ÉQUATIONS – INÉQUATIONS

Site MathsTICE de Adama Traoré Lycée Technique Bamako

I – Équations – Inéquations du premier degré à une inconnue:

1°) Équations du premier degré à une inconnue :

Exemple : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $3x+12=0$

$3x+12=0 \Leftrightarrow 3x=-12 \Leftrightarrow x=-4$; d'où l'ensemble des solutions est $S=\{-4\}$.

2°) Inéquations du premier degré à une inconnue :

Exemple : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $3x+12\leq 0$

$3x+12\leq 0 \Leftrightarrow 3x\leq -12 \Leftrightarrow x\leq -4$; D'où l'ensemble des solutions est $S=]-\infty;-4]$.

II – Équations du second degré à une inconnue:

1°) Définition:

Une équation du second degré à une inconnue dans $\mathbb{R}$ est une équation de la forme : $ax^2 + bx + c = 0$ $(a\neq 0)$ (a ; b et c sont des réels).

Exemples : $-3x^2 + 4x - 1 = 0$; $x^2 - x + 3 = 2x^2 + 5x - 9$.

2°) – Résolution par la méthode du discriminant :

<u>1[er] cas</u> : Si $b\neq 0$ et $c = 0$

Soit à résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x^2-5x=0 \Leftrightarrow x(2x-5)=0$

$\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } 2x-5=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{5}{2}$;

l'ensemble des solutions de l'équation est $S=\left\{0;\dfrac{5}{2}\right\}$.

<u>2[ème] cas</u> : si $b = 0$ et $c\neq 0$.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations : $3x^2+5=0 \Leftrightarrow 3x^2=-5$ *impossible*.

$2x^2-32=0 \Leftrightarrow 2x^2=32 \Leftrightarrow x^2=16 \Leftrightarrow x=4 \text{ ou } x=-4 \text{ d'où } S=\{-4;4\}$.

<u>3éme cas :</u> Cas général $a\neq 0$; $b\neq 0$; $c\neq 0$.

Posons $f(x)=ax^2+bx+c$.

– Forme canonique d'un polynôme du second degré :

Soit $ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré $(a\neq 0)$;

$$f(x)=ax^2+bx+c \Leftrightarrow$$

$$f(x)=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right] \Leftrightarrow$$

$$f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right] \Leftrightarrow$$

$$f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

Posons $\Delta=b^2-4ac$ alors

$$. \quad f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right] \quad .$$

Cette dernière écriture de $f(x)$ est appelée forme canonique du polynôme.

. $\Delta=b^2-4ac$. est appelé le discriminant de l'équation $ax^2+bx+c=0$.

Conclusion :

Pour résoudre une équation du second degré $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ d'inconnu x, je calcule le discriminant noté : $\Delta=b^2-4ac$.

- Si $\Delta<0$, alors l'équation n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$;
- Si $\Delta>0$, alors l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$. \quad x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad et \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad .$$

– Si $\Delta=0$, alors l'équation admet une solution unique : $x_1=x_2=\dfrac{-b}{2a}$.

Exemples : résolvez dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $3x^2-x+1=0$; b) $x^2+x-1=0$; c) $4x^2-12x+9=0$

3°) –Discriminant réduit :

Si b est pair on pose $b'=\dfrac{b}{2}\Leftrightarrow b=2b'$; alors on calcule le discriminant réduit

$$\Delta'=(b')^2-ac.$$

- Si $\Delta'<0$, alors l'équation n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$;
- Si $\Delta'>0$, alors l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$. \quad x_1=\frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a} \quad et \quad x_2=\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a} \quad .$$

- Si $\Delta'=0$, alors l'équation admet une solution unique : $x_1=x_2=\dfrac{-b'}{a}$.

Exemples : résolvez dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $5x^2-38x+21=0$; b) $x^2+2x-8=0$; c) $9x^2+6x-1=0$

4°) – Recettes :

Soit l'équation du second degré : $ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0)$.

R₁) Si a + b + c = 0, alors $x_1 = 1 \ et \ x_2 = \frac{c}{a}$;

Exemple : résoudre dans ℝ l'équation : $3x^2 - 12x + 9 = 0$

3 – 12 + 9 = 0 donc $x_1 = 1$ et $x_2 = 3$. D'où $S = \{1;3\}$

R₂) Si a + c = b, alors $x_1 = -1 \ et \ x_2 = \frac{-c}{a}$.

Exemple : résoudre dans ℝ l'équation : $-x^2 + 8x + 9 = 0$

– 1+ 9 = 8 donc $x_1 = -1$ et $x_2 = 9$. D'où $S = \{-1 ; 9\}$

5°) – Factorisation de $ax^2 + bx + c = 0$:

- Si $x_1 \ et \ x_2$ sont les racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ alors on a :

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

- Si $\Delta < 0$ alors $ax^2 + bx + c$ n'est pas factorisable.
- Si $\Delta = 0$ alors $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$.

Exemple : factoriser $f(x) = 2x^2 - 3x - 2$

III – Équations bicarrées:

Exemples : résolvez dans ℝ les équations bicarrées suivantes :

- $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$; $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$; $x^6 - 124x^3 - 125 = 0$.

(indication on pose $x^2 = T$ ou $x^3 = U$)

IV – Équations irrationnelles simples:

Propriété : $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0 \\ \left(\sqrt{a}\right)^2 = b^2 \end{cases}$

Exemple : résoudre dans ℝ l'équation $\sqrt{2x+1} = x - 1$.

L'ensemble de validité $D_v = \{x \in IR \ tel \ que \ \ x - 1 \geq 0\}$.

$$x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \Rightarrow D_v = [1; +\infty[.$$

$$\sqrt{2x+1} = x - 1 \Leftrightarrow 2x + 1 = (x-1)^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow$$

$x(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \notin D_v \ \ ou \ \ x = 4 \in D_v$; d'où $S = \{4\}$.

V – Inéquations:

1°) Signe du binôme ax + b :

Soit le binôme $f(x) = ax + b$

- Si a = 0, alors $f(x)$ est du signe de b.
- Si a ≠ 0, alors $f(x) = 0 \Leftrightarrow ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$.

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
ax + b		Signe de (– a)	0	Signe de a	

Exemple : étudier le signe de $f(x) = -2x + 12$

$-2x + 12 = 0 \Rightarrow x = 6$.

x	$-\infty$		**6**		$+\infty$
$-2x + 12$		+	0	–	

Pour x $\in]-\infty\ ;\ 6]$ $f(x) \geq 0$; Pour x $\in [6\ ;\ +\infty[$ $f(x) \leq 0$

2°) Signe d'un trinôme du second degré:

Considérons le trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$; Δ le discriminant de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

<u>1er cas</u> : Si $\Delta < 0$, alors le trinôme $ax^2 + bx + c$ est du signe de a.

<u>2ème cas</u> : Si $\Delta = 0$, alors le trinôme $ax^2 + bx + c$ est du signe de a pour toutes valeurs x $\neq \frac{-b}{a}$.

<u>3ème cas</u> : Si $\Delta > 0$, et x_1 ; x_2 les racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ $(x_1 < x_2)$ alors le trinôme du second degré est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe de (–a) à l'intérieur des racines.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		Signe de a	0	Signe de (– a)	0	Signe de a	

Exemples : étudier le signe des polynômes suivants :

$f(x) = 2x^2 + x + 1$; $g(x) = x^2 - 11x + 30$; $h(x) = \frac{x+3}{-2x+8}$.

3°) Application à la résolution d'inéquations :

Exemples : résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$-2x^2 + 4x + 30 \leq 0$; $3x^2 + 5x + 4 \succ 0$; $9x^2 + 6x + 1 \prec 0$; $\frac{x^2 + 2x - 3}{-x + 5} \leq 0$;

I– Système d'équations du 1^er degré à 2 inconnues :

Définition :
Soient a, b, c, a', b', c' six réels donnés. Résoudre pour x et y réels le système

$$\begin{cases} ax + by = c & (E_1) \\ a'x + b'y = c' & (E_2) \end{cases}$$

Consiste à déterminer l'ensemble S des couples $(x\,;\,y)$ de réels qui vérifient simultanément les deux équations.

1°) Différentes méthodes de résolution :

Exemple de résolution :

Résoudre pour x et y réels le système (S) $\begin{cases} 2x - 5y = 11 \\ 3x + 4y = 5 \end{cases}$

- **1ère méthode : par combinaison linéaires**

(S) $\begin{cases} 2x - 5y = 11 & \times(-3) \\ 3x + 4y = 5 & \times(2) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -6x + 15y = -33 \\ 6x + 8y = 10 \end{cases}$

$-----------------$

$23y = -23 \Leftrightarrow y = -1$

(S) $\begin{cases} 2x - 5y = 11 & \times(4) \\ 3x + 4y = 5 & \times(5) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -8x - 20y = 44 \\ 15x + 20y = 25 \end{cases}$

$-----------------$

$3x = 69 \Leftrightarrow x = 3$

Le système (S) admet le couple $(3\,;-1)$ comme solution ; $S = \{\ (3\,;-1)\ \}$.

- **2ème méthode : par substitution**

$$(S)\ \begin{cases} 2x - 5y = 11 & (1) \\ 3x + 4y = 5 & (2) \end{cases}$$

Dans l'équation (1) exprimons x en fonction y : 2x – 5y = 11 $\Leftrightarrow$ $x = \dfrac{5y + 11}{2}$.

Dans l'équation (2) remplaçons x par sa valeur :

$$3\left(\frac{5y+11}{2}\right) + 4y = 5 \Leftrightarrow \frac{15y}{2} + 4y = 5 - \frac{33}{2} \Leftrightarrow 15y + 8y = -23 \Leftrightarrow 23y = -23$$

$\Leftrightarrow y = -1$. On remplace y par –1 dans l'expression de $x = \dfrac{5y+11}{2}$. On obtient $x = 3$. D'où l'ensemble solution du système est $S = \{\ (3\,;-1)\ \}$.

- **3ème méthode : par Comparaison**

$$(S)\ \begin{cases} 2x-5y=11 & (1) \\ 3x+4y=5 & (2) \end{cases}$$

Dans l'équation (1) exprimons x en fonction y : 2x – 5y = 11 ⇔ $x=\dfrac{5y+11}{2}$.

Dans l'équation (2) exprimons x en fonction y : 3x + 4y = 5 ⇔ $x=\dfrac{5-4y}{3}$.

En comparant les valeurs de x on a : $\dfrac{5y+11}{2}=\dfrac{5-4y}{3} \Leftrightarrow$

$3(5y+11)=2(5-4y) \Leftrightarrow 15y+33=10-8y \Leftrightarrow 23y=-23 \Leftrightarrow y=-1$

$y=-1 \Rightarrow x=3$. D'où l'ensemble solution du système est $S=\{\ (3\,;-1)\ \}$.

- **4ème méthode : par déterminant**

Soit le système de deux équations du premier degré à deux inconnues x et y.

$$\begin{cases} ax+by=p & (E_1) \\ cx+dy=q & (E_2) \end{cases}$$

Où a ; b ; c ; d ; p ; q sont des réels donnés. Pour résoudre ce système on calcule

le déterminant principal : $Dét=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$;

le déterminant secondaire en x: $D_x=\begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix}=pd-bq$;

le déterminant secondaire en y: $D_y=\begin{vmatrix} a & p \\ c & q \end{vmatrix}=aq-pc$;

- Si $Dét \neq 0$; alors les droites (E_1) *et* (E_2) sont sécantes en un point I $(x\,;y)$. Le système admet un couple unique $(x\,;y)$ de solution tel que :

$$x=\frac{D_x}{Dét} \quad et \quad y=\frac{D_y}{Dét}$$. et $S=\{(x\,;y)\}$

- $\left.\begin{array}{r} Si\ \ Dét=0 \\ et\ \ D_x\neq 0\ \ ou\ \ D_y\neq 0 \end{array}\right\}$ *Alors les droites* (E_1) *et* (E_2) *sont parallèles*

  Le système n'admet pas de solutions, $S=\phi$.

- $\left.\begin{array}{r} Si\ \ Dét=0 \\ et\ \ D_x=0\ ;\ D_y=0 \end{array}\right\}$ *Alors les droites* (E_1) *et* (E_2) *sont confondues*.

  Le système admet une infinité de solutions de la forme,

  $S=\{\ (x\,;\alpha x+\beta)/\,x\in IR\}$ ou $S=\{\ (\alpha y+\beta\ ;\ y\ )/\,y\in IR\}$.

Exemple 1 : Soit à résoudre par la méthode du déterminant le système

$$(S)\ \begin{cases} 2x-5y=11 & (1) \\ 3x+4y=5 & (2) \end{cases}$$

$Dét=\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=8-(-15)=23$; $D_x=\begin{vmatrix} 11 & -5 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}=44-(-25)=69$;

$D_y=\begin{vmatrix} 2 & 11 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=10-(33)=-23$; $x=\dfrac{D_x}{Dét}=\dfrac{69}{23}=3$; $y=\dfrac{D_y}{Dét}=\dfrac{-23}{23}=-1$.

D'où l'ensemble solution est : $S=\{\ (3\,;-1)\ \}$.

Exemple 2 : Soit à résoudre par la méthode du déterminant le système

$$(S)\ \begin{cases} 2x-3y=8 & (1) \\ -4x+6y=-1 & (2) \end{cases}$$

$Dét=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{vmatrix}=12-12=0$; $D_x=\begin{vmatrix} 8 & -3 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}=48-3=45$;

$D_y=\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ -4 & -1 \end{vmatrix}=-2+32=30$; $Dét=0\ \ et\ \ D_x\neq 0$; $D_y\neq 0$. Le système n'admet pas de solutions. D'où l'ensemble solution est : $S=\varnothing$.

Exemple 3 : Soit à résoudre par la méthode du déterminant le système

$$(S)\ \begin{cases} x-2y=2 & (1) \\ 4x-8y=8 & (2) \end{cases}$$

$Dét=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -8 \end{vmatrix}=-8+8=0$; $D_x=\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 8 & -8 \end{vmatrix}=-16+16=0$;

$D_y=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}=8-8=0$; $Dét=0\ \ et\ \ D_x=0$; $D_y=0$. Le système admet une infinité de solutions. $x-2y=2 \Leftrightarrow x=2y+2$.
D'où l'ensemble solution est : $S=\{\ (2y+2;y)\ /\ y\in IR\ \}$.

2°) Systèmes paramétriques :

Exemple : Résoudre et discuter suivant les valeurs du paramètre m le système

$$(S)\ \begin{cases} (2m-1)x+3my=1 & (1) \\ 3mx+3(2m+1)y=m+2 & (2) \end{cases}$$

II– Système d'inéquations du 1^er degré à 2 inconnues :

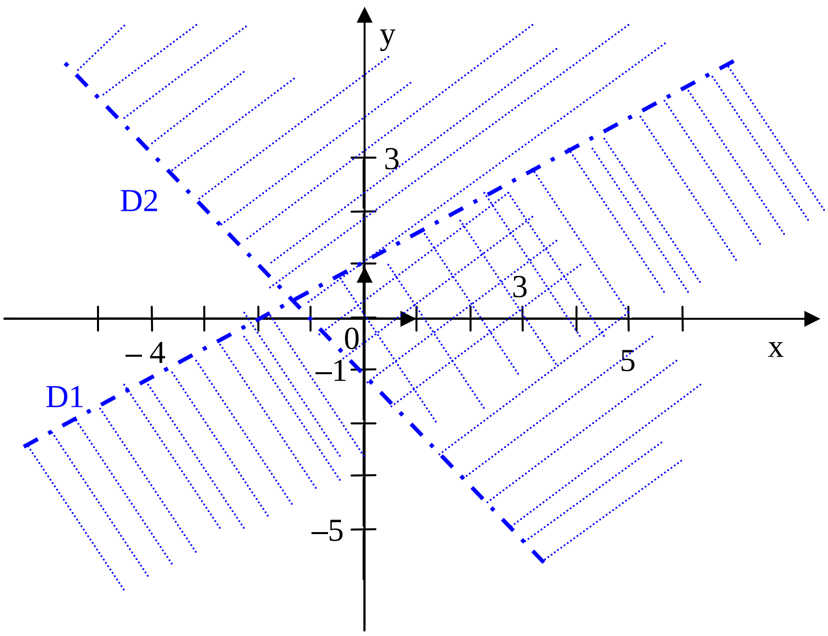
Exemple 1 :

Représentons l'ensemble des solutions du système d'inéquations :

$\begin{cases} x-2y+2\prec 0 \\ x+y+1\prec 0 \end{cases}$ Ce système est équivalent au système $\begin{cases} y\succ \dfrac{1}{2}x+1 \\ y\prec -x-1 \end{cases}$

il faut représenter dans le plan les droites d'équation respectives :

$$(D_1):\ y=\frac{1}{2}x+1 \text{ et } (D_2):\ y=-x-1.$$



La région du plan non hachurée est la partie solution du système.

Exemple 2 :

Représentons l'ensemble des solutions du système d'inéquations :

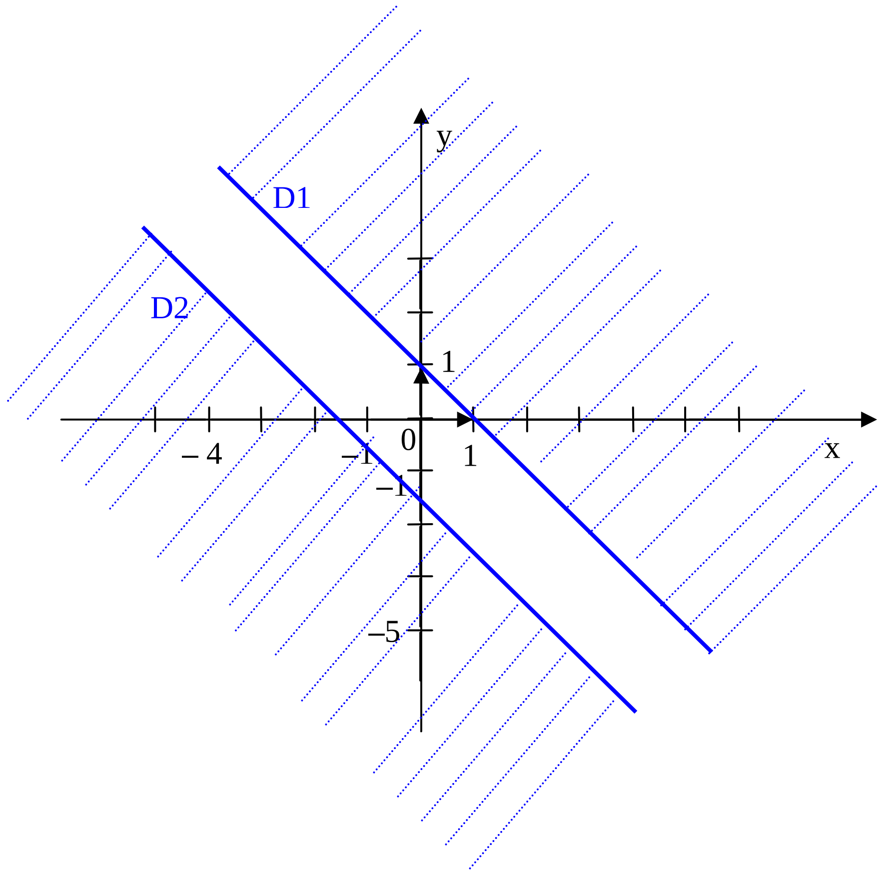
$$\begin{cases} x + y - 1 \leq 0 \\ 2x + 2y + 3 \geq 0 \end{cases}$$

Ce système est équivalent au système

$$\begin{cases} y \leq 1 - x \\ y \geq -x - \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

il faut représenter dans le plan les droites d'équation respectives :

(D_1) : $y = -x + 1$ et (D_2) : $y = -x - \dfrac{3}{2}$.



La région du plan non hachurée est la partie solution du système.

III – Systèmes de trois équations à trois inconnues :

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système suivant

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 13 & (L_1) \\ x + 3y - 5z = -16 & (L_2) \\ 4x + 2y - z = 3 & (L_3) \end{cases}$$

- **Méthode de Substitution :**

$(L_3) \Rightarrow z = 4x + 2y - 3$. En remplaçant z par sa valeur dans les autres équations on a le système devient : $\begin{cases} 11x + 3y = 19 & (1) \\ -19x - 7y = -31 & (2) \end{cases}$

$(1) \Rightarrow 3y = 19 - 11x \Leftrightarrow y = \dfrac{19 - 11x}{3}$ **.** En remplaçant y par sa valeur dans (2) on obtient : $20x = 40 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = -1$ $z = 3$. D'où la solution du système est le triplet (2 ; –1 ; 3). Et l'ensemble solution est $S = \{ (2\,;-1\,;\,3) \}$.

- **Méthode du pivot de Gauss :**

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 13 & (L_1) \\ x + 3y - 5z = -16 & (L_2) \\ 4x + 2y - z = 3 & (L_3) \end{cases}$$

Eliminons x dans les équations (L_2) et (L_3)

$$\begin{array}{rl} (L_1) & 3x - y + 2z = 13 \\ (-3L_2) & -3x - 9y + 15z = 48 \\ & \text{-----------} \\ & = 0 - 10y + 17z = 61 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} (4L_1) & 12x - 4y + 8z = 52 \\ (-3L_2) & -12x - 6y + 3z = -9 \\ & \text{-----------} \\ & = 0 - 10y + 11z = 43 \end{array}$$

Le système devient : $\begin{cases} 3x - y + 2z = 13 & (L_1) \\ 0 - 10y + 17z = 61 & (L_2) \\ 0 - 10y + 11z = 43 & (L_3) \end{cases}$

Eliminons y dans l'équation (L_3)

$$\begin{array}{rl} (L_2) & -10y+17z=61 \\ (-L_3) & 10y-11z=-43 \\ & \text{------------------------} \\ & = 0 + 6z = 18 \end{array}$$

Le système devient :

$$\begin{cases} 3x-y+2z=13 & (L_1) \\ 0-10y+17z=61 & (L_2) \\ 0+0+6z=18 & (L_3) \end{cases}$$

Un tel système est dit échelonné ou triangularisé.

$(L_3) \Rightarrow 6z=18 \Leftrightarrow z=3$

$(L_2) \Rightarrow -10y+51=61 \Leftrightarrow y=-1$ d'où $S=\{(2\,;-1\,;\,3)\}$

$(L_1) \Rightarrow 3x+1+6=13 \Leftrightarrow x=2$