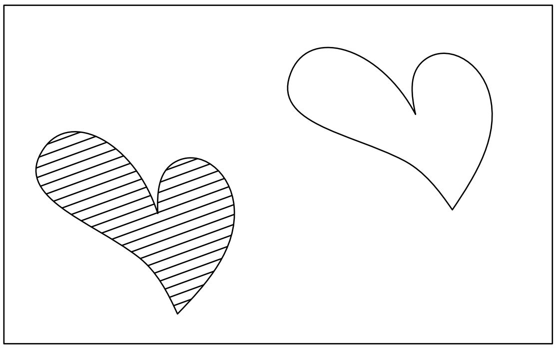
Dixième / Les vecteurs

1. Introduction à la translation :

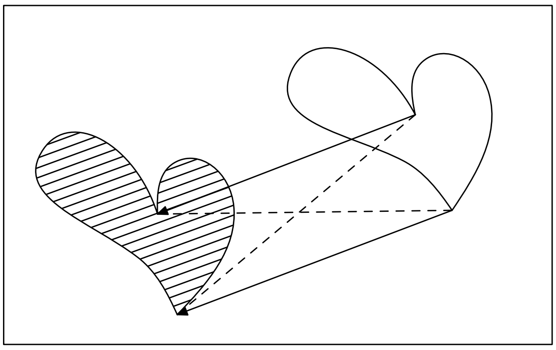
Exercice 2850

Dans le dessin ci-dessous, on suppose, dans un premier temps, que la figure grise a été obtenue par translation de la figure blanche :



1. Tracer précisemmet deux vecteurs caractérisant cette translation.
2. Tracer le quadrilatère formé par ces deux vecteurs.
3. a. Justifier que ce quadrilatère n'est pas un parallélogramme.
   b. Est ce que ces deux figures sont liées par une translation ?

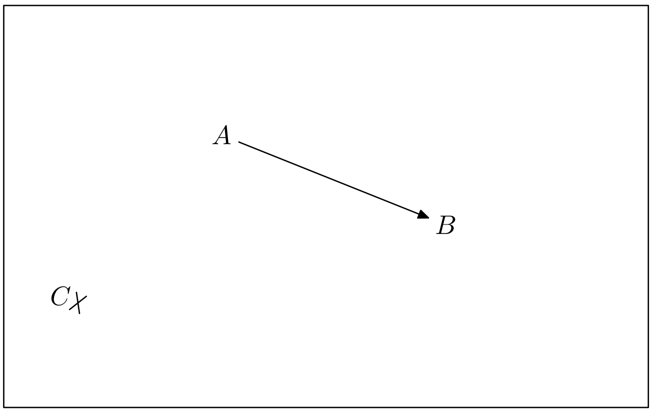
Correction 2850



3. a. Le plus simple pour montrer que ce quadrilatère n'est pas un parallélogramme, il suffit de tracer les diagonales et de vérifier à l'aide du compas que ces diagonales ne se coupent en leurs milieux.
   b. Non, puisque deux points et leurs images ne forment pas un parallélogramme cette transformation n'est pas un parallélogramme.

Exercice 2860

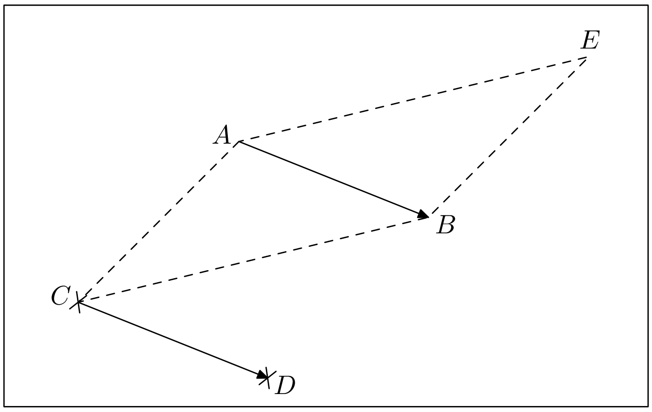
On considère la configuration ci-dessous :



Les tracés doivent être effectués à la règle non-graduée et au compas :

1. a. Placer le point D image du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
   b. Quel est la nature du quadrilatère $ABDC$?
2. a. Placer le point E tel que $ACBE$ soit un parallélogramme.
   b. Caractériser la translation transformant le point B en E.

Correction 2860



1. b. Le point D étant l'image du point C par la translation du vecteur $\overrightarrow{AB}$, on en déduit que les deux vecteur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux :
   Le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme.
2. b. Puisque $BEAC$ est un parallélogramme, on en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont égaux.
   La translation transformant le point B en E est la translation de vecteur $\overrightarrow{CA}$.

Exercice 946

1. Tracer un triangle ABC rectangle en B.
2. Placer le point T tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CT}$.
   Quelle est la nature du quadrilatère $ABTC$?
3. Placer le point M tel que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MT}$.
   Justifier que le quadrilatère $BCTM$ est un rectangle.

Correction 946

2. Puisque $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CT}$, le quadrilatère $ABTC$ est un parallélogramme.

3. Le point M étant placé tel que $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{MT}$, on en déduit que le quadrilatère $BCTM$ est un parallélogramme.

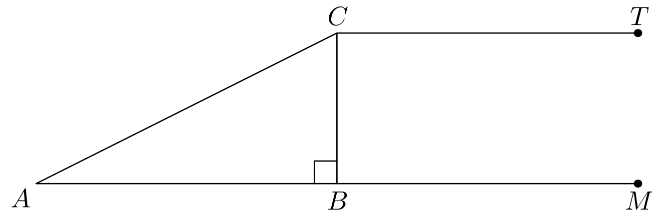
   D'après la question précédente, $ABTC$ est un parallélogramme.
   Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses côtés opposés sont parallèles entre eux.
   On en déduit : $(AB)/\!/(CT)$

   Le triangle ABC étant rectangle en B : $(AB)\perp(BC)$.

   On a : $(AB)/\!/(CT)$; $(AB)\perp(BC)$.

   Si deux droites sont parallèles entre elles et si une troisième est parallèle à l'une d'elle alors elle est parallèle à l'autre.
   On en déduit : $(CT)\perp(BC)$.

   On en déduit que l'angle $\widehat{BCT}$ est un angle droit.
   Si un parallélogramme possède un angle droit alors c'est un rectangle.
   $BCTM$ est un rectangle.

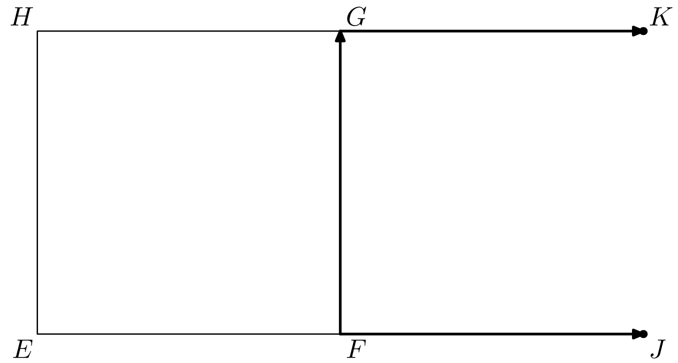


3. Somme de vecteurs :

Exercice 925

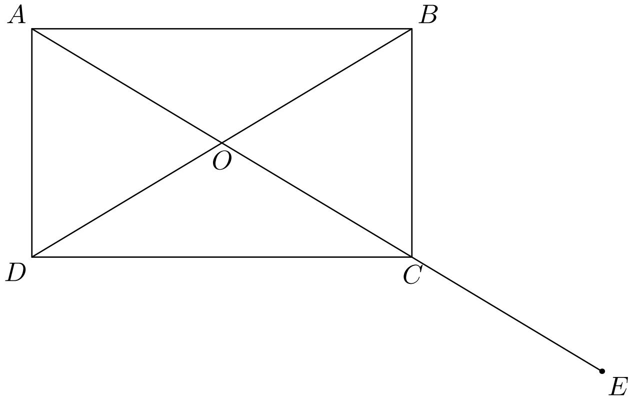
1. Tracer un carré $EFGH$ de côté $4\,cm$.
2. Placer le point J tel que : $\overrightarrow{FJ}=\overrightarrow{EF}$
3. Placer le point K tel que : $\overrightarrow{FK}=\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{EF}$

Correction 925



Exercice 934

La figure ci-après représente un rectangle $ABCD$ de centre O et le point E, symétrique de O par rapport à C.



1. On considère la rotation de centre O qui transforme B en C. Quelle est l'image de D par cette rotation ? *(On ne demande pas de justifier.)*

2. Parmi les affirmations suivantes, recopier celles qui sont vraies *(on ne demande pas de justification)*.

$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$	$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OE}$	$OA=CE$
$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OE}$	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$
D est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$		

Correction 934

1. Par la rotation de centre O qui transforme B en C, le point D a pour image le point A

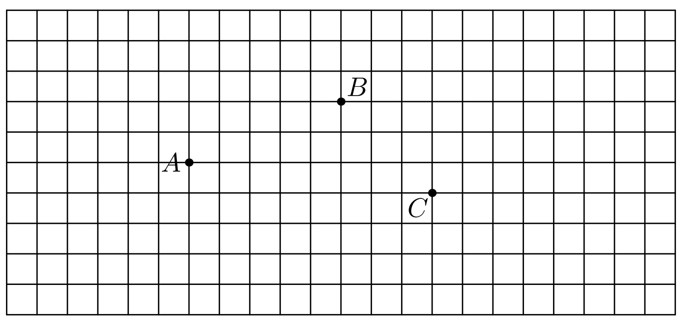
2. Les assertions suivantes sont exactes :
   $OA=CE$; $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OE}$; $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$

Exercice 933

Pour cet exercice, compléter la figure donnée ci-après.
On a placé trois points A, B et C.

1. Construire le point E tel que $ABEC$ soit un parallélogramme.
2. a. Construire le point F tel que : $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$.
   b. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCF$? On ne demande pas de justification.
3. Démontrer que : $\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{CE}$.

Que peut-on en déduire pour le point C ?



Correction 933

2. b. Le point F est construit à partir de la relation :

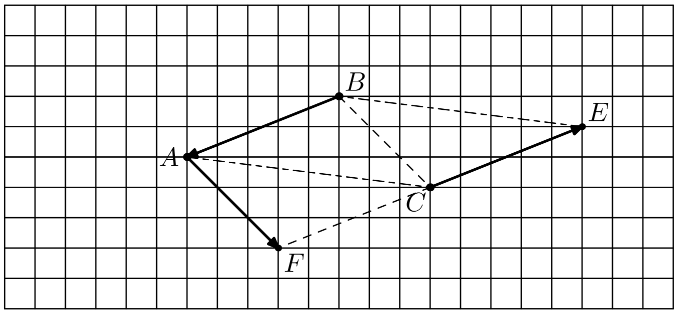
$$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$$
$$\overrightarrow{BF} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC}$$
$$\overrightarrow{BF} - \left(\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FA}\right) = \overrightarrow{BC}$$
$$-\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{BC}$$
$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BC}$$

De cette égalité, on en déduit que le quadrilatère $AFCB$ est un parallélogramme.

3. $ABEC$ étant un parallélogramme, on a la relation : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE}$

$ABCF$ étant un parallélogramme, on a la relation : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FC}$

On en déduit l'égalité : $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{CE}$.
Le point C est le milieu du segment $[FE]$.

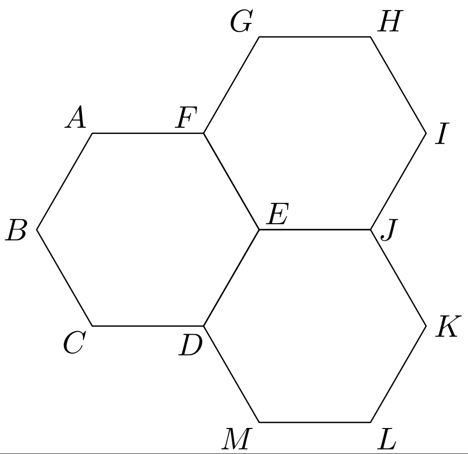


4. Relation de Chasles et manipulations algébriques :

Exercice 947

La figure ci-contre est constituée d'hexagones réguliers tous identiques :

Remplissez les pointillés en détaillant , si possible, vos calculs :



a. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{\ldots E}$

b. $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{D\ldots}$

c. $\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{F\ldots}$

d. $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{KE} = \overrightarrow{D\ldots}$

e. $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{\ldots\ldots} = \overrightarrow{0}$

Correction 947

a. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AE}$

b. $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{DI}$

c. $\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{FJ}$

d. $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{KE} = \overrightarrow{DE}$

e. $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{0}$

Exercice 519

Soit $ABCD$ un parallélogramme. On note :

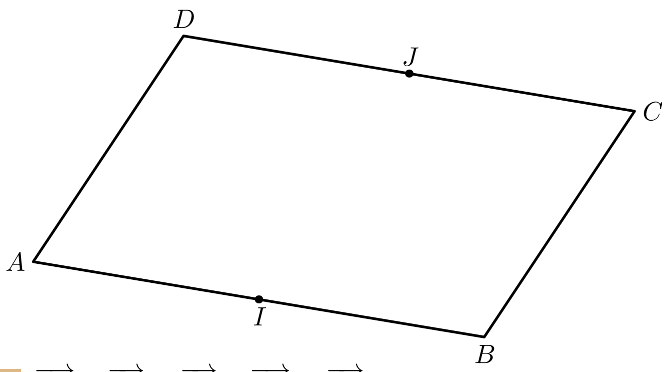
- I le milieu du segment $[AB]$;
- J le milieu du segment $[DC]$.

Déterminer dans chaque cas un représentant du vecteur résultant :

a. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{JA}$ b. $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AD}$ c. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IJ} - \overrightarrow{DJ}$

Correction 519

Voici la représentation de la figure utilisée :



a. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{JA} = \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{JC}$

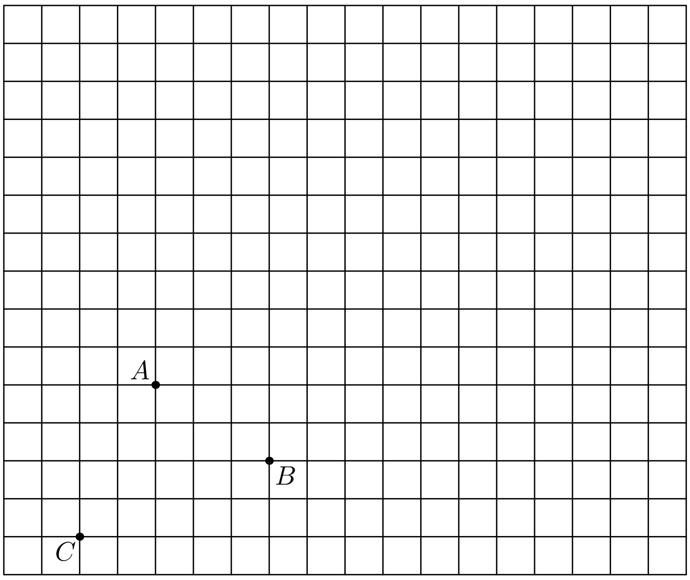
b. $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AJ}$

c. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IJ} - \overrightarrow{DJ} = \left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}\right) + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JD}$
$= \overrightarrow{IB} + \left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JD}\right)$

D'après la relation de Chasles, on a :
$= \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{IC}$

Exercice 267

On considère les trois points A, B et C présentés dans le quadrillage ci-dessous :



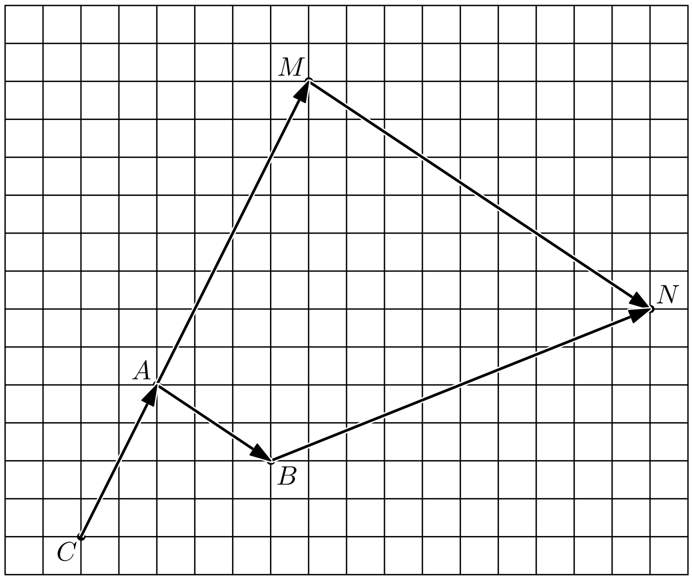
1. a. Placer le point M vérifiant la relation vectorielle : $\overrightarrow{AM} = 2 \cdot \overrightarrow{CA}$

   b. Placer le point N vérifiant la relation vectorielle : $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + 2 \cdot \overrightarrow{CB}$

2. Démontrer, à l'aide du calcul vectoriel, que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont deux vecteurs colinéaires.

Correction 267

1. On obtient la représentation suivante :



2. D'après la relation de Chasles, on a la première égalité :
$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}$

   Par définition des points M et N :

   $= \left(-2 \cdot \overrightarrow{CA}\right) + \left(\overrightarrow{AB} + 2 \cdot \overrightarrow{CB}\right) = -2 \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + 2 \cdot \overrightarrow{CB}$

   $= 2 \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + 2 \cdot \overrightarrow{CB} = 2 \cdot \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right) + \overrightarrow{AB}$

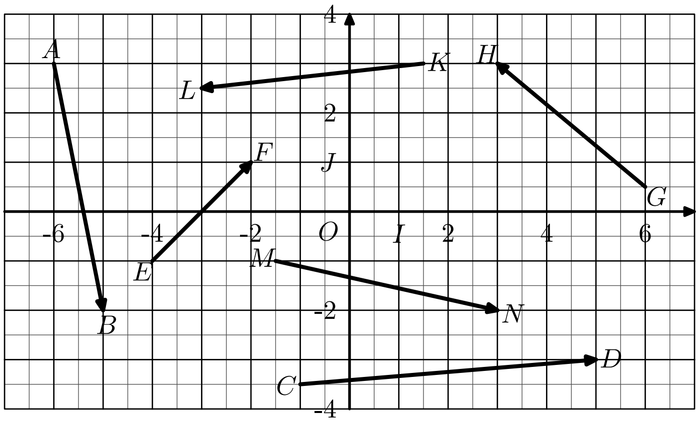
   D'après la relation de Chasles :

   $= 2 \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = 3 \cdot \overrightarrow{AB}$

   Cette égalité permet de justifier que les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires entre eux.

5. Coordonnées de vecteurs :

Exercice 2111



1. Graphiquement, déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$.

2. a. Donner les coordonnées des points G, H, K, L, M et N.

   b. En déduire, par le calcul, les coordonnées des vecteur $\overrightarrow{GH}$, $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{MN}$.

Correction 2111

1. On a les coordonnées des vecteurs :
$\overrightarrow{AB}\,(1\,;-5)$; $\overrightarrow{CD}\,(6\,;0{,}5)$; $\overrightarrow{EF}\,(2\,;2)$

2. a. Voici les coordonnées des points :
   $G\,(6\,;0{,}5)$; $H\,(3\,;3)$; $K\,(1{,}5\,;3)$
   $L\,(-3\,;2{,}5)$; $M\,(-1{,}5\,;-1)$; $N\,(3\,;-2)$

   b. On a les coordonnées de vecteurs :
   - $\overrightarrow{GH}\,(x_H - x_G\,;y_H - y_G)$
     $= (3-6\,;3-0{,}5)\;(-3\,;2{,}5)$
   - $\overrightarrow{KL}\,(x_L - x_K\,;y_L - y_K)$
     $= \left(-3-1{,}5\,;2{,}5-3\right) = (-4{,}5\,;-0{,}5)$
   - $\overrightarrow{MN}\,(x_N - x_M\,;y_N - y_M)$
     $= \Big(3-(-1{,}5)\,;-2-(-1)\Big) = (4{,}5\,;-1)$

Exercice 942

On considère le plan muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;I\,;J\right)$. On considère les quatre points suivants dont les coordonnées sont données :

$A\,(3\,;2)$; $B\,(-1\,;4)$; $C\,(-4\,;0)$; $D\,(0\,;-2)$

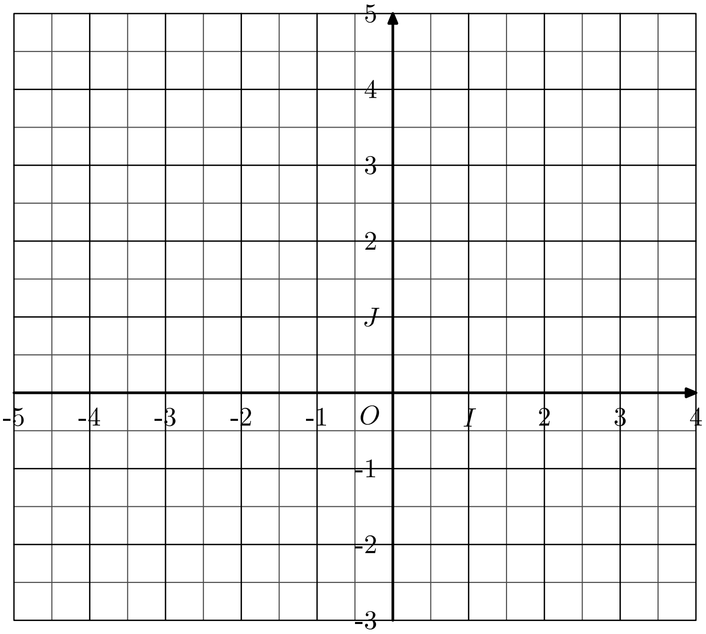
1. **Par le calcul :**

   a. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$.

b. Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$? Justifier.

c. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

2. **Observons :** dans le repère ci-dessous, placer les quatre points et vérifier les résultats de la question 1..



Correction 942

1. a. • $\overrightarrow{AB}\,(x_B - y_A\,;y_B - y_A)$

$= \big(-1-3\,;4-2\big) = \big(-4\,;2\big)$

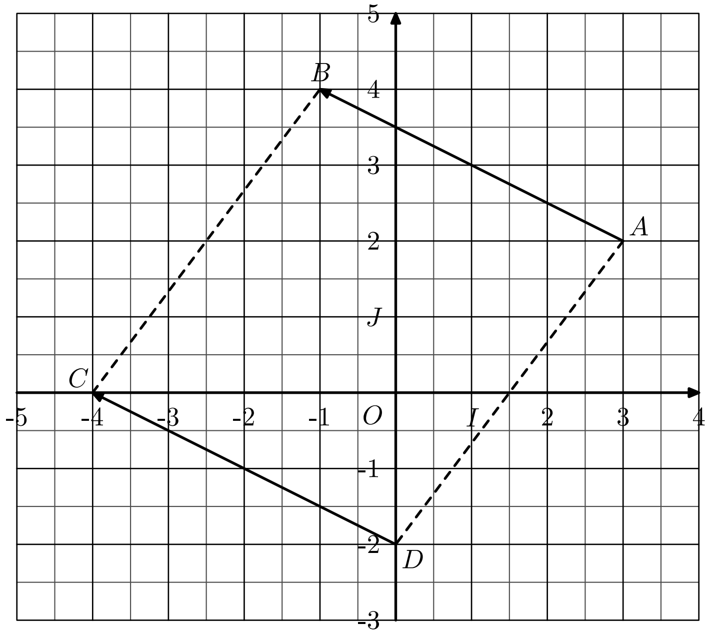
• $\overrightarrow{DC}\,(x_C - x_D\,;y_C - y_D)$

$= \big(-4-0\,;0-(-2)\big) = \big(-4\,;2\big)$

b. Ces deux vecteurs sont égaux car ils ont les même coordonnées : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

c. Puisque $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, alors le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

2. Voici les quatre points placés dans le plan :



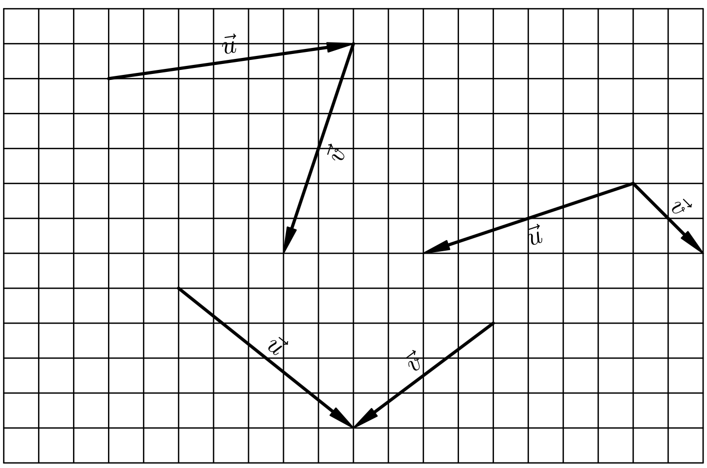
6. Multiplications par un reel :

Exercice 510

Par analogie avec les nombres relatifs, on définit la soustraction des vecteurs à l'aide de l'addition de l'opposé. Ainsi, on définit la soustraction du vecteur $\vec{u}$ par le vecteur $\vec{v}$ par :
$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$

1. Pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan, que peut-on dire de :
$\vec{u} - \vec{u}$?

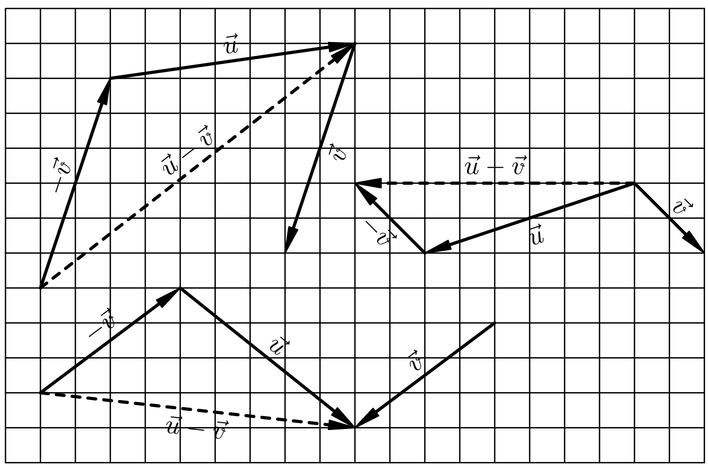
2. Dans chacun des trois cas ci-dessous, dessiner un représentant de la soustraction :
$\vec{u} - \vec{v}$



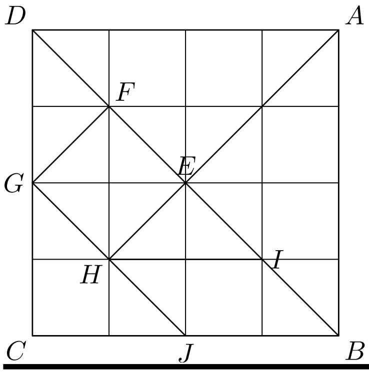
Correction 510

1. Pour tout vecteur $\vec{u}$, on a :
$\vec{u} - \vec{u} = \vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

2. Voici les représentants des soustractions :



Exercice 518



Déterminer un représentant de chacune des sommes ci-dessous :

1. $\overrightarrow{EI} - \overrightarrow{GF}$
2. $\overrightarrow{HE} + \overrightarrow{BI} - \overrightarrow{JF}$
3. $\overrightarrow{FG} - \overrightarrow{IF} - \overrightarrow{GE}$

Correction 518

1. $\overrightarrow{EI} - \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{EI} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{EI} + \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{EJ}$
2. $\overrightarrow{HE} + \overrightarrow{BI} - \overrightarrow{JF} = \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FJ}$
   $= \overrightarrow{HJ}$
3. $\overrightarrow{FG} - \overrightarrow{IF} - \overrightarrow{GE} = \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{FI} + \overrightarrow{EG}$
   $= \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{JB} = \overrightarrow{FB}$

Exercice 488

Soient A et B deux points du plan, on note I le milieu du segment $[AB]$

1. Compléter les pointillés pour vérifier la relation vectorielle suivante :
   $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{A\ldots}$
2. Recopier et compléter avec les mots "*double*" et "*moitié*" les phrases suivantes :
   a. $\overrightarrow{AI}$ est ...de $\overrightarrow{AB}$ b. $\overrightarrow{AB}$ est ...de $\overrightarrow{AI}$
3. En rapport avec la question précédente, compléter les pointillés avec le nombre adéquat :
   a. $\overrightarrow{AI} = \ldots\ldots\overrightarrow{AB}$ b. $\overrightarrow{AB} = \ldots\ldots\overrightarrow{AI}$

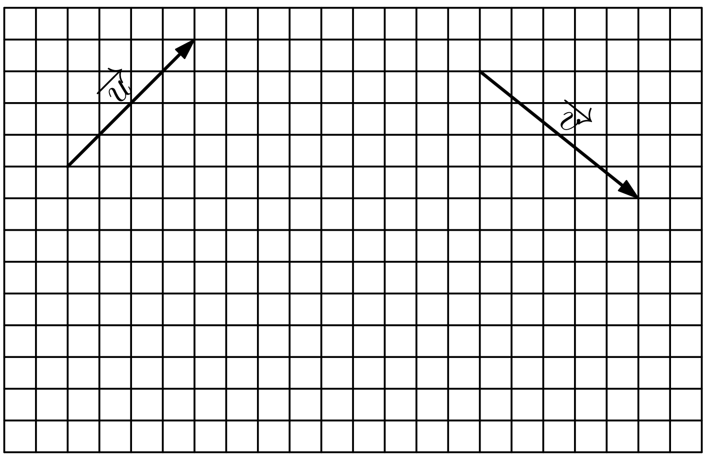
Correction 488

1. On a l'égalité :
   $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}$
   D'après la relation de Chasles, on a :
   $= \overrightarrow{AB}$
2. a. $\overrightarrow{AI}$ est la moitié de $\overrightarrow{AB}$.
   b. $\overrightarrow{AB}$ est le double de $\overrightarrow{AI}$.
3. a. $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB}$
   b. $\overrightarrow{AB} = 2\cdot\overrightarrow{AI}$

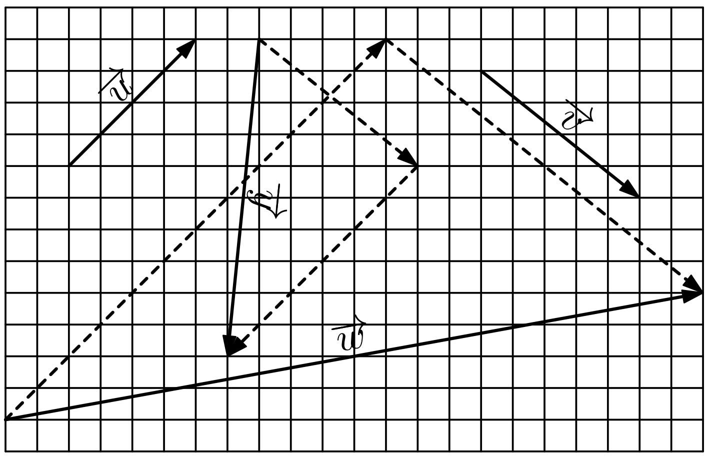
Exercice 501

Dans le repère ci-dessous, tracer :

1. un représentant du vecteur $\vec{w}$ obtenu à partir de la relation $3\cdot\vec{u}+2\cdot\vec{v}$
2. un représentant du vecteur $\vec{y}$ obtenu à partir de la relation $\vec{v}-1{,}5\cdot\vec{u}$



Correction 501



Deux méthodes sont possibles pour répondre à cet exercice ; par exemple pour construire le vecteur $\vec{w}$:

- Il est possible, ce qui a été fait au dessus, de créer un représentant du vecteur $3\cdot\vec{u}$ et $2\cdot\vec{v}$ et d'en faire la somme.
- ou alors d'utiliser les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$:
  $\vec{u}\,(4\,;4)$; $\vec{v}\,(5\,;-4)$
  Un représentant du vecteur $3\,\vec{u}+2\,\vec{v}$ a pour coordonnées :
  $\vec{w}\,\big(3\times4+2\times5\,;3\times4+2\times(-4)\big) = (22\,;4)$

Exercice 489

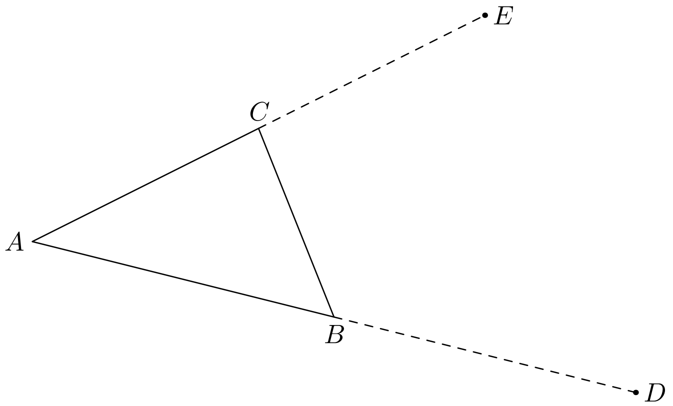
Soit ABC un triangle quelconque. Placer les points D et E vérifiant les relations vectorielles suivantes :

$\overrightarrow{AD} = 2\cdot\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AE} = 2\cdot\overrightarrow{AC}$

Comparer $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{DE}$. Justifier.

Correction 489

Voici la représentation de cette figure :



Pour comparer les deux vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{DE}$, on pourrait utiliser le théorème des milieux mais nous allons utiliser l'outil vectoriel pour cette comparaison :

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}$$

Par définition des points D et E :

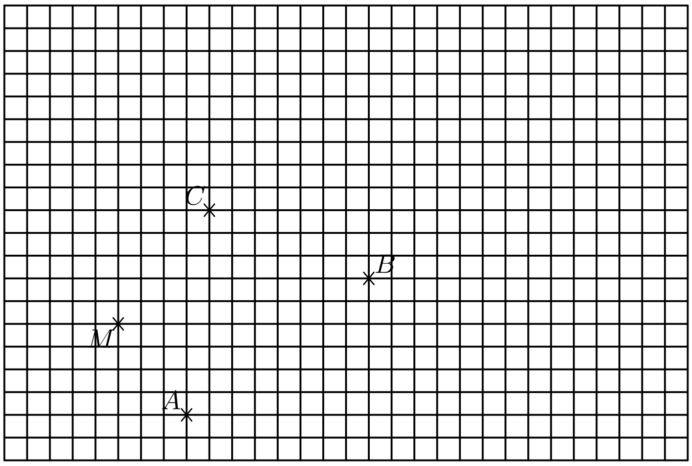
$$= -2{\cdot}\overrightarrow{AB} + 2{\cdot}\overrightarrow{AC} = 2{\cdot}\overrightarrow{BA} + 2{\cdot}\overrightarrow{AC}$$

Factorisons par 2 :

$$= 2{\cdot}\big(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\big) = 2{\cdot}\overrightarrow{BC}$$

Exercice 2988

Dans le plan, représenté ci-dessous muni d'un quadrillage, on considère les points A, B, C, M :



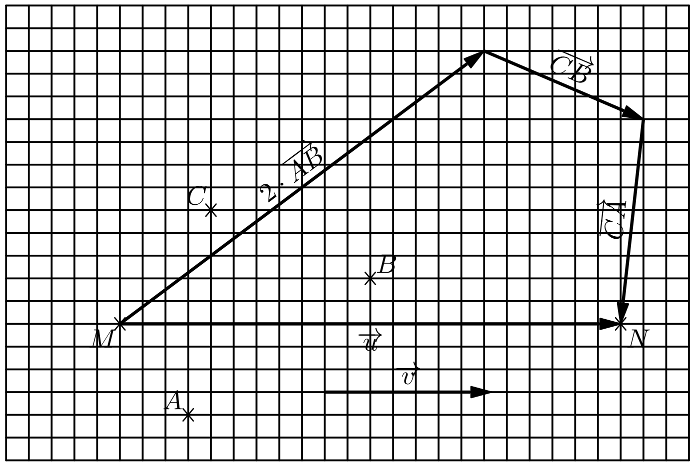
Donner un représentant du vecteur $\overrightarrow{u}$ défini par la relation :

$$\overrightarrow{u} = 2{\cdot}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC}$$

1. Placer le point N tel que : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{u}$.

2. On définit le vecteur $\overrightarrow{v}$ défini par :
$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{CB} + \frac{1}{3}{\cdot}\overrightarrow{AC}$$
Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

Correction 2988



2. $\overrightarrow{u} = 2{\cdot}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC} = 2{\cdot}\Big(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\Big) + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC}$

$$= 2{\cdot}\overrightarrow{AC} + 2{\cdot}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC} = 3{\cdot}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC}$$

$$= 3\cdot\Big(\overrightarrow{CB} + \frac{1}{3}{\cdot}\overrightarrow{AC}\Big) = 3{\cdot}\overrightarrow{v}$$

Cette égalité montre que les deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

7. Coordonnées et propriétés algébriques :

Exercice 528

On considère le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé d'unité graphique $1\,cm$.

1. Construire le repère et placer les points A, B et C de coordonnées respectives $\big(-2\,;1\big)$, $\big(0\,;3\big)$ et $\big(3\,;0\big)$.

2. a. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

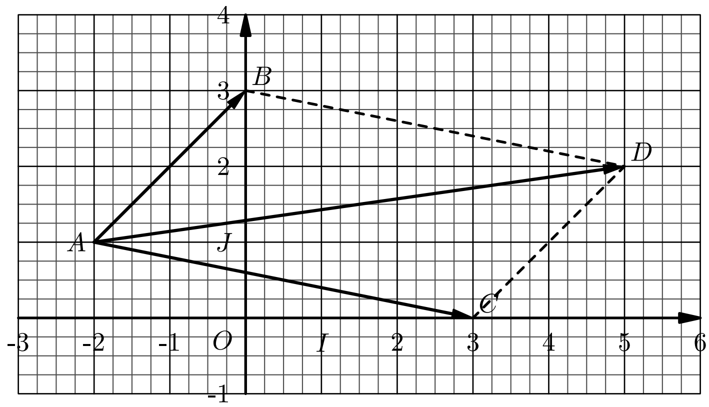
   b. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

3. En déduire les coordonnées du point D vérifiant la relation : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$

4. Justifier que le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme.

Correction 528

1. Voici le graphique complété :



2. a. Voici les coordonnées de ces vecteurs :

- $\overrightarrow{AB}\,(x_B - x_A\,;y_B - y_A)$

$$= \Big(0 - (-2)\,;3 - 1\Big) = \big(2\,;2\big)$$

- $\overrightarrow{AC}\,(x_C - x_A\,;y_C - y_A)$
$= \big(3-(-2)\,;0-1\big) = (5\,;-1)$

b. On en déduit les coordonnées de la somme :
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\,\big(2+5\,;2+(-1)\big) = (7\,;1)$

3. Le vecteur $\overrightarrow{AD}$ a pour coordonnées :
$\overrightarrow{AD}\,(x_D - x_A\,;y_D - y_A) = \big(x_D-(-2)\,;y_D-1\big)$
$= \big(x_D+2\,;y_D-1\big)$
Ainsi, pour que le point D vérifie la relation :
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$
Deux vecteurs égaux ayant des coordonnées égales, en identifiant les abscisses et les ordonnées de ces deux vecteurs, on obtient les deux égalités suivantes :

$7 = x_D + 2$	$1 = y_D - 1$
$7-2 = x_D$	$1+1 = y_D$
$x_D = 5$	$y_D = 2$

Le point D a pour coordonnées $D\,(5\,;2)$.

4. Le point D vérifie la relation :
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$
D'après la relation de Chales, on a :
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
Cette dernière relation permet d'affirmer que le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme.

8. Colinéarité de vecteurs :

Exercice 507

Dans le cas de deux vecteurs colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$, il existe un réel k établissant l'égalité :
$\vec{u} = k\cdot\vec{v}$
Le réel k s'appelle le coefficient de colinéarité du vecteur $\vec{u}$ par rapport au vecteur $\vec{v}$

1. Pour chaque question, déterminer le coefficient de colinéarité de $\vec{u}$ par rapport à $\vec{v}$:

a. $2\cdot\vec{u} = 3\cdot\vec{v}$ b. $\vec{u}+\vec{v} = \vec{0}$
c. $\frac{1}{2}\cdot\vec{u} = \frac{3}{4}\cdot\vec{v}$ d. $3\cdot\vec{u} - 2\cdot\vec{v} = \vec{0}$
e. $3\cdot\big(\vec{u} - 2\cdot\vec{v}\big) = \vec{0}$ f. $-2\cdot\big(\vec{u}+\vec{v}\big) = 2\cdot\vec{u} + 3\cdot\vec{v}$

2. Pour chaque question, citer les couples de vecteurs colinéaires et le coefficient associé de colinéarité de $\vec{u}$ par rapport à $\vec{v}$:

a. $\vec{u}\,(-1\,;2)$; $\vec{v}\,(4\,;-8)$
b. $\vec{u}\,(3\,;2)$; $\vec{v}\,(9\,;4)$
c. $\vec{u}\,(2\,;3)$; $\vec{v}\,(4{,}2\,;6{,}3)$
d. $\vec{u}\,(0{,}7\,;4{,}1)$; $\vec{v}\,(-2{,}8\,;16{,}4)$

Correction 507

1. a. $2\cdot\vec{u} = 3\cdot\vec{v}$
$\vec{u} = \frac{3}{2}\cdot\vec{v}$
Le coefficient de colinéarité de $\vec{u}$ par rapport à $\vec{v}$ est $\frac{3}{2}$.

b. $\vec{u}+\vec{v} = 0$
$\vec{u} = -\vec{v}$
Le coefficient de colinéarité de $\vec{u}$ par rapport à $\vec{v}$ est -1.

c. $\frac{1}{2}\cdot\vec{u} = \frac{3}{4}\cdot\vec{v}$
$\vec{u} = 2\times\frac{3}{4}\cdot\vec{v}$
$\vec{u} = \frac{3}{2}\cdot\vec{v}$
Le coefficient de colinéarité de $\vec{u}$ par rapport à $\vec{v}$ est $\frac{3}{2}$.

d. $3\cdot\vec{u} - 2\cdot\vec{v} = \vec{0}$
$3\cdot\vec{u} = 2\cdot\vec{v}$
$\vec{u} = \frac{2}{3}\cdot\vec{v}$
Le coefficient de colinéarité de $\vec{u}$ par rapport à $\vec{v}$ est $\frac{2}{3}$.

e. $3\cdot\big(\vec{u} - 2\cdot\vec{v}\big) = \vec{0}$
$\vec{u} - 2\cdot\vec{v} = \vec{0}$
$\vec{u} = 2\cdot\vec{v}$
Le coefficient de colinéarité de $\vec{u}$ par rapport à $\vec{v}$ est 2.

f. $-2\cdot\big(\vec{u}+\vec{v}\big) = 2\cdot\vec{u} + 3\cdot\vec{v}$
$-2\cdot\vec{u} - 2\cdot\vec{v} = 2\cdot\vec{u} + 3\cdot\vec{v}$
$-2\cdot\vec{u} - 2\cdot\vec{u} = 3\cdot\vec{v} + 2\cdot\vec{v}$
$-4\cdot\vec{u} = 5\cdot\vec{v}$
$\vec{u} = \frac{5}{-4}\cdot\vec{v}$
$\vec{u} = -\frac{5}{4}\cdot\vec{v}$
Le coefficient de colinéarité de $\vec{u}$ par rapport à $\vec{v}$ est $-\frac{5}{4}$.

2. a. Les vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires car ils vérifient la relation :
$\vec{u} = -\frac{1}{4}\cdot\vec{v}$
Le coefficient de colinéarité du vecteur $\vec{u}$ par rapport

à $\overrightarrow{v}$ est -4.

b. Les vecteur $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires.

c. Les vecteur $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires car ils vérifient la relation :
$\overrightarrow{u} = \dfrac{1}{2{,}1}\cdot\overrightarrow{v}$

Le coefficient de colinéarité du vecteur $\overrightarrow{u}$ par rapport à $\overrightarrow{v}$ est $\dfrac{1}{2{,}1}$.

d. Les vecteur $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires.

Exercice 522

On munit le plan d'un repère $(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\,)$:

1. Montrer que les points suivants sont alignés :
$A(0\,;-1)$; $B\,(2\,;0)$; $C(-2\,;-2)$

2. Déterminer si les points suivants sont alignés :
$K(3\,;-4)$; $L(2\,;-2)$; $M\,(-1\,;3)$

3. On considère les points ci-dessous :
$O\,(3\,;2)$; $P\,(4\,;5)$; $Q(1\,;-202)$; $R\,(101\,;98)$
Déterminer si les droites (OP) et (QR) sont parallèles.

Correction 522

1. On a les coordonnées suivantes de vecteurs :
   - $\overrightarrow{AB}\,(x_B-x_A\,;y_B-y_A)$
   $=\big(2-0\,;0-(-1)\big)=(2\,;1)$
   - $\overrightarrow{AC}\,(x_C-x_A\,;y_C-y_A)$
   $=\big(-2-0\,;\,-2-(-1)\big)=(-2\,;-1)$

   On a l'égalité suivante : $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AC}$.
   On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires ; ainsi, les droites (AB) et (AC) sont parallèles.

   Si deux droites sont parallèles et ont un point en commun alors ces deux droites sont confondus.
   Les droites (AB) et (AC) sont confondues : les points A, B et C sont alignés.

2. On a les coordonnées suivantes de vecteurs :
   - $\overrightarrow{KL}\,(x_L-x_K\,;y_L-y_K)$
   $=\big(2-3\,;-2-(-4)\big)=(-1\,;2)$
   - $\overrightarrow{KM}\,(x_M-x_K\,;y_M-y_K)$
   $=\big(-1-3\,;3-(-4)\big)=(-4\,;7)$

   Il n'existe pas de réels k vérifiant l'égalité :
   $\overrightarrow{KM}=k\cdot\overrightarrow{KL}$
   Les vecteurs $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{KM}$ ne sont pas colinéaires : les points K, L et M ne sont pas alignés.

3. On a les coordonnées suivantes de vecteurs :
   - $\overrightarrow{OP}\,(x_P-x_O\,;y_P-y_O)=(4-3\,;5-2)=(1\,;3)$
   - $\overrightarrow{QR}\,(x_R-y_Q\,;y_R-y_Q)=\big(101-1\,;98-(-202)\big)$
   $=(100\,;300)$

   On a l'égalité suivante : $\overrightarrow{QR}=100\cdot\overrightarrow{OP}$

   Les deux vecteurs $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{QR}$ sont colinéaire : les droites (OP) et (QR) sont parallèles.

Exercice 527

Dans un un repere $\big(O;\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\big)$, on considère les points :

$A\,(3\,;-5)$; $B\,(-2\,;0)$; $C\,(147\,;\,-13)$; $D\,(-53\,;187)$

Etablir que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Correction 527

Voici les coordonnées des vecteurs suivants :

- $\overrightarrow{AB}\,(x_B-x_A\,;y_B-y_A)$
$=\big(-2-3\,;0-(-5)\big)=(-5\,;5)$
- $\overrightarrow{CD}\,(x_D-x_C\,;y_D-y_C)$
$=\big(-53-147\,;187-(-13)\big)=(-200\,;200)$

A la vue des coordonnées de ces deux vecteurs, on a la relation :
$\overrightarrow{CD}=40\cdot\overrightarrow{AB}$
Ainsi, les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

On en déduit que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Exercice 1107

On munit le plan d'un repère $\big(O\,;I\,;J\big)$ orthonormal.

1. On considère les points :
$A\,(5\,;3)$; $B\,(17\,;6)$; $C\,(-3\,;1)$
Montrer que les points A, B et C sont alignés.

2. On considère les points :
$D(5\,;-2)$; $E(-3\,;10)$; $F(-3\,;-2)$; $G(3\,;-11)$
Montrer que les droites (DE) et (FG) sont parallèles.

Correction 1107

1. On a les coordonnées de vecteurs suivants :
   - $\overrightarrow{AB}\,(x_B-x_A\,;y_B-y_A)$
   $=(17-5\,;6-3)=(12\,;3)$
   - $\overrightarrow{AC}\,(x_C-x_A\,;y_C-y_A)$
   $=(-3-5\,;1-3)=(-8\,;-2)$

   En remarquant l'égalité : $\overrightarrow{AB}=-\dfrac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AC}$.

   On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

   Ainsi, les deux droites (AB) et (AC) sont parallèles et possèdent A comme point commun : on en déduit que ces deux droites sont confondues.
   Les points A, B, C appartenant à une même droite : ils sont alignés.

2. On a les coordonnées de vecteurs :

- $\overrightarrow{DE}\,(x_E - x_D\,;y_E - y_D)$
$= \big(-3-5\,;10-(-2)\big) = (-8\,;12)$
- $\overrightarrow{FG}\,(x_G - x_F\,;y_G - y_F)$
$= \big(3-(-3)\,;-11-(-2)\big) = (6\,;-9)$

A l'aide des coordonnées de ces vecteurs, on remarque l'égalité vectorielle suivante :

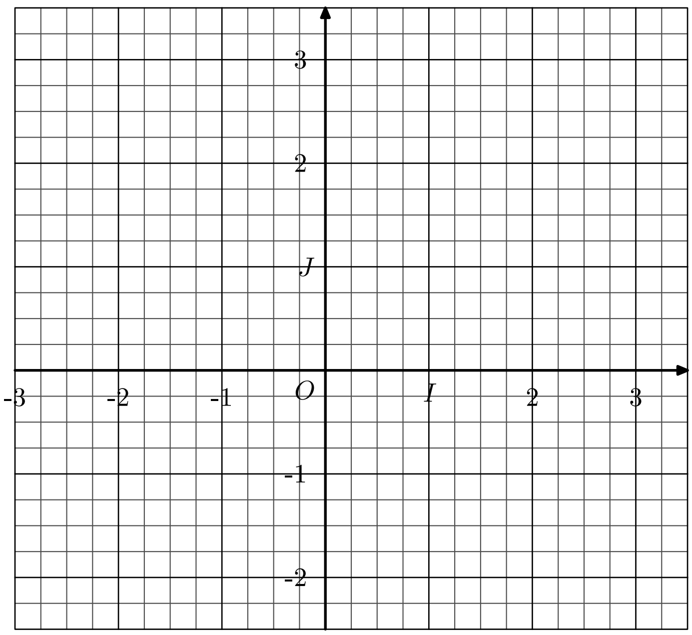
$\overrightarrow{DE} = -\dfrac{4}{3}\cdot\overrightarrow{FG}$

Cette égalité signifie que ces deux vecteurs sont colinéaires : on en déduit que les droites (DE) et (FG) sont colinéaires.

9. Droites affines et vecteurs directeurs :

Exercice 475

On munit le plan d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormal :



1. On considère la droite (d) passant par les deux points :
$A\,(-1\,;-2)$; $B\,(3\,;3)$

a. Tracer la droite (d).

b. Déterminez le coefficient directeur de la droite (d).

c. On note a le coefficient directeur de la droite (d). Tracer un représentant du vecteur $\vec{u}\,(1\,;a)$

d. Que remarque-t-on ?

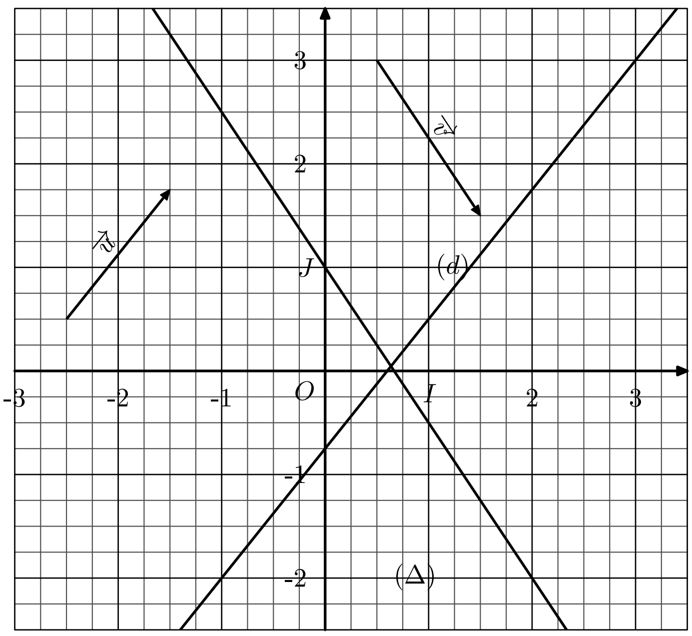
2. On considère la droite (Δ) dont l'équation réduite est :
(Δ) : $y = -\dfrac{3}{2}\cdot x + 1$

a. En déterminant les coordonnées de deux points C et D quelconque de (Δ), tracer la droite (Δ).

b. Tracer un représentant du vecteur $\vec{v}\left(1\,;-\dfrac{3}{2}\right)$

c. Etablir que les vecteur $\vec{v}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires ?

Correction 475



1. b. Le coefficient de la droite (d) a pour valeur :

$a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{3-(-2)}{3-(-1)} = \dfrac{5}{4}$

d. On remarque que le vecteur $\vec{u}$ a même direction que la droite (d). Autrement dit, les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont deux vecteurs colinéaires.

2. a. Mon choix des deux points de la droite (Δ) s'est porté sur :
$C\,(0\,;1)$; $D\,(2\,;-2)$

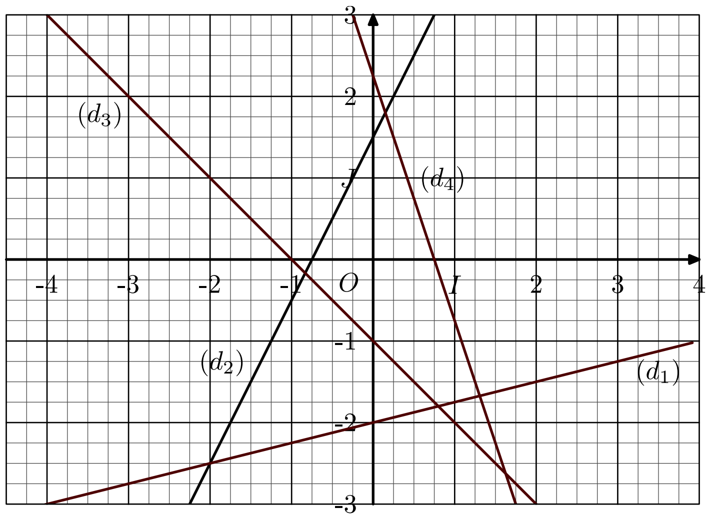
c. Le vecteur $\overrightarrow{CD}$ a pour coordonnées :

$\overrightarrow{CD}\,(x_D - x_C\,;y_D - y_C)$
$= \big(2-0\,;-2-1\big) = (2\,;-3)$

On montre facilement que les vecteurs $\vec{v}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires avec pour coefficient de colinéarité de $\overrightarrow{CD}$ par rapport à $\vec{v}$ égal à 2.

Exercice 477

Dans le plan muni du repère $(O\,;I\,;J)$, on considère les quatres droites ci-dessous :



1. a. On considère A et B deux points quelconques de la droite (d_1). Déterminer le coefficient directeur de la droite (d_1).

   b. Parmi les vecteurs suivants, citer le vecteur ayant même direction que la droite (d_1) :
   $$\vec{u}\,(1\,;4) \quad ; \quad \vec{v}\left(1\,;-\frac{1}{2}\right) \quad ; \quad \vec{w}\left(1\,;\frac{1}{4}\right)$$
   $$\vec{r}\left(1\,;-\frac{1}{4}\right) \quad ; \quad \vec{s}\left(1\,;\frac{1}{2}\right)$$

2. Pour chacune des droites (d_2), (d_3), (d_4), donner, sans justification, le vecteur de même direction que la droite et ayant 1 pour valeur de son abscisse.

Correction 477

1. a. Prenons les deux points A et B de la droite (d_1) dont les coordonnées sont :
   $A(0\,;-2) \quad ; \quad B(4\,;-1)$
   Le coefficient directeur de la droite (d_1) est donnée par le calcul :
   $$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1-(-2)}{4-0} = \frac{1}{4}$$

   b. Le vecteur ayant même direction que la droite (d_1) est le vecteur $\vec{w}\left(1\,;\frac{1}{4}\right)$.

2.
   - La droite (d_2) a même direction que le vecteur de coordonnées $(1\,;2)$;
   - La droite (d_3) a même direction que le vecteur de coordonnées $(1\,;-1)$;
   - La droite (d_4) a même direction que le vecteur de coordonnées $(1\,;-3)$.

10. Repérage et vecteur : géométrie analytique :

Exercice 964

Dans un repère orthonormal $(O\,;I\,;J)$ d'unité le centimètre, placer les points suivants :

$A\,(6\,;5) \quad ; \quad B\,(2\,;-3) \quad ; \quad C\,(-4\,;0)$

1. Montrer que : $AB = 4\sqrt{5}$.

On donne les informations supplémentaires :
$AC = \sqrt{125} \quad ; \quad BC = \sqrt{45}$.

2. En déduire la nature du triangle ABC. Justifier la réponse.
3. Calculer l'aire du triangle ABC en cm^2.
4. On considère le cercle circonscrit au triangle ABC.
   a. Préciser la position de son centre appelé K et la longueur de son rayon. Justifier. Placer K.
   b. Calculer les coordonnées de K.
5. a. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$.
   b. En déduire les coordonnées du point D tel que $ACBD$ soit un parallélogramme.
   c. Placer le point D.

Correction 964

1. $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
   $= \sqrt{(2-6)^2 + (-3-5)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80}$
   $= \sqrt{16\times 5} = 4\sqrt{5}$

2. On a les carrés des longueurs :
   $AC^2 = 125 \quad ; \quad AB^2 = 80 \quad ; \quad BC^2 = 45$

   On remarque l'égalité suivante : $AC^2 = AB^2 + BC^2$.
   Si un triangle vérifie l'égalité de Pythagore, alors ce triangle est un triangle rectangle.
   On en déduit que le triangle ABC est rectangle en B.

3. $$\mathscr{A}_{ABC} = \frac{AB\times BC}{2} = \frac{\sqrt{80}\times\sqrt{45}}{2} = \frac{4\sqrt{5}\times 3\sqrt{5}}{2}$$
   $$= \frac{12\times 5}{2} = 30\,cm^2$$

4. a. Le triangle ABC étant rectangle en B.
   Si un triangle est rectangle alors le centre du cercle circonscrit est le milieu de l'hypothénuse.
   Le point K est le milieu du segment $[AC]$.

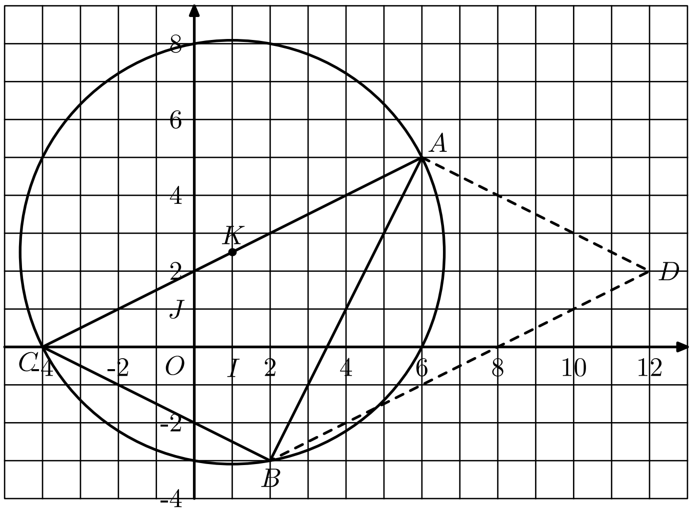
   b. $$K\left(\frac{x_A+x_C}{2}\,;\frac{y_A+y_C}{2}\right) = \left(\frac{6+(-4)}{2}\,;\frac{5+0}{2}\right)$$
   $= (1\,;2{,}5)$

5. a. $\overrightarrow{AC}\,(x_C - x_A\,;y_C - y_A)$
   $= (-4-6\,;0-5) = (-10\,;-5)$

   b. Le vecteur $\overrightarrow{DB}$ a pour coordonnées :
   $\overrightarrow{DB}\,(x_B - x_D\,;y_B - y_D) = (2 - x_D\,;-3 - y_D)$
   Le parallélogramme $ACBD$ étant un parallélogramme, on a l'égalité vectorielle suivante :
   $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$
   Deux vecteurs égaux ayant les mêmes coordonnées, de l'égalité de leur abscisse et de leur ordonnée, on en déduit les deux relations suivants :

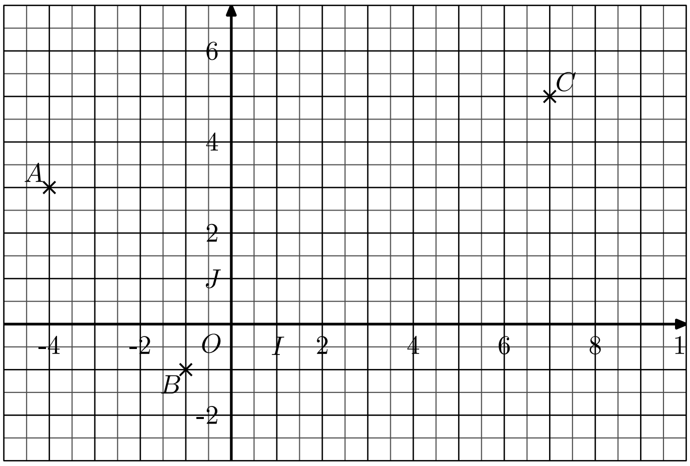
$$\begin{array}{rl|rl} 2-x_D &= -10 & -3-y_D &= -5 \\ -x_D &= -10-2 & -y_D &= -5+3 \\ -x_D &= -12 & -y_D &= -2 \\ x_D &= 12 & y_D &= 2 \end{array}$$

Le point D a pour coordonnées $(12\,;2)$



Exercice 940

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O\,;I\,;J)$.



On considère les coordonnées des points suivants :

$A(-4\,;3)$; $B(-1\,;-1)$; $C(7\,;5)$

1. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$, puis calculer la longueur du segment $[AB]$.

Pour la suite du problème, on admettra que :

$BC=10$; $AC=5\sqrt{5}$

2. Démontrer que le triangle ABC est rectangle.
3. Calculer les coordonnées du milieu M de $[AC]$ et placer le point M sur la figure ci-dessus.
4. Démontrer que $MB=MC$.
5. Soit N l'image du point M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
   a. Quelle relation vectorielle vérifie le point N ?
   b. En déduire, par le calcul, les coordonnées du point N.
   c. Placer le point N dans le repère.
6. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$ et $\overrightarrow{MC}$ sont égaux.
7. Démontrer que le quadrilatère $BMCN$ est un losange.
8. Démontrer que le triangle ABC et le losange $BMCN$ ont la même aire.

Correction 940

1. $\overrightarrow{AB}\,(x_B-x_A\,;y_B-y_A)$

$= \big(-1-(-4)\,;-1-3\big) = (-3\,;-4)$

$AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

$= \sqrt{(-3)^2+(-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

2. On a les carrés de longeur :

$AC^2=125$; $BC^2=100$; $AB^2=5$

On remarque l'égalité suivante :

$AC^2=BC^2+AB^2$

Si un triangle vérifie la propriété de Pythagore, alors ce triangle est rectangle.

Le triangle ABC est rectangle en B.

3. Soit M milieu de $[AC]$. Les coordonnées de M sont données par la formule :

$$M\left(\frac{x_A+x_C}{2}\,;\frac{y_A+y_C}{2}\right) = \left(\frac{-4+7}{2}\,;\frac{3+5}{2}\right) = (1{,}5\,;4)$$

4. Le triangle ABC est rectangle en B et $[BM]$ médiane issue de B. Si un triangle est rectangle Alors la médiane issue de l'angle droit mesure la moitié de l'hypothénuse.

$$BM = \frac{AC}{2} = BA = BC$$

5. a. N étant le translaté de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, on a la relation suivante :

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MN}$

b. On a les coordonnées de vecteurs :

$\overrightarrow{AB}\,(-3\,;-4)$; $\overrightarrow{MN}\,(x_N-1{,}5\,;y_N-4)$

De l'égalité de ces deux vecteurs, on obtient deux égalités en identifiant leur abscisse et leur ordonnée :

$$\begin{array}{rl|rl} x_N-1{,}5 &= -3 & y_N-4 &= -4 \\ x_N &= -3+1{,}5 & y_N &= -4+4 \\ x_N &= -1{,}5 & y_N &= 0 \end{array}$$

Le point N a pour coordonnées $(-1{,}5\,;0)$.

6.
- M étant le milieu du segment $[AC]$, on a la relation vectorielle :

  $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MC}$

- De l'égalité vectorielle $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}$, on en déduit que le quadrilatère $MNBA$ est un parallélogramme.

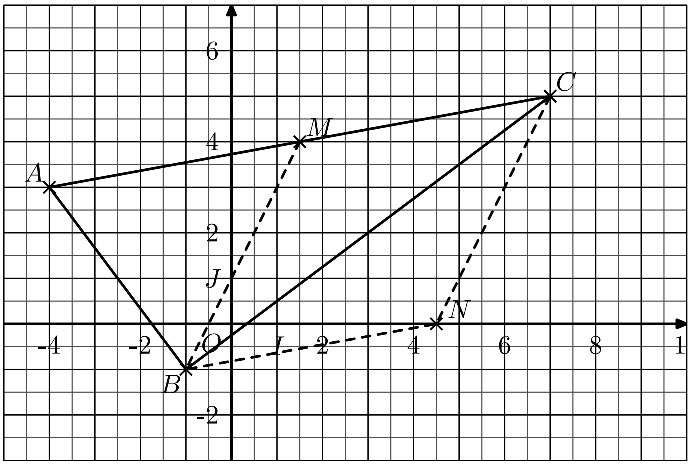
  $MNBA$ étant un parallélogramme, on en déduit l'égalité vectorielle :

  $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{AM}$

7. Des égalités établies précédemment, on en déduit l'égalité :
$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{MC}$.
On en déduit que le quadrilatère $BNCM$ est un parallélogramme.

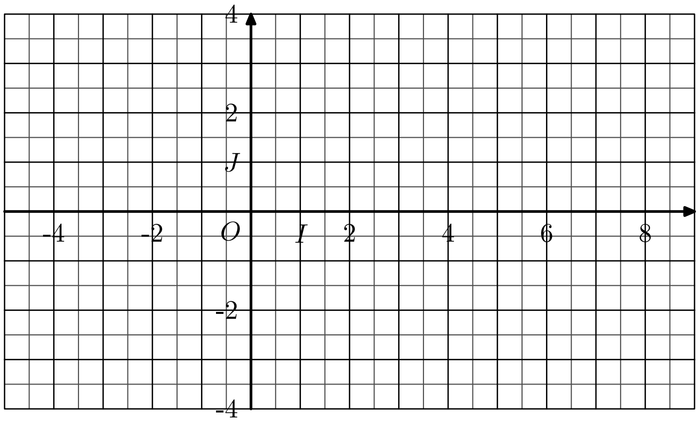
D'après la question 4., on a : $MB = MC$.
Si un parallélogramme a deux de ses côtés consécutifs de même longueur alors ce parallélogramme est un losange.
$BNCM$ est un losange.

8. • L'aire du triangle ABC :
$\mathscr{A}_{ABC} = \dfrac{AB\times BC}{2} = \dfrac{5\times 10}{2} = 25$
• L'aire du losange :
$\mathscr{A}_{BMCN} = \dfrac{MN\times BC}{2} = \dfrac{AB\times BC}{2} = \dfrac{5\times 10}{2} = 25$



Exercice 963

On considère muni d'un repère orthonormal $(O\,;I\,;J)$ dont la représentation est donnée ci-dessous :



On considère les trois points suivants :
$A\,(-4\,;3)$; $B\,(3\,;2)$; $C\,(1\,;-2)$

Partie A

1. Placer les points A, B, C dans le repère $(O\,;I\,;J)$.

2. a. Calculer AB.

b. On admet que le calcul donne :
$AC = \sqrt{50}$; $BC = \sqrt{20}$.
Que peut-on en déduire pour le triangle ABC ?

3. Soit H le milieu du segment $[BC]$. Vérifier par le calcul que H a pour coordonnées $(2\,;0)$.

4. Justifier que la droite (AH) est une hauteur du triangle ABC.

5. a. Prouver que : $AH = 3\sqrt{5}$.

b. Calculer l'aire du triangle ABC

Partie B

1. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$.

2. Le point D est l'image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

a. Placer le point D.

b. Montrer par le calcul que D a pour coordonnées $(8\,;-3)$.

3. Quelle est la nature du quadrilatère $ACDB$? Justifier.

Correction 963

Partie A

2. a. $AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$
$= \sqrt{\big(3-(-4)\big)^2+(2-3)^2} = \sqrt{7^2+1^2}$
$= \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

b. Le triangle ABC est isocèle en A car :
$AB = AC = \sqrt{50}$.
Par contre, ce n'est pas un triangle rectangle puisque :
$\sqrt{50}^2 \neq \sqrt{50}^2 + \sqrt{20}^2$

3. Les coordonnées de H sont données par la formule :
$H\left(\dfrac{x_B+x_C}{2}\,;\dfrac{y_B+y_C}{2}\right) = \left(\dfrac{3+1}{2}\,;\dfrac{2+(-2)}{2}\right) = (2\,;0)$

4. $[AH]$ est la médiane du triangle ABC issue de A. Or le triangle est isocèle en A.
Dans un triangle isocèle, la médiane, la médiatrice, la bissectrice et la hauteur issues du sommet principal sont confondues.
$[AH]$ est aussi la hauteur du triangle ABC issue de A.

5. a. Le triangle ABC est rectangle en A et H est le milieu du segment $[BC]$: dans le triangle ABC, $[AH]$ est la médiane issue de A.
Dans un triangle isocèle, la hauteur, la médiane, la médiatrice et la bissectrice issue du sommet principal sont confondues.
$[AH]$ est la hauteur issue de A.
Le triangle AHC est rectangle en H.
D'après le théorème de Pythagore, on a :
$AH^2 + CH^2 = AC^2$
L'application numérique nous donne :

$$AH^2 + \left(\frac{\sqrt{20}}{2}\right)^2 = \sqrt{50}^2$$
$$AH^2 + \frac{20}{4} = 50$$
$$AH^2 = 50-5 = 45$$
$$AH = \sqrt{45}$$
$$AH = 3\sqrt{5}$$

b. $\mathscr{A}_{ABC} = \dfrac{AH\times BC}{2} = \dfrac{3\sqrt{5}\times\sqrt{20}}{2} = \dfrac{3\sqrt{5}\times 2\sqrt{5}}{2}$
$= \dfrac{6\times\sqrt{5}^2}{2} = 15\,cm^2$

Partie B

1. $\overrightarrow{AC}\,(x_C - x_A\,;y_C - y_A) = \big(1-(-4)\,;-2-3\big)$
$= \big(5\,;-5\big)$

2. b. Le vecteur $\overrightarrow{BD}$ a pour coordonnées :
$\overrightarrow{BD}\,(x_D - x_B\,;y_D - y_B) = \big(x-3\,;y_D-2\big)$
Le point D étant l'image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$:
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$
De l'égalité précédente, on en déduit deux égalités respectivement sur les abscisses de ces deux vecteurs et également sur leur ordonnées :

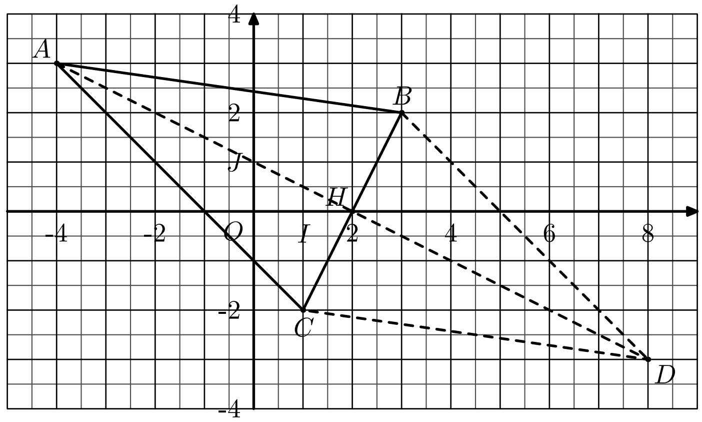
$x_D - 3 = 5$	$y_D - 2 = -5$
$x_D = 5+3$	$y_D = -5+2$
$x_D = 8$	$y_D = -3$

On en déduit que le point D a pour coordonnées $D\big(8\,;-3\big)$.

3. Le point D étant l'image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$, on en déduit l'égalité vectorielle :
$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$
De l'égalité précédente, on en déduit que le quadrilatère $ACDB$ est un parallélogramme.

De plus, le triangle ABC est un triangle isocèle en A *(d'après la question 2. b.)*. On en déduit l'égalité des longueurs :
$BA = AC$.

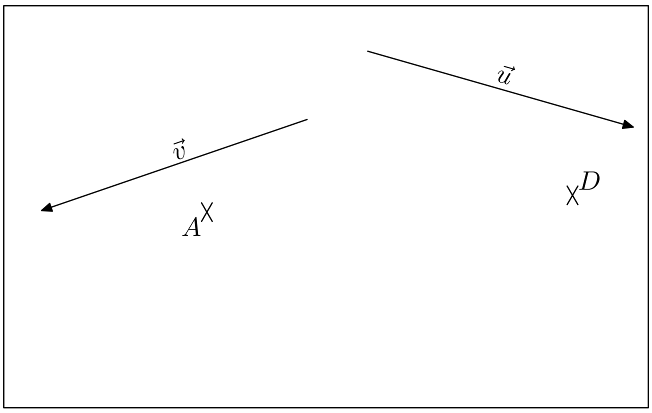
$ACDB$ est un parallélogramme et $BA = AC$.
Si un quadrilatère est un parallélogramme et si deux de ses côtés consécutifs sont de même longueur alors ce quadrilatère est un losange.
On en déduit que $ACDB$ est un losange.



11. Autour des vecteurs :

Exercice 2867

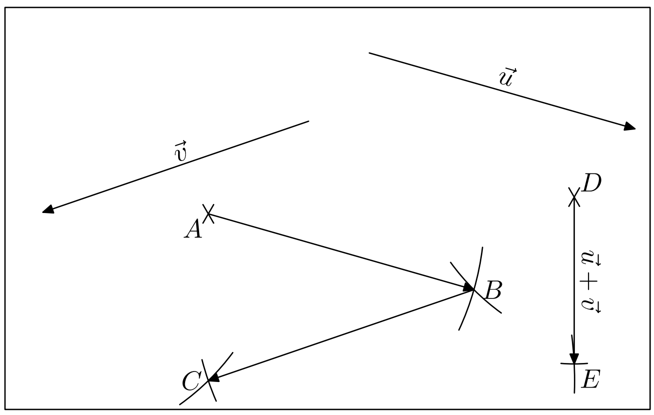
Dans le plan, on considère les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ainsi que les deux points A et D représentés ci-dessous :



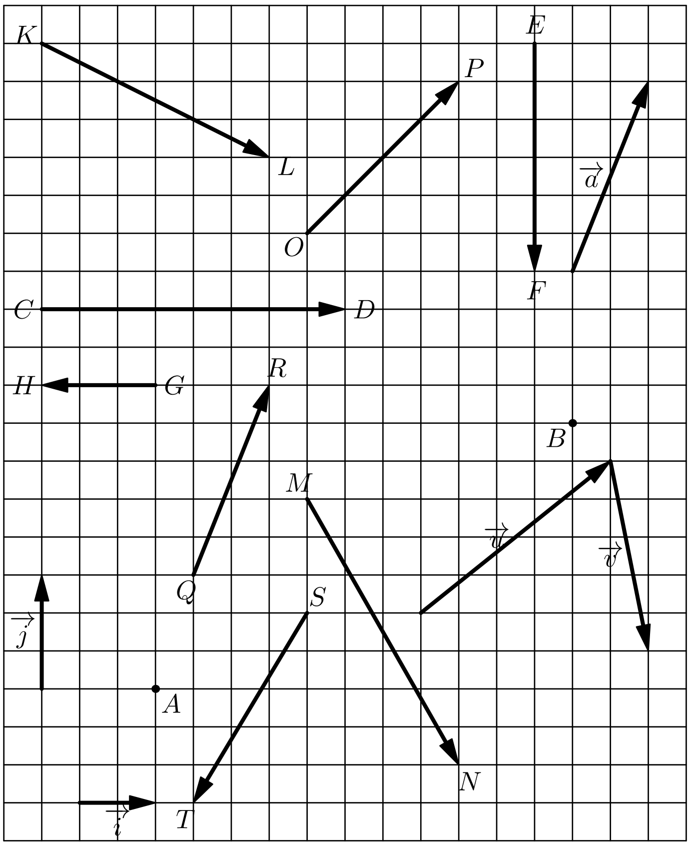
Toutes les constructions doivent être effectuées à la règle non-graduée et au compas.

1. a. Placer le point B translaté du point A par la translation de vecteur $\vec{u}$.
   b. Placer le point C qui est l'image du point B par la translation de vecteur $\vec{V}$
2. On considère le point E obtenu par l'image du point D par la composée de la translation de vecteur $\vec{u}$ et de la translation de vecteur $\vec{v}$.

Correction 2867



Exercice 490



1. Placer le point W tel que $\overrightarrow{AW} = -\vec{i} + 2\cdot\vec{j}$.
Placer le point Z tel que $\overrightarrow{BZ} = -2\,\vec{i} + \frac{5}{3}\cdot\vec{j}$

Les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont deux vecteurs de directions différentes. Pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan, il existe deux réels α et β réalisant l'égalité :
$\vec{u} = \alpha\cdot\vec{i} + \beta\cdot\vec{j}$
Cette décomposition est appelée "*combinaison linéaire*".

2. a. Déterminer la combinaison linéaire de chacun des vecteurs représentés dans le graphique en fonction des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

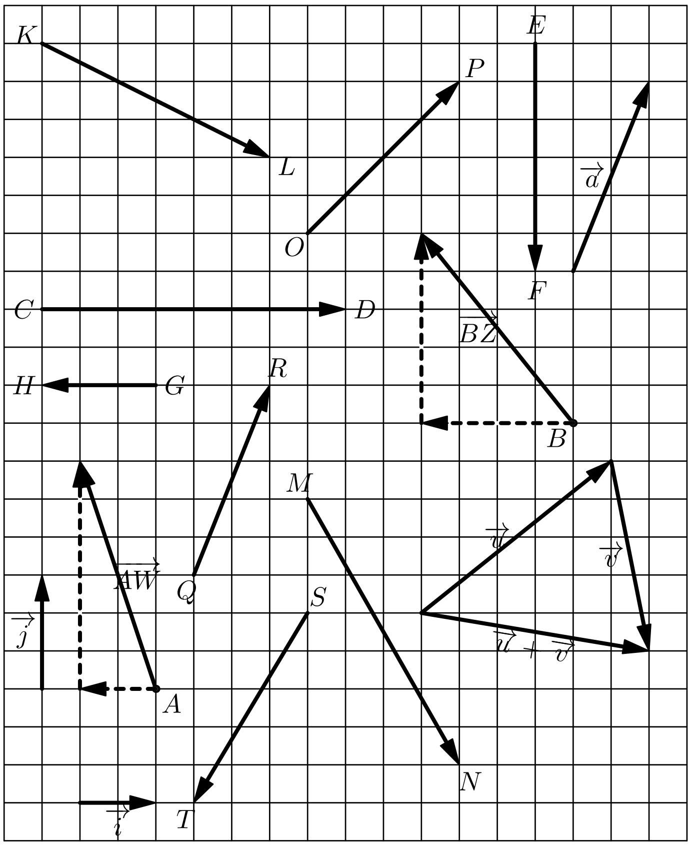
b. En déduire l'égalité des vecteurs $\overrightarrow{QR}$ et $\vec{a}$?

3. a. Tracer un représentant du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.

b. Graphiquement, exprimez le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ à l'aide des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

c. Retrouver cette décomposition à l'aide de celles des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ obtenues lors de la question 2..

Correction 490



2. a. On a les décompositions linéaires en fonction des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ suivant :

$\overrightarrow{CD} = 4\cdot\vec{i}$; $\overrightarrow{EF} = -2\cdot\vec{j}$

$\overrightarrow{GH} = -\frac{3}{2}\cdot\vec{i}$; $\overrightarrow{KL} = 3\cdot\vec{i} - \vec{j}$

$\overrightarrow{MN} = 2\cdot\vec{i} - \frac{7}{3}\cdot\vec{j}$; $\overrightarrow{OP} = 2\cdot\vec{i} + \frac{4}{3}\cdot\vec{j}$

$\overrightarrow{QR} = \vec{i} + \frac{5}{3}\cdot\vec{j}$; $\overrightarrow{ST} = \frac{3}{2}\cdot\vec{i} - \frac{5}{3}\cdot\vec{j}$

$\vec{a} = \vec{i} + \frac{5}{3}\cdot\vec{j}$; $\vec{u} = \frac{5}{2}\cdot\vec{i} + \frac{4}{3}\cdot\vec{j}$

$\vec{v} = \frac{1}{2}\cdot\vec{i} - \frac{5}{3}\cdot\vec{j}$

b. Les vecteurs $\overrightarrow{QR}$ et $\vec{a}$ possèdent la même combinaison linéaire en fonction des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$: ces deux vecteurs sont égaux.

3. b. Graphiquement, on a :
$\vec{u} + \vec{v} = 3\cdot\vec{i} - \frac{1}{3}\cdot\vec{j}$

c. A la question 2., on a obtenu :
$\vec{u} = \frac{5}{2}\cdot\vec{i} + \frac{4}{3}\cdot\vec{j}$; $\vec{v} = \frac{1}{2}\cdot\vec{i} - \frac{5}{3}\cdot\vec{j}$
On en déduit la valeur de la somme :

$$\begin{aligned}\vec{u} + \vec{v} &= \Big(\frac{5}{2}\cdot\vec{i} + \frac{4}{3}\cdot\vec{j}\Big) + \Big(\frac{1}{2}\cdot\vec{i} - \frac{5}{3}\cdot\vec{j}\Big)\\ &= \Big(\frac{5}{2}\cdot\vec{i} + \frac{1}{2}\cdot\vec{i}\Big) + \Big(\frac{4}{3}\cdot\vec{j} - \frac{5}{3}\cdot\vec{j}\Big)\\ &= \Big(\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\Big)\cdot\vec{i} + \Big(\frac{4}{3} - \frac{5}{3}\Big)\cdot\vec{j}\\ &= 3\cdot\vec{i} - \frac{1}{3}\cdot\vec{j}\end{aligned}$$

Exercice 935

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,I\,;\,J)$ dont l'unité graphique est le centimétre, on considère les points :

$A\,(-3\,;0) \quad ; \quad B\,(1\,;4) \quad ; \quad C\,(5\,;3) \quad ; \quad D\,(1\,;-1)$

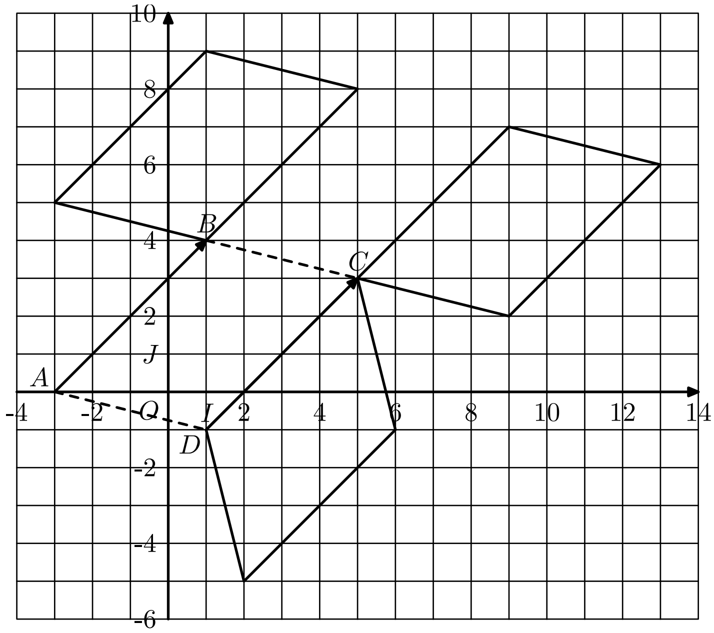
1. Construire ce repère et placer les points A, B, C et D.
2. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$.
3. Que peut-on en déduire quant à la nature du quadrilatère $ABCD$?
   Pour la suite, ce quadrilatère $ABCD$ est appelé figure **1.**
4. Construire la figure **2.** symétrique de la figure **1.** par rapport au point B.
5. Construire la figure **3.** symétrique de la figure **1.** par rapport à la droite (CD).
6. a. Construire la figure **4.** image de la figure **1.** par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

   b. Quelle autre transformation permet de passer de la figure **1.** à la figure **4.** .

Correction 935

2. $\overrightarrow{AB}\,(x_B - x_A\,; y_B - y_A)$
   $= \big(1-(-3)\,;4-0\big) = (4\,;4)$

   $\overrightarrow{DC}\,(x_C - x_D\,; y_C - y_D)$
   $= \big(5-1\,;3-(-1)\big) = (4\,;4)$
3. Puisque les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ ont les mêmes coordonnées, ceux sont deux vecteurs égaux.
   Puisque $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, on en déduit que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.
6. b. La figure **4.** a été construite par rapport à la figure **1.** à l'aide de la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$. Il est également possible d'obtenir la figure **4.** en effectuant la symétrie centrale de la figure **1.** par rapport au point C.



Exercice 936

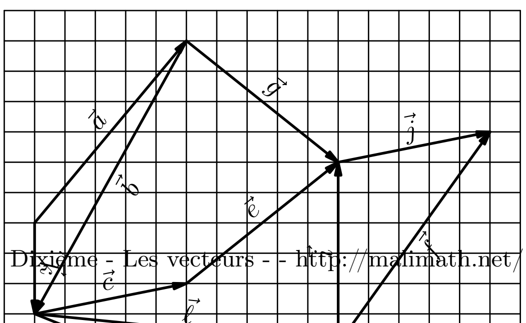
Pour chaque ligne du tableau suivant, trois réponses sont proposées, désignées par les numéros **1.**, **2.**, **3.**. Une seule est exacte.
Ecrire dans la colonne de droite le numéro correspondant à la bonne réponse.
Toutes les questions sont indépendantes.

	Réponse **1.**	Réponse **2.**	Réponse **3.**
A. Si $A(5;1)$ et $B(2;3)$, alors $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées :	$(3;-4)$	$(7;2)$	$(-3;2)$
B. Si $A(5;-1)$ et $B(2;3)$ dans un repère orthonormal, alors AB est égal à :	5	1	7
C. Si D est l'image de E par la translation de vecteur $\overrightarrow{MN}$, alors :	$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{DE}$	$\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{MN}$	$\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{NM}$
D. Si $RSTU$ est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{RS}+\overrightarrow{RU}$ est égal à :	$\overrightarrow{TR}$	$\overrightarrow{SU}$	$\overrightarrow{RT}$

Correction 936

1. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées :
   $\overrightarrow{AB}\,(x_B - x_A\,; y_B - yA)$
   $= (2-5\,;3-1) = (-3\,;2)$
2. La distance AB a pour mesure :
   $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
   $= \sqrt{(2-5)^2 + (3-(-1))^2} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2}$
   $= \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$
3. Si D est l'image de E par la translation de vecteur $\overrightarrow{MN}$ alors $\overrightarrow{ED}$ est un représentant du vecteur $\overrightarrow{MN}$:
   $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{MN}$.
4. Puisque $RSTU$ est un parallélogramme alors on a l'égalité :
   $\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{RU} = \overrightarrow{RT}$

Exercice 952



Compléter les pointillés des questions suivantes en choisissant un vecteur présent sur le graphique ci-dessus :

a. $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{\ldots}$ b. $\overrightarrow{d} + \overrightarrow{j} = \overrightarrow{\ldots}$

c. $\overrightarrow{c} + \overrightarrow{d} = \overrightarrow{\ldots}$ d. $\overrightarrow{\ldots} + \overrightarrow{i} = \overrightarrow{f}$

e. $\overrightarrow{\ell} + \overrightarrow{i} = \overrightarrow{\ldots} + \overrightarrow{e}$

Correction 952

a. $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{k}$ b. $\overrightarrow{d} + \overrightarrow{j} = \overrightarrow{\ell}$

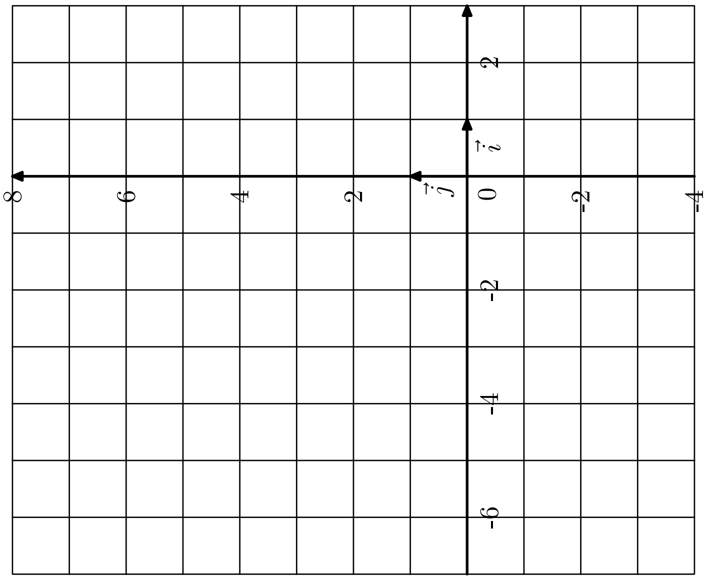
c. $\overrightarrow{c} + \overrightarrow{d} = \overrightarrow{\ell}$ d. $\overrightarrow{j} + \overrightarrow{i} = \overrightarrow{f}$

e. $\overrightarrow{\ell} + \overrightarrow{i} = \overrightarrow{c} + \overrightarrow{e}$

Exercice 514

On considère le plan muni d'un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\right)$ orthonormé et les trois points suivants :

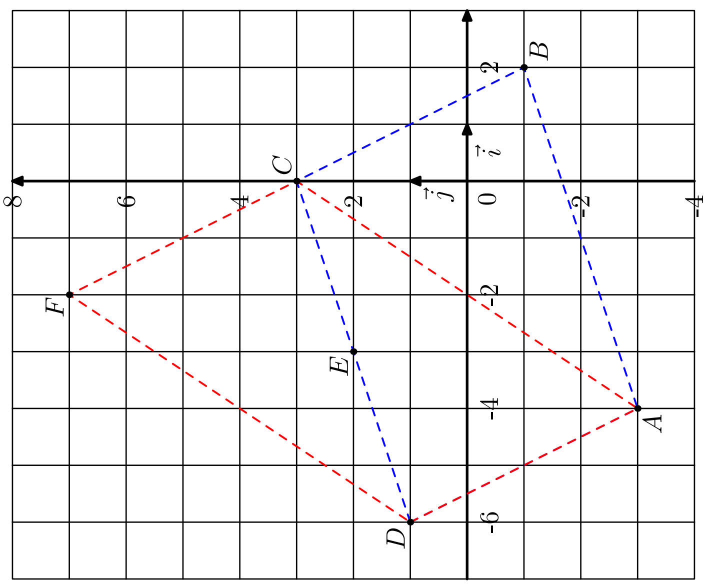
$A\left(-4\,;\,-3\right)$; $B\left(2\,;\,-1\right)$; $C\left(0\,;3\right)$



1. Placer les points A, B, C dans le repère ci-dessus.
2. Déterminer les coordonnées de D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
3. Soit E le milieu du segment $[CD]$. Calculer les coordonnées de E.
4. Soit F le symétrique de A par rapport à E. Déterminer les coordonnées de F.
5. Démontrer que $ADFC$ est un parallélogramme.
6. Montrer que C est le milieu $[BF]$.

Correction 514

1. Voici la représentation :



2. Pour que $ABCD$ soit un parallélogramme, il suffit d'avoir $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Ces deux vecteurs ont les coordonnées suivantes :
   - $\overrightarrow{AB}\,(x_B - x_A\,;y_B - y_A)$
     $= \big(2-(-4)\,;\,-1-(-3)\big) = (6\,;2)$
   - $\overrightarrow{DC}\,(x_C - x_D\,;y_C - y_D)$
     $= \big(-x_D\,;3-y_D\big)$

   Deux vecteurs sont égaux si et seulement si leurs coordonnées sont égales. On obtient les deux égalités :

   $$\begin{array}{r|r} -x_D = 6 & 3 - y_D = 2 \\ x_D = -6 & -y_D = -1 \\ & y_D = 1 \end{array}$$

   Le point D a pour coordonnées $D\left(-6\,;1\right)$

3. Les coordonnées du milieu du segment $[CD]$ s'obtient en utilisant la formule :
   $$E\left(\frac{x_C + x_D}{2}\,;\frac{y_C + y_D}{2}\right)$$
   $$= \left(\frac{0+(-6)}{2}\,;\frac{3+1}{2}\right) = (-3\,;2)$$

4. Si A a pour image le point F par la symétrie de centre E, on a la relation vectorielle suivante $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{FE}$. Deux vecteurs sont égaux si, et seulement, si ils ont même coordonnés :

   $$\begin{array}{r|r} x_E - x_A = x_F - x_E & y_E - y_A = y_F - y_E \\ -3-(-4) = x_F - (-3) & 2-(-3) = y_F - 2 \\ 1 = x_F + 3 & 5 = y_F - 2 \\ -2 = x_F & 7 = y_F \end{array}$$

   Ainsi, le point F a pour coordonnée $\left(-2\,;7\right)$.

5. Le point E est le milieu du segment $[CD]$ *(voir 3.)* et du segment $[AF]$ *(voir 4.)*. Le quadrilatère $ACFD$ a ses diagonales qui se coupent en leurs milieux : $ACFD$ est un parallélogramme.

   $ABCD$ est un parallélogramme $\Longrightarrow$ $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD}$
   $ADFC$ est un parallélogramme $\Longrightarrow$ $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{FC}$

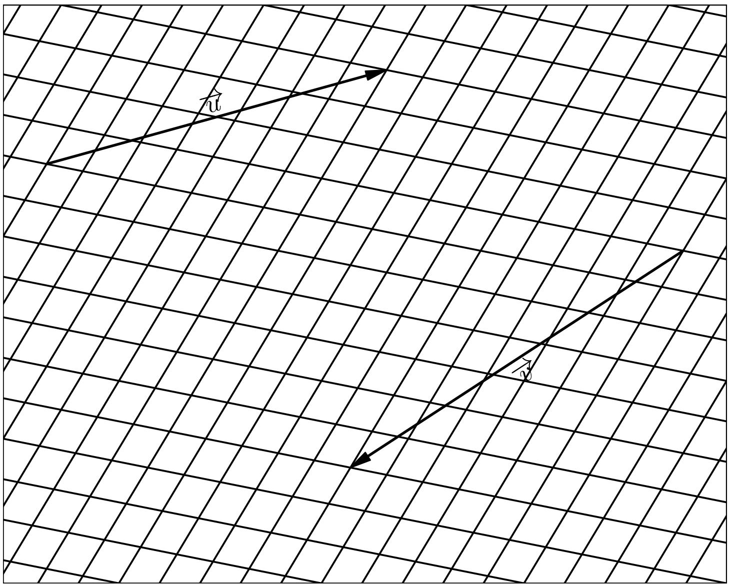
   Ainsi $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{CB}$: C est le milieu du segment $[BF]$.

12. Repères non-orthogonaux :

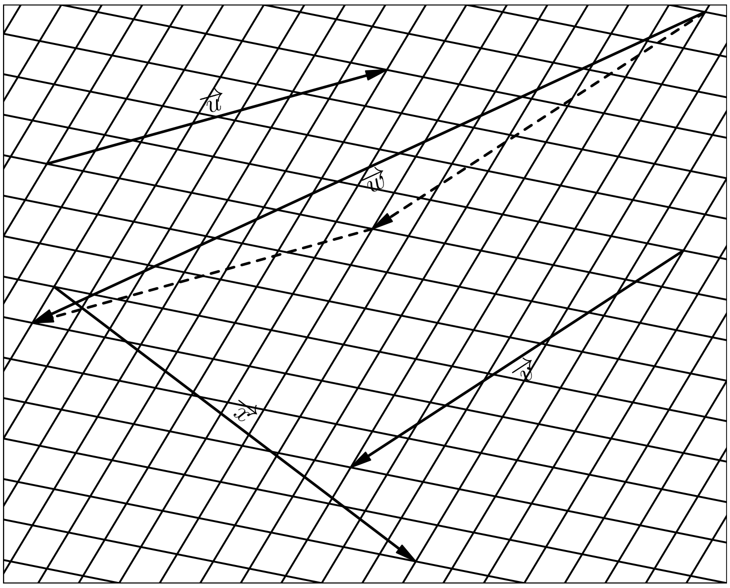
Exercice 2210

On considère le plan ci-dessous muni d'un quadrillage régulier. Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan :

1. Tracer un représentant $\overrightarrow{w}$ du vecteur $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}$.
2. Tracer un représentant $\overrightarrow{x}$ du vecteur $4\,\overrightarrow{u} + 3\,\overrightarrow{v}$.



Correction 2210



Une petite remarque :

Pour tracer le vecteur $\overrightarrow{w}$, il est possible de tracer des représentants des vecteurs $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}$.

Par contre, pour tracer un représentant du vecteur $4\,\overrightarrow{u} + 3\vec{v}$, il est nécessaire d'utiliser les "*coordonnées*" des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans ce quadrillage régulier mais non-orthogonal.

13. Un peu plus loin dans la géométrie analytique :

Exercice 504

Soit $\left(O\,;\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\right)$ un repère du plan. Montrer que les deux vecteurs définies ci-dessous sont colinéaires :

$$\overrightarrow{u} = \left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2\cdot\overrightarrow{i} + \left(1-\sqrt{10}\right)\cdot\overrightarrow{j}$$
$$\overrightarrow{v} = \left(5\sqrt{2}+4\sqrt{3}\right)\cdot\overrightarrow{i} + \left(\sqrt{2}-2\sqrt{5}\right)\cdot\overrightarrow{j}$$

Correction 504

On a la transformation suivante :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u} &= \left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2\cdot\overrightarrow{i} + \left(1-\sqrt{10}\right)\cdot\overrightarrow{j}\\ &= \left(2+2{\cdot}\sqrt{2}{\cdot}\sqrt{3}+3\right)\cdot\overrightarrow{i} + \left(1-\sqrt{10}\right)\cdot\overrightarrow{j}\\ &= \left(5+2{\cdot}\sqrt{6}\right)\cdot\overrightarrow{i} + \left(1-\sqrt{10}\right)\cdot\overrightarrow{j}\end{aligned}$$

On a l'égalité :

$$\begin{aligned}\sqrt{2}{\cdot}\overrightarrow{u} &= \sqrt{2}{\cdot}\Big[\left(5+2{\cdot}\sqrt{6}\right)\cdot\overrightarrow{i} + \left(1-\sqrt{10}\right)\cdot\overrightarrow{j}\,\Big]\\ &= \sqrt{2}{\cdot}\left(5+2{\cdot}\sqrt{6}\right)\cdot\overrightarrow{i} + \sqrt{2}{\cdot}\left(1-\sqrt{10}\right)\cdot\overrightarrow{j}\,)\\ &= \left(\sqrt{2}{\cdot}5+2{\cdot}\sqrt{2}{\cdot}\sqrt{6}\right)\cdot\overrightarrow{i} + \left(\sqrt{2}{\cdot}1-\sqrt{2}{\cdot}\sqrt{10}\right)\cdot\overrightarrow{j}\,)\\ &= \left(5{\cdot}\sqrt{2}+4{\cdot}\sqrt{3}\right)\cdot\overrightarrow{i} + \left(\sqrt{2}-2{\cdot}\sqrt{5}\right)\cdot\overrightarrow{j}\,)\\ &= \overrightarrow{v}\end{aligned}$$

On déduit des égalités précédentes que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires ; de plus, le coefficient de colinéarité de $\overrightarrow{v}$ par rapport à $\overrightarrow{v}$ est $\sqrt{2}$.

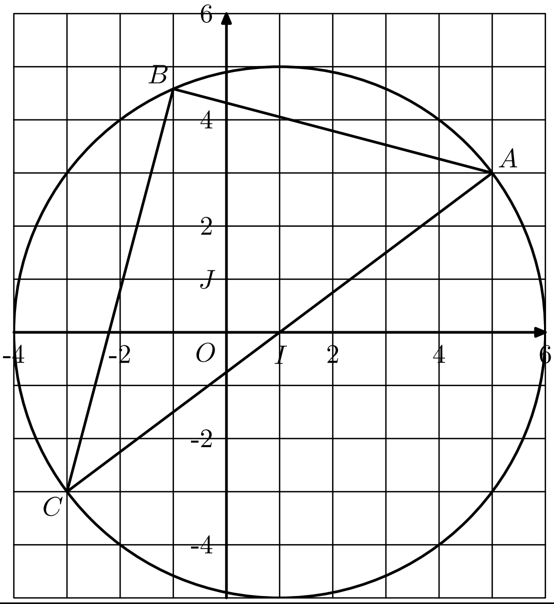
Exercice 939

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$.
L'unité de longueur est le cetimètre.

1. a. Placer le point $A\,(5\,;3)$.
   b. Par lecture graphique, donner les coordonnées de $\overrightarrow{IA}$
   c. En déduire la distance IA.
2. On considère le point $B\left(-1\,;\sqrt{21}\right)$.
   a. Prouver que A et B sont sur le cercle de centre I et de rayon 5.
   b. Tracer ce cercle et placer le point B.
3. a. Placer le point C, symétrique de A par rapport à I.
   b. Prouver que le triangle ABC est rectangle en B.

Correction 939

1. a.



b. Par lecture graphique, nous avons : $\overrightarrow{IA}\,(4\,;3)$

c. On a la formule :
$$IA = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

2. a. Le point A est à distance de $5\,cm$ du point I, il appartient donc au cercle de centre I et de rayon 5.
Regardons la distance séparant le point B au point I :
$$\begin{aligned} IB &= \sqrt{(x_I-x_B)^2+(y_I-y_B)^2} \\ &= \sqrt{\big[1-(-1)\big]^2+\big(0-\sqrt{21}\big)^2} \\ &= \sqrt{2^2+\big(\sqrt{21}\big)^2} = \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$
Le point B appartient également au cercle.

a. Le point C, symétrique de A par rapport à I est placé de sorte que I soit le milieu de $[AC]$.

b. $[AC]$ est un diamètre au cercle et B est un point.
Si, dans un cercle, un triangle a ses trois sommets formant un diamètre et un point du cercle Alors le triangle est rectangle en ce point.

Exercice 498

On considère le plan munit de la base $\big(i\,;j\big)$ de vecteurs.

1. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, définis ci-dessous, sont colinéaires :
$$\overrightarrow{u} = (1-2\sqrt{3})\cdot\overrightarrow{i} + (\sqrt{3}+\sqrt{2})\cdot\overrightarrow{j}$$
$$\overrightarrow{v} = (6-\sqrt{3})\cdot\overrightarrow{i} - (3+\sqrt{6})\cdot\overrightarrow{j}$$

2. Soit x et y deux nombres réels. Déterminer la valeur de x et de y de sorte que les vecteurs $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{t}$ soient colinéaires :
$$\overrightarrow{w} = (x+y\sqrt{2})\cdot\overrightarrow{i} + 4\cdot\overrightarrow{j}$$
$$\overrightarrow{t} = (2\sqrt{2}-1)\cdot\overrightarrow{i} - 2\cdot\overrightarrow{j}$$

Correction 498

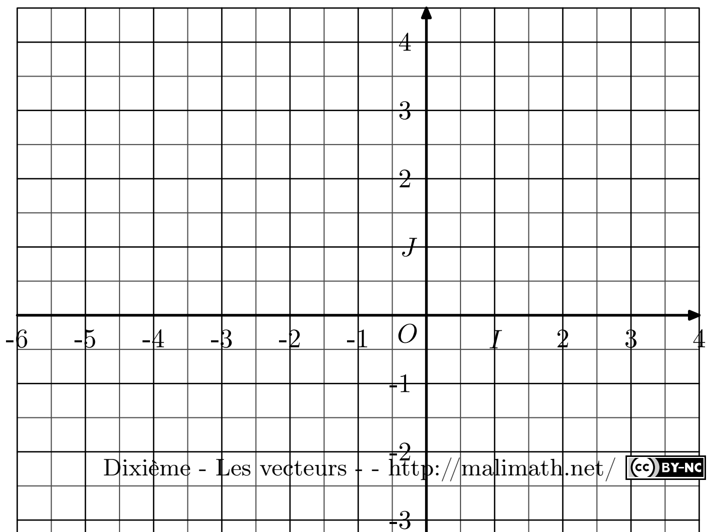
1. On a les égalités suivantes :
$$\begin{aligned} -\sqrt{3}\cdot\overrightarrow{u} &= -\sqrt{3}\cdot\big[(1-2\sqrt{3})\cdot\overrightarrow{i} + (\sqrt{3}+\sqrt{2})\cdot\overrightarrow{j}\big] \\ &= -\sqrt{3}\cdot(1-2\sqrt{3})\cdot\overrightarrow{i} - \sqrt{3}\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})\cdot\overrightarrow{j} \\ &= (-\sqrt{3}\cdot1+\sqrt{3}\cdot2\sqrt{3})\cdot\overrightarrow{i} - (\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{2})\cdot\overrightarrow{j} \\ &= (-\sqrt{3}+6)\cdot\overrightarrow{i} - (3+\sqrt{6})\cdot\overrightarrow{j} \\ &= (6-\sqrt{3})\cdot\overrightarrow{i} - (3+\sqrt{6})\cdot\overrightarrow{j} \\ &= \overrightarrow{v} \end{aligned}$$

On en déduit que les deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

2. En observant les coefficient du vecteur $\overrightarrow{j}$ dans la décomposition des deux vecteurs $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{t}$, on remarque que le coefficient de colinéarité du vecteur $\overrightarrow{w}$ par rapport au vecteur $\overrightarrow{t}$ vaut -2.
Ainsi, on peut écrire l'égalité suivante :
$$\begin{aligned} \overrightarrow{w} &= -2\cdot\overrightarrow{t} \\ (x+y\cdot\sqrt{2})\cdot\overrightarrow{i} + 4\cdot\overrightarrow{j} &= -2\cdot\big[(2\sqrt{2}-1)\cdot\overrightarrow{i} - 2\cdot\overrightarrow{j}\big] \\ (x+y\cdot\sqrt{2})\cdot\overrightarrow{i} + 4\cdot\overrightarrow{j} &= -2\cdot(2\sqrt{2}-1)\cdot\overrightarrow{i} + 2\cdot2\cdot\overrightarrow{j} \\ (x+y\cdot\sqrt{2})\cdot\overrightarrow{i} + 4\cdot\overrightarrow{j} &= -2\cdot(2\sqrt{2}-1)\cdot\overrightarrow{i} + 4\cdot\overrightarrow{j} \\ (x+y\cdot\sqrt{2})\cdot\overrightarrow{i} &= -2\cdot(2\sqrt{2}-1)\cdot\overrightarrow{i} \\ (x+y\cdot\sqrt{2})\cdot\overrightarrow{i} + 2\cdot(2\sqrt{2}-1)\cdot\overrightarrow{i} &= \overrightarrow{0} \\ (x+y\cdot\sqrt{2})\cdot\overrightarrow{i} + (4\sqrt{2}-2)\cdot\overrightarrow{i} &= \overrightarrow{0} \\ \big[(x-2)+(y+4)\cdot\sqrt{2}\big]\cdot\overrightarrow{i} &= \overrightarrow{0} \end{aligned}$$
Pour vérifier cette égalité, il faut vérifier l'égalité :
$$(x-2)+(y+4)\cdot\sqrt{2} = 0$$
Sachant que les nombres x et y sont des entiers, il est nécessaire d'avoir les deux égalités suivantes :
$$\begin{array}{r|r} x-2=0 & y+4=0 \\ x=2 & y=-4 \end{array}$$
Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{w}$ a pour expression :
$$\overrightarrow{w} = (2-4\sqrt{2})\cdot\overrightarrow{i} + 4\cdot\overrightarrow{j}$$

Exercice 2211

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,I\,;\,J)$:



1. Placer les trois points A, B, C dans le repère ci-dessous :

$A\,(3\,;\,-3)$; $B\,(-4\,;3)$; $C\,(-5\,;\,-1)$

2. Déterminer les coordonnées du milieu M du segment $[AB]$.

3. a. Déterminer les longueurs AB et MC

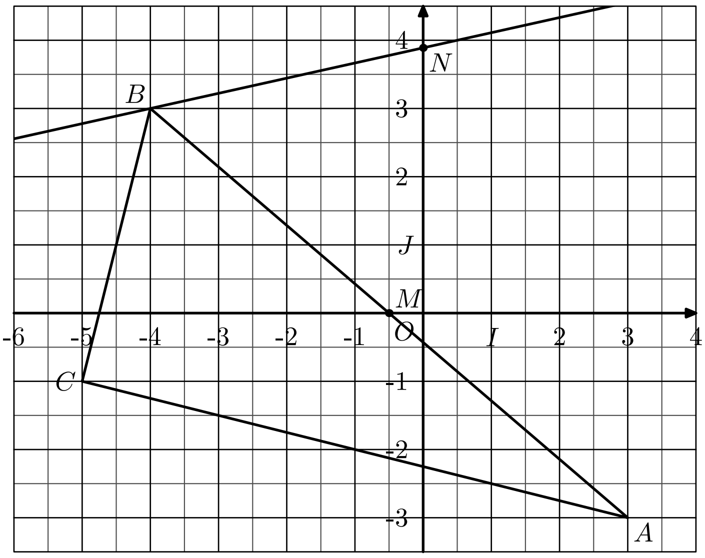
   b. Etablir que le triangle ABC est rectangle en C.

4. On note N le point d'intersection de l'axe des ordonnées avec la droite parallèle à (CM) passant par le point B.

   a. Placer le point N dans le repère.

   b. Déterminer les coordonnées du point N.

Correction 2211



2. Les coordonnées du M, milieu du segment $[AB]$, sont données par :

$$M\left(\frac{x_A+x_B}{2}\,;\frac{y_A+y_B}{2}\right)=\left(\frac{3+(-4)}{2}\,;\frac{-3+3}{2}\right)$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\,;0\right)$$

3. a. $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

$$=\sqrt{(-4-3)^2+\big(3-(-3)\big)^2}=\sqrt{(-7)^2+(6)^2}$$

$$=\sqrt{49+36}=\sqrt{85}$$

$MC=\sqrt{(x_M-x_C)^2+(y_M-y_C)^2}$

$$=\sqrt{\big(-0{,}5-(-5)\big)^2+\big(0-(-1)\big)^2}=\sqrt{4{,}5^2+1^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2+1}=\sqrt{\frac{81}{4}+1}=\sqrt{\frac{85}{4}}=\frac{\sqrt{85}}{2}$$

b. $[CM]$ est la médiane du triangle ABC relative au côté $[BA]$ et mesure la moitié de la base associée :

$CM=\dfrac{1}{2}\cdot AB$

Si, dans un triangle, la médiane issue d'un sommet mesure la moitié du côté opposé alors ce triangle est rectangle et ce côté est son hypothénuse.
Le triangle ABC est rectangle en C.

4. b. Le point N étant sur l'axe des ordonnées, il existe un réel β afin que ses coordonnées sont :

$N\,(0\,;\beta)$

On a les coordonnées des vecteurs suivants :

- $\overrightarrow{BN}\,(x_N-x_B\,;y_N-y_B)$
  $=\big(0-(-4)\,;\beta-3\big)=(4\,;\beta-3)$
- $\overrightarrow{CM}\,(x_M-x_C\,;y_M-y_C)$
  $=\big(-0{,}5-(-5)\,;0-(-1)\big)=(4{,}5\,;1)$

Par définition du point N, les droites (BN) et (CM) sont parallèles. On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{BN}$ et $\overrightarrow{CM}$ colinéaires.
Ainsi, on a l'existence d'un réel k vérifiant la relation :

$\overrightarrow{CM}=k\cdot\overrightarrow{BN}$

Cette égalité entraîne l'égalité sur les coordonnées. Ainsi, on obtient une égalité sur les abscisses et sur les ordonnées :

- Sur les abscisses :
  $4{,}5=k\cdot 4$
  $k=\dfrac{4{,}5}{4}=\dfrac{9}{8}$
- Sur les ordonnées :
  $1=k\cdot(\beta-3)$
  $1=\dfrac{9}{8}\cdot(\beta-3)$
  $8=9\cdot(\beta-3)$
  $8=9\cdot\beta-27$
  $9\cdot\beta=8+27$
  $9\cdot\beta=35$
  $\beta=\dfrac{35}{9}$

Ainsi, le point N a pour coordonnées $N\left(0\,;\dfrac{35}{9}\right)$

Exercice 930

1. Dans un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$ dont l'unité est le centimètre, placer les trois points suivants :

$A\,(6\,;0)$; $L\,(0\,;8)$; $K\,(4\,;10)$

2. Calculer la longueur AL.

3. On donne : $AK=\sqrt{104}$ et $LK=\sqrt{20}$.
Démontrer que le triangle AKL n'est pas rectangle en L.

4. a. Construire le point L', symétrique de L par rapport à la hauteur issue de A du triangle AKL.

   b. En déduire la longueur AL'.

   c. Déterminer approximativement *(par lecture graphique)* les coordonnés de L'.

5. On admet que, si x est l'abscisse d'un point M de la droite (LK) alors l'ordonnée de M est $\dfrac{1}{2}x+8$:

   a. Etablir l'égalité ci-dessous :

   $AM^2=\dfrac{5}{4}x^2-4x+100$

   b. En déduire les valeurs de x pour lesquelles, on a $AM=10$.

c. Quelles sont alors les coordonnées exactes de L'.

Correction 930

2. La longueur AL s'obtient par la formule :

$$AL = \sqrt{(x_L - x_A)^2 + (y_L - y_A)^2}$$
$$= \sqrt{(0-6)^2 + (8-0)^2}$$
$$= \sqrt{(-6)^2 + 8^2}$$
$$= \sqrt{36+84}$$
$$= \sqrt{100} = 10$$

3. On a les carrées suivants de longueur :
$AL^2 = 100$; $AK^2 = 104$; $LK^2 = 20$

On remarque la relation :
$AK^2 \neq AL^2 + LK^2$
Si un triangle ne vérifie pas l'égalité de Pythagore alors ce triangle n'est pas un triangle rectangle.
Le triangle AKL n'est pas un triangle rectangle en L.

4. a. Notons (d) la hauteur du triangle AKL issue du sommet A. Par la symétrie axiale d'axe (d), on a :
- l'image de A est A ;
- l'image de L est L'.

Ainsi, l'image du segment $[AL]$ est le segment $[AL']$; ces deux segments étant symétriques, ils ont la même mesure :
$AL' = AL = 10$

b. Approximativement les coordonnées du point L' semblent valoir :
$L'(3{,}2\,;9{,}6)$

5. a. En notant x l'abscisse d'un point M de la droite (LK), les coordonnées du point M sont alors de la forme :
$M\left(x\,;\dfrac{1}{2}x+8\right)$

Le carré de la longueur AM a pour valeur :

$$AM^2 = (x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2$$
$$= (x-6)^2 + \left(\frac{1}{2}x + 8 - 0\right)^2$$
$$= x^2 - 12x + 36 + \frac{1}{4}x^2 + 8x + 64$$
$$= \frac{5}{4}x^2 - 4x + 100$$

b. Résolvons l'équation suivante :

$$AM = 10$$
$$AM^2 = 100$$
$$\frac{5}{4}x^2 - 4x + 100 = 100$$
$$\frac{5}{4}x^2 - 4x = 0$$
$$x\left(\frac{5}{4}x - 4\right) = 0$$

Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :

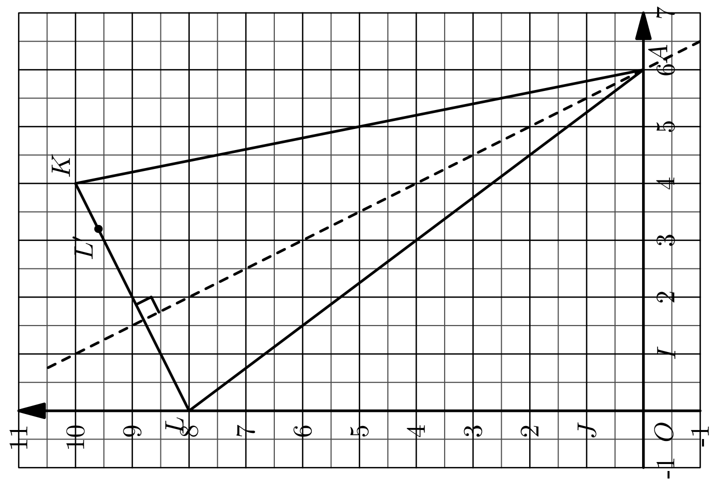
$x = 0$	$\frac{5}{4}x - 4 = 0$
	$\frac{5}{4}x = 4$
	$x = 4\times\frac{4}{5}$
	$x = \frac{16}{5}$

Les solutions de cette équation est :
$\left\{0\,;\dfrac{16}{5}\right\}$

c. La droite $d()$ est la hauteur issue de A dans le triangle AKL. On en déduit que :
$(LK) \perp (d)$.
Ainsi, le symétrique L' du point L par rapport à la droite (d) appartient à la droite (LK). Les coordonnées du point L' sont de la forme :
$\left(x\,;\dfrac{5}{4}x^2 - 4x + 100\right)$.
Les points associés à ces deux abscisses ont pour coordonnées :

- $\left(0\,;\dfrac{1}{2}\times 0 + 8\right) = (0\,;8)$
Ceux sont les coordonnées du point L
- $\left(\dfrac{16}{5}\,;\dfrac{1}{2}\times\dfrac{16}{5}+8\right) = \left(\dfrac{16}{5}\,;\dfrac{8}{5}+8\right)$
$= \left(\dfrac{16}{5}\,;\dfrac{8}{5}+\dfrac{40}{5}\right) = \left(\dfrac{16}{5}\,;\dfrac{48}{5}\right)$

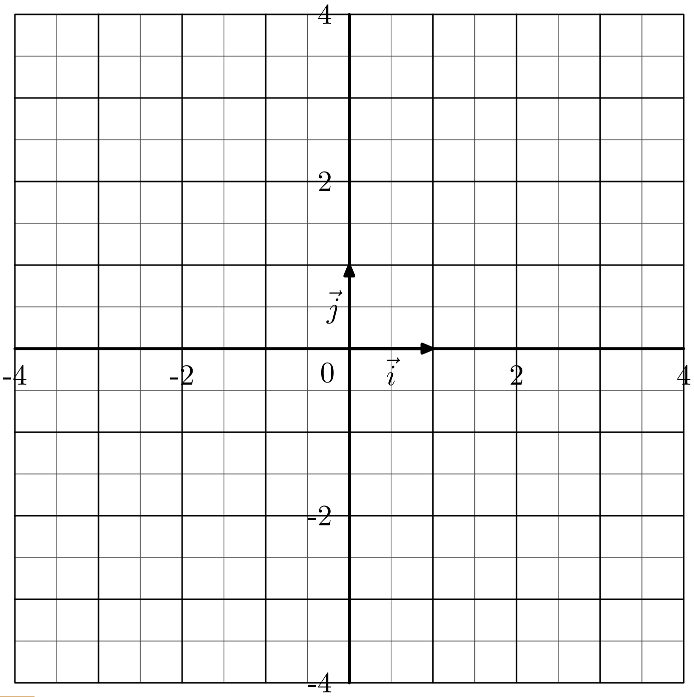
Ainsi le point L' a pour coordonnées :
$L'\left(\dfrac{16}{5}\,;\dfrac{48}{5}\right)$



14. Autour du centre de gravité d'un triangle :

Exercice 2126

On considère le plan muni du repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$ orthonormal :



1. Placer les points suivants :

   $A\big(-3\,;-3\big)$; $B\big(3\,;-1\big)$; $C\,\big(-1.5\,;1\big)$

2. a. Déterminer les coordonnées du point I milieu du segment $[AB]$.

   b. Déterminer les coordonnées du point J milieu du segment $[AC]$.

   c. Placer sur la figure les points I et J ainsi que le centre de gravité G du triangle ABC.

3. On considère le point $M\big(-0{,}5\,;-1\big)$ du plan :

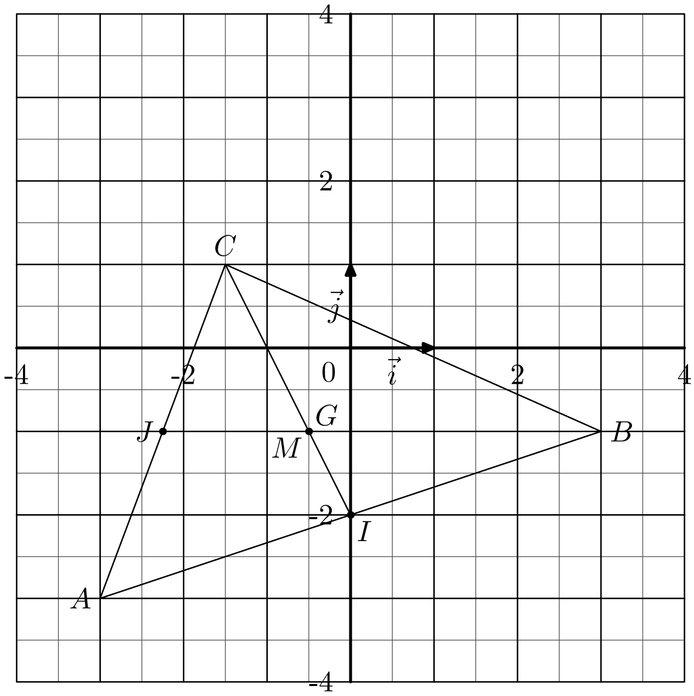
   a. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{CI}$ et $\overrightarrow{CM}$.

   b. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{CI}$ et $\overrightarrow{CM}$. On déterminera le coefficient de colinéarité du vecteur $\overrightarrow{CM}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{CI}$.

4. En déduire les coordonnées du centre de gravité du triangle ABC.

Correction 2126

1. Voici la représentation :



2. a. $I\left(\dfrac{-3+3}{2}\,;\,\dfrac{-3+(-1)}{2}\right) = (0\,;\,-2)$

   b. $J\left(\dfrac{-3-1{,}5}{2}\,;\dfrac{-3+1}{2}\right) = \left(-\dfrac{4{,}5}{2}\,;-1\right)$

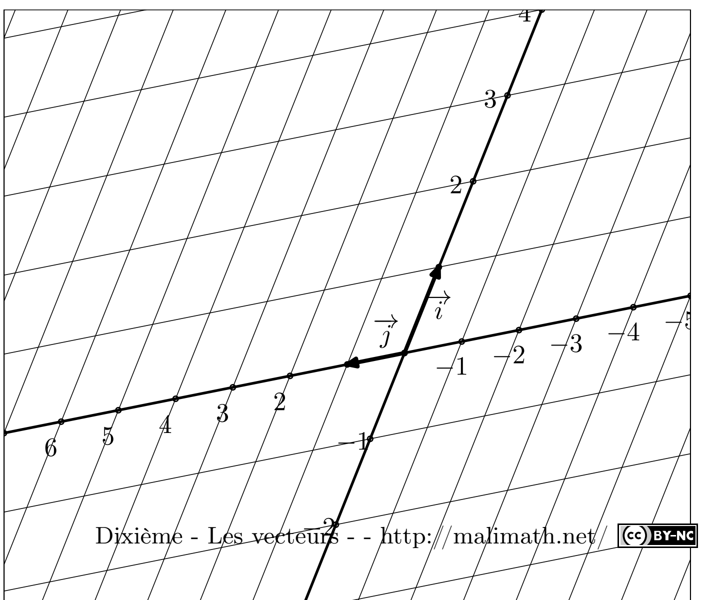
3. a. On a les coordonnées de vecteurs :
   - $\overrightarrow{CI}\,(x_I - x_C\,;y_I - y_C)$
     $= \big(0-(-1{,}5)\,;-2-1\big) = (1{,}5\,;-3)$
   - $\overrightarrow{CM}\,(x_M - x_C\,;y_M - y_C)$
     $= \big(-0{,}5-(-1{,}5)\,;-1-1\big) = (1\,;-2)$

   b. On remarque l'égalité suivante :
   $$\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{CI} = \left(\frac{2}{3}\times 1{,}5\,;\,\frac{2}{3}\cdot(-3)\right) = (1\,;-2) = \overrightarrow{CM}$$
   Le coefficient de colinéarité du vecteur $\overrightarrow{CM}$ par rapport au vecteur $\overrightarrow{CI}$ est de $\dfrac{2}{3}$.

4. De la question précédente, on en déduit que le point M est situé au deux-tiers de la médiane $[CI]$ en partant du sommet. Le point M est donc le centre de gravité du triangle ABC :
   $G\,(-0{,}5\,;\,-1)$

Exercice 497

On munit le plan d'un repère $\big(O\,;\,I\,;\,J\big)$.



1. Placer les points suivants dans le repère ci-contre :
$A\,(3\,;2)$; $B\,(-3\,;4)$; $C\,(-1\,;-5)$

2. a. Déterminer les coordonnées du milieu I du segment $[BC]$.

   b. Déterminer les coordonnées du milieu J du segment $[AB]$.

   c. Placer le point G centre de gravité du triangle ABC.

3. On suppose l'existence d'un point H vérifiant l'assertion suivante :
$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\cdot\overrightarrow{OH} \quad (*)$$

   a. Etablissez que pour tout point M du plan, on a :
$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\cdot\overrightarrow{MH}$$

   b. En déduire que : $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{0}$.

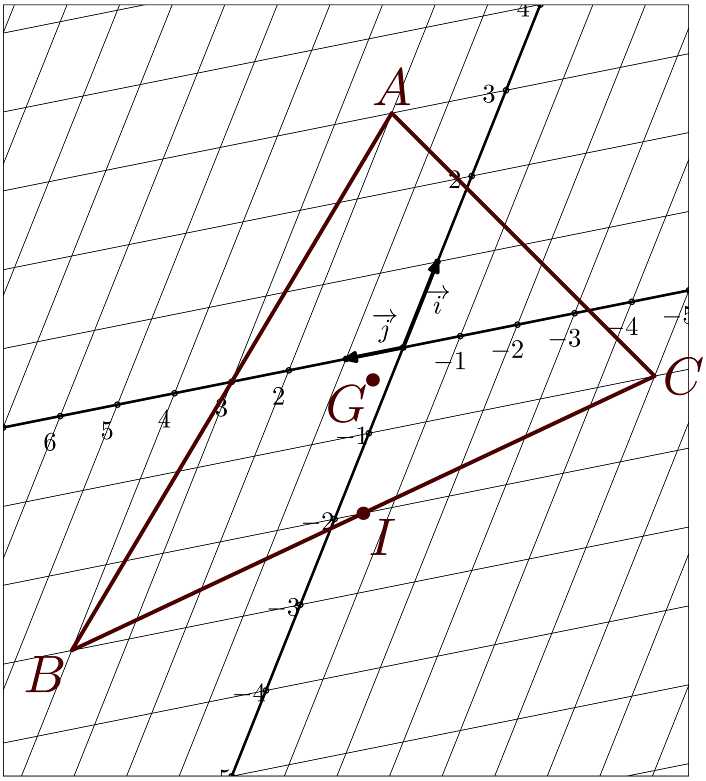
   c. En déduire la relation : $\overrightarrow{AH}=\dfrac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AI}$.

4. a. Justifier que le point G et H sont confondues.

   b. Déduire de la relation $(*)$ les coordonnées du point G.

Correction 497

1. Voici la représentation :



2. a. Les coordonnées de I milieu de $[BC]$ sont données par :
$$I\left(\frac{x_B+x_C}{2}\,;\frac{y_B+y_C}{2}\right)=\left(\frac{-3-1}{2}\,;\frac{4-5}{2}\right)$$
$$=\left(-2\,;-0{,}5\right)$$

   b. J milieu de $[AB]$ a pour coordonnée :
$$J\left(\frac{x_A+x_B}{2}\,;\frac{y_A+y_B}{2}\right)=\left(\frac{3+(-3)}{2}\,;\frac{2+4}{2}\right)$$
$$=\left(0\,;3\right)$$

   c. Le centre de gravité est à l'intersection des médianes : G est le point d'intersection des médianes $[AI]$ et $[CJ]$.

3. a. Soit M un point quelconque du plan, on a :
$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\cdot\overrightarrow{OH}$$
$$\big(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MA}\big)+\big(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MB}\big)+\big(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MC}\big)=3\cdot\big(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MH}\big)$$
$$3\cdot\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\cdot\overrightarrow{OM}+3\cdot\overrightarrow{MH}$$
$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\cdot\overrightarrow{MH}$$

   b. La relation précédente est vrai pour tout point M du plan. En particulier pour le point H, elle devient :
$$\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=3\cdot\overrightarrow{HH}$$
$$\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{0}$$

   c. Utilisons la propriété précédente :
$$\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{0}$$
En utilisant la relation de Chasles :
$$\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HI}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{HI}+\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}$$
$$\overrightarrow{HA}+2\cdot\overrightarrow{HI}+\big(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}\big)=\overrightarrow{0}$$
I est le milieu de $[BC]$:
$$\overrightarrow{HA}+2\cdot\overrightarrow{HI}+\overrightarrow{0}=\overrightarrow{0}$$
D'après la relation de Chasles :
$$\overrightarrow{HA}+2\cdot\big(\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{AI}\big)=\overrightarrow{0}$$
$$\overrightarrow{HA}+2\cdot\overrightarrow{HA}+2\cdot\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{0}$$
$$3\cdot\overrightarrow{HA}+2\cdot\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{0}$$
$$2\cdot\overrightarrow{AI}=-3\cdot\overrightarrow{HA}$$
$$3\cdot\overrightarrow{AH}=2\cdot\overrightarrow{AI}$$
$$\overrightarrow{AH}=\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AI}$$

4. a. Le point H est situé aux deux tiers de la médiane $[AI]$ à partir de son sommet : le point H est le centre de gravité du triangle ABC.

   b. On a les coordonnées de vecteurs :
$\overrightarrow{OA}\,(3\,;2)$; $\overrightarrow{OB}\,(-3\,;4)$; $\overrightarrow{OC}(-1\,;-5)$
L'égalité $(*)$ permet d'obtenir deux égalités : sur les abscisses et sur les ordonnées :
   - $3+(-3)+(-1)=3\cdot x_H$
$$-1=3\cdot x_H$$
$$x_H=-\frac{1}{3}$$
   - $2+4+(-5)=3\cdot y_H$
$$1=3\cdot y_H$$
$$y_H=\frac{1}{3}$$

Le point G a pour coordonnées $\left(-\dfrac{1}{3}\,;\dfrac{1}{3}\right)$.

Exercice 505

Dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ quelconque, on considère les trois points suivants définis par leurs coordonnées :

$A(5;-2)$; $B(-3;-1)$; $C(-5;3)$

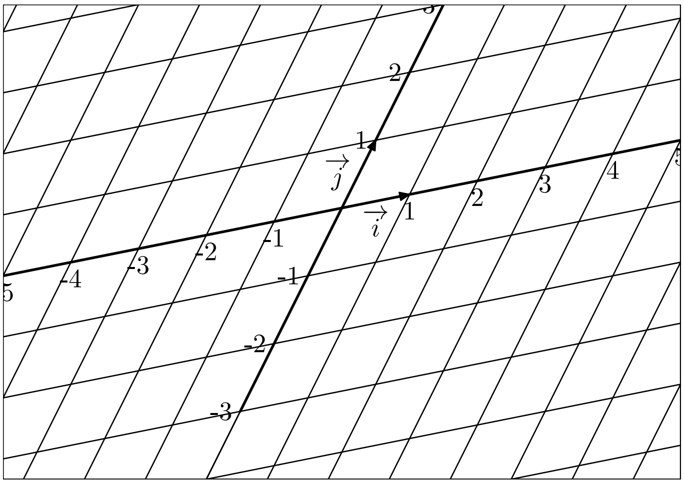
1. a. Déterminer les coordonnés du point M vérifiant la relation suivante :
$7\cdot\overrightarrow{BM}=\frac{7}{3}\cdot\overrightarrow{CM}$

   b. Placer le point M dans le repère. Vérifier graphiquement que les trois points B, C et M sont alignés.

2. a. Déterminer les coordonnés du point G vérifiant la relation vectorielle :
$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

   b. Placer le point G dans le repère.

   c. Tracer les trois médianes du triangle ABC. Que remarque-t-on ?



Correction 505

1. a. En notant, $(x;y)$ les coordonnées du point M, on a les coordonnées des deux vecteurs :
   - $\overrightarrow{BM}\,(x_M-x_B\,;y_M-y_B)$
   $=\big(x-(-3);y-(-1)\big)=(x+3;y+1)$
   - $\overrightarrow{CM}\,(x_M-x_C\,;y_M-y_C)$
   $=\big(x-(-5);y-3\big)=(x+5;y-3)$

   Ainsi, l'égalité $7\cdot\overrightarrow{BM}=\frac{7}{3}\cdot\overrightarrow{CM}$ se traduit en identifiant les abscisses et les ordonnées des deux membres de l'égalité :

$7\cdot(x+3)=\frac{7}{3}\cdot(x+5)$	$7\cdot(y+1)=\frac{7}{3}\cdot(y-3)$
$21\cdot(x+3)=7\cdot(x+5)$	$21\cdot(y+1)=7\cdot(y-3)$
$21x+63=7x+35$	$21y+21=7y-21$
$21x-7x=35-63$	$21y+21=7y-21$
$14x=-28$	$21y-7y=-21-21$
$x=-2$	$14y=-42$
	$y=-3$

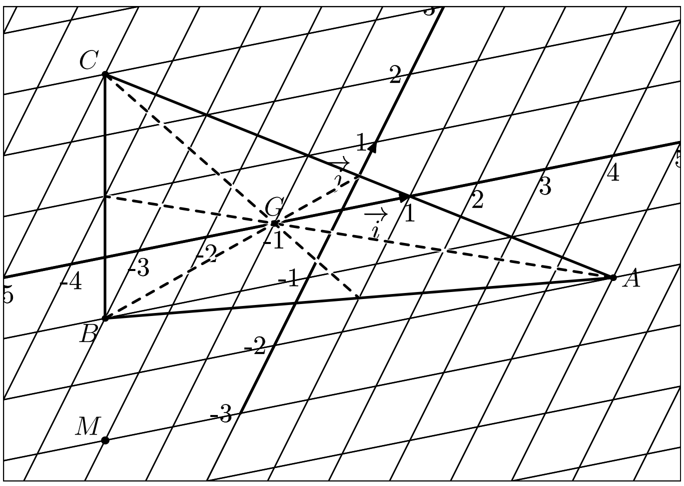
Le point M a pour coordonnées $M\big(-2;-3\big)$.

2. a. On note $(x;y)$ les coordonnées du point G. Ainsi, on a les coordonnées des vecteurs suivants :
   - $\overrightarrow{GA}\,(x_A-x_G\,;y_A-y_G)$
   $=\big(5-x;-2-x\big)$
   - $\overrightarrow{GB}\,(x_B-x_G\,;y_B-y_G)$
   $=\big(-3-x;-1-x\big)$
   - $\overrightarrow{GC}\,(x_C-x_G\,;y_C-y_G)$
   $=\big(-5-x;3-x\big)$

   Le point G est définie par la relation vectorielle :
   $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$
   Cette relation permet d'identifier les abscisses et les ordonnées des deux membres :
   - $(5-x)+(-3-x)+(-5-x)=0$
   $-3-3x=0$
   $-3x=3$
   $x=-\frac{3}{3}$
   $x=-1$
   - $(-2-y)+(-1-y)+(3-y)=0$
   $0-3y=0$
   $-3y=0$
   $y=0$

   Ainsi, le point G a pour coordonnées $\big(-1;0\big)$.

   c. On observe que les trois médianes s'interceptent au point G : le triangle ABC admet le point G pour centre de gravité.



Exercice 2969

1. Dans le plan, placer trois points A, B, C non-alignés et le point I milieu du segment $[AB]$.

2. a. Placer le point M tel que : $\overrightarrow{AM}=2\cdot\overrightarrow{MC}$.

   b. Placer le point N tel que : $\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$

3. a. Placer le point G centre de gravité du triangle ABC.

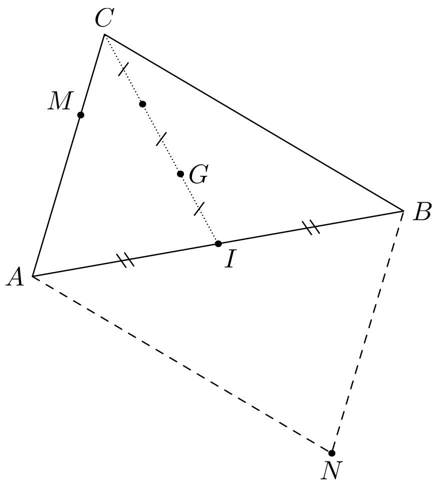
   b. En utilisant la position du point G sur la médiane $[CI]$, établir l'égalité suivante :
   $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

4. On munit le plan du repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)$ quelconque.

a. Donner, sans justification, les coordonnées des points A, B, C, I, M et N.

b. En utilisant l'égalité vectorielle : $\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AI}$ démontrer que le point G a pour coordonnées :
$G\left(\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\right)$

Correction 2969



1. a. Le point M est défini par la relation :
$$\overrightarrow{AM}=2\cdot\overrightarrow{MC}$$
En utilisant la relation de Chasles, on a :
$$\overrightarrow{AM}=2\cdot\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}\right)$$
$$\overrightarrow{AM}=2\cdot\overrightarrow{MA}+2\cdot\overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{AM}-2\cdot\overrightarrow{MA}=2\cdot\overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{AM}+2\cdot\overrightarrow{AM}=2\cdot\overrightarrow{AC}$$
$$3\cdot\overrightarrow{AM}=2\cdot\overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AC}$$
Ainsi, le point M est le point du segment $[AC]$ vérifiant la relation métrique :
$$AM=\frac{2}{3}\cdot AC$$

b. Le point N définie par la relation :
$$\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$$
est l'unique point tel que $CANB$ soit un parallélogramme.
Le point N est le symétrique du point C par rapport au point I.

Ceci est un point du cours ; si on souhaitait redémontrer cela, on partirait de la définition du point N :
$$\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$$
A l'aide de la relation de Chasles, on écrit :
$$=\left(\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{IA}\right)+\left(\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{IB}\right)$$
$$=\left(\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{CI}\right)+\left(\overrightarrow{IA}\right)+\overrightarrow{IB}\right)$$
$$=2\cdot\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{0}\ =2\cdot\overrightarrow{CI}$$

2. b. Le point G est situé au deux-tiers de la médiane à partir de son sommet ; on en déduit la relation vectorielle :
$$\overrightarrow{GC}=2\cdot\overrightarrow{IG}$$
Etudions cette somme à l'aide de la relation de Chales et du point I :
$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$$
$$=\ \left(\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IA}\right)+\left(\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IB}\right)+2\cdot\overrightarrow{IG}$$
$$=\ \left(\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GI}+2\cdot\overrightarrow{IG}\right)+\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)$$
$$=\ \left(\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GI}-2\cdot\overrightarrow{GI}\right)+\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)$$
$$=\ \overrightarrow{0}\ +\ \overrightarrow{0}\ =\ \overrightarrow{0}$$

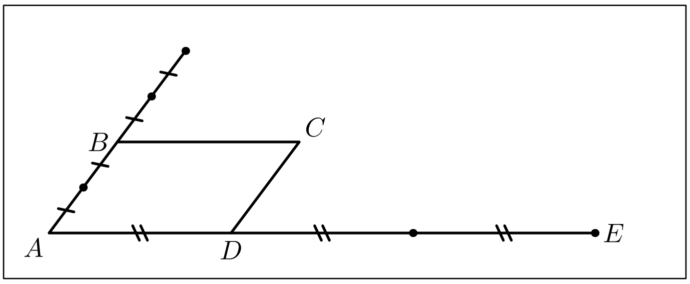
3. a. On a les coordonnées suivantes :
$$A(0\,;0)\quad;\quad B(1\,;0)\quad;\quad C(0\,;1)$$
$$I\left(\frac{1}{2}\,;0\right)\quad;\quad M\left(0\,;\frac{2}{3}\right)\quad;\quad N(1\,;-1)$$

b. Décomposons le vecteur $\overrightarrow{AG}$:
$$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IG}=\overrightarrow{AI}+\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{IC}$$
$$=\overrightarrow{AI}+\frac{1}{3}\cdot\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AI}\right)=\overrightarrow{AI}+\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AI}$$
$$=\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AI}+\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB}\right)+\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AC}$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AC}$$
Ainsi, le point G a pour coordonnées $\left(\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\right)$.

15. Repères choisis :

Exercice 506

On cherche à placer, sur la figure ci-dessous, le point F tel que : $F\in(AB)$; F, C et E alignés.



On munit le plan du repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AB}\right)$.

1. a. Donner les coordonnées des cinq points de la figure.

b. A quel axe appartient le point F ? Donner la valeur de l'abscisse F.

On note f l'ordonnée du point F.

2. a. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{FC}$ et $\overrightarrow{FE}$.

b. En déduire les coordonnées du point F.

3. En notant I le milieu du segments $[DE]$. Justifier que les droites (BI) et (FE) sont parallèles.

Correction 506

1. a. Dans le repère $\left(O\,;\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AB}\right)$, on a :
$A\,(0\,;0)\quad;\quad B\,(0\,;1)\quad;\quad D\,(1\,;0)$

$E\,(3\,;0)\quad;\quad C\,(1\,;1)$

b. Le point F appartient à la droite (AB) : le point F appartient à l'axe des ordonnées. On en déduit que l'abscisse du point F est nulle.

2. a. On a les coordonnées de vecteurs :
- $\overrightarrow{FC}\,(x_C - x_F\,;y_C - y_F)$
$= (1-0\,;1-f) = (1\,;1-f)$
- $\overrightarrow{FE}\,(x_E - x_F\,;y_E - y_F)$
$= (3-0\,;0-f) = (3\,;-f)$

b. Les points F, C et E étant alignés, on en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{FC}$ et $\overrightarrow{FE}$.
Au vu des abscisses des vecteurs $\overrightarrow{FC}$ et $\overrightarrow{FE}$, on en déduit que le coefficient de colinéarité de $\overrightarrow{FE}$ par rapport à $\overrightarrow{FE}$ vaut 3.
L'égalité sur les ordonnées donne :

$$\begin{aligned}
-f &= 3\cdot(1-f)\\
-f &= 3 - 3\cdot f\\
-f + 3\cdot f &= 3\\
2\cdot f &= 3\\
f &= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

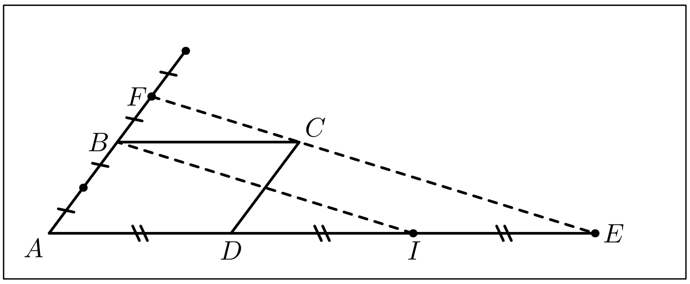
Le point F a pour coordonnées $F\left(0\,;\frac{3}{2}\right)$.

3. Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{FE}$ a pour coordonnées :
$\overrightarrow{FE}\,(x_E - x_F\,;y_E - y_F)$
$= \left(3-0\,;0-\frac{3}{2}\right) = \left(3\,;-\frac{3}{2}\right)$

Le vecteur $\overrightarrow{BI}$ a pour coordonnées :
$\overrightarrow{BI}\,(x_I - x_B\,;y_I - y_B)$
$= (2-0\,;0-1) = (2\,;-1)$

Par les coordonnées de ces deux vecteurs, on obtient l'égalité vectorielle :
$\overrightarrow{BI} = \frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{FE}$

Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{FE}$ sont colinéaires : on en déduit que les droites (BI) et (FE) sont parallèles.



Exercice 2970

Dans le plan, on considère un parallélogramme $ABCD$ et les deux points E et F définis par les relations :

$$\overrightarrow{AE} = \frac{5}{3}\cdot\overrightarrow{AD}\quad;\quad\overrightarrow{AF} = \frac{5}{2}\cdot\overrightarrow{AB}$$

1. Tracer une représentation de cette configuration.

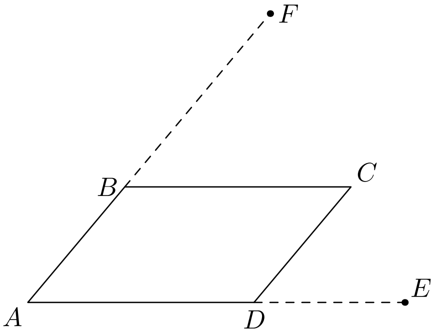
2. On munit le plan du repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\right)$.

a. Donner, sans justification, les coordonnées des points F, C et E.

b. Démontrer que les points E, C et F sont alignés.

Correction 2970

1. Voici une représentation de cette configuration :



Les dimensions choisis pour ce parallélogramme a été de :
$AB = 2\,cm\quad;\quad AD = 3\,cm$
afin de placer plus facilement les points E et F.

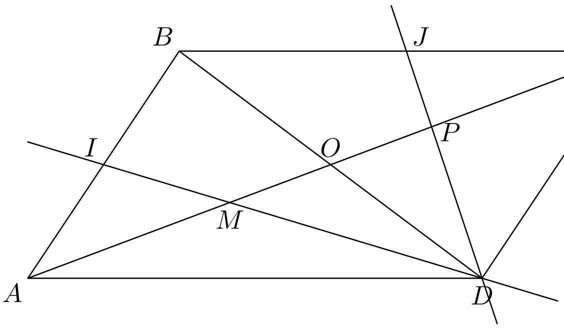
2. a. Dans le repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB}\,;,\overrightarrow{AD}\right)$, on a les coordonnées suivantes :
$F\left(\frac{5}{2}\,;0\right)\quad;\quad C\,(1\,;1)\quad;\quad E\left(0\,;\frac{5}{3}\right)$

b. On a les coordonnées suivantes de vecteurs :
- $\overrightarrow{FC}\,(x_C - x_F\,;y_C - y_F)$
$= \left(1 - \frac{5}{2}\,;1-0\right) = \left(-\frac{3}{2}\,;1\right)$
- $\overrightarrow{CE}\,(x_E - x_C\,;y_E - y_C)$
$= \left(0-1\,;\frac{5}{3}-1\right)$
$= \left(-1\,;\frac{2}{3}\right)$

Au vu des coordonnées, on déduit facilement l'égalité suivante :
$\overrightarrow{FC} = -\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{CE}$

Exercice 2212

Soit $ABCD$ un parallélogramme non aplati de centre O. I est le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[BC]$.
La droite (DI) coupe (AC) en M et la droite (DJ) coupe (AC) en P.



On munit le plan du repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AI}\,;\,\overrightarrow{AC}\right)$:

1. Déterminer, par lecture graphique, les coordonnées des points A, I, C et B

2. a. Déterminer les deux entiers relatifs α et β réalisant l'égalité :
$\overrightarrow{AD} = \alpha\cdot\overrightarrow{AB} + \beta\cdot\overrightarrow{AC}$

   b. En déduire les coordonnées du point D.

3. a. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{BJ}$ a pour coordonnées :
$\overrightarrow{BJ}\left(-1\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$

   b. En déduire les coordonnées du point J.

4. A quel axe appartiennent les points M et P ? Donner la valeur de leur abscisse.

5. En utilisant la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{DM}$ et $\overrightarrow{DI}$, déterminer l'ordonnée m de M.

6. De même, déterminer l'ordonnée p de P

7. a. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{PC}$.

   b. En déduire que $AM = MP = PC$.

Correction 2212

1. Dans le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AI}\,;\,\overrightarrow{AC}\right)$, on a :
$A\,(0\,;0)$; $I\,(1\,;0)$; $C\,(0\,;1)$; $B\,(2\,;0)$

2. a. On a la relation :
$\overrightarrow{AD} = -1\cdot\overrightarrow{AB} + 1\cdot\overrightarrow{AC}$

   b. On en déduit les coordonnées du point D :
$D\,(-2\,;1)$

3. a. On remarque l'égalité vectorielle : $\overrightarrow{BJ} = \dfrac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AD}$

   D'après la question 2. b. , le vecteur $\overrightarrow{AD}$ a pour coordonnées :
$\overrightarrow{AD}\,(-2\,;1)$

   On en déduit les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BJ}$:
$\overrightarrow{BJ}\left(\dfrac{1}{2}\cdot(-2)\,;\,\dfrac{1}{2}\times 1\right) = \left(-1\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$

   b. On a l'égalité vectorielle :
$$\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ}$$
$$= 2\cdot\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BJ}$$
On a les coordonnées suivantes de vecteur :
$\overrightarrow{AI}\,(1\,;0)$; $\overrightarrow{BJ}\left(-1\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$

   On en déduit les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AJ}$:
$$\overrightarrow{AJ}\left(2\times 1 + (-1)\,;\,2\times 0 + \dfrac{1}{2}\right)$$
$$= \left(1\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$$
On en déduit les coordonnées du point J :
$J\left(1\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$

4. Les points M et P se trouvent sur la droite (AC) : étant situés sur l'axe des ordonnées, leur abscisse est nulle.

5. On a les coordonnées de vecteurs :
   - $\overrightarrow{DM}\,(x_M - x_D\,;y_M - y_D)$
   $= \big(0-(-2)\,;y_M - 1\big) = \big(2\,;y_M - 1\big)$
   - $\overrightarrow{DI}\,(x_I - x_D\,;y_I - y_D)$
   $= \big(1-(-2)\,;0-1\big) = \big(3\,;-1\big)$

   Puisque les vecteurs $\overrightarrow{DM}$ et $\overrightarrow{DI}$ sont colinéaires, il existe un nombre réel non-nul α vérifiant l'égalité vectorielle :
$\overrightarrow{DM} = \alpha\cdot\overrightarrow{DI}$
Cette égalité vectorielle entraîne une égalité sur les abscisses des deux membres de cette égalité :
$2 = \alpha\cdot 3$
$\alpha = \dfrac{2}{3}$
Utilisons l'égalité sur les ordonnées à partir de l'égalité vectorielle :
$$y_M - 1 = \alpha\cdot(-1)$$
$$y_M - 1 = -\dfrac{2}{3}$$
$$y_M = -\dfrac{2}{3} + 1$$
$$y_M = \dfrac{1}{3}$$
Ainsi, le point M a pour coordonnées : $M\left(0\,;\,\dfrac{1}{3}\right)$.

6. Le point P appartenant à la droite (DJ), on en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{DP}$ et $\overrightarrow{DJ}$ sont colinéaires. Il existe un nombre réel β vérifiant l'égalité vectorielle :
$\overrightarrow{DJ} = \beta\cdot\overrightarrow{DP}$

   On a les coordonnées des vecteurs :
   - $\overrightarrow{DJ}\,(x_J - x_D\,;y_J - y_D)$
   $= \left(1-(-2)\,;\,\dfrac{1}{2} - 1\right) = \left(3\,;\,-\dfrac{1}{2}\right)$
   - $\overrightarrow{DP}\,(x_P - x_D\,;y_P - y_D)$
   $= \big(0-(-2)\,;p-1\big) = \big(2\,;p-1\big)$

   De l'égalité vectorielle citée précédemment, on en déduit l'égalité sur les abscisses :
$3 = \alpha\cdot 2$
$\alpha = \dfrac{3}{2}$
L'égalité sur les ordonnées donne :

$$-\frac{1}{2} = \alpha\cdot(p-1)$$
$$-\frac{1}{2} = \frac{3}{2}\cdot(p-1)$$
$$-\frac{1}{2} = \frac{3}{2}\cdot p - \frac{3}{2}$$
$$-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}\cdot m$$
$$1 = \frac{3}{2}\cdot m$$
$$m = 1\times\frac{2}{3}$$
$$m = \frac{2}{3}$$

Ainsi, le point M a pour coordonnées $M\left(0\,;\frac{2}{3}\right)$.

7. a. On a les coordonnées de vecteurs :

- $\overrightarrow{AM}\,(x_M - x_A\,;y_M - y_A)$
  $= \left(0-0\,;\frac{1}{3}-0\right) = \left(0\,;\frac{1}{3}\right)$
- $\overrightarrow{MP}\,(x_P - x_M\,;y_P - y_M)$
  $= \left(0-0\,;\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right) = \left(0\,;\frac{1}{3}\right)$
- $\overrightarrow{PC}\,(x_C - x_P\,;y_C - y_P)$
  $= \left(0-0\,;1-\frac{2}{3}\right) = \left(0\,;\frac{1}{3}\right)$

b. Des coordonnées des vecteurs, on en déduit les égalités vectorielles :
$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{PC}$
L'égalité vectorielle entraîne implicitement une égalité sur les distances :
$AM = MP = PC$.

Exercice 513

On considère un trapèze $ABCD$ vérifiant l'égalité vectorielle :
$\overrightarrow{DC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

On note I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$. Les droites (AC) et (BD) se coupent en M et les droites (AD) et (BC) se coupent en N.

1. a. Tracer une représentation de cette configuration.

   b. Emettre une conjecture quant à la position relative des points I, J, M, N ?

On munit le plan du repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\right)$ quelconque :

2. Déterminer les coordonnées des points :
   A ; B ; D ; I ; C ; J

3. a. A quel axe appartient le point N ? En déduire l'abscisse du point N.

   b. On note α l'unique nombre réel positif réalisant l'égalité :
   $DN = \alpha\cdot DA$
   A l'aide du théorème de Thalès, déterminer la valeur de α.

   c. En déduire les coordonnées du point N.

4. a. Démontrer que $AM = \frac{3}{4}\cdot AC$.

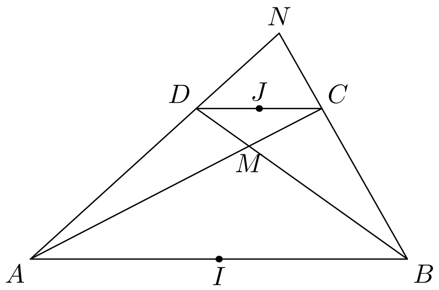
   b. En déduire les coordonnées du point M.

5. a. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{NJ}$, $\overrightarrow{NI}$ et $\overrightarrow{NM}$.

   b. Confirmer la conjecture faite à la question 1. b. .

Correction 513

1. a. On a la représentation suivante :



   b. Il semble que les points N, J, M et I sont alignés.

2. Dans le repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\right)$, on a les coordonnées suivantes :
   $A\,(0\,;0)$; $B\,(1\,;0)$; $D\,(0\,;1)$

   On a les égalités vectorielles suivantes :
   $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$
   $= \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AB}$

   On en déduit les coordonnées du point $C\left(\frac{1}{3}\,;1\right)$.

   Le point J est le milieu du segment $[DC]$; on en déduit l'égalité vectorielle :
   $\overrightarrow{DJ} = \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{DC} = \frac{1}{6}\cdot\overrightarrow{AB}$

   On en déduit les coordonnées du point $J\left(\frac{1}{6}\,;1\right)$

3. a. Le point N appartient à la droite (AD) : le point N appartient à l'axe des ordonnées. On en déduit que son abscisse est nulle.

   b. De l'égalité :
   $DN = \alpha\cdot DA$
   On en déduit :
   $DN + DA = \alpha\cdot DA + DA$
   Le point D appartient au segment $[AN]$:
   $AN = (1+\alpha)\cdot DA$
   Dans le triangle NAB, on a les propriétés :
   $D\in[NA]$; $C\in[NB]$; $(DC)/\!/(AB)$
   D'après le théorème de Thalès, on a les égalités de rapport :

$$\frac{ND}{NA} = \frac{NC}{NB} = \frac{DC}{AB}$$

Utilisons l'égalité :

$$\frac{ND}{NA} = \frac{DC}{AB}$$

$$\frac{\alpha \cdot DA}{(1+\alpha)\cdot DA} = \frac{\frac{1}{3}\cdot AB}{AB}$$

$$\frac{\alpha}{1+\alpha} = \frac{1}{3}$$

Le produit en croix permet d'obtenir :

$$\alpha \cdot 3 = 1\cdot(1+\alpha)$$
$$3\cdot\alpha = 1+\alpha$$
$$3\cdot\alpha - \alpha = 1$$
$$2\cdot\alpha = 1$$
$$\alpha = \frac{1}{2}$$

c. Déterminons la valeur de la longueur AN en fonction de AD ; le point D est un point du segment $[AN]$, on en déduit l'égalité :

$$AN = AD + DN = AD + \frac{1}{2}\cdot AD = \frac{3}{2}\cdot AD$$

On en déduit les coordonnées du point N : $N\left(0\,;\frac{3}{2}\right)$.

4. a. Les points M, A, C et les points M, B, D sont alignés et les droites (AB) et (DC) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès, on a les égalités suivantes :

$$\frac{MA}{MC} = \frac{MB}{MD} = \frac{AB}{DC}$$

Utilisons l'égalité :

$$\frac{MA}{MC} = \frac{AB}{DC}$$

$$\frac{MA}{MC} = 3$$

Le produit en croix permet d'utiliser :

$$MA = 3\cdot MC$$
$$MA + 3\cdot MA = 3\cdot MC + 3\cdot MA$$
$$4\cdot MA = 3\cdot\big(MC+MA\big)$$
$$4\cdot MA = 3\cdot AC$$
$$AM = \frac{3}{4}\cdot AC$$

b. Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AC}$ ayant même direction et même sens, on en déduit l'égalité vectorielle :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\cdot\overrightarrow{AC}$$

A la question 2., on a : $\overrightarrow{AC}\left(\frac{1}{3}\,;1\right)$

On en déduit les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$:

$$\overrightarrow{AM}\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}\,;\frac{3}{4}\cdot 1\right) = \left(\frac{1}{4}\,;\frac{3}{4}\right)$$

Le point M a pour coordonnées $\left(\frac{1}{4}\,;\frac{3}{4}\right)$

5. a. On a les coordonnées de vecteurs :

- $\overrightarrow{NJ}\,(x_J - x_N\,;y_J - y_N)$
$$= \left(\frac{1}{6} - 0\,;1-\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{1}{6}\,;-\frac{1}{2}\right)$$
- $\overrightarrow{NI}\,(x_I - x_N\,;y_I - y_N)$
$$= \left(\frac{1}{2} - 0\,;0-\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\,;-\frac{3}{2}\right)$$
- $\overrightarrow{NM}\,(x_M - x_N\,;y_M - y_N)$
$$= \left(\frac{1}{4} - 0\,;\frac{3}{4}-\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{1}{4}\,;-\frac{3}{4}\right)$$

b. On remarque, à l'aide des coordonnées des vecteurs, les égalités suivantes :

$$\overrightarrow{NJ} = \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{NI} \quad ; \quad \overrightarrow{NJ} = \frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{NM}$$

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{NJ}$, $\overrightarrow{NI}$ et $\overrightarrow{NM}$ sont colinéaires entre eux : les points N, J, I et M sont alignés entre eux.

16. Manipulations algébriques :

Exercice 3018

Soit A, B, C trois points du plans non-alignés :

1. Simplifier, si possible, les expressions suivantes :

a. $2\cdot\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BA}$

b. $3\cdot\overrightarrow{AB} - 3\cdot\overrightarrow{CB}$

c. $3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

d. $2\cdot\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}$

2. Dans chaque question, déterminer la valeur du réel k vérifiant l'égalité :

a. $2\cdot\overrightarrow{AB} + 2\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} = k\cdot\overrightarrow{AC}$

b. $\overrightarrow{AB} + 2\cdot\overrightarrow{AC} + 4\overrightarrow{BC} = k\cdot\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}\right)$

c. $3\cdot\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} = k\cdot\overrightarrow{AB}$

d. $3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} + 2\cdot\overrightarrow{BA} = k\cdot\overrightarrow{AB}$

Correction 3018

1. a. $2\cdot\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BA} = 2\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = 3\cdot\overrightarrow{AB}$

b. $3\cdot\overrightarrow{AB} - 3\cdot\overrightarrow{CB} = 3\cdot\overrightarrow{AB} + 3\cdot\overrightarrow{BC} = 3\cdot\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)$

D'après la relation de Chasles :

$= 3\cdot\overrightarrow{AC}$

c. $3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

$= \left(3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AB}\right) + \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}\right) = 5\overrightarrow{AB} + 2\cdot\overrightarrow{BC}$

d. Aucune simplification possible notable n'est possible pour l'expression :

$2\cdot\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}$

On peut faire les transformations suivantes mais qui n'emmènent pas réellement à une simplification :

$2\cdot\overrightarrow{AB} + 3\cdot\overrightarrow{BC} = 2\cdot\overrightarrow{AB} + 2\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}$

$= 2\cdot\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) + \overrightarrow{BC} = 2\cdot\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$

2. a. $2\cdot\overrightarrow{AB} + 2\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} = 2\cdot\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) + \overrightarrow{AC}$

$= 2\cdot\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} = 3\cdot\overrightarrow{AC}$

b. $\overrightarrow{AB} + 2\cdot\overrightarrow{AC} + 4\cdot\overrightarrow{BC} = \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right) + 2\cdot\overrightarrow{AC} + 4\cdot\overrightarrow{BC}$

$= \left(\overrightarrow{AC} + 2\cdot\overrightarrow{AC}\right) + \left(\overrightarrow{CB}\right) + 4\cdot\overrightarrow{BC}\right)$

$= 3\cdot\overrightarrow{AC} + \left(-\overrightarrow{BC}\right) + 4\cdot\overrightarrow{BC}\right) = 3\cdot\overrightarrow{AC} + 3\cdot\overrightarrow{BC}$

$= 3\cdot\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}\right)$

c. $3\cdot\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} = 3\cdot\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} + \left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}\right)$

$= 3\cdot\overrightarrow{AB} + \left(-\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB}\right) - \overrightarrow{AB}\right)$

$= \left(3\cdot\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB}\right) + \overrightarrow{0} = 2\cdot\overrightarrow{AB}$

d. $3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} + 2\cdot\overrightarrow{BA} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} - 2\cdot\overrightarrow{AB}$

$= \left(3\overrightarrow{AB} - 2\cdot\overrightarrow{AB}\right) + \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$

$= 2\cdot\overrightarrow{AB}$

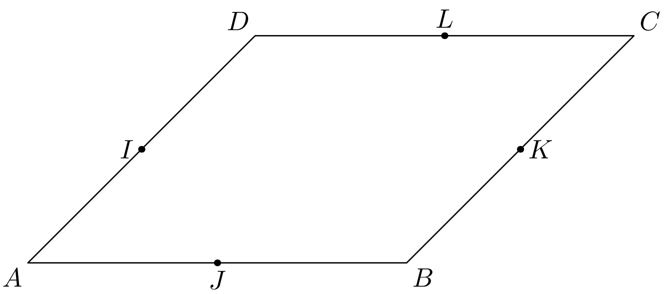
Exercice 499

On considère un parallélogramme quelconque $ABCD$. On note I, J, K, L les milieux respectifs des segments $[AD]$, $[AB]$, $[BC]$ et $[CD]$.

Etablir les deux relations suivantes :

a. $\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{IL} = \overrightarrow{DC}$ b. $2\cdot\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{JB} = \overrightarrow{JC}$

Correction 499



1. A l'aide de la relation de Chasles, on a la transformation :

$\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{IL} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{DL}$

I est le milieu de $[DA]$: $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{ID}$

$= \overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{DL}$

On a l'égalité $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{LC}$

$= \overrightarrow{LC} + \overrightarrow{DL} = \overrightarrow{DC}$

2. $2\cdot\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{JB} = \overrightarrow{AB} + \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}\right) + \overrightarrow{JB}$

$= \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}\right) + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{JB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{JB}$

Dans le parallélogramme $ABCD$, on a $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

$= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{JB}$

D'après la relation de Chasles, on a :

$= \overrightarrow{JC}$

Exercice 2105

1. Placer deux points A et B dans le plan.

2. On considère le point M définie par la relation $2\cdot\overrightarrow{AM} - 3\cdot\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$

a. Donner une expression du vecteur $\overrightarrow{AM}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

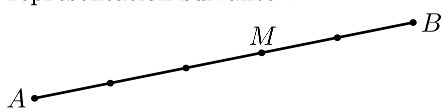
b. Placer le point M dans le plan.

Correction 2105

2. a. Le point M est définie par la relation :

$$\begin{aligned}
2\cdot\overrightarrow{AM} - 3\cdot\overrightarrow{MB} &= \overrightarrow{0} \\
2\cdot\overrightarrow{AM} - 3\cdot\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}\right) &= \overrightarrow{0} \\
2\cdot\overrightarrow{AM} - 3\cdot\overrightarrow{MA} - 3\cdot\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{0} \\
2\cdot\overrightarrow{AM} + 3\cdot\overrightarrow{AM} &= 3\cdot\overrightarrow{AB} \\
5\cdot\overrightarrow{AM} &= 3\cdot\overrightarrow{AB} \\
\overrightarrow{AM} &= \frac{3}{5}\cdot\overrightarrow{AB}
\end{aligned}$$

b. On a la représentation suivante :



Exercice 2096

1. a. Placer trois points A, B et C non-alignés dans le plan.

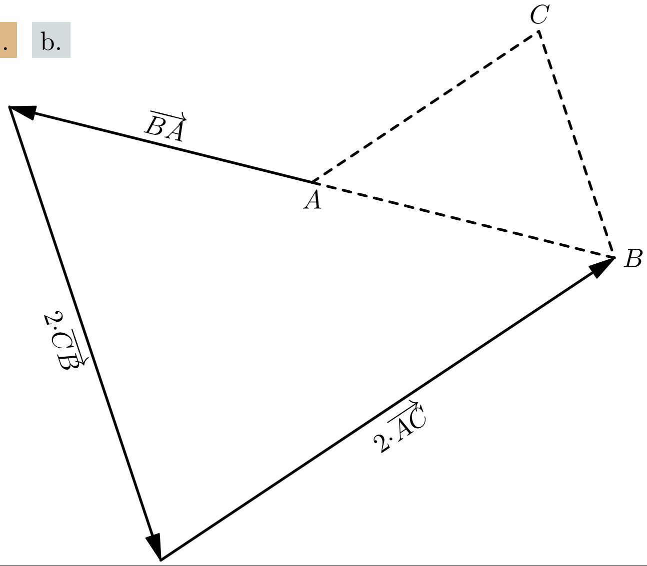
b. Tracer un représentant de la somme : $\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{AB} - 2\cdot\overrightarrow{BC} + 2\cdot\overrightarrow{AC}$

c. Emettre une conjecture quant au vecteur $\overrightarrow{u}$.

2. Prouver cette égalité de manière algébrique en utilisant la relation de Chasles.

Correction 2096

1. b.



c. On peut émettre la conjecture suivante :
$$\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}$$

2. On a les transformations vectorielles suivantes :
$$\begin{aligned}\overrightarrow{u}&=-\overrightarrow{AB}-2\cdot\overrightarrow{BC}+2\cdot\overrightarrow{AC}\\&=-\overrightarrow{AB}-2\cdot\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)+2\cdot\overrightarrow{AC}\\&=-\overrightarrow{AB}-2\cdot\overrightarrow{BA}-2\cdot\overrightarrow{AC}+2\cdot\overrightarrow{AC}\\&=-\overrightarrow{AB}-2\cdot\overrightarrow{BA}+\left(-2\cdot\overrightarrow{AC}+2\cdot\overrightarrow{AC}\right)\\&=-\overrightarrow{AB}+2\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{0}\\&=\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

Exercice 2127

1. On considère quatre points du plan, vérifiant la relation suivante :
$$\overrightarrow{AC}-2\cdot\overrightarrow{DA}=3\cdot\overrightarrow{BC}$$
Montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

2. On considère le parallélogramme $EFGH$ et I, J, K et L les milieux respectifs des côtés $[EF]$, $[FG]$, $[GH]$ et $[HE]$. Vérifier la relation suivante :
$$\overrightarrow{LG}=\overrightarrow{LI}+2\cdot\overrightarrow{HK}+\overrightarrow{IH}$$

Correction 2127

1.
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}-2\cdot\overrightarrow{DA}&=3\cdot\overrightarrow{BC}\\\overrightarrow{AC}-2\cdot\overrightarrow{DA}-3\cdot\overrightarrow{BC}&=\overrightarrow{0}\\\overrightarrow{AC}+2\cdot\overrightarrow{AD}-2\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}&=\overrightarrow{0}\\\overrightarrow{AB}+2\cdot\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}\right)+2\cdot\overrightarrow{CB}&=\overrightarrow{0}\\\overrightarrow{AB}+2\cdot\overrightarrow{AC}+2\cdot\overrightarrow{CD}+2\cdot\overrightarrow{CB}&=\overrightarrow{0}\\\overrightarrow{AB}+2\cdot\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right)+2\cdot\overrightarrow{CD}&=\overrightarrow{0}\\\overrightarrow{AB}+2\cdot\overrightarrow{AB}+2\cdot\overrightarrow{CD}&=\overrightarrow{0}\\3\cdot\overrightarrow{AB}&=-2\cdot\overrightarrow{CD}\\\overrightarrow{AB}&=\frac{-2}{3}\cdot\overrightarrow{CD}\end{aligned}$$

2. On a les transformations vectorielles suivantes :
$$\begin{aligned}\overrightarrow{LI}+2\cdot\overrightarrow{HK}+\overrightarrow{IH}&=\overrightarrow{LI}+\overrightarrow{HK}+\overrightarrow{IH}+\overrightarrow{HK}\\&=\overrightarrow{LI}+\overrightarrow{HK}+\overrightarrow{IK}\\&=\overrightarrow{LK}+\overrightarrow{HK}\end{aligned}$$
K est le milieu de $[GH]$: $\overrightarrow{HK}=\overrightarrow{KG}$
$$\begin{aligned}&=\overrightarrow{LK}+\overrightarrow{KG}\\&=\overrightarrow{LG}\end{aligned}$$

Exercice 496

Dans chaque cas, on considère trois points A, B, C du plan vérifiant une relation vectorielle. Montrer que dans chaque cas, les points A, B et C sont alignés :

a. $3\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=-2\cdot\overrightarrow{AC}$ b. $-2\cdot\overrightarrow{AB}=3\times\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}\right)$

Correction 496

1. La relation de Chasles nous permet d'écrire :
$$\begin{aligned}3\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}&=-2\cdot\overrightarrow{AC}\\3\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}&=-2\cdot\overrightarrow{AC}\\2\cdot\overrightarrow{AB}&=-2\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}\\\overrightarrow{AB}&=-\frac{3}{2}\cdot\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires : les poitns A, B et C sont colinéaires.

2. La relation de Chasles nous donne :
$$\begin{aligned}-2\cdot\overrightarrow{AB}&=3\cdot\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}\right)\\-2\cdot\overrightarrow{AB}&=3\cdot\overrightarrow{CB}+3\cdot\overrightarrow{CA}\\-2\cdot\overrightarrow{AB}&=3\cdot\overrightarrow{CA}+3\cdot\overrightarrow{AB}+3\cdot\overrightarrow{CA}\\-2\cdot\overrightarrow{AB}-3\cdot\overrightarrow{AB}&=6\cdot\overrightarrow{CA}\\-5\cdot\overrightarrow{AB}&=6\cdot\overrightarrow{CA}\\\overrightarrow{AB}&=-\frac{6}{5}\cdot\overrightarrow{CA}\end{aligned}$$
Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont colinéaires : les points A, B et C sont alignés.

Exercice 511

1. a. Placer trois points A, B, C non-alignés dans le plan.

   b. Nommer I le milieu du segment $[BC]$.

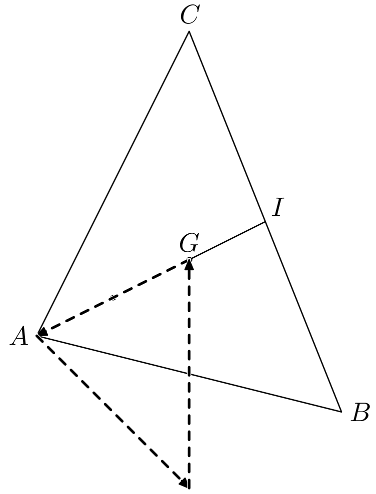
2. a. Placer le point G du plan vérifiant la relation :
   $3 \cdot \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{0}$.

   b. Tracer le représentant de la somme :
   $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$

3. Algébriquement, justifiez que le point G vérifie la relation :
   $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$

Correction 511

2. b.



3. Le point G est défini par la relation :
$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$$
D'après la relation de Chasles, on a :
$$\left(\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IA}\right) + \left(\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IB}\right) + \left(\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IC}\right) = \overrightarrow{0}$$
$$3 \cdot \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IA} + \left(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}\right) = \overrightarrow{0}$$
I est le milieu du segment $[BC]$:
$$3 \cdot \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$$
$$3 \cdot \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{0}$$