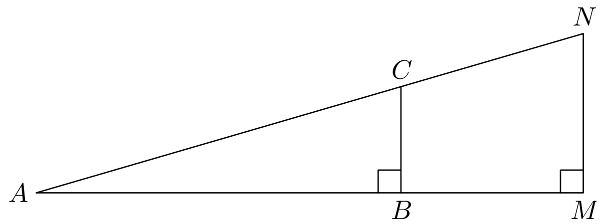
Dixième / Trigonométrie

1. Définition des relations trigonométriques :

Exercice 3643

On considère le triangle AMN rectangle en M ; les points B et C appartiennent respectivement aux segments $[BC]$ et $[MN]$; la droite (BC) est perpendiculaire à la droite (AM) :



1. A l'aide d'une règle graduée, donner une valeur approchée des mesures des côtés des deux triangles ABC et AMN.

2. A l'aide de la calculatrice, comparer les valeurs approchées des deux quotients suivants :
$\dfrac{BC}{AC}$; $\dfrac{MN}{AM}$

3. a. Justifier que les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

   b. Justifier l'égalité des deux quotients suivants :
   $\dfrac{BC}{MN} = \dfrac{AC}{AN}$

   c. En déduire l'égalité suivante :
   $\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{MN}{AN}$

   d. Comparer cette égalité avec vos résultats de la question 1. . Y avait-il une erreur dans vos calculs ? D'où pouvait venir cette erreur ?

4. A l'aide de mesures et de valeurs approchées, comparer les couples de quotients ci-dessous :

   a. $\dfrac{AB}{AC}$; $\dfrac{AM}{AN}$ b. $\dfrac{BC}{AC}$; $\dfrac{MN}{AM}$

Correction 3643

1. On a les valeurs approchées des quotients demandées :

   a. $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{4{,}9}{5} \simeq 0{,}98$ b. $\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{1{,}4}{5} \simeq 0{,}28$

   c. $\dfrac{BC}{AB} = \dfrac{1{,}4}{4{,}9} \simeq 0{,}286$ e. $\dfrac{MN}{AN} = \dfrac{2{,}1}{7{,}6} \simeq 0{,}276$

   f. $\dfrac{AM}{AN} = \dfrac{7{,}3}{7{,}6} \simeq 0{,}961$ g. $\dfrac{MN}{AM} = \dfrac{2{,}1}{7{,}3} \simeq 0{,}287$

2. a. On a :
   $(BC) \perp (AM)$; $(MN) \perp (AM)$
   Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième alors elles sont parallèles entre elles.
   On en déduit que :
   $(BC) /\!/ (MN)$

   b. Les points A, B, M et les points A, C, N sont alignés.
   Les droites (BC) et (MN) sont parallèles.
   D'après le théorème de Thalès, on a l'égalité suivante de quotients :
   $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AC}{AN} = \dfrac{BC}{MN}$

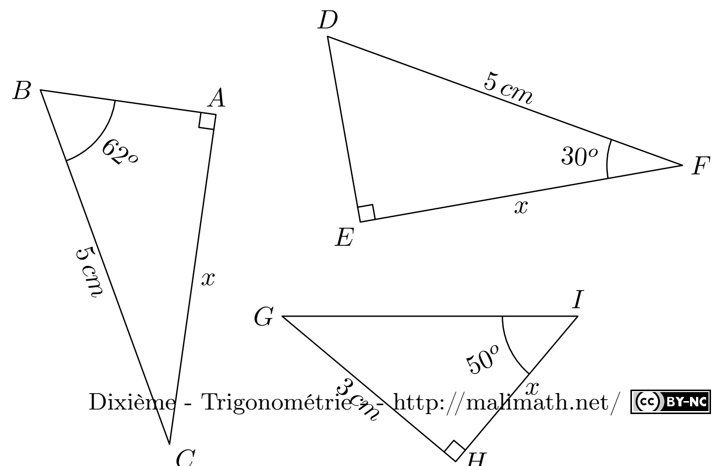
   c. D'après la question précédente, on a :
   $\dfrac{BC}{MN} = \dfrac{AC}{AN}$
   Le produit en croix permet d'écrire :
   $BC \times AN = AC \times MN$
   $\dfrac{BC \times AN}{AC} = \dfrac{AC \times MN}{AC}$
   $\dfrac{BC}{AC} \times AN = MN$
   $\dfrac{\frac{BC}{AC} \times AN}{AN} = \dfrac{MN}{AN}$
   $\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{MN}{AN}$

   d. Les valeurs obtenues à la question 1. ne vérifient pas l'égalité obtenue à la question précédente ; la mesure effectuée sur les longueurs des segments ne sont pas précises, entrainant ainsi la différence entre les deux quotients.

2. Relation métrique :

Exercice 898

Dans chaque cas, donner la longueur x du côté indiqué. On arrondiera le résultat au millimètre près :



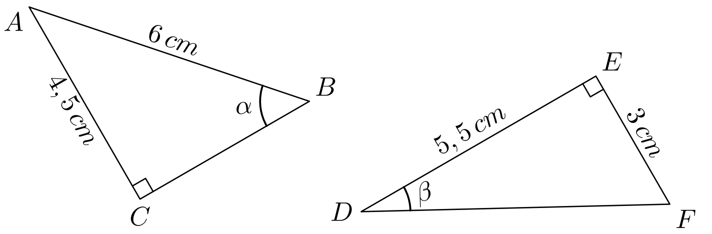
Correction 898

- Le triangle ABC est triangle en A.
  On a la relation trigonométrique :
  $$\sin\widehat{B} = \frac{AC}{BC}$$
  Par application numérique :
  $$\sin 62^o = \frac{AC}{5}$$
  On en déduit :
  $$AC = \sin 62^o \times 5 \simeq 4{,}4\,cm$$
- Le triangle DEF est rectangle en E.
  On a la relation trigonométrique :
  $$\cos\widehat{F} = \frac{EF}{DF}$$
  Par application numérique :
  $$\cos 30^o = \frac{EF}{5}$$
  A l'aide d'un produit en croix, on a :
  $$EF = \cos 30^o \times 5 \simeq 4{,}3\,cm$$
- Le triangle IGH est rectangle en H. On a la relation :
  $$\tan\widehat{I} = \frac{GH}{IH}$$
  $$\tan 50^o = \frac{2}{IH}$$
  Le produit en croix donne :
  $$IH \times \tan 50^o = 2$$
  On obtient la formule :
  $$IH = \frac{2}{\tan 50^o} \simeq 1{,}7\,cm$$

3. Relation trigonométrique inverse :

Exercice 3667

Calculer l'arrondi au dixième de degrès près des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{EDF}$ indiqués ci-dessous :



Correction 3667

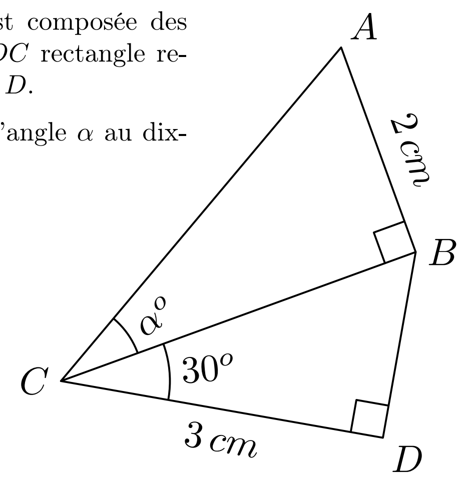
- Le triangle $\widehat{CBA}$ est rectangle en C.
  On a le rapport trigonométrique suivant :
  $$\sin\widehat{ABC} = \frac{AC}{AB}$$
  $$\sin\alpha = \frac{4{,}5}{6}$$
  Les relations trigonométriques réciproques donnent :
  $$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{4{,}5}{6}\right)$$
  $$\alpha \simeq 48{,}6^o$$
- Le triangle $\widehat{DEF}$ est rectangle en E.
  On a le rapport trigonométrique suivant :
  $$\tan\widehat{EDF} = \frac{EF}{ED}$$
  $$\tan\alpha = \frac{3}{5{,}5}$$
  Les relations trigonométriques réciproques donnent :
  $$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{3}{5{,}5}\right)$$
  $$\alpha \simeq 28{,}6^o$$

4. Toute relation trigonométrique :

Exercice 900

La figure ci-contre est composée des triangles ABC et BDC rectangle respectivement en B et D.

Donner la valeur de l'angle α au dixième près.



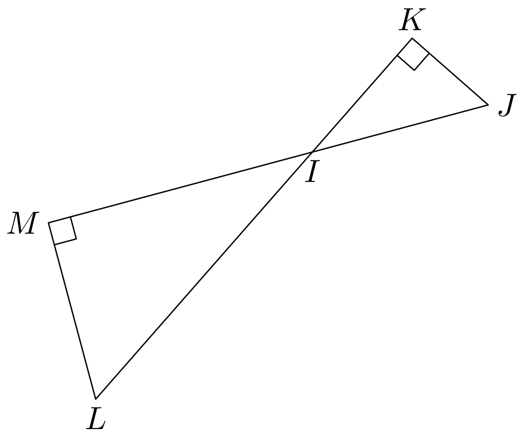
Correction 900

On résoud cet exercice en deux étapes :

- Dans le triangle BCD rectangle en D, on a la realtion trigonométrique :
$$\cos(\widehat{CDB}) = \frac{CD}{BC}$$
On en déduit :
$$\cos(30^o) = \frac{3}{BC}$$
$$\cos(30^o)\times BC = 3$$
$$BC = \frac{3}{\cos(30^o)} \simeq 3{,}46\,cm$$
- Dans le triangle ABC rectangle en B, on a la relation trigonométrique :
$$\tan(ACB) = \frac{AB}{BC}$$
On en déduit :
$$\tan(\alpha^o) = \frac{2}{3{,}46}$$
$$\alpha^o \simeq \tan^{-1}\left(\frac{2}{3{,}46}\right) \simeq 30^o$$

Exercice 2389

On considère la figure ci-contre qui n'est pas en vraie grandeur :



- Les segments $[KL]$ et $[JM]$ se coupent au point I ;
- $IK=4\,cm$; $JK=2{,}4\,cm$; $LM=4{,}2\,cm$.
- Le triangle IJK est rectangle en K ;
- Le triangle LIM est rectangle en M.

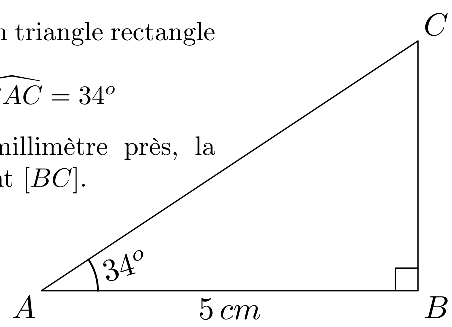
1. Calculer la valeur exacte de la tangente de l'angle $\widehat{KIJ}$.
2. Pourquoi les angles $\widehat{KIJ}$ et $\widehat{LIM}$ sont-ils égaux ?
3. Donner l'expression de la tangente de l'angle $\widehat{LIM}$ en fonction de IM
4. En s'aidant des réponses aux questions précédentes, prouver que la longueur IM en centimètres est un nombre entier.
5. Déterminer l'arrondi au degré de l'angle $\widehat{KIJ}$.

Correction 2389

1. Dans le triangle IKJ rectangle en K, on a la relation trigonométrique suivante :
$$\tan\widehat{KIJ} = \frac{KJ}{IK}$$
Par application numérique, on a :
$$\tan\widehat{KIJ} = \frac{2{,}4}{4}$$
$$\tan\widehat{KIJ} = \frac{3}{5}$$
2. Les angles $\widehat{KIJ}$ et $\widehat{LIM}$ sont des angles opposés par le sommet : ils sont donc égaux.
3. Dans le triangle MIL rectangle en M, on a la relation trigonométrique suivante :
$$\tan\widehat{LIM} = \frac{LM}{IM}$$
4. D'après la question 2., les angles $\widehat{KIJ}$ et $\widehat{LIM}$ sont égaux. Ainsi, la tangente de leurs angles a même valeur :
$$\tan\widehat{LIM} = \tan\widehat{KIJ} = \frac{3}{5}$$
D'après la question 3., on a la relation suivante :
$$\tan\widehat{LIM} = \frac{LM}{IM}$$
Par application numérique, on a :
$$\frac{3}{5} = \frac{4{,}2}{IM}$$
D'après le produit en croix, on a :
$$3\times IM = 5\times 4{,}2$$
$$IM = \frac{5\times 4{,}2}{3}$$
$$IM = 7\,cm$$
5. On a d'après la question 4., la relation suivante :
$$\tan\widehat{LIM} = \frac{3}{5}$$
D'après les relations trigonométriques inverses
$$\widehat{LIM} = \tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$$
$$\widehat{LIM} \simeq 31^o$$

Exercice 5206

Le triangle ABC est un triangle rectangle en B vérifiant :
$AC = 6\,cm$; $\widehat{BAC} = 34^o$



1. Déterminer, au millimètre près, la mesure du segment $[BC]$.

2. Donner, au centimètre carré, l'aire du triangle ABC.

Correction 5206

1. Le triangle ABC est rectangle en B.
On a le rapport trigonométrique suivant :

$$\tan \widehat{CAB} = \frac{BC}{AB}$$
$$\tan 34^o = \frac{BC}{5}$$

D'après le produit en croix, on a :

$$(\tan 34)\times 5 = BC$$
$$BC \simeq 3{,}4\,cm$$

2. Le triangle ABC est rectangle en B. Ainsi, l'aire du triangle ABC se détermine par la formule :
$\mathcal{A} = \dfrac{BA\times BC}{2} \simeq \dfrac{5\times 3{,}4}{2} = 8{,}5\,cm^2$

5. Modélisation :

Exercice 886

1. Tracer le triangle REC tel que :

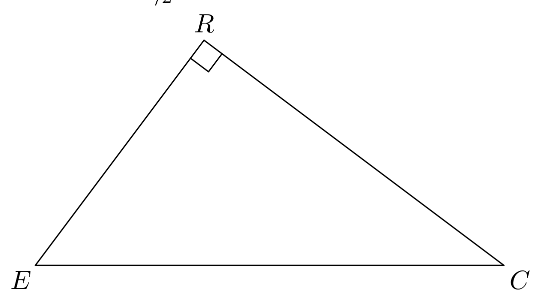
$RE = 7{,}5cm \quad ; \quad RC = 10cm \quad ; \quad EC = 12{,}5cm$

2. Montrer que le triangle REC est rectangle en R.

3. Donner les valeurs arrondies au degré près des angles de ce triangle.

Correction 886

1. Figure à l'échelle ½



2. On a :

$RE^2 = 7{,}5^2 = 56{,}25 \quad ; \quad RC^2 = 10^2 = 100$

$EC^2 = 12{,}5^2 = 156{,}25$

On remarque qu'on a $RE^2 + RC^2 = EC^2$.
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, on a :
Le triangle REC est rectangle en R.

3. Dans le triangle REC rectangle en R, on a la relation trigonométrique :

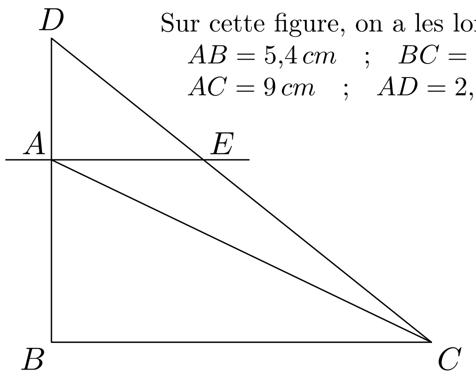
$$\tan \widehat{REC} = \frac{CR}{ER}$$
$$\tan \widehat{REC} = \frac{10}{7{,}5}$$
$$\tan \widehat{REC} = \frac{4}{3}$$

On en déduit :

$$\widehat{REC} = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$$
$$\widehat{REC} \simeq 53^o$$

Puisque $\widehat{ERC} = 90^o$, et que la somme des angles dans un triangle vaut 90^o, on a alors :
$\widehat{RCE} = 180 - (90 + 53) = 37^o$

Exercice 2388



Sur cette figure, on a les longueurs suivantes :
$AB = 5{,}4\,cm \quad ; \quad BC = 7{,}2\,cm$
$AC = 9\,cm \quad ; \quad AD = 2{,}6\,cm$

Les droites (AE) et (BC) sont parallèles.
la figure n'est pas à refaire. Elle n'est pas donnée en vraie grandeur.

1. Montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle en B.

2. Calculer la tangente de l'angle $\widehat{ACB}$, puis en déduire la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$ *(valeur arrondie au degré près).*

3. Calculer AE.

Correction 2388

1. On a les calculs :
   - $AB^2 + BC^2 = 5{,}4^2 + 7{,}2^2 = 81$
   - $AC^2 = 9^2 = 81$

On remarque que :
$AC^2 = AB^2 + BC^2$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, on déduit que le triangle ABC est rectangle en B.

2. Dans le triangle ABC, on a la relation trigonométrique suivant :

$$\tan \widehat{ACB} = \frac{AB}{BC}$$

Par application numérique, on a :

$$\tan \widehat{ACB} = \frac{5{,}4}{7{,}2}$$

On obtient pour la valeur de la tangente :

$$\tan \widehat{ACB} = \frac{3}{4}$$

Les formules trigonométriques inverses donnent :

$$\widehat{ACB} = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$\widehat{ACB} \simeq 37^o$$

3. Les points D, A et E sont alignés. Les points D, E et C sont alignés.
Les droites (AE) et (BC) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès, on a l'égalité des rapports de longueurs suivante :

$$\frac{DA}{DB} = \frac{DE}{DC} = \frac{AE}{BC}$$

Intéressons-nous à l'égalité :

$$\frac{DA}{DB} = \frac{AE}{BC}$$

Par application numérique :

$$\frac{2{,}6}{8} = \frac{AE}{7{,}2}$$

Le produit en croix donne :

$$2{,}6 \times 7{,}2 = 8 \times AE$$

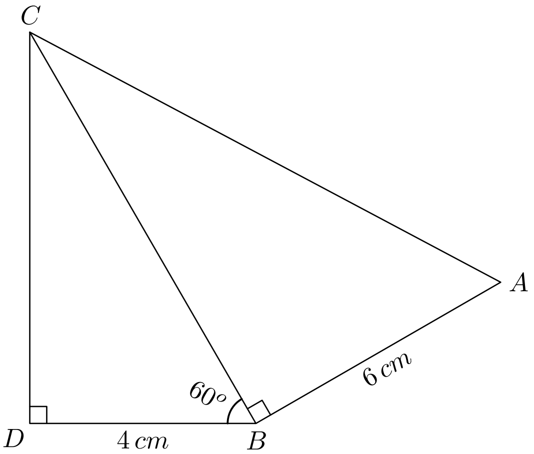
$$AE = \frac{2{,}6 \times 7{,}2}{8}$$

$$AE = 2{,}34\,cm$$

Exercice 3651

On donne :
$BD = 4\,cm$; $BA = 6\,cm$; $\widehat{DBC} = 60^o$

On ne demande pas de faire une figure en vraie grandeur.



1. Montrer que : $BC = 8\,cm$.
2. Calculer CD. Donner la valeur arrondie au dixième.
3. Calculer AC.
4. Quelle est la valeur de $\tan \widehat{BAC}$?
5. En déduire la valeur arrondie de $\widehat{BAC}$ au degré près.

Correction 3651

1. Dans le triangle BCD rectangle en D, on a la relation trigonométrique suivante :

$$\cos \widehat{CDB} = \frac{BD}{BC}$$

$$\cos 60^o = \frac{4}{BC}$$

$$BC \times \cos 60^o = 4$$

$$BC = \frac{4}{\cos 60^o}$$

$$BC = \frac{4}{\frac{1}{2}}$$

$$BC = 8\,cm$$

2. Dans le triangle BCD rectangle en D, on a la relation trigonométrique suivante :

$$\tan \widehat{CDB} = \frac{CD}{BD}$$

$$\tan \widehat{CDB} \times BD = CD$$

$$CD \simeq 6{,}9\,cm$$

(On aurait aussi pû utiliser le théorème de Pythagore pour déterminer la longueur BC)

3. Le triangle ABC est rectangle en B. D'après le théorème de Pythagore, on a l'égalité suivante :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$AC^2 = 6^2 + 8^2$$

$$AC^2 = 36 + 64$$

$$AC^2 = 100$$

On en déduire la valeur de AC :

$$AC = \sqrt{100} = 10\,cm$$

4. Dans le triangle ABC rectangle en B, on a la relation trigonométrique suivante :

$$\tan \widehat{BAC} = \frac{BC}{AB} = \frac{8}{6}$$

5. A l'aide des relations trigonométriques inverses, on en déduire la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$:

$$\tan \widehat{BAC} = \frac{8}{6}$$

$$\widehat{BAC} = \tan^{-1}\left(\frac{8}{6}\right)$$

$$\widehat{BAC} = 53^o$$

6. Trigonométrie et théorème de Thalès :

Exercice 890

Les questions sont indépendantes les unes des autres

MNP est un triangle rectangle en P tel que :

$$MP = 5\,cm \quad ; \quad MN = 7\,cm$$

1. Calculer la mesure, arrondie au degré, de l'angle $\widehat{MNP}$.
2. Calculer la valeur exacte de NP ; Donner sa valeur arrondie au mm.
3. Soit I le point du segment $[MP]$ tel que $PI = 2\,cm$. La parallèle à (MN) passant par I coupe $[PN]$ en J. Calculer IJ.

Correction 890

1. Dans le triangle MNP rectangle en P, on a la relation trigonométrique :

$$\sin\left(\widehat{MNP}\right) = \frac{MP}{MN}$$

$$\sin\left(\widehat{MNP}\right) = \frac{5}{7}$$

$$\widehat{MNP} = \sin^{-1}\left(\frac{5}{7}\right) \simeq 46^o$$

2. Le triangle MNP est rectangle en P.
D'après le théorème de Pythagore, on a la relation :

$$MN^2 = MP^2 + NP^2$$

On en déduit :

$$7^2 = 5^2 + NP^2$$

$$49 - 25 = NP^2$$

$$NP = \sqrt{24} \simeq 4{,}9\,cm$$

3. Les points P, I, M et les points P, J, N sont alignés.
Les droites (IJ) et (MN) sont parallèles.
D'après le théorème de Thalès, on a l'égalité de rapports suivants :

$$\frac{PJ}{PN} = \frac{PI}{PM} = \frac{IJ}{MN}$$

On en déduit la relation :

$$\frac{PI}{PM} = \frac{IJ}{MN}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{IJ}{7}$$

D'après le produit en croix, on obtient :

$$2\times 7 = IJ\times 5$$

$$IJ = \frac{14}{5} = 2{,}8\,cm$$

Exercice 884

L'unité de longueur est le centimétre.

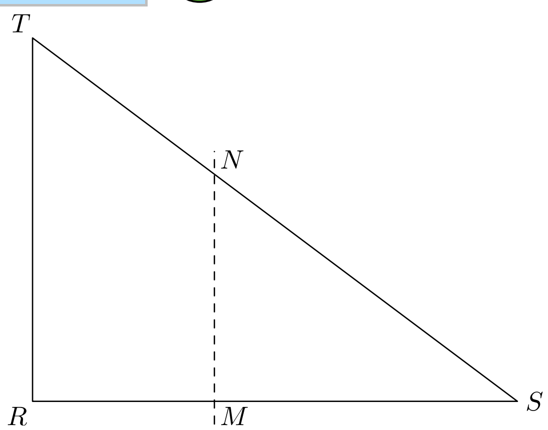
RST est un triangle tel que :

$$RS = 6{,}4 \quad ; \quad ST = 8 \quad ; \quad RT = 4{,}8$$

1. Construire la figure en vraie grandeur.
2. Démontrer que le triangle RST est rectangle en R.
3. Calculer la valeur arrondie au degré près de la mesure de l'angle $\widehat{RST}$.
4. M est le point du segment $[SR]$ tel que $SM = 4$; et N est le point du segment $[ST]$ tel que $SN = 5$.
   a. Démontrer que les droites (MN) et (RT) sont parallèles.
   b. Calculer la distance MN.

Correction 884

1.



2. On a les valeurs suivantes :
- $RT^2 + RS^2 = 6{,}4^2 + 4{,}8^2 = 40{,}96 + 23{,}04 = 64$
- $TS^2 = 64$

Le triangle RST vérifie l'égalité de Pythagore.
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle RST est rectangle en R.

3. Les relations trigonométriques dans un triangle rectangle permet d'écrire la relation suivante :

$$\sin\widehat{RST} = \frac{RT}{TS}$$

$$\sin\widehat{RST} = \frac{4{,}8}{8}$$

$$\sin\widehat{RST} = 0{,}6$$

D'après les relations trigonométriques réciproques, on a :

$$\widehat{RST} = \sin^{-1}\left(0{,}6\right)$$

$$\widehat{RST} \simeq 53^o$$

4. (RS) et (ST) sont deux droites sécantes en S.
Les points S, M et R et les points S, N et T sont alignés et dans le même ordre sur leurs droites respectives.
De plus, on a les valeurs des deux quotients suivant :
- $\dfrac{SN}{ST} = \dfrac{5}{8} = 0{,}625$
- $\dfrac{SM}{SR} = \dfrac{4}{6{,}4} = 0{,}625$

On a donc :

$$\frac{SN}{ST} = \frac{SM}{SR}$$

Ainsi, la réciproque du théorème de Thalès nous dit que les droites (MN) et (RT) sont parallèles.

5. Les points S, M et R et les points S, N et T sont alignés.
Et les droites (MN) et (RT) sont parallèles.
Utilisons maintenant le théorème de Thalès pour calculer la distance MN.
On obtient l'égalité de rapport :

$$\frac{SN}{ST} = \frac{SM}{SR} = \frac{MN}{RT}$$

Le produit en croix donne :

$$SM \times RT = SR \times MN$$
$$4 \times 4{,}8 = 6{,}4 \times MN$$

On en déduit :

$$MN = \frac{4 \times 4{,}8}{6{,}4} = 3$$

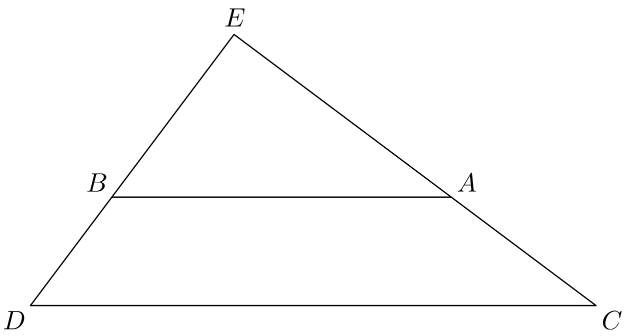
Exercice 3650

la figure qui suit n'est pas en vraie grandeur. Il n'est pas demandé de la reproduire. L'unité est le centimètre.

Le point B appartient au segment $[DE]$ et le point A au segment $[CE]$.
On donne :

$ED = 9$; $EB = 5{,}4$; $EC = 12$

$EA = 7{,}2$; $CD = 15$



1. Montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
2. Calculer la longueur du segment $[AB]$.
3. Montrer que les droites (CE) et (DE) sont perpendiculaires.
4. a. Calculer la valeur arrondie au degré près de l'angle $\widehat{ECD}$.

   b. En déduire, sans faire de calcul, celle de l'angle $\widehat{EAB}$. Justifier.

Correction 3650

1. Les points E, B, D et les points E, A, C sont alignés dans le même ordre. On a les deux valeurs suivantes :
$$\frac{EB}{ED} = \frac{5{,}4}{9} = 0{,}6 \quad ; \quad \frac{EA}{EC} = \frac{7{,}2}{12} = 0{,}6$$
On remarque ainsi l'égalité suivante des rapports de longueurs :
$$\frac{EB}{ED} = \frac{EA}{EC}$$
D'après la réciproque du théorème de Thalès, on en déduit que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

2. Les points E, B, D et les points E, A, C sont alignés. Les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
D'après le théorème de Thalès, on a l'égalité des rapports suivant :
$$\frac{EB}{ED} = \frac{EA}{EC} = \frac{AB}{CD}$$
Utilisons l'égalité suivante :
$$\frac{EB}{ED} = \frac{AB}{CD}$$
Par application numérique, on a :
$$\frac{5{,}4}{9} = \frac{AB}{15}$$
D'après le produit en croix, on a :
$$5{,}4 \times 15 = 9 \times AB$$
$$AB = \frac{5{,}4 \times 15}{9}$$
$$AB = 9$$

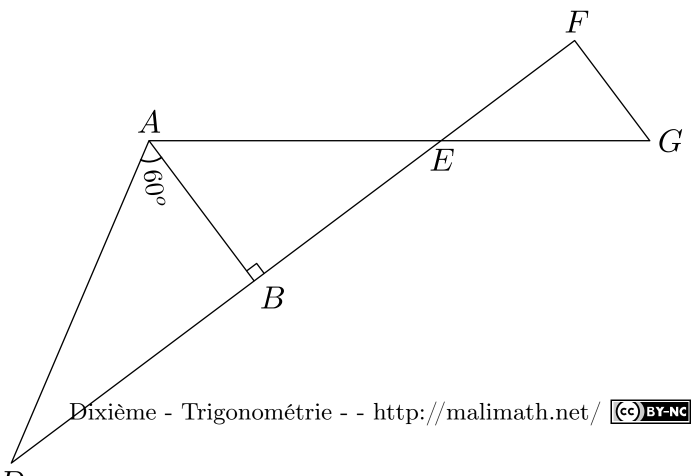
3. On a les calculs suivants :
   - $CD^2 = 15^2 = 225$
   - $ED^2 + EC^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$

   Ainsi, on observe l'égalité suivante :
   $CD^2 = ED^2 + EC^2$
   D'après la réciproque du théorème de Pythagore, on en déduit que le triangle EDC est rectangle en E ; ainsi, les droites (EC) et (ED) sont perpendiculaires.

4. a. Dans le triangle EDC rectangle en E, on a la relation trigonométrique suivante :
$$\sin \widehat{ECD} = \frac{ED}{CD}$$
$$\sin \widehat{ECD} = \frac{9}{15}$$
On a la relation trigonométrique inverse :
$$\widehat{ECD} = \sin^{-1}\left(\frac{9}{15}\right)$$
$$\widehat{ECD} \simeq 37^o$$

   b. Les angles $\widehat{ECD}$ et $\widehat{EAB}$ sont deux angles correspondants ; les droites (AB) et (CD) sont parallèles, ainsi ces deux angles ont même mesure :
$$\widehat{EAB} = \widehat{ECD} \simeq 37^o$$

Exercice 3635



On sait que :

$EF=4\,cm$; $FG=3\,cm$; $EG=5\,cm$

$AE=7\,cm$; $\widehat{DAB}=60^o$;

Les points A, E et G sont alignés ; les points D, E et F sont alignés ; (AB) est la hauteur issue de A dans le triangle AED.

On considère la figure ci-dessus *(les dimensions ne sont pas respectées)* :

1. Démontrer que EFG est un triangle rectangle.
2. En déduire que (FG) est parallèle à (AB).
3. Démontrer que $EB=5{,}6\,cm$ et $AB=4{,}2\,cm$.
4. Dans le triangle DAB, calculer BD, puis calculer DE. On donnera une valeur approchée de ces deux nombres au millimètre près.
5. Calculer l'aire du triangle AED à $1\,cm^2$ près.

Correction 3635

1. On a les valeurs suivantes :
   - $EF^2+FG^2=4^2+3^2=16+9=25$
   - $EG^2=5^2=25$

   Le triangle EFG vérifie l'égalité de Pythagore :
   $EG^2=EF^2+FG^2$.
   D'après la réciproque du théorème de Pythagore, on en déduit que le triangle EFG est rectangle en F.
2. Le triangle EFG est rectangle en F : $(FG)\perp(EF)$.
   $[AB]$ est la hauteur du triangle AED issue de A : $(AB)\perp(DE)$.

   Si deux droites sont perpendiculaires à une même droite alors ces deux droites sont parallèles entre elles.

   Les droites (AB) et (FG) sont parallèles entre elles.
3. Les points A, E, G et les points B, E, F sont alignés.
   Les droites (AB) et (FG) sont parallèles.
   D'après le théorème de Thalès, on a l'égalité des rapports suivants :
   $$\frac{EB}{EF}=\frac{EA}{EG}=\frac{AB}{FG}$$
   - Utilisons l'égalité :
     $$\frac{EB}{EF}=\frac{EA}{EG}$$
     Par application numérique :
     $$\frac{EB}{4}=\frac{7}{5}$$
     D'après le produit en croix, on a :
     $$5\times EB=4\times 7$$
     $$EB=\frac{4\times 7}{5}$$
     $$EB=5{,}6\,cm$$
   - Utilisons l'égalité :
     $$\frac{EA}{EG}=\frac{AB}{FG}$$
     Par application numérique :
     $$\frac{7}{5}=\frac{AB}{3}$$
     D'après le produit en croix, on a :
     $$7\times 3=5\times AB$$
     $$AB=\frac{7\times 3}{5}$$
     $$AB=4{,}2\,cm$$
4. Le triangle DAB rectangle en B, on a les deux relations trigonométriques suivantes :
   - $$\tan\widehat{DAB}=\frac{DB}{AB}$$
     $$\tan 60=\frac{DB}{4{,}2}$$
     $$DB=4{,}2\times\tan 60$$
     $$DB\simeq 7{,}3\,cm$$
   - Le point B est un point du segment $[DE]$. On en déduit l'égalité :
     $$DE=DB+BE\simeq 7{,}27+5{,}6=12{,}9\,cm$$
5. L'aire du triangle AED se calcule par :
   $$\mathcal{A}=\frac{AB\times DE}{2}=\frac{4{,}2\times 12{,}87}{2}=27\,cm^2$$

7. Trigonométrie, triangle rectangle et cercle circonscrit :

Exercice 893

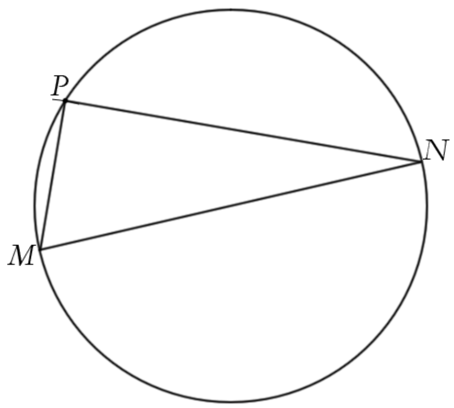
L'unité de longueur est le centimètre.

$\mathscr{C}$ est un cercle de $2{,}6\,cm$ de rayon.
Le segment $[MN]$ est un diamètre de ce cercle.
P est un point du cercle tel que $MP=2$.

1. Construire la figure
2. Démontrer que le triangle MNP est rectangle en P.
3. Calculer la longueur PN.
4. a. Calculer le cosinus de l'angle $\widehat{NMP}$. Arrondir le résultat au millième.

   b. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{NMP}$

Correction 893

1. 

2. Le triangle MNP est inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$ et $[MN]$ est un diamètre du cercle $\mathscr{C}$.
   Si, dans un cercle, un triangle a pour sommets les ex-

trémités d'un diamètre et un point du cercle Alors ce triangle est rectangle en ce point.
Le triangle MNP est rectangle en P.

3. Le triangle MNP est rectangle en P.
D'après le théorème de Pythagore, on a la relation :
$$MN^2 = MP^2 + NP^2$$
$$5{,}2^2 = 2^2 + NP^2$$
$$27{,}4 - 4 = NP^2$$
$$NP = \sqrt{23{,}4}$$

4. a. Dans le triangle MNP rectangle en P, on a la relation trigonométrique suivante :
$$\cos(\widehat{NMP}) = \frac{MP}{MN}$$
$$\cos(\widehat{NMP}) = \frac{2}{2{,}6}$$
$$\cos(\widehat{NMP}) = 0{,}769$$

b. De la relation trigonométrique précédente :
$$\cos(\widehat{NMP}) = \frac{2}{2{,}6}$$
$$\widehat{NMP} = \cos^{-1}\left(\frac{2}{2{,}6}\right)$$
$$\widehat{NMP} \simeq 40^o$$

Exercice 4112

Toutes les questions sont indépendantes.

Soit un triangle ABC tel que :
$AB = 7{,}5\,cm$; $AC = 4{,}5\,cm$; $BC = 6\,cm$

1. Faire une figure que l'on complétera au fur et à mesure.

2. Montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle.

3. a. Placer le point E du segment $[AB]$ tel que : $BE = 5\,cm$.
Le cercle de diamètre $[BE]$ coupe le côté $[BC]$ en F.

b. Montrer que le triangle BFE est rectangle.

4. a. Montrer que les droites (FE) et (AC) sont parallèles.

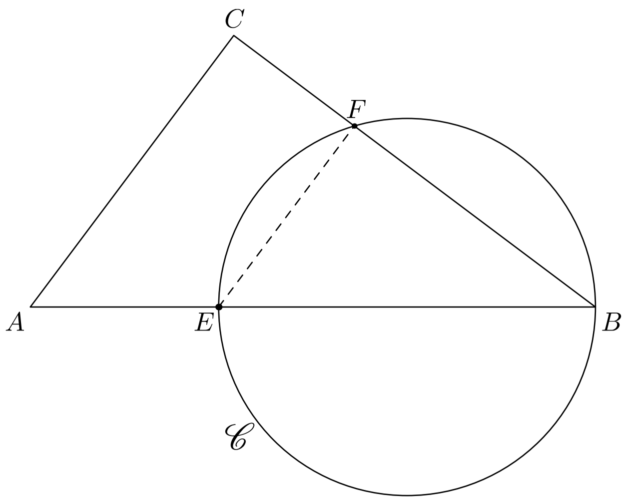
b. Calculer FB et FE.

5. a. Calculer $\sin\widehat{ABC}$.

b. Donner une valeur approchée au degré près de $\widehat{ABC}$.

Correction 4112

1. Voici la figure de l'exercice :



2. On a les calculs suivants :
- $AC^2 + BC^2 = 4{,}5^2 + 6^2 = 20{,}25 + 36 = 56{,}25$
- $AB^2 = 7{,}5^2 = 56{,}25$

Le triangle ABC vérifie l'égalité de Pythagore :
$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en C.

3. b. Notons $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[BE]$.
Le triangle BEF est inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$ et son côté $[BE]$ forme un diamètre du triangle ABC.
Si un triangle est inscrit dans un cercle et si un de ses côtés forme un diamètre de ce cercle alors ce triangle est rectangle et ce côté forme l'hypothènuse.
On en déduit que le triangle BEF est rectangle en F.

4. a. Le triangle ABC est rectangle en C : $(AC) \perp (BC)$.
Le triangle BEF est rectangle en F : $(EF) \perp (BC)$.
Si deux droites sont perpendiculaires à une même droite alors elles sont parallèles entre elles.
On en déduit : $(AC)/\!/(FE)$.

b. Les points B, F, C et les points B, E, A sont alignés.
Les droites (EF) et (AC) sont parallèles.
D'après le théorème de Thalès, on a l'égalité des rapports suivants :
$$\frac{BE}{BA} = \frac{BF}{BC} = \frac{EF}{AC}$$

- Utilisons l'égalité :
$$\frac{BE}{BA} = \frac{FB}{BC}$$
$$\frac{5}{7{,}5} = \frac{FB}{6}$$
D'après le produit en croix, on a :
$$5\times6 = FB\times7{,}5$$
$$FB = \frac{5\times6}{7{,}5}$$
$$FB = 4\,cm$$

- Utilisons l'égalité :
$$\frac{BE}{BA} = \frac{EF}{AC}$$
$$\frac{5}{7{,}5} = \frac{EF}{4{,}5}$$
D'après le produit en croix, on a :
$$5\times4{,}5 = 7{,}5\times EF$$
$$EF = \frac{5\times4{,}5}{7{,}5}$$
$$EF = 3\,cm$$

5. a. Dans le triangle ABC rectangle en C, on a le rapport trigonométrique suivant :
$$\sin\widehat{ABC} = \frac{AC}{AB}$$
Par application numérique, on a :
$$\sin\widehat{ABC} = \frac{4{,}5}{7{,}5}$$
$$\sin\widehat{ABC} = 0{,}6$$

b. De la relation de la question précédente :

$\sin\widehat{ABC} = 0{,}6$

Les relations trigonométriques inverses donnent :

$\widehat{ABC} = \sin^{-1}(0{,}6)$

$\widehat{ABC} \simeq 37^o$

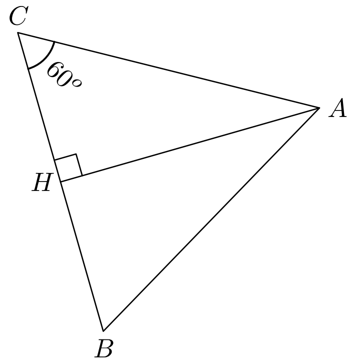
8. Angles remarquables :

Exercice 899

1. Construisez un triangle ABC équilatéral de côté $4\,cm$. Soit H le pied de la hauteur issue de A.
2. Donnez la valeur exacte de la longueur AH.
3. Déterminez la valeur exacte de $sin(60^o)$ dans le triangle ACH

Correction 899

1. Voici la figure demandée



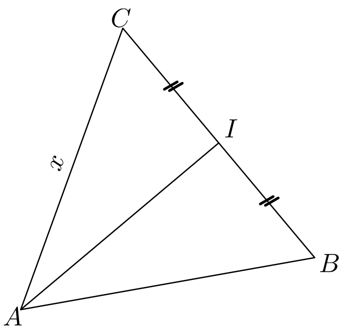
2. Le triangle ACH est rectangle en H.
D'après le théorème de Pythagore, on a :
$AC^2 = CH^2 + HA^2$
On en déduit :
$4^2 = 2^2 + HA^2$
$16 - 4 = HA^2$
$HA = \sqrt{12} = \sqrt{4\times3} = 2\sqrt{3}$

3. Dans un triangle équilatéral, tous les angles ont pour mesure 60^o.
Dans le triangle ACH rectangle en H, on a :
$\sin(\widehat{HCA}) = \dfrac{AH}{AC}$
On en déduit
$\sin(60^o) = \dfrac{2\sqrt{3}}{4}$
$\sin(60^o) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

9. Divers :

Exercice 463

Soit ABC un triangle équilatéral dont la mesure des côtés vaut x.
On note I le milieu du segment $[BC]$.



1. Que représente la droite (AI) dans le triangle ABC ?
2. Remplir le tableau ci-dessous :

	$\widehat{CIA}$	$\widehat{CAB}$	$\widehat{CAI}$	$\widehat{ICA}$
Mesure en degré				

3. a. Donner la mesure du segment $[CI]$ en fonction de x.
   b. A l'aide du théorème de Pythagore, déterminer la mesure du segment $[AI]$ en fonction de x.
   c. Dans le triangle AIC, déterminer le sinus, le cosinus et la tangente des angles $\widehat{IAC}$ et $\widehat{ICA}$. Puis, remplir le tableau suivant :

α	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\tan\alpha$
60^o			
30^o			

Correction 463

1. I est le milieu de $[BC]$ et le triangle ABC est équilatéral. Sachant que :

   Dans un triangle équilatéral, la hauteur, la médiatrice, la médiane, la bissectrice issues d'un même sommet sont toutes confondues.

   On en déduit que (AI) est la médiane, médiatrice, bissectrice, haueteur issue de A.

2.

	$\widehat{CIA}$	$\widehat{CAB}$	$\widehat{CAI}$	$\widehat{IAC}$
Mesure en degré	90	60	30	30

3. a. $CI = \dfrac{1}{2}x$
   b. Le triangle AIC est rectangle en I.

D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$AC^2 = AI^2 + IC^2$$
$$x^2 = AI^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2$$
$$x^2 = AI^2 + \frac{x^2}{4}$$
$$AI^2 = x^2 - \frac{x^2}{4}$$
$$AI^2 = \frac{3x^2}{4}$$
$$AI = \sqrt{\frac{3x^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{4}x$$

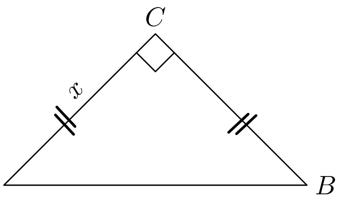
c. Voici quelques relations trigonométriques obtenues à partir du triangle AIC :

- $\cos\widehat{CAI} = \dfrac{AI}{CA} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}x}{x} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\sin\widehat{CAI} = \dfrac{CI}{AC} = \dfrac{\frac{x}{2}}{x} = \dfrac{1}{2}$
- $\cos\widehat{ICA} = \dfrac{IC}{AI} = \dfrac{\frac{x}{2}}{x} = \dfrac{1}{2}$
- $\sin\widehat{ICA} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}x}{2}}{x} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

α	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\tan\alpha$
60^o	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
30^o	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Exercice 464

On considère le triangle rectangle-isocèle en C ci-contre. On note x la mesure du côté AC.



1. Compléter le tableau :

	$\widehat{ACB}$	$\widehat{CAB}$
Mesure en degré		

2. a. A l'aide du théorème de Pythagore, exprimer la mesure du côté $[AB]$ en fonction de x.

   b. Dans le triangle rectangle ABC, déterminer le sinus, le cosinus et la tangente de l'angle $\widehat{CAB}$.

   c. Compléter le tableau :

α	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\tan\alpha$
45^o			

Correction 464

1.

	$\widehat{ACB}$	$\widehat{CAB}$
Mesure en degré	90	45

2. a. Le triangle ABC est rectangle en C.
D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$
$$AB^2 = x^2 + x^2$$
$$AB^2 = 2{\cdot}x^2$$
$$AB = \sqrt{2{\cdot}x^2}$$
$$AB = \sqrt{2}{\cdot}x$$

b.
- $\cos\widehat{CAB} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{x}{\sqrt{2}{\cdot}x} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $\sin\widehat{CAB} = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $\tan\widehat{CAB} = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$

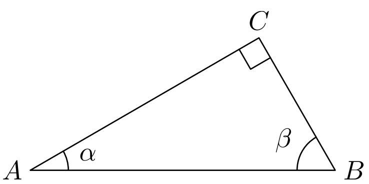
c.

α	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\tan\alpha$
45^o	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1

Exercice 468

On considère un triangle ABC rectangle en C. On note :

$\alpha = \widehat{CAB}$; $\beta = \widehat{ABC}$



1. En fonction des mesures des côtés du triangle ABC :

   a. Exprimer les valeurs de $\cos\alpha$ et $\sin\beta$.

   b. Comparer les valeurs de $\tan\alpha$ et $\tan\beta$

2. Justifier que pour $\alpha\in[0\,;90]$, on a :

   - $\cos\alpha = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$
   - $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right) = \dfrac{1}{\tan\alpha}$

3. En exprimant $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$ en fonction des mesures des côtés du triangle ABC et en utilisant le théorème de Pythagore, mettre en évidence la formule suivante :

$$\left(\cos\alpha\right)^2 + \left(\sin\alpha\right)^2 = 1$$

Correction 468

1. a. On a :

$$\cos\alpha = \frac{AC}{AB} \quad ; \quad \sin\beta = \frac{AC}{AB}$$

   b. On a :

$$\tan\alpha = \frac{BC}{AC} \quad ; \quad \tan\beta = \frac{AC}{BC}$$

On remarque :

$$\frac{1}{\tan\alpha} = \frac{1}{\frac{BC}{AC}} = \frac{AC}{BC} = \tan\beta$$

2. La supplémentarité des angles dans un triangle permet d'obtenir la relation :

$$\widehat{ABC}+\widehat{BCA}+\widehat{CBA}=180^o$$
$$\beta+90+\alpha=180$$
$$\beta=180-90-\alpha$$
$$\beta=90-\alpha$$

De la question 1., on déduit :

- $\cos\alpha=\sin\beta$

  $\cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

- $\tan\beta=\dfrac{1}{\tan\alpha}$

  $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\dfrac{1}{\tan\alpha}$

3. $\left(\cos\alpha\right)^2+\left(\sin\alpha\right)^2=\left(\dfrac{AC}{AB}\right)^2+\left(\dfrac{BC}{AB}\right)^2$

$$=\frac{AC^2}{AB^2}+\frac{BC^2}{AB^2}=\frac{AC^2+BC^2}{AB^2}$$

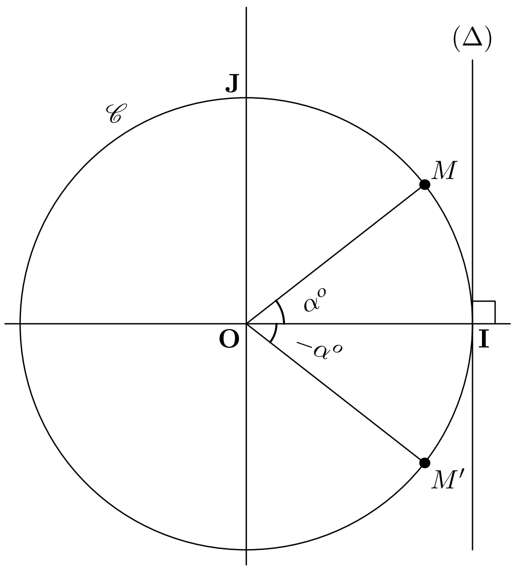
D'après le théorème de Pythagore :

$$=\frac{AB^2}{AB^2}=1$$

11. Relation entre cosinus et sinus :

Exercice 469

On considère un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$ et le cercle trigonométrique de ce repère : c'est à dire le cercle de centre O et de rayon 1. La droite (Δ) est la tangente en I au cercle $\mathscr{C}$.



Soit α un nombre réel quelconque. On considère les points $M(\alpha)$ et $M'(-\alpha)$.

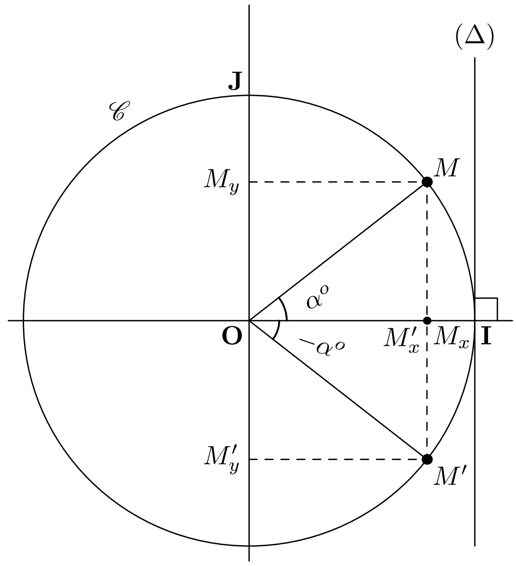
Un exemple de cette situation est donnée dans le graphique ci-contre.

1. Pour mettre en évidence, les différentes valeurs des fonctions trigonométriques associées aux angles α et $-\alpha$:
   a. Tracer le projeté orthogonal de M sur la droite (OI). Le nommer M_x.
   b. Tracer le projeté orthogonal de M sur la droite (OJ). Le nommer M_y.
   c. Nommer N le point d'intersection des droites (OM) et (Δ).
   Tracer le projeté orthogonal de N sur la droite (OJ). Le nommer N_y.
   d. Faîtes de même pour le point M'

2. a. Comparer les abscisses des points M et M'.
   b. En déduire une relation entre $\cos\alpha$ et $\cos(-\alpha)$?.
3. a. Comparer les ordonnées des points M et M'.
   b. En déduire une relation entre $\sin\alpha$ et $\sin(-\alpha)$?.
4. a. Comparer les ordonnées des points N et N'.
   b. En déduire une relation entre $\tan\alpha$ et $\tan(-\alpha)$?.

Correction 469

1.

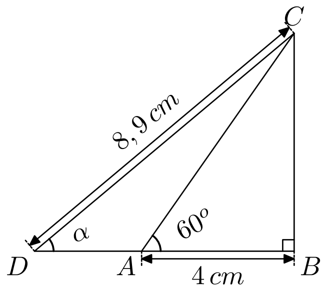


2. a. Les abscisses des points M et M' sont égaux.
   b. On a :
   $\cos\alpha=\cos(-\alpha)$
3. a. Les ordonnées des points M et M' sont opposées.
   b. On en déduit :
   $\sin\alpha=\sin(-\alpha)$
4. a. Les ordonnées des points N et N' sont opposées.
   b. On a la relation suivante :
   $\tan\alpha=-\tan(\alpha)$

12. Rappels :

Exercice 6037

On considère le triangle ABC rectangle en B représenté ci-dessous :



1. Déterminer la longueur du segment $[BC]$ arrondie au millimètre près.

2. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{CDB}$ arrondie au degré près.

Correction 6037

1. Le triangle ABC est rectangle en B. On a la relation trigonométrique suivante :

$$\tan\widehat{BAC} = \frac{BC}{AB}$$
$$\tan 60 = \frac{BC}{4}$$

Le produit croix permet d'écrire :

$$4\times\tan 60 = BC$$
$$BC \simeq 6{,}9$$

2. Dans le triangle DBC rectangle en B, on a la relation trigonométrique :

$$\sin\widehat{BDC} = \frac{BC}{DC}$$
$$\sin\alpha = \frac{6{,}9}{8{,}9}$$

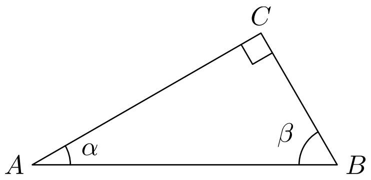
Les relations trigonométriques réciproques donnent :

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{6{,}9}{8{,}9}\right)$$
$$\alpha \simeq 51^o$$

Exercice 2289

On considère un triangle ABC rectangle en C. On note :

$\alpha = \widehat{CAB}$; $\beta = \widehat{ABC}$



1. Justifier que les angles $\widehat{CAB}$ et $\widehat{CBA}$ sont deux angles complémentaires.

2. a. A l'aide des longueurs des côtés du triangle ABC, exprimer les valeurs de $\cos\alpha$ et $\sin\beta$.

   b. En déduire l'égalité : $\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

3. a. A l'aide des longueurs des côtés du triangle ABC, exprimer les valeurs de $\tan\alpha$ et $\tan\beta$

   b. En déduire l'égalité : $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \frac{1}{\tan\alpha}$

4. Etablir l'égalité :
$$\big(\cos\alpha\big)^2 + \big(\sin\alpha\big)^2 = 1$$

Correction 2289

1. La somme de la mesure des angles dans un triangle a pour valeur 180^o. On en déduit l'égalité :

$$\widehat{CAB}+\widehat{CBA}+\widehat{ACB} = 180$$
$$\widehat{CAB}+\widehat{CBA}+\frac{\pi}{2} = \pi$$
$$\widehat{CAB}+\widehat{CBA} = \pi-\frac{\pi}{2}$$
$$\widehat{CAB}+\widehat{CBA} = \frac{\pi}{2}$$

On vient de montrer que ces deux angles sont complémentaires.

2. a. Dans le triangle ABC rectangle en C, on a l'expression des deux rapports trigonométriques :

$$\cos\alpha = \frac{AC}{AB} \quad ; \quad \sin\beta = \frac{AC}{AB}$$

On en déduit que l'égalité du cosinus et du sinus de deux angles complémentaires.

   b. On vient de montrer l'égalité :

$$\cos\alpha = \sin\beta$$

Les angles α et β étant complémentaire :

$$\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

3. a. Dans le triangle ABC rectangle en C, on a l'expression des deux rapports trigonométriques :

$$\tan\alpha = \frac{BC}{AC} \quad ; \quad \tan\beta = \frac{AC}{BC}$$

On en déduit l'égalité : $\tan\beta = \frac{1}{\tan\alpha}$

Ainsi, la tangente de deux angles complémentaires sont inverses l'un de l'autre.

   b. On vient de montrer l'égalité :

$$\tan\beta = \frac{1}{\tan\alpha}$$
$$\tan\big(90-\alpha\big) = \frac{1}{\tan\alpha}$$

4. Etudions l'expression suivante :

$\big(\cos\alpha\big)^2 + \big(\sin\alpha\big)^2$

qui admet en fonction des longueurs des côtés du triangle ABC :

$$= \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 = \frac{AC^2}{AB^2}+\frac{BC^2}{AB^2} = \frac{AC^2+BC^2}{AB^2}$$

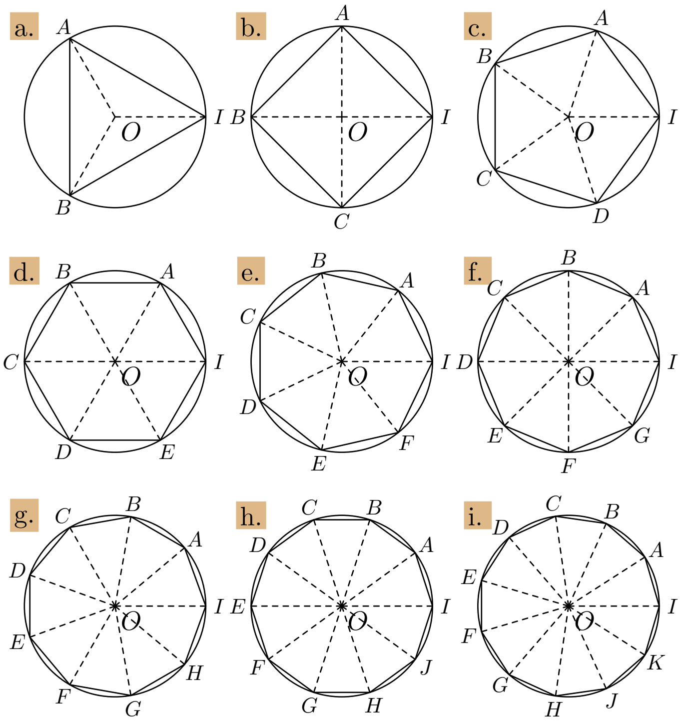
Le triangle ABC est rectangle en C. D'après le théorème de Pythagore :

$$= \frac{AB^2}{AB^2} = 1$$

13. Radians :

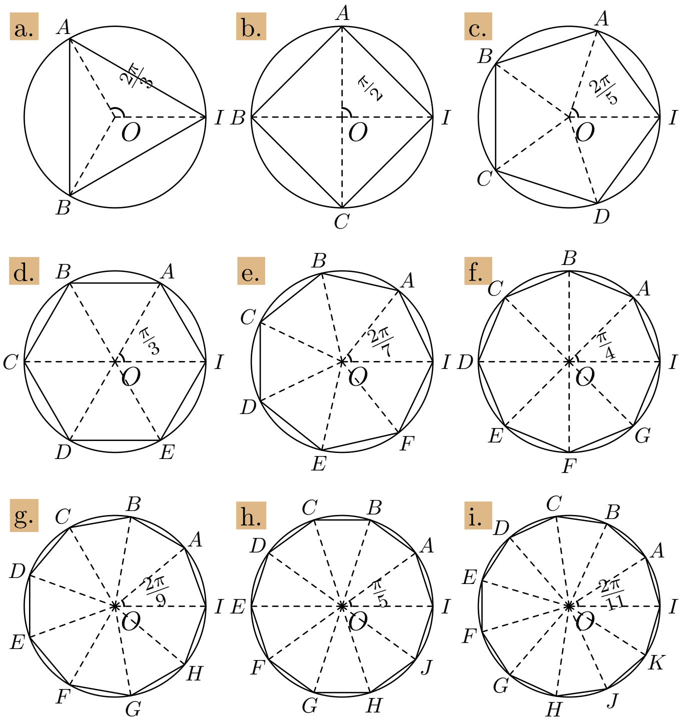
Exercice 2294

On a représenté ci-dessous les neufs premiers polygones réguliers inscrit dans le cercle trigonométrique. Donner la mesure, en radians, de l'angle au centre séparant deux sommets consécutifs de chacun de ces polygones :



Sauriez-vous les nommer ?

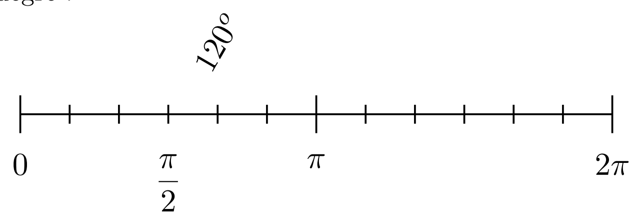
Correction 2294



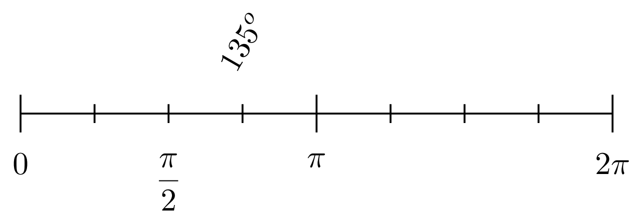
Exercice 2807

Ci-dessous sont représentées deux droites graduées représentant l'intervalle $[0\,;2\pi]$. Compléter la graduation du bas *(représentant une mesure d'angle en radian)*, puis compléter les valeurs du haut représentant la conversion correspondante en degré :

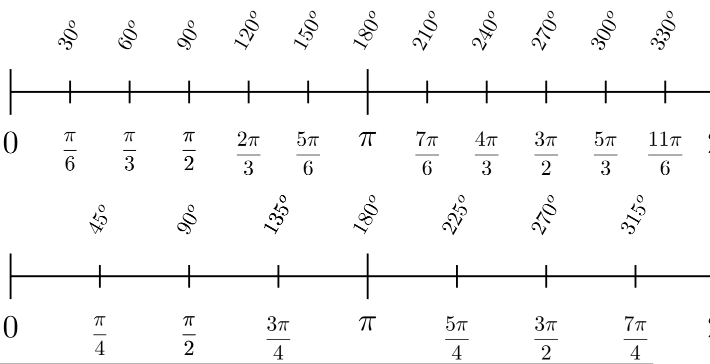
1.



2.



Correction 2807



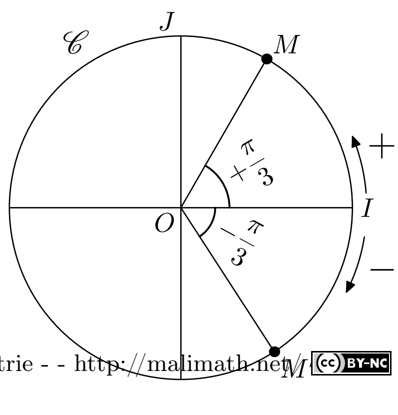
14. Angles orientés :

Exercice 2746

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\,;I\,;J)$, on considère le cercle de centre O et de rayon 1 appelé **cercle trigonométrique**.

Tout point M définit un angle géométrique $\widehat{IOM}$.

Le sens de parcours du cercle trigonométrique permet de caractériser tout point du cercle par son angle géométrique :



- l'angle est positif si l'arc $\widehat{IM}$ est orienté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.
- l'angle est négatif si l'arc $\widehat{IM}$ est orienté dans le sens des aiguilles d'une montre.

Dans la représentation ci-dessus :

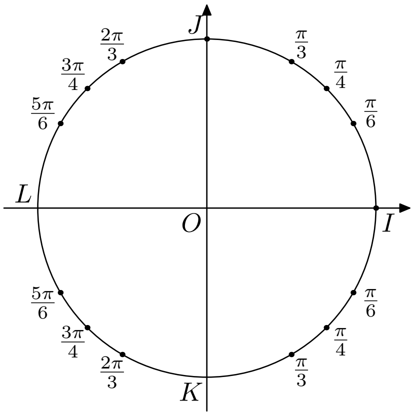
- On a : $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM}\right)=+\dfrac{\pi}{3}$ rad

  Dans le cercle trigonométrique, on note $M\left(+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

- On a : $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM'}\right)=-\dfrac{\pi}{3}$ rad

  Dans le cercle trigonométrique, on note $M'\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

1. Dans la figure ci-dessous, rajouter le signe permettant de repérer chaque point marqué du cercle trigonométrique :

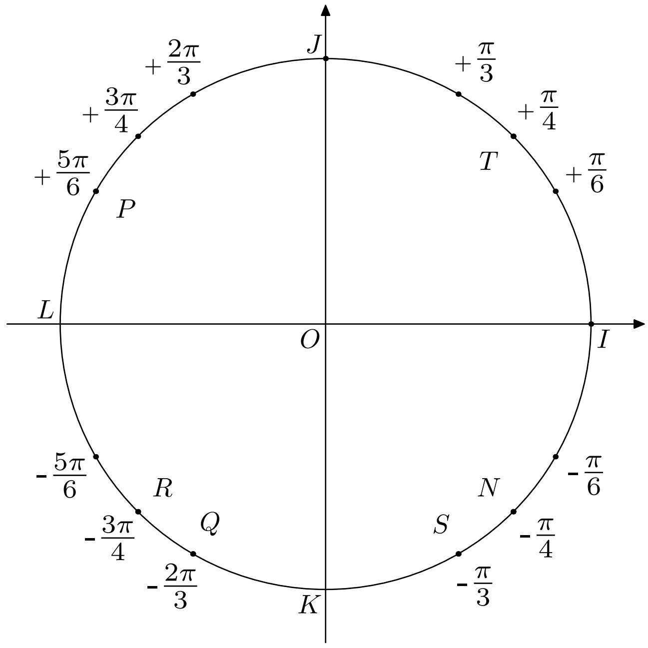


2. Dans le cercle trigonométrique ci-dessus, placer sur cette figure les points M, N, P, Q, R, S réalisant les mesures suivantes :

a. $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{ON}\right)=-\dfrac{\pi}{4}$ rad
b. $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OP}\right)=\dfrac{5\pi}{6}$ rad
c. $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OQ}\right)=-\dfrac{2\pi}{3}$ rad
d. $\left(\overrightarrow{OK}\,;\overrightarrow{OR}\right)=-\dfrac{\pi}{4}$ rad
e. $\left(\overrightarrow{OK}\,;\overrightarrow{OS}\right)=\dfrac{\pi}{6}$ rad
f. $\left(\overrightarrow{OJ}\,;\overrightarrow{OT}\right)=-\dfrac{\pi}{4}$ rad

Correction 2746

Voici le cercle complété :



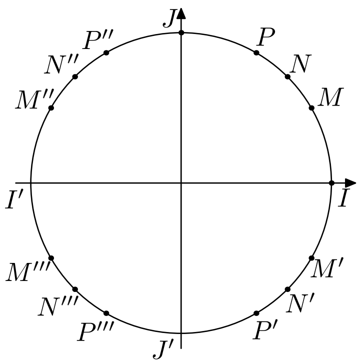
Exercice 5479

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère le cercle trigonométrique représenté ci-dessous sur lequel est placé plusieurs points :

Les points M, N, P vérifient les mesures suivantes :

$\widehat{IOM}=30^o$; $\widehat{ION}=45^o$

$\widehat{IOP}=60^o$



1. Donner la mesure des angles repérant les points M, N, P en radians.
2. Les points M', N', P' sont respectivement les symétriques des points M, N, P par rapport à l'axe (OI) :

   a. Que peut-on dire de $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM}\right)$ et $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM'}\right)$?

   b. Donner la mesure en radians des angles suivants :
   $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM'}\right)$; $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{ON'}\right)$; $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OP'}\right)$

3. Les points M'', N'' et P'' sont respectivement les symétriques des points M, N, P par rapport à l'axe (OJ) :

   a. Que peut-on dire de $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM}\right)$ et $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM''}\right)$?

   b. Donner la mesure en radians des angles suivants :
   $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM''}\right)$; $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{ON''}\right)$; $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OP''}\right)$

4. Les points M''', N''' et P''' sont respectivement les symétriques des points M, N, P par rapport à l'axe (OJ) :

   a. Quelle relation algébrique vérifie les deux angles :
   $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM}\right)$; $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM'''}\right)$

   b. Donner la mesure en radians des angles suivants :
   $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM'''}\right)$; $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{ON'''}\right)$; $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OP'''}\right)$

Correction 5479

1. On a les mesures des angles orientés repérant les points M, N et P :

$$\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM}\right)=\frac{\pi}{6}\quad;\quad\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{ON}\right)=\frac{\pi}{4}\quad;\quad\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OP}\right)=\frac{\pi}{3}$$

2. a. Les mesures orientés
   $coord\overrightarrow{OI}\overrightarrow{OM}$ et $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM'}\right)$ sont opposés.

   b. On a les mesures suivantes :
   - $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM'}\right)=-\dfrac{\pi}{6}$
     $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{ON'}\right)=-\dfrac{\pi}{4}$
     $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OP'}\right)=-\dfrac{\pi}{3}$

3. a. En remarquant l'égalité suivante, à l'aide de la

symétrie axiale :
$\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM}\right)=\left(\overrightarrow{OM''}\,;\overrightarrow{OI'}\right)$

Par supplémentarité des angles, on a :
$$\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM''}\right)+\left(\overrightarrow{OM''}\,;\overrightarrow{OI'}\right)=\pi$$
$$\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM''}\right)+\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM}\right)=\pi$$

On en déduit que les deux angles orientés $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM}\right)$ et $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM''}\right)$ sont supplémentaires.

b. Par supplémentarité des angles, on a les mesures suivantes :

- $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM''}\right)=\pi-\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM}\right)=\pi-\dfrac{\pi}{6}$
$=\dfrac{6\pi-\pi}{6}=\dfrac{5\pi}{6}$
- $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{ON''}\right)=\pi-\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{ON}\right)=\pi-\dfrac{\pi}{4}$
$=\dfrac{4\pi-\pi}{4}=\dfrac{3\pi}{4}$
- $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OP''}\right)=\pi-\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OP}\right)=\pi-\dfrac{\pi}{3}$
$=\dfrac{3\pi-\pi}{3}=\dfrac{2\pi}{3}$

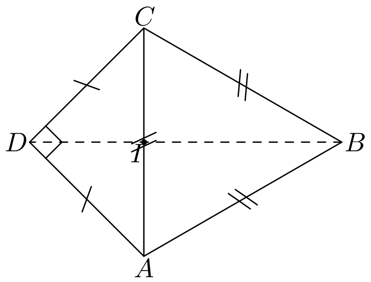
4. a. Par la symétrie centrale, les points M, O et M''' sont alignés. On en déduit la mesure suivante de l'angle orienté :
$$\left(\overrightarrow{OM}\,;\overrightarrow{OM'''}\right)=-\pi$$
$$\left(\overrightarrow{OM}\,;\overrightarrow{OI}\right)+\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM'''}\right)=-\pi$$
$$-\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM}\right)+\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM'''}\right)=-\pi$$
$$\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM'''}\right)=\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM}\right)-\pi$$

b. On en déduit la mesure des angles orientés :

- $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM'''}\right)=\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM}\right)-\pi=\dfrac{\pi}{6}-\pi$
$=\dfrac{\pi-6\pi}{6}=-\dfrac{5\pi}{6}$
- $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{ON'''}\right)=\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{ON}\right)-\pi=\dfrac{\pi}{4}-\pi$
$=\dfrac{\pi-4\pi}{4}=-\dfrac{3\pi}{4}$
- $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OP'''}\right)=\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OP}\right)-\pi=\dfrac{\pi}{3}-\pi$
$=\dfrac{\pi-3\pi}{3}=-\dfrac{2\pi}{3}$

Exercice 5480

On considère le quadrilatère $ABCD$ représenté ci-dessous qui est constitué de deux triangles ABC et ACD respectivement équilatéral et isocèle rectangle en D.



A l'aide des points de cette figure et pour chaque question, donner un angle orienté réalisant les mesures suivantes :

a. $\dfrac{\pi}{3}$ rad b. $-\dfrac{\pi}{4}$ rad c. $-\dfrac{\pi}{6}$ rad d. $\dfrac{7\pi}{12}$ rad

Correction 5480

a. Dans un triangle équilatéral, chaque angle a $\dfrac{\pi}{3}$ rad pour mesure géométrique.

Ainsi, on aurait pu choisir pour représentant de la mesure $\dfrac{\pi}{3}$ rad :
$$\left(\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BA}\right)=\frac{\pi}{3}\text{ rad}$$

b. Le triangle ADC est un triangle isocèle rectangle en D. Ainsi, on a les mesures géométriques des angles suivants :
$\widehat{CDA}=\dfrac{\pi}{2}\text{rad}$; $\widehat{DCA}=\dfrac{\pi}{4}\text{rad}$; $\widehat{DAC}=\dfrac{\pi}{4}\text{rad}$

Ainsi, pour répondre à la question, on a :
$$\left(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CD}\right)=\frac{\pi}{4}\text{ rad.}$$

c. La droite (BI) est la médiane issue de B dans le triangle ABC. Or, le triangle ABC étant équilatéral, on en déduit que la droite (BI) est également une bissectrice. Ainsi, on a la mesure géométrique de l'angle suivant :
$\widehat{ABI}=\dfrac{\pi}{6}\text{ rad}$

Pour répondre à la question, choisissons l'angle orienté :
$$\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BI}\right)=\frac{\pi}{6}\text{ rad}$$

d. Les angles $\widehat{DCA}$ et $\widehat{ACB}$ sont adjacents. Ainsi, l'angle $\widehat{DCB}$ a pour mesure :
$$\widehat{DCB}=\widehat{DCA}+\widehat{ACB}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{12}+\frac{4\pi}{12}=\frac{7\pi}{12}\text{ rad}$$

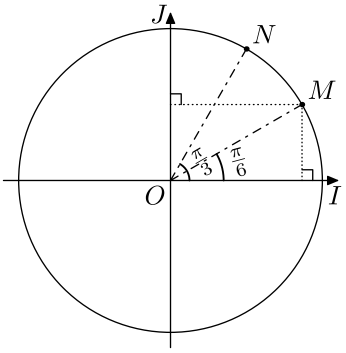
Ainsi, on a la mesure de l'angle orienté :
$$\left(\overrightarrow{CD}\,;\overrightarrow{CB}\right)=\frac{7\pi}{12}\text{ rad}$$

15. Angles associés :

Exercice 6038

On considère le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$

1. a. Déterminer les coordonnées cartésienne du point M.



b. Placer le point M' symétrique du point M par la symétrie d'axe (OJ). Donner les coordonnées cartésiennes du point M'. Puis, donner l'angle repérant le point M' dans le cercle $\mathscr{C}$.

c. Placer le point M'' symétrique du point M par la symétrie d'axe (OI). Donner les coordonnées cartésiennes du point M''. Puis, donner l'angle repérant le point M'' dans le cercle $\mathscr{C}$.

2. a. Déterminer les coordonnées cartésienne du point N.

b. Placer le point N' symétrique du point N par la symétrie d'axe (OJ). Donner les coordonnées cartésiennes du point N'. Puis, donner l'angle repérant le point N' dans le cercle $\mathscr{C}$.

c. Placer le point N'' symétrique du point N par la symétrie d'axe (OI). Donner les coordonnées cartésiennes du point N''. Puis, donner l'angle repérant le point N'' dans le cercle $\mathscr{C}$.

Correction 6038

1. a. Le point M a pour coordonnées : $M\left(\cos\frac{\pi}{6}\,;\,\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

D'après les valeurs trigonométriques des angles remarquables :

$$M\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$$

b. Par la symétrie axiale d'axe (OJ), le point M' a pour coordonnées :

$$M'\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$$

La figure ci-dessous montre que l'angle repérant le point M' est le supplémentaire de $\frac{\pi}{6}$:

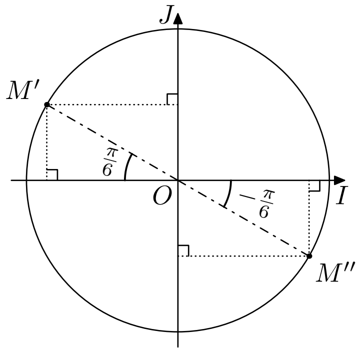
$$\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM'}\right) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

c. Par la symétrie axiale d'axe (OI), le point M'' a pour coordonnées :

$$M''\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,;\,-\frac{1}{2}\right)$$

La figure ci-dessous montre que l'angle repérant le point N' est :

$$\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM''}\right) = -\frac{\pi}{6}$$



2. a. Repérer par l'angle $\frac{\pi}{3}$ repérant le point N :

$$N\left(\cos\frac{\pi}{3}\,;\,\sin\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

b. Le point N' a pour coordonnées : $N'\left(-\frac{1}{2}\,;\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

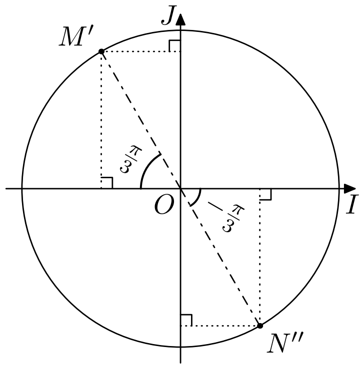
L'angle repérant le point N' a pour angle :

$$\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{ON'}\right) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

c. Le point N'' a pour coordonnées : $N''\left(\frac{1}{2}\,;\,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

L'angle repérant le point N'' a pour angle :

$$\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{ON'}\right) = -\frac{2\pi}{3}$$



Exercice 2947

1. Tracer un cercle trigonométrique et placer les points suivants dont le repérage par leur mesure principale :

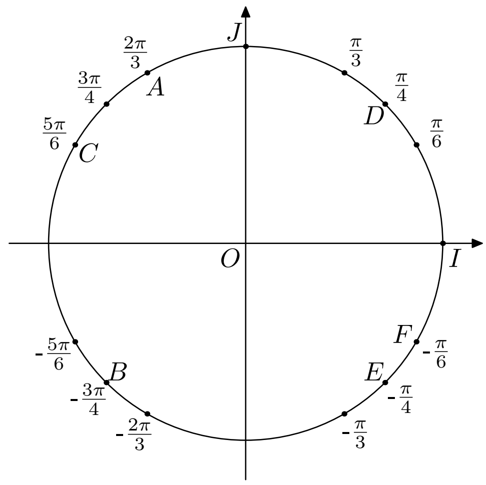
a. $A\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ b. $B\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$ c. $C\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

d. $D\left(\frac{\pi}{4}\right)$ e. $E\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ f. $F\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

2. Préciser les valeurs du cosinus et du sinus associées à chacun des angles repérant les points précédents.

Correction 2947

1. Voici les six points représentés sur le cercle trigonométrique :



2. Par lecture graphique, voici les valeurs des cosinus et des

sinus associées à chacun de ces six angles :

a. $\cos\dfrac{2\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}$; $\sin\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b. $\cos\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

c. $\cos\dfrac{5\pi}{6}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin\dfrac{5\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$

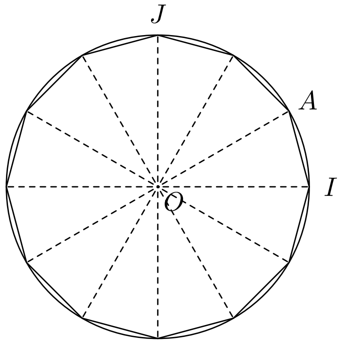
d. $\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

e. $\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

f. $\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{1}{2}$

Exercice 2304

On considère le cercle trigonométrique ci-dessous où est inscrit un dodécagone *(polygone régulier à 12 côtés)*



1. Déterminer la mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OA}\right)$
2. Placer sur la figure ci-dessus les points M, N, P tels que :

a. $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM}\right)=\dfrac{2\pi}{3}$ rad b. $\left(\overrightarrow{OJ}\,;\overrightarrow{ON}\right)=-\dfrac{\pi}{6}$ rad

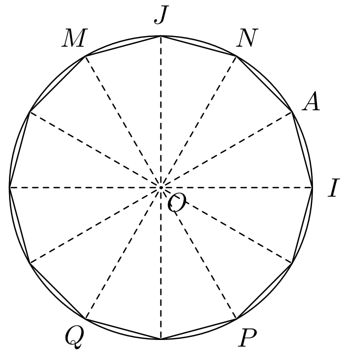
c. $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OP}\right)=-\dfrac{\pi}{2}$ rad c. $\left(\overrightarrow{OQ}\,;\overrightarrow{OJ}\right)=-\dfrac{5\pi}{6}$ rad

Correction 2304

1. Le cercle a été divisé en douze parties, ainsi un angle au centre mesure : $\dfrac{2\pi}{12}=\dfrac{\pi}{6}$

De plus, l'angle orienté est défini dans le sens direct : $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OA}\right)=\dfrac{\pi}{6}$ rad

2. Voici les points placés sur le cercle trigonométrique :



16. Angles associés et formule trigonométrique :

Exercice 2393

1. Déterminer les valeurs exactes des expressions ci-dessous :

a. $\sin\left(\dfrac{7\pi}{3}\right)$ b. $\cos\left(-\dfrac{5\pi}{4}\right)$ c. $\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$

2. Exprimer l'expression suivante à l'aide des rapports trigonométriques de $\dfrac{\pi}{5}$:

$$A=2\cdot\cos\frac{4\pi}{5}+3\cdot\sin\frac{6\pi}{5}-4\cdot\sin\frac{3\pi}{10}$$

Correction 2393

1. a. $\sin\left(\dfrac{7\pi}{3}\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+2\pi\right)=\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b. $\cos\left(-\dfrac{5\pi}{4}\right)=\cos\left(-\dfrac{5\pi}{4}+2\pi\right)=\cos\left(\dfrac{-5\pi+8\pi}{4}\right)$

$=\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

c. $\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)=\cos\left(\pi-\dfrac{\pi}{6}\right)=-\cos\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

2. $A=2\cdot\cos\dfrac{4\pi}{5}+3\cdot\sin\dfrac{6\pi}{5}-4\cdot\sin\dfrac{3\pi}{10}$

$=2\cdot\cos\left(\pi-\dfrac{\pi}{5}\right)+3\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{5}+\pi\right)-4\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{5}\right)$

$=-2\cdot\cos\dfrac{\pi}{5}-3\cdot\sin\dfrac{\pi}{5}-4\cdot\cos\dfrac{\pi}{5}$

$=-6\cdot\cos\dfrac{\pi}{5}-3\cdot\sin\dfrac{\pi}{5}$

Exercice 2351

1. On donne la valeur exacte ci-dessous :

$\cos\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

a. En utilisant la formule $\left(\cos x\right)+\left(\sin x\right)^2=1$, déterminer la valeur exacte de $\sin\dfrac{\pi}{8}$.

b. En déduire la valeur exacte de $\cos\dfrac{5\pi}{8}$ en justifiant votre démarche.

c. Etablir l'égalité : $\tan\dfrac{\pi}{8}=\sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

2. On considère l'expression suivante :

$$A=\cos\frac{9\pi}{8}-3\cdot\sin\frac{5\pi}{8}+2\cdot\cos\frac{7\pi}{8}$$

Déterminer une écriture de l'expression de A en fonction des rapports trigonométriques de l'angle $\dfrac{\pi}{8}$.

Correction 2351

1. a. D'après la formule donnée dans l'énoncé, on a :

$$\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)^2+\left(\sin\frac{\pi}{8}\right)^2=1$$
$$\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)^2+\left(\sin\frac{\pi}{8}\right)^2=1$$
$$\frac{2+\sqrt{2}}{4}+\left(\sin\frac{\pi}{8}\right)^2=1$$
$$\left(\sin\frac{\pi}{8}\right)^2=1-\frac{2+\sqrt{2}}{4}$$
$$\left(\sin\frac{\pi}{8}\right)^2=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$$
$$\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$$
$$\sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

b. $\cos\frac{5\pi}{8}=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\right)=-\sin\frac{\pi}{8}=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

c. Sur son ensemble de définition, la fonction tangente vérifie la relation :

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$$

Utilisons cette égalité pour $x=\frac{\pi}{8}$:

$$\tan\frac{\pi}{8}=\frac{\sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}}=\frac{\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}{\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$
$$=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}}$$
$$=\sqrt{\frac{4-4\sqrt{2}+2}{4-2}}=\sqrt{\frac{6-4\sqrt{2}}{2}}$$
$$=\sqrt{\frac{2(3-2\sqrt{2})}{2}}=\sqrt{3-2\sqrt{2}}$$

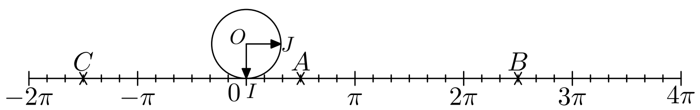
2. On a les manipulations suivantes :

$$A=\cos\frac{9\pi}{8}-3\cdot\sin\frac{5\pi}{8}+2\cdot\cos\frac{7\pi}{8}$$
$$=\cos\left(\frac{\pi}{8}+\pi\right)-3\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\right)+2\cdot\cos\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right)$$
$$=\left(-\cos\frac{\pi}{8}\right)-3\cdot\cos\frac{\pi}{8}+\left(-2\cdot\cos\frac{\pi}{8}\right)$$
$$=-\cos\frac{\pi}{8}-3\cdot\cos\frac{\pi}{8}-2\cdot\cos\frac{\pi}{8}=-6\cdot\cos\frac{\pi}{8}$$

17. Mesures principales :

Exercice 2295

On considère la droite graduée suivante sur lequel est posé le cercle trigonométrique *(cercle de rayon 1)*.
Le point I *(unité des abscisses)* est placé sur l'origine de la droite graduée.



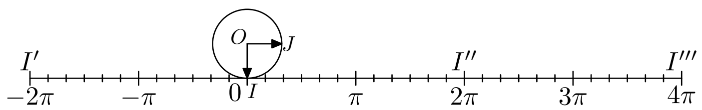
On fait rouler le cercle sur l'ensemble de la droite graduée.

1. Indiquer les différentes positions possibles du point I sur la droite.

2. Justifier que les points A, B, C de la droite graduée représente le même point du cercle trigonométrique.

Correction 2295

1. Voici les différentes positions du point I :



2. Les points A, B, C de la droite graduée représentent le même point du cercle trigonométrique car ils sont écartés de 2π par enroulement de la droite sur le cercle le point A se trouve au même endroit que le point B.

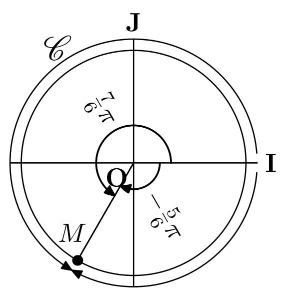
Exercice 2306

1. a. Que pouvez-vous dire des points du cercle trigonométrique repérés par les angles :
50^o ; 410^o ; 3650^o ; -310^o

b. Même question pour les angles :
$\frac{\pi}{3}$ rad ; $-\frac{5\pi}{3}$ rad ; $\frac{7\pi}{3}$ rad

Ainsi, pour $\alpha\in\mathbb{R}$, tous les angles de l'ensemble $\{\alpha+2k\cdot\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$ définissent un même point sur le cercle trigonométrique.

La figure ci-contre montre que le point M peut être repéré par les deux angles :
$M\left(\frac{7}{6}\pi\right)$; $M\left(-\frac{5}{6}\pi\right)$



L'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$ s'appelle l'**intervalle des mesures principales** et a un longueur de 2π. On admet que, pour tout $\alpha\cdot\mathbb{R}$, il existe un seul élément de l'ensemble $\{\alpha+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$ appartenant à l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$.

2. a. Remplir pour *oui* ou *non* le tableau ci-dessous :

Angle	$-\frac{3}{7}\pi$	$-\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{8}\pi$	$\frac{57}{4}\pi$	$-\pi$
appartient à $]-\pi\,;\,\pi]$					

b. Lequel des nombres ci-dessous appartient à l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$?
$\frac{9\pi}{2}-4\pi$; $\frac{9\pi}{2}-2\pi$; $\frac{9\pi}{2}$; $\frac{9\pi}{2}+2\pi$; $\frac{9\pi}{2}+4\pi$

c. Lequel des nombres ci-dessous appartient à l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$?

$-\dfrac{5\pi}{3}-2\pi$; $-\dfrac{5\pi}{3}$; $-\dfrac{5\pi}{3}+2\pi$; $-\dfrac{5\pi}{3}+4\pi$

d. Soit $\mathcal{E}=\Big\{\dfrac{5\pi}{4}+2k\pi\ \Big|\ k\in\mathbb{Z}\Big\}$. Donner l'unique élément de l'ensemble $\mathcal{E}$ appartenant à l'intervalle des mesures principales.

Correction 2306

1. a. Les points caractérisés par les angles :
50^o ; 410^o ; 3650^o ; -310^o
représentent tous le même point car :
- $410=50+360$
- $3650=50+10\times360$
- $-310=50-360$

Ainsi, ces angles représentent tous 50^o plus ou moins des tours.

b. On remarque les égalités :
- $-\dfrac{5\pi}{3}+2\pi=-\dfrac{5\pi}{3}+\dfrac{6}{3}\pi=\dfrac{\pi}{3}$
- $\dfrac{7\pi}{3}-2\pi=\dfrac{7\pi}{3}-\dfrac{6\pi}{3}=\dfrac{\pi}{3}$

Ainsi, ces trois angles représentent le point $M\Big(\dfrac{\pi}{3}\Big)$ à un tour près.

2. a. Voici le tableau complété :

Angle	$-\dfrac{3}{7}\pi$	$-\dfrac{5}{3}\pi$	$\dfrac{7}{8}\pi$	$\dfrac{57}{4}\pi$	$-\pi$
appartient à $]-\pi\,;\,\pi]$	*oui*	*non*	*oui*	*non*	*non*

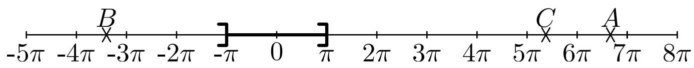
b. Seul $\dfrac{9\pi}{2}-4\pi$ appartient à $]-\pi\,;\,\pi]$ et il vaut $\dfrac{\pi}{2}$.

c. Seul $-\dfrac{5\pi}{3}+2\pi$ appartient à l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$ et il vaut $\dfrac{\pi}{3}$.

d. Parmi l'ensemble $\Big\{\dfrac{5\pi}{4}+2k\pi\,\Big|\,k\in\mathbb{Z}\Big\}$, seul le nombre $\dfrac{5\pi}{4}-2\pi=-\dfrac{3\pi}{4}$ appartient à l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$.

Exercice 2825

On considère la droite graduée ci-dessous où sont placés les points $A\Big(\dfrac{20}{3}\pi\Big)$, $B\Big(-\dfrac{17}{5}\Big)$ et $C\Big(\dfrac{43}{8}\pi\Big)$.



1. a. Graphiquement, déterminer le nombre de fois dont on doit enlever $2\cdot\pi$ à l'abscisse du point A afin d'obtenir la mesure principale de ce nombre ?

b. En déduire la mesure principale de $\dfrac{20}{3}$.

2. Déterminer la mesure principale des abscisses des points B et C.

Correction 2825

1. Il faut enlever 3 tours au point A pour obtenir la mesure principale de son abscisse :
$$\frac{20}{3}\pi-3\times(2\pi)=\frac{20}{3}\pi-\frac{18}{3}\pi=\frac{2}{3}\pi$$

2. a. Il faut ajouter deux tours au point B pour obtenir la mesure principale de son abscisse :
$$-\frac{17}{5}\pi+2\times(2\pi)=-\frac{17}{5}\pi+\frac{20}{5}\pi=\frac{3}{5}\pi$$

b. Il faut enlever trois tours au point C pour obtenir la mesure principale de son abscisse :
$$\frac{43}{8}\pi-3\times(2\pi)=\frac{43}{8}\pi-\frac{48}{8}\pi=-\frac{5}{8}\pi$$

Exercice 467

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$. On désigne par M et N deux points du cercle trigonométrique.

1. Parmi les mesures d'angles ci-dessous, lesquelles appartiennent à l'intervalle des mesures principales :

a. $\dfrac{5\pi}{3}$ b. $-\dfrac{7\pi}{4}$ c. $\dfrac{-2\pi}{3}$ d. $1{,}1\pi$

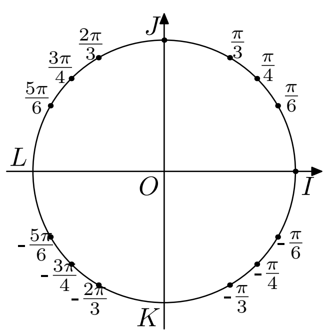
2. Déterminer la mesure principale des angles définis par les points M, N, P et Q ci-dessous, puis placer chacun de ces points dans le cercle trigonométrique ci-contre :

a. $\big(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM}\big)=\dfrac{7\pi}{3}$

b. $\big(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{ON}\big)=-\dfrac{15\pi}{4}$

c. $\big(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OP}\big)=\dfrac{5\pi}{3}$

d. $\big(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OQ}\big)=\dfrac{19\pi}{6}$



Correction 467

1. a. Du fait que $\dfrac{5}{3}\notin]-1\,;\,1]$, on en déduit que la mesure $\dfrac{5\pi}{3}$ n'appartient pas à l'intervalle des mesures principales.

b. On a $\dfrac{7}{4}>1$, on en déduit que la mesure $\dfrac{7\pi}{4}$ n'appartient pas à l'intervalle des mesures principales.

c. On a $-\dfrac{2}{3}\in]-1\,;\,1]$. On en déduit que la mesure d'angle $-\dfrac{2\pi}{3}$ appartient à l'intervalle des mesures principales.

d. On a $1{,}1>1$. Ainsi, l'angle $1{,}1\pi$ n'est pas la mesure d'un angle appartenant à l'intervalle des mesures principales.

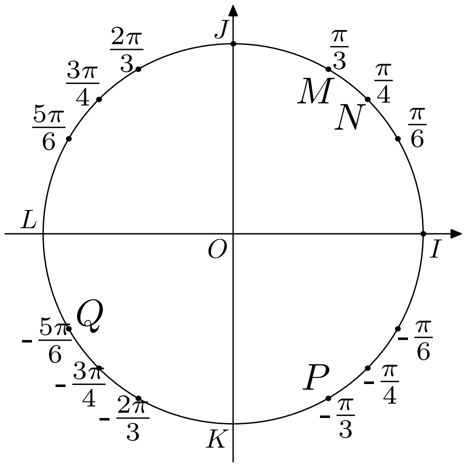
2. a. $\dfrac{7\pi}{3}-2\pi=\dfrac{7\pi}{3}-\dfrac{6\pi}{3}=\dfrac{\pi}{3}$

L'angle $\dfrac{7\pi}{3}$ admet pour mesure principale $\dfrac{\pi}{3}$.

b. $-\dfrac{15\pi}{4}+4\pi=-\dfrac{15\pi}{4}+\dfrac{16\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4}$

c. $\dfrac{5\pi}{3}-2\pi=\dfrac{5\pi}{3}-\dfrac{6\pi}{3}=-\dfrac{\pi}{3}$

d. $\dfrac{19\pi}{6}-4\pi=\dfrac{19\pi}{6}-\dfrac{24\pi}{6}=-\dfrac{5\pi}{6}$



Exercice 2307

Déterminer la mesure principale des angles orientés de mesure suivante :

a. $\dfrac{9\pi}{4}$ b. $\dfrac{192\pi}{6}$ c. $-\dfrac{5\pi}{4}$

d. $-\dfrac{33\pi}{2}$ e. $\dfrac{16\pi}{7}$ f. $\dfrac{52\pi}{3}$

Correction 2307

a. La division euclidienne de $\dfrac{9}{4}$ par 2 donne : $\dfrac{9}{4} = 1\times 2 + \dfrac{1}{4}$.
Ainsi, on a :
$$\frac{9\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi$$
Ainsi, la mesure principale de $\dfrac{9\pi}{4}$ est $\dfrac{\pi}{4}$.

b. On observe que $\dfrac{192\pi}{6} = 32\pi = 0 + 16\times 2\pi$.
Ainsi, la mesure principale de $\dfrac{192\pi}{6}$ est 0.

c. La division euclidienne de $-\dfrac{5}{4}$ par 2 ne nous permettra pas de mettre en avance la mesure principale de $\dfrac{5\pi}{4}$.
$$-\frac{5\pi}{4} + 2\pi - \frac{5\pi}{4} + \frac{8\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$
Ainsi, $-\dfrac{5\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4} - 2\pi$.
La mesure principale de $-\dfrac{5\pi}{4}$ est $\dfrac{3\pi}{4}$

d. La division euclidienne de $\dfrac{33}{2}$ par 2 donne :
$$\frac{33}{2} = 8\times 2 + \frac{1}{2}$$
On obtient $-\dfrac{33\pi}{2} = -\dfrac{\pi}{2} - 8\times 2\pi$
La mesure principale de $-\dfrac{33\pi}{2}$ est $-\dfrac{\pi}{2}$.

e. La division euclidienne de $\dfrac{16}{7}$ par 2 ne permettra pas de mettre en avance des tours complets *(des multiples de* 2π*)*.
$$\frac{16\pi}{7} - 2\pi = \frac{(16-14)\pi}{7} = \frac{2\pi}{7}$$
Ce qui permet d'écrire :
$$\frac{16\pi}{7} = \frac{2\pi}{7} + 2\pi$$

f. La division euclidienne de $\dfrac{51}{3}$ par 2 donne :
$$\frac{52}{3} = 16\times 2 + \frac{4}{3}$$
Ce qui permet d'écrire :
$$\frac{52\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + 16\times 2\pi \quad\Longrightarrow\quad \frac{52\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$
Ainsi, les nombres $\dfrac{52\pi}{3}$ et $\dfrac{4\pi}{3}$ ont la même mesure principale mais $\dfrac{4\pi}{3} \in \big]-\pi\,;\pi\big]$.
$$\frac{4\pi}{3} - 2\pi = -\frac{2\pi}{3} \quad\Longrightarrow\quad \frac{4\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi$$
Ainsi, on a :
$$\frac{52\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + 16\times 2\pi = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi + 16\times 2\pi = -\frac{2\pi}{3} + 18\times 2\pi$$
La mesure principale de $\dfrac{52\pi}{3}$ est $-\dfrac{2\pi}{3}$.

Exercice 2349

1. Donner la mesure principale des angles suivants :

a. $\dfrac{15\pi}{7}$ b. $\dfrac{13\pi}{9}$ c. $\dfrac{173\pi}{12}$

d. $\dfrac{165\pi}{7}$ e. $-\dfrac{64\pi}{15}$ f. $-\dfrac{429\pi}{33}$

2. Voici deux intervalles de mesures d'angles orientés :
$$I = \left[\frac{2\pi}{3}\,;\frac{7\pi}{3}\right] \quad ; \quad J = \left[\frac{7\pi}{3}\,;\frac{35\pi}{8}\right]$$
Déterminer l'écriture de chacun de ces ensembles en utilisant les mesures principales d'angles orientées.

Correction 2349

1. a. La division euclidienne de 15 par 7 donne :
$$15 = 2\times 7 + 1 \quad\Longrightarrow\quad \frac{15\pi}{7} = 2\pi + \frac{\pi}{7}$$
Ainsi, on obtient :
$$\frac{15\pi}{7} = \frac{\pi}{7} + 2k\pi$$
La mesure principale de $\dfrac{15\pi}{7}$ est $\dfrac{\pi}{7}$.

b. On remarque que :
$$\frac{13\pi}{9} - 2\pi = \frac{13\pi}{9} - \frac{18\pi}{9} = -\frac{5\pi}{9} \in \Big]-\pi\,;\pi\Big]$$
La mesure principale de $\dfrac{13\pi}{9}$ est $-\dfrac{5\pi}{9}$.

c. La division euclidienne de 173 par 12 donne :
$$173 = 14\times 12 + 5 \quad\Longrightarrow\quad \frac{173\pi}{12} = 14\pi + \frac{5\pi}{12}$$
On peut écrire :
$$\frac{173\pi}{12} = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \text{ où } \frac{5\pi}{12} \in]-\pi\,;\pi]$$

La mesure principale de $\dfrac{173\pi}{12}$ est $\dfrac{5\pi}{12}$.

d. La division euclidienne de 165 par 7 donne :

$$165 = 23\times 7 + 4 \quad\Longrightarrow\quad \frac{165\pi}{7} = 23\pi + \frac{4\pi}{7}$$

On a :

$$\frac{165\pi}{7} - 24\pi = \frac{165\pi}{7} - \frac{168\pi}{7} = -\frac{3\pi}{7} \in]-\pi\,;\,\pi]$$

La mesure principale de $\dfrac{165\pi}{7}$ est $-\dfrac{3\pi}{7}$.

Remarque : On a enlevé directement 12 tours complets, c'est à dire 24π pour être sur d'obtenir du premier coup la mesure principale.

e. La division euclidienne de 64 par 15 :

$$64 = 4\times 15 + 4 \quad\Longrightarrow\quad -\frac{64\pi}{15} = -4\pi - \frac{4\pi}{15}$$

On a :

$$-\frac{64\pi}{15} = -\frac{4\pi}{15} + 2k\pi$$

f. La division euclidienne de 429 par 33 donne 13. On peut écrire :

$$-\frac{429\pi}{33} = -13\pi = \pi - 14\pi = \pi + 2k\pi$$

La mesure principale de $\dfrac{429\pi}{33}$ est π.

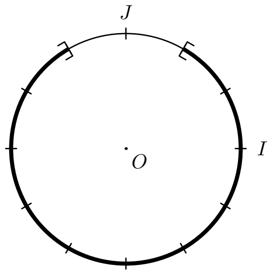
2. a. On peut écrire l'intervalle I sous la forme suivante :
L'expression de chacun de ces composantes en mesure principale donne :

$$I = \Big[\frac{2\pi}{3}\,;\,\pi\Big] \cup \Big]-\pi\,;\,0\Big] \cup \Big[0\,;\,\frac{7\pi}{3}\Big]$$

Ce qui donne :

$$I = \Big[\frac{2\pi}{3}\,;\,\pi\Big] \cup \Big]-\pi\,;\,\frac{7\pi}{3}\Big]$$

Voici la représentation de cet intervalle sur le cercle trigonométrique :



b. Il faut remarquer que cet intervalle a une longueur supérieure à 2π :

$$\frac{35\pi}{8} - \frac{7\pi}{3} = \frac{105\pi}{24} - \frac{56\pi}{24} = \frac{49\pi}{24} > 2\pi$$

Ainsi, la représentation de cet intervalle sur le cercle trigonométrique s'enroulera sur l'ensemble du cercle puisque sa longueur est supérieure à la circonférence du cercle.

Une autre manière est de décomposer l'ensemble pour obtenir facilement l'expression avec des mesures principales de chacune de ses parties :

$$J = \Big[\frac{7\pi}{3}\,;\,3\pi\Big] \cup \Big]3\pi\,;\,4\pi\Big] \cup \Big[4\pi\,;\,\frac{13\pi}{3}\Big] \cup \Big[\frac{13\pi}{3}\,;\,\frac{35\pi}{8}$$

En écrivant les mesures principales des trois premiers intervalles, on obtient :

$$J = \Big[\frac{\pi}{3}\,;\,\pi\Big] \cup \Big]-\pi\,;\,0\Big] \cup \Big[0\,;\,\frac{\pi}{3}\Big] \cup \Big[\frac{13\pi}{3}\,;\,\frac{35\pi}{8}\Big]$$

Ainsi, l'intervalle J peut s'écrire :

$$J = \Big]-\pi\,;\,\pi\Big] \cup \Big[\frac{13\pi}{3}\,;\,\frac{35\pi}{8}\Big]$$

Exercice 2824

1. On se propose, dans cette question, de déterminer la mesure principale de l'angle $\alpha = \dfrac{73}{5}\pi$:

a. Soit k un entier relatif réalisant l'encadrement suivant :

$$-\pi < \frac{73}{5}\pi + 2{\cdot}k{\cdot}\pi \leqslant \pi$$

Réaliser un encadrement de k à l'aide de l'encadrement ci-dessus.

b. A l'aide de la calculatrice, déterminer l'unique nombre entier k réalisant cet encadrement.

c. En déduire la mesure principale de l'angle α.

2. De la même manière, déterminer la mesure principale des angles suivants :

a. $-\dfrac{29}{3}\pi$ b. $-\dfrac{27}{4}\pi$ c. $\dfrac{70}{9}\pi$

Correction 2824

1. a. Soit k un entier relatif réalisant l'encadrement suivant :

$$\begin{array}{rcccl} -\pi & < & \frac{73}{5}\pi + 2{\cdot}k{\cdot}\pi & \leqslant & \pi \\ -\frac{78}{5}\pi & < & 2{\cdot}k{\cdot}\pi & \leqslant & -\frac{68}{5}\pi \\ -\frac{39}{5} & < & \pi & \leqslant & -\frac{34}{5} \end{array}$$

Les valeurs approchées donnent l'encadrement suivant :

$$-7{,}8 < \pi \leqslant -6{,}8$$

b. k étant un entier relatif, la seule valeur possible est $k = -7$.

c. Donna la mesure principale de α :

$$alpha - 7\times(2\pi) = \frac{73}{5}\pi - \frac{70}{5}\pi = \frac{3}{5}\pi$$

2. a. Soit k un entier relatif réalisant l'encadrement suivant :

$$\begin{array}{rcccl} -\pi & < & -\frac{29}{3}\pi + 2{\cdot}k{\cdot}\pi & \leqslant & \pi \\ -\pi + \frac{29}{3}\pi & < & 2{\cdot}k{\cdot}\pi & \leqslant & \pi + \frac{29}{3}\pi \\ \frac{26}{3}\pi & < & 2{\cdot}k{\cdot}\pi & \leqslant & \pi + \frac{32}{3}\pi \\ \frac{13}{3} & < & k & \leqslant & \frac{16}{3} \end{array}$$

Les valeurs approchés donne l'encadrement :

$$4{,}3 < k \leqslant 5{,}4$$

k étant un nombre entier, sa valeur est 5.

Calculons la mesure principale de cet angle orienté :

$$-\frac{29}{3}\pi + 5\times(2\pi) = -\frac{29}{3}\pi + \frac{30}{3}\pi = \frac{1}{3}\pi$$

b. Soit k un entier relatif réalisant l'encadrement suivant :

$$\begin{array}{rcccl} -\pi & < & -\frac{27}{4}\pi + 2{\cdot}k{\cdot}\pi & \leqslant & \pi \\ -\pi + \frac{27}{4}\pi & < & 2{\cdot}k{\cdot}\pi & \leqslant & \pi + \frac{27}{4}\pi \\ \frac{23}{4}\pi & < & 2{\cdot}k{\cdot}\pi & \leqslant & \frac{31}{4}\pi \\ \frac{23}{8} & < & k & \leqslant & \frac{31}{8} \end{array}$$

Les valeurs approchés donne l'encadrement :

$$2{,}87 < k \leqslant 3{,}88$$

k étant un nombre entier, sa valeur est 3.

Calculons la mesure principale de cet angle orienté :

$$-\frac{27}{4}\pi + 3\times(2\pi) = -\frac{27}{4}\pi + \frac{24}{4}\pi = -\frac{3}{4}\pi$$

c. Soit k un entier relatif réalisant l'encadrement suivant :

$$\begin{array}{rcccl}
-\pi & < & \dfrac{70}{9}\pi+2{\cdot}k{\cdot}\pi & \leqslant & \pi \\
-\pi-\dfrac{70}{9}\pi & < & 2{\cdot}k{\cdot}\pi & \leqslant & \pi-\dfrac{70}{9}\pi \\
-\dfrac{79}{9}\pi & < & 2{\cdot}k{\cdot}\pi & \leqslant & -\dfrac{61}{9}\pi \\
-\dfrac{79}{18} & < & k & \leqslant & -\dfrac{61}{18}
\end{array}$$

Les valeurs approchés donne l'encadrement :

$$-4{,}39 \;<\; k \;\leqslant\; -3{,}38$$

k étant un nombre entier, sa valeur est -4.

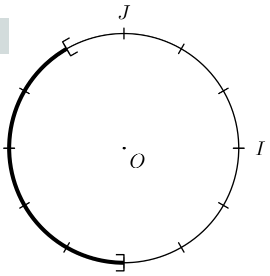
Calculons la mesure principale de cet angle orienté :

$$\frac{70}{9}\pi-4\times(2\pi)=\frac{70}{9}\pi-\frac{72}{9}\pi=-\frac{2}{9}\pi$$

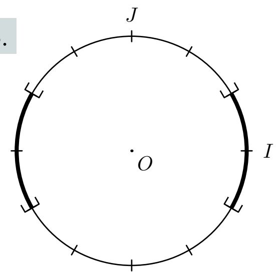
Exercice 2883

1. Donner, sous forme de réunions d'intervalles, l'ensemble formé par les mesures principales des angles repérant les points surlignés du cercle trigonométrique :

a.

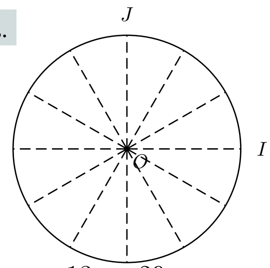


b.



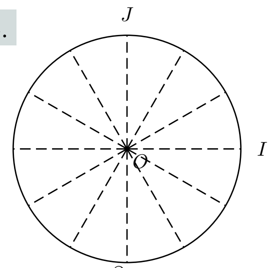
2. Pour chaque question, surligner l'ensemble des points ayant pour angle orienté l'ensemble précisé sous le cercle trigonométrique :

a.



$\left[\dfrac{13\pi}{3}\,;\,\dfrac{29\pi}{6}\right]$

b.



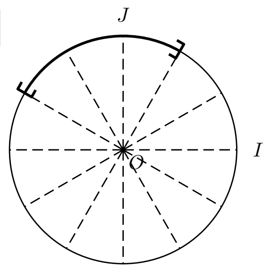
$\left[\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{8\pi}{3}\right]$

Correction 2883

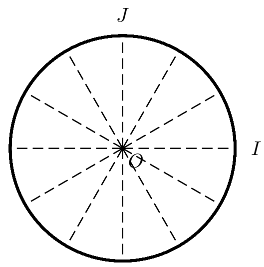
1. a. $\left]-\pi\,;-\dfrac{\pi}{2}\right]\cup\left]\dfrac{2\pi}{3}\,;\,\pi\right]$

   b. $\left]-\pi\,;-\dfrac{5\pi}{6}\right]\cup\left[-\dfrac{\pi}{6}\,;\,\dfrac{\pi}{6}\right[\cup\left[\dfrac{5\pi}{6}\,;\,\pi\right]$

2. a.



b.



Exercice 2377

Déterminer la mesure principale des angles orientés suivant :

a. $\dfrac{254\pi}{5}$ b. $-\dfrac{70\pi}{3}$ c. $\dfrac{92\pi}{7}$

Correction 2377

1. La division euclidienne de 254 par 5 donne :
   $254=50\times5+4$
   On en déduit l'égalité suivante :
   $\dfrac{254\pi}{5}=\dfrac{4\pi}{5}+2\pi\times25$
   La mesure principale de $\dfrac{254\pi}{5}$ est $\dfrac{4\pi}{5}$.

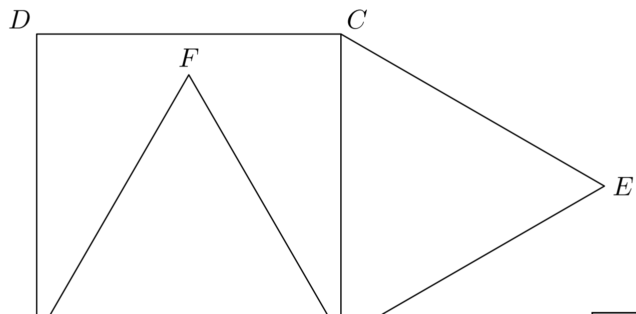
2. La division euclidienne de 70 par 3 donne :
   $70=23\times3+1$
   On en déduit l'égalité suivante :
   $$-\frac{70\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}-23\pi=-\frac{\pi}{3}+\pi-24\pi$$
   $$=\frac{2\pi}{3}+2\pi\times(-12)$$
   La mesure principale de $\dfrac{70\pi}{3}$.

3. La division euclidienne de 92 par 7 donne :
   $92=7\times13+1$
   On en déduit l'égalité suivante :
   $$\frac{92\pi}{7}=\frac{\pi}{7}+13\pi=\frac{\pi}{7}-\pi+14\pi$$
   $$=-\frac{6\pi}{7}+14\pi=-\frac{6\pi}{7}+2\pi\times7$$
   La mesure principale de l'angle orienté $\dfrac{92\pi}{7}$ est $-\dfrac{6}{7}$

18. Angles oriéntés et algèbre :

Exercice 2339

On considère le carré $ABCD$.
Soit le point E extérieur au carré tel que BCE soit équilatéral.
Soit F le point intérieur au carré tel que le triangle ABF soit équilatéral.



On souhaite montrer que les points D, F et E sont alignés.

1. a. Donner la mesure des deux angles orientés suivants :
$$\left(\overrightarrow{AF};\overrightarrow{AD}\right) \quad ; \quad \left(\overrightarrow{DF};\overrightarrow{DA}\right)$$
   b. En déduire la mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DF}\right)$.

2. a. Donner la mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CE}\right)$.

   b. En déduire la mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DE}\right)$.

3. En déduire que les points D, F et E sont alignés.

Les questions suivantes ont pour objectif d'utiliser la relation de Chasles.

4. Détermmminer la mesure des angles orientés :

   a. $\left(\overrightarrow{BE};\overrightarrow{CF}\right)$ b. $\left(\overrightarrow{AF};\overrightarrow{CE}\right)$

Correction 2339

1. a.
   - $\left(\overrightarrow{AF};\overrightarrow{AD}\right) = \left(\overrightarrow{AF};\overrightarrow{AB}\right) + \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)$
   $$= -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = -\frac{2\pi}{6} + \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$
   - On remarquera puisque $ABCD$ est un carré et que ABF est un triangle équilatéral de base $[AB]$ que les longueurs AF et AD sont égales : le triangle AFD est isocèle en A.

   La somme des angles dans un triangle vaut π, ce qui se traduit par :
$$\left(\overrightarrow{AF};\overrightarrow{AD}\right) + \left(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DF}\right) + \left(\overrightarrow{FD};\overrightarrow{FA}\right) = \pi$$
$$\frac{\pi}{6} + 2\left(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DF}\right) = \pi$$
$$2\left(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DF}\right) = \pi - \frac{\pi}{6}$$
$$2\left(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DF}\right) = \frac{5\pi}{6}$$
$$\left(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DF}\right) = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi$$
   On en déduit que $\left(\overrightarrow{DF};\overrightarrow{DA}\right) = -\frac{5\pi}{12} + 2k\pi$

   b. $\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DF}\right) = \left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DA}\right) + \left(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DF}\right)$
$$= -\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{12} = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi$$

2. a. On a :
$$\left(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CE}\right) = \left(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CB}\right) + \left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CE}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}$$
$$= \frac{3\pi}{6} + \frac{2\pi}{5} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$
   Le triangle CDE est isocèle en C.
   La somme de la mesure des angles dans un triangle valant π, on peut écrire :
$$\left(\overrightarrow{EC};\overrightarrow{ED}\right) + \left(\overrightarrow{DE};\overrightarrow{DC}\right) + \left(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CE}\right) = \pi$$
$$2\cdot\left(\overrightarrow{DE};\overrightarrow{DC}\right) + \frac{5\pi}{6} = \pi$$
$$2\cdot\left(\overrightarrow{DE};\overrightarrow{DC}\right) = \frac{\pi}{6}$$
$$\left(\overrightarrow{DE};\overrightarrow{DC}\right) = \frac{\pi}{12} + 2k\pi$$
   D'où : $\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DE}\right) = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi$

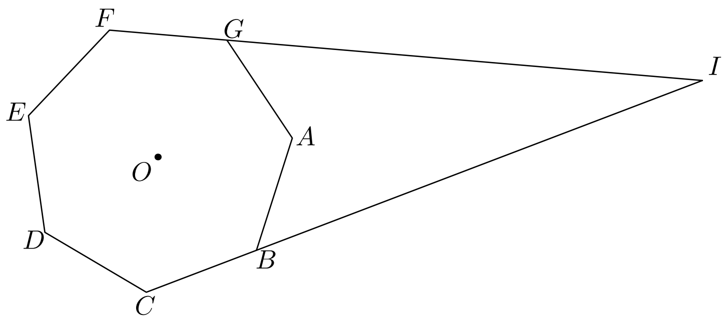
3. On remarque que $\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DE}\right) = \left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DF}\right)$.
   On en déduit que les points D, F et E sont alignés.

   Remarque : le raisonnement pour cette dernière déduction est en fait un peu plus long :
   Grâce à l'égalité des angles correspondants $\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DE}\right)$ et $\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DF}\right)$, on montre que les droites (DF) et (DE) sont parallèles.
   Ayant un point commun, ces deux droites sont confondues : par un point, il ne passe qu'une droite parallèle à une autre *(cinquième postulat d'Euclide)*

4. a. D'après la relation de Chasles, on a :
$$\left(\overrightarrow{BE};\overrightarrow{CF}\right) = \left(\overrightarrow{BE};\overrightarrow{BC}\right) + \left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{CB}\right) + \left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CF}\right)$$
$$= \frac{\pi}{3} + \pi - \frac{5\pi}{12} = \frac{4\pi}{12} + \frac{12\pi}{12} - \frac{5\pi}{12} = \frac{11\pi}{12} + 2k\pi$$
   b. $\left(\overrightarrow{AF};\overrightarrow{CE}\right)$
$$= \left(\overrightarrow{AF};\overrightarrow{AB}\right) + \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BA}\right) + \left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)$$
$$+ \left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{CB}\right) + \left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CE}\right)$$
$$= -\frac{\pi}{3} + \pi - \frac{\pi}{2} + \pi + \frac{pi}{3}$$
$$= 2\pi - \frac{\pi}{2}$$
$$= -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

Exercice 2376

On considère l'heptagone régulier $ABCDEFG$ de centre O.



Le point I est le point d'intersection des droites (BC) et (FG).

1. Donner, en justifiant votre démarche, la mesure des angles orientées suivant *(on passera dans un premier temps par l'angle géométrique)* :

a. $\left(\overrightarrow{OG}\,;\overrightarrow{OB}\right)$ b. $\left(\overrightarrow{AG}\,;\overrightarrow{AB}\right)$ c. $\left(\overrightarrow{CE}\,;\overrightarrow{CD}\right)$

2. Déterminer, avec l'aide de la relation de Chasles, la mesure des angles orientés suivant :

a. $\left(\overrightarrow{OE}\,;\overrightarrow{CB}\right)$ b. $\left(\overrightarrow{IG}\,;\overrightarrow{IB}\right)$

Correction 2376

1. a. Le pentagone régulier définit 7 triangles isométrique, ainsi un angle au centre vérifie :
$\widehat{GOA} = \dfrac{2\pi}{7}$.
Les triangles OAG et OAB étant isométrique, on obtient : $\widehat{GOB} = \dfrac{\pi}{7}$
L'angle $\left(\overrightarrow{OG}\,;\overrightarrow{OB}\right)$ est orienté dans le sens négatif, on a :
$\left(\overrightarrow{OG}\,;\overrightarrow{OB}\right) = -\dfrac{\pi}{7}$

b. Le triangle OGA est isocèle en O ; de plus la somme des mesures des angles dans un triangle vaut π, on obtient :

$$\widehat{GAO} + \widehat{AOG} + \widehat{OGA} = \pi$$
$$\frac{2\pi}{7} + \widehat{AOG} + \widehat{OGA} = \pi$$
$$2\widehat{OAG} = \frac{5\pi}{7}$$
$$\widehat{OAG} = \frac{5\pi}{14}$$

Les triangles OAG et OAB étant isométrique, on obtient :

$$\widehat{GAB} = \widehat{GAO} + \widehat{OAB} = \frac{10\pi}{14} = \frac{5\pi}{7}$$

L'angle orienté $\left(\overrightarrow{AG}\,;\overrightarrow{AB}\right)$ étant orienté dans le sens positif, on a :
$\left(\overrightarrow{AG}\,;\overrightarrow{AB}\right) = \dfrac{5\pi}{7}$

2. a. On a la relation de Chasles suivante :

$$\left(\overrightarrow{OE}\,;\overrightarrow{CB}\right) = \left(\overrightarrow{OE}\,;\overrightarrow{OC}\right) + \left(\overrightarrow{OC}\,;\overrightarrow{CO}\right) + \left(\overrightarrow{CO}\,;\overrightarrow{CB}\right)$$
$$= \frac{4\pi}{7} + \pi + \frac{5\pi}{14} = \frac{8\pi}{14} + \frac{14\pi}{14} + \frac{5\pi}{14} = \frac{27\pi}{14}$$
$$= -\frac{\pi}{14} + 2\pi$$

l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OE}\,;\overrightarrow{CB}\right)$ a pour mesures principale $-\dfrac{\pi}{14}$.

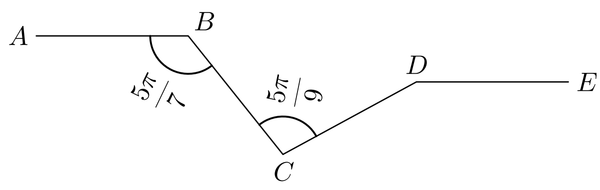
b. Notons que les vecteurs $\overrightarrow{GF}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires et de même sens respectivement au vecteur $\overrightarrow{IG}$ et $\overrightarrow{IB}$, ce qui permet d'écrire :
$\left(\overrightarrow{IG}\,;\overrightarrow{IB}\right) = \left(\overrightarrow{GF}\,;\overrightarrow{BC}\right)$ D'après la relation de Chasles, on a :

$$\left(\overrightarrow{GF}\,;\overrightarrow{BC}\right) = \left(\overrightarrow{GF}\,;\overrightarrow{GA}\right) + \left(\overrightarrow{GA}\,;\overrightarrow{AG}\right) + \left(\overrightarrow{AG}\,;\overrightarrow{AB}\right) + \left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{BA}\right) + \left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BC}\right)$$
$$= \left(\overrightarrow{GF}\,;\overrightarrow{GA}\right) + \pi + \left(\overrightarrow{AG}\,;\overrightarrow{AB}\right) + \pi + \left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BC}\right)$$
$$= 3\times\left(\overrightarrow{GF}\,;\overrightarrow{GA}\right) + 2\pi = 3\cdot\frac{5\pi}{7} + 2\pi = \frac{15\pi}{7} + 2\pi$$
$$= \frac{\pi}{7} + 4\pi$$

Ainsi, l'angle $\left(\overrightarrow{IG}\,;\overrightarrow{IB}\right) = \dfrac{\pi}{7}$

Exercice 2882

Sur le dessin ci-dessous, est représentée une ligne brisée $ABCDE$ dont les angles géométriques $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCD}$ ont été indiqués.



Les droites (AB) et (DE) sont parallèles. Déterminer la mesure principale de l'angle orientée $\left(\overrightarrow{DC}\,;\,\overrightarrow{DE}\right)$.

Correction 2882

Les droites (AD) et (DE) étant colinéaires, on en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaire et de sens opposés :

$$\left(\overrightarrow{BA}\,;\,\overrightarrow{DE}\right) = \pi$$

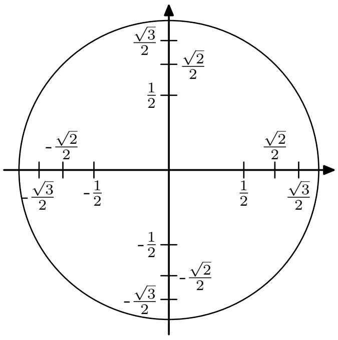
La relation de Chasles permet d'écrire :

$$\left(\overrightarrow{BA}\,;\,\overrightarrow{BC}\right) + \left(\overrightarrow{BC}\,;\,\overrightarrow{DC}\right) + \left(\overrightarrow{DC}\,;\,\overrightarrow{DE}\right) = \left(\overrightarrow{BA}\,;\,\overrightarrow{DE}\right)$$
$$\frac{5\pi}{7} + \left(\overrightarrow{CB}\,;\,\overrightarrow{CD}\right) + \left(\overrightarrow{DC}\,;\,\overrightarrow{DE}\right) = \pi$$
$$\frac{5\pi}{7} + \left(-\frac{5\pi}{9}\right) + \left(\overrightarrow{DC}\,;\,\overrightarrow{DE}\right) = \pi$$
$$\frac{45\pi - 35\pi}{63} + \left(\overrightarrow{DC}\,;\,\overrightarrow{DE}\right) = \pi$$
$$\left(\overrightarrow{DC}\,;\,\overrightarrow{DE}\right) = \pi - \frac{10\pi}{63}$$
$$\left(\overrightarrow{DC}\,;\,\overrightarrow{DE}\right) = \frac{53\pi}{63}$$

19. Equations :

Exercice 5496

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère le cercle trigonométrique représenté ci-dessous :



1. a. Sur le cercle trigonométrique, placer les deux points M et M' ayant pour abscisse $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

   b. Dans l'intervalle des mesures principales, résoudre l'équation :
   $$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

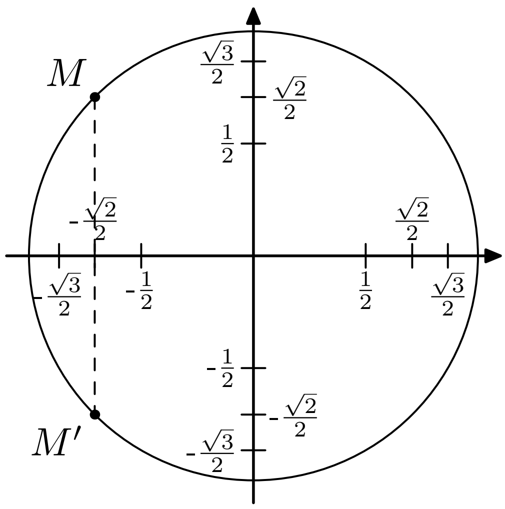
2. Dans l'intervalle des mesures principales, résoudre les équations suivantes :

   a. $\sin x = \dfrac{1}{2}$ b. $\cos x = \dfrac{1}{2}$ c. $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation suivante :
   $$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Correction 5496

1. a. Voici sur le cercle trigonométrique, les deux points M et M' ayant pour abscisse la valeur $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$:



   b. Les deux points M et M' sont repérés sur le cercle trigonométrique par des angles orientés de mesures respectives $\dfrac{3\pi}{4}$ et $-\dfrac{3\pi}{4}$.

   Ainsi, l'équation $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ admet pour ensemble des solutions :
   $$\mathcal{S} = \Big\{-\frac{3\pi}{4}\,;\,\frac{3\pi}{4}\Big\}$$

2. a. L'équation de l'énoncé :
   $$\sin x = \frac{1}{2}$$
   peut s'exprimer par l'égalité :
   $$\sin x = \sin\frac{\pi}{6}$$
   On en déduit les deux mesures principales prises par la variable x :
   $$x = \frac{\pi}{6} \qquad \Big| \qquad x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{6\pi - \pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$
   L'ensemble des solutions de cette équation dans l'intervalle des mesures principales est :
   $$\mathcal{S} = \Big\{\frac{\pi}{6}\,;\,\frac{5\pi}{6}\Big\}$$

   b. L'équation de l'énoncé :
   $$\cos x = \frac{1}{2}$$
   peut s'exprimer par l'égalité :
   $$\cos x = \cos\frac{\pi}{3}$$
   On en déduit les deux mesures principales prises par la variable x :
   $$x = \frac{\pi}{3} \qquad \Big| \qquad x = -\frac{\pi}{3}$$
   L'ensemble des solutions de cette équation dans l'intervalle des mesures principales est :
   $$\mathcal{S} = \Big\{-\frac{\pi}{3}\,;\,\frac{\pi}{3}\Big\}$$

   c. L'équation de l'énoncé :
   $$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
   peut s'exprimer par l'égalité :
   $$\sin x = \sin\Big(-\frac{\pi}{3}\Big)$$
   On en déduit les deux mesures principales prises par la variable x :
   $$x = -\frac{\pi}{3} \qquad \Big| \qquad x = \pi - \Big(\frac{\pi}{3}\Big) = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi + \pi}{3} = \frac{4\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi$$
   L'ensemble des solutions de cette équation dans l'intervalle des mesures principales est :
   $$\mathcal{S} = \Big\{-\frac{2\pi}{3}\,;\,-\frac{\pi}{3}\Big\}$$

3. L'équation de l'énoncé :
   $$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
   peut s'exprimer par l'égalité :
   $$\cos x = \cos\frac{\pi}{6}$$
   Ainsi, toutes les solutions de l'équation s'expriment sous l'une des deux formes ci-dessous où k est une entier relatif :
   $$x = \frac{\pi}{6} + 2{\cdot}k{\cdot}\pi \quad ; \quad x = -\frac{\pi}{6} + 2{\cdot}k{\cdot}\pi$$
   Ainsi, l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ admet pour expression :
   $$\mathcal{S} = \Big\{\frac{\pi}{6} + 2{\cdot}k{\cdot}\pi \,\Big|\, k \in \mathbb{Z}\Big\} \bigcup \Big\{-\frac{\pi}{6} + 2{\cdot}k{\cdot}\pi \,\Big|\, k \in \mathbb{Z}\Big\}$$

Exercice 2715

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a. $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ b. $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Correction 2715

a. L'égalité de l'énoncé :

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

admet également l'expression :

$$\sin x = \sin \frac{\pi}{3}$$

Ainsi, les solutions de cette équation admettent une des deux expressions suivantes où $k\in\mathbb{Z}$:

$$x = \frac{\pi}{3} + 2{\cdot}k{\cdot}\pi \quad\Bigg|\quad x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2{\cdot}k{\cdot}\pi = \frac{2\pi}{3} + 2{\cdot}k{\cdot}\pi$$

L'ensemble des solutions de cette équation admet pour expression :

$$\mathcal{S} = \Big\{\frac{\pi}{3} + 2{\cdot}k{\cdot}\pi \,\Big|\, k\in\mathbb{Z}\Big\} \bigcup \Big\{\frac{2\pi}{3} + 2{\cdot}k{\cdot}\pi \,\Big|\, k\in\mathbb{Z}\Big\}$$

b. L'égalité de l'énoncé :

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

admet pour expression :

$$\cos x = \cos \frac{\pi}{4}$$

Ainsi, les solutions de cette équation admettent une des deux expressions suivantes où $k\in\mathbb{Z}$:

$$x = \frac{\pi}{4} + 2{\cdot}k{\cdot}\pi \quad ; \quad x = -\frac{\pi}{4} + 2{\cdot}k{\cdot}\pi$$

L'ensemble des solutions de cette équation admet pour expression :

$$\mathcal{S} = \Big\{\frac{\pi}{4} + 2{\cdot}k{\cdot}\pi \,\Big|\, k\in\mathbb{Z}\Big\} \bigcup \Big\{-\frac{\pi}{4} + 2{\cdot}k{\cdot}\pi \,\Big|\, k\in\mathbb{Z}\Big\}$$

Exercice 2950

1. Résoudre dans l'ensemble $\big]-\pi\,;\,\pi\big]$ des mesures principales, les équations suivantes :

a. $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ b. $\sin x = -\dfrac{1}{2}$

c. $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ d. $\cos x = -\dfrac{1}{2}$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a. $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ b. $\sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Correction 2950

1. a. L'équation de l'énoncé :

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

admet pour expression :

$$\cos x = \cos \frac{\pi}{4}$$

On en déduit les deux solutions dans l'intervalle des mesures principales :

$$x = \frac{\pi}{4} \quad ; \quad x = -\frac{\pi}{4}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est :

$$\mathcal{S} = \Big\{-\frac{\pi}{4}\,;\,\frac{\pi}{4}\Big\}$$

b. L'équation de l'énoncé :

$$\sin x = -\frac{1}{2}$$

admet pour expression :

$$\sin x = \sin\Big(-\frac{\pi}{6}\Big)$$

On en déduit les deux solutions :

$$x = -\frac{\pi}{6} \quad\Bigg|\quad \begin{aligned} x &= \pi - \Big(-\frac{\pi}{6}\Big)\\ x &= \pi + \frac{\pi}{6}\\ x &= \frac{6\pi+\pi}{6}\\ x &= \frac{7\pi}{6}\\ x &= -\frac{5\pi}{6} + 2\pi \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions dans l'intervalle des mesures principales est :

$$\mathcal{S} = \Big\{-\frac{5\pi}{6}\,;\,-\frac{\pi}{6}\Big\}$$

c. L'équation de l'énoncé :

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

admet pour expression :

$$\sin x = \sin \frac{\pi}{3}$$

On en déduit les deux solutions :

$$x = \frac{\pi}{3} \quad\Bigg|\quad \begin{aligned} x &= \pi - \frac{\pi}{3}\\ &= \frac{3\pi-\pi}{3}\\ &= \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions dans l'intervalle des mesures principales est :

$$\mathcal{S} = \Big\{\frac{\pi}{3}\,;\,\frac{2\pi}{3}\Big\}$$

d. L'équation de l'énoncé :

$$\cos x = -\frac{1}{2}$$

admet pour expression :

$$\cos x = \cos \frac{2\pi}{3}$$

On en déduit les deux solutions de cette équation :

$$x = \frac{2\pi}{3} \quad ; \quad x = -\frac{2\pi}{3}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions dans l'intervalle des mesures principales est :

$$\mathcal{S} = \Big\{\frac{2\pi}{3}\,;\,-\frac{2\pi}{3}\Big\}.$$

2. a. L'égalité de l'énoncé :

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

donne l'égalité :

$$\cos x = \cos \frac{\pi}{6}$$

Ainsi, le nombre x doit vérifier l'une des deux équations où k représente un entier relatif quelconque :

$$x = \frac{\pi}{6} + 2{\cdot}k{\cdot}\pi \quad ; \quad x = -\frac{\pi}{6} + 2{\cdot}k{\cdot}\pi$$

Ainsi, l'ensemble des solutions admet pour expression :
$\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{6} + 2{\cdot}k{\cdot}\pi \,\middle|\, k{\in}\mathbb{Z} \right\} \bigcup \left\{ -\frac{\pi}{6} + 2{\cdot}k{\cdot}\pi \,\middle|\, k{\in}\mathbb{Z} \right\}$

b. L'égalité de l'énoncé :

$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

donne l'égalité :

$$\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

Ainsi, le nombre x doit vérifier l'une des deux équations où k représente un entier relatif quelconque :

$x = -\frac{\pi}{4} + 2{\cdot}k{\cdot}\pi$	$\begin{aligned} x &= \pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right) + 2{\cdot}k{\cdot}\pi \\ &= \pi + \frac{\pi}{4} + 2{\cdot}k{\cdot}\pi \\ &= \frac{5\pi}{4} + 2{\cdot}k{\cdot}\pi \\ &= 2\pi - \frac{3\pi}{4} + 2{\cdot}k{\cdot}\pi \\ &= -\frac{3\pi}{4} + 2{\cdot}(k+1){\cdot}\pi \\ &= -\frac{3\pi}{4} + 2{\cdot}k'{\cdot}\pi \end{aligned}$

Ainsi, l'ensemble des solutions admet pour expression :
$\mathcal{S} = \left\{ -\frac{\pi}{4} + 2{\cdot}k{\cdot}\pi \,\middle|\, k{\in}\mathbb{Z} \right\} \bigcup \left\{ -\frac{3\pi}{4} + 2{\cdot}k{\cdot}\pi \,\middle|\, k{\in}\mathbb{Z} \right\}$

