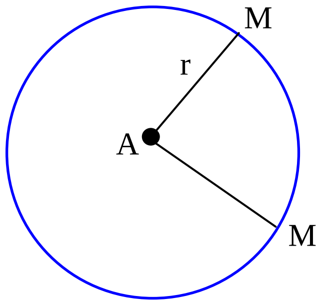
Équation d'un cercle
Site MathsTICE de Adama Traoré Lycée Technique Bamako

I – Définition d'un cercle

Soit A(a ; b) un point du plan et r un réel strictement positif. On appelle cercle de centre A et de rayon r l'ensemble des points M(x ; y) tels que : d (A ; M) = r .

Notation : $\mathcal{C}$(A ; r) désigne le cercle de centre A et de rayon r.



II – Équation du cercle

M(x ; y) ∈ $\mathcal{C}$(A ; r) ⇔ d(A ; M) = r ⇔ $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$ ⇔ $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. D'où l'équation d'un cercle de centre A et de rayon r est :

$$\mathcal{C}(A\,;\,r) : (x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

En développant l'équation $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ on a :

$x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2=r^2$. En posant c = $a^2+b^2-r^2$; l'équation du cercle de centre A et de rayon r devient : $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$.

Remarque :
Toute équation de cette forme n'est pas nécessairement l'équation d'un cercle.

III– Ensemble des points définis par : $x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$.

1- Exemple 1 :

Déterminer l'ensemble des points M(x ; y) du plan dont les coordonnées vérifient la relation : $x^2+y^2-2x+3y-\frac{3}{4}=0$.

Solution

$x^2+y^2-2x+3y-\frac{3}{4}=0 \Leftrightarrow \underline{x^2-2x}+\underline{y^2+3y}-\frac{3}{4}=0 \Leftrightarrow$

$$(x-1)^2-1+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}-\frac{3}{4}=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2-4=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=4$$

L'ensemble des points M cherchés est le cercle de centre $A\left(1\,;-\frac{3}{2}\right)$ de rayon r =2

2- Exemple 2 :

Déterminer l'ensemble des points M(x ; y) du plan dont les coordonnées vérifient la relation : $x^2 + y^2 + 3x + 5y + 11 = 0$.

Solution

$x^2 + y^2 + 3x + 5y + 11 = 0 \Leftrightarrow \underline{x^2 + 3x} + \underline{y^2 + 5y} + 11 = 0 \Leftrightarrow$

$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \left(y+\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 11 = 0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{5}{2}\right)^2 = -\frac{10}{4}$ Im *possible*

L'ensemble des points M cherchés est $S = \phi$.

3- Exemple 3 :

Donner une équation du cercle de centre A (–3 ; 4) et de rayon r = 5.

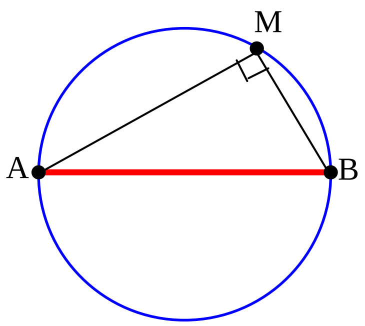
Solution

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \Leftrightarrow (x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 25 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$.

IV – Diverses déterminations d'un cercle

1- Cercle défini par son diamètre

Soit A ; B deux points distincts du plan ; $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre [AB].



.Un point M du plan appartient au cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [AB]$\Leftrightarrow$($\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{BM} = 0$).

Cette relation nous permet de déterminer l'équation d'un cercle de diamètre [AB].

Exemple :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ; I ; J) on donne les points

A(0 ;–2) et B(2 ;1). Donner une équation du cercle de diamètre [AB].

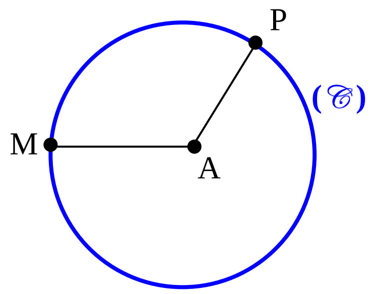
Solution

$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in C \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-0 \\ y+2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x-0)(x-2)+(y+2)(y-1)=0$

$x^2 - 2x + y^2 + y + 2 = 0 \Leftrightarrow \ (C): x^2 + y^2 - 2x - 2 = 0$.

2- Cercle défini par son centre et son rayon

Soient A et P deux points distincts du plan.



. Un point M ϵ $\mathcal{C}$(A ; AP) si, et seulement si AM^2 = AP^2 .

Exemple :

Donner une équation du cercle $\mathcal{C}$ de centre A(–3 ; 2) et passant par P(0 ; 1).

Solution

M(x ; y)$\epsilon\mathcal{C}$ $\Leftrightarrow$ AM^2 = AP^2 $\Leftrightarrow$ $(x+3)^2 + (y-2)^2 = (0+3)^2 + (1-2)^2$

$\Leftrightarrow$ $\mathcal{C}$: $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 10$.