# Dixième / Equations, inéquations et système

## 1. Rappels :

**Exercice 4432**

Développer et donner la forme réduite des expressions ci-dessous :

a. $(3x+2)(5-2x)$
b. $(x-1)(3x^2-2)$
c. $2(3-2x)x-2(x-2)$
d. $\big[2+2(x-5)\big](x-1)$
e. $(5x+1)\big[2(x-1)-5x\big]$

**Correction 4432**

a. $(3x+2)(5-2x) = 15x-6x^2+10-4x$
$= -6x^2+11x+10$

b. $(x-1)(3x^2-2) = 3x^3-2x-3x^2+2$
$= 3x^3-3x^2-2x+2$

c. $2(3-2x)x-2(x-2) = 2(3-2x)x-2(x-2)$
$= (6-4x)x-2x+4 = 6x-4x^2-2x+4$
$= -4x^2+4x+4$

d. $\big[2+2(x-5)\big](x-1) = (2+2x-10)(x-1)$
$= (2x-8)(x-1) = 2x^2-2x-8x+8$
$= 2x^2-10x+8$

e. $(5x+1)\big[2(x-1)-5x\big] = (5x+1)(2x-2-5x)$
$= (5x+1)(-3x-2) = -15x^2-10x-3x-2$
$= -15x^2-13x-2$

**Exercice 4497**

Développer les expressions suivantes :

a. $(2x+1)(3-x)$
b. $(5-2x)(3-x)-3(3-2x)$
c. $(x+1)^2+(2x-1)^2$
d. $(x-2)(2x-1)(5-x)$

**Correction 4497**

a. $(2x+1)(3-x) = 6x-2x^2+3-x$
$= -2x^2+5x+3$

b. $(5-2x)(3-x)-3(3-2x)$
$= 15-5x-6x+2x^2-9+6x$
$= 2x^2-5x+6$

c. $(x+1)^2+(2x-1)^2 = (x^2+2x+1)+(4x^2-4x+1)$
$= 5x^2-2x+2$

d. $(x-2)(2x-1)(5-x)$
$= \big(2x^2-x-4x+2\big)(5-x)$
$= \big(2x^2-5x+2\big)(5-x)$
$= 10x^2-2x^3-25x+5x^2+10-2x$
$= -2x^3+15x^2-27x+10$

**Exercice 337**

Résoudre les équations suivantes :

a. $x-1=\dfrac{3}{2}$
b. $\dfrac{1}{2}x-1=0$
c. $x+1=2x-1$
d. $2(x-1)-4(2-x)=3x-7$
e. $x^2+x+1=(x+1)(x-1)$

**Correction 337**

a.
$$x-1=\frac{3}{2}$$
$$x=\frac{3}{2}+1$$
$$x=\frac{5}{2}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est : $\mathcal{S}=\left\{\dfrac{5}{2}\right\}$

b.
$$\frac{1}{2}x-1=0$$
$$\frac{1}{2}x=1$$
$$x=2$$

L'ensemble des solutions de l'équation est : $\mathcal{S}=\{2\}$

c.
$$x+1=2x-1$$
$$x-2x=-1-1$$
$$-x=-2$$
$$x=2$$

L'ensemble des solutions de l'équation est : $\mathcal{S}=\{2\}$

d.
$$2(x-1)-4(2-x)=3x-7$$
$$2x-2-8+4x=3x-7$$
$$6x-10=3x-7$$
$$6x-3x=-7+10$$
$$3x=3$$
$$x=\frac{3}{3}=1$$

L'ensemble des solutions de l'équation est : $\mathcal{S}=\{1\}$

e.
$$x^2+x+1=(x+1)(x-1)$$
$$x^2+x+1=x^2-1$$
$$x^2+x-x^2=-1-1$$
$$x=-2$$

L'ensemble des solutions de l'équation est : $\mathcal{S}=\{-2\}$

## 4. Factorisation : identité remarquable :

### Exercice 332

1. Développer les expressions suivante :

a. $2(3x-1)(2-x)$ b. $(2x+3)^2$

c. $(3x-2)(3x+2)$ d. $(5x-6)^2$

2. Factoriser les expressions suivantes :

a. $(x+1)(1-x)-(x+1)(2x+1)$

b. $3(2x-2)+(x+1)(1-x)$

c. $2x(x+1)+(x+1)(x^2+1)$

d. $12x^2-6x+(2x-1)(5-2x)$

### Correction 332

1. a. $2(3x-1)(2-x) = (6x-2)(2-x)$
$= 12x-6x^2-4+2x$
$= -6x^2+14x-4$

b. $(2x+3)^2 = 4x^2+12x+9$

c. $(3x-2)(3x+2) = (3x)^2-2^2$
$= 9x^2-4$

d. $(5x-6)^2 = (5x)^2-2\times5x\times6+6^2$
$= 25x^2-60x+36$

2. a. $(x+1)(1-x)-(x+1)(2x+1)$
$= (x+1)\big[(1-x)-(2x+1)\big]$
$= (x+1)(1-x-2x-1)$
$= (x+1)(-3x)$
$= -3x(x+1)$

b. $3(2x-2)+(x+1)(1-x)$
$= 3\big[2(x-1)\big]+(x+1)\big[-(x-1)\big]$
$= 6(x-1)-(x+1)(x-1)$
$= (x-1)\big[6-(x+1)\big]$
$= (x-1)(6-x-1)$
$= (x-1)(5-x)$

c. $2x(x+1)+(x+1)(x^2+1)$
$= (x+1)\big[2x+(x^2+1)\big]$
$= (x+1)(x^2+2x+1)$
$= (x+1)(x+1)^2$

d. $12x^2-6x+(2x-1)(5-2x)$
$= 6x(2x-1)+(2x-1)(5-2x)$
$= (2x-1)\big[6x+(5-2x)\big]$
$= (2x-1)(4x+5)$

### Exercice 2933

Effectuer les factorisations suivantes :

a. $(3x+1)(2-2x)-(5-4x)(x-1)$

b. $(2-3x)(3+2x)+(3x+2)(-6x-9)$

c. $(6x+2)(2x+3)+(9x+3)^2$

d. $(3x+3)^2-(x+2)(5x+4)$

### Correction 2933

a. $(3x+1)(2-2x)-(5-4x)(x-1)$

On remarque l'égalité : $2-2x=-2(x-1)$

$= (3x+1)\big[-2(x-1)\big]-(5-4x)(x-1)$
$= (x-1)\big[-2(3x+1)-(5-4x)\big]$
$= (x-1)\big(-6x-2-5+4x\big) = (x-1)(-2x-7)$

b. $(2-3x)(3+2x)+(3x+2)(-6x-9)$

On a l'égalité : $-6x-9=-3(2x+3)$

$= (2-3x)(3+2x)+(3x+2)\big[-3(2x+3)\big]$
$= (2x+3)\big[(2-3x)-3(3x+2)\big]$
$= (2x+3)\big(2-3x-9x-6\big)$
$= (2x+3)(-12x-4)$
$= -4(2x+3)(3x+1)$

c. $(6x+2)(2x+3)+(9x+3)^2$

On a : $6x+2=2(3x+1)$ ; $9x+3=3(3x+1)$

$= \big[2(3x+1)\big](2x+3)+\big[3(3x+1)\big]^2$
$= (3x+1)\big[2(2x+3)+9(3x+1)\big]$
$= (3x+1)\big(4x+6+27x+9\big)$
$= (3x+1)(31x+15)$

d. $(3x+3)^2-(x+2)(5x+4)$
$= \big(9x^2+18x+9\big)-\big(5x^2+4x+10x+8\big)$
$= 9x^2+18x+9-5x^2-14x-8$
$= 4x^2+4x+1 = (2x+1)^2$

### Exercice 347

Factoriser les expressions suivantes suivantes :

a. $(2x-1)(3x+2)+(2x+3)(2-4x)$

b. $(7x-1)(9x-3)-(3x-1)$

c. $9x^2-12x+4+(4-3x)(3x-2)$

### Correction 347

a. $(2x-1)(3x+2)+(2x+3)(2-4x)$
$= (2x-1)(3x+2)+(-2)(2x+3)(2x-1)$
$= (2x-1)\big[(3x+2)-2(2x+3)\big]$
$= (2x-1)\big[3x+2-4x-6\big]$
$= (2x-1)(-x-4)$
$= -(2x-1)(x+4)$

b. $(7x-1)(9x-3)-(3x-1)$
$= 3(7x-1)(3x-1)-(3x-1)$
$= (3x-1)\left[3(7x-1)-1\right]$
$= (3x-1)(21x-3-1)$
$= (3x-1)(21x-4)$

c. $9x^2-12x+4+(4-3x)(3x-2)$
$= (3x-2)^2+(4-3x)(3x-2)$
$= (3x-2)\Big[(3x-2)+(4-3x)\Big]$
$= 2(3x-2)$

## Exercice 2213

Factoriser les expressions suivantes :

a. $(x-1)(2x+1)-(2x-2)(5-2x)$

b. $(2+x)(3-x)+(5-2x)(3-x)$

c. $3(4+2x)-(3+x)(10+5x)$

d. $(2-x)(3x-4)+\left(2-\dfrac{3}{2}x\right)(2x+3)$

e. $(2x+1)^2-4(2-3x)^2$

f. $18x^2-24x+8+(3x-2)(2-x)$

## Correction 2213

a. $(x-1)(2x+1)-(2x-2)(5-2x)$
$= (x-1)(2x+1)-2(x-1)(5-2x)$
$= (x-1)\Big[(2x+1)-2(5-2x)\Big]$
$= (x-1)(2x+1-10+4x)$
$= (x-1)(6x-9)$
$= 3(x-1)(2x-3)$

b. $(2+x)(3-x)+(5-2x)(3-x)$
$= \left[(2+x)+(5-2x)\right](3-x)$
$= \left(2+x+5-2x\right)(3-x)$
$= (7-x)(3-x)$

c. $3(4+2x)-(3+x)(10+5x)$
$= 3\left[2(2+x)\right]-(3+x)\left[5(2+x)\right]$
$= 6(2+x)-5(3+x)(2+x)$
$= \left[6-5(3+x)\right](2+x)$
$= (6-15-5x)(2+x)$
$= 5(-9-5x)(2+x)$
$= -(5x+9)(x+2)$

d. $(2-x)(3x-4)+\left(2-\dfrac{3}{2}x\right)(2x+3)$
$= (2-x)(3x-4)+\left[-\dfrac{1}{2}(-4+3x)\right](2x+3)$
$= (2-x)(3x-4)-\dfrac{1}{2}(-4+3x)(2x+3)$
$= \left[(2-x)-\dfrac{1}{2}(2x+3)\right](3x-4)$
$= \left(2-x-x-\dfrac{3}{2}\right)(3x-4)$
$= \left(\dfrac{1}{2}-2x\right)(3x-4)$

On pouvait trouver également $\left(2-\dfrac{3}{2}x\right)(4x-1)$ qui est une expression égale.

e. $(2x+1)^2-4(2-3x)^2$
$= (2x+1)^2-\left[2(2-3x)\right]^2$
$= \left[(2x+1)+2(2-3x)\right]\left[(2x+1)-2(2-3x)\right]$
$= (2x+1+4-6x)(2x+1-4+6x)$
$= (5-4x)(8x-3)$

f. $18x^2-24x+8+(3x-2)(2-x)$
$= 2\left(9x^2-12x+4\right)+(3x-2)(2-x)$
$= 2(3x-2)^2+(3x-2)(2-x)$
$= (3x-2)\Big[2(3x-2)+(2-x)\Big]$
$= (3x-2)(6x-4+2-x)$
$= (3x-2)(5x-2)$

## Exercice 326

Factoriser, si possible, les expressions suivantes :

a. $3(x+1)+5(x-1)$

b. $3(x+1)-2(x+1)-(x-1)$

c. $x^2+5\times(-5)$

d. $(2-x)(2+x)-5(2-x)+(-x+1)(x-2)$

e. $x(x+1)-x^2+5x$

f. $x(x-1)-x^2+2x-1$

g. $3(x-2)+(x+2)(2-x)$

h. $(6x-9)(x+1)-(4x-6)$

## Correction 326

a. $3(x+1)+5(x-1)$
$= 3(x+1)+5(x-1)$
$= 3x+3+5x-5$
$= 7x-2$
Aucune factorisation n'est possible.

b. $3(x+1)-2(x+1)-(x-1)$
$= 3x+3-2x-2-x+1$
$= 0x+2$
$= 2$

c. $x^2+5\times(-5)$
$= x^2-5^2$
$= (x+5)(x-5)$

d. $(2-x)(2+x)-5(2-x)+(-x+1)(x-2)$

$=\big[-(x-2)\big](2+x)-5\big[-(x-2)\big]+(-x+1)(x-2)$

$=-(x-2)(2+x)+5(x-2)+(-x+1)(x-2)$

$=(2+x)\big[-(x-2)+5+(-x+1)\big]$

$=(2+x)(-x+2+5-x+1)$

$=(2+x)(-2x+8)$

e. $x(x+1)-x^2+5x$

$=x\big[(x+1)-x+5\big]$

$=x(x+1-x+5)$

$=x\times 6$

$=6x$

f. $x(x-1)-x^2+2x-1$

$=x^2-x-x^2+2x-1$

$=x-1$

g. $3(x-2)+(x+2)(2-x)$

$=3(x-2)+(x+2)(2-x)$

$=3(x-2)+(x+2)\big[-(x-2)\big]$

$=3(x-2)-(x+2)(x-2)$

$=(x-2)\big[3-(x+2)\big]$

$=(x-2)(3-x-2)$

$=(x-2)(1-x)$

h. $(6x-9)(x+1)-(4x-6)$

$=\big[3(2x-3)\big](x+1)-\big[2(2x-3)\big]$

$=3(2x-3)(x+1)-2(2x-3)$

$=(2x-3)\big[3(x+1)-2\big]$

$=(2x-3)(3x+3-2)$

$=(2x-3)(3x+1)$

## 5. *Factorisation : un peu plus loin :*

### Exercice 5902

Factoriser les expressions suivantes :

a. $(2x+3)(1-x)+(4x+6)^2$

b. $(3-9x)^2+3(3x-1)$

c. $(5x+1)(2x-4)+(3x-6)^2$

### Correction 5902

a. $(2x+3)(1-x)+(4x+6)^2$

$=\ (2x+3)(1-x)+\big[2(2x+3)\big]^2$

$=\ (2x+3)(1-x)+4(2x+3)^2$

$=\ (2x+3)\big[(1-x)+4(2x+3)\big]$

$=\ (2x+3)(1-x+8x+12)=(2x+3)(7x+13)$

b. $(3-9x)^2+3(3x-1)=\big[-3(3x-1)\big]^2+3(3x-1)$

$=\ 9(3x-1)^2+3(3x-1)=(3x-1)\big[9(3x-1)+3\big]$

$=\ (3x-1)(27x-9+3)=(3x-1)(27x-6)$

c. $(5x+1)(2x-4)+(3x-6)^2$

$=\ (5x+1)\big[2(x-2)\big]+\big[3(x-2)\big]^2$

$=\ 2(5x+1)(x-2)+9(x-2)^2$

$=\ (x-2)\big[2(5x+1)+9(x-2)\big]$

$=\ (x-2)(10x+2+9x-18)=(x-2)(19x-16)$

### Exercice 324

Factoriser les expressions suivantes en identifiant des facteurs communs dans chacun des termes ou en utilisant une identité remarquable :

a. $(x+1)(x+2)+(x+1)(x-2)$

b. $x^2+2x+1$

c. $(x-2)(x+3)-(2-x)$

d. $x^2-6x+9$

e. $(x+1)\times x+2(x+1)$

f. $x^2-25$

g. $9x^2-4$

### Correction 324

a. $(x+1)(x+2)+(x+1)(x-2)$

$=(x+1)\big[(x+2)+(x-2)\big]$

$=(x+1)(2x)$

$=2x(x+1)$

b. $x^2+2x+1$

$=x^2+2\times 1\times x+1^2$

On reconnaît une identité remarquable

$=(x+1)^2$

c. $(x-2)(x+3)-(2-x)$

$=(x-2)(x+3)-\big[-(x-2)\big]$

$=(x-2)(x+3)+(x-2)$

$=(x-2)(x+3)+(x-2)\times 1$

$=(x-2)\big[(x+3)+1\big]$

$=(x-2)(x+4)$

d. $x^2-6x+9$

$=x^2-2\times 3\times x+3^2$

On reconnaît une identité remarquable

$=(x-3)^2$

e. $(x+1)\times x+2(x+1)$

$=(x+1)(x+2)$

f. $x^2-25$

$=x^2-5^2$

On reconnaît une identité remarquable

$=(x+5)(x-5)$

g. $9x^2-4$

$=(3x)^2-2^2$

On reconnaît une identité remarquable

$=(3x+2)(3x-2)$

**Exercice 2148**

Factoriser les expressions suivantes :

a. $(3x-3)(5x+2)-(2x-2)(3x-1)$

b. $(3-x)(7x+1)-2(2x+2)(3x-9)$

c. $(2+x)(5-x)+(2x+4)^2$

d. $x^2-9(2x-1)^2$

**Correction 2148**

a. $(3x-3)(5x+2)-(2x-2)(3x-1)$

$$\begin{aligned}
&=\big[3(x-1)\big](5x+2)-\big[2(x-1)\big](3x-1)\\
&=3(x-1)(5x+2)-2(x-1)(3x-1)\\
&=(x-1)\big[3(5x+2)-2(3x-1)\big]\\
&=(x-1)(15x+6-6x+2)\\
&=(x-1)(9x+8)
\end{aligned}$$

b. $(3-x)(7x+1)-2(2x+2)(3x-9)$

$$\begin{aligned}
&=(3-x)(7x+1)-2(2x+2)\big[-3(3-x)\big]\\
&=(3-x)(7x+1)+6(2x+2)(3-x)\\
&=(3-x)\big[(7x+1)+6(2x+2)\big]\\
&=(3-x)(7x+1+12x+12)\\
&=(3-x)(19x+13)
\end{aligned}$$

c. $(2+x)(5-x)+(2x+4)^2$

$$\begin{aligned}
&=(2+x)(5-x)+\big[2(x+2)\big]^2\\
&=(x+2)(5-x)+4(x+2)^2\\
&=(x+2)\big[(5-x)+4(x+2)\big]\\
&=(x+2)(5-x+4x+8)\\
&=(x+2)(3x+13)
\end{aligned}$$

d. $x^2-9(2x-1)^2$

$$\begin{aligned}
&=x^2-\big[3(2x-1)\big]^2\\
&=\big[x+3(2x-1)\big]\big[x-3(2x-1)\big]\\
&=(x+6x-3)(x-6x+3)\\
&=(7x-3)(-5x+3)
\end{aligned}$$

## *6. Equation produit : reconnaissance du facteur commun :*

**Exercice 2901**

1. a. Factoriser l'expression algébrique suivante :
$(3x+2)(2x-1)+(4x-2)(3-5x)$

   b. Résoudre l'équation suivante :
$(3x+2)(2x-1)+(4x-2)(3-5x)=0$

2. a. Factoriser l'expressions suivante :
$(2x+1)(3-2x)-(3x-2)(2x-3)$

   b. Résoudre l'équation suivante :
$(2x+1)(3-2x)=(3x-2)(2x-3)$

**Correction 2901**

1. a. $(3x+2)(2x-1)+(4x-2)(3-5x)$

$$\begin{aligned}
&=(3x+2)(2x-1)+\big[2(2x-1)\big](3-5x)\\
&=(3x+2)(2x-1)+2(2x-1)(3-5x)\\
&=(2x-1)\big[(3x+2)+2(3-5x)\big]\\
&=(2x-1)(3x+2+6-10x)\\
&=(2x-1)(-7x+8)
\end{aligned}$$

   b. L'équation devient :
$(3x+2)(2x-1)+(4x-2)(3-5x)=0$

$(2x-1)(-7x+8)=0$

Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :

$$\begin{array}{r|r}
2x-1=0 & -7x+8=0\\
2x=1 & -7x=-8\\
x=\dfrac{1}{2} & x=\dfrac{-8}{-7}\\
 & x=\dfrac{8}{7}
\end{array}$$

L'ensemble des solutions de cette équation est :
$\mathcal{S}=\left\{\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{8}{7}\right\}$

2. a. $(2x+1)(3-2x)-(3x-2)(2x-3)$

$$\begin{aligned}
&=(2x+1)\big[-(2x-3)\big]-(3x-2)(2x-3)\\
&=(2x-3)\big[-(2x+1)-(3x-2)\big]\\
&=(2x-3)(-2x-1-3x+2)\\
&=(2x-3)(-5x+1)
\end{aligned}$$

   b. Cette équation peut s'écrire :
$(2x+1)(3-2x)=(3x-2)(2x-3)$

$(2x+1)(3-2x)-(3x-2)(2x-3)=0$

$(2x-3)(-5x+1)=0$

Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :

$$\begin{array}{r|r}
2x-3=0 & -5x+1=0\\
2x=3 & -5x=-1\\
x=\dfrac{3}{2} & x=\dfrac{-1}{-5}\\
 & x=\dfrac{1}{5}
\end{array}$$

L'ensemble des solutions de cette équation est :
$\mathcal{S}=\left\{\dfrac{1}{5}\,;\,\dfrac{3}{2}\right\}$

## Exercice 4437

1. a. Montrer que les deux équations suivantes sont équivalentes :
$x^2 = x \quad ; \quad x(x-1) = 0$

   b. En déduire les solutions de l'équation : $x^2 = x$

2. Résoudre les équations suivantes :

   a. $(x-2)(3-2x) = 0$

   b. $(5x-1)(2-x) + (2x-4)(3-2x) = 0$

## Correction 4437

1. a. On a les transformations algébriques suivantes :
$$x^2 = x$$
$$x^2 - x = 0$$
$$x(x-1) = 0$$
Ces deux équations sont équivalentes.

   b. Ainsi, les solutions de l'équation $x^2 = x$ sont également celles de l'équation :
$x(x-1) = 0$
Or, un produit est nul si, et seulement si, au moins un facteur est nul. Ainsi, cette équation a pour solution :
$\mathcal{S} = \{0\,;\,1\}$

2. a. L'équation $(x-2)(3-2x) = 0$ admet les deux solutions :

| | |
|---|---|
| $x - 2 = 0$ | $3 - 2x = 0$ |
| $x = 2$ | $-2x = -3$ |
| | $x = \dfrac{-3}{-2}$ |
| | $x = \dfrac{3}{2}$ |

Ainsi, l'ensemble des solutions est :
$\mathcal{S} = \left\{\dfrac{3}{2}\,;\,2\right\}$

   b. Avant de résoudre l'équation, effectuons des transformations algébriques permettant d'obtenir une équation produit :
$$(5x-1)(2-x) + (2x-4)(3-2x) = 0$$
$$(5x-1)(2-x) + \big[-2(2-x)\big](3-2x) = 0$$
$$(5x-1)(2-x) - 2(2-x)(3-2x) = 0$$
$$(2-x)\big[(5x-1) - 2(3-2x)\big] = 0$$
$$(2-x)(5x-1-6+4x) = 0$$
$$(2-x)(9x-7) = 0$$
Un produit étant nul si au moins un de ses facteurs est nul :

| | |
|---|---|
| $2 - x = 0$ | $9x - 7 = 0$ |
| $-x = -2$ | $9x = 7$ |
| $x = 2$ | $x = \dfrac{7}{9}$ |

L'ensemble des solutions de cette équation est :
$\mathcal{S} = \left\{2\,;\,\dfrac{7}{9}\right\}$

## Exercice 2928

En se ramenant à une équation produit, résoudre les équations suivantes :

a. $\big(3x-1\big)\big(2x+2\big) + 3\big(5-2x\big)\big(x+1\big) = 0$

b. $3\big(5x+1\big)\big(2-3x\big) + \big(6x-4\big)\big(x-1\big) = 0$

c. $\big(4x+6\big)\big(1-2x\big) = 5\big(2x+3\big)^2$

## Correction 2928

a.
$$\big(3x-1\big)\big(2x+2\big) + 3\big(5-2x\big)\big(x+1\big) = 0$$
$$\big(3x-1\big)\big[2(x+1)\big] + 3\big(5-2x\big)\big(x+1\big) = 0$$
$$2\big(3x-1\big)\big(x+1\big) + 3\big(5-2x\big)\big(x+1\big) = 0$$
$$\big(x+1\big)\big[2(3x-1) + 3(5-2x)\big] = 0$$
$$\big(x+1\big)\big(6x-2+15-6x\big) = 0$$
$$\big(x+1\big)13 = 0$$
$$13\big(x+1\big) = 0$$
L'ensemble des solutions de cette équation est $\big\{-1\big\}$.

b.
$$3\big(5x+1\big)\big(2-3x\big) + \big(6x-4\big)\big(x-1\big) = 0$$
$$3\big(5x+1\big)\big(2-3x\big) + \big[-2(2-3x)\big]\big(x-1\big) = 0$$
$$3\big(5x+1\big)\big(2-3x\big) - 2\big(2-3x\big)\big(x-1\big) = 0$$
$$\big(2-3x\big)\big[3(5x+1) - 2(x-1)\big] = 0$$
$$\big(2-3x\big)\big(15x+3-2x+2\big) = 0$$
$$\big(2-3x\big)\big(13x+5\big) = 0$$
Un produit est nul, si et seulement si, au moins un des facteurs est nul. On en déduit que l'ensemble des solutions est :
$\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{5}{13}\,;\,\dfrac{2}{3}\right\}$

c.
$$\big(4x+6\big)\big(1-2x\big) = 5\big(2x+3\big)^2$$
$$\big(4x+6\big)\big(1-2x\big) - 5\big(2x+3\big)^2 = 0$$
$$\big[2(2x+3)\big]\big(1-2x\big) - 5\big(2x+3\big)^2 = 0$$
$$2\big(2x+3\big)\big(1-2x\big) - 5\big(2x+3\big)^2 = 0$$
$$\big(2x+3\big)\big[2(1-2x) - 5(2x+3)\big] = 0$$
$$\big(2x+3\big)\big(2-4x-10x-15\big) = 0$$
$$\big(2x+3\big)\big(-14x-13\big) = 0$$
Un produit est nul, si et seulement si, au moins un des facteurs est nul. On en déduit que l'ensemble des solutions est :
$\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{3}{2}\,;\,-\dfrac{13}{14}\right\}$

## Exercice 342

Résoudre les équations suivantes :

a. $2\cdot(6x+4)(3-4x) - (8x-6)^2 = 0$

b. $3\cdot(\sqrt{2}x-4)^2 = 6x^2 - 4x + 12$

**Correction 342**

a. $$2\cdot(6x+4)(3-4x)-(8x-6)^2=0$$
$$-2\cdot(6x+4)(4x-3)-\Big(2\times(4x-3)\Big)^2=0$$
$$-2\cdot(6x+4)(4x-3)-4\times(4x-3)^2=0$$
$$(4x-3)\Big[-2(6x+4)-4(4x-3)\Big]=0$$
$$(4x-3)\Big[-12x-8-16x+12\Big]=0$$
$$(4x-3)(-28x+4)=0$$

Un produit est nul si et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :

$4x-3=0$ ou $-28x+4=0$

$4x=3$ $\qquad -28x=-4$

$x=\dfrac{3}{4}$ $\qquad x=\dfrac{-4}{-28}$

$x=\dfrac{4}{28}$

$x=\dfrac{1}{7}$

L'ensemble des solutions de cette équation est :
$\mathcal{S}=\left\{\frac{1}{7}\,;\,\frac{3}{4}\right\}$

b. On peut observer qu'après développement, cette expression ne comporte pas de termes en $x^2$. Cette équation se ramèmera à une équation du premier degré :
$$3\cdot(\sqrt{2}x-4)^2=6x^2-4x+12$$
$$3\cdot(2x^2-8\sqrt{2}x+16)=6x^2-4x+12$$
$$6x^2-24\sqrt{2}x+48=6x^2-4x+12$$
$$(-24\sqrt{2}-4)x=-36$$
$$-(24\sqrt{2}+4)x=-36$$
$$x=\frac{36}{24\sqrt{2}+4}$$

Cette équation admet une unique solution $\dfrac{36}{24\sqrt{2}+4}$.

## 7. Equation produit et du 1er degré :

**Exercice 2145**

1. Développer chacune des expressions suivantes :
   a. $x(x-3)-x^2$
   b. $(6x+1)^2+(12x+2)(3-3x)$
   c. $(x+1)^2-(x-1)^2$

2. Résoudre les équations suivantes après développement et réduction :
   a. $x(x-3)-x^2=0$
   b. $(6x+1)^2=(12x+2)(3x-3)$
   c. $(x+1)^2-(x-1)^2=0$

**Correction 2145**

1. a. $x(x-3)-x^2=x^2-3x-x^2=-3x$

b. $(6x+1)^2+(12x+2)(3-3x)$
$=(36x^2+12x+1)+(36x-36x^2+6-6x)$
$=(36x^2+12x+1)+(-36x^2+30x+6)$
$=42x+7$

c. $(x+1)^2-(x-1)^2=(x^2+2x+1)-(x^2-2x+1)$
$=4x$

2. a. $x(x-3)-x^2=0$

En utilisant la question 1. :
$$-3x=0$$
$$x=$$
L'ensemble des solutions est : $\mathcal{S}=\{0\}$

b. $$(6x+1)^2=(12x+2)(3x-3)$$
$$(6x+1)^2-(12x+2)(3x-3)=0$$

En utilisant la question 1. :
$$42x+7=0$$
$$42x=-7$$
$$x=\frac{-7}{42}$$
$$x=-\frac{1}{6}$$
L'ensemble des solutions est $\left\{-\frac{1}{6}\right\}$

c. $(x+1)^2-(x-1)^2=0$

En utilisant la question 1. :
$$4x=0$$
L'ensemble des solutions est : $\mathcal{S}=\{0\}$

**Exercice 363**

1. A l'aide d'un calcul mental, quelles sont les équations qui, après développement et réduction, ne comportent pas de termes en $x^2$ :
   a. $(x+1)(x-1)-(x+1)(2x+1)=0$
   b. $x^2-8=(x+3)(1+x)$
   c. $(3x-2)^2=6x-4$
   d. $(2x+1)(1-x)=(3x-3)(x+2)$
   e. $3x(4x-1)-(2x-5)(6x+4)=0$

2. Résoudre les équations des questions b. et e..

**Correction 363**

1. Les seules équations ne présentant pas de terme en $x^2$ après un développement et un réduction sont les équations des questions b. et e..

2. On a les résolutions suivantes :

$$\begin{aligned} x^2-8&=(x+3)(1+x)\\ x^2-8&=x+x^2+3+3x\\ x^2-8&=x^2+4x+3\\ x^2-x^2-4x&=3+8\\ -4x&=11\\ x&=\frac{11}{-4}\\ x&=-\frac{11}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x(4x-1)-(2x-5)(6x+4)&=0\\ 12x^2-3x-(12x^2+8x-30x-20)&=0\\ 12x^2-3x-12x^2-8x+30x+20&=0\\ 19x+20&=0\\ 19x&=-20\\ x&=-\frac{20}{19}\end{aligned}$$

## 8. Equation produit : un peu plus loin :

**Exercice 369**

Résoudre les équations suivantes :

a. $\dfrac{x-4}{3}=x-2$ b. $4x^2-1=(2x+2)^2$

c. $2x^2+x+1=x^2-x$ d. $(x+1)(x-1)=3x(x+1)$

**Correction 369**

a.
$$\begin{aligned} \frac{x-4}{3}&=x-2\\ 3\times\left(\frac{x-4}{3}\right)&=3\times(x-2)\\ x-4&=3x-6\\ x-3x&=-6+4\\ -2x&=-2\\ x&=\frac{-2}{-2}\\ x&=1\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $\{1\}$.

b.
$$\begin{aligned} 4x^2-1&=(2x+2)^2\\ 4x^2-1&=4x^2+8x+4\\ -1&=8x+4\\ -8x&=4+1\\ -8x&=5\\ x&=\frac{5}{-8}\\ x&=-\frac{5}{8}\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $\left\{-\frac{5}{8}\right\}$.

c.
$$\begin{aligned} 2x^2+x+1&=x^2-x\\ 2x^2+x+1-x^2+x&=0\\ x^2+2x+1&=0\\ (x+1)^2&=0\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $\{-1\}$.

d.
$$\begin{aligned} (x+1)(x-1)&=3x(x+1)\\ (x+1)(x-1)-3x(x+1)&=0\\ (x+1)\big[(x-1)-3x\big]&=0\\ (x+1)(x-1-3x)&=0\\ (x+1)(-2x-1)&=0\end{aligned}$$

Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul; on en déduit que l'ensemble des solutions de cette équation est :
$\left\{-1\,;-\frac{1}{2}\right\}$.

**Exercice 4535**

Résoudre les équations suivantes :

a. $(5x-1)(3x-2)+(6x-4)(x-1)=0$

b. $(3-2x)(2x+4)=(2x-3)(3-9x)$

c. $(6x-3)(1-2x)+(3-4x)(2-3x)=0$

**Correction 4535**

a.
$$\begin{aligned} (5x-1)(3x-2)+(6x-4)(x-1)&=0\\ (5x-1)(3x-2)+\big[2(3x-2)\big](x-1)&=0\\ (5x-1)(3x-2)+2(3x-2)(x-1)&=0\\ (3x-2)\big[(5x-1)+2(x-1)\big]&=0\\ (3x-2)(5x-1+2x-2)&=0\\ (3x-2)(7x-3)&=0\end{aligned}$$

Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :

| | |
|---|---|
| $3x-2=0$ | $7x-3=0$ |
| $3x=2$ | $7x=3$ |
| $x=\frac{2}{3}$ | $x=\frac{3}{7}$ |

L'ensemble des solutions de cette équation est :
$\mathscr{S}=\left\{\frac{2}{3}\,;\,\frac{3}{7}\right\}$

b. $$(3-2x)(2x+4)=(2x-3)(3-9x)$$
$$(3-2x)(2x+4)-(2x-3)(3-9x)=0$$
$$(3-2x)(2x+4)-\big[-(3-2x)\big](3-9x)=0$$
$$(3-2x)(2x+4)+(3-2x)(3-9x)=0$$
$$(3-2x)\big[(2x+4)+(3-9x)\big]=0$$
$$(3-2x)(2x+4+3-9x)=0$$
$$(3-2x)(-7x+7)=0$$
$$7(3-2x)(1-x)=0$$
Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :

| | |
|---|---|
| $3-2x=0$ | $1-x=0$ |
| $-2x=-3$ | $-x=-1$ |
| $x=\dfrac{-3}{-2}$ | $x=1$ |
| $x=\dfrac{3}{2}$ | |

L'ensemble des solutions de cette équation est :
$\mathscr{S}=\left\{1\,;\,\dfrac{3}{2}\right\}$

c. $$(6x-3)(1-2x)+(3-4x)(2-3x)=0$$
$$(6x-12x^2-3+6x)+(6-9x-8x+12x^2)=0$$
$$(-12x^2+12x-3)+(12x^2-17x+6)=0$$
$$-5x+3=0$$
$$-5x=-3$$
$$x=\frac{-3}{-5}$$
$$x=\frac{3}{5}$$
Cette équation ne possède qu'une unique solution : $\dfrac{3}{5}$.

## Exercice 362

1. Développer les deux expressions suivantes :
$(x-1)(x+2)^2$ ; $x^2{\cdot}(x+3)-4$

2. En déduire une méthode de résolution de l'équation :
$x^2(x+3)=4$.

## Correction 362

1. On a les transformations algébriques :
- $(x-1)(x+2)^2=(x-1)(x^2+4x+4)$
$=x^3+4x^2+4x-x^2-4x-4=x^3+3x^2-4$
- $x^2{\cdot}(x+3)-4=x^3+3{\cdot}x^2-4$

2. On remarque le développement suivant :
$$x^2(x+3)=4$$
$$x^2(x+3)-4=0$$
D'après la question 1., on a :
$(x-1)(x+2)^2=0$
Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul.
Ainsi, l'ensemble des solutions de cette équation est :
$\mathcal{S}=\big\{-2\,;\,1\big\}$

## Exercice 361

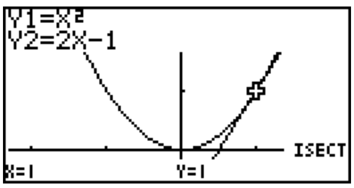
On considère les deux fonctions $f$ et $g$ définies par :
$f(x)=x^2$ ; $g(x)=2x-1$

1. A l'aide de votre calculatrice, donner les abscisses des points d'intersections des deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives des fonctions $f$ et $g$.

2. a. Retrouver le résultat de la question précédente en résolvant l'équation :
$x^2=2x-1$
b. Déterminer les coordonnées du point d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

## Correction 361

1. Voici l'affichage de la calculatrice :




Le point d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ a pour abscisse 1.

2. a. Résolvons l'équation :
$$x^2=2x-1$$
$$x^2-2x-1=0$$
On reconnait la seconde identité remarquable :
$$(x-1)^2=0$$
Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :
$x-1=0$
$x=1$
Cette équation admet 1 pour solution.

b. Le point d'intersection appartient aux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
En utilisant son appartenance à la courbe $\mathscr{C}_g$, il a pour coordonnées :
$M\big(1\,;g(1)\big)=\big(1\,;2{\times}1-1\big)=\big(1\,;2-1\big)=\big(1\,;1\big)$

## 10. Equations avec fractions :

**Exercice 349**

On cherche à résoudre l'équation suivante :

$$\frac{3x-1}{x+1}=\frac{6x-3}{3x+3}$$

1. Donner l'ensemble de résolution de l'équation ci-dessus.
2. Résoudre cette équation.

**Correction 349**

1. Cette équation n'est pas définie lorsque les dénominateurs des deux fractions s'annulent : c'est à dire en $-1$.
L'ensemble de résolution est $\mathbb{R}-\{-1\}$

2. $$\frac{3x-1}{x+1}=\frac{6x-3}{3x+3}$$
$$\frac{3x-1}{x+1}=\frac{2x-1}{x+1}$$
$$\frac{3x-1}{x+1}-\frac{2x-1}{x+1}=0$$
$$\frac{3x-1-(2x-1)}{x+1}=0$$
$$\frac{3x-1-2x+1}{x+1}=0$$
$$\frac{x}{x+1}=0$$
Un quotient est nul si, et seulement si, le numérateur est nul
$$x=0$$
Cette équation admet 0 pour unique solution.

## 11. Equations avec fractions : avec factorisation :

**Exercice 338**

Pour chacune des équations suivantes, donner l'ensemble de résolution de l'équation, puis résoudre l'équation :

a. $\dfrac{9x^2+6x+1}{x-1}=0$ b. $\dfrac{1-x}{3x+2}-\dfrac{1}{2(x+1)}=0$

c. $\dfrac{1}{2x+1}=\dfrac{1}{3-x}$ d. $\dfrac{x^2-9}{x^2-1}=0$

**Correction 338**

a. Cette expression est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

Pour résoudre, l'équation :
$$\frac{9x^2+6x+1}{x-1}=0$$
Si un quotient est nul alors son numérateur est nul
$$9x^2+6x+1=0$$
$$(3x+1)^2=0$$
Si un produit est nul alors au moins un de ses facteurs est nul.
$$3x+1=0$$
$$3x=-1$$
$$x=-\frac{1}{3}$$
L'ensemble des solutions est : $\mathcal{S}=\left\{-\frac{1}{3}\right\}$

b. Les expressions de cette équation sont définies sur $\mathbb{R}\backslash\left\{-1\,;-\frac{2}{3}\right\}$

On a :
$$\frac{1-x}{3x+2}-\frac{1}{2(x+1)}=0$$
$$\frac{(1-x)\big[2(x+1)\big]}{(3x+2)\big[2(x+1)\big]}-\frac{1\times(3x+2)}{2(x+1)(3x+2)}=0$$
$$\frac{(1-x)(2x+2)}{2(3x+2)(x+1)}-\frac{3x+2}{2(x+1)(3x+2)}=0$$
$$\frac{(1-x)(2x+2)-(3x+2)}{2(x+1)(3x+2)}=0$$
$$\frac{2x+2-2x^2-2x-3x-2}{2(x+1)(3x+2)}=0$$
$$\frac{-2x^2-3x}{2(x+1)(3x+2)}=0$$
$$\frac{-x(2x+3)}{2(x+1)(3x+2)}=0$$
Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :

| | |
|---|---|
| $-x=0$ | $2x+3=0$ |
| $x=0$ | $2x=-3$ |
| | $x=-\frac{3}{2}$ |

L'ensemble des solution est : $\mathcal{S}=\left\{-\frac{3}{2}\,;0\right\}$

c. Cette expression est définie sur $\mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{1}{2}\,;3\right\}$.

On a la résolution suivante :
$$\frac{1}{2x+1}=\frac{1}{3-x}$$
$$\frac{1}{2x+1}-\frac{1}{3-x}=0$$
$$\frac{1\times(3-x)}{2x+1(3-x)}-\frac{1(2x+1)}{(3-x)(2x+1)}=0$$
$$\frac{(3-x)-(2x+1)}{(3-x)(2x+1)}=0$$
$$\frac{3-x-2x-1}{(3-x)(2x+1)}=0$$
$$\frac{-3x+2}{(3-x)(2x+1)}=0$$

Un quotient est nul si, et seulement si, son numérateur est nul.
On en déduit :

$$\begin{aligned}-3x+2&=0\\ -3x&=-2\\ x&=\frac{-2}{-3}\\ x&=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est : $\mathcal{S}=\left\{\frac{2}{3}\right\}$

d. Pour que cette expression soit définie, il faut que le dénominateur $x^2-1$ ne s'annule pas ; ainsi, cette équation est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\,;1\}$

Pour résoudre l'équation $\frac{x^2-3}{x^2-1}=0$, utilisons la propriété :
Un quotient est nul si, et seulement si, son numérateur est nul.

Cette équation se traduit en :

$$\begin{aligned}x^2-9&=0\\ (x+3)(x-3)&=0\end{aligned}$$

Un produit est nul, si et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :

| | |
|---|---|
| $x+3=0$ | $x-3=0$ |
| $x=-3$ | $x=3$ |

L'ensemble des solutions est : $\mathcal{S}=\{-3\,;3\}$

## 12. Equations avec fractions : avec identités remarquables :

**Exercice 348**

Résoudre l'équation suivante : $\frac{2x-2}{x-1}=\frac{3x+3}{2x+1}$

**Correction 348**

Afin que les dénominateurs des quotients ne s'annule pas, cette équation est définie sur :

$\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2}\,;1\right\}$

Résolvons cette équation :

$$\frac{2x-2}{x-1}=\frac{3x+3}{2x+1}$$

D'après le produit en croix, on a :

$$\begin{aligned}(2x-2)(2x+1)&=(3x+3)(x-1)\\ 4x^2+2x-4x-2&=3x^2-3x+3x-3\\ 4x^2-2x-2&=3x^2-3\\ x^2-2x+1&=0\\ (x-1)^2&=0\end{aligned}$$

1 est une solution de l'équation précédente mais ne fait pas parti de l'ensemble de définition de l'équation de départ : cetteéquation n'admet pas de solution.

**Exercice 4523**

Résoudre les équations suivantes :

a. $\frac{-3x-3}{3x+4}+\frac{2x+2}{2x+1}=0$  b. $\frac{3-x}{4x+3}+\frac{2x-3}{3x+3}=0$

c. $\frac{2x-3}{3x+1}+\frac{3-2x}{x+4}=0$  d. $\frac{x-3}{x+2}+\frac{x+2}{3x+1}=0$

**Correction 4523**

a.

$$\begin{aligned}\frac{-3x-3}{3x+4}+\frac{2x+2}{2x+1}&=0\\ \frac{(-3x-3)(2x+1)}{(3x+4)(2x+1)}+\frac{(2x+2)(3x+4)}{(2x+1)(3x+4)}&=0\\ \frac{(-3x-3)(2x+1)+(2x+2)(3x+4)}{(2x+1)(3x+4)}&=0\\ \frac{(-6x^2-3x-6x-3)+(6x^2+8x+6x+8)}{(2x+1)(3x+4)}&=0\\ \frac{-6x^2-9x-3+6x^2+14x+8}{(2x+1)(3x+4)}&=0\\ \frac{5x+5}{(2x+1)(3x+4)}&=0\end{aligned}$$

Si un quotient est nul alors son numérateur est nul :

$$\begin{aligned}5x+5&=0\\ 5x&=-5\\ x&=\frac{-5}{5}\\ x&=-1\end{aligned}$$

Cette équation admet pour ensemble des solutions :
$\mathcal{S}=\{-1\}$.

b.

$$\begin{aligned}\frac{3-x}{4x+3}+\frac{2x-3}{3x+3}&=0\\ \frac{(3-x)(3x+3)}{(4x+3)(3x+3)}+\frac{(2x-3)(4x+3)}{(3x+3)(4x+3)}&=0\\ \frac{(3-x)(3x+3)+(2x-3)(4x+3)}{(3x+3)(4x+3)}&=0\\ \frac{(9x+9-3x^2-3x)+(8x^2+6x-12x-9)}{(3x+3)(4x+3)}&=0\\ \frac{(-3x^2+6x+9)+(8x^2-6x-9)}{(3x+3)(4x+3)}&=0\\ \frac{5x^2}{(3x+3)(4x+3)}&=0\end{aligned}$$

Si un quotient est nul alors son numérateur est nul :

$$\begin{aligned}5x^2&=0\\ x^2&=0\\ x&=0\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions contient un unique élément :
$\mathcal{S}=\{0\}$.

c.

$$\frac{2x-3}{3x+1}+\frac{3-2x}{x+4}=0$$

$$\frac{(2x-3)(x+4)}{(3x+1)(x+4)}+\frac{(3-2x)(3x+1)}{(x+4)(3x+1)}=0$$

$$\frac{(2x-3)(x+4)+(3-2x)(3x+1)}{(x+4)(3x+1)}=0$$

$$\frac{(2x-3)(x+4)+\big[-(2x-3)\big](3x+1)}{(x+4)(3x+1)}=0$$

$$\frac{(2x-3)(x+4)-(2x-3)(3x+1)}{(x+4)(3x+1)}=0$$

$$\frac{(2x-3)\big[(x+4)-(3x+1)\big]}{(x+4)(3x+1)}=0$$

$$\frac{(2x-3)(x+4-3x-1)}{(x+4)(3x+1)}=0$$

$$\frac{(2x-3)(-2x+3)}{(x+4)(3x+1)}=0$$

$$\frac{(2x-3)\big[-(2x-3)\big]}{(x+4)(3x+1)}=0$$

$$\frac{-(2x-3)^2}{(x+4)(3x+1)}=0$$

Si un quotient est nul alors son numérateur est nul :

$$-(2x-3)^2=0$$

Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul.

L'ensemble des solutions de cette équation est :

$$\mathcal{S}=\Big\{\frac{3}{2}\Big\}$$

d.

$$\frac{x-3}{x+2}+\frac{x+2}{3x+1}=0$$

$$\frac{(x-3)(3x+1)}{(x+2)(3x+1)}+\frac{(x+2)(x+2)}{(3x+1)(x+2)}=0$$

$$\frac{(x-3)(3x+1)+(x+2)(x+2)}{(3x+1)(x+2)}=0$$

$$\frac{(3x^2+x-9x-3)+(x^2+4x+4)}{(3x+1)(x+2)}=0$$

$$\frac{3x^2-8x-3+x^2+4x+4}{(3x+1)(x+2)}=0$$

$$\frac{4x^2-4x+1}{(3x+1)(x+2)}=0$$

$$\frac{(2x-1)^2}{(3x+1)(x+2)}=0$$

Si un quotient est nul alors son numérateur est nul :

$$(2x-1)^2=0$$
$$2x-1=0$$
$$2x=1$$
$$x=\frac{1}{2}$$

Cette équation admet pour ensemble des solutions :

$$\mathcal{S}=\Big\{\frac{1}{2}\Big\}$$

## *Exercice 2217*

Résoudre les équations suivantes avec la méthode de votre choix :

a. $(3x-1)(2+x)=(7-3x)(2+x)$

b. $(2x-3)(4x-2)+(3-6x)(x-3)=0$

c. $(2-6x)(3x+3)=(-9x+3)(2x+1)$

d. $2x+\dfrac{1}{2x+2}=0$

## *Correction 2217*

a.

$$(3x-1)(2+x)=(7-3x)(2+x)$$
$$(3x-1)(2+x)-(7-3x)(2+x)=0$$
$$\Big[(3x-1)-(7-3x)\Big](2+x)=0$$
$$(3x-1-7+3x)(2+x)=0$$
$$(6x-8)(2+x)=0$$
$$2(3x-4)(2+x)=0$$

Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul.

$3x-4=0$ ou $2+x=0$

$3x=4$ $\qquad x=-2$

$x=\dfrac{4}{3}$

L'ensemble des solutions de cette équation :

$$\mathcal{S}=\Big\{-2\,;\,\frac{4}{3}\Big\}$$

b.

$$(2x-3)(4x-2)+(3-6x)(x-3)=0$$
$$(2x-3)\Big[2(2x-1)\Big]+\Big[-3(2x-1)(x-3)\Big]=0$$
$$2(2x-3)(2x-1)-3(2x-1)(x-3)=0$$
$$\Big[2(2x-3)-3(x-3)\Big](2x-1)=0$$
$$(4x-6-3x+9)(2x-1)=0$$
$$(x+3)(2x-1)=0$$

Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul.

$x+3=0$ ou $2x-1=0$

$x=-3$ $\qquad 2x=1$

$x=\dfrac{1}{2}$

L'ensemble des solutions de cette équation est :

$$\Big\{-3\,;\,\frac{1}{2}\Big\}$$

c.

$$(2-6x)(3x+3)=(-9x+3)(2x+1)$$
$$6x+6-18x^2-18x=-18x^2-9x+6x+3$$
$$6x+6-18x=-9x+6x+3$$
$$6-12x=-3x+3$$
$$-9x=-3$$
$$x=\frac{-3}{-9}=\frac{1}{3}$$

L'unique solution de cette équation est $\dfrac{1}{3}$.

d. $$2x+\frac{1}{2x+2}=0$$
$$\frac{2x(2x+2)}{2x+2}+\frac{1}{2x+2}=0$$
$$\frac{2x(2x+2)+1}{2x+2}=0$$
$$\frac{4x^2+4x+1}{2x+2}=0$$
$$\frac{(2x+1)^2}{2x+2}=0$$
Un quotient est nul si, et seulement si, son numérateur est nul
$$(2x+1)^2=0$$
Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul
$$2x+1=0$$

L'unique solution de cette équation est $-\frac{1}{2}$.

## Exercice 4600

1. Factoriser les expressions suivantes :
   a. $(3x+2)(5x-1)-(2-10x)(2-4x)$
   b. $(x+3)(3x+6)+(4x+8)^2$
   c. $(2x+3)(5x-4)-(2x-2)(6-x)$
   d. $(x-3)(-3x-3)-(2x+2)(3-3x)$
2. Résoudre les équations suivantes :
   a. $(5x+2)(4x-3)=(2x-1)(3-4x)$
   b. $(2-3x)(2x-4)+(10-5x)(3x-1)=0$
   c. $(x-3)(2x-3)=(2x-2)(x+3)$
   d. $(x-3)(2x-3)=(3-3x)(2x-3)$
3. Résoudre les équations suivantes :
   a. $\dfrac{x+3}{3x+2}=\dfrac{x-2}{3x+3}$
   b. $\dfrac{x-1}{x+2}+\dfrac{x+3}{2x+3}=0$

## Correction 4600

1. a. $(3x+2)(5x-1)-(2-10x)(2-4x)$
$$\begin{aligned}&=(3x+2)(5x-1)-\big[-2(5x-1)\big](2-4x)\\&=(3x+2)(5x-1)+2(5x-1)(2-4x)\\&=(5x-1)\big[(3x+2)+2(2-4x)\big]\\&=(5x-1)(3x+2+4-8x)=(5x-1)(-5x+6)\end{aligned}$$

b. $(x+3)(3x+6)+(4x+8)^2$
$$\begin{aligned}&=(x+3)\big[3(x+2)\big]+\big[4(x+2)\big]^2\\&=3(x+3)(x+2)+16(x+2)^2\\&=(x+2)\big[3(x+3)+16(x+2)\big]\\&=(x+2)(3x+9+16x+32)=(x+2)(19x+41)\end{aligned}$$

c. $(2x+3)(5x-4)-(2x-2)(6-x)$
$$\begin{aligned}&=(10x^2-8x+15x-12)-(12x-2x^2-12+2x)\\&=(10x^2+7x-12)-(-2x^2+14x-12)\\&=10x^2+7x-12+2x^2-14x+12\\&=12x^2-7x=x(12x-7)\end{aligned}$$

d. $(x-3)(-3x-3)-(2x+2)(3-3x)$
$$\begin{aligned}&=(-3x^2-3x+9x+9)-(6x-6x^2+6-6x)\\&=(-3x^2+6x+9)-(-6x^2+6)\\&=-3x^2+6x+9+6x^2-6\\&=3x^2+6x+3=3\big(x^2+2x+1\big)=3(x+1)^2\end{aligned}$$

2. a. $$(5x+2)(4x-3)=2x-1)(3-4x)$$
$$(5x+2)(4x-3)-(2x-1)\big[-(4x-3)\big]=0$$
$$(5x+2)(4x-3)+(2x-1)(4x-3)=0$$
$$(4x-3)\big[(5x+2)+(2x-1)\big]=0$$
$$(4x-3)(7x+1)=0$$
Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :

| | |
|---|---|
| $4x-3=0$ | $7x+1=0$ |
| $4x=3$ | $7x=-1$ |
| $x=\frac{3}{4}$ | $x=-\frac{1}{7}$ |

L'ensemble des solutions est : $\mathcal{S}=\left\{-\frac{1}{7}\,;\frac{3}{4}\right\}$

b. $$(2-3x)(2x-4)+(10-5x)(3x-1)=0$$
$$(2-3x)\big[2(x-2)\big]+\big[-5(x-2)\big](3x-1)=0$$
$$2(2-3x)(x-2)-5(x-2)(3x-1)=0$$
$$(x-2)\big[2(2-3x)-5(3x-1)\big]=0$$
$$(x-2)(4-6x-15x+5)=0$$
$$(x-2)(9-21x)=0$$
Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :

| | |
|---|---|
| $x-2=0$ | $9-21x=0$ |
| $x=2$ | $-21x=-9$ |
| | $x=\frac{-9}{-21}$ |
| | $x=\frac{3}{7}$ |

L'ensemble des solutions est : $\mathcal{S}=\left\{\frac{3}{7}\,;\,2\right\}$

c.
$$\begin{aligned}(x-3)(2x-3)&=(2x-2)(x+3)\\(2x^2-3x-6x+9)-(2x^2+6x-2x-6)&=0\\2x^2-3x-6x+9-2x^2-6x+2x+6&=0\\-13x+15&=0\\-13x&=-15\\x&=\frac{-15}{-13}\\x&=\frac{15}{13}\end{aligned}$$
Cette équation admet pour ensemble des solutions : $\mathcal{S}=\left\{\frac{15}{13}\right\}$

d.
$$\begin{aligned}(x-3)(2x-3)&=(3-3x)(2x-3)\\(x-3)(2x-3)-(3-3x)(2x-3)&=0\\(2x^2-3x-6x+9)-(6x-9-6x^2+9x)&=0\\2x^2-3x-6x+9-6x+9+6x^2-9x&=0\\8x^2-3x-24x+18&=0\\2\left(4x^2-12x+9\right)&=0\\2\left(2x-3\right)^2&=0\end{aligned}$$
Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :
$$\begin{aligned}2x-3&=0\\2x&=3\\x&=\frac{3}{2}\end{aligned}$$
Cette équation admet l'ensemble des solutions suivant : $\mathcal{S}=\left\{\frac{3}{2}\right\}$

3. a.
$$\begin{aligned}\frac{x+3}{3x+2}&=\frac{x-2}{3x+3}\\\frac{(x+3)(3x+3)}{(3x+2)(3x+3)}&=\frac{(x-2)(3x+2)}{(3x+3)(3x+2)}\\\frac{3x^2+3x+9x+9}{(3x+2)(3x+3)}&=\frac{3x^2+2x-6x-4}{(3x+3)(3x+2)}\\\frac{3x^2+12x+9}{(3x+2)(3x+3)}-\frac{3x^2-4x-4}{(3x+3)(3x+2)}&=0\\\frac{3x^2+12x+9-3x^2+4x+4}{(3x+3)(3x+2)}&=0\\\frac{16x+13}{(3x+3)(3x+2)}&=0\end{aligned}$$
Si un quotient est nul si aors son numérateur est nul :
$$\begin{aligned}16x+13&=0\\16x&=-13\\x&=-\frac{13}{16}\end{aligned}$$
L'ensemble des solutions de cette équation est : $\mathcal{S}=\left\{-\frac{13}{16}\right\}$

b.
$$\begin{aligned}\frac{x-1}{x+2}+\frac{x+3}{2x+3}&=0\\\frac{(x-1)(2x+3)}{(x+2)(2x+3)}+\frac{(x+3)(x+2)}{(2x+3)(x+2)}&=0\\\frac{(2x^2+3x-2x-3)+(x^2+2x+3x+6)}{(2x+3)(x+2)}&=0\\\frac{(2x^2+x-3)+(x^2+5x+6)}{(2x+3)(x+2)}&=0\\\frac{3x^2+6x+3}{(2x+3)(x+2)}&=0\\\frac{3(x^2+2x+1)}{(2x+3)(x+2)}&=0\\\frac{3(x+1)^2}{(2x+3)(x+2)}&=0\end{aligned}$$
Si un quotient est nul alors son numérateur est nul :
$$3(x+1)^2=0$$
Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :
$$\begin{aligned}x+1&=0\\x&=-1\end{aligned}$$
L'ensemble des solutions est : $\mathcal{S}=\left\{-1\right\}$

## 13. Problèmes :

**Exercice 365**

Trouver trois nombres entiers consécutifs dont la somme est égale à 2 010.

**Correction 365**

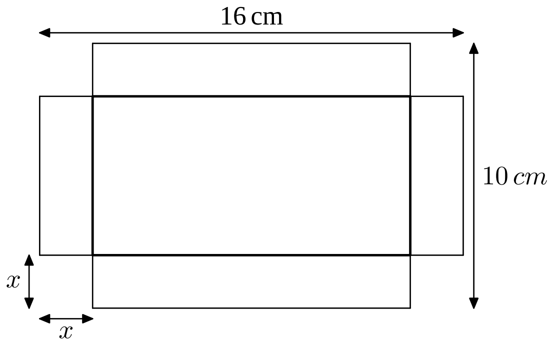
Notons $n$ le plus petit de ces entiers. Etant des entiers consécutifs, ces tgrois entiers s'écrivent donc :
$n$ ; $n+1$ ; $n+2$

Il est demandé que la somme de ces trois entiers soit égale à 2 010 :
$$\begin{aligned}n+(n+1)+(n+2)&=2\,010\\3n+3&=2\,010\\3n&=2\,010-3\\3n&=2\,007\\n&=\frac{2\,007}{3}\\n&=669\end{aligned}$$
Ainsi, les trois entiers ayant pour somme 2 010 sont :
669 ; 670 ; 671

## Exercice 2940

On veut réaliser, dans le patron ci-dessous une boîte rectangulaire sans couvercle. Les longueurs sont exprimées en $cm$.




1. a. Lorsque la boîte sera construire, le nombre $x$ représentera quelle dimension ? La longueur, la largeur ou la hauteur ?

   b. Quelles valeurs peut prendre la variable $x$ dans ce problème ?

   c. Donner l'expression du volume $\mathscr{V}$ en fonction de la valeur de $x$.

2. Dans cette question, nous cherchons pour quelles valeurs de "$x$", cette boîte possède un volume égal à $144\,cm^3$ :

   a. Déterminer la valeur des réels de $a$ et de $b$ vérifiant la factorisation suivante :
   $4x^3-52x^2+160x-144=(a{\cdot}x+b)(2x-4)^2$

   b. En déduire les valeurs de $x$ pour lesquelles $\mathscr{V}(x)$ a pour valeur 144.

## Correction 2940

1. a. Le nombre $x$ représente la hauteur de la boite.

   b. $x$ étant une mesure de longueur, elle ne prend que des valeurs positives.
   De plus, la longueur des deux marges "*marges*" de la largeur ne peut dépasser la longueur de la largeur : $x$ doit être strictement inférieur à 5.
   Dans, le cas où $x=0$ où $x=5$, notre boite n'aurait pas de hauteur.
   Ainsi, $x$ appartient à l'intervalle $]0\,;5[$.

   c. On a les dimensions suivantes :
   - La longeur de la boîte mesure : $16-2x$ ;
   - La largeur de la boîte mesure : $10-2x$ ;
   - La hauteur de la boîte mesure $x$.

   Son volume $V(x)$ sera égal à $(16-2x)(10-2x)x$.
   Or :
   $$(16-2x)(10-2x)x=(160-32x-20x+4x^2)x$$
   $$=(160-52x+4x^2)x=4x^3-52x^2+160x$$

2. a. Le terme de droite de cette égalité peut s'écrire :
   $(a{\cdot}x+b)(2x-4)^2=(a{\cdot}x+b)(4x^2-16x+16)$
   En poursuivant ce développement, on obtiendra :
   - pour le terme du second degré : $4a{\cdot}x^3$ ;
   - pour le terme numérique : $16b=-144$

   Ces deux égalités permettent de choisir :
   $a=1 \quad ; \quad b=-9$
   Vérifions ces deux valeurs :
   $$(x-9)(2x-4)^2$$
   $$=(x-9)(4x^2-16x+16)$$
   $$=4x^3-16x^2+16x-36x^2+144x-144$$
   $$=4x^3-52x^2+160x-144$$

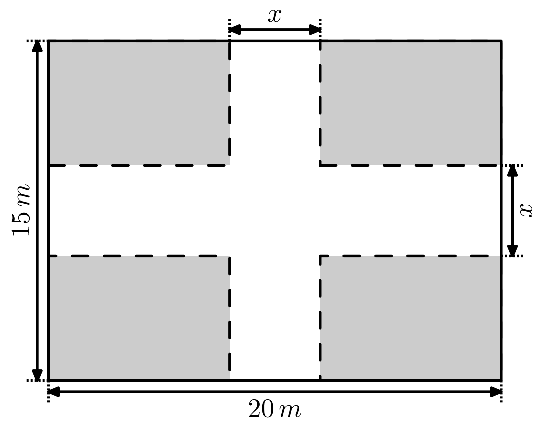
   b. Pour déterminer les valeurs de $x$, cherchons les solutions de l'équation :
   $$\mathscr{V}(x)=144$$
   $$4x^3-52x^2+160x=144$$
   $$4x^3-52x^2+160x-144=0$$
   D'après la factorisation précédente :
   $$(x-9)(2x-4)^2=0$$
   Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs sont nuls.
   Cette équation admet les deux solutions :
   $x=2 \quad ; \quad x=9$
   La valeur 9 ne fait pas partie des valeurs possibles de l'inconnue $x$ : le volume de la boite à un volume de $144\,cm^2$ seulement pour la valeur $x=2$.

## Exercice 1030

Un jardin a une forme carrée ayant pour dimension $20\,m$ de longueur et $15\,m$ de largeur.

Deux allées de largeur $x\,m$ partagent transversalement ce jardin ; du gazon sera planté sur le reste du jardin.

Une cloture doit être poser autour du gazon : elle est représentée en pointillées sur la représentation.




1. Indiquer quelles valeurs peut prendre la variable $x$.

2. a. Déterminer en fonction de $x$ l'aire totale des deux allées.

   b. Déterminer en fonction de $x$ l'aire du gazon de ce jardin.

3. a. Déterminer les valeurs des réels $a$ et $b$ vérifiant l'égalité :

$$2{\cdot}x^2 - 70{\cdot}x + 300 = (x-30)(a{\cdot}x+b)$$

b. L'architecte chargé de la réalisation de ce jardin décide de choisir la largeur de l'allée afin que les aires des allées et du jardin soient égales.

4. Le propriétaire du jardin décide d'investir 5 600 euros dans l'aménagement du jardin.
Le $m^2$ de gazon coûte 7 €; Le $m^2$ du parquet composant l'allée coûte 30 €; Le $m$ de la clôture coûte 12 €.

a. Etablir l'égalité suivante :
$$23x^2 - 757x + 2660 = (x-4)(23x-665)$$

b. En déduire la largeur des allées réalisant les dessins du propriétaire.

## Correction 1030

1. La variable $x$ représente un longueur : elle est donc positive.
Elle ne peut être nulle car sinon l'allée n'existerai pas.

La valeur de $x$ ne peut pas dépasser la largeur du jardin car elle représente la largeur de l'allée construite dans le jardin.
Elle ne peut valoir 15 sinon il n'y aura plus de jardin.

Ainsi, la variable $x$ appartient à l'intervalle $]0\,;15[$

2. a. L'allée horizontale a pour aire : $20{\times}x$
L'allée verticale a pour aire : $15{\times}x$

En faisant la somme de ces deux aires, on compte deux fois le carré intersection des deux allées.

Ainsi, les allées ont une aire totale de :
$$20x + 15x - x^2 = 35x - x^2$$

b. Pour déterminer l'aire du gazon, soustrayons à l'aire totale du jardin celle des allées :
$$15{\times}20 - (35x - x^2) = 300 - 35x + x^2$$
$$= x^2 - 35x + 300$$

3. a. En développons le membre de droite de cette égalité, on a :
- le terme du second degré sera : $a{\cdot}x^2$
- le terme numérique s'obtiendra par : $-30b$

En identifiant ces termes avec ceux du membre de gauche, on choisit les valeurs suivantes :
$a = 2 \quad ; \quad b = -10$

Développons le membre de droite :
$$(x-30)(2x-10) = 2x^2 - 10x - 60x + 300$$
$$= 2x^2 - 70x + 300$$
On vient d'établir la factorisation recherchée.

b. Pour déterminer les valeurs de $x$ pour lesquelles l'aire du gazon sera celle des allées, nous allons résoudre l'équation suivante :
$$x^2 - 35x + 300 = 35x - x^2$$
$$x^2 - 35x + 300 - 35x + x^2 = 0$$
$$2x^2 - 70x + 300 = 0$$
D'après la question précédente, on a la factorisation :
$$(x-30)(2x-10) = 0$$
Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :

| | |
|---|---|
| $x - 30 = 0$ | $2x - 10 = 0$ |
| $x = 30$ | $2x = 10$ |
| | $x = \dfrac{10}{2}$ |
| | $x = 5$ |

L'ensemble des solutions de cette équation est :
$\mathscr{S} = \big\{5\,;\,30\big\}$

Mais, puisque la variable $x$ est comprise dans l'intervalle $]0\,;\,15[$, l'architecte ne possède comme unique solution que de choisir $5\,m$ comme largeur d'allées.

4. a. Pour établir l'égalité procédons par le développement suivant :
$$(x-4)(23x-665) = 23x^2 - 665x - 92x + 2660$$
$$= 23x^2 - 757x + 2660$$

b. La longueur de la clôture est :
$$4{\times}\Big(\frac{20-x}{2} + \frac{15-x}{2}\Big) = 40x - 2x + 30 - 2x$$
$$= 70 - 4x$$
Le prix de l'aménagement de ce jardin se calcule par :
$$\mathcal{P} = 30{\times}(35x - x^2) + 7{\times}(x^2 - 35x + 300) + 12{\times}(70 - 4x)$$
$$= 1050x - 30x^2 + 7x^2 - 245x + 2100 + 840 - 48x$$
$$= -23x^2 + 757x + 2940$$
Le prix total de l'aménagement du jardin étant de 5600 €, on obtient l'égalité suivante :
$$\mathcal{P} = 5\,600$$
$$-23x^2 + 757x + 2\,940 = 5\,600$$
$$-23x^2 + 757x + 2\,940 - 5\,600 = 0$$
$$-23x^2 + 757x - 2\,660 = 0$$
$$-\big(23x^2 - 757x + 2\,660\big) = 0$$
D'après la factorisation de la question précédente
$$-(x-4)(23x-665) = 0$$
Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul.

| | |
|---|---|
| $x - 4 = 0$ | $23x - 665 = 0$ |
| $x = 4$ | $23x = 665$ |
| | $x = \dfrac{665}{23}$ |

Cette équation possède pour solution : $4$ et $\dfrac{665}{23}$.

La valeur de $\dfrac{665}{23}$ n'appartient à l'intervalle $]0\,;15[$ : ainsi, l'architecte, pour respecter le prix d'aménagement du jardin, doit prendre une largeur d'allée de $4\,m$.

## Exercice 4692

Un agriculteur dispose de 200 mètres de clôture. A l'aide de toute la clôture, il souhaite entourer la plus grande partie de forme rectangulaire de son champ.

On note $x$ et $y$ la longueur et la largeur respectives de cette partie rectangulaire.

1. Etablir l'identité : $x{\cdot}y = \dfrac{1}{4}{\cdot}(x+y)^2 - \dfrac{1}{4}{\cdot}(x-y)^2$

2. a. Quelle relation doivent vérifier $x$ et $y$ afin que l'aire de son champ soit maximale ?

b. En déduire l'aire maximale de son champ.

## Correction 4692

1. Développons le membre de droite :

$$\frac{1}{4}\cdot(x+y)^2 - \frac{1}{4}\cdot(x-y)^2$$
$$= \frac{1}{4}\cdot\left(x^2+2\cdot x\cdot y+y^2\right) - \frac{1}{4}\left(x^2-2\cdot x\cdot y+y^2\right)$$
$$= \frac{1}{4}\cdot x^2 + \frac{1}{4}\times 2\cdot x\cdot y + \frac{1}{4}\cdot y^2 - \frac{1}{4}\cdot x^2 + \frac{1}{4}\times 2\cdot x\cdot y - \frac{1}{4}\cdot y^2$$
$$= \frac{1}{2}\cdot x\cdot y + \frac{1}{2}\cdot x\cdot y$$

2. a. En fonction de $x$ et de $y$, l'aire de son champs s'exprime par :
$\mathcal{A} = x\cdot y$

Pour répondre à cette question, il fallait voir que le membre de gauche de l'identité de la question 1. est la différence de deux carrés : donc, la différence de deux nombres positifs.

Partons de la comparaison suivante :

$$(x-y)^2 \geqslant 0$$
$$-\frac{1}{4}\cdot(x-y)^2 \leqslant 0$$
$$\frac{1}{4}\cdot(x+y)^2 - \frac{1}{4}\cdot(x-y)^2 \leqslant \frac{1}{4}\cdot(x+y)^2$$
$$x\cdot y \leqslant \frac{1}{4}\cdot(x+y)^2$$
$$\mathcal{A} \leqslant \frac{1}{4}\cdot(x+y)^2$$

Ainsi, l'aire du champ a une mesure maximale de $\frac{1}{4}\cdot(x+y)^2$ et cette valeur est atteinte lorsque $x=y$.

b. Le périmètre doit vérifier la relation :
$2\cdot(L+\ell) = 200$

qui s'exprime en fonction de $x$ et de $y$ :

$$2\cdot(x+y) = 200$$
$$x+y = \frac{200}{2}$$
$$x+y = 100$$

Puisque $x=y$, on en déduit :

$$x+x = 100$$
$$2\cdot x = 100$$
$$x = \frac{100}{2}$$
$$x = 50\,m$$

Ainsi, le champ a pour aire :
$\mathcal{A} = x^2 = 50^2 = 2500\,m^2$

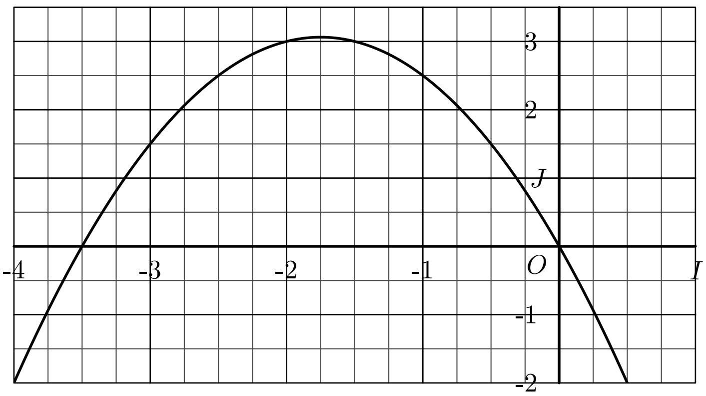
# 14. Fonctions et équations :

## Exercice 4500

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ dont l'image d'un nombre $x$ est donnée par la relation :

$$f(x) = -\frac{1}{2}(4x+7)(x+2)+x^2+4x+7$$

Dans le repère $(O\,;I\,;J)$ orthogonal ci-dessous sont représentés la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction $f$ :




1. Répondre graphiquement aux questions suivantes :
   a. Déterminer l'image du nombre $-3$ par la fonction $f$. Justifier votre réponse.
   b. Déterminer l'ensemble des antécédents du nombre 0 par la fonction $f$. Justifier votre réponse.
2. a. Développer l'expression :
   $-\frac{1}{2}(4x+7)(x+2)+x^2+4x+7$
   b. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $f(x)=0$.
3. a. Factoriser l'expression $x^2+4x+4$.
   b. En déduire la factorisation de l'expression :
   $\left(-2x-\frac{7}{2}\right)(x+2)+x^2+4x+4$
   c. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation :
   $f(x)=3$

## Correction 4500

1. a. La droite d'équation $x=-3$ intercepte la courbe $\mathscr{C}_f$ au point de coordonnées $\left(-3\,;\frac{3}{2}\right)$. On en déduit que l'image du nombre $-3$ est $\frac{3}{2}$.

   b. La droite d'équation $y=0$ intercepte la courbe $\mathscr{C}_f$ aux points de coordonnées $\left(-\frac{7}{2}\,;0\right)$ et $(0\,;0)$. On en déduit que l'ensemble des antécédents du nombre 0 par la fonction $f$ est :
   $\mathcal{S} = \left\{-\frac{7}{2}\,;0\right\}$.

2. a. On a le développement suivant :

$$-\frac{1}{2}(4x+7)(x+2)+x^2+4x+7$$
$$= -\frac{1}{2}(4x^2+8x+7x+14)+x^2+4x+7$$
$$= -\frac{1}{2}(4x^2+15x+14)+x^2+4x+7$$
$$= -2x^2-\frac{15}{2}x-7+x^2+4x+7$$
$$= -x^2-\frac{7}{2}x$$

b. Résolvons l'équation suivante :

$$f(x)=0$$
$$-x^2-\frac{7}{2}x=0$$

On a la factorisation suivante :

$$-x\Big(x+\frac{7}{2}\Big)=0$$

Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :

| | |
|---|---|
| $-x=0$ | $x+\frac{7}{2}=0$ |
| $x=0$ | $x=-\frac{7}{2}$ |

L'ensemble des solutions de cette équation est :

$$\mathcal{S}=\Big\{-\frac{7}{2}\,;0\Big\}$$

3. a. En identifiant cette expression a une identité remarquable, on obtient la factorisation suivante :

$$x^2+4x+4=(x+2)^2$$

b. Factorisons cette expression :

$$\Big(-2x-\frac{7}{2}\Big)(x+2)+x^2+4x+4$$

D'après la factorisation précédente :

$$=\Big(-2x-\frac{7}{2}\Big)(x+2)+(x+2)^2$$
$$=(x+2)\Big[\Big(-2x-\frac{7}{2}\Big)+(x+2)\Big]$$
$$=(x+2)\Big(-x-\frac{3}{2}\Big)$$

c. Résolvons l'équation :

$$f(x)=3$$
$$-\frac{1}{2}(4x+7)(x+2)+x^2+4x+7=3$$
$$-\frac{1}{2}(4x+7)(x+2)+x^2+4x+7-3=0$$
$$-\frac{1}{2}(4x+7)(x+2)+x^2+4x+4=0$$
$$\Big(-2x-\frac{7}{2}\Big)(x+2)+x^2+4x+4=0$$

En utilisant la factorisation de la question précédente :

$$(x+2)\Big(-x-\frac{3}{2}\Big)=0$$

Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul.

| | |
|---|---|
| $x+2=0$ | $-x-\frac{3}{2}=0$ |
| $x=-2$ | $-x=\frac{3}{2}$ |
| | $x=-\frac{3}{2}$ |

L'ensemble des solutions de cette équation est :

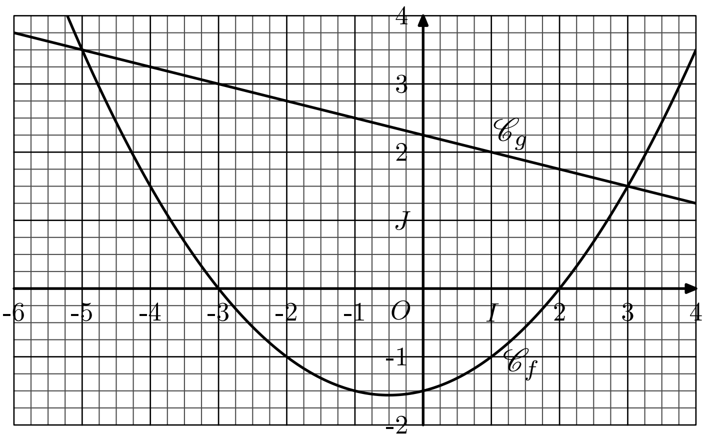
$$\mathcal{S}=\Big\{-2\,;-\frac{3}{2}\Big\}$$

## Exercice 4537

On considère les deux fonctions $f$ et $g$ dont l'image d'un nombre $x$ est donnée par la relation :

$$f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x-\frac{3}{2}\quad;\quad g(x)=-\frac{1}{4}x+\frac{9}{4}$$

On donne les représentations $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ respectives de $f$ et de $g$ dans le repère $(O\,;I\,;J)$ ci-dessous :




1. Graphiquement, donner les antécédents de 0 par la fonction $f$.

Les questions suivantes doivent être traitées algébriquement :

2. Déterminer les antécédents du nombre 0 par la fonction $g$.

3. a. Déterminer la valeur des nombres $a$ et $b$ vérifiant la factorisation suivante :

$$x^2+2x-15=(x-3)(a{\cdot}x+b)$$

b. En déduire les solutions de l'équation : $f(x)=g(x)$

c. Donner les coordonnées des points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

## Correction 4537

1. La droite d'équation $y=0$ intercepte la courbe $\mathscr{C}_f$ aux points d'intersection $(-3\,;0)$ et $(2\,;0)$. Les antécédents du nombre 0 par la fonctino $f$ sont $-3$ et 2.

2. Les antécédents du nombre 0 sont les nombres $x$ dont l'image vaut 0 par la fonction $g$. Ils doivent vérifier l'équation :

$$g(x)=0$$
$$-\frac{1}{4}x+\frac{9}{4}=0$$
$$-\frac{1}{4}x=-\frac{9}{4}$$
$$x=-\frac{9}{4}\times(-4)$$
$$x=9$$

La fonction $g$ admet pour seul antécédent de 0 le nombre 9.

3. a. Lors du développement du membre de droite, on obtiendrai :

- $a{\cdot}x^2$ pour le terme du second degré ;

- $-3b$ pour le terme numérique.

L'identification avec le membre de gauche laisse présager les valeurs suivantes :

$a = 1 \quad ; \quad b = 5$

Vérifions ces valeurs :

$$(x-3)(x+5) = x^2 + 5x - 3x - 15$$
$$= x^2 + 2x - 15$$

b. Résolvons l'équation suivante :

$$f(x) = g(x)$$
$$\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{2} = -\frac{1}{4}x + \frac{9}{4}$$
$$\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{2} + \frac{1}{4}x - \frac{9}{4} = 0$$
$$\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{15}{4} = 0$$

Cette équation est équivalente à :

$$4\times\Big(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{15}{4}\Big) = 0$$
$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

D'après la question précédente, on a :

$$(x-3)(x+5) = 0$$

Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :

| | |
|---|---|
| $x-3=0$ | $x+5=0$ |
| $x=3$ | $x=-5$ |

Cette équation a pour solution :

$\mathscr{S} = \{-5\,;3\}$

c. Les abscisses des points d'intersection sont les solutions de l'équation de la question précédente.

Déterminons à l'aide de la fonction $g$ les ordonnées de ces points :

- $g(3) = -\frac{1}{4}\times 3 + \frac{9}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$
- $g(-5) = -\frac{1}{4}\times(-5) + \frac{9}{4} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$

Ainsi, les points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont les points de coordonnées :

$\Big(3\,;\frac{3}{2}\Big) \quad ; \quad \Big(-5\,;\frac{7}{2}\Big)$.

## 15. Inéquations du premier degré :

### Exercice 366

Résoudre les inéquations suivantes :

a. $2x+1 \geqslant 3x-1$

b. $-x - \frac{1}{2} \leqslant x+2$

d. $\frac{x+1}{2} + x < 0$

c. $\frac{x-2}{-4} < x+1$

e. $\frac{1-x}{2} \leqslant \frac{2x+1}{6}$

### Correction 366

a.
$$2x+1 \geqslant 3x-1$$
$$2x-3x \geqslant -1-1$$
$$-x \geqslant -2$$
$$x \leqslant 2$$

L'ensemble des solutions est l'intervalle $\big]-\infty\,;2\big]$

b.
$$-x - \frac{1}{2} \leqslant x+2$$
$$-x-x \leqslant 2 + \frac{1}{2}$$
$$-2x \leqslant \frac{5}{2}$$
$$x \geqslant \frac{\frac{5}{2}}{-2}$$
$$x \geqslant -\frac{5}{4}$$

L'ensemble des solutions est l'intervalle $\Big]-\frac{5}{4}\,;+\infty\Big]$

c.
$$\frac{x+1}{2} + x < 0$$
$$2\cdot\Big(\frac{x+1}{2} + x\Big) < 2\times 0$$
$$x+1+2\cdot x < 0$$
$$3x+1 < 0$$
$$3x < -1$$
$$x < -\frac{1}{3}$$

L'ensemble des solutions est l'intervalle $\Big]-\infty\,;-\frac{1}{3}\Big[$

d.
$$\frac{x-2}{-4} < x+1$$
$$-4\cdot\Big(\frac{x-2}{-4}\Big) > -4\cdot(x+1)$$
$$x-2 > -4x-4$$
$$x+4x > -4+2$$
$$5x > -2$$
$$x > -\frac{2}{5}$$

L'ensemble des solutions est l'intervalle $\Big]-\frac{2}{5}\,;+\infty\Big[$

e.
$$\frac{1-x}{2} \leqslant \frac{2x+1}{6}$$
$$6\times\frac{1-x}{2} \leqslant 6\times\frac{2x+1}{6}$$
$$3\cdot(1-x) \leqslant 2x+1$$
$$3-3\cdot x \leqslant 2x+1$$
$$-3\cdot x - 2\cdot x \leqslant 1-3$$
$$-5\cdot x \leqslant -2$$
$$x \geqslant \frac{2}{5}$$

L'ensemble des solutions est l'intervalle $\Big[\frac{2}{5}\,;+\infty\Big[$

**Exercice 264**

Soit $n$ une entier relatif $((n\in\mathbb{Z})$. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation :

$$-3\cdot n^2+5>-13$$

**Correction 264**

Pour résoudre cette inéquation, on a les transformations algébriques :

$$-3n^2+5>-13$$
$$-3n^2>-18$$
$$n^2<\frac{-18}{-3}$$
$$n^2<6$$

Les solutions de cette équation sont tous les entiers relatifs appartenant à l'intervalle $\big[-\sqrt{6}\,;\,\sqrt{6}\big]$. L'ensemble des solutions est :

$\mathcal{S}=\big\{-2\,;\,-1\,;\,0\,;\,1\,;\,2\big\}$

**Exercice 335**

Résoudre les inéquations suivantes, donner l'ensemble des solutions sous la forme d'intervalle et le représenter sur une droite graduée :

a. $3x+3\geqslant 1$   b. $\dfrac{3x-1}{4}\leqslant -1$

c. $x^2+x+1\geqslant (x+1)(x-1)$

**Correction 335**

1. Résolvons l'inéquation :

$$3x+3\geqslant 1$$
$$3x\geqslant 1-3$$
$$3x\geqslant -2$$
$$x\geqslant -\frac{2}{3}$$

Cette inéquation admet pour ensemble de solutions :

$\mathcal{S}=\Big[-\dfrac{2}{3}\,;\,+\infty\Big[$

2. Résolvons l'inéquation :

$$\frac{3x-1}{4}\leqslant -1$$
$$4\times\frac{3x-1}{4}\leqslant 4\times(-1)$$
$$3x-1\leqslant -4$$
$$3x\leqslant -4+1$$
$$3x\leqslant -3$$
$$x\leqslant -1$$

Cette inéquation admet pour ensemble de solutions :

$\mathcal{S}=\Big]-\infty\,;\,-1\Big]$

3. Résolvons l'inéquation :

$$x^2+x+1\geqslant (x+1)(x-1)$$
$$x^2+x+1\geqslant x^2-1$$
$$x^2+x-x^2\geqslant -1-1$$
$$x\geqslant -2$$

Cette inéquation admet pour ensemble de solutions :

$\mathcal{S}=\Big[-2\,;\,+\infty\Big[$

# 16. Construction de tableaux de signe :

**Exercice 334**

Etablir le table de signe des expressions algébriques suivantes :

a. $(x+1)(2-x)$   b. $-(2x+4)(x-2)$   c. $(x+1)^2$

**Correction 334**

1. On a le tableau de signe suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $2-x$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $(x+1)(2-x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

2. On a le tableau de signe suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-1$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | |
| $2x+4$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $x-2$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $-(2x+4)(x-2)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

3. On a le tableau de signe suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x+1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x+1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $(x+1)^2$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |

**Exercice 4430**

On considère les fonctions $f$ et $g$ dont les images du nombre $x$ sont respectivement définies par :

$f(x)=\sqrt{2-x}\times\sqrt{x-5}\quad;\quad g(x)=\sqrt{(2-x)(x-5)}$

1. a. Justifier que la fonction $f$ n'est pas définie pour le nombre 3.

   b. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f$.

2. a. Déterminer l'image du nombre 3 par la fonction $g$.

   b. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $g$.

**Correction 4430**

1. a. Pour $x$=2, on a $x-5=-3$. Ainsi, le facteur $\sqrt{x-5}$ n'est pas défini en 2 : la fonction $f$ n'est pas définie pour $x$=2.

b. On a les deux résolutions suivantes d'inéquations :

$$\begin{array}{rl|rl} 2-x \geqslant 0 & & x-5\geqslant 0 & \\ -x \geqslant -2 & & x \geqslant 5 & \\ x \leqslant 2 & & & \end{array}$$

Ainsi :
- l'expression $\sqrt{2-x}$ est défini sur $\big]-\infty\,;\,2\big]$ ;
- l'expression $\sqrt{x-5}$ est défini sur $\big[5\,;\,+\infty\big[$.

Pour que la fonction $f$ soit définie, il faut que chacun de ses facteurs soit défini. Ainsi, on a :

$$\mathcal{D}_f = \big]-\infty\,;\,2\big]\cap\big[5\,;\,+\infty\big[ = \varnothing$$

$f$ n'est définie pour aucun nombre.

2. a. Pour $x$=3, on a :

$(2-x)(x-5) = (2-3)(3-5) = -1\times(-2) = 2$

Ainsi, la fonction $g$ est définie en 3 :

$g(3) = 2$

b. Pour déterminer l'ensemble de définition de la fonction $g$, on a besoin de déterminer le signe de l'expression se situant sous le radical :

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2-x$ | | $+$ | $0$ | $-$ | \| | $-$ | |
| $x-5$ | | $-$ | \| | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $(2-x)(x-5)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

Une racine carrée est définie si l'expression se situant sous son radical est positive ou nulle.

On en déduit l'ensemble de définition de la fonction $g$ :

$\mathcal{D}_g = \big[2\,;\,5\big]$

# 17. Inéquations et tableaux de signes :

## Exercice 339

1. Résoudre l'inéquation : $-\dfrac{(x+1)(x-2)}{1-x} > 0$

2. a. Développer : $(2x+1)(x-1)$

b. Résoudre l'inéquation suivante : $\dfrac{2x^2-x-1}{x^2+1} \leqslant 0$.

## Correction 339

1. Etudions le signe de l'expression algébrique du membre de gauche :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | \| | $+$ | \| | $+$ | |
| $x-2$ | | $-$ | \| | $-$ | \| | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $1-x$ | | $+$ | \| | $+$ | $0$ | $-$ | \| | $-$ | |
| $-1$ | | $-$ | \| | $-$ | \| | $-$ | \| | $-$ | |
| $-\dfrac{(x+1)(x-2)}{1-x}$ | | $-$ | $0$ | $+$ | \|\| | $-$ | $0$ | $+$ | |

Ainsi, l'inéquation :

$$-\frac{(x+1)(x-2)}{1-x} > 0$$

admet pour ensemble de solution :

$$S = \big]-1\,;1\big[\cup\big]2\,;+\infty\big[$$

2. a. $(2x+1)(x-1) = 2x^2-2x+x-1 = 2x^2-x-1$

b. A l'aide du développement précédent, on a les équivalences :

$$\frac{2x^2-x-1}{x^2+1} \leqslant 0$$

$$\frac{(2x+1)(x-1)}{x^2+1} \leqslant 0$$

Le dénominateur du membre de gauche est strictement positif car :

$$x^2 \geqslant 0$$

$$x^2+1 \geqslant 1 > 0$$

Ainsi, on a le tableau de signe suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x+1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | \| | $+$ | |
| $x-1$ | | $-$ | \| | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x^2+1$ | | $+$ | \| | $+$ | \| | $+$ | |
| $\dfrac{(2x+1)(x-1)}{x^2+1}$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

On en déduit que l'inéquation $\dfrac{2x^2-x-1}{x^2+1}\leqslant 0$ admet pour ensemble de solutions :

$$\mathcal{S} = \Big[-\frac{1}{2}\,;1\Big]$$

## Exercice 360

1. Développer : $(x-1)(x-5)$

2. Résoudre : $\dfrac{(x-3)^2-4}{3-2x} < 0$

## Correction 360

1. On a le développement suivant :

$$\begin{aligned}(x-1)(x-5) &= x^2-5x-x+5 \\ &= x^2-6x+5\end{aligned}$$

2. On a les manipulations algébriques suivantes :

$$\frac{(x-3)^2-4}{3-2x} < 0$$

$$\frac{(x^2-6x+9)-4}{3-2x} < 0$$

$$\frac{x^2-6x+5}{3-2x} < 0$$

D'après le résultat de la question 1. :

$$\frac{(x-1)(x-5)}{3-2x} < 0$$

On a le tableau de signes suivants :

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $\frac{3}{2}$ | | $5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $x-5$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $3-2x$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | |
| $\dfrac{(x-1)(x-5)}{3-2x}$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $\|$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

Ainsi, l'inéquation a pour solution l'ensemble suivant :

$$\mathcal{S}=\Big]1\,;\,\frac{3}{2}\Big[\cup\big]5\,;\,+\infty\big[$$

## 18. Inéquations (un peu plus loin) :

### Exercice 344

Résoudre les inéquations suivantes :

a. $\dfrac{1}{1+x}<\dfrac{1}{1-x}$ b. $\dfrac{-(2x+1)^2}{(4x-3)(1-2x)}\leqslant 0$

### Correction 344

a. On a les transformations algébriques suivantes :

$$\frac{1}{1+x}<\frac{1}{1-x}$$
$$\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1-x}<0$$
$$\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1-x}<0$$
$$\frac{1-x}{(1+x)(1-x)}-\frac{1+x}{(1-x)(1+x)}<0$$
$$\frac{(1-x)-(1+x)}{(1-x)(1+x)}<0$$
$$\frac{-2x}{(1-x)(1+x)}<0$$

On a le tableau de signe suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-2x$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | |
| $1-x$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $1+x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $\dfrac{-2x}{(1-x)(1+x)}$ | | $-$ | $\|$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\|$ | $+$ | |

L'ensemble des solutions de cette inégalité est :
$\mathcal{S}=\big]-\infty\,;-1\big[\cup\big]0\,;1\big[$

b. On a le tableau de signe suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $\frac{1}{2}$ | | $\frac{3}{4}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-(2x+1)^2$ | | $-$ | $0$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | |
| $4x-3$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $1-2x$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | |
| $\dfrac{-(2x+1)^2}{(4x-3)(1-2x)}$ | | $+$ | $0$ | $+$ | $\|$ | $-$ | $\|$ | $+$ | |

Ainsi l'ensemble des solutions de cette inéquation est :
$\mathcal{S}=\Big]\frac{1}{2}\,;\frac{3}{4}\Big[\cup\Big\{-\frac{1}{2}\Big\}$

### Exercice 2936

1. Développer l'expressions suivante : $(x-1)(x+3)$
2. Résoudre l'inéquation suivante :
$$\frac{5x+1}{1-2x}+\frac{3x+3}{x}>0$$

### Correction 2936

1. On a le développement suivant :
$(x-1)(x+3)=x^2+3x-x-3=x^2+2x-3$
2. On a les manipulations algébriques suivants :

$$\frac{5x+1}{1-2x}+\frac{3x+3}{x}>0$$
$$\frac{x(5x+1)}{x(1-2x)}+\frac{(1-2x)(3x+3)}{x(1-2x)}>0$$
$$\frac{x(5x+1)+(1-2x)(3x+3)}{x(1-2x)}>0$$
$$\frac{5x^2+x+3x+3-6x^2-6x}{x(1-2x)}>0$$
$$\frac{-x^2-2x+3}{x(1-2x)}>0$$
$$\frac{-(x^2+2x-3)}{x(1-2x)}>0$$

D'après le développement de la question 1. :

On obtient le tableau de signe suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $0$ | | $\frac{1}{2}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-(x-1)$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $x+3$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $x$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $1-2x$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | |
| $\dfrac{-(x-1)(x+3)}{x(1-2x)}$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $\|$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\|$ | $+$ | |

L'ensemble des solutions est :
$S=\big]-\infty\,;\,-3\big[\,\cup\,\Big]0\,;\,\frac{1}{2}\Big[\,\cup\,\big]1\,;\,+\infty\big[$

## Exercice 359

Résoudre l'inéquation : $16x^2 \geqslant 25(x+1)^2$

## Correction 359

On a les transformations algébriques suivantes :

$$16x^2 \geqslant 25{\cdot}(x+1)^2$$
$$16x^2 - 25{\cdot}(x+1)^2 \geqslant 0$$
$$(4x)^2 - \big[5{\cdot}(x+1)\big]^2 \geqslant 0$$
$$\big[4x + 5{\cdot}(x+1)\big]\big[4x - 5{\cdot}(x+1)\big] \geqslant 0$$
$$(4x+5x+5)(4x-5x-5) \geqslant 0$$
$$(9x+5)(-x-5) \geqslant 0$$

On a le tableau de signe suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-5$ | | $-\frac{5}{9}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $9x+5$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $-x-5$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | |
| $(9x{+}5)(-x{-}5)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

Cette inéquation admet pour ensemble de solutions :
$\mathcal{S} = \left[-5\,;\,-\frac{5}{9}\right]$

## Exercice 2932

1. Déterminer l'expression de $P$ afin de réaliser la factorisation suivante :
$$2x^2 + x - 1 = (x+1)\times P$$
2. Dresser le tableau de signe de $\dfrac{2x^2+x-1}{x^2-4}$
3. Résoudre l'inéquation suivante : $\dfrac{5x^2+x-13}{x^2-4} \leqslant 3$

## Correction 2932

1. Montrons que le polynôme $P$ a pour expression :
$P = (2x-1)$

Vérifions cela avec le développement suivant :
$(x+1)(2x-1) = 2x^2 - x + 2x - 1 = 2x^2 + x - 1$

2. En utilisant la factorisation de la question précédente, on obtient les transformations algébriques suivantes :
$$\frac{2x^2+x-1}{x^2-4} = \frac{(x+1)(2x-1)}{(x+2)(x-2)}$$

On obtient le tableau de signe suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $\frac{1}{2}$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+1$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $2x-1$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $x+2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $x-2$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $\dfrac{(x+1)(2x-1)}{(x+2)(x-2)}$ | | $+$ | $\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\|$ | $+$ | |

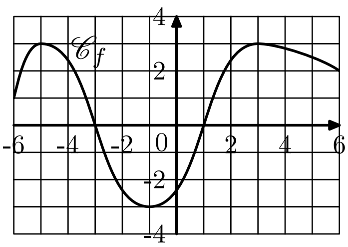
3. On a les transformations algébriques suivantes :
$$\frac{5x^2+x-13}{x^2-4} \leqslant 3$$
$$\frac{5x^2+x-13}{x^2-4} - 3 \leqslant 0$$
$$\frac{5x^2+x-13}{x^2-4} - \frac{3(x^2-4)}{x^2-4} \leqslant 0$$
$$\frac{\big(5x^2+x-13\big) - \big(3x^2-12\big)}{x^2-4} \leqslant 0$$
$$\frac{5x^2+x-13-3x^2+12}{x^2-4} \leqslant 0$$
$$\frac{2x^2+x-1}{x^2-4} \leqslant 0$$
$$\frac{(x+1)(2x-1)}{(x+2)(x-2)} \leqslant 0$$

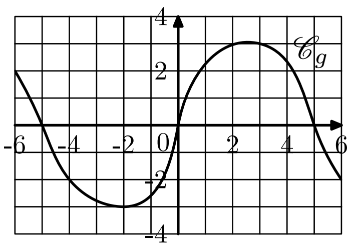
D'après le tableau de signe obtenu à la question précédente, cette inéquation admet pour ensemble de solutions :
$\mathcal{S} = \left]-2\,;\,-1\right] \cup \left[\frac{1}{2}\,;\,2\right[$

# 19. Lectures graphiques :

## Exercice 367

On considère les deux fonctions $f$ et $g$ définies sur $\left[-6\,;\,6\right]$ dont les représentations graphiques sont données ci-dessous :




Dresser les tableaux de signes des fonctions $f$ et $g$ sur $[-6\,;\,6]$

## Correction 367

- Voici le tableau de signes de la fonction $f$ :

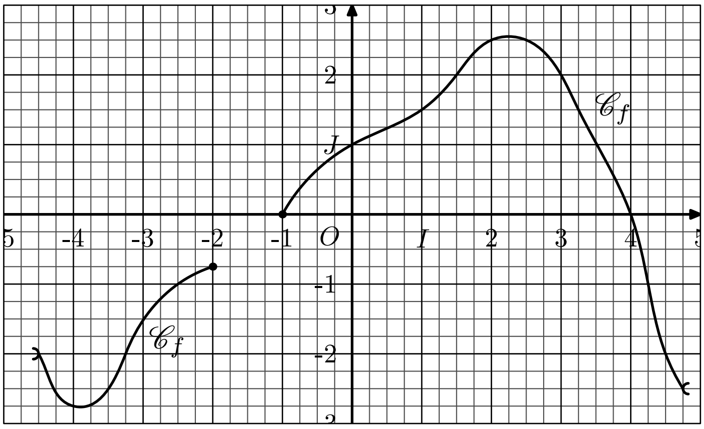
| $x$ | $-6$ | | $-3$ | | $1$ | | $6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

- Voici le tableau de signes de la fonction $g$ :

| $x$ | $-6$ | | $-5$ | | $0$ | | $5$ | | $6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

## Exercice 4434

Dans le repère $(O\,;I\,;J)$ ci-dessous est représentée la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction $f$

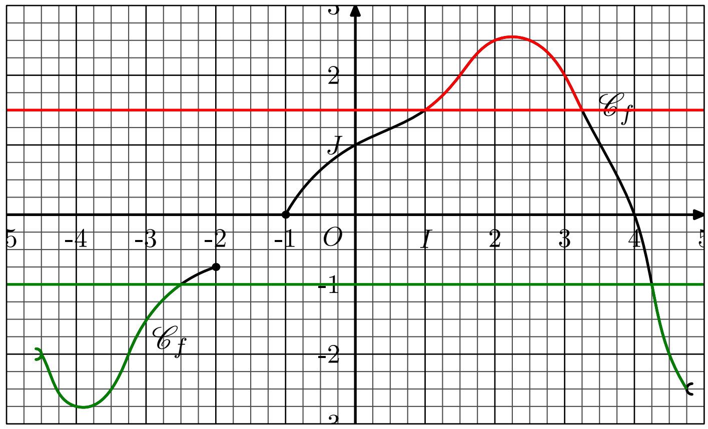



Résoudre graphiquement les deux inéquations suivantes :

a. $f(x) \geqslant 1{,}5$ b. $f(x) \leqslant -1$

## Correction 4434

On a la représentation suivante :

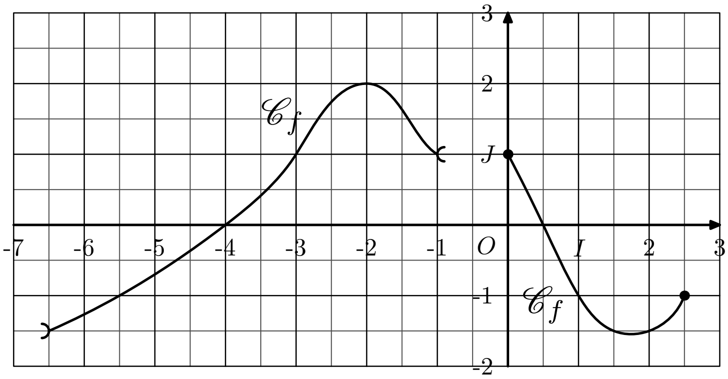



a. En traçant la droite, parallèle à l'axe des ordonnées, d'équation $y = 1{,}5$, les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ se trouvant au dessus de cette droite forment l'ensemble :
$S = \big[1\,;\,3{,}25\big]$

b. En traçant la droite, parallèle à l'axe des ordonnées, d'équation $y = -1$, les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ se trouvant au dessous de cette droite forment l'ensemble :
$S = \big]-4{,}5\,;\,-2{,}5\big] \cup \big[4{,}25\,;\,4{,}75\big[$

## Exercice 2866

On considère la fonction $f$ dont la représentation est donnée ci-dessous dans le repère $(O\,;\,I\,;\,J)$ orthonormé :




On répondra à toutes les questions à l'aide du graphique ci-dessous.

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction $f$.

2. On laissera les traits de construction nécessaire pour répondre aux questions suivantes :

   a. Déterminer l'image de $-5{,}5$ par la fonction $f$.

   b. Déterminer l'ensemble des antécédents de 1 par la fontion $f$.

3. En surlignant les parties concernées de la courbe $\mathscr{C}_f$, résoudre graphiquement les deux inéquations suivantes :

   a. $f(x) \leqslant -1$ b. $f(x) \geqslant 0$

## Correction 2866

1. L'ensemble de définition de la fonction $f$ est :

   $\mathcal{D}_f = \big]-6{,}5\,;\,-1\big[ \cup \big[0\,;\,2{,}5\big]$

2. a. La droite, parallèle à l'axe des ordonnées, d'équation $y = -5{,}5$ intercepte la courbe au point de coordonnées $\big(-5{,}5\,;\,-1\big)$.
   L'image de $-5{,}5$ par la fonction $f$ est 1.

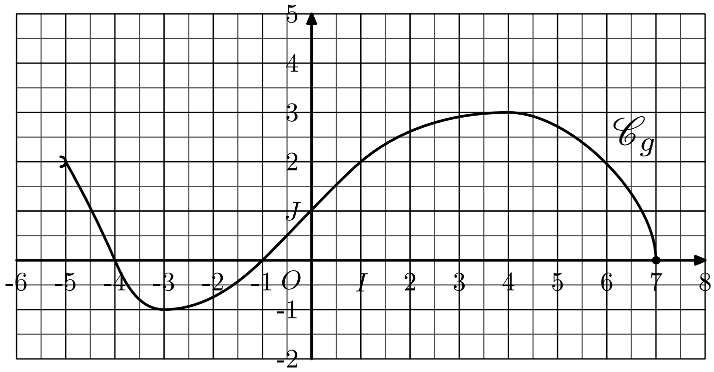
   b. La droite, parallèle à l'axe des abscisses, d'équation $x = 1$ intercepte la courbe aux points de coordonnées :
   $\big(-3\,;1\big)$ ; $\big(0\,;1\big)$
   Les antécédents de 1 par la fonction $f$ sont $-3$ et 1.

3. a. L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant -1$ est formé de l'ensemble des abscisses de la partie de la courbe $\mathscr{C}_f$ se trouvant sous la droite d'équation $x = -1$. On a :
   $\mathcal{S} = \big]-6{,}5\,;\,-5{,}5\big] \cup \big[1\,;\,2{,}5\big]$

   b. L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant 0$ est formé de l'ensemble des abscisses de la partie de la courbe $\mathscr{C}_f$ se trouvant au-dessous la droite d'équation $x = 0$. On a :
   $\mathcal{S} = \big[-4\,;\,-1\big[ \cup \big[0\,;\,1\big]$

## Exercice 391

Dans un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, on considère la courbe $\mathscr{C}_g$ représentative de la fonction $g$ :




1. Donner, sans justification, l'ensemble de définition de la fonction $g$.

2. Donner, sans justification, les solutions des deux équations suivantes :

   a. $g(x) = 2$ b. $g(x) = 0$

3. Résoudre graphiquement les inéquations :

   a. $g(x) \geqslant 2$ b. $g(x) < 0$

   On surlignera les parties utilisées de la courbe $\mathscr{C}_g$ pour répondre à ces questions.

## Correction 391

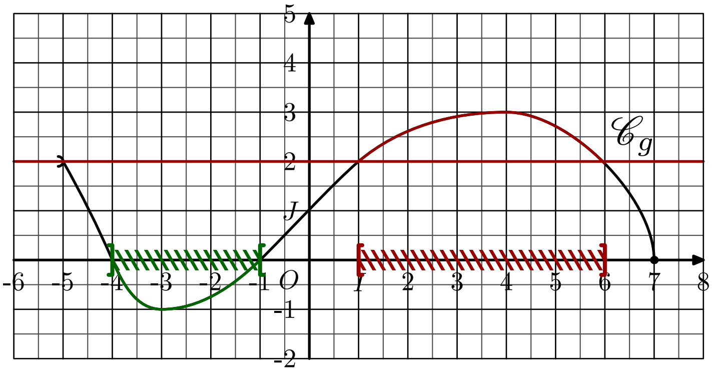
1. L'ensemble de définition de la fonction $g$ est :
   $\mathcal{D}_g = ]-5\,;7]$

2. a. La droite, parallélè à l'axe des abscisses, d'équation $y=2$ intercepte la courbe $\mathscr{C}_g$ en deux points de coordonnées :
   $(1\,;2)$ ; $(6\,;2)$.
   Ainsi les antécédents du nombre 2 par la fonction $g$ sont 1 et 6.
   L'ensemble des solutions est $\{1\,;\,6\}$.

   b. Les abscisses des points de $\mathscr{C}_g$ obtenus avec l'intersection de l'axe des abscisses forment l'ensemble :
   $\{-4\,;-1\,;7\}$
   Cet ensemble contient toutes les solutions de l'équation $g(x)=0$.

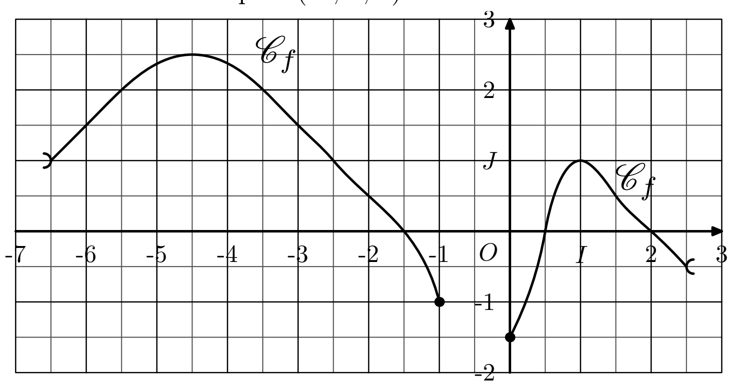
3. a. L'ensemble des solutions de l'inéquation $g(x) \geqslant 1$ est formé des abscisses des points appartenant à la courbe $\mathscr{C}_g$ se situant au dessus ou sur la droite d'équation $y=2$ :
   $\mathcal{S} = [1\,;6]$

   b. L'ensemble des solutions de l'inéquation $g(x) < 0$ est formé des abscisses des points appartenant à la courbe $\mathscr{C}_g$ se situant strictement au dessous de l'axe des abscisses :
   $\mathcal{S} = ]-4\,;-1[$




## Exercice 4946

On considère la fonction $f$ dont la représentation est donnée ci-dessous dans le repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé :




On répondra à toutes les questions à l'aide du graphique ci-dessous.

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction $f$.

2. On justifiera les réponses aux questions suivantes :

   a. Déterminer l'image du nombre 1 par la fonction $f$.

   b. Déterminer l'ensemble des antécédents du nombre 1,5 par la fonction $f$.

3. Déterminer l'image des intervalles suivants par la fonction $f$ :

   a. $[-5{,}5\,;-2]$ b. $[0\,;2]$

4. Déterminer, pour chaque question, l'ensemble des réels $x$ vérifiant les inégalités suivantes :

   a. $f(x) \geqslant 0$ b. $1 < f(x) \leqslant 2$

## Correction 4946

1. L'ensemble de définition de la fonction $f$ est :

   $\mathcal{D}_f = ]-6{,}5\,;-1] \cup [0\,;2{,}5[$

2. a. La droite, parallèle à l'axe des ordonnées, d'équation $y=1$ intercepte la courbe au point de coordonnées $(1\,;1)$.
   L'image de 1 par la fonction $f$ est 1.

   b. La droite, parallèle à l'axe des abscisses, d'équation $y=1{,}5$ intercepte la courbe aux points de coordonnées :
   $(-6\,;1{,}5)$ ; $(-3\,;1{,}5)$
   Les antécédents de 1,5 par la fonction $f$ sont $-6$ et $-3$.

3. a. L'image de l'intervalle $[-5{,}5\,;-2]$ par la fonction $f$ est :
   $f\Big([-5{,}5\,;-2]\Big) = [0{,}5\,;2{,}5]$

   b. L'image de l'intervalle $[0\,;2]$ par la fonction $f$ est :
   $f\Big([0\,;2]\Big) = [-1{,}5\,;1]$

4. a. L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant 0$ est formé de l'ensemble des abscisses de la partie de la courbe $\mathscr{C}_f$ se trouvant au dessu de l'axe des abscisses.
   On a :
   $\mathcal{S} = ]-6{,}5\,;\,-1{,}5] \cup [0{,}5\,;\,2]$

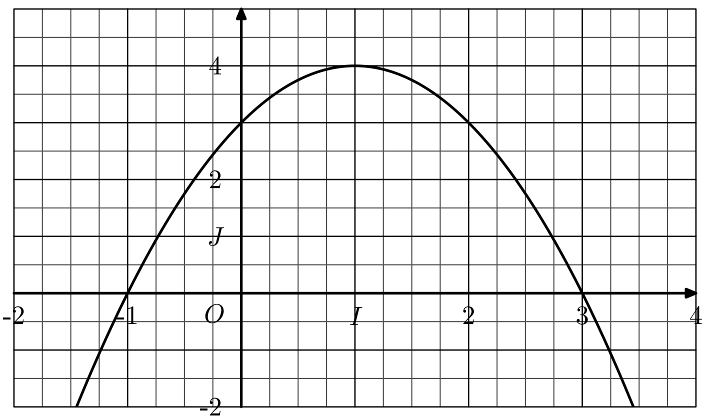
b. L'ensemble des solutions de l'inéquation $1 < f(x) \leqslant 2$ est formé de l'ensemble des abscisses de la partie de la courbe $\mathscr{C}_f$ se trouvant :
- strictement au dessus de la droite $y=1$ ;
- au dessous de la droite d'équation $y=2$.

On obtient comme ensemble des solutions :
$\mathcal{S} = \left]-6{,}5\,;-5{,}5\right] \cup \left[-3{,}5\,;-2{,}5\right[$

## 20. Positions relatives de courbes :

**Exercice 393**

On considère la fonction $f$ dont la représentation est donnée ci-dessous dans le repère orthogonal $(O\,;I\,;J)$ :

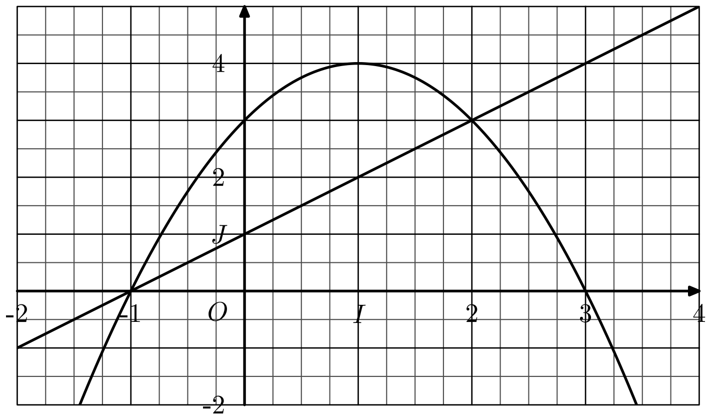



On s'intéresse à la fonction affine $g$ définie par la relation :
$g : x \longmapsto x+1$

1. Tracer la courbe représentative de la fonction $g$ dans le repère ci-dessus.
2. Graphiquement, résoudre l'équation $f(x)=g(x)$.
3. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$

**Correction 393**

1. Voici la représentation de la fonction affine $g$ :




2. Les valeurs de $x$ vérifiant l'équation $f(x)=g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection des courbes$\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

   Les deux courbes s'interceptent aux deux points de coordonnées $(-1\,;0)$ et $(2\,;3)$, ainsi l'ensemble des solutions de cette équation est :
   $\mathcal{S} = \{-1\,;2\}$

3. Les solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$ sont les abscisses des points où la courbe $\mathscr{C}_f$ est située au dessus de la fonction $\mathscr{C}_g$.

   L'ensemble des solutions de cette inéquation est l'intervalle $[-1\,;2]$

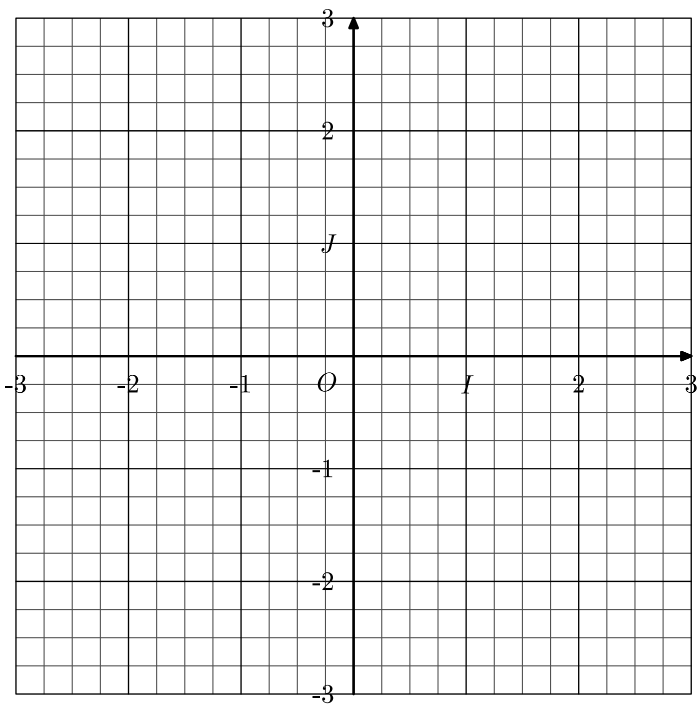
## 22. Système d'équations :

**Exercice 471**

On considère la fonction $f$ tel que le nombre $x$ admet pour image le nombre $f(x)$ défini par :

$f(x) = 1{,}25x - 1$.

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction $f$.
2. Parmi les points :
   $A(-1\,;-2{,}25)$ ; $B\,(2\,;1{,}5)$ ; $C\,(0\,;1{,}25)$
   Lesquels de ces points appartiennent à la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction $f$ ?
3. Tracer, dans le repère orthonormé ci-dessous, la courbe représentative de la fonction $f$



4. a. Placer le point $M$ appartenant à $\mathscr{C}_f$ ayant une abscisse nulle.

b. Quel est l'ordonnée du point $M$ ?
Comment s'appelle l'ordonnée du point $M$ relativement à la fonction $f$ ?

5. a. Déterminer la valeur du quotient : $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

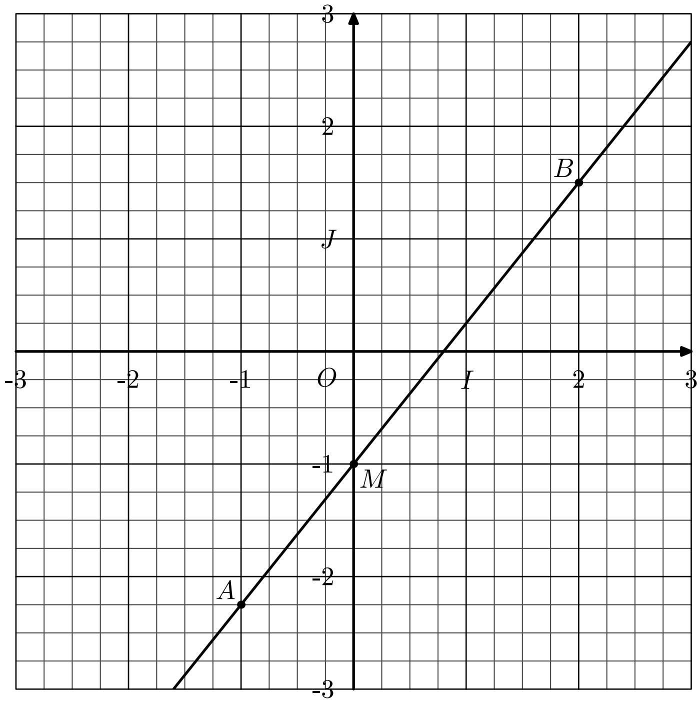
b. Que représente le nombre $a$ relativement à la fonction $f$ ?

## Correction 471

1. L'ensemble de définition de la fonction $f$ est l'esmble des réels car l'expression $1{,}25x-1$ ne pose aucune contrainte quant à son évalutation :
$D_f = \mathbb{R}$

2. 
- $f(-1) = 1{,}25\times(-1) - 1 = -1{,}25 - 1 = -2{,}25$ donc $A\big(-1\,;-2{,}25\big) \in \mathscr{C}_f$
- $f(2) = 1{,}25\times 2 - 1 = 2{,}5 - 1 = 1{,}5$ : $B\,\big(2\,;1{,}5\big) \in \mathscr{C}_f$
- $f(0) = 1{,}5\times 0 - 1 = -1$ : $C\,\big(0\,;1{,}25\big) \notin \mathscr{C}_f$

3. Voici la représentation de la droite :




4. b. L'ordonnée du point $M$ a pour valeur $-1$. Cette valeur est l'ordonnée à l'origine de la fonction $f$.

5. a. On a la valeur suivante :
$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1{,}5 - (-2{,}25)}{2 - (-1)} = \frac{3{,}75}{3} = 1{,}25$$

b. Ce nombre est le coefficient directeur de la fonction affine $f$.

## Exercice 4768

On considère le plan muni d'un repère $\big(O\,;I\,;J\big)$ orthonormal.

1. On considère les deux points $A\,\big(2\,;4\big)$ et $B\big(6\,;-1\big)$ et la droite $(d)$ d'équation :
$$(d) :\ y = -\frac{1}{2}{\cdot}x + \frac{7}{2}$$
Montrer que la droite $(d)$ passe par le milieu du segment $[AB]$.

2. On considère les quatres points suivants du plan :
$$C\,\big(3\,;2\big) \quad ; \quad D\,\big(-1\,;1\big) \quad ; \quad E\Big(2\,;-\frac{5}{2}\Big) \quad ; \quad F\,\Big(0\,;\frac{11}{2}\Big)$$

a. Montrer la droite $(EF)$ est la médiatrice du segment $[CD]$.

b. Déterminer l'équation réduite de la droite $(EF)$.

3. On considère les deux points $G\,\big(1\,;2\big)$ et $H\,\big(4\,;1\big)$ et la droite $(d')$ d'équation :
$$(d') :\ y = 3x - 6$$
Montrer que la droite $(d')$ est la médiatrice du segment $[GH]$.

4. On considère les deux points $K\,\big(3\,;3\big)$ et $L\,\big(6\,;1\big)$ et le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[KL]$. La droite $(\Delta)$ a pour équation :
$(\Delta) :\ y = x - 2$

a. Développer l'expression : $2(x-3)(2x-11)$.

b. Soit $M$ un point de la droite $(\Delta)$. Déterminer les coordonnées des différents points $M$ de $(\Delta)$ rendant le triangle $KLM$ rectangle en $M$.

## Correction 4768

1. Le point $I$ milieu du segment $[AB]$ a pour coordonnées :
$$I\,\Big(\frac{x_A + x_B}{2}\,;\frac{y_A + y_B}{2}\Big) = \Big(\frac{2+6}{2}\,;\frac{4+(-1)}{2}\Big)$$
$$= \Big(\frac{8}{2}\,;\frac{3}{2}\Big) = \Big(4\,;\frac{3}{2}\Big)$$
Montrons que les coordonnées de ce point vérifie l'équation de la droite $(d)$ :
$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2} = -\frac{1}{2}\times 4 + \frac{7}{2}$$
$$= -2 + \frac{7}{2} = \frac{3}{2}$$

2. a. Déterminons les longueurs suivantes :
- $CE^2 = \big(x_E - x_C\big)^2 + \big(y_E - y_C\big)^2$
$$= \big(2-3\big)^2 + \Big(-\frac{5}{2} - 2\Big)^2$$
$$= (-1)^2 + \Big(-\frac{9}{4}\Big)^2 = 1 + \frac{81}{4} = \frac{85}{4}$$
- $DE^2 = \big(x_E - x_D\big)^2 + \big(y_E - y_D\big)^2$
$$= \big[2-(-1)\big]^2 + \Big(-\frac{5}{2} - 1\Big)^2$$
$$= 3^2 + \Big(-\frac{7}{2}\Big)^2 = 9 + \frac{49}{4} = \frac{36+49}{4} = \frac{85}{4}$$

- $CF^2 = \left(x_F - x_C\right)^2 + \left(y_F - y_C\right)^2$
  $= \left(0-3\right)^2 + \left(\frac{11}{2} - 2\right)^2$
  $= (-3)^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2 = 9 + \frac{49}{4} = \frac{36+49}{4} = \frac{85}{4}$
- $DF^2 = \left(x_F - x_D\right)^2 + \left(y_F - y_D\right)^2$
  $= \left[0-(-1)\right]^2 + \left(\frac{11}{2} - 1\right)^2 = 1^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2$
  $= 1 + \frac{81}{4} = \frac{85}{4}$

Les points $E$ et $F$ sont deux points équidistants aux extrémités du segment $[CD]$ : ces deux points appartiennent à la médiatrice du segment $[CD]$.

b. Déterminons le coefficient directeur de la droite $(EF)$ :

$$a = \frac{y_F - y_E}{x_F - x_E} = \frac{0-2}{\frac{11}{2} - \left(-\frac{5}{2}\right)} = \frac{-2}{\frac{16}{2}} = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}$$

Ainsi, la droite $(EF)$ a son équation réduite de la forme :

$$y = -\frac{1}{4}x + b$$

Les coordonnées du point $E$ vérifient cette équation :

$$-\frac{5}{2} = -\frac{1}{4}\times 2 + b$$
$$-\frac{5}{2} = -\frac{1}{2} + b$$
$$-\frac{5}{2} + \frac{1}{2} = b$$
$$b = -\frac{4}{2}$$
$$b = -2$$

La droite $(EF)$ a pour équation :

$$y = -\frac{1}{4}x - 2$$

3. Le point $I$ milieu du segment $[GH]$ a pour coordonnées :

$$I\left(\frac{x_G + x_H}{2}\,;\frac{y_G + y_H}{2}\right) = \left(\frac{1+4}{2}\,;\frac{2+1}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}\,;\frac{3}{2}\right)$$

Montrons que les coordonnées du point $I$ vérifient l'équation de la droite $(d')$ :

$$3x - 6 = 3\times\frac{5}{2} - 6 = \frac{15}{2} - \frac{12}{2} = \frac{3}{2}$$

Prenons un second point de la droite $(d')$ et montrons que ce point est également un point de la médiatrice du segment $[GH]$.

Le point $M$ de coordonnées $\left(0\,;-6\right)$ est un point de $(d')$ :

- $GM^2 = \left(x_M - x_G\right)^2 + \left(y_M - y_G\right)^2$
  $= \left(0-1\right)^2 + \left(-6-2\right)^2 = (-1)^2 + (-8)^2$
  $= 1 + 64 = 65$
- $HM^2 = \left(x_M - x_H\right)^2 + \left(y_M - y_H\right)^2$
  $= \left(0-4\right)^2 + \left(-6-1\right)^2 = 16 + 49 = 65$

On vient de montrer que le point $M$ est équidistant des extrémités du segment $[GH]$ : le point $M$ est également un point de la médiatrice du segment $[GH]$.

On en déduit que la droite $(d')$ est la médiatrice du segment $[GH]$.

4. a. On a le développement suivant :

$$2(x-3)(2x-11) = (2x-6)(2x-11)$$
$$= 4x^2 - 22x - 12x + 66 = 4x^2 - 34x + 66$$

b. Si le point $M$ est un point d'intersection de la droite $(\Delta)$ et du cercle $\mathscr{C}$ alors le triangle $KLM$ est un triangle rectangle en $M$.

Déterminons les positions1 de $M$ afin que le triangle $KLM$ soit rectangle en $M$. Les longueurs du triangle $KLM$ doivent vérifier :

$$KL^2 = KM^2 + LM^2$$

$$(x_K\text{-}x_L)^2 + (y_K\text{-}y_L)^2 = (x_K - x_M)^2 + (y_K - y_M)^2 + (x_L - x_M)^2 + (y_L - y_M)^2$$

$$(3-6)^2 + (3-1)^2 = (3-x)^2 + (3-y)^2 + (6-x)^2 + (1-y)^2$$

$$(-3)^2 + 2^2 = 9 - 6x + x^2 + 9 - 6y + y^2 + 36 - 12x + x^2 + 1 - 2y + y^2$$

$$9 + 4 = 9 - 6x + x^2 + 9 - 6y + y^2 + 36 - 12x + x^2 + 1 - 2y + y^2$$

$$13 = 55 - 18x + 2x^2 - 8y + 2y^2$$

$$13 = 55 - 18x + 2x^2 - 8(x-2) + 2(x-2)^2$$

$$13 = 55 - 18x + 2x^2 - 8x + 16 + 2x^2 - 8x + 8$$

$$4x^2 - 34x + 66 = 0$$

En utilisant le résultat de la question a. :

$$2(x-3)(2x-11) = 0$$

Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :

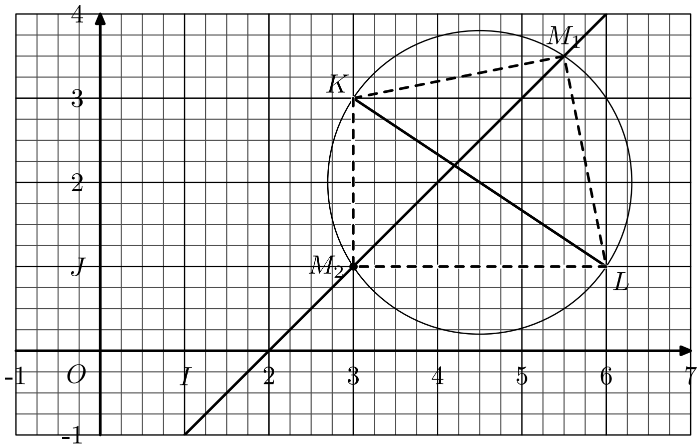
| | |
|---|---|
| $x - 3 = 0$ | $2x - 11 = 0$ |
| $x = 3$ | $2x = 11$ |
| | $x = \frac{11}{2}$ |

Ainsi, les abscisses des points rendant le triangle $KLM$ rectangle sont :

$$x = 3 \quad ; \quad x = \frac{11}{2}$$

Leurs abscisses sont :

- $y = x - 2 = 3 - 2 = 1$
  Le point $M$ a pour coordonnées $\left(3\,;1\right)$.
- $y = x - 2 = \frac{11}{2} - 3 = \frac{7}{2}$
  Le point $M$ peut avoir pour coordonnées $\left(\frac{11}{2}\,;\frac{7}{2}\right)$



# 23. Système d'équations linéaires :

## Exercice 474

1. Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 8x + 3y = 39{,}5 \\ 7x + 9y = 50{,}5 \end{cases}$$

2. Une balade d'une heure en mer est proposée à deux groupes de touristes.
Le premier groupe, composé de 8 adultes et de 3 enfants, paie 39,50 euros. Le second, composé de 7 adultes et de 9 enfants, paie 50,50 euros. Quel est donc le prix d'un ticket pour un adulte ? Pour un enfant ?

## Correction 474

1. En multipliant par 3 la première ligne du système, on obtient :

$$\begin{cases} 24x + 9y = 118{,}5 \\ 7x + 9y = 50{,}5 \end{cases}$$

Par soustraction de ces deux lignes, on obtient l'équation :

$$17x + 0y = 68$$
$$17x = 68$$
$$x = 4$$

En utilisant la première ligne du système, on obtient la valeur de $y$ :

$$8x + 3y = 39{,}5$$
$$8\times4 + 3y = 39{,}5$$
$$32 + 3y = 39{,}5$$
$$3y = 39{,}5 - 32$$
$$3y = 7{,}5$$
$$y = \frac{7{,}5}{3}$$
$$y = 2{,}5$$

Ainsi, ce système admet pour solution le couple $(4\,;2{,}5)$

2. Notons $x$ le prix de la balade pour un adulte et $y$ celui pour un enfant. L'énoncé se traduit par les équations suivantes :
- Pour le premier groupe, 8 adultes et de 3 enfants ont payé 39,50€ :
$8x + 3y = 39{,}50$
- Pour le second groupe, 7 adultes et de 9 enfants ont payé 50,50€ :
$7x + 9y = 50{,}50$

Ainsi, la résolution de ce problème vient à résoudre le système :

$$\begin{cases} 8x + 3y = 39{,}5 \\ 7x + 9y = 50{,}5 \end{cases}$$

Ainsi, l'unique solution donne le prix d'un adulte à 4€ et le prix de la balade pour un enfant à 2,5€.

## Exercice 2230

1. Résoudre le système suivant : $\begin{cases} 4x + 3y = 206 \\ 2x + 2y = 114 \end{cases}$

2. Lors d'un spectacle, la famille $A$, composée de 4 adultes et de 3 enfants, a payé 206 euros.

Pour le même spectacle, la famille $B$, composée de 2 adultes et de 2 enfants, a payé 114 euros.

Combien payera la famille $C$, sachant qu'elle est composée de 3 adultes et de 2 enfants ?

## Correction 2230

1. Résolvons ce système par combinaisons linéaires :

Le système $\begin{cases} 4x + 3y = 206 \\ 2x + 2y = 114 \end{cases}$ est équivalent à :

$$\begin{cases} 4x + 3y = 206 \\ 4x + 4y = 228 \end{cases}$$

En soustrayant la première ligne par la seconde, on obtient :

$$3y - 4y = 206 - 228$$
$$-y = -22$$
$$y = 22$$

En utilisant la première ligne, on obtient la valeur de $x$ :

$$4x + 3y = 206$$
$$4x + 3\times22 = 206$$
$$4x + 66 = 206$$
$$4x = 140$$
$$x = \frac{140}{4} = 35$$

Ainsi, ce système admet pour couple de solution $(35\,;22)$

2. En notant, $x$ le prix d'un adulte et $y$ le prix d'un enfants :
- la dépense de la famille $A$ se traduit par l'expression :
$4x + 3y = 206$
- la dépense de la famille $B$ se traduit par l'expression :
$2x + 2y = 114$

Ainsi, les inconnues $x$ et $y$ vérifient le système :

$$\begin{cases} 4x + 3y = 206 \\ 2x + 2y = 114 \end{cases}$$

qui d'après la première question a pour couple de solution $(35\,;22)$.

Ainsi la famille $C$ paiera :
$3x + 2y = 3\times35 + 2\times22 = 105 + 44 = 149$

## Exercice 2216

1. On considère les équations cartésiennes de droites suivantes :

$$(d_1) :\ 5x + y - 2 = 0 \quad ; \quad (d_2) :\ 3x - y + 5 = 0$$

$$(d_3) :\ 5x + 2y + 1 = 0 \quad ; \quad (d_4) :\ 2x + \frac{1}{2}y - 5 = 0$$

Pour chacune des équations cartésiennes, déterminer de tête le coefficient directeur de la droite *(on passera par l'équation réduite de la droite)*.

2. On considère les deux droites $(d_5)$ et $(d_6)$ définies par les équations cartésiennes suivantes :

$$(d_5) :\ 3x + 6y - 1 = 0 \quad ; \quad (d_6) :\ 2x + 4y + 5 = 0$$

a. Déterminer rapidement le coefficient directeur associé à chacune des droites.

b. Les droites $(d_5)$ et $(d_6)$ sont-elles parallèles ?

c. Que peut-on dire du nombre de solutions du système de deux équations linéaires à deux inconnues suivant :
$$\left\{\begin{array}{l} 3x + 6y - 1 = 0 \\ 2x + 4y + 5 = 0 \end{array}\right.$$

3. On considère les deux droites $(d_7)$ et $(d_8)$ définies par les équations cartésiennes suivantes :

$$(d_7) :\ 5x - 4y + 5 = 0 \quad ; \quad (d_8) :\ 4x - \frac{16}{5}y + 4 = 0$$

a. Les droites $(d_7)$ et $(d_8)$ sont-elles parallèles ?

b. Que peut-on dire du nombre de solutions du système de deux équations linéaires à deux inconnues ci-dessous ?
$$\left\{\begin{array}{l} 5x - 4y + 5 = 0 \\ 4x - \dfrac{16}{5}y + 4 = 0 \end{array}\right.$$

## Correction 2216

1. 
- La droite $(d_1)$ a pour coefficient directeur : $-5$
- La droite $(d_2)$ a pour coefficient directeur : $3$
- La droite $(d_3)$ a pour coefficient directeur : $-\dfrac{5}{2}$
- La droite $(d_4)$ a pour coefficient directeur : $-4$

2. a.
- Le coefficient de la droite $(d_5)$ est $-\dfrac{1}{2}$ ;
- Le coefficient de la droite $(d_6)$ est $-\dfrac{1}{2}$.

b. Les droites $(d_5)$ et $(d_6)$ sont parallèles car elles ont le même coefficient directeur.

c. Le système proposé :
$$\left\{\begin{array}{l} 3x + 6y - 1 = 0 \\ 2x + 4y + 5 = 0 \end{array}\right.$$
En divisant la première équation par 3 et en divisant la seconde équation par 2, on obtient le nouveau système suivant :
$$\left\{\begin{array}{l} x + 2y - \dfrac{1}{2} = 0 \\ x + 2y + \dfrac{5}{2} = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + 2y = \dfrac{1}{2} \\ x + 2y = \dfrac{5}{2} \end{array}\right.$$
Il es clair qu'aucun couple de nombres ne peut résoudre simultanément ces deux équations.

3. a.
- La droite $(d_7)$ a pour coefficient directeur $\dfrac{5}{4}$ ;
- La droite $(d_8)$ a pour coefficient directeur $\dfrac{5}{4}$.

b. Le système proposé :
$$\left\{\begin{array}{l} 5x - 4y + 5 = 0 \\ 4x - \dfrac{16}{y}5 + 4 = 0 \end{array}\right.$$
En multipliant la première équation par 4 et en multipliant la seconde équation par 5, on obtient le système équivalent :
$$\left\{\begin{array}{l} 20x - 16y + 20 = 0 \\ 20x - 16y + 20 = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 20x - 16y = -20 \\ 20x - 16y = -20 \end{array}\right.$$
Les deux équations sont équivalentes ainsi, les couples de points doivent vérifier l'équation :
$$20x - 16y = -20$$
$$-16y = -20x - 20$$
$$y = \frac{20}{16}\cdot x + \frac{20}{16}$$
$$y = \frac{5}{4}\cdot x + \frac{5}{4}$$
Les couples solutions de ce système sont l'ensemble des coordonnées des points appartenant à la droite :
$$y = \frac{5}{4}\cdot x + \frac{5}{4}$$

## Exercice 3026

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$ :

1. On considère les deux droites $(d_1)$ et $(d_2)$ d'équations cartésiennes :

$$(d_1) :\ 2x - y + 1 = 0 \quad ; \quad (d_2) :\ x - 3y - 4 = 0$$

a. Les droites $(d_1)$ et $(d_2)$ sont-elles parallèles ?

b. Déterminer les coordonnées du point d'intersection.

2. On considère les deux droites $(d_3)$ et $(d_4)$ admettant les équations réduites suivantes :

$$(d_3) :\ y = \frac{3}{2}\cdot x + 1 \quad ; \quad (d_4) :\ y = 4x - 2$$

a. Les droites $(d_3)$ et $(d_4)$ sont-elles parallèles ?

b. Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites $(d_3)$ et $(d_4)$.

## Correction 3026

1. a. La droite $(d_1)$ admet pour équation réduite :
$y = 2x + 1$
Son coefficient directeur vaut donc 2.
La droite $(d_1)$ admet pour équation réduite :
$y = \dfrac{1}{3}x - \dfrac{4}{3}$
Son coefficient directeur vaut $\dfrac{1}{3}$
Le coefficient directeur de ces deux droites étant différent, on en déduit que ces deux droites sont sécantes.

b. Pour déterminer les coordonnées du point d'intersection de ces deux droites, on doit résoudre le système suivant :
$$\left\{\begin{array}{l} 2x - y + 1 = 0 \\ x - 3y - 4 = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x - y + 1 = 0 \\ 2x - 6y - 8 = 0 \end{array}\right.$$
En soustrayant ces deux équations, on obtient :
$$5y + 9 = 0$$
$$5y = -9$$
$$y = -\frac{9}{5}$$
Utilisons cette valeur dans la seconde équation :
$$2x - 6y - 8 = 0$$
$$2x - 6\times\left(-\frac{9}{5}\right) - 8 = 0$$
$$2x + \frac{54}{5} - 8 = 0$$
$$2x = -\frac{54}{5} + \frac{40}{5}$$
$$2x = -\frac{14}{5}$$
$$x = -\frac{7}{5}$$

Ainsi, le point d'intersection des droites $(d_1)$ et $(d_2)$ est $\left(-\frac{7}{5}\,;-\frac{9}{5}\right)$.

2. a. Les coefficients directeurs de ces deux droites étant différents, on en déduit que ces deux droites ne sont pas parallèles.

b. L'abscisse du point d'intersection doit vérifier l'égalité :

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}x+1&=4x-2\\ \frac{3}{2}x-4x&=-2-1\\ \frac{3}{2}x-\frac{8}{2}x&=-3\\ -\frac{5}{2}x&=-3\\ x&=-3\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)\\ x&=\frac{6}{5}\end{aligned}$$

Son ordonnée a pour valeur :

$$\begin{aligned}y&=\frac{3}{2}x+1\\ &=\frac{3}{2}\times\frac{6}{5}+1\\ &=\frac{18}{10}+1\\ &=\frac{28}{10}\\ &=\frac{14}{5}\end{aligned}$$

Ainsi, le point d'intersection a pour coordonnées $\left(\frac{6}{5}\,;\frac{14}{5}\right)$

## Exercice 2614

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère les points $A(-2\,;3)$ et $B(1\,;-1)$ et la droite $(d)$ dont une équation cartésienne est donnée ci-dessous :

$(d)\,:\ 2x-y+3=0$

1. Justifier que la droite $(AB)$ admet l'équation ci-dessous comme équation cartésienne :

$4x+3y-1=0$

2. a. Résoudre le système d'équation suivant :
$$\begin{cases}2x-\ \ y+3=0\\ 4x+3y-1=0\end{cases}$$

b. Que représente, graphiquement, le point de coordonnée $(x\,;y)$ trouvé à la question précédente.

## Correction 2614

1. Vérifions que les coordonnées des points $A$ et $B$ vérifient l'équation cartésienne proposée :

- $4x_A+3y_A-1=4\times(-2)+3\times3-1$
$=-8+9-1$
$=0$
- $4x_B+3y_B-1=4\times1+3\times(-1)-1$
$=4-3-1$
$=0$

2. a. Résolvons le systéme d'équations suivants :
$$\begin{cases}2x-y+3=0\\ 4x+3y-1=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}4x-2y+6=0\\ 4x+3y-1=0\end{cases}$$

Em soustrayant membre à membre ces deux équations, on obtient :

$$\begin{aligned}-5y+7&=0\\ -5y&=-7\\ y&=\frac{-7}{-5}\\ y&=\frac{7}{5}\end{aligned}$$

En utilisant cette valeur dans la première équation, on obtient :

$$\begin{aligned}2x-y+3&=0\\ 2x-\frac{7}{5}+3&=0\\ 2x-\frac{7}{5}+\frac{15}{5}&=0\\ 2x+\frac{8}{5}&=0\\ 2x&=-\frac{8}{5}\\ x&=-\frac{4}{5}\end{aligned}$$

Ainsi, la solution de ce système est le couple $\left(-\frac{4}{5}\,;\frac{7}{5}\right)$.

b. Ce couple représente les coordonnées du points d'intersection des deux droites admettant pour équation cartésienne les deux équations suivantes :
$2x-y+3=0\quad;\quad 4x+3y-1=0$

## Exercice 470

Un élève achète dans une papeterie deux stylos et un cahier pour un montant total de 3,5 €.

Il retourne une seconde fois dans ce magasin pour acheter pour 1 stylo et 3 cahiers, du même modèle et du même prix, pour un coût global de 6,75 €.

Déterminez le prix d'un stylo et d'un cahier dans cette papeterie.

## Correction 470

Notons $x$ le prix d'un stylo et $y$ le prix d'un cahier.

Le prix du premier achat se traduit par l'égalité :
$2x+y=3{,}5$

Le second achat se traduit par l'égalité :
$x+3y=6{,}75$

Résolvons le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + y = 3{,}5 \\ x + 3y = 6{,}75 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x + y = 3{,}5 \\ 2x + 6y = 13{,}50 \end{cases}$$

En soustrayant les deux équations, on obtient l'équation :

$$-5y = -10$$
$$y = \frac{-10}{-5}$$
$$y = 2$$

En utilisant la seconde équation du système initial, on obtient :

$$x + 3y = 6{,}75$$
$$x + 3\times 2 = 6{,}75$$
$$x + 6 = 6{,}75$$
$$x = 6{,}75 - 6$$
$$x = 0{,}75$$

On en déduit qu'un stylo coûte 0,75 € et un cahier coûte 2 €.

## 24. Equations, inequations et sens de variation :

### Exercice 4858

Résoudre les équations suivantes :

a. $(x+1)^2 = 4$ b. $(x-2)^2 + 4 = 7$

c. $(x+2)^2 + 5 = 2$ d. $3{\cdot}x^2 - 6 = 1$

### Correction 4858

a. De l'équation $(x+1)^2 = 4$, on en déduit les deux équations :

| | |
|---|---|
| $x+1=-2$ | $x+1=2$ |
| $x=-2-1$ | $x=2-1$ |
| $x=-3$ | $x=1$ |

L'ensemble des solutions est : $\mathcal{S} = \{-3\,;1\}$

b. On a les manipulations algébriques :

$$(x-2)^2 + 4 = 7$$
$$(x-2)^2 = 7 - 4$$
$$(x-2)^2 = 3$$

On en déduit les deux équations :

| | |
|---|---|
| $x-2=-\sqrt{3}$ | $x-2=\sqrt{3}$ |
| $x=2-\sqrt{3}$ | $x=2+\sqrt{3}$ |

L'ensemble des solutions est : $\mathcal{S} = \{2-\sqrt{3}\,;2+\sqrt{3}\}$

c. On a les manipulations algébriques :

$$(x+2)^2 + 5 = 2$$
$$(x+2)^2 = 2 - 5$$
$$(x+2)^2 = -3$$

Un carré étant positif, on en déduit que cette équation n'a pas de solution : $\mathcal{S} = \varnothing$

d. On a les manipulations algébriques suivants :

$$3{\cdot}x^2 - 6 = 1$$
$$3{\cdot}x^2 = 1 + 6$$
$$3{\cdot}x^2 = 7$$
$$x^2 = \frac{7}{3}$$

On en déduit l'ensemble des solutions de cette équation :

$$\mathcal{S} = \left\{-\sqrt{\frac{7}{3}}\,;\sqrt{\frac{7}{3}}\right\}$$

### Exercice 4859

Résoudre les inéquations suivantes :

a. $\frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{5}$ b. $\frac{1}{x} > \frac{3}{4}$ c. $\frac{1}{x} < -\frac{1}{3}$ d. $\frac{1}{x} < 2$

### Correction 4859

a. On a les manipulations algébriques suivantes :

$$\frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{5}$$
$$\frac{1}{x} - \frac{1}{5} \geqslant 0$$
$$\frac{5-x}{5x} \geqslant 0$$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $5-x$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $5x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $\frac{5-x}{5x}$ | | $-$ | $\|\|$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

L'ensemble des solutions est : $\mathcal{S} = \left]0\,;5\right]$.

b. On a les manipulations algébriques suivantes :

$$\frac{1}{x} > \frac{3}{4}$$
$$\frac{1}{x} - \frac{3}{4} > 0$$
$$\frac{4-3x}{4x} > 0$$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\frac{4}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $4-3x$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $4x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $\frac{4-3x}{4x}$ | | $-$ | $\|\|$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

L'ensemble des solutions est : $\mathcal{S} = \left]0\,;\frac{4}{3}\right[$.

c. On a les manipulations algébriques suivantes :

$$\frac{1}{x} < -\frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{3} < 0$$
$$\frac{3+x}{3x} < 0$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $3+x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $3x$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $\dfrac{3+x}{3x}$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $\|$ | $+$ | |

On a pour ensemble des solutions : $\mathcal{S}=\big]-3\,;0\big[$

d. On a les manipulations algébriques suivantes :

$$\frac{1}{x}<2$$
$$\frac{1}{x}-2<0$$
$$\frac{1-2x}{x}<0$$

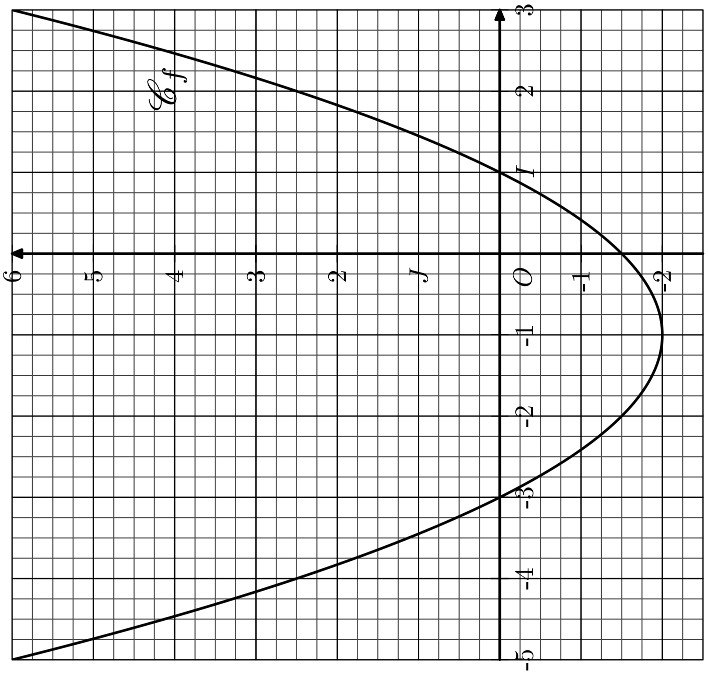
| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1-2x$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $\dfrac{1-2x}{x}$ | | $-$ | $\|$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

L'ensemble des solutions est : $\mathcal{S}=\big]-\infty\,;0\big[\cup\big]\frac{1}{2}\,;+\infty\big[$

## 25. Equations, inequations et courbes représentatives :

### Exercice 2923

On considère la fonction $f$ définie sur $\big[-5\,;3\big]$ dont la représentation est donnée ci-dessous :




Les questions suivantes doivent être traitées graphiquement et sans justification.

1. Dresser le tableau de variation de la fonction $f$.
2. Dresser le tableau de signe de la fonction $f$.
3. Résoudre l'inéquation : $f(x)>\dfrac{5}{2}$
4. Déterminer les images des intervalles suivants :

a. $\big[1\,;3\big[$ b. $\big[-4\,;-2\big[$ c. $\Big[-\dfrac{15}{4}\,;1\Big[$

### Correction 2923

1. Voici le tableau de variation de la fonction $f$ :

| $x$ | $-5$ | | -1 | | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| Variation de $f$ | 6 | $\searrow$ | -2 | $\nearrow$ | 6 |

2. Voici le tableau de signe de la fonction $f$ :

| $x$ | $-5$ | | $-3$ | | $1$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

3. Graphiquement, on considère la partie de la courbe $\mathscr{C}_f$ située au dessus de la droite, parallèle à l'axe des abscisses, d'équation $y=\dfrac{5}{2}$ ; les abscisses des points de cette courbe définissent l'ensemble des solutions :

$\mathcal{S}=\big[-5\,;-4\big[\cup\big]2\,;3\big]$

4. Graphiquement, voici les images des intervalles considérés par la fonction $f$ :

a. $f\Big(\big[1\,;3\big[\Big)=\big[0\,;6\big[$

b. $f\Big(\big[-4\,;-2\big[\Big)=\Big]-\dfrac{3}{2}\,;\dfrac{5}{2}\Big]$

c. $f\Big(\Big[-\dfrac{15}{4}\,;1\Big[\Big)=\Big[-2\,;\dfrac{7}{4}\Big]$

### Exercice 4904

1. Comparer les couples de nombres suivants :

a. $3\sqrt{3}$ ; $5$ b. $\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$ ; $\dfrac{1}{5}$

c. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ ; $\dfrac{3\sqrt{4}}{4}$ d. $2+\sqrt{5}$ ; $3$

2. Donner, sans justification, les images des intervalles suivants par la fonction carrée :

a. $\big]2\,;\,3\big]$ b. $\big]-5\,;-1\big]$ c. $\big]-2\,;4\big]$

3. Donner, sans justification, les images des intervalles suivants par la fonction inverse :

a. $\big]-4\,;-1\big[$ b. $\big]0\,;\,5\big[$

## Correction 4904

1. a. On a les carrés suivants :
   - $\left(3\sqrt{3}\right)^2 = 9\times3 = 27$
   - $5^2 = 25$

   On a la comparaison suivante :
   $$27 > 25$$
   $$\left(3\sqrt{3}\right)^2 > 5^2$$
   Deux nombres positifs et leurs carrés sont comparés dans le même sens :
   $$3\sqrt{3} > 5$$

   b. De la question précédente, on a la comparaison suivante :
   $$3\sqrt{3} > 5$$
   Deux nombres positifs et leurs carrés sont comparés dans le sens contraire :
   $$\frac{1}{3\sqrt{3}} < \frac{1}{5}$$

   c. On a les carrés suivants :
   - $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{\left(2\sqrt{3}\right)^2}{3^2} = \frac{2^2\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2}{9} = \frac{4\times3}{9}$
     $= \frac{4}{3} = \frac{16}{12}$
   - $\left(\frac{3\sqrt{4}}{4}\right)^2 = \frac{\left(3\sqrt{4}\right)^2}{4^2} = \frac{3^2\cdot\left(\sqrt{4}\right)^2}{16} = \frac{9\times4}{16}$
     $= \frac{9}{4} = \frac{27}{12}$

   On a les comparaisons suivantes :
   $$\frac{16}{12} < \frac{27}{12}$$
   $$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 < \left(\frac{3\sqrt{4}}{4}\right)^2$$
   Deux nombres positifs et leurs carrés sont comparés dans le même ordre :
   $$\frac{2\sqrt{3}}{3} < \frac{3\sqrt{4}}{4}$$

   d. On a les carrés suivants :
   - $\left(2+\sqrt{5}\right)^2 = 2^2 + 2\times2\sqrt{5} + \left(\sqrt{5}\right)^2$
     $= 4 + 4\sqrt{5} + 5 = 9 + 4\sqrt{5}$
   - $3^2 = 9$

   On a la comparaison suivante :
   $$9 + 4\sqrt{5} < 9$$
   $$\left(2+\sqrt{5}\right)^2 < 3^2$$
   Deux nombres positifs et leurs carrés sont comparés dans le même sens :
   $$2 + \sqrt{5} < 3$$

2. On a les images suivants des intervalles par la fonction carrée notée $f$ :

   a. $f\Big(\big]2\,;3\big]\Big) = \big]4\,;9\big]$

   b. $f\Big(\big]-5\,;-1\big)\Big) = \big[1\,;25\big[$

   c. $f\Big(\big]-2\,;4\big]\Big) = \big[0\,;16\big]$

3. Notons $g$ la fonction inverses. On a les images intervalles suivants :

   a. $g\Big(\big]-4\,;-1\big[\Big) = \Big]-1\,;-\frac{1}{4}\Big[$

   b. $g\Big(\big]0\,;5\big[\Big) = \Big]\frac{1}{5}\,;+\infty\Big[$

# 26. Equation du second degé :

## Exercice 2172

Résoudre les équations suivantes :

a. $3x^2 - 5x + 6 = 0$ b. $3x^2 - 24x + 48 = 0$

c. $x(x-2)(x+1) = (x-2)(-7-3x)$

## Correction 2172

a. Le discriminant du polynôme du second degré $3x^2{-}5x{+}6$ est :
$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4\times3\times6 = 25 - 72 = -47 < 0$$
Le discriminant étant négatif, cette équation n'admet aucune solution :
$$S = \varnothing$$

b. Déterminons le discriminant du trinôme $3x^2{-}24x{+}48$ est :
$$\Delta = b^2 - 4ac = 24^2 - 4\times3\times48 = 0$$
Le discriminant de ce polynôme du second degré étant nul, cette équation admet une unique solution :
$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-24}{6} = 4$$
L'ensemble des solutions de l'équation est : $S = \{4\}$

c. On a les transformations algébriques :
$$x(x-2)(x+1) = (x-2)(-7-3x)$$
$$x(x-2)(x+1) - (x-2)(-7-3x) = 0$$
$$(x-2)\Big[x(x+1) - (-7-3x)\Big] = 0$$
$$(x-2)\big(x^2 + x + 7 + 3x\big) = 0$$
$$(x-2)\big(x^2 + 4x + 7\big) = 0$$
Cherchons les racines du second facteur ; le discriminant de $x^2 + 4x + 7$ a pour valeur :
$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4\times1\times7 = 16 - 28 = -12 < 0$$
Ce discriminant est négatif : ce polynôme n'admet aucune racine.

Pour que le produit $(x{-}2)\big(x^2{+}4x{+}7\big)$ s'annule, il est nécessaire qu'un de ses facteurs s'annule ; seul le premier facteur peut s'annuler pour $x{=}2$.

L'ensemble des solutions est : $S = \big\{2\big\}$

## 27. Factorisations et simplifications :

**Exercice 2833**

On considère la fonction $f$ dont l'image de $x$ est définie par la fraction rationnelle ci-desous :

$$f(x) = \frac{8x^2+6x-5}{14x^2-13x+3}$$

Donner l'ensemble de définition de la fonction $f$, puis déterminer, si elle existe, la forme simplifiée de $f(x)$.

**Correction 2833**

Pour déterminer l'ensemble de définition, nous devons chercher les valeurs qui annulent le dénominateur :

Le polynôme du second degré du dénominateur admet pour discriminant :

$$\Delta = b^2-4ac = 13^2-4\times14\times3 = 169-168 = 1$$

Le discrimant étant strictement positif, ce polynôme admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{13-1}{2\times14} = \frac{12}{28} = \frac{3}{7} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{13+1}{2\times14} = \frac{14}{28} = \frac{1}{2}$$

Ainsi, l'ensemble de définition de la fonction $f$ est :

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{7}\,;\,\frac{1}{2}\right\}$$

Pour effectuer la simplification de cette fraction rationnelle, nous allons chercher la forme factorisée du numérateur et du dénominateur :

- L'étude faîte précédemment donne pour forme factorisée du dénominateur :
  $$14x^2-13x+3 = 14\cdot\left(x-\frac{3}{7}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$$
- Etudions le polynôme du second degré du numérateur; son discriminant vaut :
  $$\Delta = b^2-ac = 6^2-4\times8\times(-5) = 36+160 = 196$$
  On remarque que : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{196} = 14$

  Le discriminant étant strictement positif, on obtient les deux racines suivantes :
  $$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6-14}{2\times8} = \frac{-20}{16} = -\frac{5}{4} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6+14}{2\times8} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$
  On obtient la forme factorisée suivante du numérateur :
  $$8x^2+6x-5 = 8\cdot\left(x+\frac{5}{4}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

Ainsi, on obtient la simplification de l'expression de la fonction $f$ **sur** son ensemble de définition :

$$f(x) = \frac{8x^2+6x-5}{14x^2-13x+3} = \frac{8\cdot\left(x+\frac{5}{4}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{14\cdot\left(x-\frac{3}{7}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{8\cdot\left(x+\frac{5}{4}\right)}{14\cdot\left(x-\frac{3}{7}\right)} = \frac{4\cdot\left(x+\frac{5}{4}\right)}{7\cdot\left(x-\frac{3}{7}\right)} = \frac{4x+5}{7x-3}$$

## 28. Tableau de signes et inéquation :

**Exercice 2177**

Résoudre les inéquations suivantes :

a. $2x^2-8x+2 \geqslant 0$

b. $\dfrac{3x^2-5x+2}{-3x^2+4x-2} \leqslant 0$

c. $\dfrac{2x-5}{2x-1} < \dfrac{x+1}{x+3}$

**Correction 2177**

a. Etudions le trinôme $2x^2-8x+2$. Son discriminant vaut :
$$\Delta = b^2-4ac = (-8)^2-4\times2\times2 = 64-16 = 48$$
On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$.

Le discriminant de cette expression est strictement positif; ce polynôme admet deux racines de ce trinôme du second degré sont :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8-4\sqrt{3}}{4} = 2-\sqrt{3} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8+4\sqrt{3}}{4} = 2+\sqrt{3}$$

Le coefficient du terme du second degré est positif. On obtient le tableau de signe suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $2-\sqrt{3}$ | | $2+\sqrt{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x^2-8x+2$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

L'ensemble des solutions de l'inéquation sont :

$$S = \left]-\infty\,;2-\sqrt{3}\right] \cup \left[2+\sqrt{3}\,;+\infty\right[$$

b. Etudions séparemment les trinômes formant le numérateur et le dénominateur :

- Le discriminant de $3x^2-5x+2$ est :
  $$\Delta = b^2-4ac = (-5)^2-4\times3\times2 = 25-24 = 1$$
  On remarque que : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{1} = 1$

Ce discriminant est strictement positif ; ce trinôme admet deux racines qui sont :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5-1}{6} = \frac{2}{3} \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5+1}{6} = 1$$

Le coefficient du terme de degré 2 est positif ; cette expression est négative entre ses racines.

- Le discriminant de $-3x^2+4x-2$ est :
  $\Delta = b^2-4ac = (-4)^2 - 4\times(-3)\times(-2)$
  $= 16-24 = -8 < 0$
  Le discrimant étant négatif ; l'expression n'admet aucune racine. Ainsi, cette expression a le signe de son coefficient du terme de degré 2 pour tout valeur $x\in\mathbb{R}$.

Le coefficient du terme du second degré du numérateur est positif alors que celui du dénominateur est négatif. On obtient le tableau de signe suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{2}{3}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $3x^2-5x+2$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $-3x^2-4x+2$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | |
| $\dfrac{3x^2-5x+2}{-3x^2-4x+2}$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

L'ensemble des solutions de l'équation de départ est :

$$S = \Big]-\infty\,;\frac{2}{3}\Big]\cup\Big[1\,;+\infty\Big[$$

c. Par manipulation algébrique, nous allons transformer l'expression de cette inéquation afin d'obtenir un produit/quotient plus compatible à l'étude du signe d'une expression :

$$\frac{2x-5}{2x-1} < \frac{x+1}{x+3}$$
$$\frac{2x-5}{2x-1} - \frac{x+1}{x+3} < 0$$
$$\frac{(2x-5)(x+3)}{(2x-1)(x+3)} - \frac{(x+1)(2x-1)}{(x+3)(2x-1)} < 0$$
$$\frac{2x^2+x-15}{(2x-1)(x+3)} - \frac{2x^2+x-1}{(x+3)(2x-1)} < 0$$
$$\frac{2x^2+x-15-2x^2-x+1}{(x+3)(2x-1)} < 0$$
$$\frac{-14}{(x+3)(2x-1)} < 0$$

Faisons directement le tableau de signe en étudiant les facteurs de degré un constituant cette fraction rationnelle :

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-14$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | |
| $x+3$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $2x-1$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $\dfrac{2x-5}{2x-1}-\dfrac{x+1}{x+3}$ | | $-$ | $\Vert$ | $+$ | $\Vert$ | $-$ | |

L'ensemble des solutions est :

$$S = \Big]-\infty\,;-3\Big[\cup\Big]\frac{1}{2}\,;+\infty\Big[$$

## Exercice 2352

Résoudre l'inéquations suivante : $\dfrac{3x^2-5x+2}{-3x^2-4x+2} \leqslant 0$

## Correction 2352

Etudions séparemment les trinômes formant le numérateur et le dénominateur :

- Le discriminant du polynôme $3x^2-5x+2$ est :
  $\Delta = b^2-4ac = (-5)^2 - 4\times3\times2 = 25-24 = 1$
  On remarque que : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{1} = 1$

  Son discriminant est strictement positif ; ce trinôme admet deux racines qui sont :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5-1}{6} = \frac{2}{3} \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5+1}{6} = 1$$

  Le coefficient du terme de degré 2 est positif, on en déduit que cette expression est négative entre ses racines.

- Le discriminant de $-3x^2-4x+2$ est :
  $\Delta = b^2-4ac = (-4)^2 - 4\times(-3)\times2 = 16+24 = 40$
  On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$.

Les deux racines de ce polynôme du second degré sont :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4-2\sqrt{10}}{-6} = \frac{\sqrt{10}-2}{3} \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4+2\sqrt{10}}{-6} = -\frac{\sqrt{10}+2}{3}$$

Le coefficient du terme de second degré est négatif ; ce polynôme prend des valeurs positives pour des valeurs de $x$ comprises entre ses deux racines.

En rassemblant les informations précédentes, on obtient le tableau de signe suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{\sqrt{10}+2}{3}$ | | $\frac{\sqrt{10}-2}{3}$ | | $\frac{2}{3}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $3x^2-5x+2$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $-3x^2-4x+2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | |
| $\dfrac{3x^2-5x+2}{-3x^2-4x+2}$ | | $-$ | $\Vert$ | $+$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

L'ensemble des solutions de l'équation de départ est :

$$S = \Big]-\infty\,;-\frac{\sqrt{10}+2}{3}\Big[\cup\Big]\frac{\sqrt{10}-2}{3}\,;\frac{2}{3}\Big]\cup\Big[1\,;+\infty\Big[$$

## Exercice 2269

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation et l'inéquation suivante :

a. $\dfrac{-x^2-3}{3}+2 = \dfrac{1}{2x+1}$ b. $\dfrac{4x}{x+1} \leqslant 5x-3$

## Correction 2269

a. Pour étudier cette expression, commençons à tout mettre sous un seul quotient :

$$\frac{-x^2-3}{3}+2=\frac{1}{2x+1}$$
$$\frac{-x^2-3}{3}+2-\frac{1}{2x+1}=0$$
$$\frac{(-x^2-3)(2x+1)}{3(2x+1)}+\frac{2\times3(2x+1)}{3(2x+1)}-\frac{3}{3(2x+1)}=0$$
$$\frac{(-x^2-3)(2x+1)+2\times3(2x+1)-3}{3(2x+1)}=0$$
$$\frac{(-2x^3-x^2-6x-3)+12x+6-3}{3(2x+1)}=0$$
$$\frac{-2x^3-x^2+6x}{3(2x+1)}=0$$
$$\frac{x\big(-2x^2-x+6\big)}{3(2x+1)}=0$$

Recherchons les racines du polynôme $-2x^2-x+6$ ; le discriminant de ce polynôme vaut :
$\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\times(-2)\times6=1+48=49$
On obtient la simplification : $\sqrt{49}=7$.

Le discriminant de ce polynôme est strictement positif ; il admet deux racines :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1-7}{2\times(-2)}=\frac{-6}{-4}=\frac{3}{2}$$
$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1+7}{2\times(-2)}=\frac{8}{-4}=-2$$

On obtient ainsi la factorisation suivante du numérateur du membre gauche de notre équation :

$$\frac{x\big(-2x^2-x+6\big)}{3(2x+1)}=0$$
$$\frac{x\Big[-2\Big(x-\frac{3}{2}\Big)\big(x+2\big)\Big]}{3(2x+1)}=0$$
$$\frac{x\big(-2x+3\big)\big(x+2\big)}{3(2x+1)}=0$$

En utilisant les deux propriétés suivantes :

- Un quotient est nul, si et seulement si, son numérateur est nul.
- Un produit est nul, si et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul.

On en déduit que l'ensemble des solutions est :
$S=\Big\{-2\,;0\,;\frac{3}{2}\Big\}$

b. Commençons à tout rassembler sous un même quotient pour faciliter l'étude du signe :

$$\frac{4x}{x+1}\leqslant 5x-3$$
$$\frac{4x}{x+1}-(5x-3)\leqslant 0$$
$$\frac{4x}{x+1}+\frac{(-5x+3)(x+1)}{x+1}\leqslant 0$$
$$\frac{4x+\big(-5x^2-2x+3\big)}{x+1}\leqslant 0$$
$$\frac{-5x^2+2x+3}{x+1}\leqslant 0$$

Etudions le signe du numérateur ; pour cela, recherchons sa forme factorisée.

Le discriminant de ce polynôme vaut :
$\Delta=b^2-4ac=2^2-4\times(-5)\times3=4+60=64$
On obtient la simplification : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{64}=8$.

Le discriminant de ce polynôme est strictement positif ; ces deux racines sont :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2-8}{2\times(-5)}=\frac{-10}{-10}=1$$
$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2+8}{2\times(-5)}=\frac{6}{-10}=\frac{3}{5}$$

Ainsi, l'inéquation à résoudre se factorise par :
$$\frac{-5(x-1)\Big(x+\frac{3}{5}\Big)}{x+1}\leqslant 0$$

On obtient le tableau de signe suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $-\frac{3}{5}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-5\cdot(x-1)$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $x+\frac{3}{5}$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $x+1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $\frac{-5(x-1)\left(x+\frac{3}{5}\right)}{x+1}$ | | $+$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

L'ensemble des solutions de l'équation est :
$S=\Big]-1\,;-\frac{3}{5}\Big[\cup\big[1\,;+\infty\big[$

## Exercice 1165

On considère le polynôme du second degré :

$\mathcal{P}=3x^3+5x^2-5x+1$

On sait que le polynôme $P$ admet une factorisation de la forme :

$\mathcal{P}=\big(3x-1\big)\big(a\cdot x^2+b\cdot x+c\big)$

1. Déterminer les valeurs de $a$, $b$, $c$ vérifiant cette factorisation.
2. En déduire l'ensemble des racines du polynôme $\mathcal{P}$.
3. Dresser le tableau de signe de $\mathcal{P}$.

## Correction 1165

1. En développant la forme factorisée, on obtient :

$$\big(3x-1\big)\big(a\cdot x^2+b\cdot x+c\big)$$
$$=\big(3a\cdot x^3+3b\cdot x^2+3c\cdot x-a\cdot x^2-b\cdot x-c$$
$$=3a\cdot x^3+\big(3b-a\big)\cdot x^2+\big(3c-b\big)\cdot x-c$$

En identifiant les coefficients degré par degré, on obtient le système déquation suivant :

$$\begin{cases} 3a = 3 \\ 3b - a = 5 \\ 3c - b = -5 \\ -c = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ 3b - a = 5 \\ 3c - b = -5 \\ c = -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 3b - 1 = 5 \\ -3 - b = -5 \\ c = -1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 3b = 6 \\ -b = -2 \\ c = -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ b = 2 \\ c = -1 \end{cases}$$

Ainsi, ce système admet pour solution l'unique triplet $\big(1\,;2\,;-1\big)$ ; on obtient la factorisation suivante :

$$\mathcal{P} = (3x-1)(x^2+2x-1)$$

2. Cherchons les racines du facteur du second degré ; son discriminant a pour valeur :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4\times1\times(-1) = 4+4 = 8$$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Ainsi, le discriminant étant positif, ce facteur admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-2\sqrt{2}}{2} = -1-\sqrt{2} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+2\sqrt{2}}{2} = -1+\sqrt{2}$$

Le premier facteur s'annule pour $\frac{1}{3}$ ; sachant qu'un produit est nul si, et seulement si, un de ses facteurs est nul, alors le polynôme $\mathcal{P}$ admet pour l'ensemble de ses racines :

$$\Big\{-1-\sqrt{2}\,;\,-1+\sqrt{2}\,;\,\frac{1}{3}\Big\}$$

3. Pour dresser le tableau de signe, on remarquera :

- le facteur du secdon degré a pour coefficient du second degré un nombre positif ;
- les racines du polynôme $\mathcal{P}$ sont ordonnées de la manière suivante :
  $-1-\sqrt{2} < \frac{1}{3} < -1+\sqrt{2}$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1-\sqrt{2}$ | | $\frac{1}{3}$ | | $-1+\sqrt{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $3x-1$ | | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | |
| $x^2+2x-1$ | | $+$ | 0 | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $3x^3+5x^2-5x+1$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |

## Exercice 5713

Etablir le tableau de signe des expressions suivantes :

a. $3x^2+4x-4$ b. $-4x^2+2x+6$

## Correction 5713

1. Le polynôme $3x^2+4x-4$ admet pour discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = 4^2 - 4\times3\times(-4) = 16+48 = 64$$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{64} = 8$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-4-8}{2\times3} = \frac{-12}{6} = -2 \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-4+8}{2\times3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Le coefficient du terme du second degré étant strictement positif, on en déduit le tableau de signe suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $\frac{2}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $3x^2+4x-4$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |

2. Le polynôme $-4x^2+2x+6$ admet pour discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = 2^2 - 4\times(-4)\times6 = 4+96 = 100$$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{100} = 10$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-2-10}{2\times(-4)} = \frac{-12}{-8} = \frac{3}{2} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-2+10}{2\times(-4)} = \frac{8}{-8} = -1$$

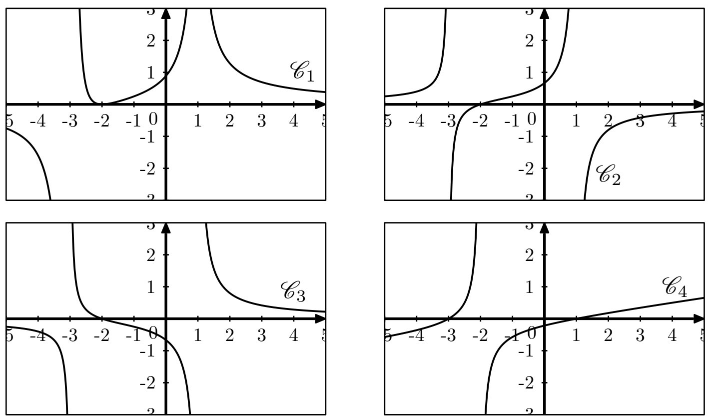
| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $\frac{3}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-4x^2+2x+6$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |

## Exercice 5745

On considère la fonction $f$ dont l'image d'un nombre réel $x$ est donnée par la relation :

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2+2x-3}$$

1. Résoudre l'inéquation : $f(x) \geqslant 0$
2. Parmi les quatre courbes ci-dessous, une seule est la courbe représentative de la fonction $f$. Laquelle ?



**Correction 5745**

1. La fonction $f$ est définie par un quotient dont le dénominateur est défini par un polynôme du second degré dont le discriminant a pour valeur :
$\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = 2^2 - 4{\times}1{\times}(-3) = 4+12 = 16$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{16} = 4$

Ce discriminant étant strictement positif, le dénominateur s'annule pour les deux valeurs suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-2-4}{2{\times}1} = \frac{-6}{2} = -3 \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-2+4}{2{\times}1} = \frac{2}{2} = 1$$

Le coefficient du terme du second degré étant strictement positif, on obtient le signe du dénominateur. Voici le tableau de signe de la fonction $f$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $-2$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+2$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $x^2+2x-3$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $\dfrac{x+2}{x^2+2x-3}$ | | $-$ | $\Vert$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\Vert$ | $+$ | |

Ainsi, l'ensemble des solutions de cette inéquation est :
$\mathcal{S} = \left]-3\,;-2\right] \cup \left]1\,;+\infty\right[$

2. La seule courbe vérifiant le tableau de signe de la question précédente est la courbe $\mathscr{C}_3$ : ainsi, la fonction $f$ admet pour courbe représentative la courbe $\mathscr{C}_3$.

## 29. Tableau de variations :

**Exercice 2384**

On considère les fonctions $f$ et $g$ définies sur $\mathbb{R}$ définies par les relations :

$$f(x) = x^2+x+1 \quad ; \quad g(x) = -2x^2-3x+5$$

1. Etablir le tableau de variation de chacune de ces fonctions.
2. Etablir le tableau de signe de chacune de ces fonctions.

**Correction 2384**

1. a. Dressons le tableau de variation de la fonction $f$ :

Le coefficient du terme de degré 2 est positif ; la fonction est décroissante puis croissante.

Son minimun est atteint en $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{1}{2}$ et vaut :

$$f\Big(-\frac{1}{2}\Big) = \Big(\frac{1}{2}\Big)^2 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{4}{4} = \frac{7}{4}$$

On obtient le tableau de variation suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Variation de $f$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $\frac{7}{4}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

b. Dressons le tableau de variation de la fonction $g$ :

Le coefficient du terme de second degré est négatif ; la fonction est croissante puis décroissante.

Son maximum est atteint pour la valeur :

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2{\times}(-2)} = -\frac{3}{4}$$

et a pour valeur :

$$-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2-4{\cdot}a{\cdot}c}{-8} = \frac{(-3)^2-4{\times}(-2){\times}5}{8} = \frac{49}{8}$$

Voici le tableau de variation de la fonction $g$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{3}{4}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Variation de $f$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $\frac{49}{8}$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

2. Pour étudier le signe de chacune de ces polynômes du second degré, nous devons chercher les racines de chacun d'eux afin d'obtenir la forme factorisée de chacune de ces expressions :

a. Etudions le signe de l'expression $f$ :

Cherchons le signe du discriminant de $x^2{+}x{+}1$ :
$\Delta = b^2-4ac = 1^2 - 4{\times}1{\times} = -3 < 0$

Le discrimiant est négatif ; ce polynôme du second degré n'admet aucune racine. Son coefficient du terme de degré 2 étant positif, on obtient le tableau de signe suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $+$ | |

b. Pour dresser le tableau de signe, étudions les racines de $-2x^2{-}3x{+}5$. Voici le discriminant de cette expression :
$\Delta = b^2-4ac = (-3)^2 - 4{\times}(-2){\times}5 = 49 > 0$
On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{49} = 7$

Le discrimant de ce polynome est positif : la fonction $g$ admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-7}{-4} = 1 \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+7}{-4} = -\frac{5}{2}$$

Le coefficient du terme de second degré étant strictement positif ; on en déduit que la fonction $g$ est positive pour des valeurs de $x$ comprises entre les deux racines :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{5}{2}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

## Exercice 2804

On considère la fonction $f$ dont l'image de $x$ est définie par la relation :

$$f(x) = \sqrt{-x^2+2x+1}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f$.

2. Dresser le tableau de variation de la fonction $f$.

## Correction 2804

1. Pour déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f$, nous devons déterminer le signe du polynôme de second degré se trouvant sous le radical.

   Le discriminant du polynôme $-x^2+2x+1$ est :
   $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4\times(-1)\times 1 = 8$

   On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

   Le discriminant étant positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-2\sqrt{2}}{-2} = 1+\sqrt{2} \qquad\qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+2\sqrt{2}}{-2} = 1-\sqrt{2}$$

   Le coefficient du terme de second degré est négatif, on obtient le tableau de signe suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $1+\sqrt{2}$ | | $1-\sqrt{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-x^2+2x+1$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |

   Ainsi, l'ensemble de définition de la fonction $f$ est l'intervalle :
   $\mathcal{D}_f = \left[1-\sqrt{2}\,;\,1+\sqrt{2}\right]$

2. Ce polynôme du second degré admet les deux valeurs particulières :
   - $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{2}{-2} = 1$
   - $-1^2+2\times 1+1 = -1+2+1 = 2$

   Le coefficient du terme de degré 2 étant négatif, on obtient le tableau de variation suivant :

| $x$ | $-\infty$ | $1-\sqrt{2}$ | $1$ | $1+\sqrt{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Variation de $-x^2+2x+1$ | $-\infty$ $\nearrow$ | 0 $\nearrow$ | 2 | $\searrow$ 0 | $\searrow$ $-\infty$ |

   La composé d'une fonction par la fonction racine carrée conserve le sens de variation de cette fonction mais elle n'est définie que lorsque les images de cette fonction sont positive :

| $x$ | $1-\sqrt{2}$ | $1$ | $1+\sqrt{2}$ |
|---|---|---|---|
| Variation de $f$ | 0 $\nearrow$ | 2 | $\searrow$ 0 |

## Exercice 2806

Soit $g$ la fonction définie par la relation :

$$g(x) = \frac{1}{-5x^2+3x+1}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de cette fonction.

2. Justifier que le polynôme $Q = -5x^2+3x+1$ admet le tableau de variation suivant :

| $x$ | $-\infty$ | $\dfrac{3-\sqrt{29}}{10}$ | $\dfrac{3}{10}$ | $\dfrac{3+\sqrt{29}}{10}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Variation de $Q$ | $-\infty$ $\nearrow$ | 0 $\nearrow$ | $\dfrac{29}{20}$ | $\searrow$ 0 | $\searrow$ $+\infty$ |

3. Dresser le tableau de variation de la fonction $g$.
   *(On n'indiquera que les sens de variations)*

## Correction 2806

1. Ce quotient n'est défini que si son dénominateur est non-nul. Cherchons les racines du polynôme du second degré définissant le dénominateur.
   Son discriminant a pour valeur :
   $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4\times(-5)\times 1 = 9+20 = 29$

   Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-\sqrt{29}}{-10} = \frac{3+\sqrt{29}}{10} \qquad\qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3+\sqrt{29}}{-10} = \frac{3-\sqrt{29}}{10}$$

   L'ensemble de définition de la fonction $Q$ est donc :

$$\mathcal{D}_Q = \mathbb{R} - \left\{\frac{3-\sqrt{29}}{10}\,;\,\frac{3+\sqrt{29}}{10}\right\}$$

2. Ce polynôme admet les valeurs particulières :
   - $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{3}{-10} = \dfrac{3}{10}$
   - $Q\Big(\dfrac{3}{10}\Big) = -5\cdot\Big(\dfrac{3}{10}\Big)^2 + 3\cdot\Big(\dfrac{3}{10}\Big) + 1$
     $= -5\times\dfrac{9}{100} + 3\times\dfrac{9}{10} + 1 = \dfrac{-9}{20} + \dfrac{27}{10} + 1$
     $= \dfrac{-9}{20} + \dfrac{54}{20} + \dfrac{20}{20} = \dfrac{55}{20} = \dfrac{11}{4}$

   Le coefficient du terme du second degré étant strictement positif, le polynôme $Q$ admet le tableau de variation suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{3-\sqrt{29}}{10}$ | | $\frac{3}{10}$ | | $\frac{3+\sqrt{29}}{10}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Variation de $Q$ | $-\infty$ | ↗ | $0$ | ↗ | $\frac{29}{20}$ | ↘ | $0$ | ↘ | $+\infty$ |

3. La fonction $g$ peut être vu comme la composée de la fonction polynômiale $Q$ par la fonction inverse :

$$x \xhookrightarrow{Q} -5x^2+3x+1 \hookrightarrow \frac{1}{-5x^2+3x+1}$$

D'après le cours, la fonction $g$ a ses sens de variations contraire à ceux de la fonction $Q$ et elle n'est pas définie où la fonction $Q$ s'annule. Ainsi, on obtient le tableau de variation suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{3-\sqrt{29}}{10}$ | | $\frac{3}{10}$ | | $\frac{3+\sqrt{29}}{10}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Variation de $Q$ | | ↘ | ‖ | ↘ | | ↗ | ‖ | ↗ | |

## Exercice 5078

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)^2+2}$$

Déterminer le sens de variation de la fonction $f$ sur l'intervalle $\big[-1\,;+\infty\big[$.

## Correction 5078

On a le développement suivant :

$$\big(x+1\big)^2+2 = \big(x^2+2x+1\big)+2 = x^2+2x+3$$

Ce polynôme admet les valeurs particulières suivantes :

- $-\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2\times1} = -\frac{2}{2} = -1$
- $(-1)^2+2\times(-1)1+3 = 1-2+3 = 2$

Ainsi, ce polynôme admet le tableau de variation suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Variation de $(x+1)^2+2$ | $+\infty$ | ↘ | $2$ | ↗ | $+\infty$ |

Lorsqu'on compose une fonction par la fonction inverse, son sens de variation change. Ainsi, sur l'intervalle $\big[-1\,;+\infty\big[$, la fonction $f$ a pour sens de variation :

| $x$ | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Variation de $f$ | $\frac{1}{2}$ | ↘ | $0$ |

# 30. Equation et ensemble de résolution :

## Exercice 2822

On considère l'équation suivante :

$$\frac{1}{2\,x^2-3\,x+1} - \frac{1}{2\,x^2+5\,x+2} = 0$$

1. Déterminer l'ensemble de résolution de cette équation.

2. Déterminer l'ensemble des solutions de cette équation.

## Correction 2822

1. Cherchons à savoir quand s'annule les dénominateurs des deux quotients :
   - Cherchons les racines de $2x^2-3x+1$ :

     Ce polynôme a pour discriminant :
     $\Delta = b^2-4ac = (-3)^2-4\times2\times1 = 9-8 = 1$

     On la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{1} = 1$

     Le discriminant de ce polynôme du second degré est strictement positif, il admet les deux racines suivantes :

     $$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3)-1}{2\times2} = \frac{1}{2} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3)+1}{2\times2} = 1$$

   - Cherchons les racines de $2x^2+5x+2$ :

     Ce polynôme a pour discriminant :
     $\Delta = b^2-4ac = 5^2-4\times2\times2 = 25-16 = 9$

     On la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$

     Le discriminant de ce polynôme du second degré est strictement positif, il admet les deux racines suivantes :

     $$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5-3}{2\times2} = -2 \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5+3}{2\times2} = -\frac{1}{2}$$

   L'expression de l'énoncé n'a de sens que pour des $x$ appartenant à :

   $$\mathbb{R}-\Big\{-2\,;\,-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,1\Big\}$$

2. Résolvons cette équation :

$$\frac{1}{2x^2-3x+1}-\frac{1}{2x^2+5x+2}=0$$
$$\frac{2x^2+5x+2}{\left(2x^2-3x+1\right)\left(2x^2+5x+2\right)}-\frac{2x^2-3x+1}{\left(2x^2+5x+2\right)\left(2x^2-3x+1\right)}=0$$
$$\frac{2x^2+5x+2-2x^2+3x-1}{\left(2x^2+5x+2\right)\left(2x^2-3x+1\right)}=0$$
$$\frac{8x+1}{\left(2x^2+5x+2\right)\left(2x^2-3x+1\right)}=0$$

Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul ; Le numérateur s'annule en $-\frac{1}{8}$.

Cette valeur appartient à l'ensemble de résolution ; $-\frac{1}{8}$ est solution.

## Exercice 2821

Résoudre l'équation suivante :
$$(E) : \frac{1}{3x^2-8x+4}+\frac{2}{3x^2+10x-8}=0$$

## Correction 2821

Effectuons quelques transformation de cette équation :
$$\frac{1}{3x^2-8x+4}+\frac{2}{3x^2+10x-8}=0$$
$$\frac{3x^2+10x-8}{\left(3x^2-8x+4\right)\left(3x^2+10x-8\right)}+\frac{2\times(3x^2-8x+4)}{\left(3x^2-8x+4\right)\left(3x^2+10x-8\right)}=0$$
$$\frac{3x^2+10x-8+6x^2-16x+8}{\left(3x^2-8x+4\right)\left(3x^2+10x-8\right)}=0$$
$$\frac{9x^2-6x}{\left(3x^2-8x+4\right)\left(3x^2+10x-8\right)}=0$$
$$\frac{x(9x-6)}{\left(3x^2-8x+4\right)\left(3x^2+10x-8\right)}=0$$

Pour qu'une fraction s'annule, il faut que son numérateur s'annule ; ainsi, les solutions de cette équation pourraient être 0 et $\frac{2}{3}$.

Vérifions que ces deux valeurs appartiennent à l'ensemble de résolution de cette équation :

- 0 n'annule aucun des dénominateurs ; 0 appartient à l'ensemble de résolution de cette équation.
- $\frac{2}{3}$ annule le second dénominateur :
$$3x^2+10x-8=3\times\left(\frac{2}{3}\right)^2+10\times\frac{2}{3}-8$$
$$=3\times\frac{4}{9}+\frac{20}{3}-8=\frac{4}{3}+\frac{20}{3}-8=0$$
Le nombre $\frac{2}{3}$ n'appartient pas à l'ensemble de résolution de cette équation.

On en déduit l'ensemble des solutions de l'équation $(E)$ :
$$S_E=\left\{0\right\}$$

## Exercice 2819

Résoudre les équations suivantes en tenant garde à l'ensemble de résolution de chaque équation :

a. $\sqrt{3x^2-2x-3}=\sqrt{x}$

b. $\frac{1}{3x^2-8x+4}=\frac{-2}{5x^2-6x-8}$

## Correction 2819

a. Cherchons le domaine de résolution de cette équation

- Cherchons lorsque le polynôme $3x^2-2x-3$ prend des valeurs positives ; son discriminant vaut :
$$\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\times3\times(-3)=4+36=40$$
On a la simplification : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$
Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :
$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-2)-2\sqrt{10}}{2\times3}=\frac{2-2\sqrt{10}}{6}=\frac{1-\sqrt{10}}{3}$$
$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-2)+2\sqrt{10}}{2\times3}=\frac{2+2\sqrt{10}}{6}=\frac{1+\sqrt{10}}{3}$$
Le coefficient du terme du second degré de ce polynôme étant positif, on a le tableau de signe suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1+\sqrt{10}}{3}$ | | $\frac{1-\sqrt{10}}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $3x^2-2x-3$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |

- $\sqrt{x}$ est définie pour des valeurs de $x$ appartenant à l'ensemble $\mathbb{R}_+$.

Ainsi l'ensemble de résolution de cette équation est l'intervalle $\left[\frac{1+\sqrt{10}}{3};+\infty\right[$

Passons à la résolution de cette équation :
$$\sqrt{3x^2-2x-3}=\sqrt{x}$$
$$\left(\sqrt{3x^2-2x-3}\right)^2=\left(\sqrt{x}\right)^2$$
$$3x^2-2x-3=x$$
$$3x^2-3x-3=0$$
Le discriminant de ce polynôme a pour valeur :
$$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times3\times(-3)=9+36=45$$
On a la simplification suivante : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$
$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-3)-3\sqrt{5}}{2\times3}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$
$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-3)+3\sqrt{5}}{2\times3}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
Or, seul la valeur $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ appartient à l'ensemble de résolution.

b. Résolvons cette équation :

$$\frac{1}{3x^2-8x+4} = \frac{-2}{5x^2-6x-8}$$
$$\frac{1}{3x^2-8x+4} - \frac{-2}{5x^2-6x-8} = 0$$
$$\frac{5x^2-6x-8+2\times\big(3x^2-8x+4\big)}{\big(5x^2-6x-8\big)\big(3x^2-8x+4\big)} = 0$$
$$\frac{5x^2-6x-8+6x^2-16x+8\big)}{\big(5x^2-6x-8\big)\big(3x^2-8x+4\big)} = 0$$
$$\frac{11x^2-22x\big)}{\big(5x^2-6x-8\big)\big(3x^2-8x+4\big)} = 0$$
$$\frac{11\big(x-2\big)}{\big(5x^2-6x-8\big)\big(3x^2-8x+4\big)} = 0$$

Les valeurs annulant le numérateur sont 0 et 2 ; il faut maintenant vérifier que ces valeurs font parties de l'ensemble de résolution de cette équation :

- 0 fait partie de l'ensemble de résolution car il n'annule aucun des dénominateurs des deux quotients.
- 2 annule le quotient des deux dénominateurs, il ne fait pas partie de l'ensemble de résolution.

L'ensemble des solutions de l'équation est :

$$S = \Big\{0\Big\}$$

**Exercice 2837**

Résoudre l'équation :

$$\frac{1}{2x^2+5x+3} - \frac{1}{2x^2+3x+1} = 0$$

**Correction 2837**

Résolvons cette équation :

$$\frac{1}{2x^2+5x+3} - \frac{1}{2x^2+3x+1} = 0$$
$$\frac{2x^2+3x+1}{\big(2x^2+5x+3\big)\big(2x^2+3x+1\big)} - \frac{2x^2+5x+3}{\big(2x^2+3x+1\big)\big(2x^2+5x+3\big)} = 0$$
$$\frac{2x^2+3x+1-2x^2-5x-3}{\big(2x^2+3x+1\big)\big(2x^2+5x+3\big)} = 0$$
$$\frac{-2x-2}{\big(2x^2+3x+1\big)\big(2x^2+5x+3\big)} = 0$$

Si un quotient est nul alors son numérateur est nul. On en déduit la nécessité à la valeur $x$ d'annuler le numérateur :

$$-2x-2 = 0$$
$$-2x = 2$$
$$x = \frac{2}{-2}$$
$$x = -1$$

Mais $-1$ n'est pas solution de cette équation car il annule le dénominateurdes deux quotients : $-1$ ne fait pas partie de l'ensemble de résolutation de cette équation.

**Exercice 1161**

Résoudre l'équation suivante :

$$\frac{-3}{\sqrt{-2x+1}} = -x-3$$

**Correction 1161**

Le quotient du membre de gauche est définie lorsque son dénominateur est définie et non-nul ; pour cela, l'expression sous le radical doit être strictement positif. Ainsi, le domaine de résolution de cette équation est $\Big]-\infty\,;\frac{1}{2}\Big]$ :

$$\frac{-3}{\sqrt{-2x+1}} = -x-3$$

Attention, ce passage est une implication, pas une équivalence

$$\Big(\frac{-3}{\sqrt{-2x+1}}\Big)^2 = \big(-x-3\big)^2$$
$$\frac{9}{-2x+1} = x^2+6x+9$$
$$9 = \big(x^2+6x+9\big)\big(-2x+1\big)$$
$$9 = -2x^3-12x^2-18x+x^2+6x+9$$
$$0 = -2x^3-11x^2-12x$$
$$x\big(-2x^2-11x-12\big) = 0$$

Etudions quand le second facteur s'annule ; le discriminant de ce polynôme est :

$$\Delta = b^2-4ac = (-11)^2-4\times(-2)\times(-12) = 121-96 = 25$$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$.

Le discriminant de ce polynôme du second degré est strictement positif ; ainsi, ce polynôme admet deux racines :

| | |
|---|---|
| $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{11-5}{-4} = \dfrac{6}{-4} = -\dfrac{3}{2}$ | $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{11+5}{-4} = \dfrac{16}{-4} = -4$ |

Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul ; on en déduit les solutions suivantes du produit :

$$\mathcal{S} = \Big\{-4\,;-\frac{3}{2}\,;0\Big\}$$

Lors de notre manipulation algébrique, nous avons effectuer une implication *(et non pas une équivalence)*, il faut maintenant vérifier parmi ses nombres, lesquels sont solutions de l'équation de départ :

- Pour $x=-4$ :
  - $\dfrac{-3}{\sqrt{-2x+1}} = \dfrac{-3}{\sqrt{-2\times(-4)+1}} = \dfrac{-3}{\sqrt{9}} = \dfrac{-3}{3} = -1$
  - $-x-3 = -(-4)-3 = 1$

  $-4$ n'est pas solution de cette équation
- Pour $x=-\dfrac{3}{2}$ :

- $\dfrac{-3}{\sqrt{-2x+1}} = \dfrac{-3}{\sqrt{-2\times\left(-\dfrac{3}{2}\right)+1}} = \dfrac{-3}{\sqrt{4}} = \dfrac{-3}{2} - \dfrac{3}{2}$
- $-x-3 = -\left(-\dfrac{3}{2}\right) - 3 = -\dfrac{3}{2}$

$-\dfrac{3}{2}$ est solution de cette équation

- Pour $x=0$ :
  - $\dfrac{-3}{\sqrt{-2x+1}} = \dfrac{-3}{1} = 3$
  - $-x-3 = -3$

  0 est solution de cette équation

## Exercice 5077

On considère la fonction $f$ dont l'image d'un nombre réel $x$ est définie par la relation :

$$f(x) = \sqrt{-2x^2-3x+2}$$

1. a. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f$.
   b. Dresser le tableau de variation de la fonction $f$.
2. On considère la droite $(d)$ d'équation $y=-5\cdot x$.
   a. Résoudre l'équation : $-2x^2-3x+2=25\cdot x^2$.
   b. Justifier que la droite $(d)$ intercepte la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction $f$ en un unique point.

## Correction 5077

1. a. Déterminer le signe du polynôme se situant sous le radical. Ce polynôme admet pour discriminant :
$\Delta = b^2-4\cdot a\cdot c = (-3)^2 - 4\times(-2)\times 2 = 9+16 = 25$
On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$
Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-(-3)-5}{2\times(-2)} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-(-3)+5}{2\times(-2)} = \frac{8}{-4} = -2$$

Le coefficient du terme du second degré étant strictement négatif, on en déduit le tableau de signe suivant de ce polynôme :

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $\dfrac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-2x^2-3x+2$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |

Une racine carrée est défini seulement si l'expression se trouvant sous son radical est positif ou nul. La fonction $f$ admet l'ensemble de définition :

$$\mathcal{D}_f = \left[-2\,;\,\frac{1}{2}\right]$$

b. Le polynôme se situant sous le radical définissant la fonction $f$ admet les deux valeurs particulières suivantes :

- $-\dfrac{b}{2\cdot a} = -\dfrac{-3}{2\times(-2)} = -\dfrac{-3}{-4} = -\dfrac{3}{4}$
- $f\left(-\dfrac{3}{4}\right) = -2\times\left(-\dfrac{3}{4}\right)^2 - 3\times\left(-\dfrac{3}{4}\right) + 2$
$= -2\times\dfrac{9}{16} + \dfrac{9}{4} + 2 = \dfrac{-18}{16} + \dfrac{9}{4} + 2$
$= \dfrac{-18}{16} + \dfrac{36}{16} + \dfrac{32}{16} = \dfrac{-18+36+32}{16} = \dfrac{50}{16} = \dfrac{25}{8}$

Le coefficient du second degré étant strictement négatif, ce polynôme admet le tableau de variation suivant :

| $x$ | -∞ | | $-2$ | | $-\dfrac{3}{4}$ | | $\dfrac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Variation de $-2x^2-3x+2$ | -∞ | ↗ | 0 | ↗ | $\dfrac{25}{8}$ | ↘ | 0 | ↘ | -∞ |

La composée par la fonction racine carrée ne modifie par le sens de variation d'une fonction. On en déduit le tableau de variation suivant :

| $x$ | $-2$ | | $-\dfrac{3}{4}$ | | $\dfrac{1}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Variation de $f$ | 0 | ↗ | | ↘ | 0 |

2. a. On a les transformations algébriques suivantes :

$$-2x^2-3x+2 = 25\cdot x^2$$
$$-2x^2-3x+2-25\cdot x^2 = 0$$
$$-27x^2-3x+2 = 0$$

Le polynôme du membre de gauche de l'équation admet pour discriminant :
$\Delta = b^2-4\cdot a\cdot c = (-3)^2-4\times(-27)\times 2 = 9+216 = 225$
On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{225} = 15$
Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-(-3)-15}{2\times(-27)} = \frac{3-15}{-54} = \frac{-12}{-54} = \frac{2}{9}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-(-3)+15}{2\times(-27)} = \frac{3+15}{-54} = \frac{18}{-54} = -\frac{1}{3}$$

L'ensemble des solutions est : $\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{2}{9}\right\}$

b. La valeur $\dfrac{2}{9}$ ne peut être une solution de l'équation :
$\sqrt{-2x^2-3x+2} = -5\cdot x$
Car l'expression $-5x$ est négative pour cette valeur.
Montrons que la seconde valeur est solution de cette équation :

- $f\left(-\dfrac{1}{3}\right) = \sqrt{-2\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2 - 3\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)+2}$
$= \sqrt{-2\times\dfrac{1}{9}+1+2} = \sqrt{-\dfrac{2}{9}+3}$
$= \sqrt{\dfrac{-2+27}{9}} = \sqrt{\dfrac{25}{9}} = \dfrac{5}{3}$

- $-5{\cdot}x=-5\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{5}{3}$

On vient de montrer que l'équation $f(x)=-5x$ admet une unique solution : la droite $(d)$ et la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un unique point d'intersection.

## 31. Un peu plus loin : changement de variables :

### Exercice 3043

On considère l'expression $(E)$ défini par :

$(E)$ : $x^4-3x^3+4x^2-3x+1=0$

1. a. Montrer que si $a$ est solution de l'équation $(E)$ alors $\dfrac{1}{a}$ l'est aussi.

   b. Montrer que l'équation $(E)$ est équivalente à l'équation :

   $(E')$ : $x^2-3x+4-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$

2. a. Développer l'expression suivante :

   $\left(x+\dfrac{1}{x}-1\right)\left(x+\dfrac{1}{x}-2\right)$

   b. En utilisant le changement de variable $X=x+\dfrac{1}{x}$, modifier l'équation $(E')$ en une équation du second degré en $X$.

   c. Résoudre l'équation en $X$ obtenu à la question précédente.

   d. En déduire les valeurs de $x$ solution de $(E')$.

3. Donner l'ensemble des solutions de l'équation $(E)$.

### Correction 3043

1. a. Soit $a$ une solution de l'équation $(E)$. En remarquant que 0 n'est pas une solution de l'équation, on en déduit que $a$ est un nombre réel non-nul.

   Evaluons le membre de l'équation $(E)$ pour la valeur $\dfrac{1}{a}$ :

   $$x^4-3x^3+4x^2-3x+1$$
   $$=\left(\frac{1}{a}\right)^4-3{\cdot}\left(\frac{1}{a}\right)^3+4{\cdot}\left(\frac{1}{a}\right)^2-3{\cdot}\left(\frac{1}{a}\right)+1$$
   $$=\frac{1}{a^4}-3{\cdot}\frac{1}{a^3}+4{\cdot}\frac{1}{a^2}-3{\cdot}\frac{1}{a}+1$$

   $a$ est non-nul, factorisons par $\dfrac{1}{a^4}$, on a :

   $$=\frac{1}{a^4}{\cdot}\left(1-3{\cdot}a+4{\cdot}a^2-3{\cdot}a^3+a^4\right)$$

   Le nombre $a$ est solution de l'équation $(E)$ :

   $$=\frac{1}{a^4}\times 0=0$$

   b. On a vu que 0 n'est pas une solution de l'équation $(E)$. On considère l'équation $(E)$ sur $\mathbb{R}^*$ :

   $$x^4-3x^3+4x^2-3x+1=0$$

   Divisons par $x^2$ les deux membres de l'équation :

   $$\frac{x^4-3x^3+4x^2-3x+1}{x^2}=\frac{0}{x^2}$$
   $$\frac{x^4}{x^2}-\frac{3x^3}{x^2}+\frac{4x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}+\frac{1}{x^2}=0$$
   $$x^2-3x+4-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

2. a. On a le développement suivant :

   $$\left(x+\frac{1}{x}-1\right)\left(x+\frac{1}{x}-2\right)$$
   $$=x^2+1-2x+1+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}-x-\frac{1}{x}+2$$
   $$=x^2-3x+4-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}$$

   b. Le résultat de la question précédente permet d'identifier l'équation $(E')$ :

   $$x^2-3x+4-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$
   $$\left(x+\frac{1}{x}-1\right)\left(x+\frac{1}{x}-2\right)=0$$

   Par le changement de variable $X=x+\dfrac{1}{x}$ :

   $$\left(X-1\right)\left(X-2\right)=0$$
   $$X^2-2X-X+2=0$$
   $$X^2-3X+2=0$$

   c. Le polynôme $X^2-3X+2$ admet pour discriminant :

   $\Delta=b^2-4{\cdot}a{\cdot}c=(-3)^2-4\times1\times2=9-8=1$

   Le discriminant de ce polynôme étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

   $$X_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}=\frac{-(-3)-1}{2\times1}=\frac{3-1}{2}=\frac{2}{2}=1$$

   $$X_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}=\frac{-(-3)+1}{2\times1}=\frac{3+1}{2}=\frac{4}{2}=2$$

   d. On a les deux études à mener :

   - La valeur $X_1=1$ emmène à résoudre l'équation suivante :

     $$X_1=1$$
     $$x+\frac{1}{x}=1$$
     $$x+\frac{1}{x}-1=0$$
     $$\frac{x^2+1-x}{x}=0$$

     Si un quotient est nul si son numérateur est nul :

     $x^2-x+1=0$

     Ce polynôme a pour discriminant :

     $\Delta=b^2-4{\cdot}a{\cdot}c=(-1)^2-4\times1\times1=1-4=-3$

     Le discriminant étant strictement négatif, cette équation n'admet aucune solution.

   - La valeur de $X_1=2$ donne l'équation suivante :

$$X_2 = 2$$
$$x + \frac{1}{x} = 2$$
$$x + \frac{1}{x} - 2 = 0$$
$$\frac{x^2+1-2x}{x} = 0$$
Si un quotient est nul si son numérateur est nul :
$$x^2 - 2x + 1 = 0$$
Ce polynôme admet pour discriminant :
$$\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = (-2)^2 - 4\times1\times1 = 4 - 4 = 0$$
Le discriminant étant nul, ce polynôme admet une racine dont la valeur est :
$$-\frac{b}{2{\cdot}a} = -\frac{-2}{2\times1} = -\frac{2}{2} = -1$$

3. Ainsi, l'équation $(E)$ admet pour unique solution le nombre 1

## Exercice 2054

On considère l'équation $(E)$ définie par :
$$x^4 - 8x^3 + 2x^2 - 8x + 1 = 0$$

1. Montrrer que l'équation $(E)$ est équivalente à :
$$(E')\colon\ x^2 - 8x + 2 - \frac{8}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$
2. Déterminer les réels $a$, $b$ et $c$ vérifiant la relation :
$$x^2 - 8x + 2 - \frac{8}{x} + \frac{1}{x^2} = a{\cdot}\Big(x+\frac{1}{x}\Big)^2 + b{\cdot}\Big(x+\frac{1}{x}\Big) + c$$
3. En posant pour changement de variable $X = x + \dfrac{1}{x}$, résoudre l'équation $(E')$.

## Correction 2054

1. On vérifie facilement que le nombre 0 n'est pas solution de l'équation. Ainsi, on résoud cet équation sur $\mathbb{R}^*$.

L'équation $(E)$ se traduit par :
$$x^4 - 8x^3 + 2x^2 - 8x + 1 = 0$$
$x$ étant non-nul, on divise les deux membres par $x^2$ :
$$\frac{x^4 - 8x^3 + 2x^2 - 8x + 1}{x^2} = \frac{0}{x^2}$$
$$\frac{x^4}{x^2} - \frac{8x^3}{x^2} + \frac{2x^2}{x^2} - \frac{8x}{x^2} + \frac{1}{x^2} = 0$$
$$x^2 - 8x + 2 - \frac{8}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

2. Pour déterminer les valeurs de $a$, $b$ et $c$, développons et simplifions le membre de droite de l'égalité :
$$\begin{aligned} & a{\cdot}\Big(x+\frac{1}{x}\Big)^2 + b{\cdot}\Big(x+\frac{1}{x}\Big) + c \\ &= a{\cdot}\Big(x^2 + 2{\cdot}x{\cdot}\frac{1}{x} + \Big(\frac{1}{x}\Big)^2\Big) + b{\cdot}x + b{\cdot}\frac{1}{x} + c \\ &= a{\cdot}x^2 + b{\cdot}x + \big(2{\cdot}a + c\big) + \frac{b}{x} + a{\cdot}\frac{1}{x^2}\end{aligned}$$
Par identification de cette expression avec le membre de gauche de l'égalité, on obtient le systèmes d'équations :
$$\left\{\begin{aligned} a &= 1 \\ b &= -8 \\ 2{\cdot}a + c &= 2 \\ b &= -8 \\ a &= 1 \end{aligned}\right.$$
On en déduit les valeurs suivantes :
$$a = 1 \quad ; \quad b = -8 \quad ; \quad c = 0$$
On en déduit l'égalité suivante :
$$x^2 - 8x + 2 - \frac{8}{x} + \frac{1}{x^2} = \Big(x+\frac{1}{x}\Big)^2 - 8{\cdot}\Big(x+\frac{1}{x}\Big)$$

3. Considérons l'équation $(E')$ :
$$x^2 - 8x + 2 - \frac{8}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$
$$\Big(x+\frac{1}{x}\Big)^2 - 8{\cdot}\Big(x+\frac{1}{x}\Big) = 0$$
Utilisons le changement de variables $X = x + \dfrac{1}{x}$ :
$$X^2 - 8{\cdot}X = 0$$
$$X{\cdot}\big(X-8\big) = 0$$
Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul. On en déduit les deux réponses :
$$X = 0 \quad ; \quad X = 8$$
Ces deux valeurs de $X$ entrainent la résolution des deux équations suivantes :

- Pour la valeur $X = 0$ :
$$X = 0$$
$$x + \frac{1}{x} = 0$$
$$\frac{x^2+1}{x} = 0$$
Si un quotient est nul alors son numérateur est nul.
$$x^2 + 1 = 0$$
$$x^2 = -1$$
Le carré d'un nombre réel étant toujours strictement positif, on en déduit que cette équation n'admet pas de solution.

- Pour la valeur $X = 8$ :
$$X = 8$$
$$x + \frac{1}{x} = 8$$
$$x + \frac{1}{x} - 8 = 0$$
$$\frac{x^2 - 8x + 1}{x} = 0$$
Si un quotient est nul alors son numérateur est nul :
$$x^2 - 8x + 1 = 0$$
Ce polynôme admet pour discriminant :
$$\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = (-8)^2 - 4\times1\times1 = 64 - 4 = 60$$
On a la simplificiation : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}$
Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :
$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-(-8) - 2\sqrt{15}}{2\times1} = \frac{8 - 2\sqrt{15}}{2} = 4 - \sqrt{15}$$
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-(-8) + 2\sqrt{15}}{2\times1} = \frac{8 + 2\sqrt{15}}{2} = 4 + \sqrt{15}$$

On en déduit que l'équation $(E')$, donc aussi $(E)$ qui est une équation équivalente, admet pour ensemble de solutions :
$$\mathcal{S} = \Big\{4-\sqrt{15}\ ;\ 4+\sqrt{15}\Big\}$$

## 32. Un peu plus loin : systèmes d'équations du second degrés :

### Exercice 2801

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} x\cdot y = -1 \\ (x-2)(2y+3) = 0 \end{cases}$$

1. Vérifier que le couple $\left(\frac{2}{3}\,;-\frac{3}{2}\right)$ est solution de ce système
2. Justifier que les abscisses des solutions de ce système forment l'ensemble des solutions de l'équation suivante sur $\mathbb{R}^*$ : $3x^2-8x+4$
3. En déduire l'ensemble des solutions de ce système.

### Correction 2801

1. Vérifions que le couple $\left(\frac{2}{3}\,;-\frac{3}{2}\right)$ est solution de ce système :
   - $x\cdot y = \frac{2}{3}\times\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{6}{6} = -1$
   - $(x-2)(2y+3) = \left(\frac{2}{3}-2\right)\left[(2\times\left(-\frac{3}{2}\right)+3\right]$

   $$= -\frac{4}{3}\left(-\frac{6}{2}+3\right) = -\frac{4}{3}\times 0 = 0$$

2. D'après la première équation, on exprime la valeur de $y$ en fonction de $x$ :
   $y = -\frac{1}{x}$
   Par substitution, la deuxième équation devient :

$$\begin{aligned}
\left(x-2\right)\left(2y+3\right) &= 0\\
\left(x-2\right)\left[2\left(-\frac{1}{x}\right)+3\right] &= 0\\
\left(x-2\right)\left(-\frac{2}{x}+3\right) &= 0\\
x\times\left(-\frac{2}{x}\right)+3x+2\times\frac{2}{x}-6 &= 0\\
-2+3x+\frac{4}{x}-6 &= 0\\
\frac{-2x+3x^2+4-6x}{x} &= 0\\
\frac{3x^2-8x+4}{x} &= 0
\end{aligned}$$

Une fraction étant nulle si ,et seulement si, son numérateur est nul.

3. Cherchons les racines du polynômes $3x^2-8x+4$. Son discriminant est :
   $\Delta = b^2-4ac = (-8)^2-4\times3\times4 = 64-48 = 16$
   On remarque la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{16} = 4$
   Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8-4}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8+4}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

Cherchons la valeur de $y$ associée à chacune de ces valeurs de $x$ :

$$x\cdot y = -1 \qquad y = \frac{-1}{x} \qquad y = \frac{-1}{\frac{2}{3}} \qquad y = -\frac{3}{2}$$

$$x\cdot y = -1 \qquad y = \frac{-1}{x} \qquad y = \frac{-1}{2} \qquad y = -\frac{1}{2}$$

Ce système admet deux couples de solutions :

$$\mathcal{S} = \left\{\left(\frac{2}{3}\,;-\frac{3}{2}\right)\,;\,\left(2\,;-\frac{1}{2}\right)\right\}$$

### Exercice 2802

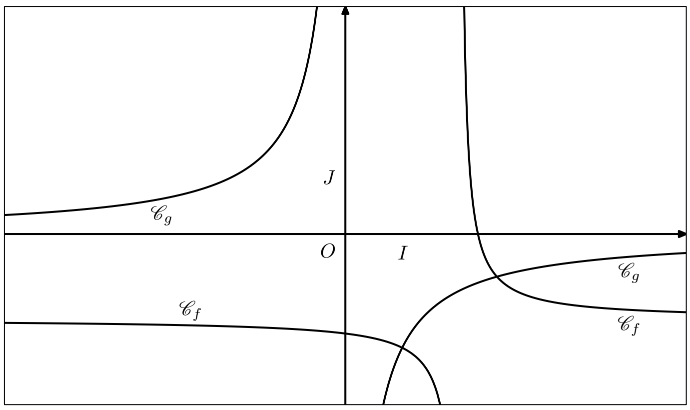
1. Déterminer les solutions du système déquations suivant :

$$\begin{cases} x\cdot y = -2 \\ (2y+3)(x-2) = 1 \end{cases}$$

2. On considère les deux fonctions $g$ définies dont les images d'un nombre $x$ sont définies par les relations suivantes :

$$f(x) = \frac{7-3x}{2x-4} \quad ; \quad g(x) = -\frac{2}{x}$$

Voici la courbe représentative de ces deux fonctions :



a. Justifier que les points d'intersection de ces deux courbes vérifient le système d'équations de la question 1. .

b. En déduire les coordonnées des points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

## Correction 2802

1. La première équation du système permet de déterminer la valeur de $y$ en fonction de celle de $x$ :
$y = -\frac{2}{x}$
Par substitution de $y$ dans la seconde équation, on obtient l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
\big(2y+3\big)\big(x-2\big) &= 1\\
\Big[2\Big(-\frac{2}{x}\Big)+3\Big]\big(x-2\big) &= 1\\
\Big(-\frac{4}{x}+3\Big)\big(x-2\big) &= 1\\
-4+\frac{8}{x}+3x-6 &= 1\\
\frac{8}{x}+3x-11 &= 0\\
\frac{3x^2-11x+8}{x} &= 0
\end{aligned}$$

Une fraction est nulle si, et seulement si, son numérateur est nul. Etudions les racines du polynôme du second degré définissant le numérateur de ce quotient.

Son discriminant vaut :
$\Delta = b^2-4\cdot a\cdot c = (-11)^2-4\times3\times8 = 121-96 = 25$
On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{255}$

Le discriminant étant strictement positif, cette équation admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{11-5}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{11+5}{6} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$$

Cherchons les valeurs de $y$ associées :

$$\begin{aligned}
x_1\cdot y_1 &= -2\\
1\cdot y_1 &= -2\\
y_1 &= -2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_2\cdot y_2 &= -2\\
\frac{8}{3}\cdot y_2 &= -2\\
y_2 &= -2\times\frac{3}{8}\\
y_2 &= -\frac{3}{4}
\end{aligned}$$

Ainsi, ce système admet deux couples pour solutions :
$\big(1\,;-2\big)$ ; $\Big(\frac{8}{3}\,;-\frac{3}{4}\Big)$

2. a. Exprimons la valeur de $y$ en fonction de $x$

- de la première équation :
$$\begin{aligned}
x\cdot y &= -2\\
y &= -\frac{2}{x}
\end{aligned}$$
Ainsi, tous les couples de nombres vérifiant la première équation représentent les couples de points de la courbe $\mathscr{C}_g$ représentative de la fonction $g$.

- de la seconde équation :
$$\begin{aligned}
(2y+3)(x-2) &= 1\\
2y(x-2)+3(x-2) &= 1\\
2y(x-2)+3x-6 &= 1\\
2y(x-2) &= 7-3x\\
y &= \frac{7-3x}{2(x-2)}\\
y &= \frac{7-3x}{2x-4}
\end{aligned}$$
Ainsi, tous les couples de nombres solutions de la seconde équation représentent les coordonnées des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction $f$.

Ainsi, les couples de nombres de ce système d'équations représentent les coordonnées des points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

b. Les coordonnées des deux points d'intersection sont :
$\big(1\,;-2\big)$ ; $\Big(\frac{8}{3}\,;-\frac{3}{4}\Big)$

## Exercice 2835

Résoudre le système d'équations suivant :

$$\left\{\begin{aligned} 2x+3y &= 12\\ x\cdot y &= -2\end{aligned}\right.$$

## Correction 2835

De la seconde équation, on déduit la valeur de $y$ en fonction de $x$ :
$y = -\frac{2}{x}$
La substitution de la valeur de $y$ dans la seconde équation donne :

$$\begin{aligned}
2x+3y &= 12\\
2x+3\Big(-\frac{2}{x}\Big) &= 12\\
2x-\frac{6}{x} &= 12\\
\frac{2x^2}{-}\,\frac{6}{x} &= \frac{12x}{x}\\
\frac{2x^2-12x-6}{x} &= 0
\end{aligned}$$

Un quotient est nul, si et seulement si, son numérateur s'annule. Cherchons les racines éventuelles de ce polynôme ; son discriminant a pour valeur :
$\Delta = b^2-4ac = (-12)^2-4\times2\times(-6) = 144+48 = 192$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{192} = 8\sqrt{3}$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme du second degré admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{12-8\sqrt{3}}{2\times2} = 3-2\sqrt{3}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{12+8\sqrt{3}}{2\times2} = 3+2\sqrt{3}$$

Cherchons les valeurs de $y$ associées à chacune de ces deux valeurs de $x$ ; pour obtenir une forme simplifiée, plus facilement, nous allons utilisées la première équation :

$$\begin{aligned} 2x_1+3y_1 &= 12 \\ 2\big(3-2\sqrt{3}\big)+3y_1 &= 12 \\ 6-4\sqrt{3}+3y_1 &= 12 \\ 3y_1 &= 6+4\sqrt{3} \\ y_1 &= 2+\frac{4\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x_2+3y_2 &= 12 \\ 2\big(3+2\sqrt{3}\big)+3y_2 &= 12 \\ 6+4\sqrt{3}+3y_2 &= 12 \\ 3y_1 &= 6-4\sqrt{3} \\ y_1 &= 2-\frac{4\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

Ainsi, ce système d'équation admet deux couples de solutions :

$$\mathscr{S} = \Big\{ \Big(3-2\sqrt{3}\,;2+\frac{4\sqrt{3}}{3}\Big)\ ;\ \Big(3+2\sqrt{3}\,;2-\frac{4\sqrt{3}}{3}\Big) \Big\}$$

## Exercice 1470

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x^2+4y^2 = 5 \\ x\times y = 1 \end{cases}$$

**Indication** : Ce système possède quatre couples de solutions.

## Correction 1470

Résolvons le système d'équations :

$$\begin{cases} x^2+4y^2 = 5 \\ x\times y = 1 \end{cases}$$

De la seconde équation, on obtient la valeur de $x$ en fonction de $y$ :

$$\begin{aligned} x\times y &= 1 \\ x &= \frac{1}{y} \end{aligned}$$

En substituant la valeur de $x$ dans la première équation, on obtient :

$$\begin{aligned} x^2+4y^2 &= 5 \\ \Big(\frac{1}{y}\Big)^2+4y^2 &= 5 \\ \frac{1}{y^2}+4y^2 &= 5 \end{aligned}$$

En multipliant les deux membres de l'équation par $y^2$ :

$$\begin{aligned} y^2\cdot\Big(\frac{1}{y^2}+4y^2\Big) &= y^2\cdot5 \\ 1+4y^4 &= 5\cdot y^2 \\ 4y^4-5\cdot y^2+1 &= 0 \end{aligned}$$

Posons le changement de variable $Y=y^2$ :

$$4\cdot Y^2-5\cdot Y+1 = 0$$

Cette équation du second degré admet pour discriminant :

$$\Delta = b^2-4\cdot a\cdot c = (-5)^2-4\times4\times1 = 25-16 = 9$$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$

Le discriminant étant strictement positif, cette équation admet les deux solutions suivantes :

$$Y_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-(-5)-3}{2\times4} = \frac{5-3}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$Y_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-(-5)+3}{2\times4} = \frac{5+3}{8} = \frac{8}{8} = 1$$

Par le changement de variable, on obtient pour la variable $y$ :

- $y^2=Y_1=\frac{1}{4}$ qui admet deux solutions :
  - $y_1=\frac{1}{2}$, par la seconde équation, on obtient la valeur de $x_1$ associée :
    $$\begin{aligned} x_1\times y_1 &= 1 \\ x_1\times\frac{1}{2} &= 1 \\ x_1 &= 2 \end{aligned}$$
    Le couple $\Big(2\,;\frac{1}{2}\Big)$ est une solution du système.
  - $y'_1=-\frac{1}{2}$, par la seconde équation, on obtient la valeur de $x'_1$ associée :
    $$\begin{aligned} x'_1\times y'_1 &= 1 \\ x'_1\times\Big(-\frac{1}{2}\Big) &= 1 \\ x'_1 &= -2 \end{aligned}$$
    Le couple $\Big(-2\,;-\frac{1}{2}\Big)$ est une solution du système.
- $y^2=Y_2=1$ qui admet deux solutions :
  - $y_2=1$, par la seconde équation, on obtient la valeur de $x_2$ associée :
    $$\begin{aligned} x_2\times y_2 &= 1 \\ x_2\times1 &= 1 \\ x_2 &= 1 \end{aligned}$$
    Le couple $\big(1\,;1\big)$ est une solution du système.
  - $y'_2=-1$, par la seconde équation, on obtient la valeur de $x'_2$ associée :
    $$\begin{aligned} x'_2\times y'_2 &= 1 \\ x'_2\times(-1) &= 1 \\ x'_2 &= -1 \end{aligned}$$
    Le couple $\big(-1\,;-1\big)$ est une solution du système.

Ainsi, ce système admet pour ensemble de solutions :

$$\Big\{ \big(1\,;1\big)\ ;\ \big(-1\,;-1\big)\ ;\ \Big(2\,;\frac{1}{2}\Big)\ ;\ \Big(2\,;\frac{1}{2}\Big) \Big\}$$

### Exercice 2051

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} -5x^2+4y^2 = -1 \\ x\times y = 1 \end{cases}$$

**Indication :** ce système admet deux couples comme solutions.

### Correction 2051

Résolvons le système suivant :

$$\begin{cases} -5x^2+4y^2 = -1 \\ x\times y = 1 \end{cases}$$

D'après la second équation, on obtient l'expression de $y$ en fonction de $x$ :

$$y = \frac{1}{x}$$

En substituant la valeur de $y$ dans la première équation :

$$\begin{aligned} -5x^2+4y^2 &= -1 \\ -5x^2+4\cdot\Big(\frac{1}{x}\Big)^2 &= -1 \\ -5x^2+\frac{4}{x^2} &= -1 \end{aligned}$$

En multipliant les deux membres de l'équation par $x^2$

$$\begin{aligned} x^2\cdot\Big(-5x^2+\frac{4}{x^2}\Big) &= x^2\cdot(-1) \\ -5x^4+x^2+4 &= 0 \end{aligned}$$

Par le changement de variable $X=x^2$, on obtient :

$$-5X^2+X+4=0$$

Ce polynôme admet pour discriminant :

$$\Delta = b^2-4\cdot a\cdot c = 1^2-4\times(-5)\times 4 = 1+80 = 81$$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{81}=9$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$X_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-1-9}{2\times(-5)} = \frac{-10}{-10} = 1$$

$$X_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-1+9}{2\times(-5)} = \frac{8}{-10} = -\frac{4}{5}$$

Par le changement de variable, on obtient la valeur de $x$ :

- Pour $x^2=X_1=1$, on a :
  - $x_1=-1$. Par la seconde équation, on obtient :
  $$\begin{aligned} x_1\times y_1 &= 1 \\ -1\times y_1 &= 1 \\ y_1 &= \frac{1}{-1} \\ y_1 &= -1 \end{aligned}$$
  Le couple $\big(-1\,;-1\big)$ est solution du système d'équations.
  - $x_2=1$. Par la seconde équation, on obtient :
  $$\begin{aligned} x_2\times y_2 &= 1 \\ 1\times y_2 &= 1 \\ y_2 &= \frac{1}{1} \\ y_2 &= 1 \end{aligned}$$
  Le couple $\big(1\,;1\big)$ est solution du système d'équations.
- Pour $x^2=X_2=-\dfrac{4}{5}$ : cette équation n'admet aucune solution.

Ainsi, le système d'équations admet deux solutions :

$$\mathcal{S}=\Big\{\big(-1\,;-1\big)\ ;\ \big(1\,;1\big)\Big\}$$

### Exercice 2053

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} -2x^2-2y^2 = -4 \\ x\times y = -1 \end{cases}$$

**Indication :** ce système admet deux couples pour solutions

### Correction 2053

Résolvons le système suivant :

$$\begin{cases} -2x^2-2y^2 = -4 \\ x\times y = -1 \end{cases}$$

De la seconde équation, on obtient l'expression de $y$ en fonction de $x$ :

$$\begin{aligned} x\times y &= -1 \\ y &= -\frac{1}{x} \end{aligned}$$

Par substitution de la valeur de $y$ dans la première équation, on obtient :

$$\begin{aligned} -2x^2-2y^2 &= -4 \\ -2x^2-2\cdot\Big(-\frac{1}{x}\Big)^2 &= -4 \\ -2x^2-2\cdot\frac{1}{x^2} &= -4 \\ -2x^2-\frac{2}{x^2} &= -4 \end{aligned}$$

En multipliant les deux membres par $x^2$, on a :

$$\begin{aligned} x^2\cdot\Big(-2x^2-\frac{2}{x^2}\Big) &= x^2\cdot(-4) \\ -2x^4-2 &= -4x^2 \\ -2x^4+4x^2-2 &= 0 \end{aligned}$$

Effectuons le changement de variable $X=x^2$ :

$$-2X^2+4X-2=0$$

Ce polynôme admet discriminant :

$$\Delta = b^2-4\cdot a\cdot c = 4^2-4\times(-2)\times(-2) = 16-16 = 0$$

Le discriminant étant nul, il admet une unique solution :

$$X_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2\times(-2)} = \frac{-4}{-4} = 1$$

Par le changement de variables, la variable $x$ doit vérifier :

$$x_0 = X_0^2 = 1$$

Ainsi, la variable $x_0$ peut prendre les valeurs :

- $x_0=-1$ :
  De la seconde équation, on en déduit la valeur de $y_0$ :

$$x_0 \times y_0 = -1$$
$$(-1) \times y_0 = -1$$
$$y_0 = \frac{-1}{-1}$$
$$y_0 = 1$$
Le couple $(-1\,;1)$ est solution du système.

- $x_0 = 1$ :

De la seconde équation, on en déduit la valeur de $y_0$ :
$$x_0 \times y_0 = 1$$
$$(-1) \times y_0 = 1$$
$$y_0 = \frac{1}{-1}$$
$$y_0 = -1$$
Le couple $(1\,;-1)$ est solution du système.

Le système admet comme ensemble de solution :
$$\mathcal{S} = \Big\{ (-1\,;1)\ ;\ (1\,;-1) \Big\}$$

## Exercice 2055

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 = -3 \\ x \times y = 1 \end{cases}$$

**Indication :** ce système n'admet aucun couple comme solution.

## Correction 2055

Résolvons le système d'équations suivants :
$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 = -3 \\ x \times y = 1 \end{cases}$$

De la seconde équation, on obtient la valeur de $y$ en fonction de $x$ :
$$x \times y = 1$$
$$y = \frac{1}{x}$$

En substituant la valeur de $y$ dans la première équation, on obtient :
$$4x^2 + y^2 = -3$$
$$4x^2 + \Big(\frac{1}{x}\Big)^2 = -3$$
$$4x^2 + \frac{1}{x^2} = -3$$

En multipliant les deux membres de l'équation par $x^2$, on a :
$$x^2 \cdot \Big(4x^2 + \frac{1}{x^2}\Big) = x^2 \cdot (-3)$$
$$4x^4 + 1 = -3x^2$$
$$4x^4 + 3x^2 + 1 = 0$$

Par le changement de variable $X = x^2$, on a :
$$4X^2 + 3X + 1 = 0$$

Ce polynôme admet pour discriminant :
$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 3^2 - 4 \times 4 \times 1 = 9 - 16 = -5$$

Le discriminant étant strictement négatif, ce polynôme n'admet aucune racine : la variable $X$ n'admet aucune solution, il en est de même de $x$.

Ce système n'admet aucune solution :
$$\mathcal{S} = \varnothing$$