exercice B.1

Nombre	Nature	On écrit
1	Entier naturel	$1 \in \mathbb{N}$
-5		$-5 \in$
$-3{,}12$		$-3{,}12 \in$
$\dfrac{1}{3}$		$\dfrac{1}{3} \in$
$\dfrac{4}{5}$		$\dfrac{4}{5} \in$
$\sqrt{2}$		$\sqrt{2} \in$
$\dfrac{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}{2}$		$\dfrac{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}{2} \in$
$\dfrac{3^6\times4^4\times15^2}{3^7\times2^3}$		$\dfrac{3^6\times4^4\times15^2}{3^7\times2^3} \in$

Exercice B.2

Indiquer la nature de chacun des nombres présentés ci-dessous *(indiquer vos calculs si nécessaire)* :

a. $1+\dfrac{1}{3}$ b. $\dfrac{\frac{5}{3}}{\frac{2}{9}}$ c. $\sqrt{2}$ d. $\sqrt{7^{500}}$

e. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{12}}$ f. $1+\pi$ g. $(1+\sqrt{2})^2$ h. $\left(\cos\dfrac{\pi}{3}\right)^2$

Exercice B.3

Pour chacun des nombres ci-dessous, déterminer son ensemble d'appartenance :

a. $\dfrac{3}{4}$ b. $\dfrac{5}{3}$ c. $\dfrac{0{,}3}{24}$ d. $\dfrac{5{,}1}{1{,}7}$

e. $\sqrt{18}$ f. $\sqrt{121}$ g. $\dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}}$ h. $\sqrt{1{,}44}$

Exercice B.4

Effectuer les calculs suivants :

a. $\dfrac{5-3\times7}{5+9\times3}$ b. $\dfrac{1+\frac{3}{7}}{2-\frac{8}{3}}$ c. $\dfrac{\frac{5}{2}+\frac{7}{2}}{\frac{11}{3}-\frac{5}{2}}$ d. $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}}}$

Exercice B.5

Etablir que le résultat de chacun des calculs ci-dessous est un nombre relatif négatif :

a. $\dfrac{2}{\dfrac{2}{\frac{1}{4}+2}-1}$ b. $\dfrac{\left(1-\frac{3}{2}\right)^3}{\dfrac{3}{5^3-101}}$ c. $\dfrac{52}{\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2+\frac{5}{6}}}-3}$

Exercice B.6

Effectuer les calculs suivants et donner les différents résultats sous la forme de fraction simplifiée :

a. $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{3+\frac{2}{7}}}}$ b. $\dfrac{\left(2-\frac{1}{3}\right)^2}{\frac{7}{4}-\frac{6^2}{18}}$

Exercice B.7

Effectuer les calculs suivants et donner les résultats sous formes simplifiée :

a. $\dfrac{77\times16\times36}{18\times49\times8}$ b. $\dfrac{4+3\times5}{2-4\times5}$ c. $\dfrac{5\sqrt{3}}{\sqrt{27}+\sqrt{12}}$

d. $\dfrac{1-\frac{5}{3}\times4}{2+\frac{7}{9}}$ e. $\dfrac{2}{1+\frac{1}{3}}-1$ f. $\dfrac{2}{1+\dfrac{3}{1+\frac{3}{2}}}$

Exercice B.8

Donner la forme simplifiée des expressions ci-dessous :

a. $2^4\times2^{-5}$ b. $\left(a^5\times a^4\right)^2$ c. $\dfrac{a^4\times b^{-5}}{a^7\times b^{-3}}$

d. $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3}\times5^7\times2^9$ e. $\sqrt{7^{50}}$

Exercice B.9

Simplifier chacune des expressions ci-dessous :

a. $\left(a^2\times b\right)^{-3}\times a^5$ b. $\dfrac{a^5\times\left(a^3\times b^{-2}\right)^5}{a^{-7}\times b^5}$

c. $a^6\times a^6$ d. $\sqrt{a^{52}}$

Exercice B.10

Ecrire les nombres suivants sous la forme $2^n\times3^m\times5^k$ où les nombres n, m, k des entiers relatifs.

a. $18\times15^2\times12^4$ b. $\dfrac{6^{10}\times5^3\times10^2}{15^7\times2^3}$

c. $\dfrac{(-3)^3\times15^2\times(-4)^3}{16^2\times(-9)^2}$

Exercice B.11

Ecrire les nombres suivant sous la forme $2^m\times3^n\times5^p\times7^q$ avec m, n, p, q sont des entiers relatifs.

a. $\dfrac{2^5\times15^{-2}\times14^2}{7^{-5}\times9^4}$ b. $\left(\dfrac{10^4\times6^{-8}}{35^5}\right)^2$ c. $\dfrac{10^4+10^4}{\sqrt{\sqrt{7^4}}}$

Exercice B.12

Transformer chacun des calculs ci-dessous afin d'obtenir une écriture de la forme :

$2^m\times3^n\times5^p\times7^q$ où m, n, p, q sont des entiers relatifs :

a. $9^4\times3^8\times2^4\times6^2$ b. $\dfrac{6^{-4}\times12^2\times(5^3)^{-2}}{(30\times5^2)^2}$

c. $\dfrac{(-16)^2\times(-5^3)^2\times(-27)^5}{(-21)^4\times10}$

Exercice B.13

Les deux questions suivantes sont indépendantes :

1. On considère la somme suivante :
$S=3^0+3^1+3^2+3^3+3^4$

   a. Par laquelle des phrases ci-dessous peut-on traduire cette somme :
   La somme des puissances des cinq premiers entiers naturels à l'exposant 3.
   La somme des cinq premières puissances de 3 dont l'exposant est un entier naturel.

   b. Montrer que S est le carré d'un entier dont on précisera la valeur.

2. Trouver l'entier $n\in\mathbb{N}$ vérifiant l'égalité :
$10^n=100^{100}$

Exercice B.14

1. En physique, on utilise de nombreuses constantes au cours de calcul. En voici quelques-unes :

   a. La gravité : $g=980{,}665\times10^{-2}\ m{\cdot}s^{-2}$

b. Le nombre d'Avogadro : $\mathcal{N}_a = 6022{,}045\times10^{20}\ mol^{-1}$

c. La vitesse de la lumière : $c = 299792458\ m{\cdot}s^{-1}$

Exprimer chacune de ces constantes à l'aide de la notation scientifique.

2. Les astronomes utilisent, comme unité, l'année-lumière. Une année-lumière équivaut au nombre de kilomètres que parcourt la lumière en 365,25 jours. Exprimer cette distance en kilomètre grâce à la notaion scientifique *(Utiliser la constante c)*.

Exercice B.15

1. Donner l'écriture scientifique des expressions suivantes :

a. $354{,}78\times10^{-19}$ b. $(3\times10^2)\times\left(\dfrac{2}{5}\times10^{-4}\right)^{-3}$

2. Simplifier l'écriture de chacune des expressions ci-dessous afin d'obtenir une écriture de la forme $2^m\times3^n\times5^p\times7^q$ où m, n, p, q sont des entiers relatifs :

a. $(75\times4)^6\times14^{-5}$ b. $\dfrac{45\times8^{-3}}{14^2\times20^2}$

3. Effectuer les opérations suivantes et donner leurs formes simplifiées :

a. $13\times10^{-5}+0{,}024\times10^{-2}$ b. $4^4\times4^4$

Exercice B.16

Développer puis simplifier chacune des expressions ci-dessous :

a. $(1+\sqrt{3})^2$ b. $(5-\sqrt{2})^2$

c. $(3+\sqrt{7})(3-\sqrt{7})$ d. $(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2$

e. $(2\sqrt{2}+3\sqrt{3})^2$ f. $(2+\sqrt{5}+\sqrt{6})(2\sqrt{5}-\sqrt{6})$

g. $(5-2\sqrt{7})(1-\sqrt{7})$ h. $(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2-(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2$

Exercice B.17

1. Justifier chacune des égalités suivantes :

a. $\dfrac{3}{\sqrt{7}}\times\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}=\dfrac{3\sqrt{7}}{7}$ b. $\dfrac{4}{\sqrt{2}}\times\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

c. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

2. En vous servant de la question précédente, établissez les égalités suivantes :

a. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ b. $\dfrac{\sqrt{7}+3}{\sqrt{7}}=1+\dfrac{3\sqrt{7}}{7}$

c. $\dfrac{4}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

Exercice B.18

1. a. Montrer que $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})$ est un nombre entier.

b. Pour simplifier l'écriture du quotient $\dfrac{2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$, nous allons multiplié son numérateur et son dénominateur par $(2-\sqrt{3})$.

Remarquez que le dénominateur a, alors, une valeur entière.

2. a. Montrer que $(2+3\sqrt{5})(2-3\sqrt{5})$ est un nombre entier relatif.

b. Utiliser ce résultat pour écrire $\dfrac{\sqrt{5}-2}{2-3\sqrt{5}}$ avec un dénominateur entier.

3. Ecrire $\dfrac{4}{\sqrt{5}-1}$ avec un dénominateur entier.

4. Ecrire $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ avec un dénominateur entier.

Exercice B.19

Simplifier les écritures suivantes :

a. $\sqrt{175}-10\sqrt{112}+\sqrt{7}$

b. $\left(2\sqrt{2}-2\right)\left(\sqrt{200}+\sqrt{98}+\sqrt{18}\right)$ c. $\dfrac{3\sqrt{3}-6}{\sqrt{3}}$

d. $\dfrac{\sqrt{27}-5}{\sqrt{3}-2}$ e. $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

Exercice B.20

1. Montrer que : $(3+\sqrt{6})(3-\sqrt{6})-\dfrac{6\sqrt{3}}{\sqrt{12}}=0$

2. Ecrire $\dfrac{7}{4-\sqrt{3}}$ sans racine au dénominateur

3. Effectuer le calcul suivant : $(\sqrt{6}+2)(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

4. Etablir l'égalité suivante : $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}-2}-\sqrt{3}=\sqrt{2}$

Exercice B.21

Démontrer les égalités suivantes :

1. $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=10$

2. $\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1$

Rechercher l'expression simplifié de $\left(\sqrt{3}-1\right)^2$

3. $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x-y}}=\dfrac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

avec $x\in\mathbb{R}_*^+$ *et* $y\in\mathbb{R}_*^+$ *tels que :* $x\neq y$.

Exercice B.22

Effectuer les opérations suivantes en mettant le résultat sous la forme suivante $p\sqrt{q}$ où p est un entier relatif et q est un entier naturel le plus petit possible :

a. $\sqrt{500}$ b. $\sqrt{252}$ c. $\sqrt{6}\times\sqrt{48}$

d. $\sqrt{3^2+4^2}$ e. $5\sqrt{3}+2\sqrt{75}-3\sqrt{12}$ f. $\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

Exercice B.23

Simplifier les calculs suivants :

a. $4\sqrt{2}+\sqrt{6}\times\sqrt{48}$ b. $\sqrt{27}+2\sqrt{12}-5\sqrt{75}$

c. $\dfrac{\sqrt{75}+\sqrt{12}}{2\sqrt{3}}$ d. $\dfrac{\sqrt{8}\times\sqrt{75}}{\sqrt{5}\times\sqrt{90}+\sqrt{24}\times\sqrt{12}}$

Exercice B.24

Comparer sans l'aide de la calculatrice :

a. 6 et $\sqrt{33}$ b. $\sqrt{6}\times\sqrt{5}$ et 6

c. $10\sqrt{10}$ et 30 d. $\dfrac{1}{4}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{15}}$

e. $\sqrt{5+3}$ et $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ f. $2\sqrt{2}-3$ et $\sqrt{17-12\sqrt{2}}$

Exercice B.25

Comparer les nombres suivants en justifiant votre méthode :

a. $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ et $\dfrac{7\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ b. $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ et $\sqrt{8+2\sqrt{15}}$

c. $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$ et $\sqrt{2}-1$ d. $\dfrac{15-\sqrt{2}}{14}$ et $\dfrac{14-\sqrt{2}}{15}$

Exercice B.26

Cet exercice doit être traité sans l'aide de la calculatrice :

1. On considère les deux nombres suivants :
   $A=2\sqrt{3}$; $B=3\sqrt{2}$
   a. Déterminer les valeurs exactes de A^2 et B^2.
   b. Comparer les deux nombres A et B.
2. Comparer chaque couple de nombres ci-dessous :
   a. 6 et $3\sqrt{6}$ b. $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$ et $\dfrac{1}{3\sqrt{2}}$
   c. $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ et $\sqrt{3}$ d. $2\sqrt{3}$ et $2-\sqrt{8}$

Exercice B.27

Sans l'usage de la calculatrice, comparer les couples de nombres ci-dessous :

a. $\sqrt{45}$ et 7 b. -3 et $-\sqrt{57}$ c. $2\sqrt{3}$ et $3\sqrt{2}$

d. $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$ et $\dfrac{\sqrt{5}}{10}$ e. $\dfrac{1}{4}$ et $\dfrac{1}{\pi}$ f. $-\dfrac{1}{3}$ et $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Exercice B.28

Sans l'aide de la calculatrice, comparer les couples de nombres suivants en justifiant votre démarche :

a. $7\sqrt{2}$; 9 b. $-\dfrac{1}{\pi}$; $-\dfrac{1}{4}$

c. $\dfrac{1}{\sqrt{8}}$; $\dfrac{1}{3}$ d. $2\sqrt{7}$; $5+\sqrt{3}$

Exercice B.29

Au cours de cet exercice, l'usage de la calculatrice est interdit :

1. a. Comparer les deux nombres 9 et $5\sqrt{3}$.
   b. Laquel de ces deux écritures définit un nombre :
   $\sqrt{5\sqrt{3}-9}$; $\sqrt{9-5\sqrt{3}}$
2. Parmi les écritures ci-dessous, lesquelles définissent un nombre ?
   a. $\sqrt{\sqrt{80}-9}$ b. $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$ c. $\sqrt{5-3\sqrt{3}}$

Exercice B.30

Compléter à l'aide des symboles $\in$ et $\notin$:

a. $\pi\ldots]3{,}14\,;\,5]$ b. $3\ldots\left[0\,;\,\dfrac{5}{2}\right[$ c. $\sqrt{2}\ldots[2\,;\,3]$

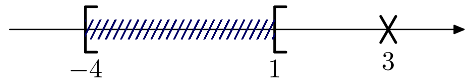
d. $0{,}33\ldots\left[\dfrac{1}{3}\,;\,1\right]$ e. $-3\ldots[2\,;\,4]$

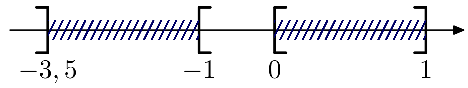
Exercice B.31

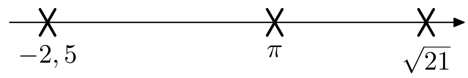
Pour chaque question, on a représenté un sous-ensemble de $\mathbb{R}$:

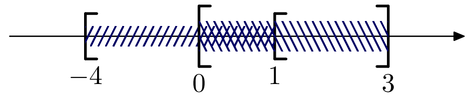
- en hachurant les intervalles constituants ce sous-ensemble ;
- en marquant les points isolés lui-appartenant.

A l'aide des notations ensemblistes, décrire chacun de ces sous-ensembles :

a. 

b. 

c. 

d. 

Exercice B.32

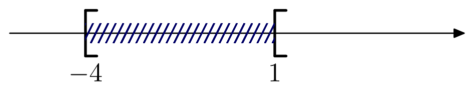
Avant d'effectuer l'opération sur les intervalles demandées, représenter chacun des deux intervalles sur une droite graduée, puis donner l'ensemble résultant.

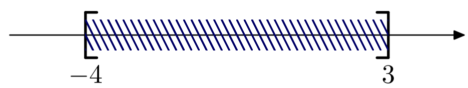
a. $[2\,;\,5]\cup\,]-1\,;\,7]$ b. $]3\,;\,+\infty[\,\cup\,[0\,;\,3[\,\cup\,\{3\}$

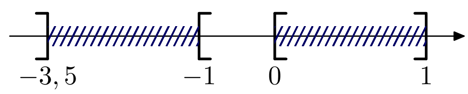
c. $[2\,;\,5]\cap\,]-1\,;\,7]$ d. $]-\infty\,;\,3]\cap\,]3\,;\,+\infty[$

Exercice B.33

1. A l'aide des notations ensemblistes, décrire chacun de ces sous-ensembles :

a. 

b. 

c. 

2. Compléter les pointillés avec les symboles $\in$ ou $\notin$:

a. 1 ... $]-0{,}2\,;3]$ a. π ... $]0{,}5\,;3{,}1]$

b. $\sqrt{2}$ ... $]1\,;2[$ c. $\dfrac{\sqrt{16}}{4}$ ... $]-4\,;4[$

d. π ... $]3{,}1\,;4]$ e. $\dfrac{1}{3}$ ... $]0\,;0{,}33[$

Exercice B.34

Compléter les pointillés :

1. $|2-x|\leqslant 1$ équivaut à $x\in$.........
2. $|x+\ldots|\ldots 1$ équivaut à $x\in[2\,;4]$

3. $3\times|x+2| \leqslant 1$ équivaut à $x\in$.........

4. $|x+5| \geqslant 2$ équivaut à $x\in$.........$\cup$.........

Exercice B.35

On notera $d\,(x\,;y)$ la distance, sur une droite graduée, entre les points d'abscisse respectives x et y.

On remarque qu'on a immédiatement la formule , pour tout nombre x et y :
$d\,(x\,;y) = d\,(y\,;x)$

1. Calculer les distances indiquées ci-dessous :

a. $d\,(5\,;2) = \ldots\ldots$ b. $d\,(1\,;7) = \ldots\ldots$

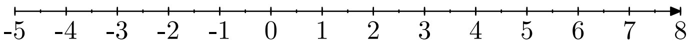
c. $d\,(0\,;5) = \ldots\ldots$ e. $d\,(-2{,}5\,;0) = \ldots\ldots$

f. $d\,(-1\,;5) = \ldots\ldots$ g. $d\,(-3\,;-4) = \ldots\ldots$

h. $d\,(-1\,;-5) = \ldots\ldots$ i. $d\,(4\,;-2) = \ldots\ldots$

j. $d\,(-2{,}5\,;-1{,}5) = \ldots\ldots$

Vous pouvez vous servir de la droite graduée ci-dessous :



2. a. Compléter le tableau suivant :

x	y	$x-y$	$d\,(x\,;y)$
5	2		
3	7		
-2	5		
1	-3		
-1	-6		

b. Comparez $x-y$ et $d\,(x\,;y)$?

Exercice B.36

1. Traduire les équations suivantes en terme de distance et donner leurs solutions :

a. $|x+2|=5$ b. $|x-\pi|=\sqrt{2}$ c. $|x-\sqrt{2}|=|x+2\sqrt{2}|$

2. Résoudre les équations suivantes de manière algébrique :

a. $|x-3| = 1$ b. $|x-3| = \sqrt{3}$ c. $|2x+1| = |3x-4|$

3. Dans chaque cas, représenter sur une droite graduée les solutions des inéquations suivantes :

a. $|x+2| > 2$ b. $|x-3| \leqslant 5$ c. $|2x+1| > -1$

Exercice B.37

En traduisant les équations suivantes en un problème sur les distances, donner l'ensemble des solutions des équations.

`Exemple :`
$|x+2| = 3$ `se traduit en` $d\,(x\,;-2) = 3$

a. $|x-4| = 3$ b. $|x+2| = 1{,}5$

c. $|x-5| = \pi$ d. $|x+\sqrt{5}| = \sqrt{2}$

e. $|x-5| = |x-1|$ f. $|x+2| = |x-2|$

Exercice B.38

1. Quels sont les points qui sont à une distance de 5 du nombre 3.

2. Résoudre les équations suivantes :

a. $|x| = 3$ b. $|x-2| = 1$

c. $|x-4| = 7$ d. $|x+2| = 3$

e. $|x-4| = 0$ f. $|x-2| = -1$

Exercice B.39

1. Résoudre les équations suivantes en les traduisant en terme de distance et en vous aidant d'une droite graduée :

a. $|x-4| = 3$ b. $|x+1{,}5| = 1$

c. $|2x+1| = \sqrt{2}$ d. $|x-2| = |x+3|$

2. Résoudre les équations suivantes de manières algébriques :

a. $|x+\sqrt{2}| = 2\sqrt{2}$ b. $|3\times(x+1)-2| = 5$

c. $|3x-2| = |3-2x|$

Exercice B.40

Résoudre en terme de distance les inéquations suivantes et donner une représentation de l'ensemble des solutions sur une droite graduée :

a. $|x+2| \leqslant 5$ b. $|x-1| > 2$

Exercice B.41

Traduire les équations ou inéquations suivantes en termes de distance, puis les résoudre :

a. $|x-2| = 1{,}5$ b. $|x+1| = 1$ c. $|2x-1| = 3$

d. $|x-3| \leqslant 2$ e. $|x+4| \leqslant 1$ f. $|x-3| \geqslant 1$

Exercice B.42

1. Etablir pour tout entier naturel non nul p l'égalité suivante :

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} = \frac{1}{p(p+1)}$$

2. En déduire la valeur de la somme suivante :

$$S = \frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{2003\times2004}+\frac{1}{2004\times2005}$$

Exercice B.43

La partie entière de 5,5 est 5 ; pour étendre, cette notion à l'ensemble des nombres réels *(et particulièrement aux nombres négatifs)*, on définit la partie entière d'un nombre x, qu'on note $E(x)$, de la manière suivante :

"$E(x)$ est le plus grand entier de l'ensemble des entiers inférieurs ou égaux à x"

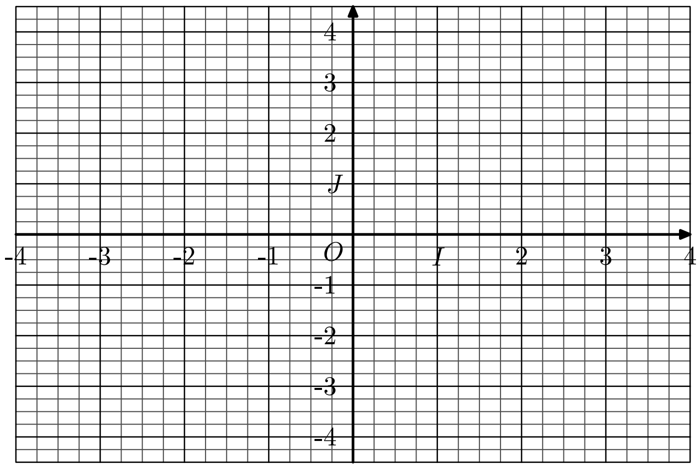
1. a. Supposons que $x=-2{,}5$, justifier que $E(x)=-3$.

b. Compléter le tableau suivant :

x	$-4{,}5$	-4	$-3{,}9$	$-3{,}2$	-3
$E(x)$					

c. Justifier l'encadrement suivant pour tout nombre réel x :
$E(x) \leqslant x < E(x)+1$

2. a. On considère le repère orthogonal $(O\,;I\,;J)$ ci-dessous ; effectuer la représentation graphique de la fonction E sur $[-4\,;4]$



b. Quelles particularités possèdent cette courbe ?

C. Généralité sur les fonctions:

Exercice C.1

1. Onagre est un opérateur de téléphonie mobile proposant les abonnements suivants :

Abonnement A : abonnement 19 euros, puis 0,30 euro la minute de communication ;

Abonnement B : abonnement 29 euros, puis 0,20 euro la minute de communication.

Compléter le tableau suivant :

Durée *(en minutes)*	30	45	60	90
Abonnement A *(en euros)*				
Abonnement B *(en euros)*				

(extrait du brevet de Guadeloupe, Juin 2006.)

2. Voici deux programmes de calcul :

Programme A
Choisir un nombre de départ
Soustraire 1 au nombre choisi
Calculer la carré de la différence obtenue
Ajouter le double du nombre de départ au résultat
Ecrire le résultat obtenu

Programme B
Choisir un nombre de départ
Calculer le carré du nombre choisi
Ajouter 1 au résultat
Ecrire le résultat obtenu

a. Montrer que, lorsque le nombre de départ est 3, le résultat obtenu avec le programme A.

b. Lorsque le nombre de départ est 3, quel résultat obtient-on avec le programme B

3. On considère les deux nombres réels x et y reliés par la relation : $y=2\times x-5$
On dit alors que "*y est donné en fonction de x*".

x	-2	0	1	3	10
y					

x
↓
$2\times x-5$

4. La relation ci-dessous donne la valeur de y en fonction de celle de x :Les deux nombres x et y sont liés par la relation : $y=x^2-2x$

Remplissez le tableau ci-dessous :

x	-2	0	2	$\sqrt{2}$	5,4
y					

Exercice C.2

1. Chacune des phrases ci-dessous définissent une fonction ; déterminer la forme algébrique de chacune de ces fonctions :

a. La fonction f renvoie à x le double de x.

b. La fonction g renvoie la somme de x et de l'inverse de x.

c. La fonction h prend la racine carrée du produit de 4 par la différence de x par 5.

Dans les questions suivantes, on se sert des fonctions définies à la question 1. :

2. a. Quelle est l'image du nombre 5 par la fonction f ?

b. Quel est l'image du nombre 7 par la fonction g ?

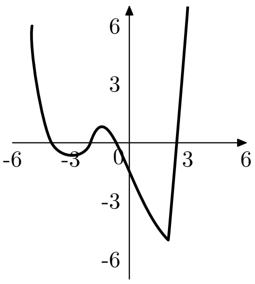
3. a. Le nombre 0 admet-il une image par la fonction g ?

b. Le nombre 3 admet-il une image par la fonction h ?

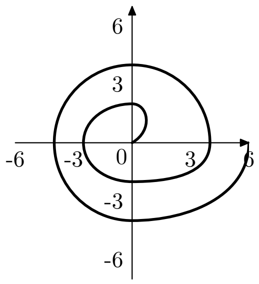
Exercice C.3

Parmi les courbes représentées ci-dessous, deux courbes ne peuvent être la représentation d'une fonction. Lesquelles ?

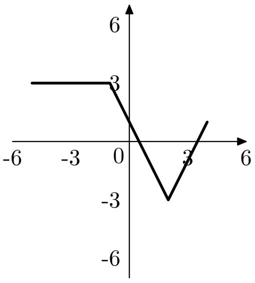
a.



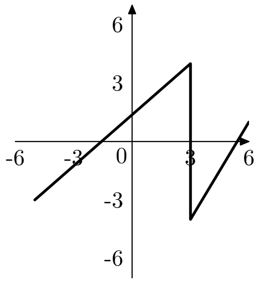
b.



c.

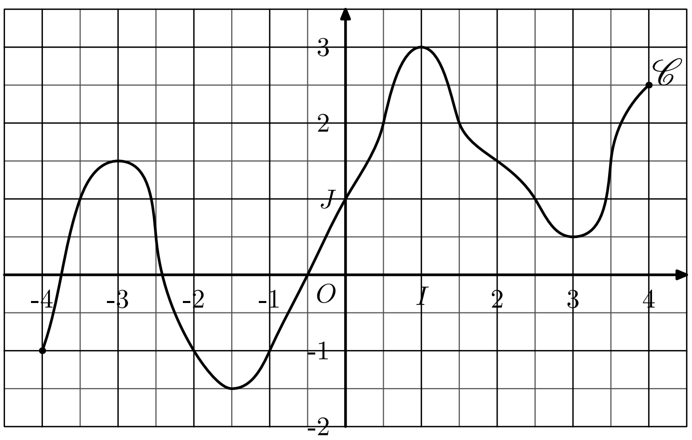


d.



Exercice C.4

Dans le repère orthonormé $(O\,;\,I\,;\,J)$ ci-contre, on représente la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[-3\,;3]$.



1. Donner, en justifiant votre démarche, les images par la fonction f des nombres suivant :

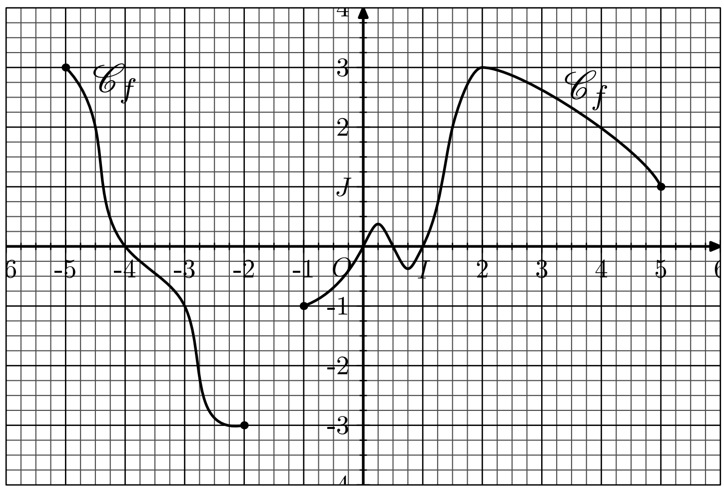
   a. -3 b. $-\frac{1}{2}$ c. $\frac{1}{2}$ d. 2

2. Donner,en justifiant votre démarche, l'ensemble des antécédents des nombres suivant par la fonction f :

   a. 3 b. -1 c. -2

Exercice C.5

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$. La courbe $\mathscr{C}_f$ est la représentation graphique de la fonction f :



1. a. Déterminer graphiquement les images par la fonction f des nombres ci-dessous :

   -2 ; 2 ; -4

   b. Justifier qu'il n'est pas possible de déterminer les images des nombres suivants par la fonction f :

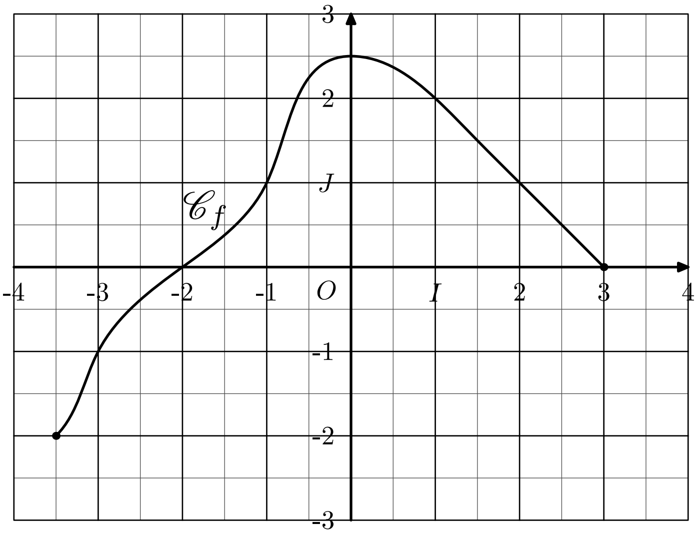
   $-1{,}5$; $5{,}5$

2. Déterminer l'ensemble des antécédents par la fonction f associés à chacun des nombres suivants :

   a. 2 b. 3 c. $-3{,}5$

Exercice C.6

Dans le repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$ ci-dessous, est représenté la courbe représentative de la fonction f :



1. Par lecture grahique, déterminer les images, par la fonction f, des nombres suivant :

   a. -3 b. 0 c. 2 d. 3

2. Par lecture graphique, déterminer les antécédents des nombres ci-dessous par la fonction f :

   a. -1 b. 1

3. Chacune des propositions ci-dessous est fausse. Justifier chacune de vos affirmations :

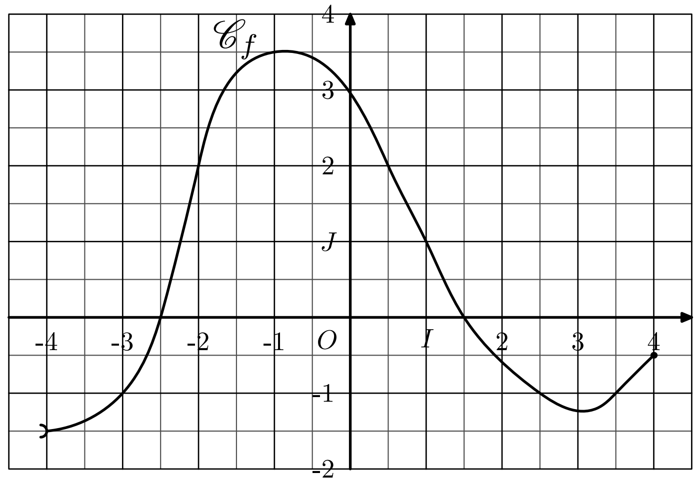
   a. L'image de $1{,}5$ par la fonction f est $2{,}5$.

   b. $0{,}5$ admet un seul antécédent par la fonction f.

   c. Par la fonction f, $-2{,}5$ n'admet aucun antécédent.

Exercice C.7

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-4;4]$ dont la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative est donnée ci-dessous dans le repère $(O;I;J)$ orthonormé :



1. a. Déterminer, en justifiant votre démarche, l'image de 0,5 par la fonction f.

   b. Déterminer, en justifiant votre démarche l'ensemble des antécédents de -1 par la fonction f.

2. a. Donner l'image du nombre -1 par la fonction f.

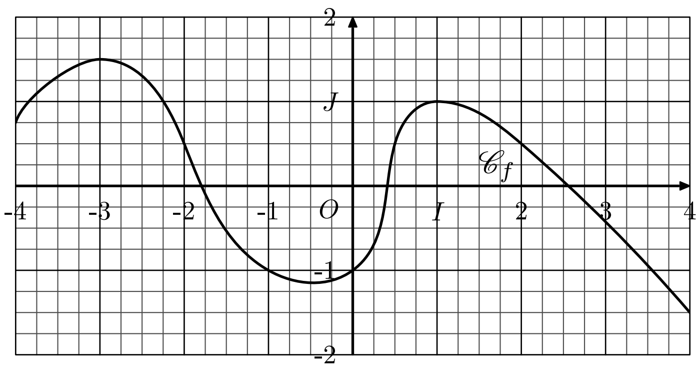
   b. Donner l'ensemble des antécédents de 2 par la fonction f.

3. a. Donner un nombre n'admettant pas d'image par la fonction f.

   b. Donner un nombre dont l'ensemble des antécédents par la fonction f est vide.

Exercice C.8

Soit f une fonction définie sur $[-4;4]$ dont la représentation graphique est donnée, ci-dessou, dans un repère $(O;I;J)$ orthonormal.



1. On souhaite déterminer graphiquement l'image du nombre -3 par la fonction f. Pour cela, compléter convenablement la phrase suivante :

   La droite d'équation ...... intercepte la courbe $\mathscr{C}_f$ au point de coordonnées $(\dots;\dots)$. On en déduit que l'image du nombre -3 par la fonction f a pour valeur ...

2. On souhaite déterminer graphiquement les antécédents du nombre 0,5 par la fonction f. Pour cela, compléter convenablement la phrase suivante :

   La droite d'équation ...... intercepte la courbe $\mathscr{C}_f$ aux points de coordonnées $(\dots;\dots)$, $(\dots;\dots)$ et $(\dots;\dots)$. On en déduit que l'ensemble des antécédents du nombre 0,5 est :

   $\mathcal{S} = \{\dots;\dots;\dots\}$

Exercice C.9

On considère les trois fonctions f, g et h définissant l'image du nombre x de la manière suivante :

$$f(x) = 3x-2 \quad ; \quad g(x) = x^2 \quad ; \quad h(x) = \frac{2}{3x-1}$$

1. Remplissez le tableau de valeurs suivant :

x	1,5	1	$-\frac{1}{3}$	$-\sqrt{2}$
$f(x)$				
$g(x)$				
$h(x)$				

2. a. Résoudre les trois équations suivantes :

   $$(E):\ 3x-2 = \frac{1}{2} \quad ; \quad (F):\ x^2 = 2 \quad ; \quad (G):\ \frac{2}{3x-1} = -1$$

   b. En vous servant de la question précédente, déterminer les ensembles ci-dessous :

   L'ensemble des antécédents de $\frac{1}{2}$ par f ;

   L'ensemble des antécédents de 2 par g ;

   L'ensemble des antécédents de -1 par h.

Exercice C.10

On considère les deux fonctions suivantes :

$$f : x \longmapsto \frac{1}{1+x} \quad ; \quad g : x \longmapsto \sqrt{3-2x}$$

1. Déterminer l'image du nombre 1 pour chacune de ces fonctions.

2. Déterminer l'ensemble des antécédents du nombre 4 pour chacune de ces deux fonctions.

Exercice C.11

On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est définie par la relation :

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x+1}}{x-4}$$

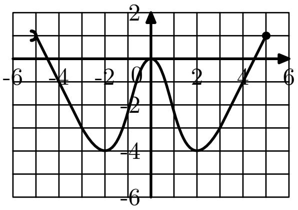
1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

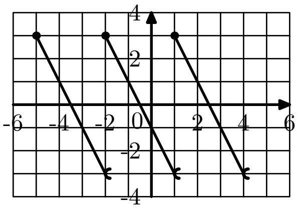
2. Déterminer l'image du nombre 3 par la fonction f.

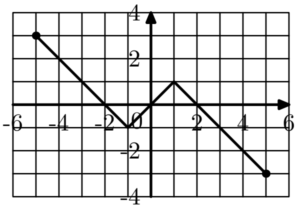
3. Déterminer l'ensemble des antécédents de 0 par la fonction f.

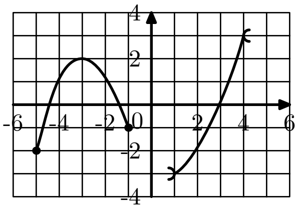
Exercice C.12

Ci-dessous, sont représentées trois courbes représentatives de fonctions. Déterminer graphiquement pour chacune d'elles son ensemble de définition :

a. 

b. 

c. 

d. 

Exercice C.13

On considère les cinq fonctions suivantes :

$f\colon x \longmapsto \dfrac{1}{2-x}$; $g\colon x \longmapsto \dfrac{2x+1}{3x+3}$; $h\colon x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+1}$

$j : x \longmapsto \sqrt{1-2x}$; $k\colon x \longmapsto \sqrt{x+4}$

1. Un quotient n'est pas défini lorsque son dénominateur est nul.
   a. Peut-on calculer l'image de 2 par la fonction f ?
   b. Pour quelle valeur, la fonction g n'admet pas d'image ?
   c. Existe-t-il une valeur n'admettant pas d'image par la fonction h.
2. Une racine carré n'est pas défini pour des valeurs strictement négatives.
   a. Peut-on calculer l'image de 5 par la fonction j ?
   b. Pour quelles valeurs de x, la fonction k n'associe pas d'images ?

Exercice C.14

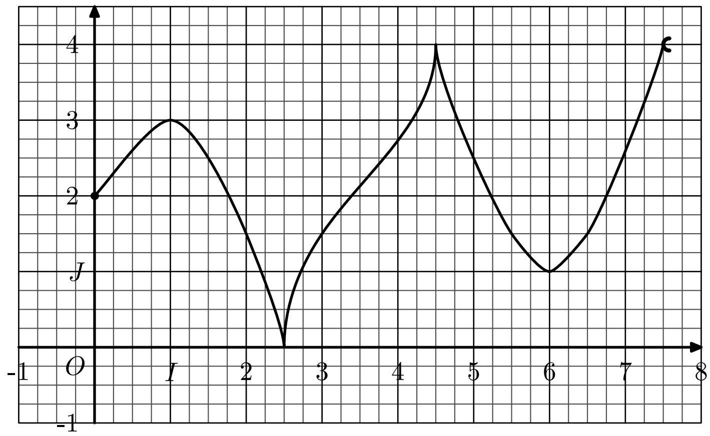
On considère les trois fonction f, g, h définies par :

$$f(x) = 2x - 1 \quad ; \quad g(x) = \sqrt{x-1} \quad ; \quad h(x) = \frac{1}{x+1}$$

1. Est-il possible de déterminer l'image de 2 pour chacune de ces fonctions ? Justifier.
2. Est-il possible de déterminer l'image de -1 pour chacune de ces fonctions ? Justifier.
3. Donner le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}$ pour lequel chacun de ses nombres admette une image par g.

Exercice C.15

Ci-dessous est donnée la courbe représentative de la fonction f dans le repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé :



1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Déterminer l'image du nombre 5 par la fonction f.
3. Déterminer l'ensemble des antécédents :
   a. du nombre 1,5 par la fonction f ;
   b. du nombre 4 par la fonction f.

Exercice C.16

On considère les trois fonctions ci-dessous

$f : x \longmapsto 3x+2$; $g : x \longmapsto \dfrac{3x-1}{x+3}$; $h : x \longmapsto \sqrt{x-5}$

1. Déterminer l'image de 5 pour chacune de ces fonctions.
2. Déterminer les antécédents du nombre 4 pour chacune de ces trois fonctions.
3. Pour chaque fonction, préciser si elle est définie pour tout nombre réel. Si ce n'est pas le cas, citer au moins un nombre n'admettant d'image par cette fonction.

Exercice C.17

1. Soit f la fonction dont l'image du nombre x est définie par la relation :
   $$f(x) = \sqrt{\frac{3}{2-5x}}$$
   a. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
   b. Déterminer, sous forme simplifiée, les images des nombres :
   $$-\frac{7}{5} \quad ; \quad -2$$
2. Soit g la fonction définie par la relation suivante :
   $$g : x \longmapsto \frac{1}{3-x^2}$$
   a. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g.
   b. Déterminer l'ensemble des antécédents du nombre $\dfrac{1}{4}$ par la fonction g.

Exercice C.18

1. On considère la fonction f dont l'image du nombre x est définie par :
   $$f(x) = \sqrt{1-x} \times \sqrt{2x+3}$$
   a. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
   b. Déterminer, sous forme simplifiée, les images de -1 et de $\dfrac{1}{2}$ par la fonction f.

2. On considère la fonction g définie par :

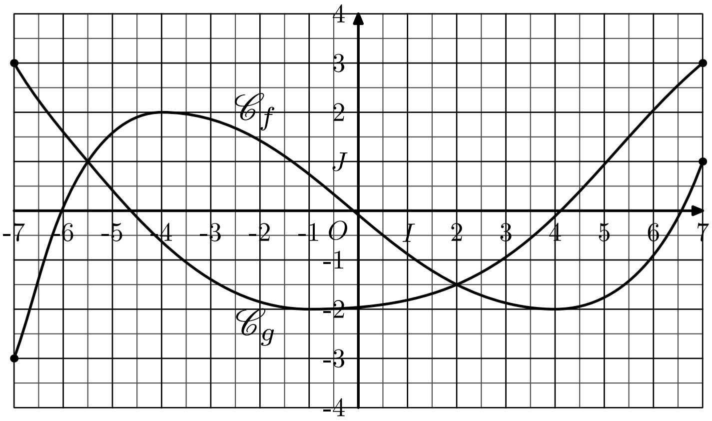
$$g(x) = \frac{\sqrt{2}\,x+1}{3x-1}$$

a. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g.

b. Déterminer l'image du nombre 3 par la fonction g.

Exercice C.19

Dans le plan muni d'un repère $\left(O\,;I\,;J\right)$, on considère les deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives respectivement des fonctions f et g définies sur $\left[-6\,6\right]$:



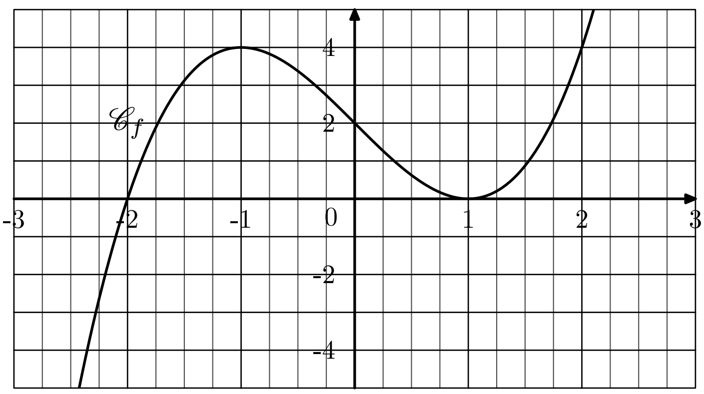
1. Déterminer,graphiquement, les coordonnées des points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

2. Graphiquement, résoudre l'inéquation $g(x) \geqslant f(x)$

Exercice C.20

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$f(x) = x^3 - 3x + 2$



1. Graphiquement, déterminer l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) > 0$.

2. **a.** Etablir l'égalité suivante : $f(x) = (x+2)(x-1)^2$

b. Dresser le tableau de signes de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

c. En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant 0$

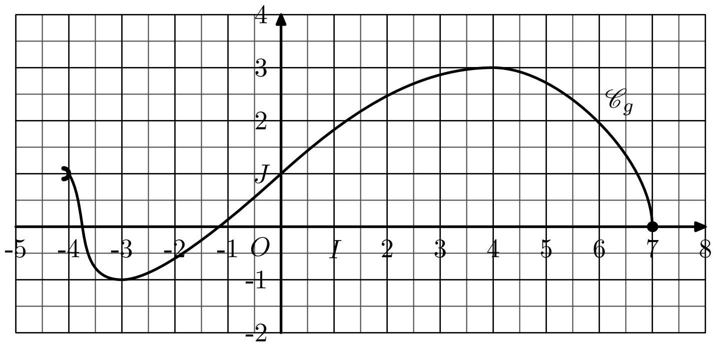
Exercice C.21

On considère les deux fonctions f et g :

la fonction f définie par :

$f : x \longmapsto x^2 - 6x + 2$.

La fonction g est définie par la représentation graphique ci-dessous :



Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatres réponses proposées sont exactes ; citer la réponse exacte.

1. L'image de 1 par la fonction f est :
a. 1 **b.** 0 **c.** -1 **d.** -3

2. L'ensemble des antécédents de -7 par f est :
a. $\{3\}$ **b.** $\{2\}$ **c.** $\{-2\,;3\}$ **d.** $\{1\,;2\}$

3. L'ensemble de définition de la fonction g est :
a. $[-1;-3[$ **b.** $[-1;3]$ **c.** $[-4;7]$ **d.** $]-4;7]$

4. L'image de 0 par la fonction g vaut :
a. 1 **b.** -1 **c.** 7 **d.** 0

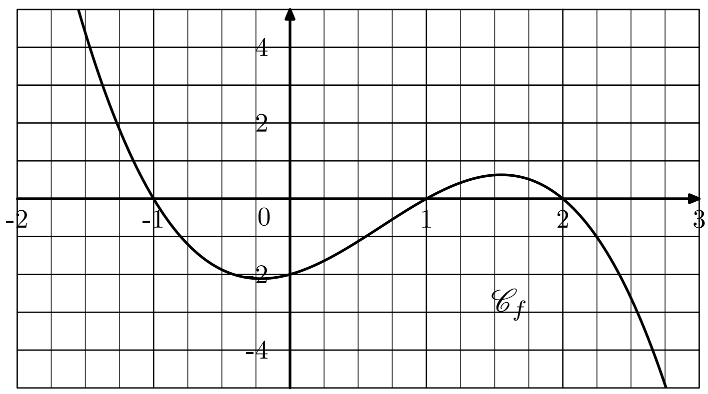
5. Un de ces points n'appartient pas à $\mathscr{C}_g$. Lequel ?
a. $(-3;-1)$ **b.** $(-4;1)$ **c.** $(6;2)$ **d.** $(-2;-0{,}5)$

Exercice C.22

On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est définie par l'expression :

$f(x) = -x^3 + 2x^2 + x - 2$

Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on a tracé la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f :



1. Par lecture graphique, donner les intervalles sur lesquels la fonction f est strictement positive.

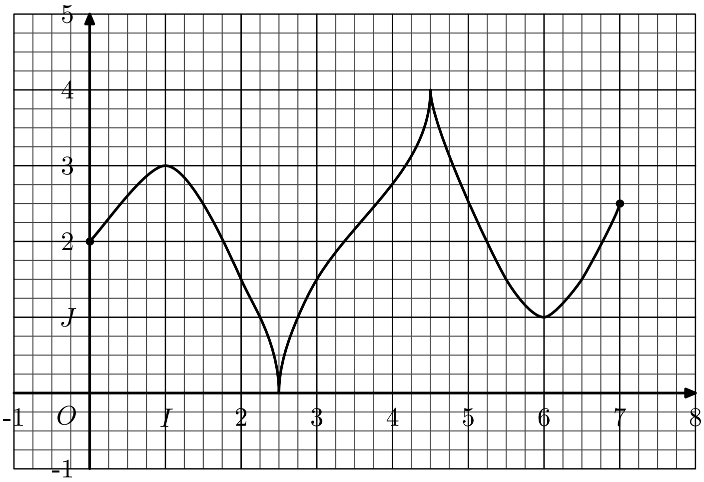
2. Montrer l'égalité : $-x^3 + 2x^2 + x - 2 = -(x-2)(x^2-1)$

3. **a.** Dresser le tableau de signe de f.

b. En déduire les solutions de l'inéquation $f(x) > 0$.

Exercice C.23

Dans un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$, on considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left[0\,;7\right]$ dont la représentation graphique est donnée ci-dessous :



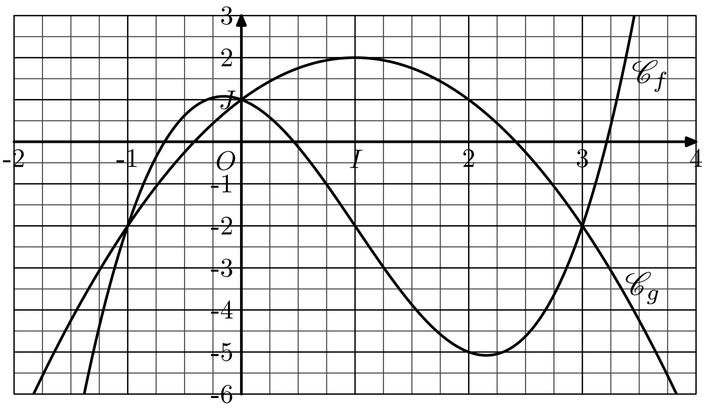
Résoudre graphiquement les inéquations suivantes :

a. $f(x) \geqslant 1{,}5$ b. $f(x) \leqslant 1$

On laissera quelques traits de constructions.

Exercice C.24

1. Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthogonal, on considère les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives des fonctions f et g.

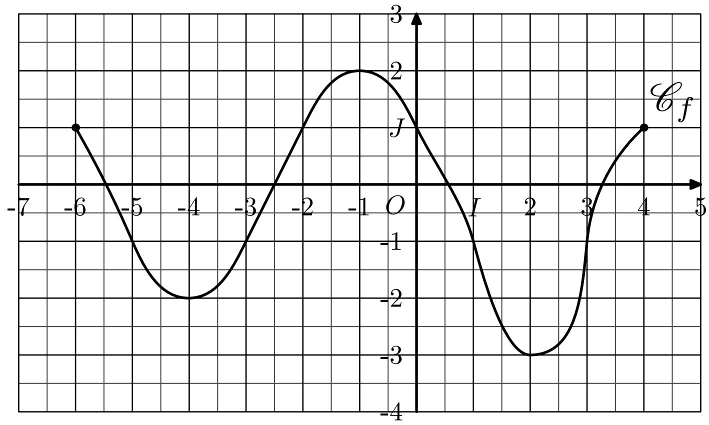


Résoudre grahpiquement sur l'intervalle $[-2\,;4]$ l'inéquation suivante : $f(x)<g(x)$

2. Les fonctions f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ par les expressions :
$$f(x)=x^3-3x^2-x+1 \quad ; \quad g(x)=-x^2+2x+1$$
   a. Déterminer l'expression du polynôme P de degré 1 vérifiant l'égalité : $x^3-2x^2-3x=(x^2-3x)\times P$
   b. En déduire sur quels intervalles la courbe $\mathscr{C}_g$ est strictement au dessus de $\mathscr{C}_f$.

Exercice C.25

Dans un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f :



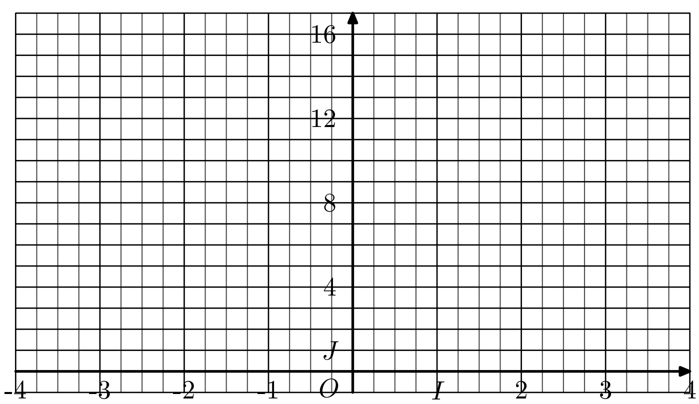
On répondra graphiquement aux questions suivantes :

1. Donner l'ensemble de définition de cette fonction.
2. On laissera les traits de construction nécessaire pour répondre aux questions ci-dessous :
   a. Déterminer l'image du nombre 1 par la fonction f
   b. Déterminer l'ensemble des antécédents par la fonction f du nombre 1.
3. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x)\leqslant -1$. On surlignera la partie consid̀erée de la courbe $\mathscr{C}_f$.

D. Variations des fonctions:

Exercice D.1

On munit le plan d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthogonal représenté ci-dessous :

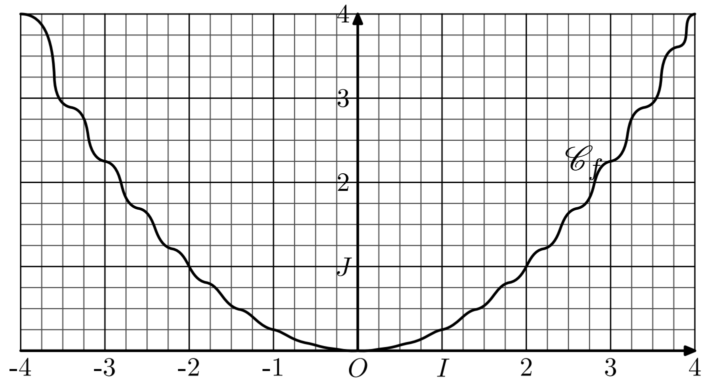


Dans le repère $(O\,;I\,;J)$, tracer les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ de deux fonctions f et g distinctes mais admettant le tableau de variations suivant :

x	-4		0		4
Variation de f et de g	16	$\searrow$	0	$\nearrow$	16

Exercice D.2

Dans le repère $(O\,;I\,;J)$ ci-dessous, on considère la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f :



Dresser le tableau de variation de la fonction f.

Exercice D.3

On considère la fonction f dont seul le tableau de variation ci-dessous est donnée :

x	-2		0		3		4		7		$+\infty$
Variation de f	3	↗	8	↘	0	↘	-2	↗	0	↗	1

1. Décrire, en français, les variation de la fonction f sur l'intervalle $\left[-2\,;+\infty\right[$.

2. a. Encadrer l'image du nombre 1 par la fonction f.

   b. Encadrer l'image du nombre 6 par la fonction f.

3. a. Donner l'intervalle sur lequel la fonction f est strictement négative.

   b. Donner la réunion d'intervalles sur lequel la fonction f est strictement positive.

Exercice D.4

On considère la fonction f dont le tracé de la courbe représentative est effectuée d'un seul trait. Voici un tableau de valeurs de la fonction f :

x	-2	-1	0	$0{,}5$	1	$\sqrt{2}$	$\frac{7}{3}$	4
$f(x)$	$\sqrt{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	-2	-3

1. Dire si les assertions suivantes sont vraies, fausses ou indécidables ; justifier vos réponses :

   a. La fonction f est décroissante sur $[0\,;\,1]$.

   b. La fonction f est décroissante sur $[-2\,;0]$.

   c. La fonction f s'annule une seule fois.

   d. La valeur maximale de f est 2.

2. Supposons que la fonction f admette le tableau de variation suivante :

x	-2		0		$\sqrt{2}$		4
Variation de f	$\sqrt{3}$	↘	$-\frac{1}{3}$	↗	2	↘	-3

Avec ces nouvelles indications, reprendre l'ensemble des questions de 1. .

Exercice D.5

On considère la fonction f dont le tableau de variation est donné ci-dessous :

x	-∞		-5		$-\frac{9}{2}$		-1		0		3		6		$\sqrt{50}$
Variation de f	5	↘	-2	↗	2	↗	6	↘	3	↘	-5	↗	-3	↗	0

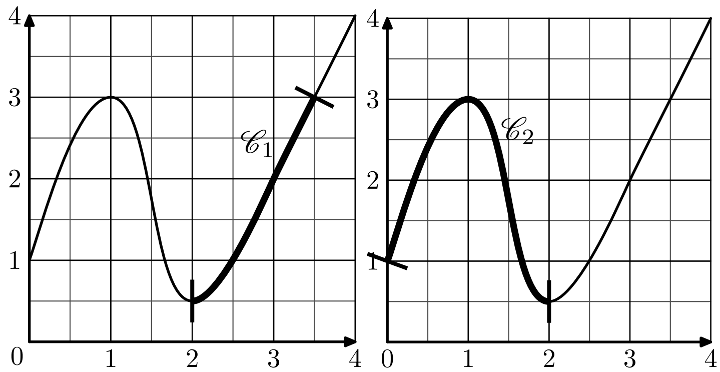
Réaliser, si possible, la comparaison des images des nombres suivants :

a. -5 et 3 b. 6 et -4 c. -6 et 4 d. $-4{,}75$ et 7

e. -3 et -2 f. 1 et 2 g. -10 et -3 h. 7 et -2

Exercice D.6

Les deux graphiques ci-dessous présente deux parties $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ de la courbe représentative d'une même fonction f.



1. a. Déterminer l'ensemble de nombres formé par tous les abscisses des points de la partie $\mathscr{C}_1$ de la courbe.

   b. Déterminer l'ensemble de nombres formé par tous les ordonnées des points de la partie $\mathscr{C}_1$ de la courbe.

   c. En déduire l'image de l'intervalle $\left[2\,;3{,}5\right]$ par la fonction f.

2. a. Déterminer l'ensemble de nombres formé par tous les abscisses des points de la partie $\mathscr{C}_2$ de la courbe.

   b. Déterminer l'ensemble de nombres formé par tous les ordonnées des points de la partie $\mathscr{C}_2$ de la courbe.

   c. En déduire l'image de l'intervalle $\left[0\,;2\right]$ par la fonction f.

Exercice D.7

On considère une fonction f définie sur l'intervalle $\left[-2\,;12\right]$ dont le tableau de variation est donné ci-dessous :

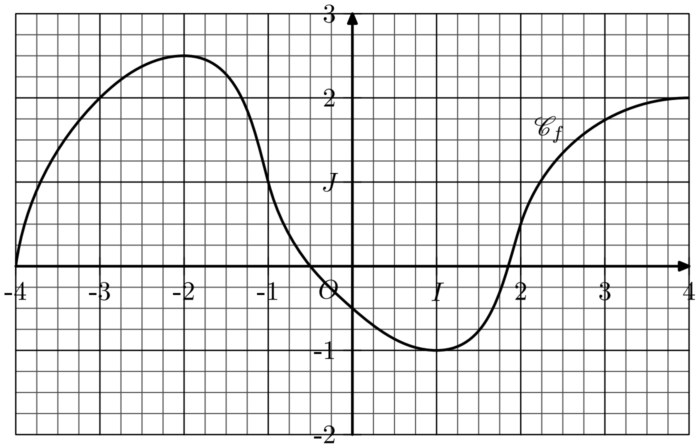
x	-2		1		3		7		9		12
Variation de f	3	↗	5	↘	0	↘	-2	↗	0	↗	3

On appelle *image d'un intervalle I* par f l'ensemble formé de l'image de tous les nombres de I par la fonction f.

1. Donner, par la fonction f, l'image des intervalles :
   a. $[7\,;12]$ b. $[1\,;3]$ c. $[-2\,;1]$
2. Donner, par la fonction f, l'image des intervalles :
   a. $[-2\,;3]$ b. $[3\,;9]$ c. $[1\,;12]$

Exercice D.8

On considère la fonction f dont la représentation graphique est donnée ci-dessous :

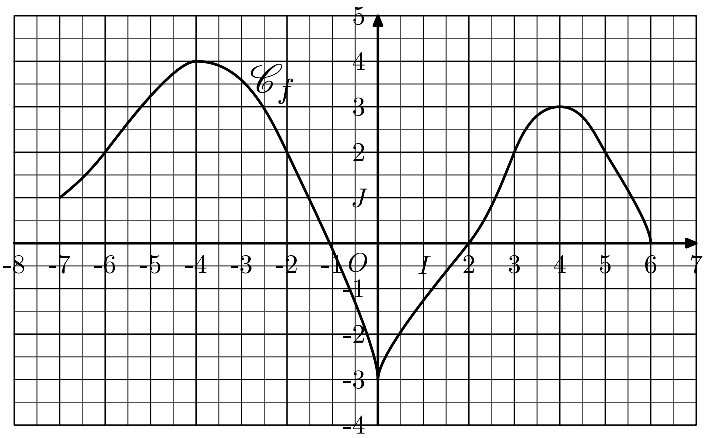


Déterminer les images, par la fonction f, de chacun des intervalles ci-dessous :

a. $]-2\,;0[$ b. $\left[-\frac{1}{2}\,;3\right]$ c. $[-4\,;4]$

Exercice D.9

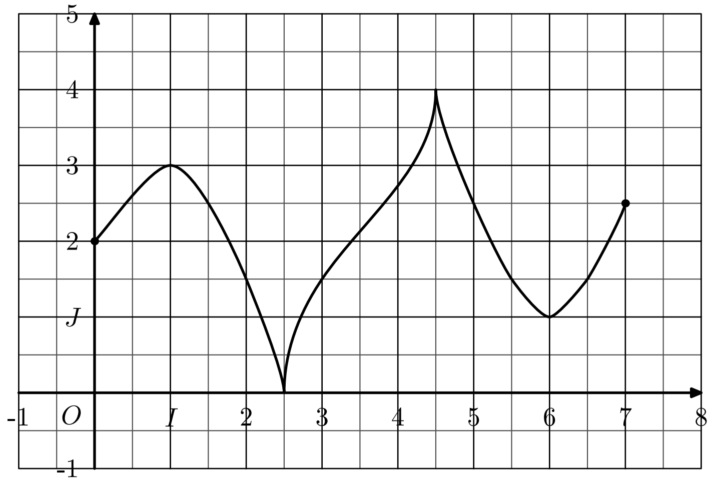
La représentation graphique de la fonction f est donnée dans le repère $(O\,;I\,;J)$ ci-dessous :



1. Justifier chacune de vos observations :
   a. Quelle est l'image du nombre 2 par f.
   b. Quels sont les antécédents par f du nombre 2.
2. Dresser le tableau de variation de la fonction f.
3. a. Quelles sont les coordonnées du point le plus haut de la courbe $\mathscr{C}_f$.
   b. En déduire la valeur maximale prise par la fonction f sur son intervalle de définition.
4. Donnez la valeur minimale prise par la fonction f et la valeur de x pour laquelle elle est atteinte.

Exercice D.10

Voici la représentation graphique d'une fontion f.



1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Donnez le tableau de variation de la fonction f ?
3. Quel est le maximum de la fonction f sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{5}{2}\right]$?
4. Quel est le maximum de f sur son ensemble de définition ?
5. Quel est le minimum de f sur $[0\,;\,7]$?

Exercice D.11

On considère la fonction f admettant le tableau de signe ci-dessous :

x	$-\infty$		-3		5		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Répondre aux affirmations suivantes par "*vrai*", "*faux*" ou "*on ne peut pas savoir*" :

1. $f(2)=6$.
2. L'équation $f(x)=0$ admet exactement deux solutions.
3. La fonction f est une fonction affine.
4. L'inéquation $f(x)<0$ a pour ensemble de solutions : $]-3\,;5[$.
5. Le point $A\,(0\,;5)$ appartient à la courbe représentative de la fonction f.
6. Si $f(1)=-4$, alors le minimum de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est -4.

Exercice D.12

On considère la fonction f dont le tableau de variation est donné ci-dessous :

x	-5		-3		-1		0		2		5		7		9
Variation de f	-2	↗	0	↗	4	↘	1	↗	2	↗	5	↘	0	↘	-3

1. Déterminer les images des intervalles suivants par la fonction f :

 a. $[-5\,;-3]$ b. $[-1\,;0]$ c. $[2\,;9]$

2. Comparer, si possible, les couples de nombres suivants :

 a. $f(-4)$; $f(-2)$ b. $f(6)$; $f(8)$

 c. $f(1)$; $f(8)$ d. $f(3)$; $f(4)$

 e. $f\Big(-\dfrac{2}{3}\Big)$; $f\Big(-\dfrac{1}{2}\Big)$ f. $f(-2)$; $f(3)$

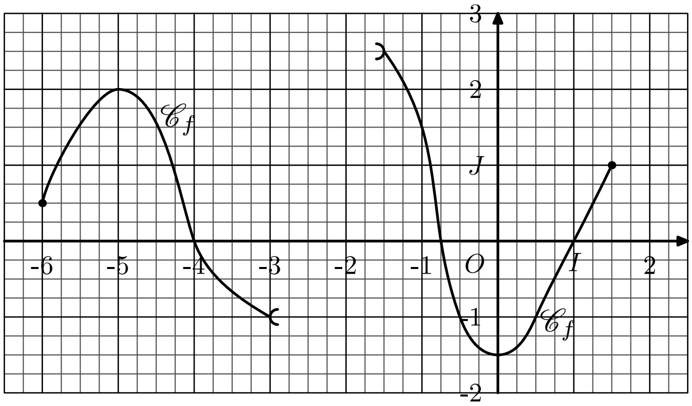
3. a. Donner l'ensemble des solutions des deux inéquations :
 $f(x)<0$ $f(x)\geqslant 0$

 b. Dresser le tableau de signe de la fonction f.

4. Sans justification, donner le nombre de solutions de l'équation $f(x)=4$.

Exercice D.13

Soit f une fonction dont la représentation graphique est donnée dans le repère $(O\,;I\,;,J)$ orthonormé ci-dessous :



1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f.

2. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

3. a. Déterminer l'image du nombre 0 par la fonction f.

 b. Déterminer l'ensemble des antécédents de -1 par la fonction f.

4. a. Donner le minimun de la fonction f sur son ensemble de définition.

 b. Donner le maximun de la fonction f sur l'intervalle $[-6\,;-3[$

5. Dresser le tableau de signe de la fonction f sur son ensemble de définition.

Exercice D.14

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variation a été donné ci-dessous :

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
Variation de f	5	↘	3	↗	7	↘	-4	↗	3

Dire, sans justification, si les affirmations ci-dessous sont vraies ou fausses :

a. 3 est un antécédent du nombre -2

b. $f(1)>f(-1)$

c. $f(1)$ est un nombre positif

d. Pour $x\in]0\,;1[$, on a $f(x)\geqslant 0$

e. Le minimum de la fonction f est -4.

Exercice D.15

On considère la fonction f, définie sur l'intervalle $\big[-7\,;\sqrt{31}\big]$ dont seul le tableau de variation ci-dessous est donné :

x	-7		-2		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{2}{3}$		2		5		$\sqrt{31}$
Variation de f	7	↘	3	↘	0	↘	-2	↗	0	↗	3	↗	4	↘	$\frac{10}{3}$

1. Donner, si possible, l'ensemble des antécédents du nombre 0 par la fonction f.

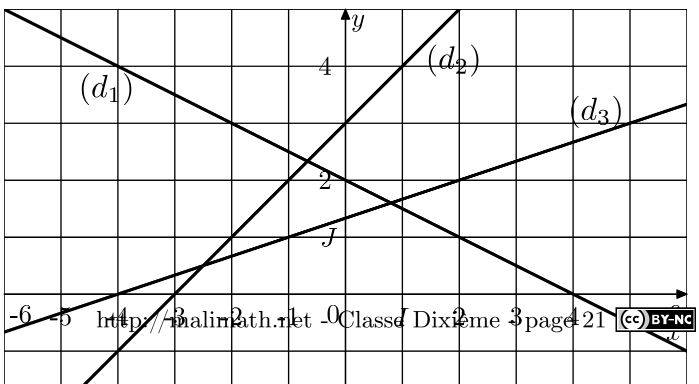
2. Résoudre l'inéquation : $f(x)\geqslant 3$.

3. Donner le maximum et le minimum de la fonction f ainsi que les valeurs pour lesquelles ils sont atteints.

E. Etude de fonctions de références:

Exercice E.1

Le graphique suivant présente trois droites représentées dans un repère orthonormé $(O\,;\,I\,;\,J)$:



En utilisant les points du quadrillage par lesquels chacune de ces droites passent, associer à chacune de ces droites une des fonctions suivantes :

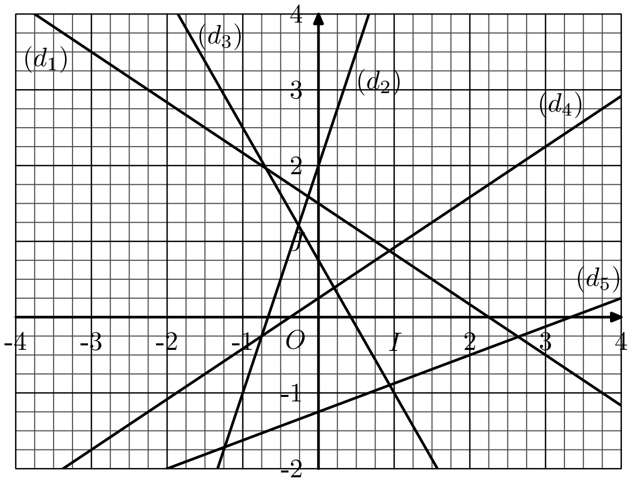
$f : x \longmapsto -0{,}5x + 2$ $\qquad$ $g : x \longmapsto \dfrac{1}{3}x + \dfrac{3}{2}$

$h : x \longmapsto x + 2$ $\qquad$ $j : x \longmapsto x + 3$

$k : x \longmapsto \dfrac{1}{3}x + \dfrac{4}{3}$ $\qquad$ $\ell : x \longmapsto -0{,}5x + 3$

Exercice E.2

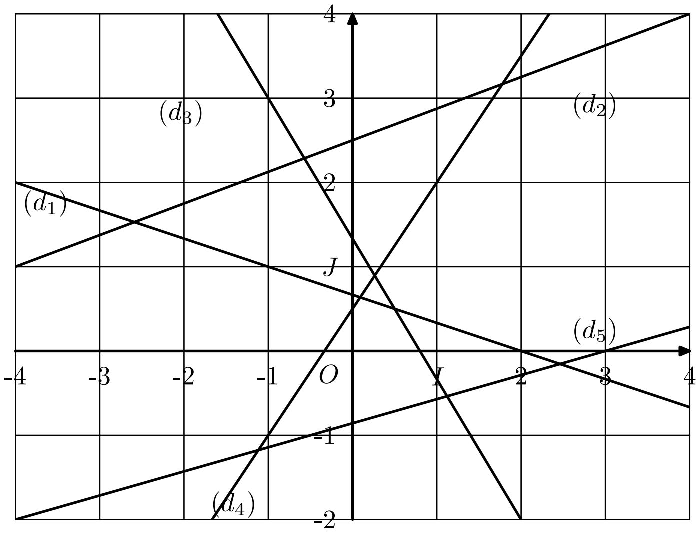
Dans le repère $(O ; I ; J)$ orthonormal représenté ci-dessous, on considère cinq droites.



Graphiquement, déterminer l'équation réduite de chacune de ces droites.

Exercice E.3

Dans le repère $(O ; I ; J)$ orthonormal représenté ci-dessous, on considère cinq droites.



1. Graphiquement, déterminer le coefficient directeur de chacune de ces droites.
2. Algébriquement, déterminer l'équation réduite de chacune de ces droites.

Exercice E.4

Déterminer de manière algébrique, l'équation de la droite (Δ) passant par les points $A(1 ; 5)$ et $B(5 ; 8)$

Exercice E.5

On se place dans le plan, muni d'un repère $(O ; I ; J)$.
Dîtes si les trois points suivants sont alignés :

$$A(-104 ; -22) \quad ; \quad B(56 ; 18) \quad ; \quad C(82 ; 24)$$

Exercice E.6

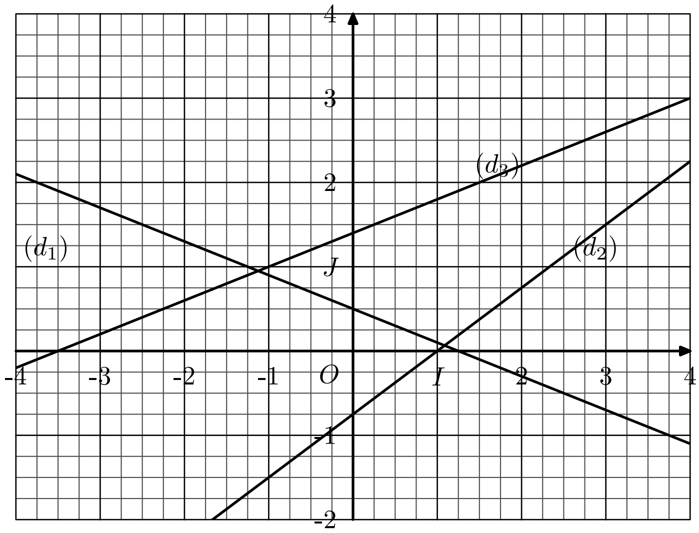
On considère dans le repère $(O ; I ; J)$ les trois points suivants définis par leurs coordonnées :

$$A(1 ; 6) \quad ; \quad B(5 ; 16{,}4) \quad ; \quad C\left(\frac{1}{2} ; \frac{47}{10}\right)$$

Dire si ces trois points sont alignés ou non. Démontrer votre affirmation.

Exercice E.7

Dans le plan muni d'un repère $(O ; I ; J)$, on considère les trois droites (d_1), (d_2) et (d_3) représentées ci-dessous :



1. Graphiquement, déterminer les équations réduites des droites (d_1) et (d_2).
2. a. Graphiquement, déterminer le coefficient directeur de la droite (d_3).

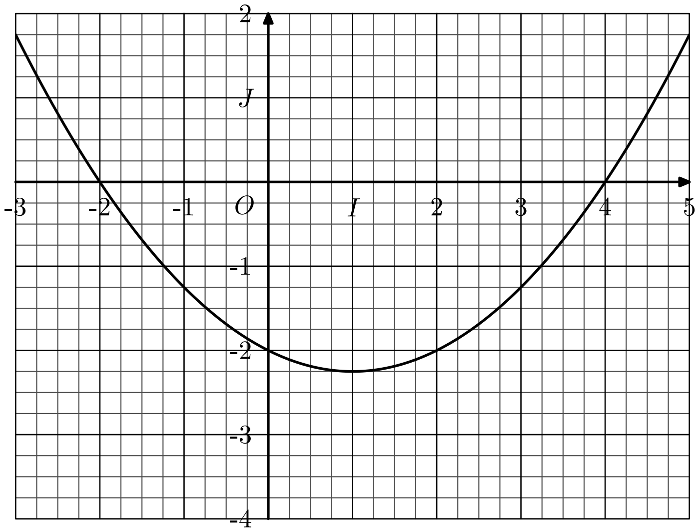
   b. En déduire, algébriquement, l'équation réduite de la droite (d_3).

Exercice E.8

On considère la fonction f définie par la relation est :

$$f(x) = \frac{1}{4} \cdot x^2 - \frac{1}{2} \cdot x - 2$$

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O ; I ; J)$, on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f :



1. a. Effectuer le tracé de la droite (d) dont l'équation est :
$y = \frac{1}{2} \cdot x - 3$

   b. Comment s'appelle la droite (d) relativement à la courbe $\mathscr{C}_f$?

2. a. Effectuer le tracé de la droite (Δ) dont l'équation est :
$y = -\frac{3}{2} \cdot x - 3$

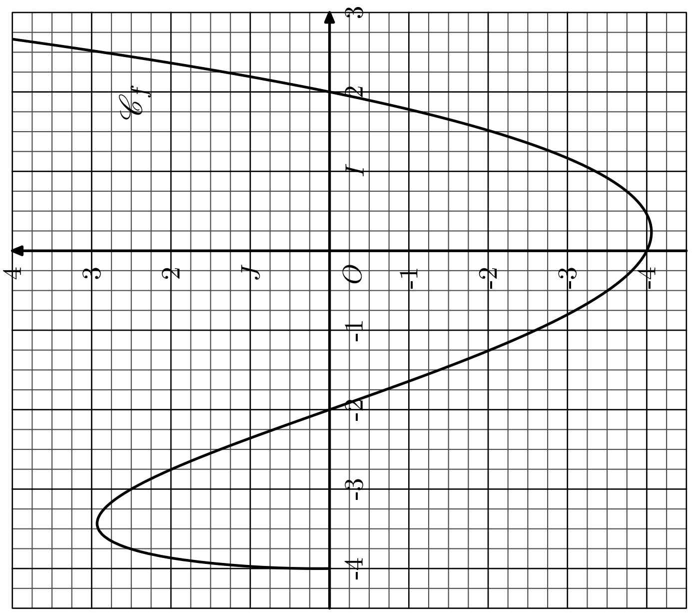
   b. Comment s'appelle la droite (Δ) relativement à la courbe $\mathscr{C}_f$?

Exercice E.9

On considère la fonction f définie par la relation est :

$$f(x) = \sqrt{x+4} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot x^2 - 2\right)$$

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\,;I\,;J)$, on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f :



1. a. Effectuer le tracé de la droite (d) dont l'équation est :
$y = -\frac{1}{2} \cdot x - 4$

   b. Comment s'appelle la droite (d) relativement à la courbe $\mathscr{C}_f$?

2. a. Effectuer le tracé de la droite (Δ) dont l'équation est :
$y = -\frac{7}{4} \cdot x - \frac{11}{4}$

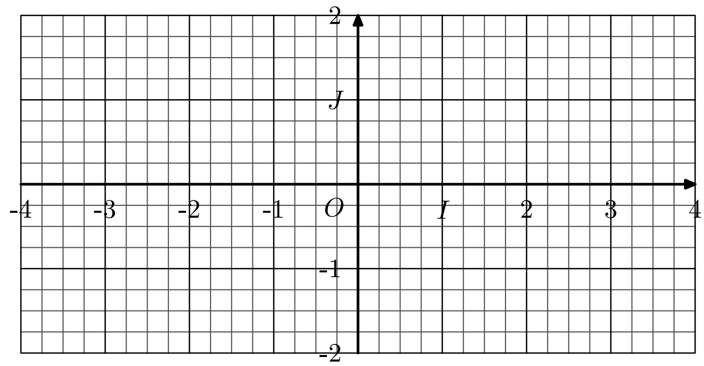
   b. Comment s'appelle la droite (Δ) relativement à la courbe $\mathscr{C}_f$?

Exercice E.10

On considère les deux fonctions affines f et g définies par :

$$f(x) = \frac{3}{4} \cdot x + 1 \quad ; \quad g(x) = -\frac{3}{5} \cdot x + \frac{1}{2}$$

On considère le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ représenté ci-dessous :



On note (d_1) et (d_2) les droites représentatives des fonctions respectives f et g.

1. Tracer les droites (d_1) et (d_2) dans le tableau ci-dessous.

2. Donner le sens de variation des fonctions f et g.

3. Dresser les tableaux de signes des fonctions f et g.

Exercice E.11

1. On considère la droite (d) d'équation :
$y = 3x - 2$
Et les points du plan suivant :

$$A\,(2\,;4) \quad ; \quad B\,(-1\,;1) \quad ; \quad C\left(-\frac{1}{2}\,;-\frac{7}{2}\right)$$

$$D\left(\frac{2}{3}\,;0\right) \quad ; \quad E\left(\frac{2}{5}\,;-\frac{2}{5}\right) \quad ; \quad F\,(-3\,;-2)$$

   a. Parmi ces points, lesquels appartiennent à la droite (d) ?

   b. Parmi ces points, lesquelles vérifient l'équation suivante :
$y - 3x + 2 = 0$

   c. Quelle observation peut-on faire ? Pourquoi ?

2. On considère les quatres équations ci-dessous représentant chacune les points d'une droite :

$$(d_1) :\ y + 3x - 2 = 0 \qquad (d_2) :\ y + \frac{5}{2}x + 4 = 0$$

$$(d_3) :\ \frac{1}{2}y - 2 + \frac{5}{4}x = 0 \qquad (d_4) :\ -y - 3x - 2 = 0$$

   a. Donner l'équation réduite représentant chacune de ces droites.

   b. Chacune de ces deux équations représentent une des droites présentées dans cette question. Lesquelles ?
$(E) :\ 3y + 9x - 6 = 0 \quad ; \quad (F) :\ 4y + 10x + 16 = 0$

Exercice E.12

Nous allons étudier la fonction carrée f définie par :

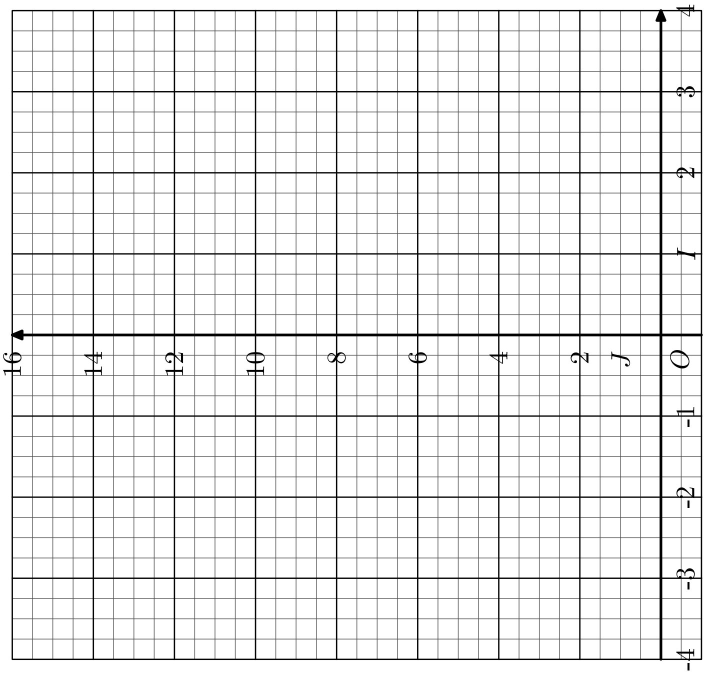
$f : x \longmapsto x^2$

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction carrée.

2. Remplissez le tableau de valeurs ci-dessous :

x	-4	-3	-2	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	2	3	4
$f(x)$											

3. On considère le repère orthogonal $(O\,;I\,;J)$ ci-dessous.
Tracer la courbe repréntative $\mathscr{C}_f$ dans ce repère :



4. Dresser un tableau de variation de la fonction f sur son ensemble de définition $\mathscr{D}_f$.

5. Algébriquement, prouver la décroissance de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty\,;0]$

6. La courbe représentative de la fonction f possède-t-elle un axe de symétrie ou un centre de symétrie ?

Exercice E.13

Nous allons étudier la fonction inverse g définie par :

$g : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$

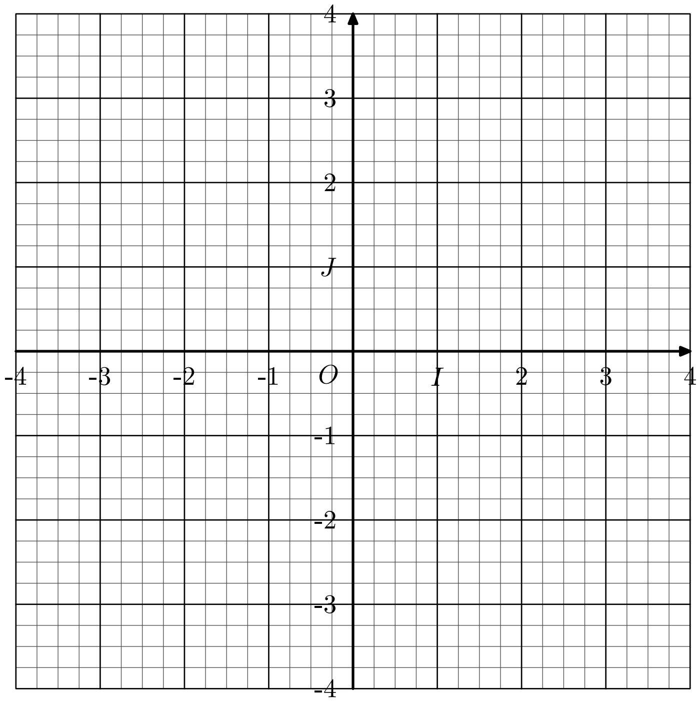
1. Donner l'ensemble de définition de la fonction inverse.

2. Remplissez le tableau ci-dessous avec les valeurs décimales arrondies au centième près :

x	-4	-3	-2	-1	$-0{,}5$	$-0{,}25$
$g(x)$						

x	$0{,}25$	$0{,}5$	1	2	3	4
$g(x)$						

3. Tracer la courbe repréntative $\mathscr{C}_g$ dans le repère ci-dessous :



4. Dresser un tableau de variation de la fonction g sur son ensemble de définition $\mathscr{D}_g$.

5. Algébriquement, prouver la décroissance de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$

6. La courbe représentative de la fonction g possède-t-elle un axe de symétrie ou un centre de symétrie ?

Exercice E.14

Soit f la fonction carrée :

1. Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	-10	$-\sqrt{5}$	$-\dfrac{3}{2}$	0	1	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$1+\sqrt{2}$
$f(x)$							

2. a. Que peut-on dire de la comparaison de deux nombres négatifs et de leurs carrés ?

   b. Que peut-on dire de la comparaison de deux nombres positifs et de leurs carrés ?

Exercice E.15

1. Compléter le tableau avec les valeurs décimales des images arrondies au centième près :

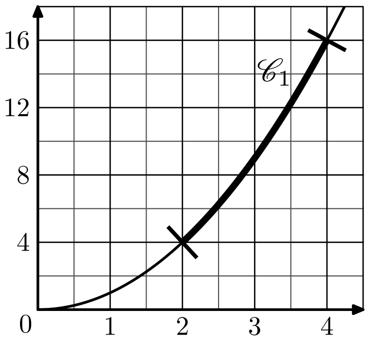
x	-10	-3	-2	$-0{,}5$	$0{,}2$	$0{,}75$	2
$f(x)$							

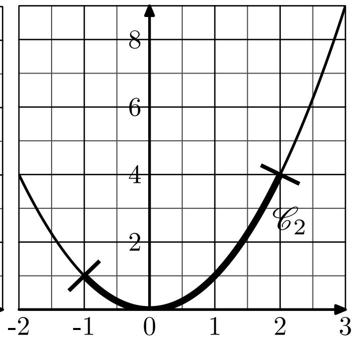
2. a. Que peut-on dire de la comparaison de deux nombres négatifs et de leurs inverses ?

   b. Que peut-on dire de la comparaison de deux nombres positifs et de leurs inverses ?

Exercice E.16

Les deux graphiques ci-dessous présente deux parties $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ de la courbe représentative de la fonction carrée :





1. a. Déterminer l'ensemble de nombres formé par tous les abscisses des points de la courbe $\mathscr{C}_1$.

   b. Déterminer l'ensemble de nombres formé par tous les ordonnées des points de la courbe $\mathscr{C}_1$.

   c. En déduire l'image de l'intervalle $\left[2\,;\,4\right]$.

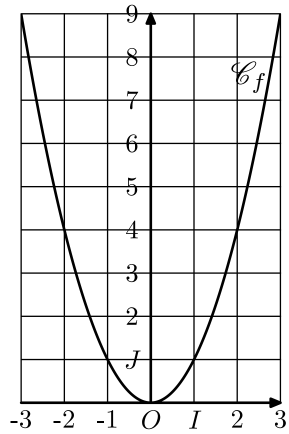
2. a. Déterminer l'ensemble de nombres formé par tous les abscisses des points de la courbe $\mathscr{C}_2$.

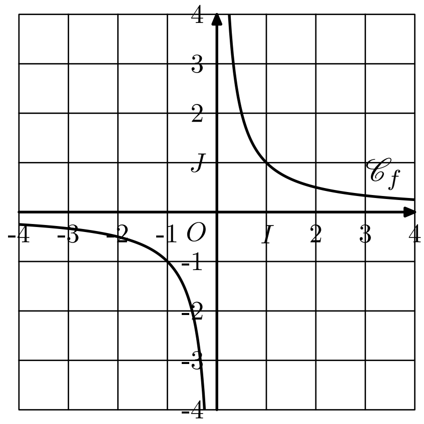
   b. Déterminer l'ensemble de nombres formé par tous les ordonnées des points de la courbe $\mathscr{C}_2$.

   c. En déduire l'image de l'intervalle $\left[-1\,;2\right]$.

Exercice E.17

Dans des repère $\left(O\,;I\,;J\right)$ orthormaux, sont données ci-dessous les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives respectivement de la fonction carrée et de la fonction inverse :





Compléter, sans justification, les assertions suivantes :

1. Si $x\in\left[1\,;3\right[$ alors $x^2\in\ldots\ldots$
2. Si $x\in\left]-1\,;2\right]$ alors $x^2\in\ldots\ldots$
3. Si $x\in\left]2\,;4\right]$ alors $\dfrac{1}{x}\in\ldots\ldots$
4. Si $x\in\left]0\,;2\right]$ alors $\dfrac{1}{x}\in\ldots\ldots$
5. Si $x\in\left]-\infty\,;-\dfrac{1}{2}\right]$ alors $\dfrac{1}{x}\in\ldots\ldots$

Exercice E.18

Soit x un nombre réel ayant pour encadrement $-1<x\leqslant 3$.
Pour chaque question, déterminer un encadrement de l'expression littérale proposée :

a. $3x+1$ b. $-2x-5$ c. $\dfrac{1}{x+2}$

d. $(x+1)^2+1$ e. $\dfrac{1}{x^2+1}$ f. $\dfrac{2}{(x-1)^2+1}$

F. Fonctions numériques d'une variable réelle:

Exercice F.1

On considère la fonction f définie par :

$$f(x)=-6x^2+10x-4$$

1. Etablir les égalités suivantes :

$$f(x)=2(x-1)(2-3x)=-6\left(x-\frac{5}{6}\right)^2+\frac{1}{6}$$

2. Calculer l'image des nombres ci-dessous par la fonction f

   a. 0 b. $\dfrac{2}{3}$ c. $\dfrac{5}{6}$

Exercice F.2

On considère la fonction f définie par :

$$f:x\longmapsto 9x^2-6x-2$$

1. Etablir l'égalité suivante :

$$9x^2-6x-2=(3x-1)^2-3$$

2. a. Donner l'ensemble de définition de la fonction f.

   b. Calculer l'image de 1 par la fonction f.

   c. Calculer les antécédents de -2 par la fonction f.

   d. Montrer que f admet un minimum et que celui-ci est atteint en $\dfrac{1}{3}$

Exercice F.3

Répondre aux questions suivantes sans aucune justification :

1. On considère le polynôme $P=2(2x-1)(3-x)(x+2)$:

   a. Donner, sans justification, le coefficient du terme de degré 3 du polynôme P et la valeur de son terme numérique.

   b. Parmi les polynômes ci-dessous, lequel est la forme développée et réduite du polynôme P ?

   $-4x^3+6x^2+22x+12$ $\qquad$ $4x^3+6x^2+22x-12$

   $-4x^3+6x^2+22x-12$ $\qquad$ $4x^3+6x^2+22x+12$

2. Déterminer la valeur de a, un nombre réel, vérifiant l'égalité suivante :

$$(2x+1)(3x^2+a{\cdot}x+1)=6x^3-7x^2-3x+1$$

Exercice F.4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont l'image d'un nombre x est définie par :

$f(x) = -9x^2 - 12x + 1$

1. Etablir l'égalité : $f(x) = -(3x+2)^2 + 5$.

2. Démontrer que, sur $\left]-\infty\,;-\frac{2}{3}\right]$, la fonction f est croissante.

Exercice F.5

On considère la fonction f définie par la relation : $f(x) = 4x^2 - 16x + 9$.

1. Etablir l'égalité : $4x^2 - 16x + 9 = (2x-4)^2 - 7$

2. Montrer que :

   a. la fonction f est décroissante sur $\left]-\infty\,;2\right]$.

   b. la fonction f est croissante sur $\left[2\,;+\infty\right[$.

3. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

4. Déterminer l'image des intervalles suivants par la fonction f :

   a. $\left]-2\,;1\right]$ b. $\left[0\,;\,4\right]$ c. $\left[1\,;\,+\infty\right[$

Exercice F.6

Pour chacune des fonctions, déterminer les caractéristiques de leur extrémum et dresser le tableau de variation :

a. $f : x \longmapsto 2x^2 + 8x + 1$ b. $g : x \longmapsto -x^2 + 2x + 1$

c. $h : x \longmapsto x^2 + 4x + 4$ d. $j : x \longmapsto -3x^2 + 9x - 2$

e. $k : x \longmapsto 3x^2 + 2x + 2$ f. $\ell : x \longmapsto -x^2 + 2\sqrt{3}x - 1$

Exercice F.7

1. Soit f la fonction définie par la relation : $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$

   a. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

   b. Justifier que la fonction f s'annule en deux valeurs.

2. Soit g la fonction définie par la relation : $g(x) = -4x^2 + 4x - 1$

   a. Dresser le tableau de variation de la fonction g.

   b. Justifier que la fonction g s'annule en une unique valeur qu'on précisera.

3. Soit h la fonction définie par la relation : $h(x) = 4x^2 + 2x + 1$

   a. Dresser le tableau de variation de la fonction h.

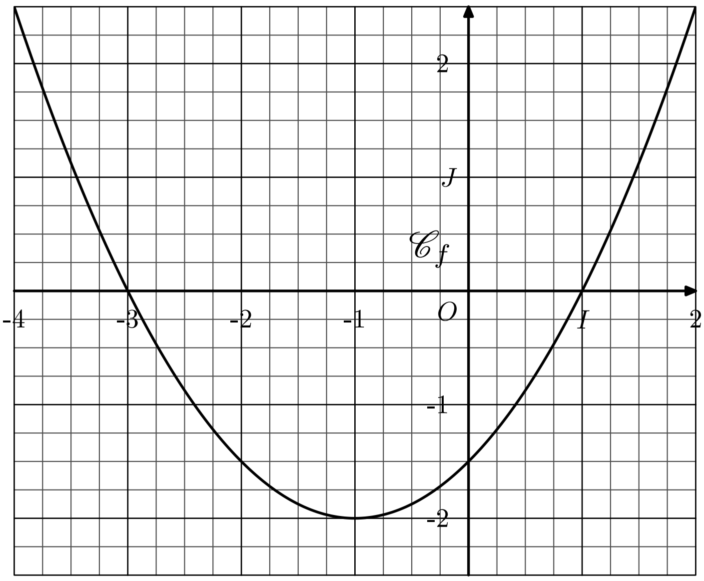
   b. Justifier que la fonction h ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$.

Exercice F.8

On considère la fonction f, qui à tout nombre x, associe son image $f(x)$ définie par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2}$$

Le graphique ci-dessous donne la représentation de la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormal :



Partie A : étude graphique

Graphiquement, répondre aux questions suivantes :

1. Donner les antécédents du nombre 0 par f.

2. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $\left[-4\,;2\right]$.

3. Donner les caractéristiques de l'extrémum de la fonction f.

Partie B : étude algébrique

1. a. Etablir l'egalité suivante : $f(x) = \frac{1}{2}\cdot(x+3)(x-1)$

   b. Résoudre l'équation : $f(x) = 0$.

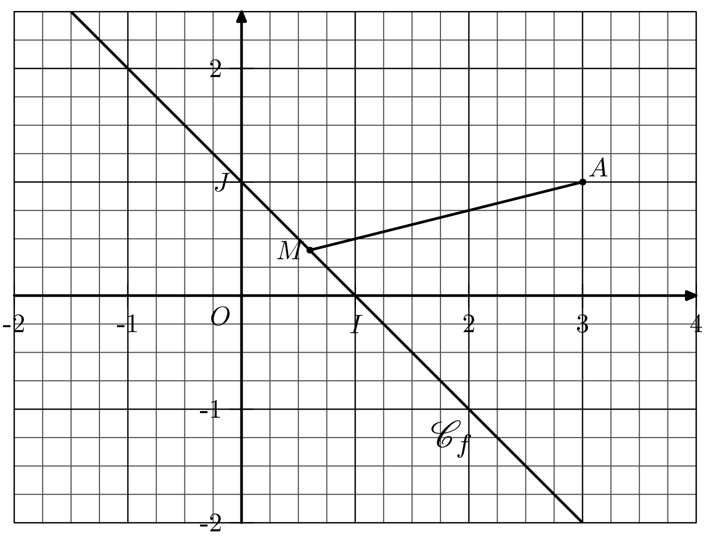
2. a. Etablir l'égalité suivante : $f(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 - 2$

   b. Démontrer que la fonction f est décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty\,;-1\right]$.

Exercice F.9

On considère la fonction f définie par la relation : $f(x) = -x - 1$

La représentation graphique est donnée ci-dessous :



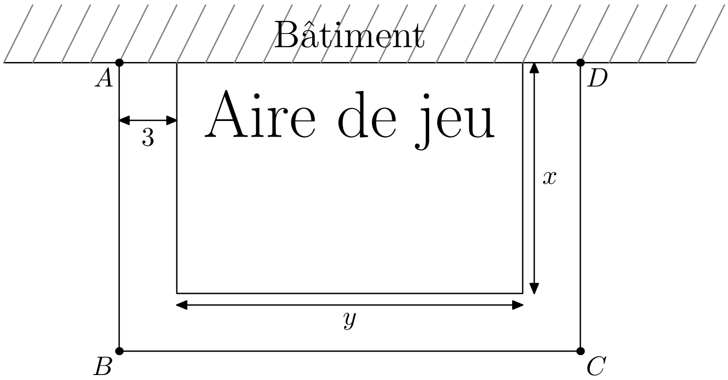
On considère le point A de coordonnée $\left(3\,;1\right)$ et M un point de la courbe $\mathscr{C}_f$.

Déterminer la position du point M sur $\mathscr{C}_f$ afin que la longueur

AM est minimale.

Exercice F.10

On veut construire le long d'un bâtiment une aire de jeu rectangulaire. De plus, on souhaite que les dimensions de ce rectangle soient supérieures ou égales à $10\,m$. Cet espace de jeu est entouré sur trois côtés d'une allé de $3\,m$ de large comme l'indique le croquis ci-dessous.



L'ensemble est clôturé sur les trois côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[CD]$.
On s'intéresse à la longueur $\mathscr{L}$ de la clôture :
$\mathscr{L} = AB + BC + CD$.
On note x et y les dimensions en mètres de l'aire de jeu *(la valeur de x et de y sont nécessairement positifs)*.

1. Exprimer la longueur $\mathscr{L}$ de la cloture en fonction des valeurs des valeurs de x et de y.

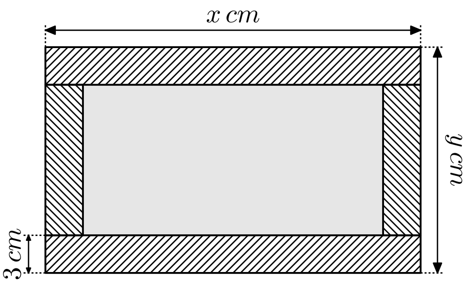
2. On dispose de 100 mètres de clôture qu'on souhaite entièrement utilisé :
   a. Exprimer, dans ces conditions, la valeur de y en fonction de x.
   b. Justifier que la valeur de x doit être inférieure à 44.
   c. Justifier que l'aire de jeux a pour aire :
   $\mathscr{A}(x) = 88x - 2x^2$

3. a. Justifier l'égalité ci-dessous :
   $\mathscr{A}(x) = 968 - 2(x - 22)^2$
   b. En déduire la croissance de la fonction $\mathscr{A}$ sur l'intervalle $]0\,;\,22]$.
   c. Dresser, sans justification, le tableau de variation de la fonction $\mathcal{A}$ sur l'intervalle $]0\,;\,44[$.

4. En déduire les dimensions afin que les 100 mètres de clôtures soient utilisés et que l'aire de jeu soit maximale.

Exercice F.11

Un menuisier dispose d'une baguette de bois de 100 centimètres de longueur et de 3 centimètres de largeur. Il souhaite utiliser toute la longueur de cette baguette pour la confection d'un cadre en bois à l'image du dessin ci-dessous :



1. a. Déterminer la valeur de y en fonction de x.
   b. En déduire les valeurs possibles de x.

2. Donner l'expression de l'aire $\mathcal{A}(x)$ de l'intérieur du cadre en fonction de x.

3. a. Etablir l'égalité suivante :
   $\mathcal{A}(x) = -(x - 28)^2 + 484$
   b. Montrer que la fonction $\mathcal{A}$ est croissante sur $]6\,;28]$ et qu'elle est décroissante sur $[28\,;50[$.
   c. Dresser le tableau de variation de la fonction $\mathcal{A}$, puis en déduire l'aire maximale que peut prendre un tel cadre.

Exercice F.12

Dans une fête forraine, le gérant de l'attraction "*la chenille en folie*" fait le constat suivant :

Son manège peut accueillir 70 personnes par tour ;

S'il fixe le prix à 1 €, son manège est plein à chaque tour ;

Chaque fois qu'il augmente le prix de 0,50 €, il perd 5 clients.

On note x le prix d'une place : le nombre x appartient à l'intervalle $[1\,;+\infty[$.

On s'intéresse à la valeur de la recette faîte par cette attraction à chaque tour en fonction du prix x des places ; on note $\mathcal{R}(x)$ la valeur de cette recette.

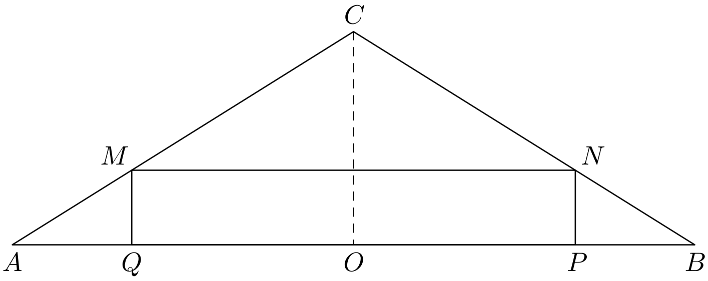
1. Justifier que le la recette admet l'expression :
   $\mathcal{R}(x) = 80x - 10x^2$

2. a. Dresser le tableau de variation de la fonction $\mathcal{R}$.
   b. En déduire la recette maximale que peut réaliser cette attraction. Quel doit-être le prix d'un tour pour réaliser ce maximum ?

3. Le gérant souhaite réaliser une recette supérieure à 150 € à chaque tour de manège. Déterminons les prix possibles d'une place réalisant cette condition :
   a. Développer l'expression : $(x-4)^2-1$.
   En déduire l'expression de la forme canonique de l'expression $\mathcal{R}(x)-150$.
   b. Factoriser l'expression : $(x-4)^2-1^2$.
   Puis, factoriser l'expression $\mathcal{R}(x)-150$.
   c. Déterminer les solutions de l'équation : $\mathcal{R}(x)=150$.
   d. En utilisant la question précédente et le tableau de variation de la fonction $\mathcal{R}$, donner sans justification l'ensemble des solutions de l'inéquation $\mathcal{R}(x)\geqslant 150$.

Exercice F.13

On considère le triangle isocèle ABC de dimensions :
$OA = 8\,cm \quad ; \quad OC = 5\,cm$
$[CO]$ représente la hauteur du triangle ABC issue du sommet C.



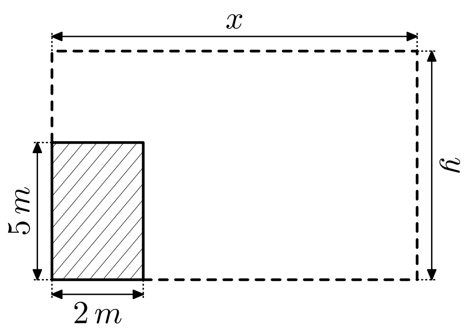
On souhaite inscrire un rectangle $MNPQ$ à l'intérieur du triangle et centré autour de l'axe (OC) comme représenté ci-dessus.

On note x la longueur du segment $[OP]$.

1. Justifier brièvement les valeurs possibles prises par la variable x.
2. Déterminer la mesure du segment $[NP]$ en fonction de la longueur x.
3. Démontrer que l'aire $\mathcal{A}$ du rectangle $MNPQ$ a pour expression en fonction de x :
   $\mathcal{A}(x) = -\dfrac{5}{4}\cdot x^2 + 10\cdot x$
4. Pour quelle valeur l'aire du rectangle $MNPQ$ est maximale ?

Exercice F.14

Dans son champ, un agriculteur possède un poulailler de forme rectangulaire et de dimensions $5\,m$ et $2\,m$. Il souhaite construire un enclos comme l'indique la figure ci-dessous avec $17\,m$ de clôture :



Le poulailler est représenté par la partie hachurée, la clôture est représentée en pointillés et la partie extérieure dédiée aux poules est représentée par la partie blanche.

On note $\mathcal{A}$ l'aire de la partie extérieure.

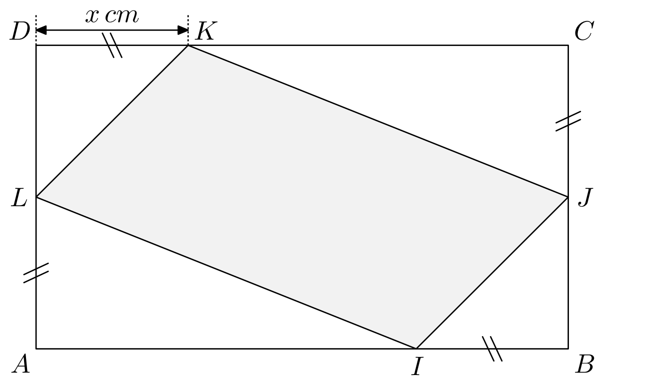
1. Etablir la relation suivante entre x et y :
   $x + y = 12$
2. Démontrer que l'aire de l'espace extérieur a pour expression : $\mathcal{A}(x) = -x^2 + 12\cdot x - 10$
3. Dresser le tableau de variations de la fonction $\mathcal{A}$ sur $\mathbb{R}$.
4. Déterminer les valeurs de x et de y pour que l'aire de l'espace extérieur réservé aux poules soient maximale.

Exercice F.15

Dans le plan, on considère un rectangle $ABCD$ tel que :
$DC = 7\,cm \quad ; \quad DA = 5\,cm$

Les points I, J, K, L sont des points appartenant respectivement aux côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$ vérifiant les relations :

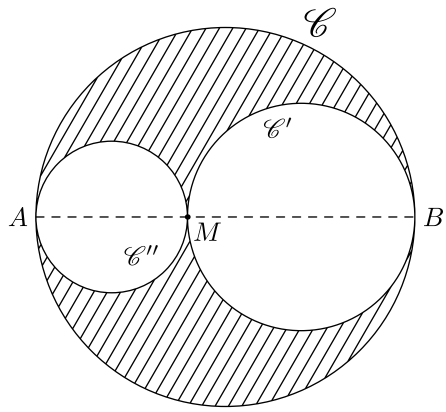
$DK = CJ = BI = LA = x\,cm$



1. Justifier, brièvement, que le quadrilatère $IJKL$ est un parallélogramme.
2. a. Déterminer les valeurs possibles pour x.
   b. Justifier que l'aire du parallélogramme $IJKL$ a pour expression en fonction de x :
   $\mathcal{A}(x) = 2x^2 - 12x + 35$
   c. En déduire le tableau de variation de la fonction $\mathcal{A}$.
   d. Donner le minimum de la valeur de l'aire de $IJKL$ et la valeur de x pour lequel il est atteint.
3. On souhaite déterminer les valeurs de x pour lesquels, $\mathcal{A}$ est supérieure à $25\,cm^2$
   a. Déterminer les valeurs de a et b de nombres réels vérifiant l'égalité :
   $2x^2 - 12x + 10 = (a\cdot x + b)(x - 5)$
   b. En déduire les solutions de l'inéquation :
   $\mathcal{A}(x) \geqslant 25\,cm^2$.

Exercice F.16

Dans le plan, on considère le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$ tel que $AB = 5\,cm$. Soit M un point du segment $[AB]$, on construit respectivement les cercles $\mathscr{C}'$ et $\mathscr{C}''$ de diamètres respectifs $[AM]$ et $[MB]$.



On repère la position du point M par la mesure de AM qu'on note x ; on s'intéresse à l'aire de la partie hachurée qu'on note $\mathcal{A}(x)$.

1. Décrire brièvement les valeurs prises par la variable x.
2. Déterminer une expression de $\mathcal{A}$ en fonction de x.

On considère la fonction qui à x associe $\mathcal{A}(x)$

3. Dresser le tableau de variation de la fonction $\mathcal{A}(x)$.
4. a. Déterminer la valeur des réels a et b tels que :
   $-2x^2 + 10x - 8 = (x - 4)(a\cdot x + b)$

b. Résoudre l'inéquation suivante :
$\mathcal{A}(x) \leqslant 2{\cdot}\pi$

Exercice F.17

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont l'image d'un nombre x est définie par la relation algébrique :

$f(x) = 4x^2 + 4x - 3$

1. a. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$f(x) = (2x-1)(2x+3)$

b. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$f(x) = (2x+1)^2 - 4$

2. Pour chacune des questions suivantes, utiliser la forme la plus adaptée :

a. Déterminer les antécédents de 0 par la fonction f.

b. Sachant que le carré d'un nombre est toujours positif ou nul, établir que la fonction f est minorée par -4.

c. Déterminer le signe de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

d. Résoudre l'inéquation : $f(x) \geqslant 5$.

Exercice F.18

1. On considère l'expression P définie par :

$$P = \Big(x - \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\Big)\Big(x - \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\Big)$$

a. Donner la forme dévelooper et réduite de l'expression P.

b. Résoudre l'équation $P=0$.

2. Soit la fonction f dont l'image de x est définie par :
$f(x) = x^2 - 2x - 2$

a. Déterminer les valeurs des deux réels α et β vérifiant l'égalité suivante :
$f(x) = \big(x-\alpha\big)^2 + \beta$

b. Déterminer la forme factorisée de la fonction f.

c. Déduire de la question précédente, les antécédents de 0 par la fonction f.

Exercice F.19

Exprimer chacun des polynômes ci-dessous sous la forme d'une expression du type :
$\big(x-\beta\big)^2 + \gamma$ où β et γ sont deux réels.

a. $x^2 - 4x + 1$	b. $x^2 + 6x + 3$	c. $x^2 + x + 2$
d. $x^2 - 3x - 1$	e. $x^2 + \frac{1}{2}x - 3$	f. $x^2 + x - \frac{1}{3}$

Exercice F.20

Donner la forme canonique de chacun des trinômes du second degré ci-dessous :

a. $2x^2 + 8x - 6$	b. $3x^2 + 3x + 6$
c. $9x^2 + 18x + 27$	d. $5x^2 + 10x + 2$
e. $2x^2 + 5x - 4$	f. $\sqrt{2}x^2 - 3x + 1$

Exercice F.21

On considère la fonction f définie par :

$$f : x \longmapsto \frac{2x-1}{x+1}$$

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f

2. Montrer l'égalité suivante :
$$\frac{2x-1}{x+1} = 2 + \frac{-3}{x+1}$$

3. Montrer la croissance de la fonction f sur $]-\infty\,;-1[$ et ainsi que sur $]-1\,;+\infty[$

4. Montrer algébriquement que 2 n'admet pas d'antécédent par la fonction x.

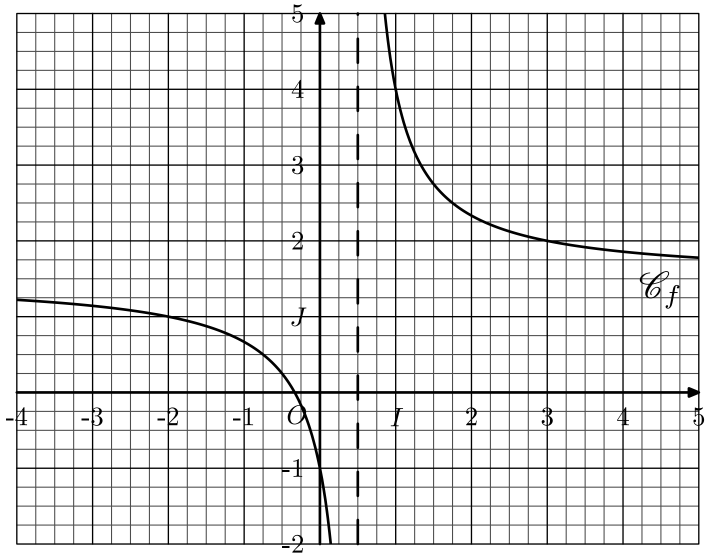
Exercice F.22

On considère la fonction : $f : x \longmapsto \dfrac{3x+1}{2x-1}$

1. a. Etablir l'égalité suivante :
$$\frac{3x+1}{2x-1} = \frac{5}{4x-2} + \frac{3}{2}$$

b. Etablir la décroissance de la fonction f sur l'intervalle $\Big]-\infty\,;\frac{1}{2}\Big[$.

2. On représente, dans le repère orthonormé ci-dessous, la courbe représentative de la fonction f :



a. Graphiquement, déterminer une valeur approchée de l'antécédent du nombre 3 par la fonction f.

b. Algébriquement, rechercher l'antécédent du nombre 3 par la fonction f.

c. Graphiquement, déterminer les solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant 3$

Exercice F.23

On considère la fonction f définie par :
$$f(x) = \frac{6{\cdot}x - 7}{3 - 2{\cdot}x}$$

1. Etablir l'égalité suivante : $f(x) = -3 + \dfrac{2}{3-2{\cdot}x}$

2. Etablir le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $\Big]-\infty\,;\frac{3}{2}\Big[$.

3. Déterminer l'ensemble des antécédents de 1 par la fonc-

tion f.

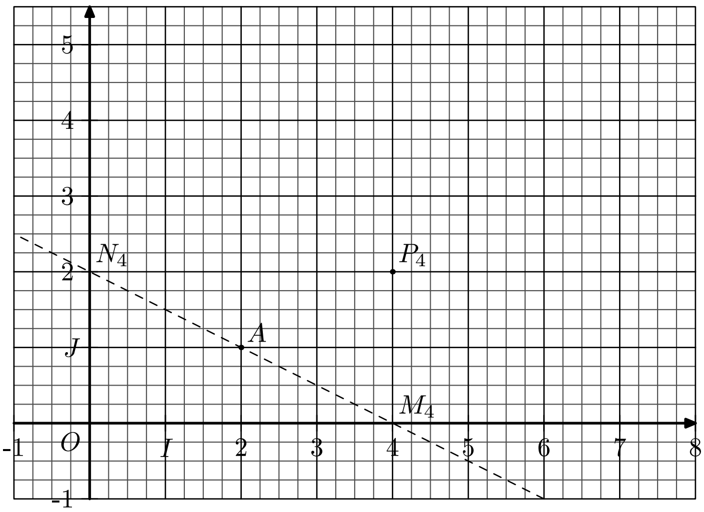
4. Résoudre l'équation : $f(x) = 2{\cdot}x$

Exercice F.24

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;\,I\,;\,J)$ orthonormal, on considère le point A de coordonnée $\big(2\,;1\big)$.

Pour a un nombre réel appartenant à l'intervalle $\big]2\,;\,+\infty\big[$, on considère le point M de coordonnées $\big(a\,;0\big)$.
On note N le point d'intersection de la droite (MA) avec l'axe des ordonnées et on note b l'ordonnée du point N.
On note P le point de coordonnées $\big(a\,;b\big)$.

Le graphique ci-dessous représente ces différents points dans le cas $a{=}4$:



Le but de cet exercice est de connaitre la position du point P en fonction de la valeur a ; on parle du "*lieu géométrique*" du point P lorsque le nombre a décrit l'intervalle $\big]2\,;\,+\infty\big[$.

Partie A :

1. Justifier que le point N ne peut être défini pour $a{=}2$.

2. On s'intéresse à la position du point P lorsque $a{=}3$:

   a. Placer le point M_3 $\big(3\,;0\big)$.

   b. Placer le point N_3 tel qu'indiqué dans l'énoncé. Quel est l'ordonnée du point N_3 ?

   c. Placer le point P_3 tel que précisée dans l'énoncé.

3. Effectuer la même démarche que pour la question précédente pour les différentes valeurs de a :

   $a = 2{,}5 \quad ; \quad a = 5 \quad ; \quad a = 7$

4. Quel conjecture peut-on faire sur la courbe formée par l'ensemble des points P lorsque le nombre a décrit l'intervalle $\big]2\,;\,+\infty\big[$.

Partie B :

1. Justfier que la droite (MN) a pour coefficient directeur :

   $$\frac{1}{2-a}$$

2. Déterminer l'équation réduite de la droite (MN)

3. Déterminer l'expression de b en fonction de a.

4. Exprimer les coordonnées du point P en fonction de a. Confirmer la conjecture faite à la question **A**.

Exercice F.25

On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+1}$$

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f.

2. Etablir les égalités suivantes :

   $$f(x) = \frac{4}{(x-3)(x+1)} = \frac{4}{(x-1)^2-4}$$

3. a. Justifier que, pour x appartenant à $\big]-\infty\,;-1\big[$, l'image de x est positive.

   b. Etablir que la fonction f est croissante sur $\big]-\infty\,;-1\big[$.

4. Dans un repère $\big(O\,;I\,;J\big)$ orthonormé, on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f :

   a. Pour tout nombre $h{\in}\mathbb{R}$ tel que les deux nombres $1{+}h$ et $1{-}h$ appartiennent à $\mathcal{D}_f$, vérifier l'égalité suivante :
   $f(1{-}h) = f(1{+}h)$

   b. En affichant la courbe $\mathscr{C}_f$ sur votre calculatrice, quelle propriété géométrique semble posséder la courbe $\mathscr{C}_f$?

Exercice F.26

1. On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est donnée par la relation :

   $$f(x) = \frac{x+2}{(2x-1)(3-x)}$$

   a. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f

   b. Etablir l'égalité suivante :

   $$f(x) = \frac{1}{2x-1} + \frac{1}{3-x}$$

   c. Montrer que pour tout $x{\in}\big]-\infty\,;-2\big]$, l'image de x par f est un nombre positif.

2. Soit g la fonction définie par :

   $$g : x \longmapsto \frac{4}{4x-2} - \frac{2}{2x+5}$$

   a. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g.

   b. Déterminer les valeurs de a et de b vérifiant la relation suivante :

   $$g(x) = \frac{12}{4{\cdot}(x-a)^2+b}$$

   c. Etablir le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $\Big]\dfrac{1}{2}\,;+\infty\Big[$

Exercice F.27

1. Démontrez les égalités :

   a. $1 + \dfrac{2}{x+1} = \dfrac{x+3}{x+1}$ pour $x{\neq}{-1}$.

   b. $\dfrac{3x^2-7x+6}{x-1} = 3x-4+\dfrac{2}{x-1}$ pour $x{\neq}1$.

   c. $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{2x}{x^2-1}$ pour $x{\neq}1$ et $x{\neq}{-1}$.

2. En utilisant les résultats de la question précédente, établir les affirmations suivantes :

   a. La fonction f définie par $x \longmapsto \dfrac{x+3}{x+1}$ est décroissante sur $]-1\,;+\infty[$.

b. La fonction g définie par $x \longmapsto \dfrac{2x}{x^2-1}$ est croissante sur $]1\,;+\infty[$.

G. Equations, inéquations et système:

Exercice G.1

Dire si les équations suivantes acceptent pour solution $x=2$:

a. $3x+1=2x-1$

b. $3(x+1)-3(2-x)=x+1$

c. $\dfrac{2x+1}{3x+4}=\dfrac{1}{2}$

d. $\sqrt{3x^2+4}=4$

Exercice G.2

Au travers de contre-exemple, montrer que les égalités suivantes sont fausses :

a. $3x+1=4x$

b. $(x+1)^2=x^2+1$

c. $(x+y)^2=x^2+y^2$

d. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{x+y}$

e. $\sqrt{x^2+y^2}=x+y$

Exercice G.3

Le diagramme ci-dessous présente la résolution d'une équation.

$5(x+2)+2x=3(x+5)+2$
$5x+10+2x=3x+15+2$
$7x+10=3x+17$
$7x=3x+17-10$
$7x=3x+7$
$7x-3x=7$
$4x=7$
$x=\dfrac{7}{4}$

Compléter chacune des étiquettes à l'aide d'une "*action*" mathématique.

Exercice G.4

Factoriser les expressions suivantes :

a. $(3x-1)(2x+1)+(5-x)(2x+1)$

b. $x(2-x)+(3x+1)(2-x)$

c. $(x+1)(x-1)-(2x+3)(x-1)$

d. $(3x+4)(2x-1)+4(3x+4)$

e. $(2x+4)(3-3x)+(2x+4)$

f. $(x+1)(3-2x)+(3-2x)^2$

Exercice G.5

1. Factoriser les expressions suivantes :

   a. $(5x+2)(3x+4)+(x-2)(3x+4)$

   b. $(3-x)(2x+4)-(3-x)(3x-4)$

   c. $(3x-1)^2+(3x-1)(5x+4)$

   d. $(5x+1)(7-3x)-(5x+1)$

2. Développer les expressions suivantes :

   a. $(5x+1)(1-2x)-2(3x-1)$

   b. $(x+2)(2x-1)-(3-x)(5x-1)$

   c. $(3x+2)(5x+1)-(5x-1)$

Exercice G.6

1. a. Trouver une relation algébrique entre les deux expressions :
   $3x-2 \quad ; \quad 6x-4$

   b. En déduire une factorisation de l'expression algébrique suivante :
   $A=(x+2)(3x-2)+(5x-2)(6x-4)$

2. a. Trouver une relation algébrique entre :
   $3-x \quad ; \quad x-3$

   b. En déduire une factorisation de l'expression algébrique suivante :
   $B=(2x+1)(3-x)-(2-2x)(x-3)$

3. a. Trouver une relation algébrique entre :
   $2x-1 \quad ; \quad 2-4x$?

   b. En déduire une factorisation de l'expression algébrique suivante :
   $C=(5-2x)(2x-1)+(2-4x)$

Exercice G.7

Factoriser les expressions suivantes :

a. $(3x+1)(2-x)+2(3x+1)(4x-3)$

b. $(5x+2)(6x+3)-(3-2x)(2x+1)$

c. $(7x-2)(5-x)+(4x-1)(x-5)$

d. $(12x-3)(7+2x)-(5-2x)(1-4x)$

Exercice G.8

Factoriser les expressions suivantes :

a. $(2x-1)(5-3x)-(5x-2)(5-3x)$

b. $(2x-3)(4-7x)-(3x-2)(7x-4)$

c. $(3x+2)(x+4)+(6x+4)(4x+1)$

d. $2(4x+6)(5-2x)+(x-3)(6x+9)$

e. $(3x-2)(5x+1)-(9x-6)^2$

f. $(3x+2)^2-(5x-5)(x+1)$

Exercice G.9

Chacune des expressions suivantes est factorisable. Donner la forme factorisée de chacune d'elle :

a. x^2-9

b. $(2x+1)(3x-1)-(x+3)(6x-2)$

c. $(2x-1)^2-4(2-x)^2$

d. $(x-1)(3x+2)+(2x+3)(1-x)$

e. $(7x-1)(5x-6)-(10x-12)$

f. $9x^2-12x+4+(4-3x)(3x-2)$

Exercice G.10

Factoriser les expressions suivantes :

a. $(2x-4)(3x+1)-(6x+2)(4x+1)$

b. $(2-6x)+(x+1)(3x-1)$

c. $(2x-8)(7x+1)-16+x^2$

Exercice G.11

Factoriser les expressions suivantes :

a. x^2-4x+4 b. $9x^2+12x+4$

c. x^2-9 d. $(2x+1)^2-(2x-1)^2$

Exercice G.12

Factoriser les expressions suivantes :

a. $(x+2)^2+(3x+3)(x-1)$

b. $(x+1)(3x+2)+(3x-1)(2x+1)$

c. $(2x-1)^2-(3x+3)(x-5)$

d. $(3x+1)(4x+5)+(3x+4)(5-x)$

Exercice G.13

Factoriser les expressions suivantes :

a. $(3x+2)(x-2)+(4-2x)(2x+3)$

b. $(6x-3)(2x+1)-2(2x-1)^2$

c. $(x+1)(5-2x)(3x-4)+3(2x-5)(6x-8)$

d. $4(3-2x)^2-9(x-3)^2$

Exercice G.14

Factoriser les expressions suivantes :

a. $(5x-1)(3x+1)+(5x-1)^2$

b. $(3x+1)(2-3x)+(2-3x)$

c. $(5x-15)(7-x)+(x-3)(2x+1)$

d. $(4-2x)(3x-1)+(x-2)(1-5x)$

e. $(x-2)(6x-4)+9x^2-12x+4$

f. $(x+2)(3x+2)-2x-1$

Exercice G.15

Résoudre les équations suivantes :

a. $(x+2)(3-x)+2(x-3)(2x-5)=0$

b. $(6-2x)(3x+2)=(3x-9)(x+2)$

Exercice G.16

1. Factoriser les expressions suivantes :

   a. $(5x+1)(6+4x)+(3x+9)(2x+3)$

   b. $(3-2x)(4x+1)+4x^2-12x+9$

   c. $(x+1)(5x+1)+4x(x-3)$

2. Résoudre les équations suivantes :

   a. $(4-2x)(3x+2)=3(2x+3)(x-2)$

   b. $(4x+3)(2-3x)+(2-6x)(3x-2)=0$

Exercice G.17

Résoudre les équations ci-dessous :

a. $10x^2-15x=(2x-3)(3x+1)$

b. $(3-x)(4x+2)-(6x+3)(5-2x)=0$

c. $(x+1)(2x-3)=4x^2-9$

d. $(3-2x)(x+1)+(6x-9)(3-4x)=0$

Exercice G.18

Résoudre par la méthode de votre choix les équations suivantes :

a. $(3x+1)(2-3x)-(5x-1)(3x+1)=0$

b. $(2x+4)(3-x)=(x+2)(5x-7)$

c. $(2x+3)(6x+7)+(2-4x)(3x+1)=3x-7$

d. $-(12x-2)(2-3x)=36x^2-12x+1$

Exercice G.19

Résoudre, par la méthode de votre choix, les équations suivantes :

a. $(3x-2)(10x+4)=(3-2x)(5x+2)$

b. $3(2x+4)^2=(6x-2)(2x+1)$

c. $(5-2x)(3x+4)-(5-2x)=0$

d. $(2x-2)^2+(x+6)(5x+2)=0$

Exercice G.20

Résoudre les équations suivantes :

a. $\dfrac{2x-1}{3} = 5x+1$ b. $x^2+2x+2 = (x+4)^2$

c. $(x+1)(2-x) = (2x-4)(5x-3)$

Exercice G.21

Résoudre, par la méthode de votre choix, les équations suivantes :

a. $(x-2)(3x+1) = 2(x-2)(x-5)$

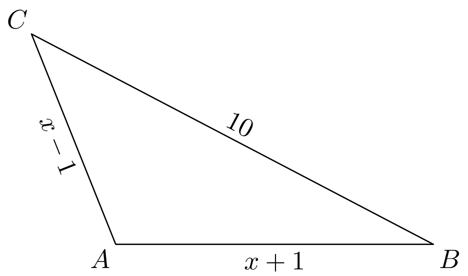
b. $(5-2x)(3x+1) + (4x+10)(2x-5) = 0$

c. $(2x+3)(8x-3) + (3-4x)(4x+1) = 0$

d. $(x+3)(2x+3) = x+1$

Exercice G.22

Soit x un nombre réel strictement supérieur à 9.
Déterminer la ou les valeurs de x pour lesquelles le triangle ABC est rectangle.



Exercice G.23

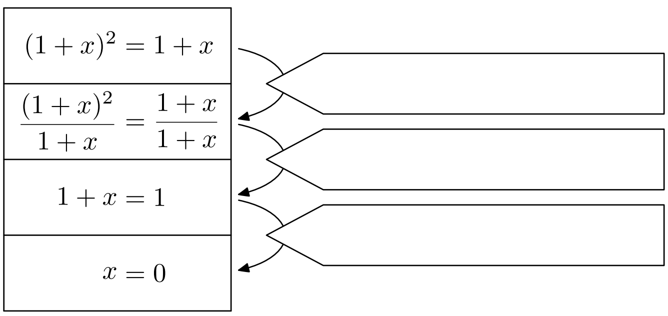
Voici ci-contre le travail d'un élève cherchant à résoudre l'équation : $(1+x)^2 = 1+x$

$$(1+x)^2 = 1+x$$
$$\frac{(1+x)^2}{1+x} = \frac{1+x}{1+x}$$
$$1+x = 1$$
$$x = 0$$
$$S = \{0\}$$

1. a. Vérifier que la valeur -1 est une solution de cette équation.

   b. Que peut-on dire de la résolution proposée par l'élève ?

2. Le diagramme ci-dessous représente les différentes étapes effectuées cet l'élève. Compléter les "*étiquettes*" en indiquant l'action effectuée par l'élève :



3. a. Pour quelles valeurs de x sont définies les deux expressions :
   $(1+x)^2 \quad ; \quad 1+x$

   b. Pour quelles valeurs de x sont définies les deux expressions :
   $\dfrac{(1+x)^2}{1+x} \quad ; \quad \dfrac{1+x}{1+x}$

   c. Expliquer d'où vient l'erreur faite par l'élève.

Exercice G.24

On souhaite résoudre l'équation :
$$(E) : \frac{(x-2)x}{x+1} = \frac{2x^2+1}{x+1}$$

1. Quel est le domaine de résolution de cette équation ?

2. Pour $x \neq -1$, établir l'égalité suivante :
$$\frac{2x^2+1}{x+1} - \frac{(x-2)x}{x+1} = x+1$$

3. Que peut-on dire de l'ensemble des solutions de (E) ?

Exercice G.25

Résoudre les équations suivantes :

a. $\dfrac{2}{x+1} - \dfrac{3}{2x-1} = 0$ b. $\dfrac{2x-1}{4x+1} - \dfrac{3x}{6x-1} = 0$

c. $\dfrac{2x}{4x+1} = \dfrac{x+1}{2x-1}$ d. $\dfrac{1-x}{2-x} = \dfrac{x+3}{x-1}$

Exercice G.26

On considère les deux équations :
$$(E) : \frac{-2x^2+7x-6}{x^2-5x+7} = 0 \quad ; \quad (F) : \frac{3-3x}{2x+2} + \frac{3x-2}{2x+3} = 0$$

1. a. Développer l'expression : $(2x-3)(2-x)$

   b. Résoudre l'équation (E).

2. a. Etablir l'égalité suivante :
$$\frac{3-3x}{2x+2} + \frac{3x-2}{2x+3} = \frac{5-x}{(2x+2)(2x+3)}$$

   b. Résoudre l'équation (F).

Exercice G.27

1. Factoriser les expressions suivantes :

   a. $(3x+2)(5-x) + (6x+4)$

   b. $(5-2x)(x+1) - 3x(2x-5)$

   c. $(5-2x) + (4x-10)(7-2x)$

   d. $-5(3x+2) - 5x(2x+1)$

2. Résoudre les équations suivantes :

   a. $(4x+2)(3x-1) + x(6x+3) = 0$

   b. $(3x+9)^2 = 2(2x+6)(3x-2)$

   c. $(-5x-4)(2x+1) = (-4x-3)(3x+2)$

   d. $(1-5x)(2x+1) = (1-3x)(3x+2)$

3. Résoudre les équations suivantes :

   a. $\dfrac{x}{3x+2} = \dfrac{5x}{2x+1}$ b. $\dfrac{4x-2}{2x-3} - \dfrac{6x-2}{3x+1} = 0$

Exercice G.28

On considère les deux équations suivantes :

$$(E) : \frac{x^2+2x+1}{x-1} = 0 \quad ; \quad (F) : \frac{x-5}{x-1} + \frac{4}{x+1} = 0$$

1. a. L'équation (E) est-elle définie pour $x=1$?

   b. Pour quelles valeurs de x, l'équation (F) n'est pas définie ?

2. Résoudre chacune de ces deux équations.

Exercice G.29

Résoudre les équations suivantes :

a. $(3x+1)(1-3x)+(6x+2)(3x-1)=0$

b. $(6x+1)(3x+1)+(2x+1)(2-9x)=0$

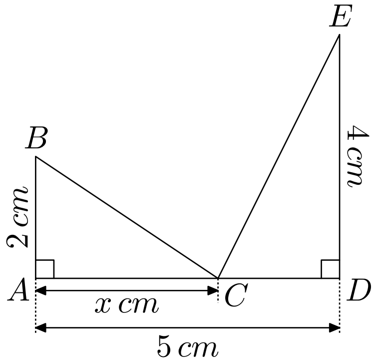
c. $\dfrac{x+2}{-3x-3}+\dfrac{x+2}{4x+5}=0$

d. $(x+1)(3x-2)=(x+1)^2$

Exercice G.30

Dans le plan, on considère deux triangles ABC et EDC rectangles respectivements en A et D tels que les points A, C, D soient alignés.

On note x la distance, en centimètres, séparant les points A et C.



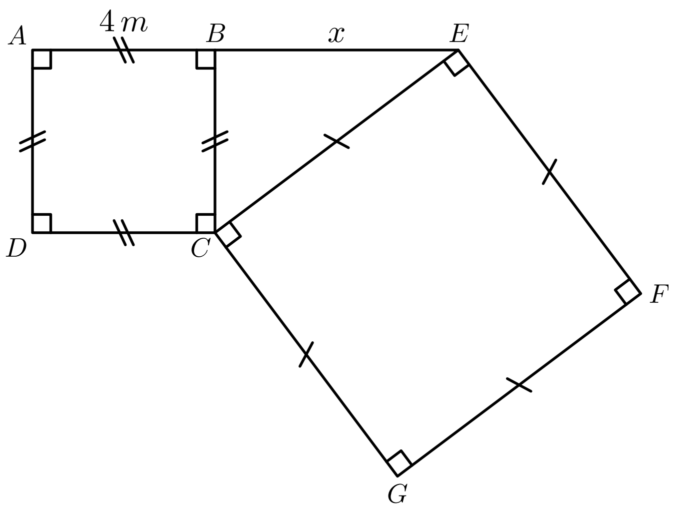
1. Exprimer en fonction de x la longueur du segment $[BC]$.

2. a. Résoudre l'équation : $x^2+4=(5-x)^2+16$

   b. En déduire la longueur du segment $[AC]$ afin que les longueurs CB et CE soient égales. Justifier votre démarche.

Exercice G.31

Un champ est composé de deux carrés et d'un triangle rectangle. On a représenté ce champ dans la figure ci-dessous :



1. Justifier la factorisation suivante :
   $x^2+2x-168=(x+14)(x-12)$

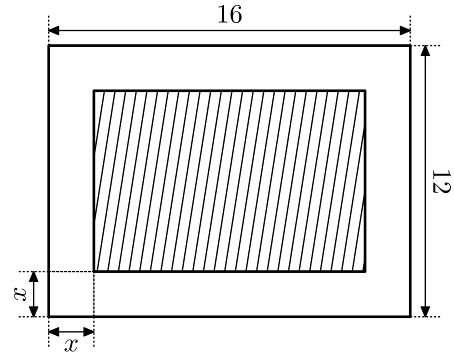
2. a. Justifier que le carré $CEFG$ a pour aire $(x^2+16)\,m^2$.

   b. En déduire la valeur de la longueur x afin que l'aire totale du champ soit de $200\,m^2$

Exercice G.32

Sur un ancien terrain vague de forme rectangulaire de longueur $16\,m$ et $12\,m$, la municipalité souhaite construire un jardin d'enfants avec une allée fqisant le tour l'aire de jeu :

L'aire de jeu est représentée ci-dessous par la partie hachurée :



1. Sans justification, préciser les valeurs possibles de la variable x pour ce problème.

2. a. Justifier que l'aire de jeu mesure, en fonction de x :
   $4x^2-56x+192$

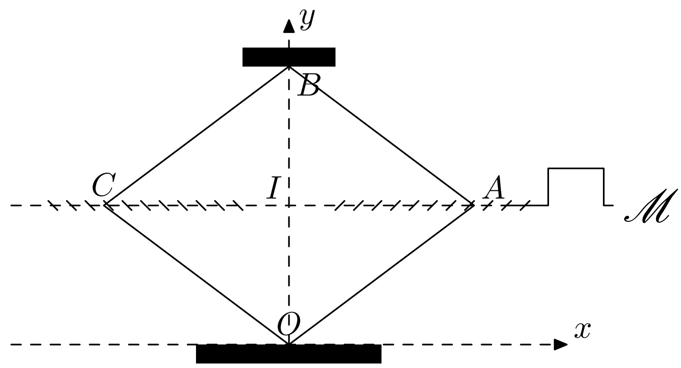
   b. Justifier que l'aire de l'allée mesure, en fonction de x :
   $56x-4x^2$

3. a. Etablir l'égalité suivante :
   $8x^2-112x+192=8(x-12)(x-2)$

   b. Déterminer les possibilités de largeur de l'allée afin que l'aire de jeu ait la même aire que l'allée.

Exercice G.33

La figure ci-dessous est le schéma d'un cric de voiture.



Celui-ci est constitué d'un losange déformable $OABC$, le point O étant le point d'appui sur le sol et le point B étant le point par lequel la voiture est soulevée.

A chaque tour de la manivelle $\mathscr{M}$, les écrous A et C se rapprochent *(ou s'éloigne)* de $2\,cm$, ce qui fait monter *(ou descendre)* l'appui B, selon l'axe (Oy).

On donne : $OA=OC=AB=BC=25\,cm$

Dans le repère orthonormal $(O\,;\,x\,;\,y)$ d'unité un centimètre, x_A désigne l'abscisse du point A et varie de 0 à 25.
L'ordonnée du point B est notée y_B :

Pour $x_A=0$, on a : $y_B=50$;

Pour $x_A=25$ on a : $y_B=0$.

1. Démontrer que les valeurs x_A et y_B vérifient la relation :
   $y_B = 2\sqrt{625-x_A^2}$

2. a. Déterminer la valeur de y_B lorsque x_A est égal à 7.

b. Déterminer la valeur de x_A lorsque y_B est égal à 40.

3. Supposons que le cric est fermé ; la hauteur du point B est alors de $0\,cm$:

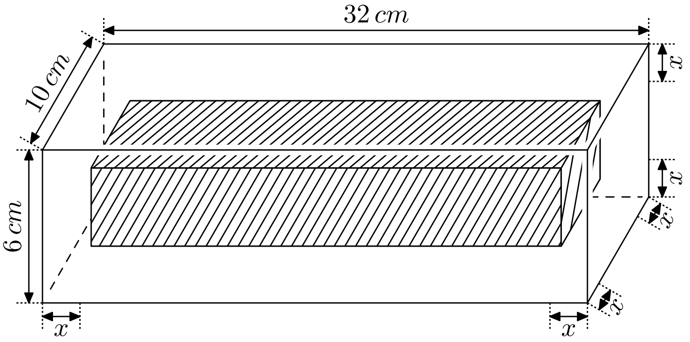
a. Lorsque le cric est complétement fermé, combien de tours de manivelles permettent d'atteindre une hauteur de $24\,cm$ pour le point B ?

b. Combien de tours supplémentaire faut-il pour doubler la hauteur du point B ?

Exercice G.34

Un atelier possède un bloc de marbre de forme parallélépipède et de dimensions : $32\,cm$ de long, $10\,cm$ de profondeur et de $6\,cm$ de hauteur.

On souhaite récupérer le “*coeur*” de ce bloc. Pour se faire, on rabotte chaque côté de ce pavé droit d'une longueur de $x\,cm$:



1. Donner les valeurs possibles prises par la variable x.

2. a. Déterminer le volume du “*coeur*” de ce bloc de marbre.

b. En déduire le volume de la partie rabotée.

3. a. Développer : $-16{\cdot}(x-1)(x-8)(x-15)$

b. Pour quelle valeur de x, le volume de la partie rabotée est égale au volume du “*coeur*” de cette pièce.

Exercice G.35

1. Pour chacune des inéquations ci-dessous, représenter sur une droite graduée l'ensemble des nombres x solutions de l'inéquation :

a. $-1 \leqslant x \leqslant 2$ b. $\sqrt{2} \leqslant x < \sqrt{3}$

c. $x > 9$ d. $-5 > x$

2. Reprendre les inéquations ci-dessus en écrivant leur ensemble des solutions sous la forme d'un intervalle.

Exercice G.36

1. Parmi les inéquations suivantes, lesquelles acceptent le nombre 9 comme solution :

a. $-3x+2 \geqslant 0$ b. $5(x+9) > 0$

c. $\dfrac{x+1}{4} \geqslant -3\times\dfrac{x-2}{3}$ d. $2 > x$

2. Résoudre les inéquations suivantes

a. $-3x+7 \leqslant x+2$ b. $-6x+1 > 0$

c. $-\dfrac{x}{4} < 5$ d. $-3(x+5) < x+5$

e. $-3x+7 \leqslant 9-x$ f. $\dfrac{x-1}{6}+\dfrac{x+1}{3} < 2$

g. $x+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x}{6} \leqslant \dfrac{x+1}{3}+\dfrac{2x-3}{6}$

Exercice G.37

Résoudre les inéquations suivantes :

a. $(x+1)^2 > 0$ b. $(x+1)^2 \geqslant 0$

c. $(x+1)^2 < 0$ d. $x^2+1 \leqslant 0$

e. $x^2-4 < (x+2)^2$ f. $(x+1)^2-(x-1)^2 \geqslant 0$

Exercice G.38

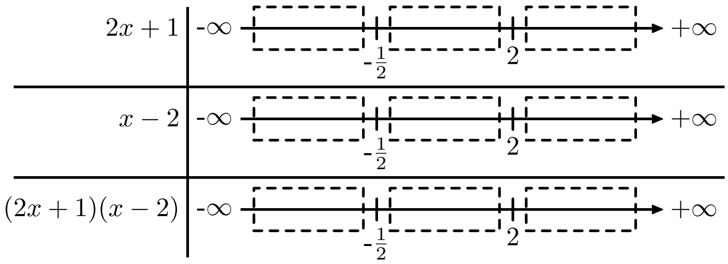
1. On considère la fonction f définie par la relation : $f(x) = 2x^2-3x-2$

Dans cette question, nous allons étudier le signe de la fonction f.

a. Etablir l'égalité : $f(x) = (2x+1)(x-2)$.

b. Résoudre les deux inéquations suivantes :
$2x+1 < 0$; $x-2 < 0$

c. Dans le tableau ci-dessous et pour les deux facteurs $2x{+}1$ et $x{-}2$, colorier :
en bleu les intervalles sur lesquels le facteur est positif ;
en rouge les intervalles sur lesquels le facteur est négatif.



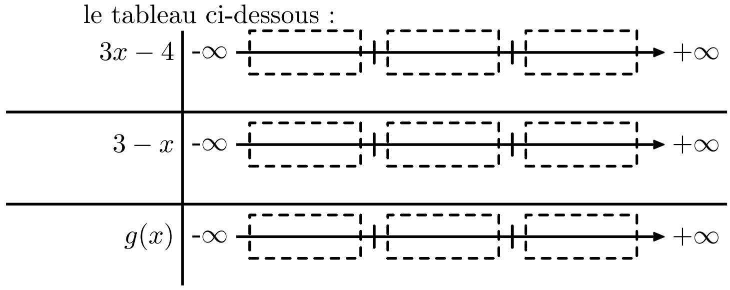
d. Compléter la troisième ligne en utilisant la règle des signes d'un produit.

e. Résoudre l'inéquation : $f(x) \leqslant 0$.

2. On considère la fonction g dont l'image d'un nombre x est donné par la relation :
$g(x) = -3x^2+13x-12$

a. Etablir l'égalité suivante : $g(x) = (3x-4)(3-x)$

b. De même que pour la question précédente, compléter le tableau ci-dessous :



c. En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation $g(x){<}0$

Exercice G.39

1. a. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :
$4-2x \geqslant 0 \quad ; \quad 5x+15 \geqslant 0$

   b. En déduire les solutions des inéquations :
$4-2x < 0 \quad ; \quad 5x+15 < 0$

2. a. Dans les deux premières lignes du tableau de signe, indiquer le signe des expressions sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$4-2x$	
$5x+15$	
$(4-2x)(5x+15)$	

   b. Compléter la troisième ligne du tableau afin d'indiquer le signe du produit $(4-2x)(5x+15)$ sur $\mathbb{R}$.

   c. En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation :
$(4-2x)(5x+15) \geqslant 0$

Exercice G.40

On considère l'expression algébrique suivante :

$$\frac{2x+7}{x+3} - \frac{4x+4}{2x+1}$$

1. Réduire l'expression précédente au même dénominateur.
2. Dresser le tableau de signe de cette expression.
3. En déduire les solutions de l'inéquation :
$$\frac{2x+7}{x+3} \leqslant \frac{4x+4}{2x+1}$$

Exercice G.41

Compléter les tableaux de signe ci-dessous :

1.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$2x+1$	
$3+x$	
$(2x+1)(3+x)$	

2.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$2-x$	
$4x-3$	
$(2-x)(4x-3)$	

3.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$2+x$	
$2-x$	
$\dfrac{2+x}{2-x}$	

4.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$4x+1$	
$x-1$	
x	
$\dfrac{(4x+1)(x-1)}{x}$	

Exercice G.42

Compléter les tableaux de signe ci-dessous :

1.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$1-x$	
$2x+1$	
$(1-x)(2x+1)$	

2.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$x-3$	
$-2x+4$	
$(x-3)(-2x+4)$	

3.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$x+5$	
$-2x-8$	
$\dfrac{x+5}{-2x-8}$	

4.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$x-1$	
$4-x$	
$-x-1$	
$\dfrac{(x-1)(4-x)}{-x-1}$	

Exercice G.43

Résoudre les inéquations suivantes :

a. $(x+4)(1-2x) \geqslant 0$ $\qquad$ b. $\dfrac{x^2-1}{x+2} < 0$

Exercice G.44

On considère la fonction f définie par la relation suivante :

$$f : x \longmapsto \frac{x+1}{-2x^2+7x-3}$$

1. Etablir l'égalité suivante : $-2x^2+7x-3 = (2x-1)(3-x)$
2. Donner l'ensemble de définition de la fonction f.
3. a. Dresser le tableau de signe de la fonction f sur son ensemble de définition.

   b. Résoudre l'inéquation : $f(x) \geqslant 0$

Exercice G.45

Résoudre les inéquations suivantes :

a. $(x+1)(1-x) > (2x-1)(x+1)$ b. $x^3 - x \leqslant 0$

c. $(x+1)^2 - (x+1)(2-x) \geqslant 0$ d. $\dfrac{x+1}{x-1} < -1$

Exercice G.46

A l'aide d'un tableau de signe, résoudre les inéquations suivantes :

a. $(3-2x)(5x+2) \geqslant 0$ b. $(4x+4)(x+2) < -1$

c. $\dfrac{3x+1}{-2x+1} > 1$ d. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+5} \geqslant 0$

e. $(3x-2)(4-2x) > 2(3-2x)(x-2)$

Exercice G.47

1. On considère l'équation :

$$(E)\ :\ (3x-1)(4x+5) - 3(3-2x)(2-6x) > 0\ :$$

a. Factoriser l'expression :
$(3x-1)(4x+5) - 3(3-2x)(2-6x)$.

b. Résoudre l'inéquation (E).

2. a. Etablir la factorisation :
$2x^2 + 2\sqrt{6}x + 3 = (\sqrt{2}x + \sqrt{3})^2$

b. Résoudre l'inéquation suivante :

$$(F)\ :\ \frac{2x^2 + 2\sqrt{6}x + 3}{(4x-1)(3-x)} < 0$$

Exercice G.48

Résoudre les inéquations suivantes :

a. $(3x+2)(2-3x) \geqslant (3x+2)(5x-2)$

b. $\dfrac{9x^2+36x+36}{2x-3} < 0$

c. $\dfrac{4(2x+1)}{4x-1} + \dfrac{2-4x}{2x+3} \geqslant 0$

Exercice G.49

Résoudre les inéquations suivantes :

a. $\dfrac{3x-2}{6} + \dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{1}{4} + \dfrac{5}{2}x$

b. $(3x-4)(5-2x) \geqslant (4x-10)(2-3x)$

c. $\dfrac{5x+1}{2x-1} + \dfrac{3x+3}{x+1} \geqslant 0$

Exercice G.50

Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

a. $\dfrac{2x-4}{4x+1} \leqslant \dfrac{3x+5}{6x}$ b. $\dfrac{x^2-5}{3x^2+2\sqrt{3}x+1} \leqslant 0$

Exercice G.51

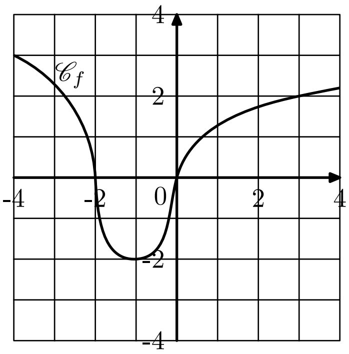
Résoudre les inéquations suivantes :

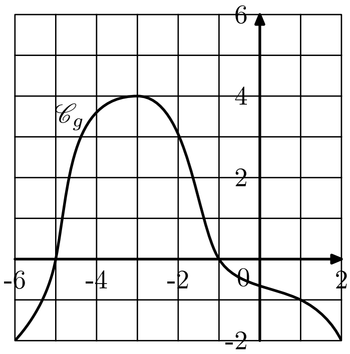
a. $(3x+1)(4-2x) \geqslant 0$ b. $\dfrac{(5-2x)(x-1)}{3x-2} > 0$

c. $\dfrac{6-2x}{2x+4} \leqslant \dfrac{x-3}{5-x}$ d. $x(4x-3) > (x-1)(3x+4)$

Exercice G.52

On représente ci-dessous les représentations graphiques des fonctions f et g définies respectivement sur $[-4\,;\,4]$ et $[-6\,;\,2]$





1. Déterminer, graphiquement, les solutions des inéquations :
$f(x) \geqslant 0 \quad ; \quad g(x) \geqslant 0$

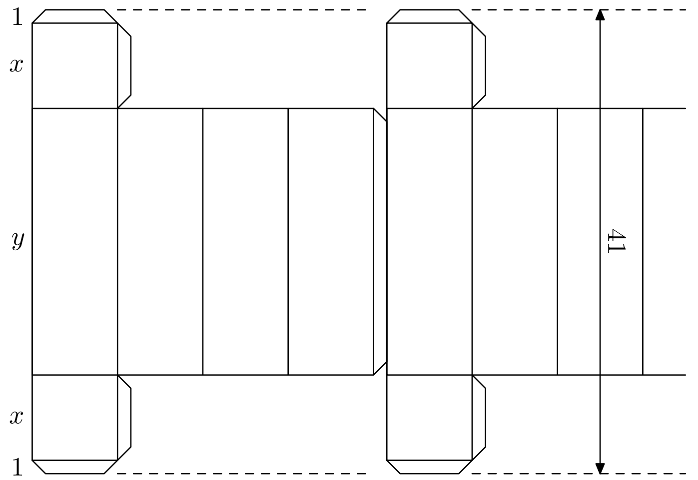
2. Dresser les tableaux de signes des fonctions f et g :

x	-4 $\qquad\qquad$ 4
$f(x)$	

x	-6 $\qquad\qquad$ 2
$g(x)$	

Exercice G.53

Un fabricant de boîtes en carton dispose, pour sa fabrication, de rouleaux donnant une bande de carton de 41 cm de large dans laquelle il trace et découpe les patrons de boîtes avant de les coller. Il dispose ses patrons de la manière indiquée dans le dessins ci-dessous :



Les boîtes, en forme de pavés droits, comportent deux faces carrées de $x\,cm$ de côté, munies de deux languettes de 1 cm de large pour le collage, et quatre autres faces dont les dimensions en cm sont x et y, ainsi qu'un rabat pour la fermeture.

1. a. Donner une expression de y en fonction de x.

b. Justifier que la valeur de x appartient à l'intervalle $]0\,;\,19{,}5[$.

2. Démontrer que le volume $\mathcal{V}$, en cm^3, de la boîte est donné, en fonction de x, par la formule :
$\mathcal{V} = 39x^2 - 2x^3$

3. a. Déterminer l'expression du polynôme P vérifiant l'égalité :
$39x^2 - 2x^3 - 972 = (x-18)(x-6)\times P$

b. En déduire les valeurs de x pour lesquelles le volume $\mathcal{V}$ est supérieure à $972\,cm^3$.

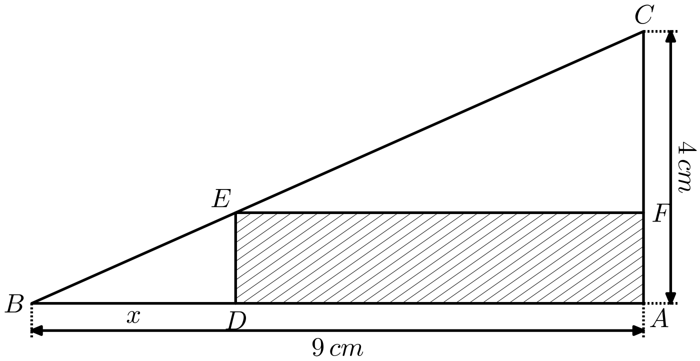
4. a. Déterminer l'expression du polynôme Q vérifiant l'égalité : $\mathcal{V}(x)-2197=(-2x-13)\times Q$

b. En déduire le tableau de signe de l'expression : $\mathcal{V}(x)-2197$.

c. Donner le volume maximal que le fabricant peut obtenir avec ce type de bôite; pour quelle valeur de x, ce maximum est-il atteint ?

Exercice G.54

On considère le triangle ABC rectangle en A tel que :
$AB=9\,cm$; $AC=4\,cm$



On considère un point D appartenant au segment $[AB]$ et on note x la longueur du segment $[BD]$. On construit à partir du point D un rectangle $DEFA$ tel que :
$E\in[BC]$; $F\in[AC]$

On note $\mathcal{A}$ l'aire du rectangle $DEFA$.

1. a. Déterminer l'expression de la longueur FA en fonction de x.

b. Justifier, briévement, que le nombre réel x appartient à l'intervalle $\big[0\,;9\big]$.

2. Etablir que l'aire $\mathcal{A}$ s'exprime en fonction de x par :
$$\mathcal{A}(x)=4x-\frac{4}{9}\cdot x^2$$

3. a. Dresser le tableau de variation de la fonction $\mathcal{A}$ sur l'intervalle $\big[0\,;9\big]$.

b. Quelle est l'aire maximale atteint par l'aire $\mathcal{A}$?

4. On souhaite connaître les valeurs de x pour lesquelles l'aire $\mathcal{A}$ ait supérieure ou égale à $5\,cm^2$:

a. Etablir la factorisation suivante :
$$-4x^2+36x-45=(2x-15)(3-2x)$$

b. Résoudre l'inéquation : $\mathcal{A}(x)\geqslant 5$.

Exercice G.55

1. On considère les deux droites (d) et (d') d'équations cartésiennes :

(d) : $2x-y+1=0$; (d') : $3x+y-2=0$

a. Résoudre le système :
$$\begin{cases} 2x-y+1=0 \\ 3x+y-2=0 \end{cases}$$

b. Quelles sont les positions relatives des droites (d) et (d') ?

2. Résoudre les deux systèmes déquations suivant :

a. $\begin{cases} 6x-3y+9=0 \\ -4x+2y-6=0 \end{cases}$ b. $\begin{cases} 2x+6y-\ \ 7=0 \\ -3x-9y+12=0 \end{cases}$

3. Dans chaque question, en déduire la position relative des deux droites :

a. Δ : $2x+6y-8=0$; Δ' : $-3x-9y+12=0$

b. δ : $6x-3y+9=0$; δ' : $-4x+2y-6=0$

Exercice G.56

1. On souhaite résoudre le système :
$$(S) : \begin{cases} 3x-2y+\ \ 2=0 \\ \ \ x+4y-11=0 \end{cases}$$

a. Déteminer à partir de chacune des deux équations, l'expression réduite de leur droite associée.

b. Tracer dans le repère les deux droites (d_1) et (d_2) d'équations cartésiennes respectives :
$3x-2y+2=0$; $x+4y-11=0$

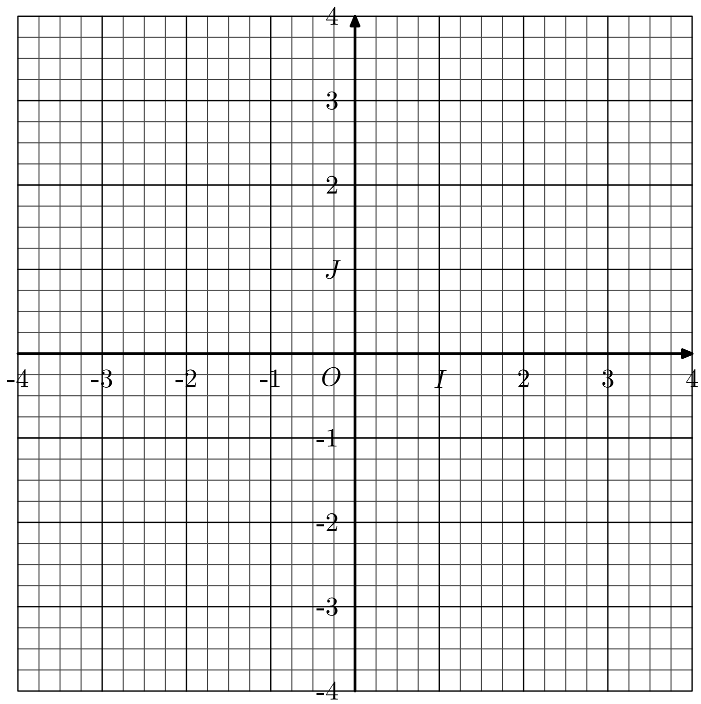
c. En déduire graphiquement la solution de (S).

2. Résoudre de même le système suivant :
$$(S') : \begin{cases} 7x+4y-1=0 \\ -3x+\ \ y-5=0 \end{cases}$$

On notera (D_1) et (D_2) les droites associés à ces deux équations cartésiennes.

3. a. Déterminer les équations réduites de ces deux droites :
(Δ_1) : $x-2y+1=0$; (Δ_2) : $-2x+4y-3=0$

b. Que peut-on dire des solutions du système déquations :
$$\begin{cases} x-2y+1=0 \\ -2x+4y-3=0 \end{cases}$$



Exercice G.57

Sur la ligne de train Lyon-Marseille :
Un TGV part de Lyon à destination de Marseille à $9h\,30$ et roule à la vitesse constante de $300\,{}^{km}/_{h}$.

Un train Grande-Ligne part de Marseille pour relier Lyon à $9h$ et roule à la vitesse constante de $150\,{}^{km}\!/_{h}$.

A quelle heure les deux trains vont se croiser ? *(La distance Lyon-Marseille est de $255\,km$)*

Indication :

On note x le temps écoulé en heures à partir de $9h\,30$.

On note $L(x)$ la distance parcourue par le train partant de Lyon rejoignant Marseille à l'instant x.

On note $M(x)$ la distance à l'intstant x restant à parcourir par le train partant de Marseille et reliant Lyon.

Exercice G.58

1. On considère les deux droites (d) et (d') d'équation cartésienne :
(d) : $6x-15y+24=0$; (d') : $-4x+10y+16=0$
   a. Justifier que les droites (d) et (d') sont parallèles.
   b. (d) et (d') sont-elles parallèles-confondues ou parallèles-distinctes ? Justifier votre réponse.
   c. Que peut-on dire de l'ensemble de solution du système ci-dessous :
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 6x & - & 15y & + & 24 & = & 0 \\ -4x & + & 10y & + & 16 & = & 0 \end{array}\right.$$
2. On considère les deux droites (Δ) et (Δ') d'equation cartésienne :
(Δ) : $5x-2y+2=0$; (Δ') : $x+y-1=0$
   a. Justifier que les droites (Δ) et (Δ') ne sont pas parallèles.
   b. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de ces deux droites.

Exercice G.59

1. Résoudre le système : $\left\{\begin{array}{rcrcl} x & - & y & = & 8 \\ 7x & + & 5y & = & 104 \end{array}\right.$
2. Une bibliothèque achète 7 DVD et 5 livres. Le prix total est de 104 euros. Un livre coûte 8 euros de moins qu'un DVD.
   a. Quel est le prix d'un DVD ?
   b. Quel est le prix d'un livre ?

Exercice G.60

1. On considère le système d'équations linéaires ci-dessous :
$$(\mathcal{S}_1) : \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 45{\cdot}x & + & 36{\cdot}y & + & 24 & = & 0 \\ 75{\cdot}x & + & 60{\cdot}y & + & 40 & = & 0 \end{array}\right.$$
Déterminer le nombre de solutions de ce système. Justifier votre démarche.
2. On considère le système d'équations linéaires ci-dessous :
$$(\mathcal{S}_2) : \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 9x & - & 6y & - & 18 & = & 0 \\ 21x & - & 14y & + & 42 & = & 0 \end{array}\right.$$
Déterminer le nombre de solutions de ce système. Justifier votre démarche.
3. On considère le système d'équations linéaires ci-dessous :
$$(\mathcal{S}_3) : \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2{\cdot}x & + & 3{\cdot}y & - & 1 & = & 0 \\ -3{\cdot}x & - & 5{\cdot}y & + & 3 & = & 0 \end{array}\right.$$
   a. Déterminer le nombre de solutions de ce système. Justifier votre démarche.
   b. Déterminer le couple solution de ce système.

Exercice G.61

1. Résoudre le système suivant :
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & -2 \\ 3x & + & y & + & 2z & = & -1 \\ x & - & y & + & 3z & = & 3 \end{array}\right.$$
(On montrera que ce système admet un unique triplet solution).
2. Résoudre le système suivant :
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & - & y & + & 2z & = & 2 \\ -x & + & 5y & - & 9z & = & -5 \end{array}\right.$$
(On montrera que ce système n'admet aucune solution)
3. Résoudre le système suivant :
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 5 \\ 2x & - & y & + & 4z & = & -2 \\ 5x & - & y & + & 7z & = & 1 \end{array}\right.$$
(On montrera que ce système admet une infinité de solution qu'on écrira sous la forme $(\dots\,;\,\dots\,;z)$ où $z\in\mathbb{R}$)

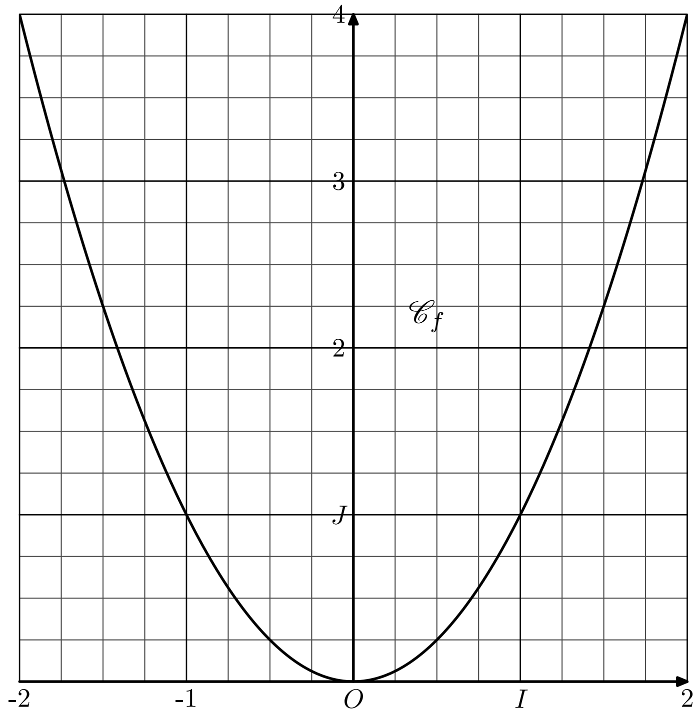
Exercice G.62

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :
$$f(x)=\frac{-4{\cdot}x^2-2}{x^2+1}$$

1. Démontrer l'égalité suivante : $f(x)=\dfrac{2}{x^2+1}-4$
2. a. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left]-\infty\,;0\right[$.
   b. Etablir le sens de variation sur l'intervalle $\left]0\,;+\infty\right[$ de la fonction f.
   c. Dresser le tableau de variation de la fonction f *(on indiquera les valeurs des extrémums locaux).*
3. Déduire de la question précédente, la valeur maximale de la fonction f.
4. a. Déterminer algébriquement, les antécédents du nombre -3 par la fonction f.
   b. Résoudre l'équation suivante : $f(x)=-x-2$

Exercice G.63

On considère la fonction carré notée f dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ dans une repère $\big(O\,;I\,;J\big)$ est donnée ci-dessous :



On répondra graphiquement et sans justification aux questions suivantes :

1. Donner un encadrement de l'image de x par la fonction f dans chacun des cas suivant :

   a. $x > 1$ b. $x \leqslant -3$ c. $-1 \leqslant x < 3$

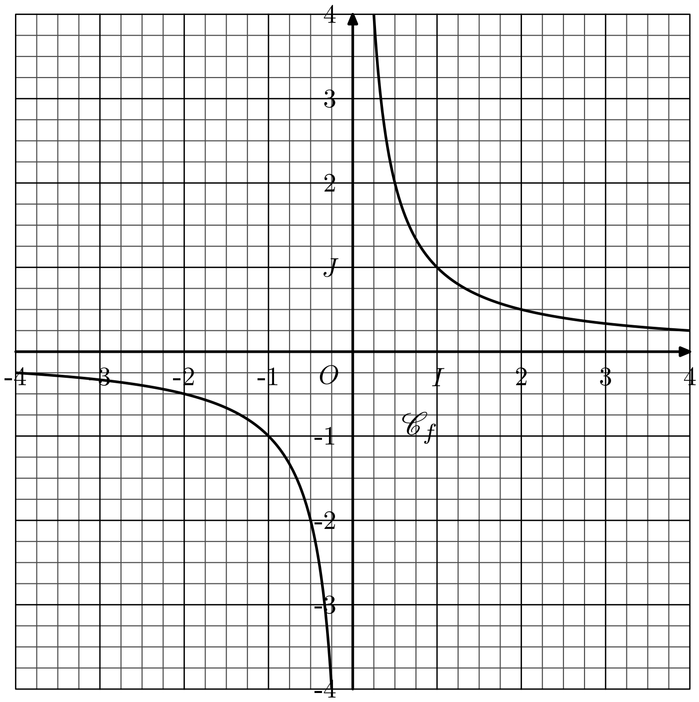
2. Déterminer l'ensemble des solutions des équations et inéquations suivantes :

   a. $x^2 = 2$ b. $x^2 = 0$ c. $x^2 = -1$

   d. $x^2 \geqslant 1$ e. $x^2 < 3$ f. $2 \leqslant x^2 \leqslant 4$

Exercice G.64

On considère la fonction inverse notée f dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ dans un repère $(O\,;I\,;J)$ est donnée ci-dessous :



On répondra graphiquement et sans justification aux questions suivantes :

1. Donner un encadrement de l'image de x par la fonction f dans chacun des cas suivants :

   a. $x > 3$ b. $x < -1$ c. $0 < x < \dfrac{1}{2}$

2. Déterminer l'ensemble des solutions des équations et inéquations suivantes :

   a. $\dfrac{1}{x} = 2$ b. $\dfrac{1}{x} = 0$ c. $\dfrac{1}{x} = -4$

   d. $\dfrac{1}{x} \geqslant 1$ e. $\dfrac{1}{x} < -3$ f. $\dfrac{1}{x} \leqslant 1$

Exercice G.65

Résoudre les équations suivantes :

a. $x^2 + 4x - 5 = 0$ b. $2x^2 - 13x + 15 = 0$

c. $x^2 + x + 1 = 0$ d. $x^2 + 5x + 2 = 0$

e. $-3x^2 + 6x - 2 = 0$ f. $3x^2 - 2x + 1 = 0$

Exercice G.66

Résoudre les q́uations suivantes :

a. $x^2 + 2x - 15 = 0$ b. $3x^2 - 5x + 7 = 0$

c. $3x^2 - 24x + 48 = 0$ d. $6x^2 - 7x + 2 = 0$

e. $2x^2 + 3x + 3 = 0$ f. $x^2 - 2x - 6 = 0$

Exercice G.67

Déterminer les racines, sous forme simplifiée, des polynômes suivants :

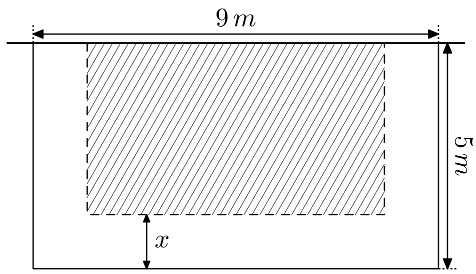
a. $2x^2 - 3x - 9$ b. $5x^2 - 8x + 5$

c. $2x^2 - 8x + 8$ d. $x^2 + 2x - 1$

Exercice G.68

Adossé à sa maison, Jean possède un jardin de forme rectangulaire ayant pour dimensions $9\,m$ et $5\,m$.

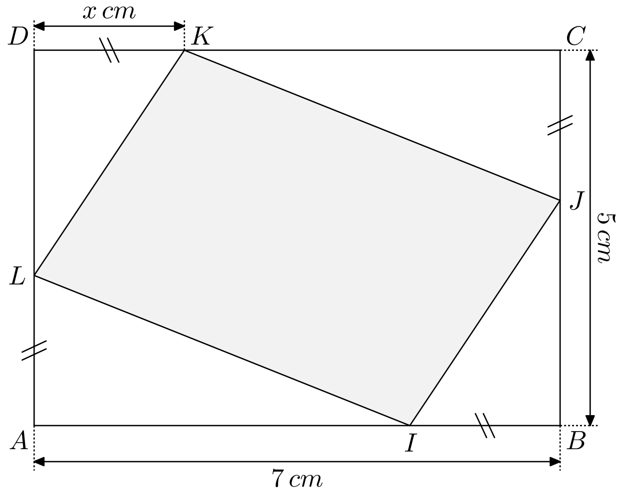
Il souhaite construire sur trois des côtés de ce jardin une allée ayant la même largeur et il plantera de la pelouse sur le reste du jardin. Il propose le schéma ci-dessous où la partie hachurée est l'espace de la pelouse



Quelle doit-être la largeur de l'allée pour que l'ensemble de la pelouse ait une surface de $10\,m^2$?

Exercice G.69

On considère la figure ci-dessous :



Quel doit-être la valeur de x pour que la figure grisée ait une aire de $25\,cm^2$?

Exercice G.70

Factoriser les expressions suivantes :

a. $5x^2 - x - 4$ b. $-2x^2 - 3x - 1$

c. $-x^2 + 2x - 1$ d. $4x^2 + x - 3$

e. $4x^2 + 4x - 5$ f. $x^2 - 2x - 4$

Exercice G.71

1. Factoriser les expressions suivantes :

   a. $2x^2 - 3x - 2$ b. $12x^2 - 12x + 3$

2. Simplifier la fraction rationnelle suivante :
   $\dfrac{x^2 - x - 2}{2x^2 - 3x - 2}$

Exercice G.72

Simplifiez l'expression des fractions rationnelles ci-dessous :

a. $\dfrac{3x - 1}{3x^2 + 2x - 1}$ b. $\dfrac{6x^2 - 5x + 1}{1 - 4x^2}$

c. $\dfrac{3x^2 - 6x - 6}{x^2 - (\sqrt{3} + 2)x + (\sqrt{3} + 1)}$

Exercice G.73

Etablir le tableau de signes des polynomes du second degré suivant :

a. $x^2 + 3x + 4$ b. $-8x^2 + 32x + 32$

c. $4x^2 + 3x - 10$ d. $-5x^2 - 3x - 1$

e. $4x^2 - 16x + 16$ f. $2x^2 + 11x + 5$

Exercice G.74

Résoudre les inéquations suivantes :

a. $-10x^2 - 13x + 3 \geqslant 0$ b. $(3x + 1)(x^2 + x + 1) < 0$

c. $\dfrac{x^2 - x}{2x - 1} \leqslant 0$ d. $\dfrac{18x^2 - 12x + 2}{3x^2 + x - 2} > 0$

e. $\dfrac{x^2 + 2x - 5}{x} \geqslant 0$ f. $\dfrac{x - 2}{x + 1} - \dfrac{3x - 1}{x - 1} < 0$

Exercice G.75

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\dfrac{-3x^2 + 4x + 4}{5x^2 + x - 4} \geqslant 0$

Exercice G.76

1. a. Etablir que le polynôme $P(x) = 2x^2 - x + 1$ est strictement positif sur $\mathbb{R}$.

   b. En déduire le signe du polynôme :
   $Q(x) = (2x^2 - x + 1)^2 + 3\cdot(2x^2 - x + 1) + 1$

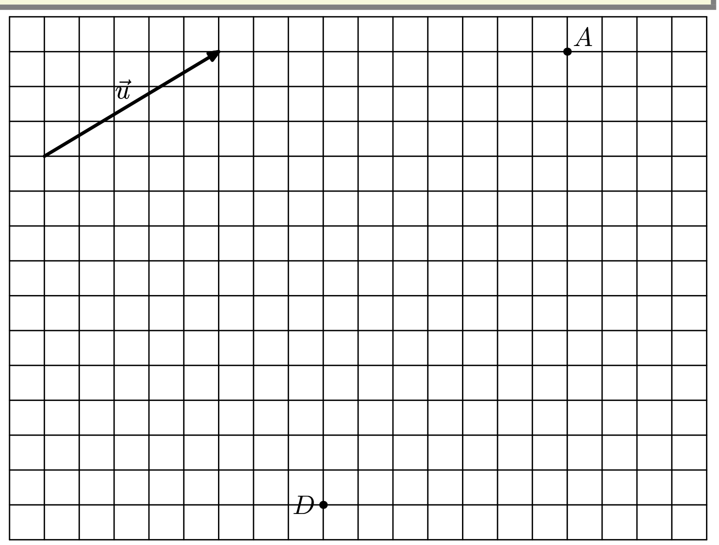
2. Justifier que l'équation ci-dessous n'admet aucune solution :
   $4x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 5x + 5 = 0$

H. Les vecteurs:

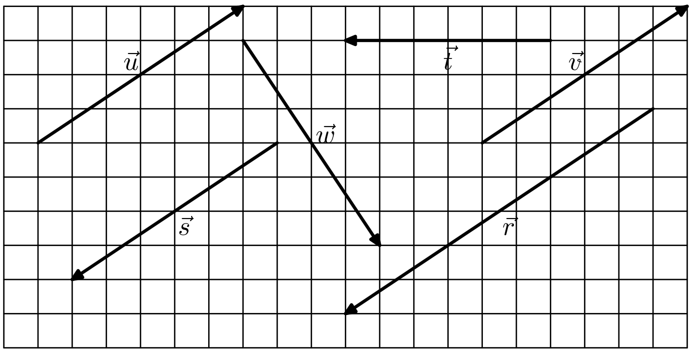
Exercice H.1

Dans le quadrillage ci-dessous :

1. Tracer un représentant du vecteur $\vec{u}$ ayant pour extrémité le point A.
2. Tracer un représentant du vecteur $\vec{u}$ ayant pour origine le point D.
3. Tracer un vecteur $\vec{v}$ de même longeur que $\vec{u}$ mais différent de $\vec{u}$.
4. Tracer un vecteur $\vec{w}$ de même direction, de même sens que $\vec{u}$, mais différents de $\vec{u}$.
5. Tracer un vecteur $\vec{s}$ de même direction et de même longeur que $\vec{u}$ mais différent de $\vec{u}$.



Exercice H.2

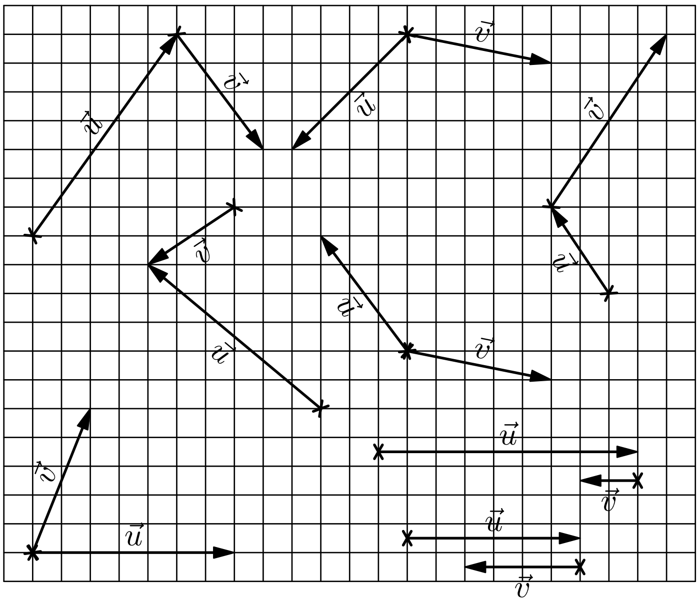


Compléter le tableau ci-dessous :

Par rapport à $\vec{u}$	Direction	Sens	Longueur
$\vec{v}$			
$\vec{w}$			
$\vec{r}$			
$\vec{s}$			
$\vec{t}$			

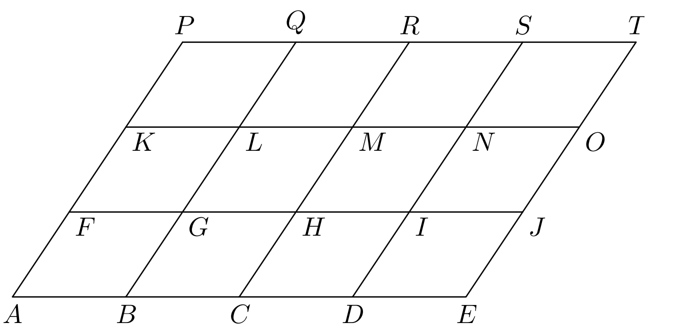
Exercice H.3

Déterminer dans les 8 cas ci-dessous la somme des deux vecteurs :



Exercice H.4

On considère le dessin ci-dessous :



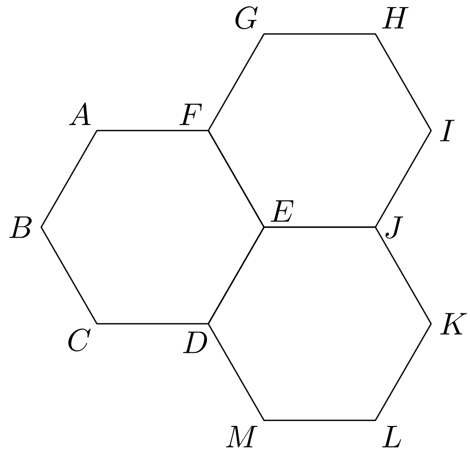
Recopier et compléter convenablement les pointillés :

a. $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{KB} = \overrightarrow{K\ldots}$ b. $\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{IQ} = \overrightarrow{\ldots P}$

c. $\overrightarrow{UM} + \overrightarrow{\ldots} = \vec{0}$ d. $\overrightarrow{FL} + \overrightarrow{\ldots I} = \overrightarrow{FN}$

Exercice H.5

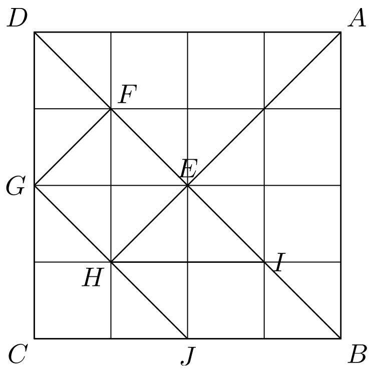
La figure ci-contre est composée de trois hexagones réguliers.



1. Sans justification, donner l'ensemble des vecteurs égaux à chacun des vecteurs suivants :
   a. $\overrightarrow{CD}$ b. $\overrightarrow{AE}$
2. En utilisant la relation de Chasles, déterminer un représentant des sommes suivantes :
   a. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AF}$ b. $\overrightarrow{FJ} + \overrightarrow{LM} + \overrightarrow{FB}$
3. a. En utilisant la relation de Chasles, compléter l'égalité suivante :
   $\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{\ldots}$

   b. Etablir, en utilisant la question précédente, la relation vectorielle :
   $\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{AK}$

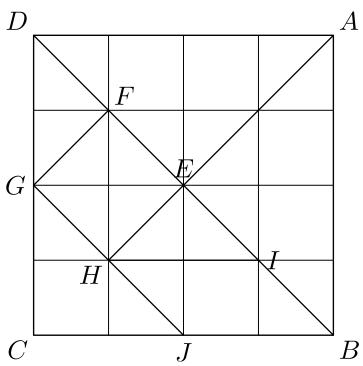
Exercice H.6



Remplacer les "..." par le point souhaité :

1. $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{C\ldots}$
2. $\overrightarrow{HI} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{J\ldots}$
3. $\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{HI} + \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{\ldots B}$

Exercice H.7

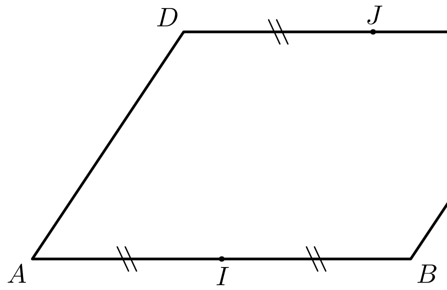


Recopier l'énoncé sur votre copie et compléter les pointillés :

1. $\overrightarrow{EI} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{E\ldots}$
2. $\overrightarrow{JG} + \overrightarrow{JB} = \overrightarrow{J\ldots}$
3. $\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{EI} = \ldots\ldots$
4. $\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{BH} = \ldots\ldots$

Exercice H.8

On considère le parallélogramme $ABCD$ représenté ci-dessous où les points I et J sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$.

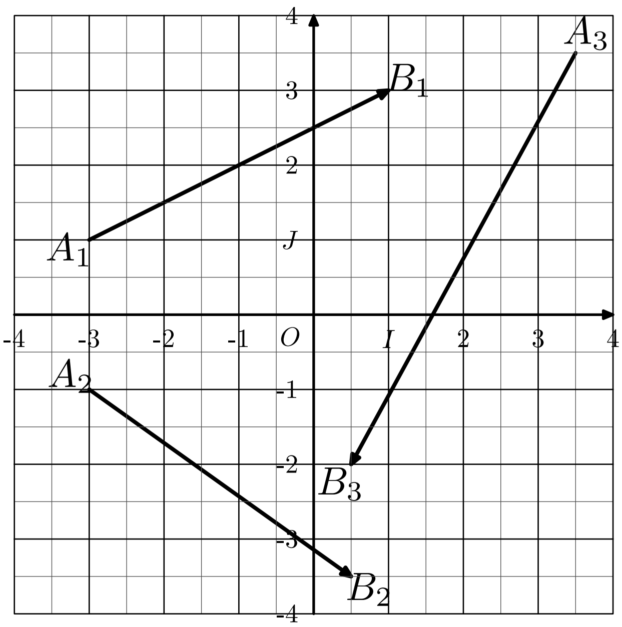


Pour chaque question, donner sans justification un vecteur égal à l'expression proposée :

a. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{IB}$ b. $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{CJ}$ c. $2\cdot\overrightarrow{AJ}+2\cdot\overrightarrow{CB}$

Exercice H.9

On considère, dans le repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé et les trois flèches ci-dessous représentés ci-dessous :



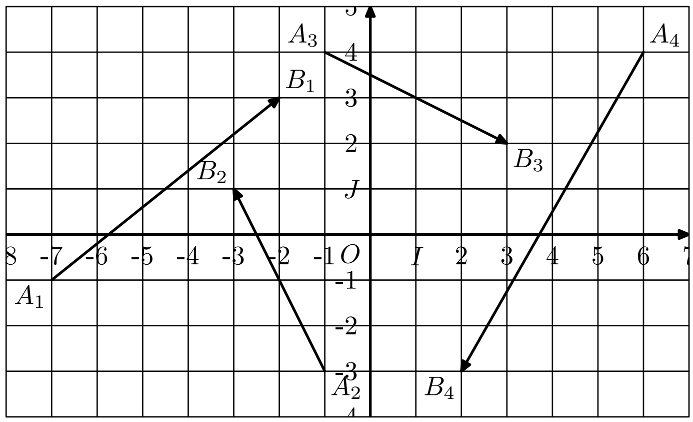
1. Compléter le tableau suivant :

i	$(x_{A_i}\,;y_{A_i})$	$(x_{B_i}\,;y_{B_i})$	$x_{B_i}-x_{A_i}$	$y_{B_i}-y_{A_i}$
1				
2				
3				

2. a. Que représentent les nombres 4 et 2 pour le premier vecteur ?
   b. Expliquer pourquoi le second vecteur n'est pas représentée par les deux nombres 3,5 et 2,5.

Exercice H.10

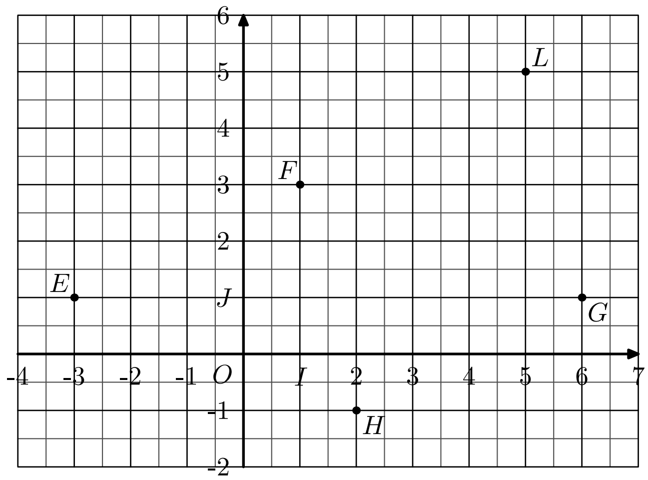
Dans le repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$ ci-dessous, sont représentés quatres vecteurs :



Graphiquement, déterminer les coordonnées de ces quatres vecteurs.

Exercice H.11

On munit le plan d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé et on considère les cinq points représentés ci-dessous :



1. Graphiquement, déterminer les coordonnées des points E, F, G, H, L.
2. a. Déterminer, par le calcul, les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{FL}$ et $\overrightarrow{HG}$.
   b. En déduire la nature de $FLGH$.
3. a. Déterminer, par le calcul, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{EF}$.
   b. Préciser la position de F sur le segment $[EL]$. Justifier.
4. Recopier et compléter l'égalité :

$$\overrightarrow{FL}+\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{\ldots}$$

Exercice H.12

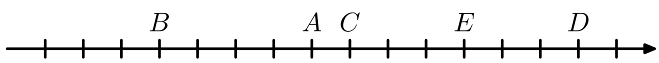
Dans un repère orthonormé $(O\,;\,I\,;\,J)$, on considère les quatres points suivants caractérisés par leurs coordonnées :

$$A\left(\frac{5}{3}\,;\frac{7}{4}\right)\quad;\quad B\left(\frac{11}{3}\,;-\frac{5}{4}\right)\quad;\quad C\left(\frac{16}{7}\,;\frac{12}{5}\right)\quad;\quad D\left(\frac{2}{7}\,;\frac{27}{5}\right)$$

Justifier que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

Exercice H.13

Sur une droite graduée, on place les points A, B, C, D, E :



Pour chaque question, déterminer la valeur du nombre k vérifiant l'égalité :

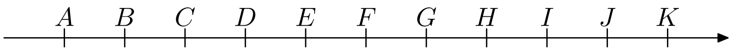
a. $\overrightarrow{BC} = k \cdot \overrightarrow{AC}$ b. $\overrightarrow{ED} = k \cdot \overrightarrow{AC}$

c. $\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{CA}$ d. $\overrightarrow{ED} = k \cdot \overrightarrow{CA}$

e. $\overrightarrow{EA} = k \cdot \overrightarrow{AB}$ f. $\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{BA}$

Exercice H.14

Le dessin ci-dessous représente une droite munit d'une graduation régulière.



Remplissez les pointillés par le nombre manquant :

a. $\overrightarrow{DG} = \ldots\ldots\ \overrightarrow{DE}$ b. $\overrightarrow{CE} = \ldots\ldots\ \overrightarrow{GI}$

c. $\overrightarrow{DB} = \ldots\ldots\ \overrightarrow{DF}$ d. $\overrightarrow{EF} = \ldots\ldots\ \overrightarrow{GJ}$

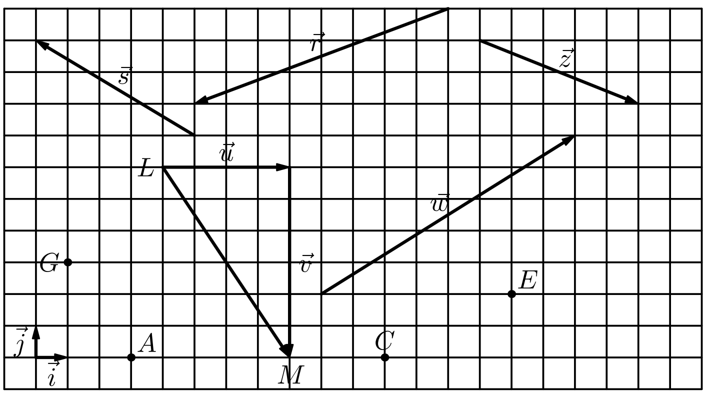
e. $\overrightarrow{BD} = \ldots\ldots\ \overrightarrow{CF}$ f. $\overrightarrow{JI} = \ldots\ldots\ \overrightarrow{AC}$

g. $\overrightarrow{EF} = \ldots\ldots\ \overrightarrow{JG}$ h. $\overrightarrow{AE} = \ldots\ldots\ \overrightarrow{FC}$

i. $\overrightarrow{CG} = \ldots\ldots\ \overrightarrow{KA}$ j. $\overrightarrow{EI} = \ldots\ldots\ \overrightarrow{AC}$

Exercice H.15

Dans le graphique ci-dessous, sont représentés deux vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ de directions différentes. Le but de cet exercice est de décomposer tout vecteur du plan en fonction des vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$.



1. a. Considérons le vecteur $\overrightarrow{y}$ défini par : $\overrightarrow{y} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{i} + \overrightarrow{i} + \overrightarrow{i}$

   b. Placer le point B tel que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{y}$

2. a. Placer le point D tel que : $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{i}$.

   b. Placer le point F tel que : $\overrightarrow{EF} = -3 \cdot \overrightarrow{j}$

3. a. Placer le point H tel que : $\overrightarrow{GH} = 2 \cdot \overrightarrow{i}$.

   b. Placer le point K tel que : $\overrightarrow{HK} = 4 \cdot \overrightarrow{j}$.

   c. Compléter l'égalité suivante : $\overrightarrow{GK} = \ldots\ldots \cdot \overrightarrow{i} + \ldots\ldots \cdot \overrightarrow{j}$

4. Compléter les pointillés suivants :
   $\overrightarrow{u} = \ldots\ldots \cdot \overrightarrow{i}$; $\overrightarrow{v} = \ldots\ldots \cdot \overrightarrow{j}$
   $\overrightarrow{LM} = \ldots\ldots \cdot \overrightarrow{i} + \ldots\ldots \cdot \overrightarrow{j}$

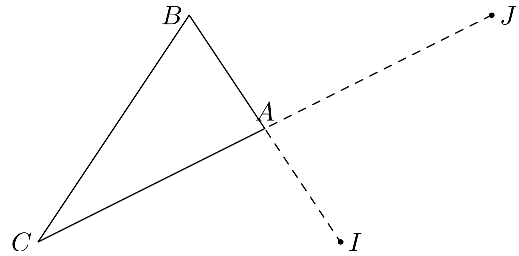
5. Compléter les pointillés suivants :

a. $\overrightarrow{w} = \ldots \cdot \overrightarrow{i} + \ldots \cdot \overrightarrow{j}$ b. $\overrightarrow{z} = \ldots \cdot \overrightarrow{i} + \ldots \cdot \overrightarrow{j}$

c. $\overrightarrow{r} = \ldots \cdot \overrightarrow{i} + \ldots \cdot \overrightarrow{j}$ d. $\overrightarrow{s} = \ldots \cdot \overrightarrow{i} + \ldots \cdot \overrightarrow{j}$

Exercice H.16

Dans le plan, on considère le triangle quelconque ABC. On note respectivement I et J les symétriques respectifs de B et de C par rapport à A :

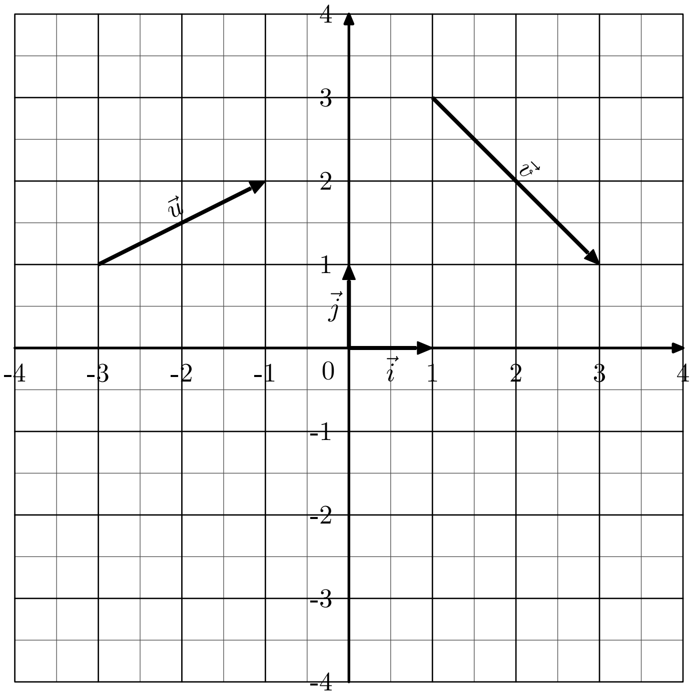


Exprimer en fonctions des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ les vecteurs suivants :

a. $\overrightarrow{IA}$ b. $\overrightarrow{AJ}$ c. $\overrightarrow{BC}$ d. $\overrightarrow{CB}$ e. $\overrightarrow{IJ}$

Exercice H.17

On munit le plan d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\right)$.



1. Donner, sans justification, les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

2. a. Tracer un représentant du vecteur $\overrightarrow{w}$ défini par : $\overrightarrow{w} = 3 \cdot \overrightarrow{u}$.

   b. Graphiquement, donner les coordonnées de $\overrightarrow{w}$.

   c. Comparer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$.

3. a. Tracer un représentant du vecteur $\overrightarrow{z}$ vérifiant la relation : $\overrightarrow{z} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.

   b. Graphiquement, donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{z}$.

   c. Comparer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{z}$ relativement à celles des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Exercice H.18

On considère le plan muni d'un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ quelconque et les trois points suivants déterminés par leurs coordonnées :

$$A\left(2\,;1\right) \quad ; \quad B\left(3\,;2\right) \quad ; \quad C\left(-1\,;-1\right)$$

1. a. Déterminer les coordonnées du vecteur $3\cdot\overrightarrow{AB}$.
   b. Déterminer les coordonnées du point D tel que : $\overrightarrow{AD} = 3\cdot\overrightarrow{AB}$.
2. a. Déterminer les coordonnées du vecteur définie par l'expression : $2\cdot\overrightarrow{AB} - 4\cdot\overrightarrow{AC}$
   b. Déterminer les coordonnées du point E vérifiant la relation : $\overrightarrow{AE} = 2\cdot\overrightarrow{AB} - 4\cdot\overrightarrow{AC}$
3. Déterminer les coordonnées du point F tels que : $ABCF$ soit un parallélogramme.

Exercice H.19

On considère le plan muni d'un repère $(O\,;\,I\,;\,J)$ orthonormé.

Pour chacune des questions, déterminer l'équation de la droite passant par le point M et ayant le vecteur $\vec{u}$ pour vecteur directeur :

a. $M\left(0\,;2\right)$; $\vec{u}\left(1\,;\dfrac{1}{2}\right)$ b. $M\left(0\,;-\dfrac{3}{2}\right)$; $\vec{u}\left(2\,;1\right)$

c. $M\left(1\,;2\right)$; $\vec{u}\left(3\,;2\right)$ d. $M\left(-4\,;1\right)$; $\vec{u}\left(-2\,;1\right)$

Exercice H.20

Associer à chacune des équations de droite ci-dessous :

1. $y = 2x+1$ 2. $y = -\dfrac{3}{2}x - 2$ 3. $-2x-y+3=0$

4. $y = \dfrac{2}{3}x+1$ 5. $y = \dfrac{1}{6}x - \dfrac{1}{2}$ 6. $-x+3y-2=0$

un vecteur directeur parmi :

a. $\vec{u}\left(3\,;2\right)$ b. $\vec{v}\left(-2\,;-4\right)$ c. $\vec{w}\left(-2\,;4\right)$

d. $\vec{r}\left(\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{6}\right)$ e. $\vec{s}\left(6\,;1\right)$ f. $\vec{t}\left(-4\,;6\right)$

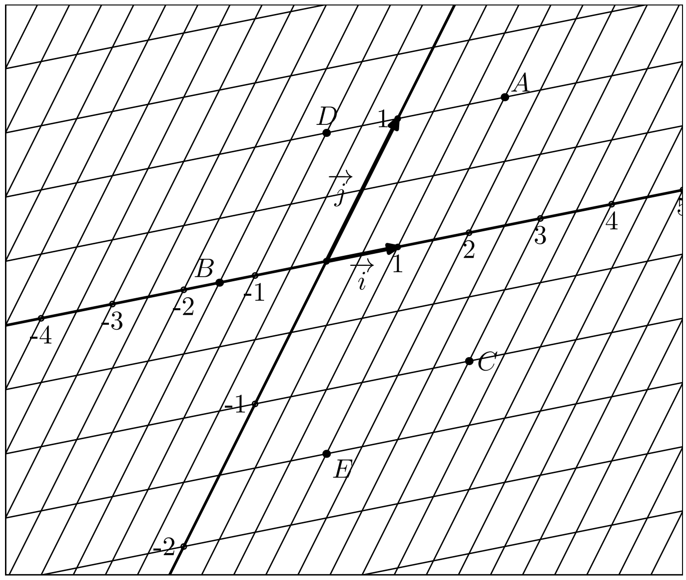
Exercice H.21

On considère le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé dont l'unité est le centimètre.

1. Tracer un tel repère et tout au long de l'exercice, compléter votre représentation.
2. Placer les points : $M\left(1\,;3\right)$; $N\left(-1\,;5\right)$; $P\left(-3\,;1\right)$
3. Etablir les égalités suivantes : $MN = 2\sqrt{2}$; $NP = MP = 2\sqrt{5}$.
4. En déduire la nature du triangle MNP.
5. Soit A le milieu de $[MN]$. Montrer, sans calcul, que le triangle APN est rectangle.
6. Calculer les coordonnées de A.
7. Construire le point R tel que : $\overrightarrow{MR}=\overrightarrow{PN}$
8. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{PN}$.
9. Déduire des questions 6. et 7. les coordonnées du point R.

Exercice H.22

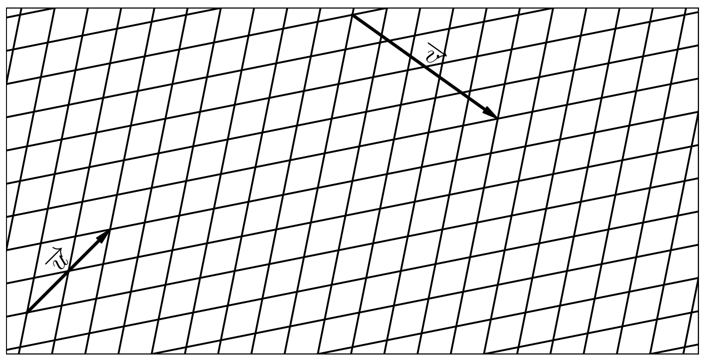
On munit le plan d'un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$ quelconque représenté ci-dessous :



1. Déterminer les coordonnées des points A, B, C, D et E.
2. a. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{BA}$.
   b. Etablir que les vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires.
3. On utilise la fonction prenant deux points du plan et renvoyant un nombre réel définit ainsi : $d(A\,;\,B) = \sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}$
4. a. Déterminer les valeurs suivantes : $d(A,D)$; $d(A,E)$
   b. Dans un repère orthonormal, la distance entre deux points A et B est donnée par la formule : $AB = \sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}$
   Cette formule a-t-elle un sens dans ce repère quelconque ?

Exercice H.23

On considère, dans le plan, les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ci-dessous :

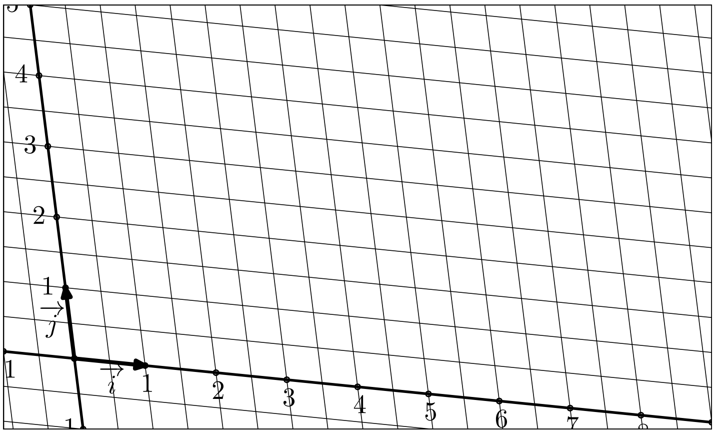


1. Tracer dans le quadrillage un représentant $\vec{w}$ de la somme $\vec{u}+\vec{v}$.
2. Tracer dans le quadrillage un représentant $\vec{y}$ de la différence $\vec{u}-\vec{v}$.

3. Tracer dans le quadrillage un représentant $\overrightarrow{z}$ de la combinaison linéaire suivante :
$2\overrightarrow{u}+3\overrightarrow{v}$.

Exercice H.24

On munit le plan d'un repère $(O\,;\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j})$ quelconque représenté ci-dessous :



1. Tracer un représentant de chacun des deux vecteurs :
$\overrightarrow{u}\,(5\,;2)$; $\overrightarrow{v}\,(-3\,;-2)$

2. a. Tracer un représentant du vecteur $\overrightarrow{w}$ définie par :
$\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$

b. Graphiquement, déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{w}$.

c. Comparer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{w}$ relativement à celles des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Exercice H.25

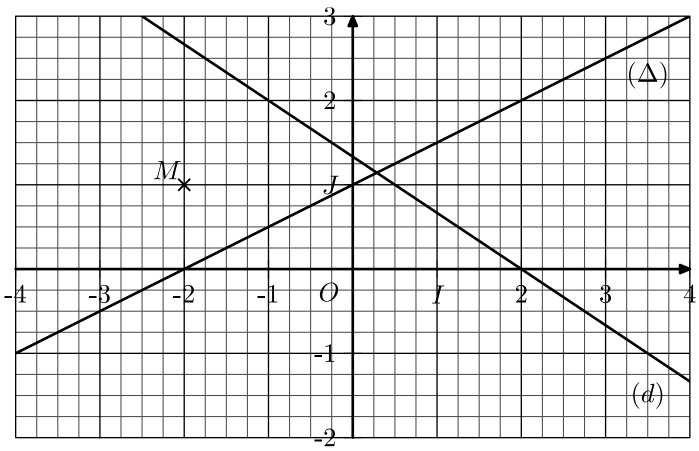
On considère le plan muni d'un repère quelconque $(O\,;I\,;J)$ et les trois points suivants du plan :
$A\,(3\,;2)$; $B(-1\,;3)$; $D(-4\,;-1)$

1. Déterminer les coordonnées du point C tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

2. Déteminer les coordonnées du point E appartenant à l'axe des abscisses tel que : $(BD)/\!/(AE)$.

Exercice H.26

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, on considère la droite (d) représentée ci-dessous et le point M de coordonnée $(-2\,;1)$:



1. Déterminer l'équation réduite de la droite (d).

2. a. Tracer un représentant du vecteur $\overrightarrow{u}\,(2\,;1)$.

b. Déterminer les coordonnées du point P appartenant à la droite (d) tel que les vecteurs $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{u}$ soient colinéaires.

3. Soit N le point de coordonnées $\left(-\dfrac{13}{10}\,;\dfrac{1}{5}\right)$. Soit x un nombre réel, on considère les deux points R et S appartenant respectivement aux droites (d) et (Δ) ayant chacun pour abscisse la valeur x

a. On admet que l'équation réduite de la droite (Δ) est :
$y=\dfrac{1}{2}\cdot x+1$
Exprimer en fonction de x les coordonnées des deux vecteurs $\overrightarrow{MR}$ et $\overrightarrow{NS}$

On souhaite déterminer une valeur de x pour laquelle les vecteurs $\overrightarrow{MR}$ et $\overrightarrow{NS}$ sont colinéaires.

Supposons désormais que x vérifie cette contrainte :

b. Justifier que x vérifie la condition suivante :
$$\left(x+\frac{13}{10}\right)\left(-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}\right)=\left(x+2\right)\left(\frac{1}{2}x+\frac{4}{5}\right)$$

c. Résoudre l'équation suivante :
$$(1-2x)\,(10x+13)=(x+2)\,(15x+24)$$

d. En déduire les coordonnées des points R et S.

Exercice H.27

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs. Simplifier chacune des sommes vectorielles suivantes :

a. $3\overrightarrow{u}-2\overrightarrow{v}+2\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$

b. $2\cdot\left(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right)-\overrightarrow{u}$

d. $-\left(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right)+2\cdot\left(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\right)$

e. $\dfrac{2}{3}\cdot\left(2\cdot\overrightarrow{u}-\dfrac{3}{2}\cdot\overrightarrow{v}\right)-\dfrac{1}{6}\overrightarrow{u}$

Exercice H.28

Soit A, B, C et D quatre points du plan vérifiant la relation :
$$\overrightarrow{AC}-3\cdot\overrightarrow{BD}+2\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{0}$$
Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Exercice H.29

Soit A, B, C trois points du plan vérifiant la relation :
$$-\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{5}{2}\cdot\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{0}$$

1. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

2. Que peut-on dire des points A, B, C ?

Exercice H.30

Soit A, B, C trois points du plan.

1. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{u}$ défini ci-dessous est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AC}$ par :
$$\overrightarrow{u}=3\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{BC}-\frac{5}{3}\cdot\overrightarrow{CA}+\frac{7}{3}\cdot\overrightarrow{BA}$$

2. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{v}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$$\vec{v} = \frac{5}{6}\cdot\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{CA}$$

3. Montrer que les deux vecteurs $\vec{r}$ et $\vec{s}$ sont égaux :

$$\vec{r} = 5\cdot\overrightarrow{AC} - 2\cdot\overrightarrow{BC} \quad ; \quad \vec{s} = 2\cdot\overrightarrow{AB} + 3\cdot\overrightarrow{AC}$$

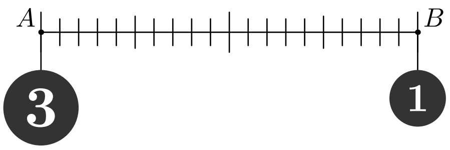
I. Barycentre:

Exercice I.1

Archimède *(˜250 avant JC)* est l'un des premiers a donné une explication du principe des moments et de celui du barycentre. Il écrit dans le traité "*Sur le centre de gravité de surface plane* :

```
"Tout corps pesant a un centre de gravité
bien défini en lequel tout poids du corps
peut être considéré comme concentré"
```

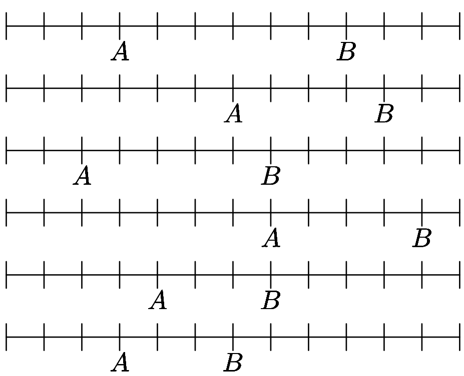
Le schéma ci-dessous représente une barre sur laquelle, on a accroché deux poids distincts en ses extrémités. La propriété des moments indique que pour que la balance soit en équilibre au point O si les moments $m_A\times OA$ et $m_B\times OB$ sont égaux.



Déterminer l'emplacement du point O sur cette barre *(cette barre a été partagée en vingt parties distinctes)*.

Exercice I.2

Dans chaque cas, placer le point G, s'il existe, sur les droites graduées ci-dessous vérifiant la relation demandée :



$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB}$

$2\cdot\overrightarrow{AG} + 3\cdot\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

$3\cdot\overrightarrow{GA} + 2\cdot\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

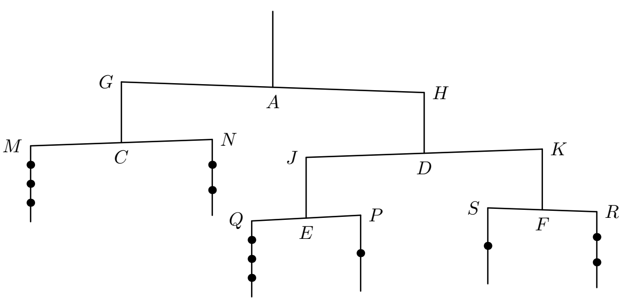
$5\cdot\overrightarrow{GA} - 3\cdot\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

$-2\cdot\overrightarrow{GA} + 2\cdot\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

$\overrightarrow{GA} - 4\cdot\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

Exercice I.3

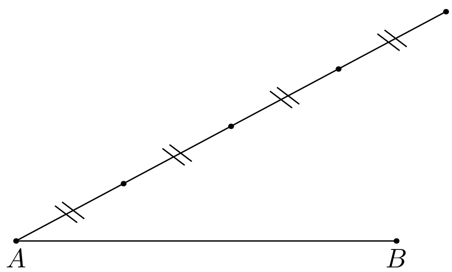
Ci-dessous est représentée un mobile. Afin de lui faire retrouver son aspect original, replacer correctement les points A, C, D, E, F respectivement sur les segments $[GH]$, $[MN]$, $[JK]$, $[QP]$, $[RS]$, afin que chacune des branches de ce mobile soient horizontales.



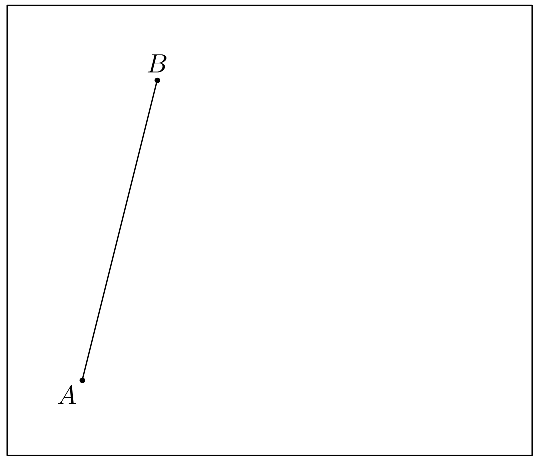
Exercice I.4

Toutes les constructions de cet exercice doivent être uniquement réalisées à l'aide du compas et de la règle **non-graduée** :

1. Partager le segment $[AB]$ représenté ci-dessous en quatre parties égales :

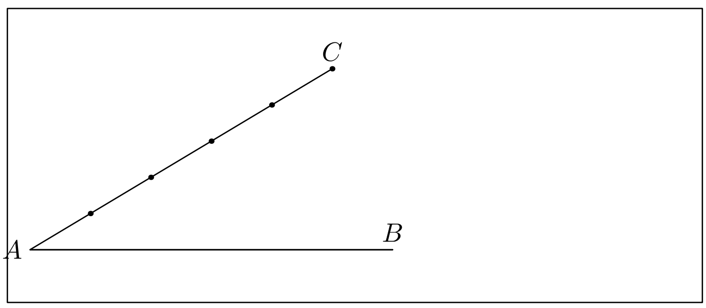


2. Partager le segment $[AB]$ représenté ci-dessous en cinq parties égales :



Exercice I.5

La figure ci-dessous est composée d'un segment $[AC]$ partagé en cinq parties égales et d'un segment $[AB]$:



1. Placer le point G baryncentre du système pondéré :

$$\{(A;2)\ ;\ (B;3)\}$$

2. Placer le point H barycentre du système suivant :

$$\{(A;-2)\ ;\ (B;5)\}$$

Utiliser le théorème de Thalès

Exercice I.6

1. Dans chaque cas, donner l'expression du vecteur $\overrightarrow{AG}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$ des ensembles pondérées ci-dessous :

   a. $\Big\{ (A\,;2) \;\;;\;\; (B\,;1) \Big\}$ b. $\Big\{ (A\,;-3) \;\;;\;\; (B\,;4) \Big\}$

   c. $\Big\{ \Big(A\,;\frac{3}{4}\Big) \;\;;\;\; \Big(B\,;-\frac{1}{2}\Big) \Big\}$

2. Dans chaque cas, donner l'expression du vecteur $\overrightarrow{BG}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{BA}$ des ensembles pondérées ci-dessous :

   a. $\Big\{ (A\,;1) \;\;;\;\; (B\,;2) \Big\}$ b. $\Big\{ (A\,;5) \;\;;\;\; (B\,;-1) \Big\}$

   c. $\Big\{ \big(A\,;\sqrt{2}\big) \;\;;\;\; \big(B\,;3\sqrt{2}\big) \Big\}$

Exercice I.7

Soit A et B deux points du plan. On note K le symétrique de A par rapport à B.

Parmi les systèmes pondérés ci-dessous, indiquer le système admettant K pour barycentre :

a. $\Big\{ (A\,;1) \;\;;\;\; (B\,;-1) \Big\}$ b. $\Big\{ (A\,;-1) \;\;;\;\; (B\,;1) \Big\}$

c. $\Big\{ (A\,;-2) \;\;;\;\; (B\,;1) \Big\}$ d. $\Big\{ (A\,;1) \;\;;\;\; (B\,;-2) \Big\}$

Exercice I.8

D'après le cours, si G est le barycentre du système $\Big\{ (A\,;\alpha) \;\;;\;\; (B\,;\beta) \Big\}$, on a la relation vectorielle suivante :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta} \cdot \overrightarrow{AB}$$

Aidez-vous de cette formule pour répondre aux questions suivantes :

1. Soit Z le barycentre du système pondéré suivant :
   $\Big\{ (M\,;m) \;\;;\;\; (F\,;\delta) \Big\}$

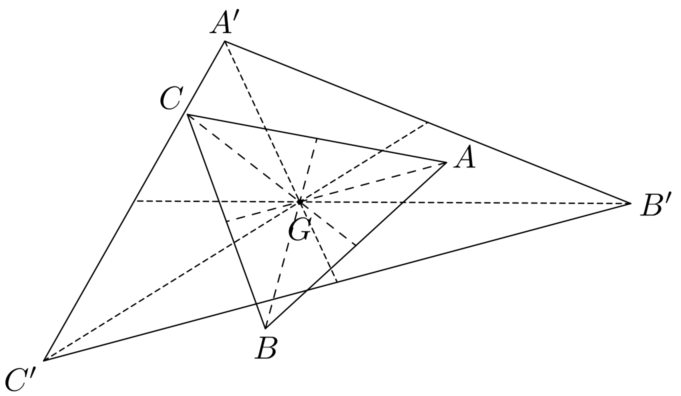
   Donner l'expression du vecteur $\overrightarrow{MZ}$ en fonction de $\overrightarrow{MF}$.

2. Soit H le barycentre du système pondéré suivant :
   $\Big\{ (N\,;b) \;\;;\;\; (Q\,;s) \Big\}$

   Exprimer $\overrightarrow{HQ}$ en fonction de $\overrightarrow{NQ}$.

Exercice I.9

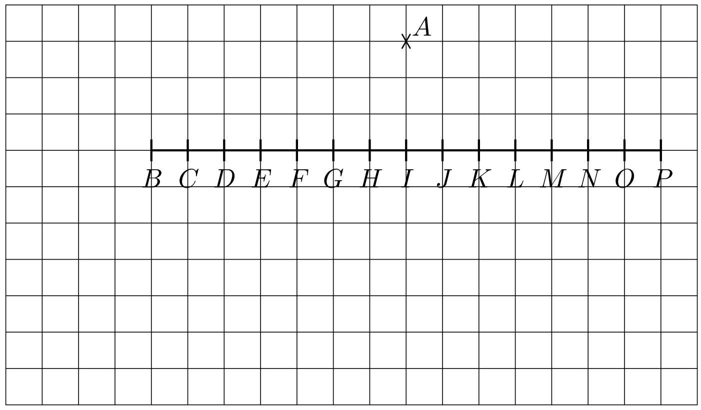
La figure ci-contre représente deux triangles ABC et $A'B'C'$ admettant le même point G pour isobarycentre.



Etablir la relation suivante :

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{0}$$

Exercice I.10



1. On définit le vecteur $\overrightarrow{u}$ défini par la relation :
   $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AL} + 2\cdot\overrightarrow{AF}$

   a. Tracer un représentant du vecteur $\overrightarrow{u}$.

   b. Déterminer le barycentre du système :
   $\Big\{ (L\,;1) \;;\; (F\,;2) \Big\}$.

   c. Réduire l'écriture du vecteur $\overrightarrow{u}$ sous la forme :
   $\overrightarrow{u} = k\cdot\overrightarrow{AZ}$
   où $k\in\mathbb{R}$ et Z est un des 15 points du segment.

2. Pour chacune des questions suivante, donner une simplification de l'expression en introduisant un système pondéré bien choisi et son barycentre ; puis, tracer un représentant de cette expression :

   a. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF}$ b. $-\overrightarrow{AJ} + 2\cdot\overrightarrow{AL}$

Exercice I.11

Justifier que les deux systèmes pondérés ci-dessous admettent le même point pour barycentre :

$$\Big\{(A;\,1)\;;\;(B;\,2)\Big\} \quad ; \quad \Big\{(A;\,3)\;;\;(B;\,6)\Big\}$$

Exercice I.12

Soit A et B deux points du plan.

1. Donner un système pondéré à partir des points A et B dont le barycentre vérifie la relation suivante :

   $$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AB}$$

2. Donner un système pondéré à partir des points A et B dont le barycentre vérifie la relation suivante :

   $$\overrightarrow{BG} = \frac{1}{4}\cdot\overrightarrow{AB}$$

Exercice I.13

Dans chaque cas, déterminer la valeur des coefficients α, β, γ afin que le point G soit barycentre du système :
$G\Big\{ (A\,;\alpha) \;;\; (B\,;\beta) \;;\; (C\,;\gamma) \Big\}$

Les points A, B, C vérifient les relations :

1. $3\cdot\overrightarrow{GA} - 2\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$

2. M représente un point quelconque du plan :
$$5\cdot\overrightarrow{MG} = 2\cdot\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{BC} + 3\cdot\overrightarrow{MC}$$

Exercice I.14

On considère dans le plan trois points A, B, C non-alignés.

Démontrer qu'il n'existe pas de point M vérifiant la relation :
$$3\cdot\overrightarrow{MA} - 4\cdot\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$$

Exercice I.15

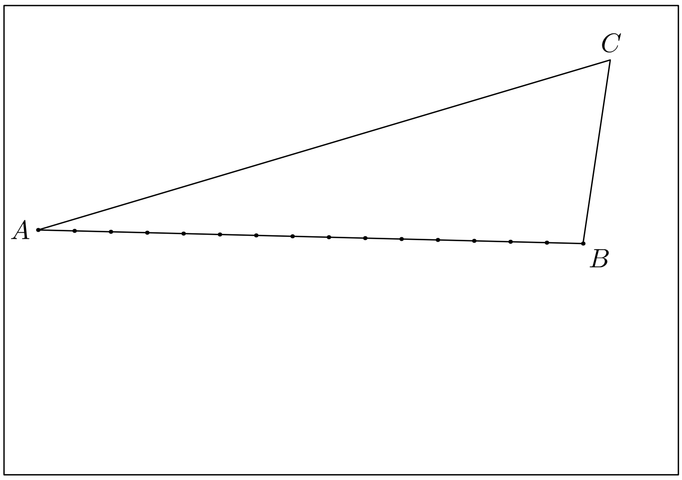
Soit A, B, C trois points du plan non-alignés. On considère les trois systèmes pondérés et leurs barycentres associés suivants :
$$G\Big\{ (A\,;2)\ ;\ (B\,;1) \Big\} \quad ; \quad H\Big\{ (C\,;-1)\ ;\ (B\,;2) \Big\}$$
$$I\Big\{ (A\,;2)\ ;\ (B\,;3)\ ;\ (C\,;-1) \Big\}$$

1. Justifier que ces trois systèmes admettent effectivement un barycentre.

2. a. Justifier l'égalité vectorielle suivante :
$$2\cdot\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = 3\cdot\overrightarrow{IG}$$

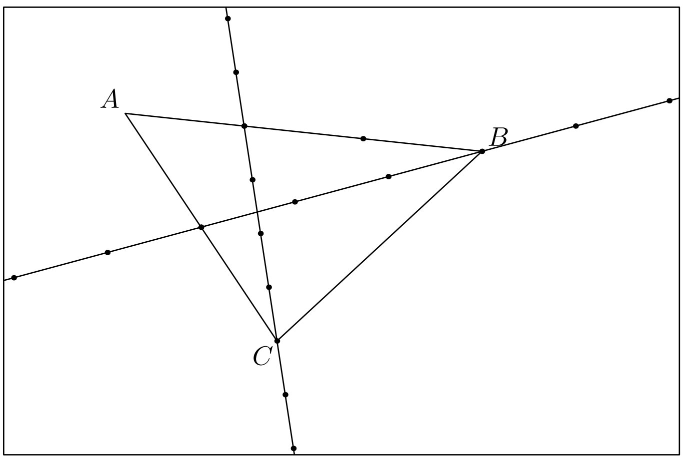
b. Démontrer que les trois points G, H, I sont alignés.

3. Ci-dessous est donnée la représentation de trois points du plan non alignés et où le segment $[AB]$ a été divisé en 15 parts égales. Déterminer la position du point I sur cette figure ; aucune justification n'est demandée.



Exercice I.16

Dans le plan, on considère les trois points A, B, C représentés ci-dessous :



Les marques représentées sur les segments ou sur les droites représentent un partage régulier de chacune d'eux.

M représente un point du plan quelconque :

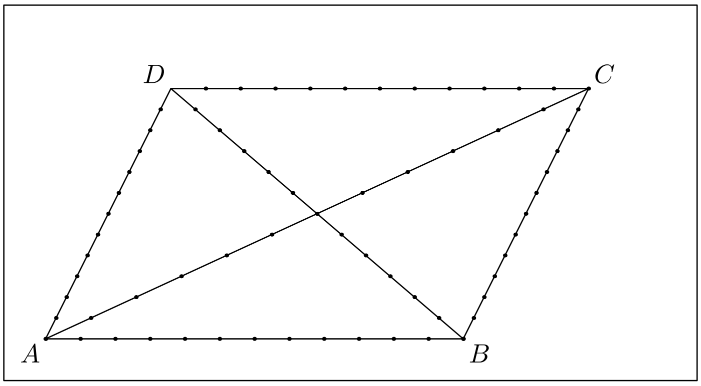
1. a. Placer, sans justification, le point G barycentre du système pondéré $\Big\{ (A\,;2)\ ;\ (B\,;1)\ ;\ (C\,;1) \Big\}$

b. Réduire l'expression vectorielle ci-dessous où M est un point quelconque du plan :
$$2\cdot\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$$

2. Déterminer, graphiquement, l'ensemble des points M du plan tels que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, définis ci-dessous, sont colinéaires :
$$\vec{u} = 2\cdot\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$$
$$\vec{v} = 2\cdot\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\cdot\overrightarrow{MC}$$

Exercice I.17

On considère le parallélogramme $ABCD$ ci-dessous :



Chaque côté et diagonale a été volontairement partagé en 12 parts égales.

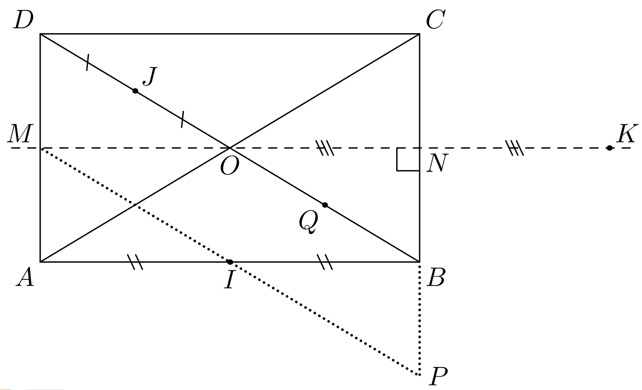
1. Placer le point G, barycentre du système pondéré suivant :
$$\Big\{ (A\,;1)\ ;\ (B\,;-1)\ ;\ (C\,;1) \Big\}$$

2. Placer le barycentre H des points A, D, C pondérés respectivement par 0, 1, 2.

3. Placer le barycentre J du système pondéré suivant :
$$\Big\{ (D\,;-3)\ ;\ (C\,;4)\ ;\ (A\,;2) \Big\}$$

Exercice I.18

On considère la figure ci-dessous où $ABCD$ est un rectangle. I est le milieu de $[AB]$; J milieu de $[DO]$ et K le symétrique de O relativement à la droite (CB).



1. a. Soit Q le milieu du segment $[OB]$.

Déterminer les coefficients d'un système pondéré $\Big\{ (A\,;\alpha)\ ;\ (B\,;\beta)\ ;\ (C\,;\gamma) \Big\}$ admettent le point Q pour barycentre.

b. En déduire la valeur de δ afin que le point J soit le barycentre de :
$$\Big\{ (A\,;\alpha)\ ;\ (B\,;\beta)\ ;\ (C\,;\gamma)\ ;\ (D\,;\delta) \Big\}$$

2. a. Soit M et N les milieux respectifs des segments $[AD]$ et $[BC]$. A l'aide du calcul vectoriel, montrer que :
$$\overrightarrow{DK} - 3\cdot\overrightarrow{CK} - 3\cdot\overrightarrow{BK} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{0}$$

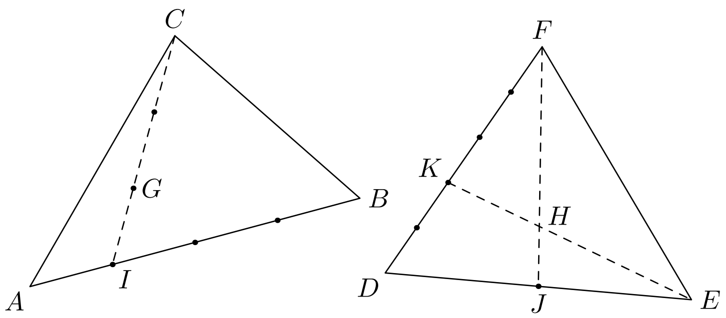
b. Déterminer la pondération apportée au sommet du rectangle pour que K soit le barycentre des points A, B, C et D.

3. a. Le point P est tel que $\overrightarrow{CP} = \dfrac{3}{2}\cdot\overrightarrow{CB}$
Justifier que I est le milieu du segment $[MP]$.

b. En déduire des coefficients de pondérations non-nuls des quatres sommets du rectangle afin que I soit le barycentre de $ABCD$.

Exercice I.19

On considère les triangles ABC et DEF représentés ci-dessous.



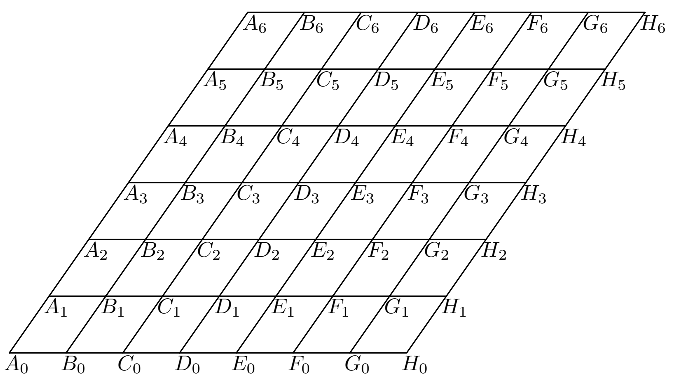
Les points présents sur les segments présentent un partage en part égale du segment.

1. Déterminer les coefficients du système pondéré ci-dessous afin que G soit le barycentre de ce système :
$$\Big\{ (A\,;\alpha)\ ;\ (B\,;\beta)\ ;\ (C\,;\gamma) \Big\}$$

2. Quels valeurs doivent avoir les coefficients de pondérations des points D, E et F pour que H soit le barycentre du triangle DEF.

Exercice I.20

Dans le plan, on considère le quadrillage ci-dessous :



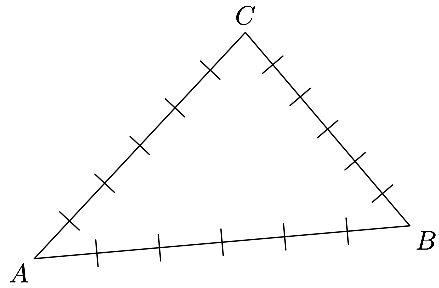
1. Déterminer le barycentre G du système :
$$\Big\{ (A_1\,;1)\ ;\ (C_5\,;1)\ ;\ (F_5\,;2) \Big\}$$

2. En se servant uniquement des points présentés sur la figure, déterminer le barycentre H du système :
$$\Big\{ (A_6\,;2)\ ;\ (D_6\,;-2)\ ;\ (B_4\,;-3) \Big\}$$

3. Déterminer la valeur de α, un nombre réel, afin que le système pondérée $\Big\{ (B_4\,;2)\ ;\ (H_1\,;1)\ ;\ (E_4\,;\alpha) \Big\}$ admette le point B_1 pour barycentre.

Exercice I.21

On considère ci-dessous le triangle ABC dont chacun des côtés a été partagés en six parties égales.



1. a. Placer le point E le milieu de $[AC]$.

b. Placer le point F barycentre du système pondéré suivant :
$$\Big\{ (A\,;1)\ ;\ (B\,;2) \Big\}$$

c. Placer le point G barycentre du système pondéré suivant :
$$\Big\{ \Big(C\,;\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)\ ;\ (B\,;\sqrt{2}) \Big\}$$

2. Tracer les trois droites (BE), (FC) et (AG).
Remarquez que les trois droites sont concourantes.

3. On considère le point H barycentre du système pondéré suivant de trois points :
$$\Big\{ (A\,;1)\ ;\ (B\,;2)\ ;\ (C\,;1) \Big\}$$

a. Justifier que H est le barycentre du système pondéré suivant :
$$\Big\{ (F\,;3)\ ;\ (C\,;1) \Big\}$$

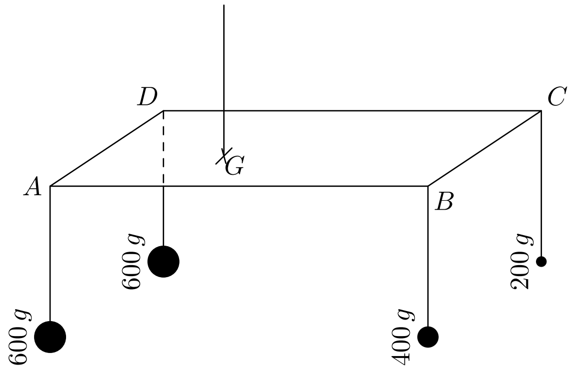
b. Justifier que H est également le barycentre du système suivant :
$$\Big\{ (B\,;1)\ ;\ (E\,;1) \Big\}$$

c. Justifier que le point H appartiennent à la droite (GA).

4. En déduire que les droites (BE), (FC) et (AG) sont concourantes.

Exercice I.22

Un lustre possède quatre ampoules distinctes en poids et en tailles; son armature en fer est de forme rectangulaire et de dimension $30\,cm$ sur $10\,cm$. Une représentation de ce lustre est donnée ci-dessous :



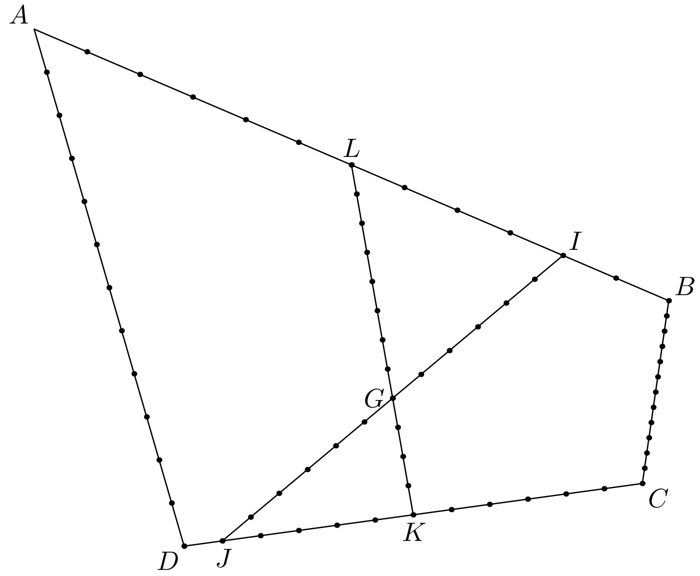
1. Tracer dans le plan le rectangle $ABCD$ à l'échelle $\frac{1}{2}$.

On souhaite trouver le centre de gravité de cette figure ; pour cela, on associe à ce problème le système pondéré $\big\{ (A\,;3)\ ;\ (B\,;2)\ ;\ (C\,;1)\ ;\ (D\,;3) \big\}$ et on recherche la position du point G :

2. Placer les points suivants :
   a. I barycentre partiel des points A et B.
   b. J le barycentre partiel des points B et C.
   c. K le barycentre partiel des points C et D.
   d. L le barycentre partiel A et D.
3. En déduire la position du point G sur la figure.

Exercice I.23

Dans le plan, on considère le quadrilatère $ABCD$; chacun de ses côtés ont été partagés en douze parties égales. Les points I, J, K, L font parties de ce marquage ; les segments $[IJ]$ et $[KL]$ ont été partagés de la même façon.

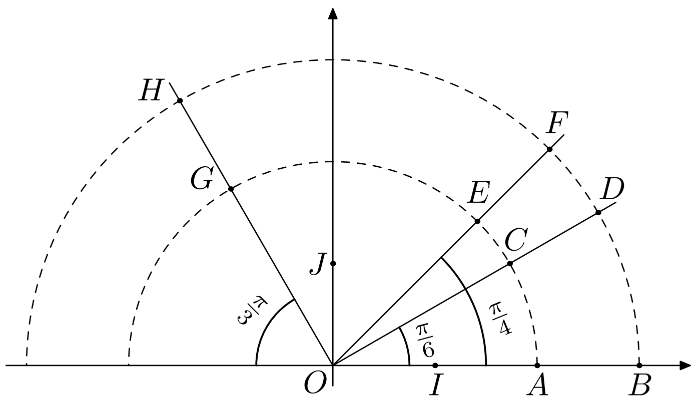


Déterminer deux pondérations non-homogènes du système $\big\{A\,;\,B\,;\,C\,;\,D\big\}$ admettant le point G pour barycentre.

J. Produit scalaire:

Exercice J.1

On considère le repère orthonormal $(O\,;I\,;J)$ ci-dessous :



Deux demi-cercles sont tracés : $OA = 2\,cm$ et $OB = 3\,cm$

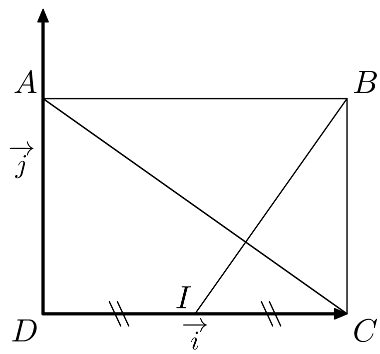
1. Déterminer les coordonnées des points figurants sur cette figure.
2. Déterminer la valeur des produits scalaires suivants :
   a. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$ b. $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}$
   c. $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OE}$ d. $\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OG}$

Exercice J.2

Soit a un nombre réel positif. On considère le rectangle $ABCD$ tel que :

$$AB = a \quad ; \quad AD = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

On note I le milieu de $[CD]$. Une représentation est donnée ci-dessous :



On considère le plan munit d'un repère orthonormé $(D\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,)$ dans le sens direct où $\vec{i} = \overrightarrow{DC}$:

1. Déterminer les coordonnées des différents points de cette figure.
2. En déduire que les droites (AC) et (IB) sont perpendiculaires.

Question subsidiaire : reprendre la question 2. sans utiliser les coordonnées des points.

Exercice J.3

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,I\,;\,J)$:

1. Soit A, B, C trois points du plan de coordonnées respective $(-2\,;3)$, $(1\,;-4)$ et $(0\,;\,-2)$
   a. Déterminer les valeurs de $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$, $\|\overrightarrow{BA}\|$ et $\|\overrightarrow{BC}\|$.
   b. En déduire la mesure de l'angle géométrique $\widehat{ABC}$ au centième près de degrés.

c. A l'aide d'un dessin à main levé, donner une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BC}\right)$.

2. Déterminer une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{DE}\,;\overrightarrow{DF}\right)$ où $D\,(3\,;5)$, $E\,(-1\,;0)$, $F\,(2\,;4)$ au centième de degré près.

Exercice J.4

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$ et les trois points suivants ainsi que leurs coordonnées dans ce repère :

$$A\,(3\,;2) \quad ; \quad B(5\,;-1) \quad ; \quad C\,(-2\,;3)$$

1. Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

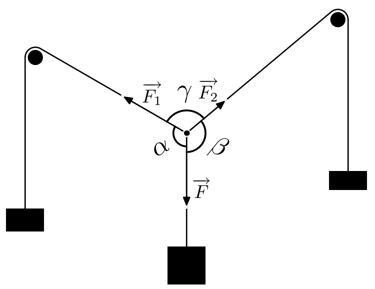
2. Donner les valeurs des produits scalaires suivants :
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} \quad ; \quad \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} \quad ; \quad \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC}$$

3. Calculer les distances AB, AC et BC.

4. Déterminer la mesure des 3 angles ABC.

Exercice J.5

Le schéma ci-dessous représente un système de poulis à l'équilibre. Chacun des poids exercice sur le noeud proportionnellement à son poids.



On donne les informations suivantes :

$$\left\|\overrightarrow{F_1}\right\| = 8\,N \quad ; \quad \left\|\overrightarrow{F_2}\right\| = 6\,N \quad ; \quad \left\|\overrightarrow{F}\right\| = 12\,N$$

On note R la résultante de toutes ces forces :

$$R = \overrightarrow{F} + \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$$

1. Déterminer en fonction de $alpha$, β et γ les trois produits scalaires suivants :
$$\overrightarrow{R}\cdot\overrightarrow{F_1} \quad ; \quad \overrightarrow{R}\cdot\overrightarrow{F_2} \quad ; \quad \overrightarrow{R}\cdot\overrightarrow{F}$$

2. On suppose maintenant que ce système est en position d'équilibre, ainsi on a $\overrightarrow{R}=\overrightarrow{0}$

a. Montrer que les mesures des angles vérifient le système suivant :
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 4\cdot\cos\alpha & + & 3\cdot\cos\beta & & & + & 6 & = & 0 \\ 6\cdot\cos\alpha & & & + & 3\cdot\cos\gamma & + & 4 & = & 0 \\ & & 6\cdot\cos\beta & + & 4\cdot\cos\gamma & + & 3 & = & 0 \end{array}\right.$$

b. En déduire les valeurs de α, β, γ pour la position d'équilibre.

Exercice J.6

On considère le triangle ABC équilatéral dont les côtés mesurent $6\,cm$; on note I, J, K les milieux respectifs des milieux $[BC]$, $[AC]$, $[AB]$; M est le centre de gravité du triangle ABC.

1. Déterminer la longueur du segment $[BJ]$ et $[BM]$.

2. Déterminer la valeur des différents produits scalaires suivants :

a. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$ b. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{IC}$

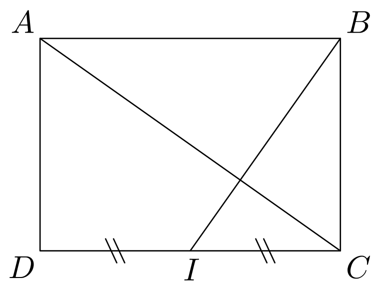
c. $\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MA}$ d. $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{MI}$

Exercice J.7

Soit a un nombre réel positif.
On considère le rectangle $ABCD$ tel que :

$$AB = a \quad ; \quad AD = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

On note I le milieu de $[CD]$



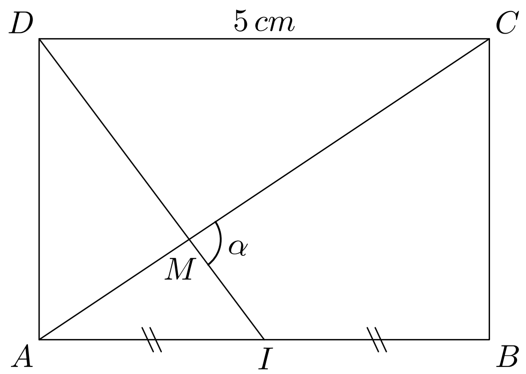
En se servant uniquement des propriétés algébriques, démontrer que les droites (AC) et (BI) sont perpendiculaires.

Exercice J.8

Dans le plan, on considère le rectangle $ABCD$ tel que :

$$AB = 5\,cm \quad ; \quad BC = \frac{2}{3}\cdot AB$$

I est le milieu du segment $[AB]$; les droites (AC) et (ID) s'interceptent au point M.



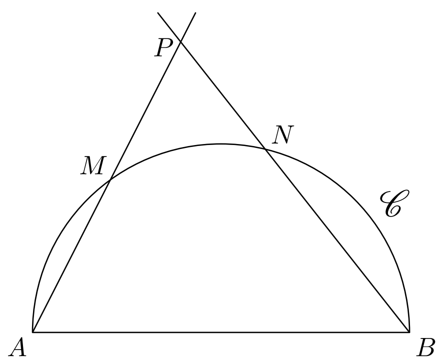
1. En exprimant les vecteurs à l'aide de $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}$, déterminer la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{ID}\cdot\overrightarrow{AC}$

2. a. Déterminer les longueurs des segments $[DI]$ et $[AC]$.

b. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{IMC}$ au dixième de degré près.

Exercice J.9

Dans le plan, on considère un demi-cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$; soit M et N deux poins de $\mathscr{C}$ tels que les demi-droites $[AM)$ et $[BN)$ s'interceptent au point P :



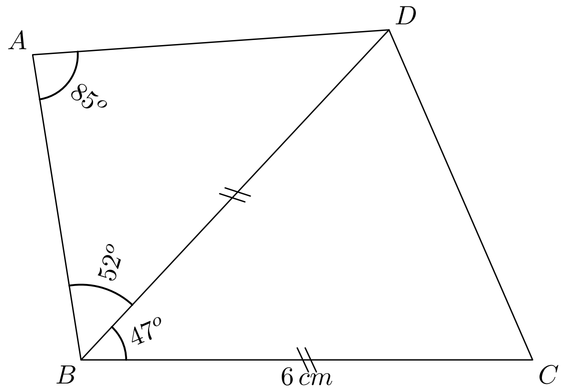
1. Déterminer la valeur de $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}$.

2. Etablir l'égalité suivante :

$$AB^2 = AP\times AM + PB\times NB$$

Exercice J.10

Déterminer les mesures des quatres côtés du quadrilatère $ABCD$ au millimètre près.



Exercice J.11

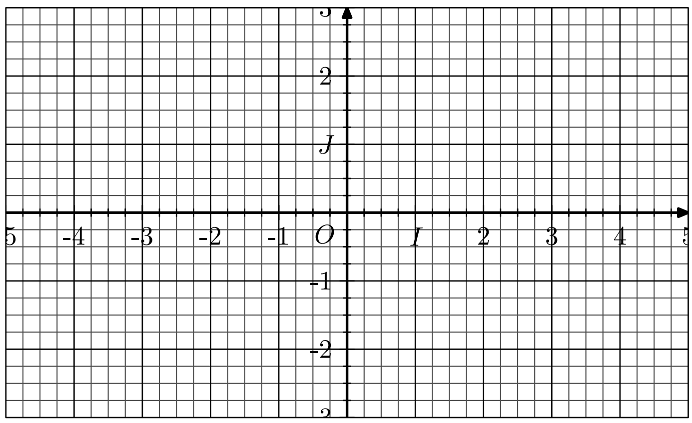
On considère le plan munit d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;\,J)$.

1. Dans chaque cas, déterminer une équation cartésienne de la droite perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{u}$ et passant par le point A :

   a. $\overrightarrow{u}=(2\,;3)$ et $A\,(1\,;0)$

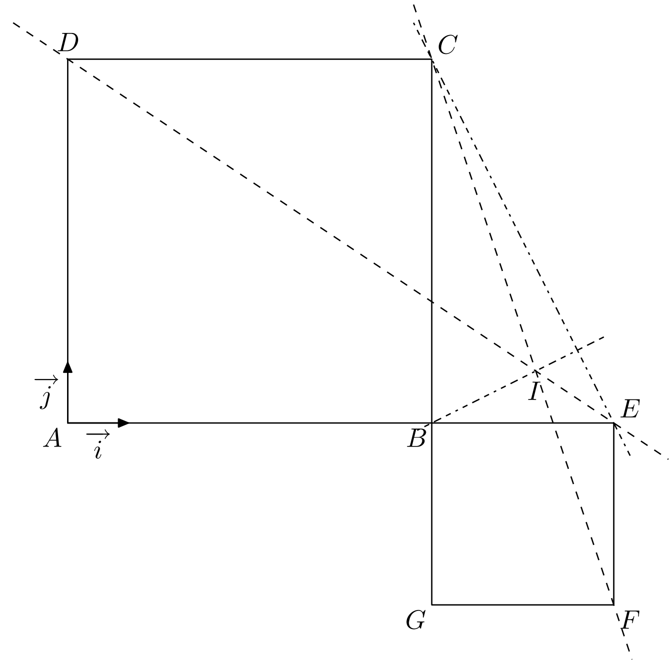
   b. $\overrightarrow{u}=(-1\,;1)$ et $A\,(-2\,;1)$

2. Tracer la représentation de chacune de ces droites dans le repère ci-dessous :



Exercice J.12

Dans le plan, on considère les deux carrés $ABCD$ et $BEFG$ représentés ci-dessous :



On munit le plan du repère orthonormée $\left(A\,;\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\right)$ où :

$\|\overrightarrow{AB}\|=6$; $\|\overrightarrow{BE}\|=3$

1. a. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{CF}$.

   b. En déduire les équations cartésiennes des droites (DE) et (CF) dans le plan $\left(A\,;\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\right)$.

2. Déterminer les coordonnées du point I.

3. Justifier que les droites (BI) et (CE) sont perpendiculaires.

Exercice J.13

On considère les trois équations cartésiennes suivantes :

a. $x^2+y^2+6x-4y+9=0$

b. $x^2+y^2-2x+6y+10=0$

c. $x^2+y^2+4x-4y+9=0$

1. Ecrire chacune des équations ci-dessus sous la forme :
   $$(x-a)^2+(y-b)^2=c$$
   où a, b, c sont des nombres réels à déterminer.

2. Pour chaque équation, en déduire la nature de l'ensemble des points défini par cette équation.

Exercice J.14

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;\,J)$ dont l'unité est le centimètre.

1. On considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre I et de rayon r. Dans chaque cas présenté ci-dessous, déterminer l'équation du cercle :

   a. $I\,(1\,;2)$ et $r{=}3\,cm$

   b. $I\,(-3\,;1)$ et $r{=}5\,cm$

2. On considère le cercle $\mathscr{C}'$ dont les points A et B sont diamétralement opposés. Déterminer l'équation du cercle dans chacun des cas suivants :

   a. $A\,(-2\,;0)$ et $B\,(4\,;0)$

   b. $A\,(2\,;-3)$ et $B\,(-1\,;2)$

Exercice J.15

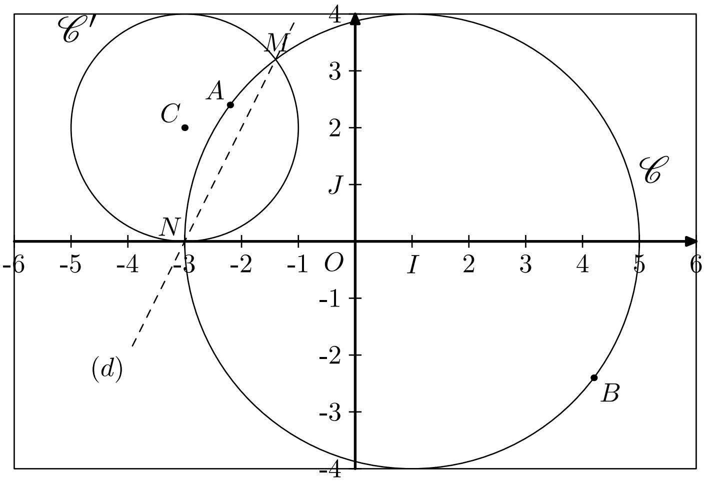
Dans le plan $(O\,;I\,;J)$, on considère les points A, B, C, D de coordonnées :

$$A(-1\,;-1) \quad ; \quad B(2\,;-4) \quad ; \quad C\left(\frac{22}{5}\,;\frac{4}{5}\right) \quad ; \quad D\left(\frac{1}{5}\,;\frac{7}{5}\right)$$

1. Déterminer s'il existe des réels a, b et c tels que l'équation :
   $x^2+y^2-2a{\cdot}x-2b{\cdot}y+c=0$
   soit vérifiée par les coordonnées des quatres points A, B, C et D.
2. Que peut-on dire des points A, B, C et D ?

Exercice J.16

Dans le plan muni d'un repère $\left(O\,;\,I\,;\,J\right)$, on considère les points $A\left(-\frac{11}{5}\,;\frac{12}{5}\right)$, $B\left(\frac{21}{5}\,;-\frac{12}{5}\right)$, $C\left(-3\,;2\right)$; les points A et B sont diamétralement opposés dans le cercle $\mathscr{C}$; le cercle $\mathscr{C}'$ a pour centre C et a pour rayon 2. On note M et N les deux points d'intersection des cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.



1. Déterminer les équations des cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.
2. Déterminer les coordonnées des points M et N.
3. En déduire l'équation cartésienne de la droite (d).

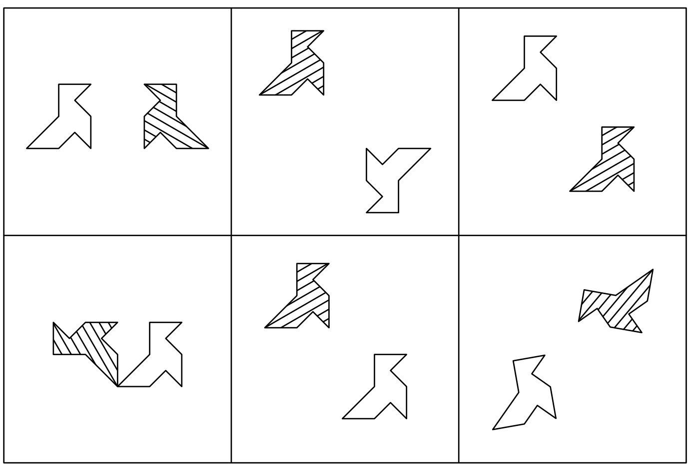
K. Transformations et isométries du plan:

Exercice K.1

La figure hachurée est obtenue après application d'une transformation du plan à la figure blanche. Dans chaque cas :

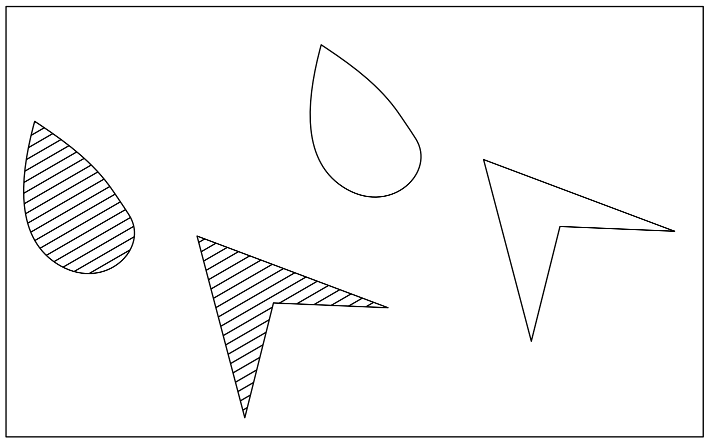
Préciser le type de transformation *(symétrie axiale, centrale, translation, rotation)*.

Faire apparaître et préciser le*(s)* élément*(s)* caractéristique*(s)* de cette transformation *(axe, centre, angle, sens de rotation)*



Exercice K.2

On considère la figure ci-dessous :



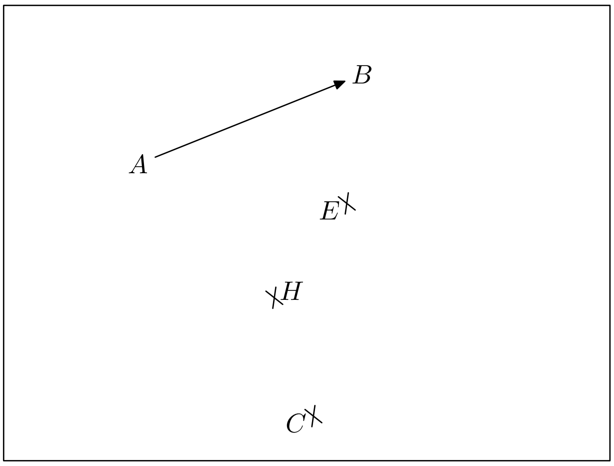
1. La figure ovoïde hachurée a été obtenue par une translation de la figure ovoïde blanc.

   Représenter un vecteur caractérisant cette translation.
2. Le polygone hachuré a été obtenu par une translation du polygone blanc.

   Tracer trois représentants de cette translation.
3. Faire une conjecture sur ces deux translations.

Exercice K.3

On considère la translation T du plan qui transforme le point A en B :

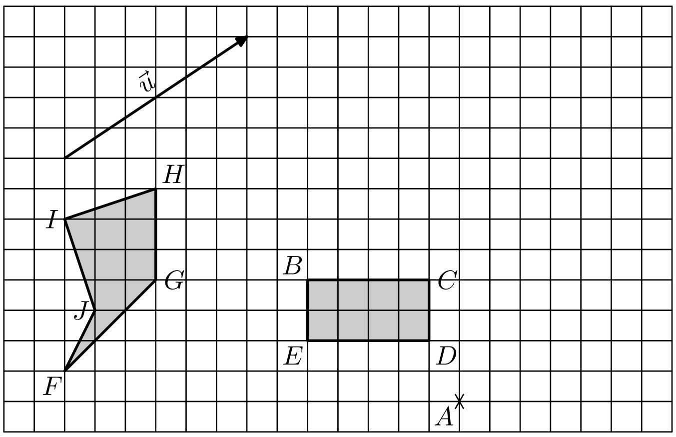


Les tracés doivent être effectués à la règle non-graduée et le compas :

1. Placer le point D, image du point C par la translation qui transforme A en B.
2. Placer le point F, image du point E par la translation du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
3. Placer le point G tel que G a pour image le point H par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Exercice K.4

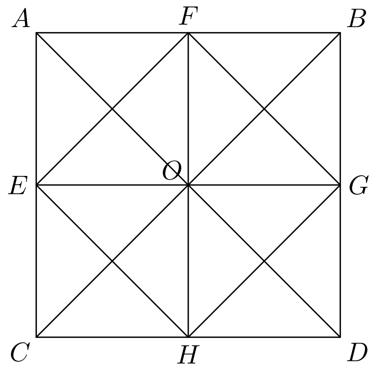
Dans le quadrillage ci-dessous, on considère la translation T de vecteur $\overrightarrow{u}$:



1. Tracer le symétrique A' du point A par la translation de vecteur $\vec{u}$.
2. Effectuer le tracé du symétrique du rectangle $BCDE$ par la translation T.
3. Tracer le translaté du polygone $FGHIJ$ par le vecteur $\overrightarrow{u}$.

Exercice K.5

$ABCD$ est un carré de centre O.
Les points E, F, G, H sont les milieux des côtés du carré.



1. Quel est l'image du point B par la rotation de centre O, d'angle 90^o dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.
2. Quel est l'image du point E par la translation de vecteur $\overrightarrow{OD}$.
3. Compléter les pointillés afin de vérifier les égalités :

a. $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{O\ldots} = \overrightarrow{\ldots G}$ b. $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{\ldots H}$

c. $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{O\ldots} = \overrightarrow{\ldots A}$

Exercice K.6

1. Pour chacun des quadrans ci-dessous :

a. Placer le point B translaté du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.

b. Tracer le point C translaté du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$.

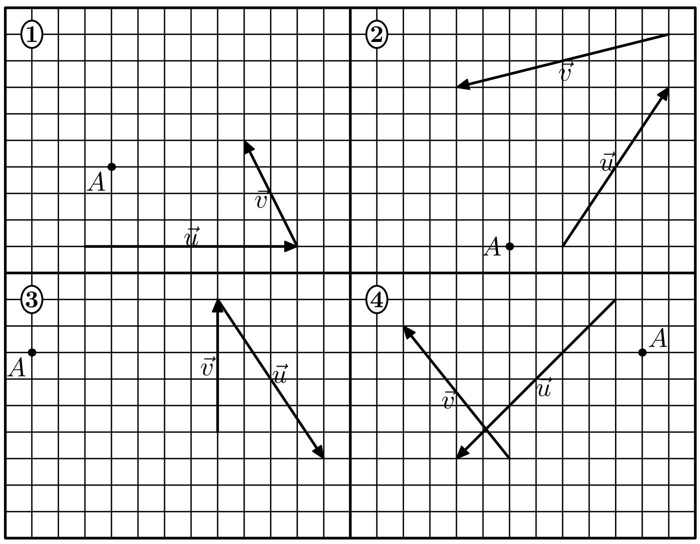
Dans chaque cadran, le point C obtenu s'appelle le translaté du point A par le vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.

2. Dans le premier quadran :

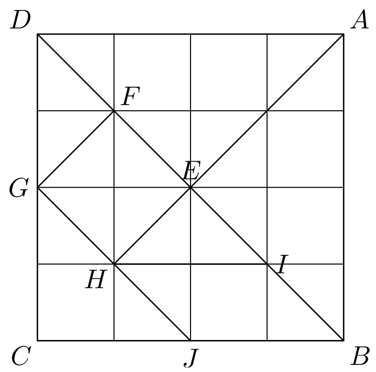
a. Placer le point B' translaté du point A par le vecteur $\overrightarrow{v}$.

b. Placer le point C' translaté du point B' par le vecteur $\overrightarrow{u}$.

c. Que pouvez-vous dire de la translation composé des translations de vecteurs $\overrightarrow{u}$ puis celle de $\overrightarrow{v}$ et de la translation composée des translations de vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\vec{u}$?



Exercice K.7



Pour chacune des phrases ci-dessous, compléter correctement les pointillés :

1. La composée de la translation de vecteur $\overrightarrow{EI}$ par celle de vecteur $\overrightarrow{FG}$ est une translation de vecteur $\overrightarrow{E\ldots}$

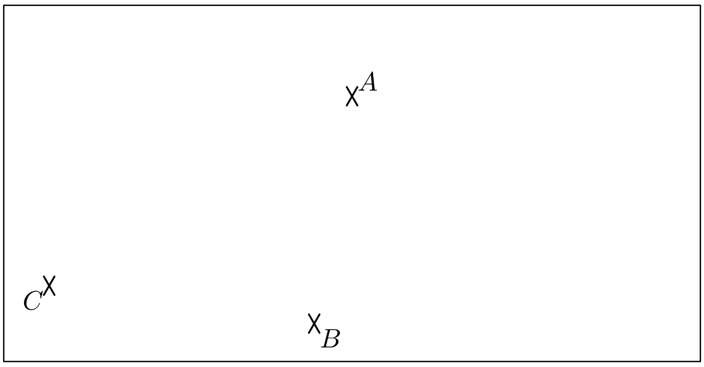
2. La composée de la translation de vecteur $\overrightarrow{JG}$ par celle de vecteur $\overrightarrow{JB}$ est une translation de vecteur $\overrightarrow{J\ldots}$

3. La composée de la translation de vecteur $\overrightarrow{GF}$ par celle de vecteur $\overrightarrow{GH}$ puis celle de $\overrightarrow{EI}$ est une translation de vecteur ......

4. La composée de la translation de vecteur $\overrightarrow{CH}$ par celle de vecteur $\overrightarrow{CJ}$ puis celle de vecteur $\overrightarrow{BH}$ est une translation de vecteur ......

Exercice K.8

A, B et C sont trois points du plan. Reproduiser une figure analogue à celle ci-dessous et compléter-la avec les questions suivantes :



1. Construire le point M image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

2. Donner un vecteur égal au vecteur $\overrightarrow{MA}$.

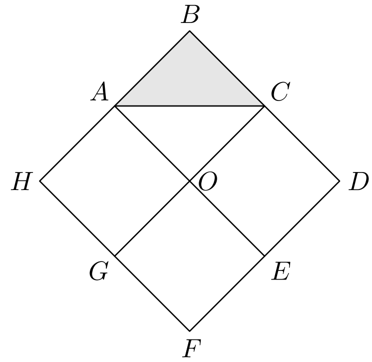
3. Construire K tel que : $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CK}$

4. Justifier l'égalité : $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AK}$.

5. Démontrer que : $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{AK}$.
Que peut-on dire pour le point A ?

Exercice K.9

$ABCO$, $CDEO$, $EFGO$ et $GHAO$ sont des carrés représentés ci-après. $BDFH$ est un carré de centre O.



1. a. Quelle est l'image du triangle ABC par la symétrie orthogonale d'axe (GC) ?

   b. Quelle est l'image du triangle ABC par la rotation de centre O, d'angle 90^o qui amène E en C ?

2. En utilisant des transformations dont on précisera les éléments caractéristiques *(centre de symétrie, axe de symétrie, ...)*, recopier et compléter les phrases suivantes sans justifier la réponse.

   a. le triangle GFE est l'image du triangle ABC par ...

   b. Le triangle OCD est l'image du triangle ABC par ...

Exercice K.10

On munit le plan d'un repère $\big(O\,;I\,;J\big)$. On considère alors le deux points A, B et le vecteur $\overrightarrow{u}$ définis par :

$A\,\big(0\,;-4\big)$; $B\,\big(2\,;4\big)$; $\overrightarrow{u}\,\big(-6\,;10\big)$

On définit le point C comme l'image du point A par la translation du vecteur $\overrightarrow{u}$.

1. Justifier que le point C a pour coordonnées $\big(-6\,;6\big)$.

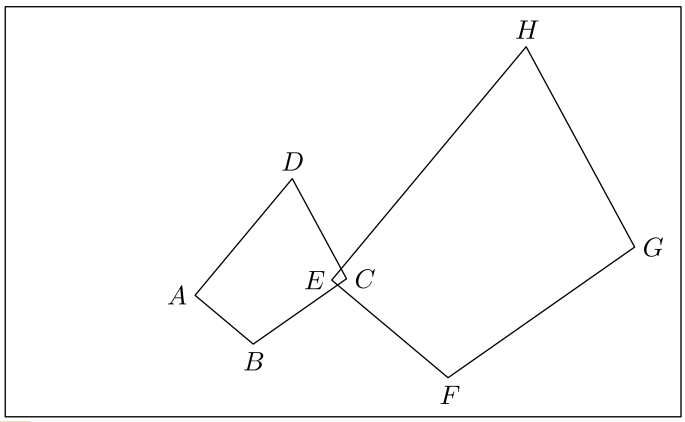
2. Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

On admet les mesures : $AB=2\sqrt{17}$; $AC=2\sqrt{34}$

3. Déterminer la nature du quadrilatère $ABCD$.

Exercice K.11

La figure ci-dessous représente deux quadrilatères $ABCD$ et $EFGH$:



1. Effectuer les mesures nécessaires pour compléter le tableau ci-dessous :

	AB	BC	CD	DA
Mesure *(en cm)*				

	EF	FG	GH	HE
Mesure *(en cm)*				

2. a. Tracer les droites (AE), (BF), (CG) et (DH). Que remarquez-vous ?

b. Nommer O le point d'intersection de ces droites.

c. Remplir les tableaux ci-dessous :

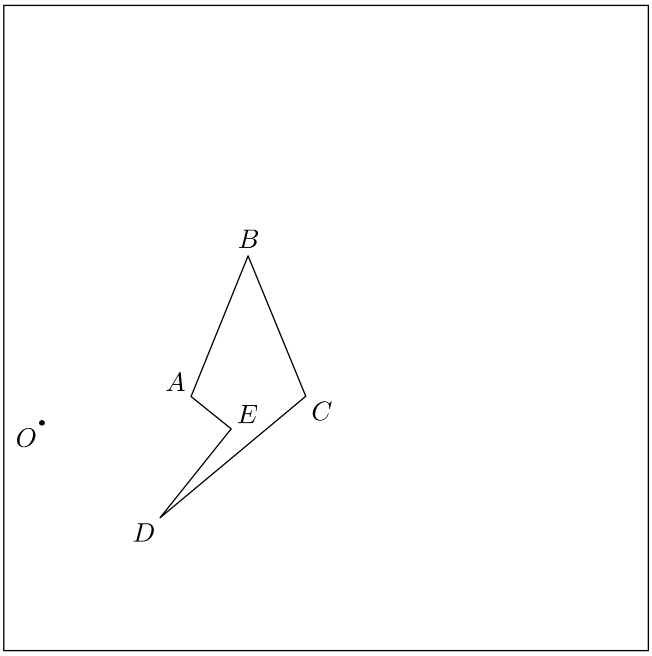
	OA	OB	OC	OD
Mesure *(en cm)*				

	OE	OF	OG	OH
Mesure *(en cm)*				

d. Que remarquez-vous ?

Exercice K.12

On considère le polygone $ABCDE$ ci-dessous et O un point du plan.



1. a. Placer le point A' sur la demi-droite $[OA)$ tel que : $OA' = 2 \cdot OA$

b. Placer le point B' sur la demi-droite $[OB)$ tel que : $OB' = 2 \cdot OB$

c. Faire de même avec les points C, D et E.

d. Tracer le polygone $A'B'C'D'E'$

2. a. Effectuer les mesures suivantes :

	AB	BC	CD	DE	EA
Mesure *(en cm)*					

	$A'B'$	$B'C'$	$C'D'$	$D'E'$	$E'A'$
Mesure *(en cm)*					

b. Que pouvez-vous dire de ces deux polygones ?

3. a. Quelle conjecture pouvez-vous faire sur les droites (AB) et $(A'B')$?

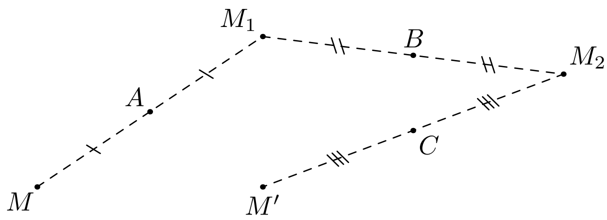
b. Quel théorème permet de confirmer votre conjecture ?

Exercice K.13

Soit A, B, C trois points distincts deux à deux du plan et M un point quelconque du plan.

La figure ci-contre représente l'image M' de M par la transformation $S_C \circ S_B \circ S_A$ où :

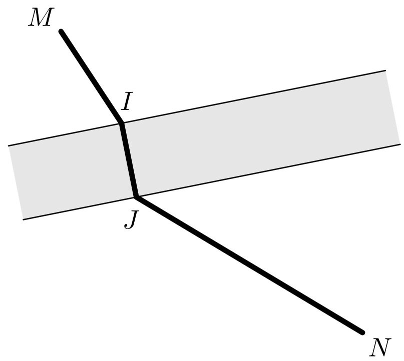
$$S_A(M) = M_1 \quad ; \quad S_B(M_1) = M_2 \quad ; \quad S_C(M_2) = M'$$



Déterminer, s'ils existent, les invariants de la transformation $S_C \circ S_B \circ S_A$.

Exercice K.14

On doit construire une route passant de la ville M à la ville N.
Cette route doit passer au dessus d'une rivière : le pont sera perpendiculaire au lit de la rivière.



Placer le pont *(plus précisément les points I et J)* afin que la longueur de la route soit minimale.

Indication : pensez à l'inégalité triangulaire.

Exercice K.15

On considère dans le plan un carré $ABCD$. On note I le milieu de $[AB]$.

1. Simplifier l'écriture de la transformation suivante :

$$t_{\overrightarrow{AB}} \circ t_{\overrightarrow{CA}} \circ t_{\overrightarrow{AC}} \circ t_{\overrightarrow{BC}}$$

2. Etablir la relation suivante :

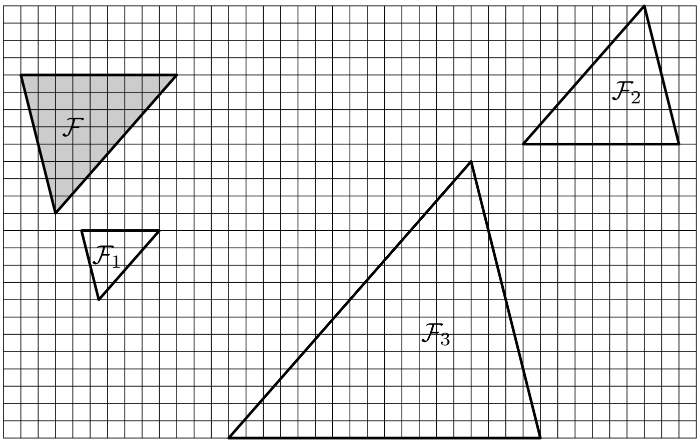
$$t_{\overrightarrow{BC}} \circ S_I \circ S_B = t_{\overrightarrow{BD}}$$

3. Déterminer le point M vérifiant la relation suivante :

$$S_I \circ S_B = S_M \circ S_C$$

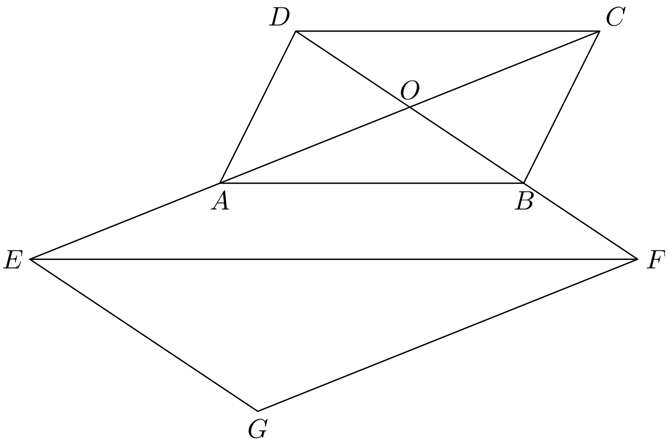
Exercice K.16

La figure $\mathcal{F}$ a subit trois homothéties distinctes ; pour chacune d'entre elles, déterminer son centre et son rapport de l'homothétie :



Exercice K.17

Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O.
On note E le symétrique de O par rapport à A, F le symétrique de O par rapport à B et G le point tel que $OEGF$ est un parallélogramme.



Préciser, dans chaque cas, le centre et le rapport de l'homothétie qui transforme :

a. le triangle OEF en le triangle OAB ;

b. Le triangle OCD en le triangle OEF ;

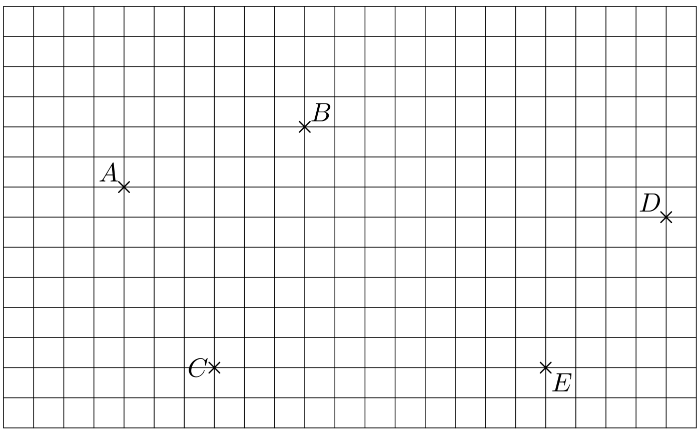
c. Le triangle EFG en le triangle OEF ;

d. Le triangle OCD en le triangle EFG.

(On fera apparaître les centres des homothéties sur la figure)

Exercice K.18

On considère les cinq point du plan représenés ci-dessous :



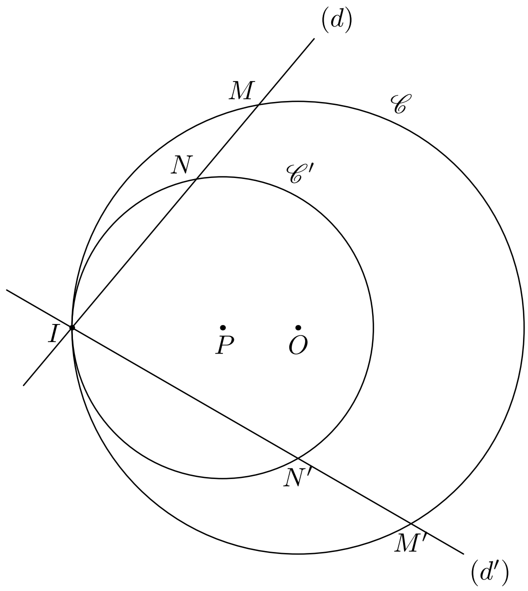
1. Déterminer le centre et le rapport de l'homothétie transformant A en C et B en D.

2. Déterminer le centre de l'homothétie de rapport $\dfrac{3}{2}$ transformant le point B en le point A.

3. Justifier qu'il n'existe pas d'homothéties transformant B en C et D en E.

Exercice K.19

On considère deux points du plan O et P séparés de $1\,cm$; le cercle $\mathscr{C}$ a pour centre le point O et un rayon de $3\,cm$; le cercle $\mathscr{C}'$ a pour centre P et son rayon est de $2\,cm$.
Soit I le point d'intersection de la droite (OP) avec le cercle $\mathscr{C}$.
La droite (d) passant par I intercepte les cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ respectivement en M et en N. La droite (d') passant par I est sécante au cercle $\mathscr{C}$ en M' et coupe également le cercle $\mathscr{C}'$ en N'.



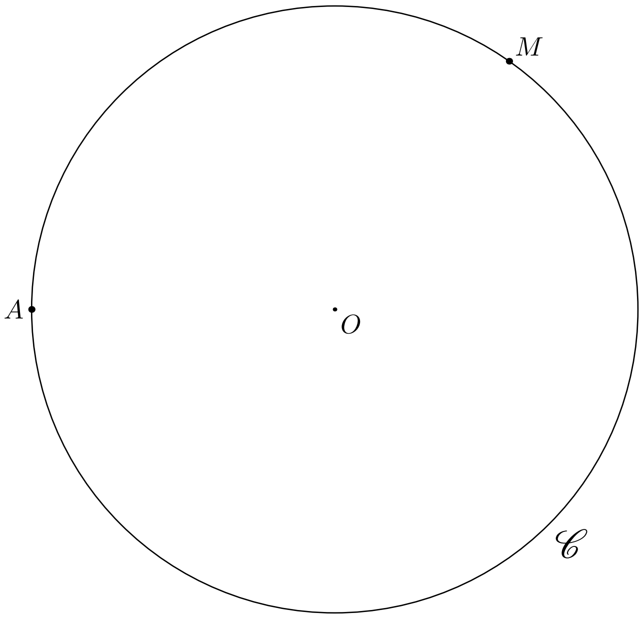
1. Montrer que le point I appartient également au cercle $\mathscr{C}'$.
Que pouvez-vous de la position relative des deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

2. Déterminer le centre et le rapport de l'homothétie transformant le cercle $\mathscr{C}$ en le cercle $\mathscr{C}'$.

3. En déduire que les droites (NN') et (MM') sont parallèles.

Exercice K.20

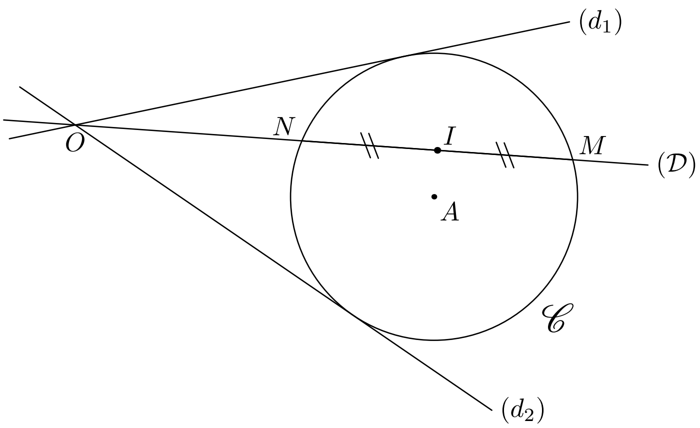
On considère un cercle $\mathscr{C}$, un point $A \in \mathscr{C}$ et un point M qui décrit le cercle : c'est à dire que la position de M est variable et il parcourera le cercle $\mathscr{C}$.
On considère le point I milieu de $[AM]$.



1. Placer le point I sur la figure ci-dessus.
2. a. Placer le point M diamétralement opposé au point A. Où se trouve alors le point I.
   b. Si le point M se trouve en A, où se trouve le point I.
   c. Placer le point M à quatre autres endroits possibles et construire à chaque fois le point I associé
3. Lorsque le point M décrit l'intégralité du cercle $\mathscr{C}$ quel ensemble décrit le point I.

Exercice K.21

On considère un cercle $\mathscr{C}$, un point O et les deux droites (d_1) et (d_2) tangentes au cercle passant par le point O.



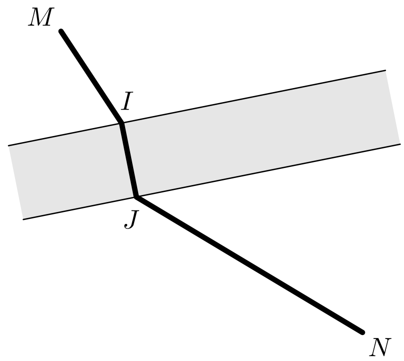
On considère une droite $(\mathcal{D})$ passant par O et comprise entre les droites (d_1) et (d_2) : on est libre de placer la droite $(\mathcal{D})$ a n'importe quel endroit mais assujetti à ces deux contraintes.

Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble décrit par I lorsque la droite $(\mathcal{D})$ décrit l'ensemble des droites passant par O et comprise entre (d_1) et (d_2) :

1. a. Où se trouve le point I lorsque la droite $(\mathcal{D})$ est tel que les points M et N soient diamétralement opposés.
   b. Tracer la droite $(\mathcal{D})$ à trois endroits différents ainsi que le point I associé.
2. a. Faîtes une conjecture quant à l'ensemble de points décrit par le point I.
   b. Etablir cette conjecture.

Exercice K.22

On doit construire une route passant de la ville M à la ville N.
Cette route doit passer au dessus d'une rivière : le pont sera perpendiculaire au lit de la rivière.



Placer le pont *(plus précisément les points I et J)* afin que la longueur de la route soit minimale.

Indication : pensez à l'inégalité triangulaire.

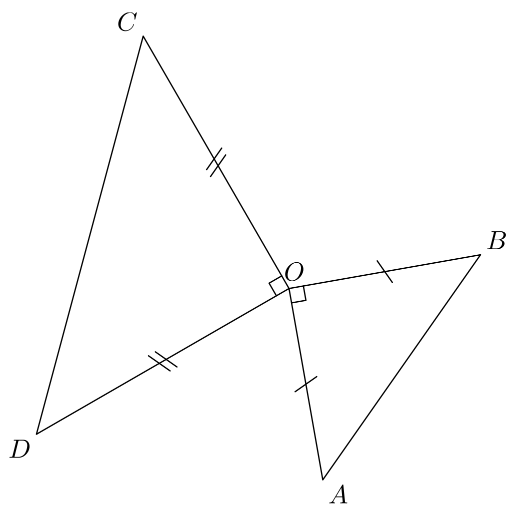
Exercice K.23

On considère un segment $[AB]$ tel que $AB = 8\,cm$.
Le point M appartient au segment $[AB]$. On construit à partir de ces points le triangle équilatéral ABC. Le point M sera considéré comme variable et il décrira l'ensemble du segment $[AB]$.

1. Réaliser une figure illustrant cette configuration.
2. a. Où se trouve le point C lorsque M se trouve en B ?
   b. Où se trouve le point C lorsque M se trouve en A ?
3. Choisir deux autres emplacements du point M et compléter les figures.
4. a. Quelle conjecture pouvez-vous faire sur l'ensemble de points décrit par le point P lorsque M décrit le segment $[AB]$.
   b. Prouver cette conjecture.

Exercice K.24

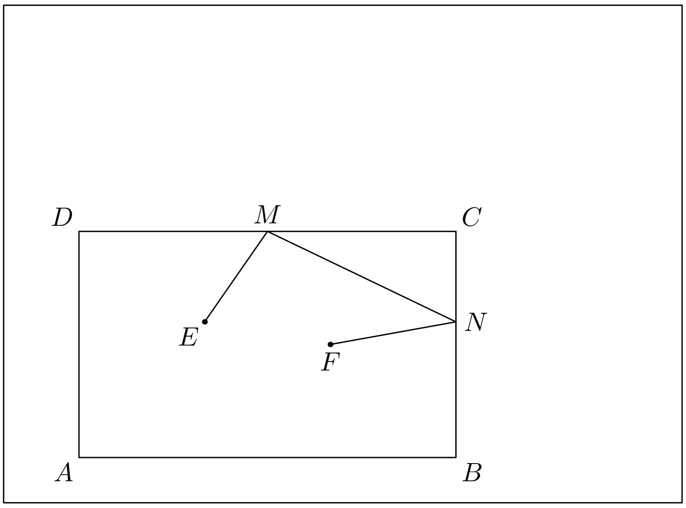
On considère les deux triangles OCD et OAB rectangles isocèles en O



A l 'aide d'une rotation, dont on indiquera ses caractéristiques, montrer que les segments $[CA]$ et $[DB]$ ont même longueur.

Exercice K.25

On considère un rectangle $ABCD$, M un point de $[DC]$ et N un point de $[BC]$.

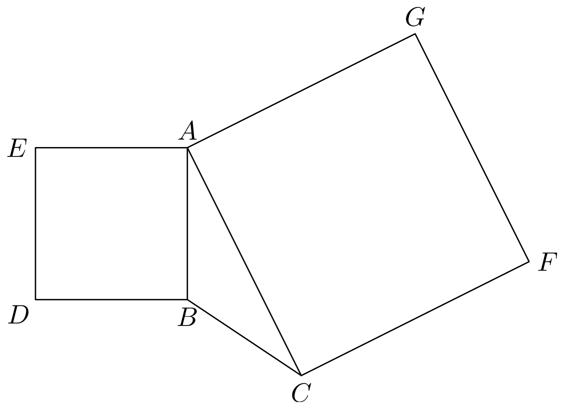


Déterminer, sur la figure ci-dessus, le positionnement des points M et N de sorte que le chemin passant par les points E, M, N et F soient le plus courts possible.

(aucune justification n'est demandée).

Exercice K.26

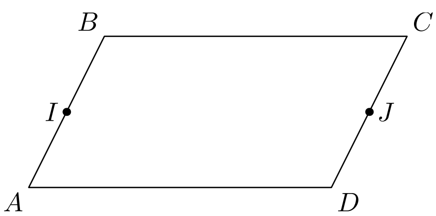
La figure ci-contre est composée du triangle ABC sur lequel nous avons construit à l'extérieur de ce triangle deux carrées : $EABD$ et $ACFG$.



1. Montrer que les triangles EAC et GAB sont des triangles isométriques.
2. En déduire que : $BG = EC$.

Exercice K.27

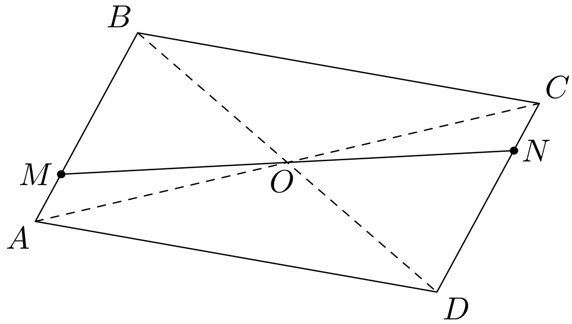
Soit $ABCD$ un parallélogramme. On note I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[DC]$.



1. Montrer que les triangles ADJ et CBI sont isométriques.
2. En déduire que : $AJ = CI$.

Exercice K.28

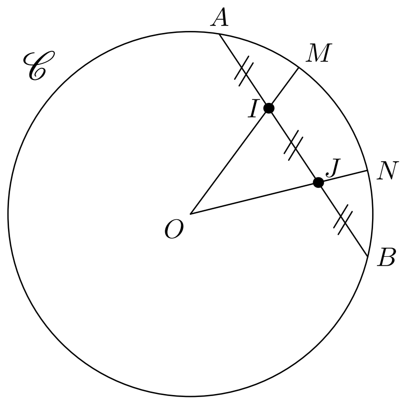
Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O et M un point du segment $[AB]$.
On note N le point d'intersection de (OM) et de (DC).



1. Sans isométrie :
   a. Démontrer que les triangles MBO et NDO sont des triangles isométriques
   b. En déduire que O est milieu du segment $[MN]$.
   c. Que pouvez-vous dire du quadrilatère $BNDM$.
2. Avec les isométries :
   a. Montrer que le point O est le milieu du segment $[MN]$.
   b. Montrer que les triangles AMO et CNO sont isométriques.

Exercice K.29

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O, et A, B deux points du cercle. Sur la corde $[AB]$ du cercle, nous plaçons les points I et J tels que : $AI = IJ = JB$



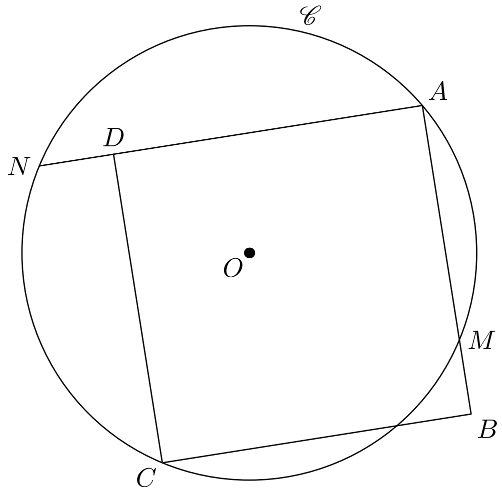
On note respectivement M et N les points d'intersection des demi-droites $[OI)$ et $[OJ)$ avec le cercle $\mathscr{C}$.

1. Quelle est la nature du triangle ABO
2. Montrer que les triangles AIO et OJB sont isométriques.
3. Quel est la nature du triangle IJO ?
4. Montrer que les droites (IJ) et (MN) sont parallèles

Exercice K.30

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O. On considère le carré $ABCD$ ayant ses sommets A et C sur le cercle.

On utilisera les propriétés des angles inscrits et angles au centre.

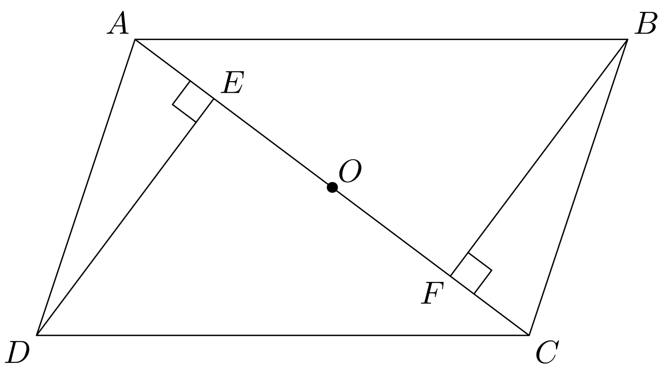


1. Montrer que $[MN]$ est un diamètre de $\mathscr{C}$.
2. Montrez que : $\widehat{NOC} = 90^o$
   Que pouvez vous dire des longueurs CM et CN ?
3. En remarquant que $\widehat{NCM} = 90^o$, comparer les deux angles $\widehat{MCB}$ et $\widehat{NCD}$
4. En déduire que les triangles NDC et MCB sont isométriques.

On vient d'établir que l'égalité de longueurs suivante :
$ND = BM$

Exercice K.31

On considère la configuration suivante :



1. Reproduisez sur votre cahier une figure ayant les mêmes propriétés que celle ci-dessus.

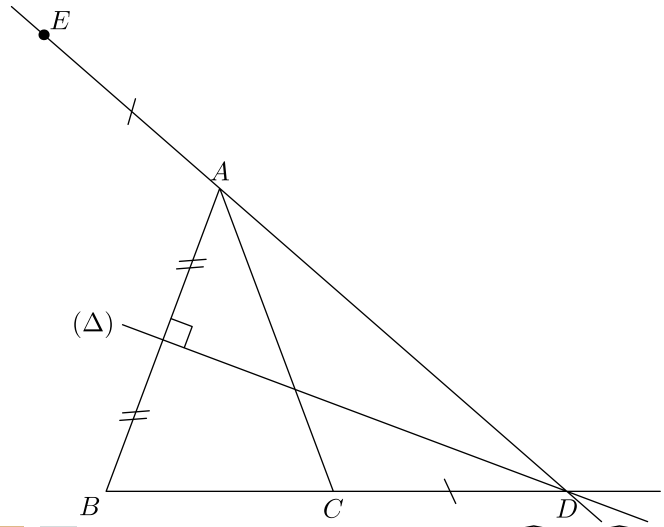
$$\begin{cases} ABCD \text{ est un parallélogramme} \\ O \text{ est le centre de ce parallélogramme} \\ E \text{ est la projection orthogonale de } D \text{ sur la droite } (AC) \\ F \text{ est la projection orthogonale de } B \text{ sur la droite } (AC) \end{cases}$$

2. Que pouvez-vous dire des angles $\widehat{EOD}$ et $\widehat{BOF}$?
3. Montrer que les triangles ODE et OBF sont isométriques.
4. En déduire que : $OE = OF$.

Exercice K.32

Soient ABC un triangle isocèle en A et Δ la médiatrice du segment $[AB]$. On note D le point d'intersection des droites Δ et (BC).

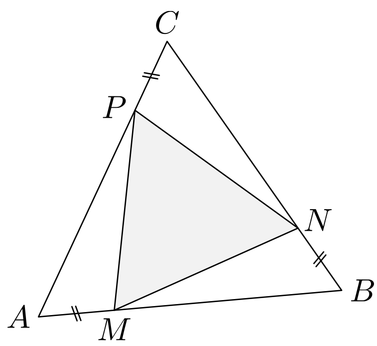
On place le point E sur la droite (AD) comme ci-contre et vérifiant $AE = CD$.



1. a. Que pouvez-vous dire des angles $\widehat{DAB}$, $\widehat{DBA}$ et $\widehat{ACB}$? Justifier.
   b. Comparez les angles $\widehat{DCA}$ et $\widehat{EAB}$
2. En déduire que les triangles ADC et AEB sont isométriques

Exercice K.33

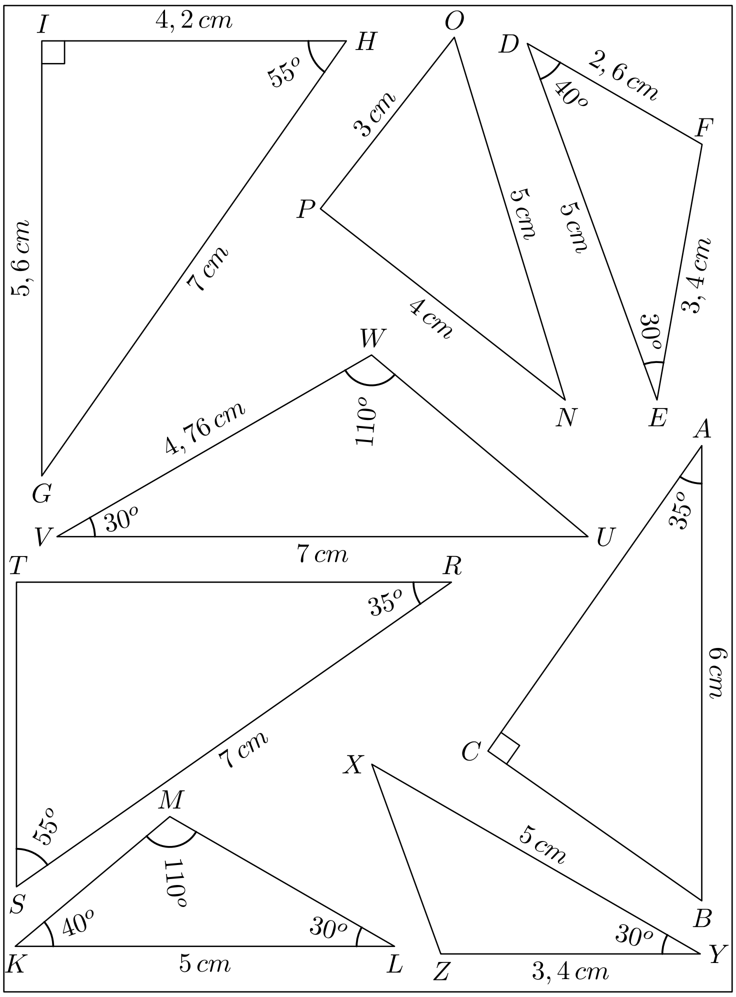
Soit ABC un triangle équilatéral.
Soient M, N et P trois points appartenant respectivement aux segments $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$ tel que :
$AM = BN = CP$



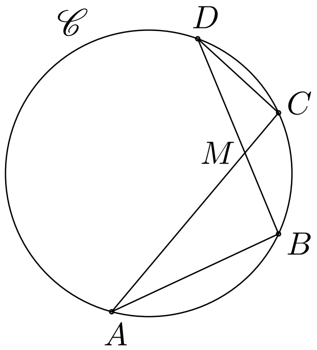
1. Démontrer que les triangles APM, BMN et CNP sont des triangles isométriques
2. En déduire que le triangle MNP est un triangle équilatéral.

Exercice K.34

1. En justifiant, déterminer tous les triangles isométriques entre eux.
   Déterminer les mesures manquantes.
2. Repérer les triangles semblables.
   Déterminer les mesures manquantes.



Exercice K.35

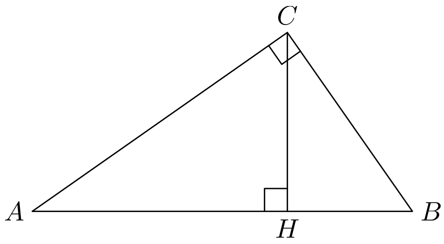


Dans la figure ci-contre, les points A, B, C et D sont quatre points du cercle $\mathscr{C}$.

Montrer que les triangles DCM et ABM sont semblables.

Exercice K.36

Dans la figure ci-dessous, le triangle ABC est rectangle en C et on note H le pied de la hauteur issue du sommet C.



Montrer que les triangles ACH, CHB et ACB sont des triangles semblables.

Exercice K.37

$ABCD$ est un carré de centre O et de côté $10cm$. La bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ coupe la diagonale $[BD]$ en K et le côté $[BC]$ en L.

1. Démontrer que les triangles AOK et ABL sont semblables.
2. Calculer le coefficient de réduction du triangle ABL

Exercice K.38

Soient trois points E, D et F trois points d'un cercle $\mathscr{C}$. La bissectrice de l'angle $\widehat{EDF}$ coupe $\mathscr{C}$ en K et coupe la droite (EF) en M.

1. Justifier l'égalité des angles $\widehat{EDK}$ et $\widehat{EFK}$
2. Justifier l'égalité des angles $\widehat{DEF}$ et $\widehat{DKF}$
3. En déduire que les triangles DEM et FKM sont semblables.

Exercice K.39

Deux triangles ABC et $A'B'C'$ ont la même forme.

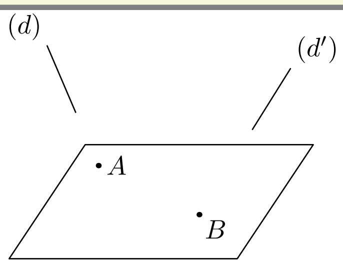
Le rapport $\dfrac{A'B'}{AB}$ est égal au nombre strictement positif k.

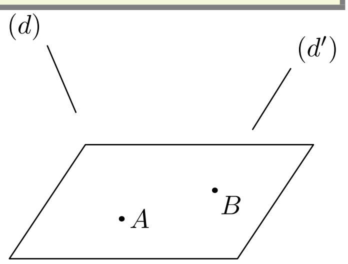
1. Soit I, le milieu de $[BC]$ et I' le milieu de $[B'C']$.
   Démontrer que : $\dfrac{A'I'}{AI} = k$.
2. Soit H le pied de la hauteur issue de A du triangle ABC, et H' le pied de la hauteur issue de A' du triangle $A'B'C'$.
   Déterminer le rapport $\dfrac{A'H'}{AH}$.

L. Géométrie dans l'espace:

Exercice L.1

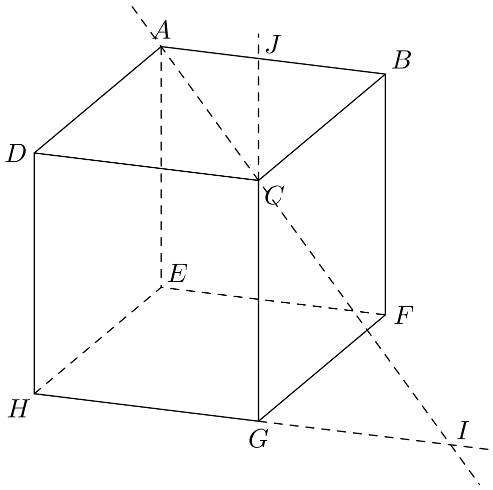
Vérifier que sur les trois dessins ci-dessous, A et B sont les points d'intersection respectives des droites (d) et (d') avec le plan (P)





Exercice L.2

Dans l'espace, on considère le cube $ABCDEFGH$ dont la représentation est donnée ci-dessous :



Dans la représentation suivante, I est un point appartenant à la droite (GH) et J appartient à la droite (AB).

Quatre affirmations sont proposées ci-dessous. Dire si chacune de ces propositions est vrai ou fause en justifiant votre réponse.

1. Le triangle EHD rectangle en H.
2. Les droites (AC) et (GH) sont sécantes en I
3. Le quadrilatère $BCHE$ est un rectangle.
4. J est le point d'intersection de (CG) et (AB)

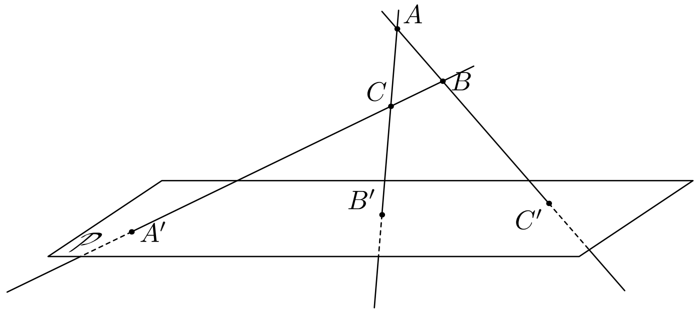
Exercice L.3

On considère dans l'espace un plan $(\mathcal{P})$ et A, B, C n'appartenant pas à ce plan et non-alignés. On note :

A' le point d'intersection de la droite (BC) avec $(\mathcal{P})$;

B' le point d'intersection de la droite (AC) avec $(\mathcal{P})$;

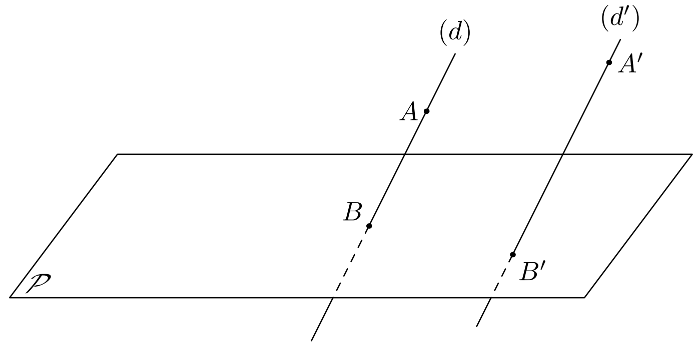
C' est le point d'intersection de la droite (AB) avec $(\mathcal{P})$;



Démontrer que les points A', B' et C' sont alignés.

Exercice L.4

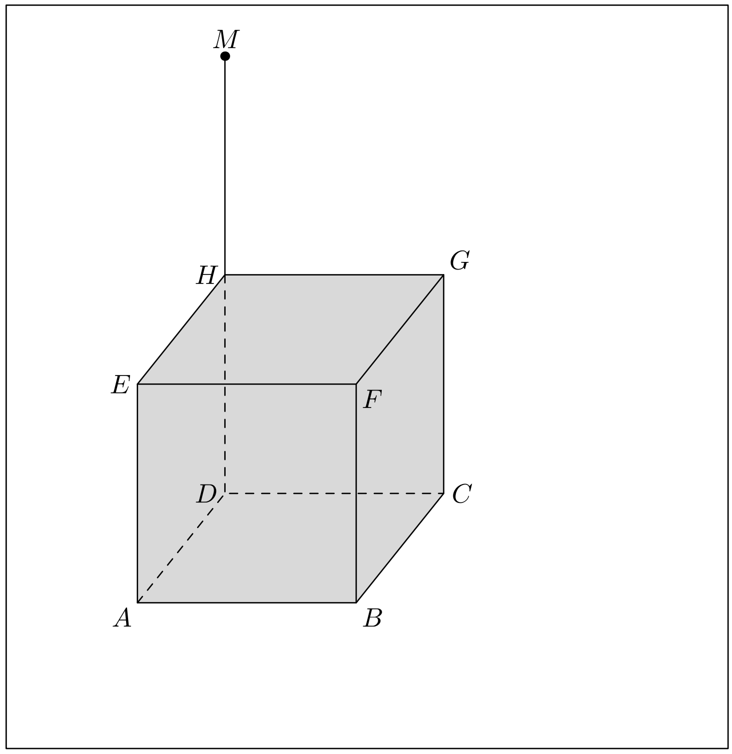
Dans l'espace, on considère un plan $(\mathcal{P})$ et deux droites (d) et (d') parallèles. A et B sont respectivement des points des droites (d) et (d'). On nomme A' et B' les points d'intersections respectifs des droites (d) et (d') avec le plan $(\mathcal{P})$.



1. Justifier que les points A, B, A' et B' sont coplanaires.
2. Justifier que les droites (AA') et (BB') ne sont pas parallèles.
3. Placer, dans la figure, le point d'intersection des droites (AA') et (BB').

Exercice L.5

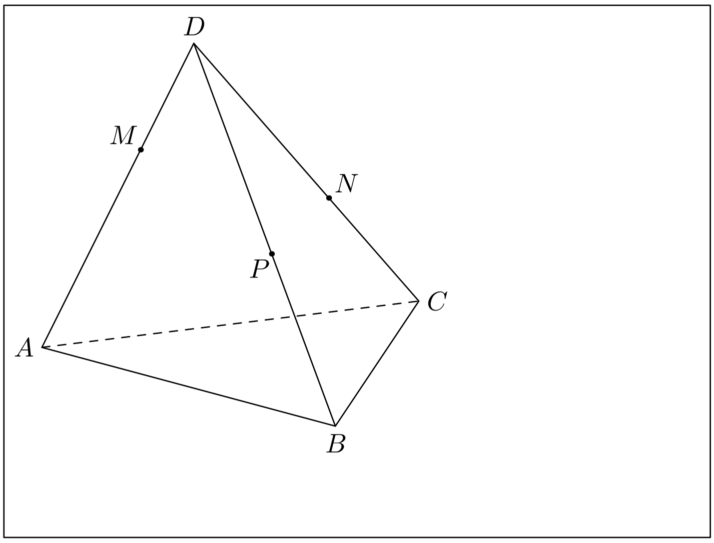
Soit $ABCDEFGH$ un cube. On considère une source lumineuse M placé au dessus du cube tel que : $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{HM}$



Dessiner l'ombre créée par cette source lumineuse autour du cube.

Exercice L.6

Dans l'espace, on considère le tétraèdre $ABCD$. On note M, N, P des points appartenant respectivement aux arêtes $[DA]$, $[DC]$, $[DB]$:

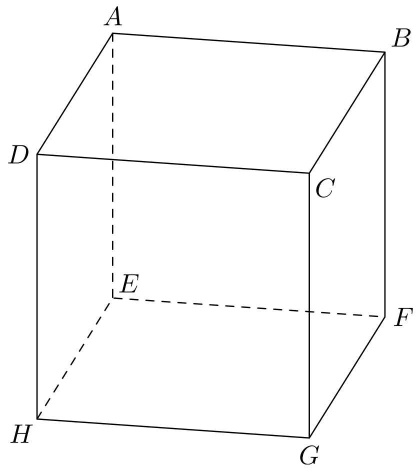


Tracer l'intersection du plan (ABC) et du plan (MNP).

Exercice L.7

Définition :

Deux droites sont coplanaires si elles appartiennent à un même plan.



Dans le cube $ABCDEFGH$ ci-contre :

1. Parmi les couples de droites ci-dessous, lesquelles sont coplanaires entre elles :

   a. (EA) et (FB) b. (HE) et (CB)

   c. (HC) et (AD) d. (GA) et (CA)

   e. (HB) et (DA)

Dans la question suivante, nous allons utiliser les trois définitions suivantes :

Définition :

Deux droites sont parallèles dans l'espace si elles sont **coplanaires** *et si elles sont parallèles dans ce plan.*

Définition :

Deux plans sont parallèles lorsqu'ils n'ont aucun point en commun ou alors lorsqu'ils sont confondus.

Définition :

Une droite et un plan sont parallèles lorsque :
ou bien $\mathcal{P}$ et Δ n'ont aucun point en commun.

ou alors la droite Δ est incluse dans le plan $\mathcal{P}$

2. Parmi les couples ci-dessous, lesquels définissent un couple d'objets parallèles :

   a. (GD) et (AB) b. (EB) et (HGC)

   c. (EF) et (DC) d. (BAH) et (GFH)

Vocabulaire :

On parle de droites perpendiculaires uniquement dans le cas de droites coplanaires

Définition :

Deux droites sont orthogonales si elles sont respectivement parallèles à deux droites perpendiculaires d'un même plan

Une droite est orthogonale à un plan si elle est orthogonale à toutes droites de ce plan.

3. Donnez les couples ci-dessous qui sont orthogonaux :

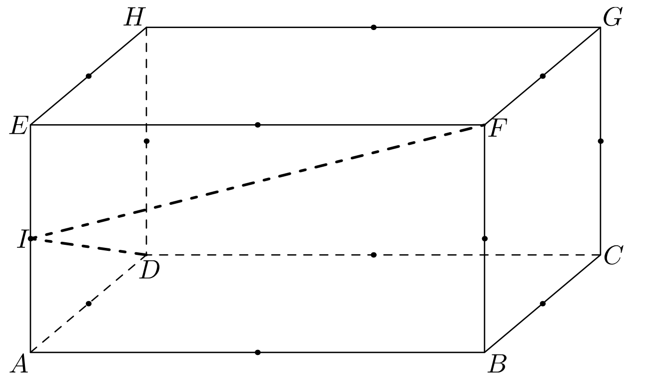
   a. (EF) et (HE) b. (DB) et (AB)

   c. (HD) et (ABC) d. (HB) et (BFG)

   e. (AC) et (HDF) f. (HF) et (GCF)

Exercice L.8

On considère le parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous :



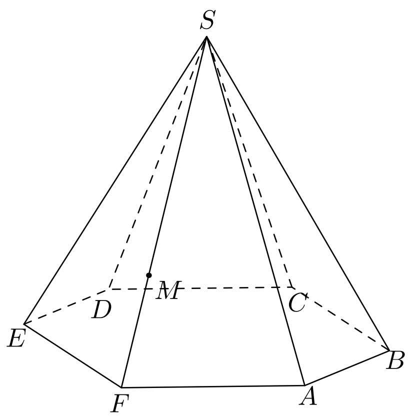
Le point I est le milieu du segment $[AE]$. Les milieux des différentes arêtes sont représentés sur la figure.

Représenter la section du plan (DIF) et du parallélépipède. Justifier votre construction.

Exercice L.9

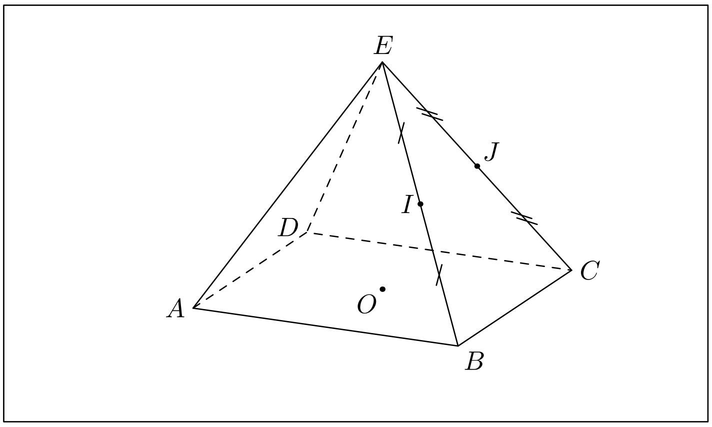
On considère la pyramide $ABCDEFS$ de sommet S dont la base est un hexagone régulier. On note M un point du segment $[SF]$.

Tracer le plan section de la pyramide avec le plan $(\mathcal{P})$ parallèle à son plan de bse passant par le point M.



Exercice L.10

On considère la pyramide $ABCDE$ à base rectangulaire $ABCD$ représentée ci-dessous :

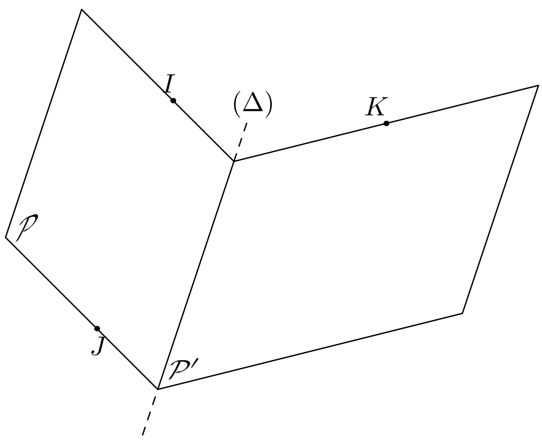


On note I et J les milieux respectifs des segments $[EB]$ et $[EC]$, et O le centre du rectangle $ABCD$.

1. a. Justifier que les droites (IJ) et (BC) sont parallèles.
   b. Justifier que les droites (IJ) et (AD) sont parallèles.
2. Justifier que le droite (AD) est parallèle au plan (OIJ).

Exercice L.11

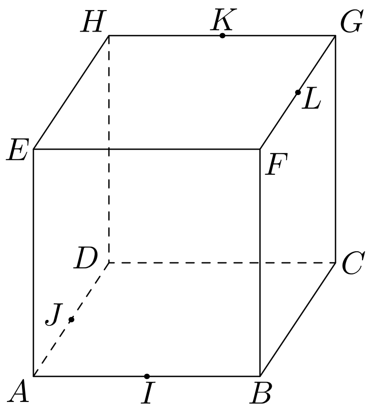
Soit $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ deux plans sécants. Soient I, J deux points du plan $(\mathcal{P})$ et K un point du plan $(\mathcal{P}')$.



Tracer la droite d'intersection des plans $(\mathcal{P}')$ et (IJK). Justifier votre démarche.

Exercice L.12

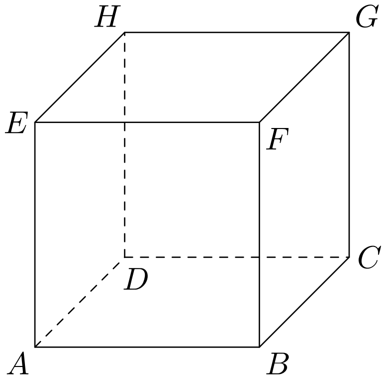
On considère le cube ci-dessous où les points I, J, K et L sont les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[AD]$, $[HG]$ et $[GF]$.



1. Justifier que les droites (IJ) et (BD) sont parallèles.
2. a. Justifier que les points H, D, B et F sont coplanaires.
   b. Justifier que les droites (HF) et (DB) sont parallèles.
   c. Démontrer que les points I, J, K, L sont coplanaires.
3. Quel est la nature du quadrilatère $IJKL$?

Exercice L.13

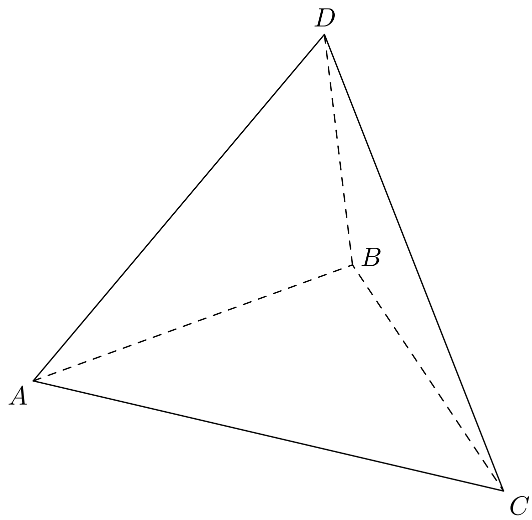
On considère le cube $ABCDEFGH$ de côté $5\,cm$ représenté ci-dessous :



1. Montrez que le plan (ABC) est orthogonal à la droite (AE)
2. Calculez la longueur de la diagonale $[EC]$.

Exercice L.14

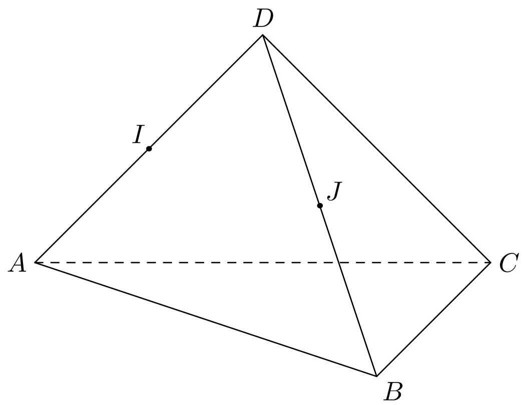
Dans l'espace, on considère le tétraèdre régulier $ABCD$: toutes ces faces sont des triangles équilatérals.



1. a. Dessiner la hauteur du triangle ABC issue du sommet C.
   b. Dessiner la hauteur du triangle ABD issue du sommet D.
2. Démontrer que les droites (AD) et (BC) sont orthogonales.

Exercice L.15

Dans l'espace, on considère le tétraèdre $ABCD$; I et J sont les milieux respectifs des arêtes $[AD]$ et $[BD]$. $[AD]$ *(resp.* $[BD]$*).*

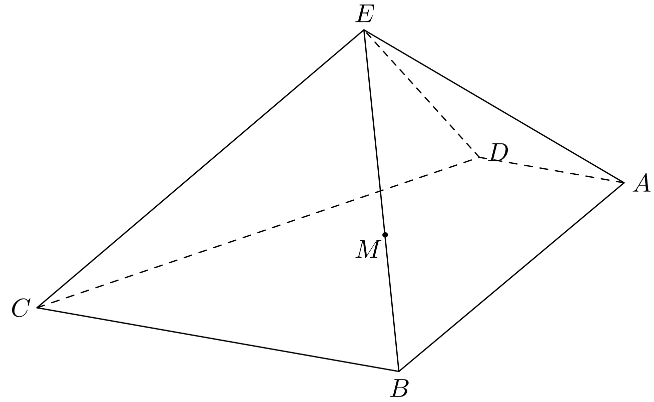


1. Montrer que la droite (IJ) est parallèle à la droite (AB).Tracez le segment $[IJ]$.
2. En vous aidant d'un raisonnement similaire, tracer le point K milieu du segment $[CD]$.
3. Montrer que les deux plans (IJK) et (ABC) sont paral-

lèles ?

Exercice L.16

On considère la pyramide $ABCDE$ de sommet E dont la base est un trapèze avec $(BC)/\!/(AD)$. Soit M un point du segment $[BE]$.



Tracer la section de la pyramide par le plan (ADM). Justifier votre construction.

De nombreux autres exercices sur le site MaliMath

Ce livret est téléchargeable gratuitement

http://malimath.net

Date de parution : 09/2015