

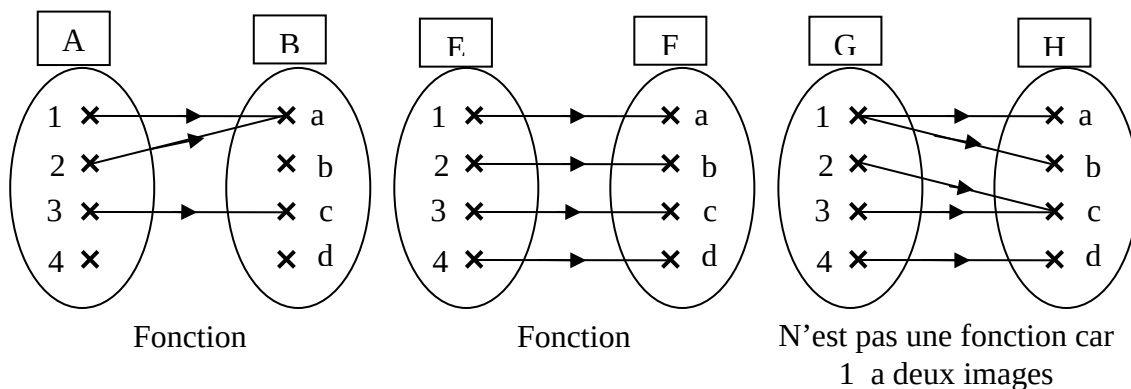
## I – Généralités sur les fonctions

### 1°) – Définition :

Soit A et B deux ensembles non vides de  $\mathbb{R}$ . On appelle fonction de A vers B, toute relation de A vers B qui à chaque élément de A associe au plus un élément de B.

Exemples :

Dites si oui ou non les relations ci-dessous sont des fonctions



**Notation :** Si f est une fonction de A vers B qui à un élément x de A associe un élément f(x) de B on note :  $f : A \rightarrow B$

$x \mapsto f(x)$  (lire f envoie A dans B qui à x associe f(x))

A est appelé ensemble de départ ou source

B est appelé ensemble d'arrivée ou but

$f(x)$  est appelé l'image de x par f

x est appelé l'antécédent de f(x)

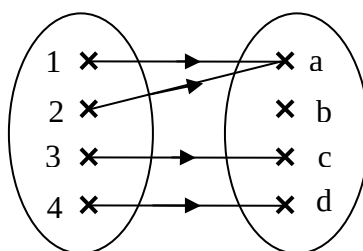
### 2°) – Graphe d'une fonction :

#### a) Définition :

On appelle graphe de f l'ensemble des couples  $(x ; y) \in A \times B$  tels que  $x \in \mathcal{D}f$  et  $f(x) = y$ .

L'ensemble des points  $M(x ; y)$  appartenant au graphe de f est appelé courbe représentative de f.

#### b) Exemple :



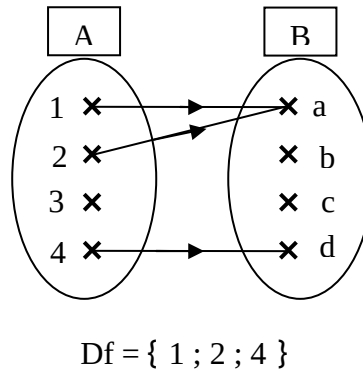
Le graphe de f est  $G_f = \{(1 ; a), (2 ; a), (3 ; c), (4 ; d)\}$

### 3°) Détermination de l'ensemble de définition

#### a) Définition :

Soit  $f : A \mapsto B$  une fonction. On appelle ensemble de définition  $\mathcal{D}_f$  de  $f$ , l'ensemble des éléments  $x$  de  $A$  qui ont une image dans  $B$ .

b) **Exemple 1** : Soit la fonction de  $A$  vers  $B$



c) **Exemple 2** :  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{3x+1}{x-2}.$$

$x-2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$ , donc  $D_f = \mathbb{R} - \{ 2 \} = ]-\infty ; 2[ \cup ]2 ; +\infty[.$

#### d) Applications

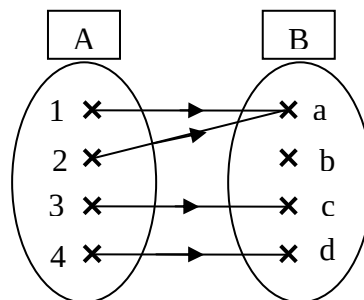
Déterminer l'ensemble de définition  $\mathcal{D}_f$  de chacune des fonctions définies par :

$$f(x) = 3x^2 + 4x - 9 ; \quad f(x) = \frac{x+1}{x^2 - 7x + 6} ; \quad f(x) = \frac{\sqrt{x-4}}{x-5} ; \quad f(x) = \sqrt{-x^2 + 3x - 2}.$$

### 4°) – Détermination d'une fonction

Il existe plusieurs façons de détermination d'une fonction.

#### a) Par Un diagramme Sagittal :



L'image de 1 est a ; L'antécédent de c est 3.

#### b) Par Tableau :

|        |    |    |    |   |   |   |    |    |
|--------|----|----|----|---|---|---|----|----|
| $x$    | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3  | 4  |
| $f(x)$ | -1 | 1  | 3  | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 |

$f(0) = 5$  ; L'antécédent de 5 est 0.

### c) Par un Programme de calcul

Soit  $g$  la fonction de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par :

Pour calculer l'image du réel  $a$  on procède de la façon suivante :

- On le multiplie par 2
- On ajoute 5 au résultat
- On termine en divisant le dernier résultat par 3.

Calculer  $g(7)$ .  $g(7) = \frac{(7 \times 2) + 5}{3} = \frac{19}{3}$ .

### d) Formule Explicite :

Soit  $f$  est une fonction de  $A$  vers  $B$ . Si  $A$  et  $B$  sont des sous ensembles de  $\mathbb{R}$  alors on dit que  $f$  est une fonction numérique d'une variable réelle.

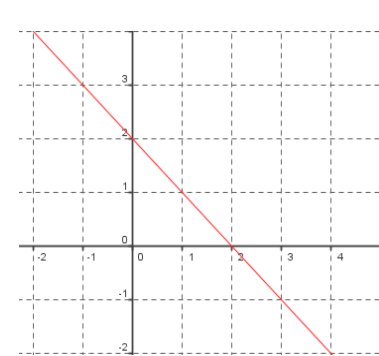
Exemple :  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{2x+3}{x^2+1}.$$

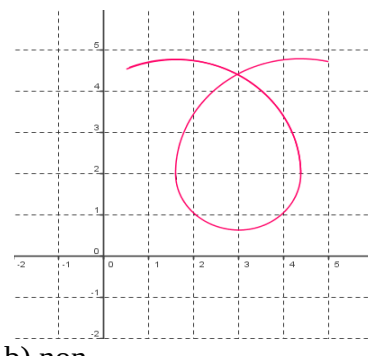
Calculer  $f(3)$  et  $f(4)$ .

### e) Par une représentation graphique :

Dans chacun des cas suivants dire si la représentation graphique peut être celle d'une fonction



a) oui



b) non



c) oui

## 5°) Coïncidence de deux fonctions sur un ensemble

### a) Égalité de deux fonctions

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions ayant même ensemble de départ  $E$  et même ensemble d'arrivée  $F$

$$. ( f = g ) \Leftrightarrow \left( \begin{array}{l} \bullet D_f = D_g \\ \bullet \forall x \in D_f \quad f(x) = g(x) \end{array} \right) .$$

### b) Exemples

$$1- \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto (x-2)(x+2) \quad x \mapsto x^2 - 4.$$

$f \neq g$  Car elles n'ont pas le même ensemble de départ.

$$2- \quad f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad ; \quad g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{2x+3}{x^2+1} \quad x \mapsto \frac{2x+3}{x^2+1}$$

$f \neq g$  Car elles n'ont pas le même ensemble d'arrivée.

$$3- \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{x^2 - 4}{x - 2} \quad ; \quad x \mapsto x + 2.$$

$f \neq g$  Car elles n'ont pas le même ensemble de définition.

$$4- \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{x^4 - 4}{x^2 + 2} \quad ; \quad x \mapsto x^2 - 2.$$

$f = g$  Car elles ont le même ensemble de définition et  $f(x) = g(x)$ .

### b) coïncidence de deux fonctions sur un ensemble

– Définition : soit  $f : IR \rightarrow IR$  ;  $g : IR \rightarrow IR$   
 $x \mapsto f(x)$  ;  $x \mapsto g(x)$

Soit  $C$  un sous-ensemble de  $D_f \cap D_g$ .

$$\left( \begin{array}{c} f \text{ et } g \text{ coïncident} \\ \text{sur } C \end{array} \right) \stackrel{\text{si et seulement si}}{\Leftrightarrow} \left( \begin{array}{c} \forall x \in C \\ f(x) = g(x) \end{array} \right).$$

– Exemple : soit  $f : IR \rightarrow IR$  ;  $g : IR \rightarrow IR$   
 $x \mapsto f(x) = |2x - 1| + |1 - x|$  ;  $x \mapsto g(x) = 3x - 2$

- Trouver la partie  $C$  de  $\mathbb{R}$  sur laquelle  $f$  et  $g$  coïncident.

Réponse :

| x          | $-\infty$ | $\frac{1}{2}$ | 1        | $+\infty$ |
|------------|-----------|---------------|----------|-----------|
| $ 2x - 1 $ | $-2x + 1$ | 0             | $2x - 1$ | $2x - 1$  |
| $ 1 - x $  | $1 - x$   | $1 - x$       | 0        | $-1 + x$  |
| $f(x)$     | $-3x + 2$ | $\frac{1}{2}$ | x        | $3x - 2$  |

Pour  $x \in C = [1; +\infty[$   $f(x) = g(x)$  donc  $f$  et  $g$  coïncident sur  $C$ .

## II – Composition, décomposition de fonctions

### 1°) Schémas de Calcul associé à une fonction

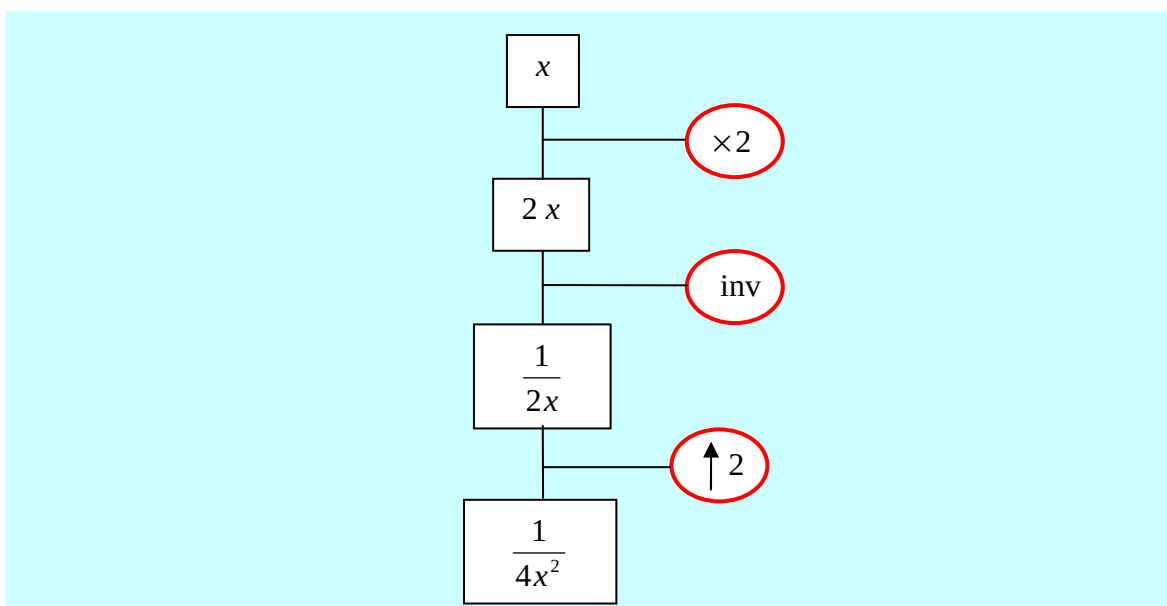
Un schéma de calcul ou un organigramme qui indique les différentes étapes d'exécution d'un programme de calcul d'une fonction.

#### Exemples :

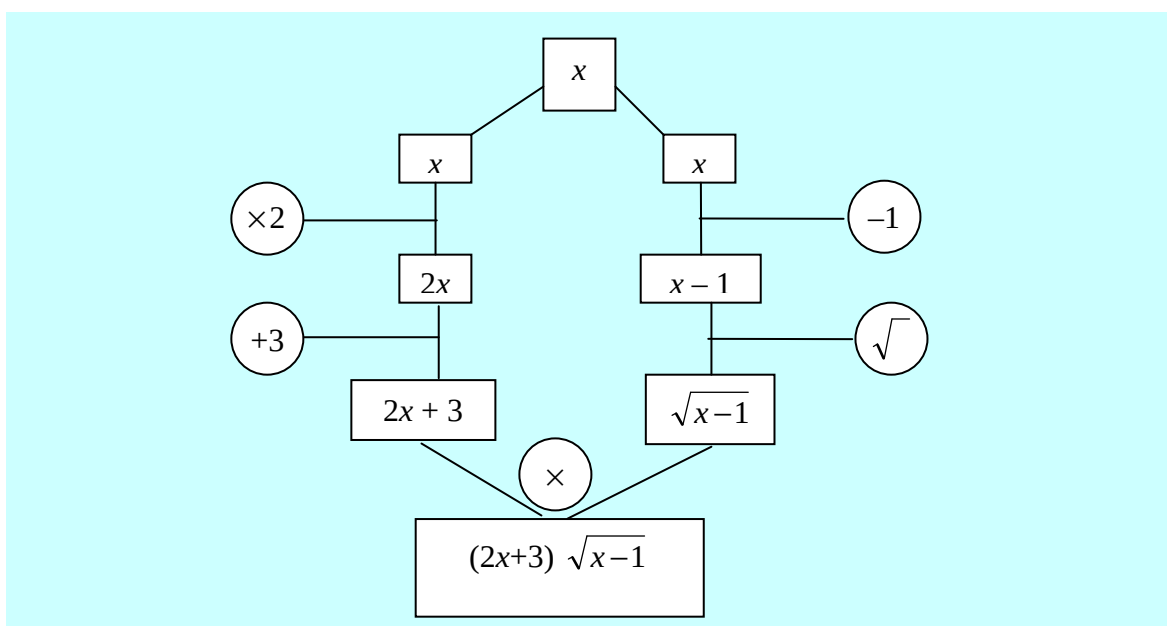
Dresser le schéma de calcul associé à chacune des fonctions  $f$  et  $g$  définie par :

$$f(x) = \frac{1}{4x^2} ; \quad g(x) = (2x+3)\sqrt{x-1}$$

- Schéma de calcul associé à la fonction  $f$



- Schéma de calcul associé à la fonction  $g$



## 2°) Composition des Fonctions :

**a) Définition :**  $f$  étant une fonction de  $E$  vers  $F$ ,  $g$  une application de  $F$  vers  $G$ , la fonction notée :  $g \circ f$  de  $E$  vers  $G$  est définie par :

$$g \circ f : E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$

$$x \mapsto (g \circ f)(x) = g[f(x)]$$

et s'appelle la composée de  $f$  par  $g$ .

### b) Exemples :

soit  $f : x \mapsto f(x) = 2x + 1$ ;  $g : x \mapsto g(x) = \frac{1}{x}$ ;  $h : x \mapsto h(x) = x^2$

Trouver les ensembles de définition de chacune des fonctions  $f$ ;  $g$  et  $h$  puis calculer  $g \circ f(3)$ ;  $f \circ g(3)$ ;  $g \circ f(-2)$ ;  $f \circ g(-2)$ ;  $g \circ f(x)$ ;  $h \circ f(x)$ .

Réponse :  $g \circ f(3) = g[f(3)] = g(7) = \frac{1}{7}$ ;  $f \circ g(3) = f[g(3)] = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{3}$ .

$$g \circ f(x) = g[f(x)] = g(2x+1) = \frac{1}{2x+1}; \quad h \circ f(x) = h[f(x)] = h(2x+1) = (2x+1)^2$$

## 3°) Décomposition d'une fonction :

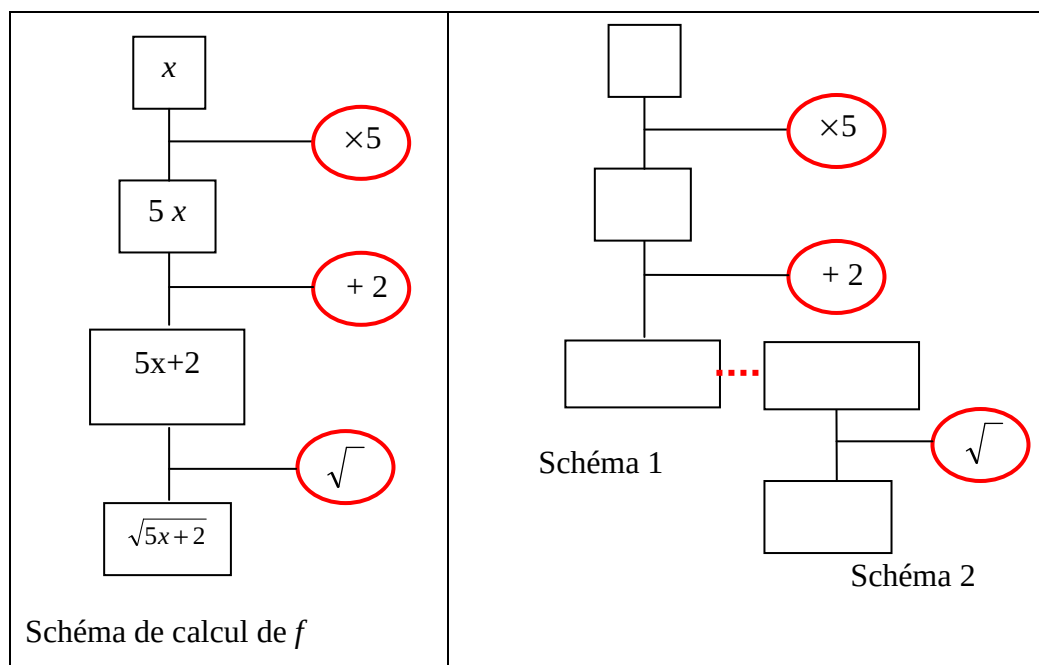
### a) Définition :

Décomposer une fonction  $f$ , c'est écrire  $f$  comme composée de deux ou plusieurs fonctions.

### b) Exemples :

Soit la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \sqrt{5x+2}$$



Le schéma 1 est le schéma associé à la fonction  $g : x \mapsto 5x + 2$

Le schéma 2 est le schéma associé à la fonction  $h : x \mapsto \sqrt{x}$

$$f = h \circ g$$

### III – Image directe, Image réciproque par une fonction

#### 1°) Image directe

**a) Définition :** Soit  $f$  une fonction de  $E$  vers  $F$  d'ensemble de définition  $\mathcal{D}_f$ , et  $A$  une partie de  $E$ . On appelle image directe (ou image) de  $A$  par  $f$  notée  $f(A)$  l'ensemble des images par  $f$  de tous les éléments de  $A \cap \mathcal{D}_f$ .

**b°) Exemple :** soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1}{x+1}.$$

Trouver les images par  $f$  de chacun des intervalles de  $\mathbb{R}$  suivants :

$$A = ]-1 ; 4] \quad ; B = [-5 ; 3].$$

Réponse :  $f$  est définie si  $x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$  ;  $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{-1\}$ .

- Image directe de  $A = ]-1 ; 4]$  par  $f$ .

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, x \in A, \Leftrightarrow -1 < x \leq 4 \Leftrightarrow 0 < x+1 \leq 5 \Leftrightarrow \frac{1}{5} \leq \frac{1}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{5} \leq f(x); \text{ D'où } f(A) = \left[\frac{1}{5}; +\infty[.$$

- Image directe de  $B = [-5 ; 3]$  par  $f$ .

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, x \in B \Leftrightarrow x \in [-5 ; -1[ \cup ]-1 ; 3]$$

$$-5 \leq x < -1 \quad ; \quad -1 < x \leq 3$$

$$-4 \leq x+1 < 0 \quad ; \quad 0 < x+1 \leq 4$$

$$\frac{1}{x+1} \leq -\frac{1}{4} \quad ; \quad \frac{1}{4} \leq \frac{1}{x+1}$$

$$\text{D'où } f(B) = \left]-\infty; -\frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{4}; +\infty\right[.$$

#### 2°) Image réciproque

**a) Définition :** Soit  $f$  une fonction de  $E$  vers  $F$  d'ensemble de définition  $\mathcal{D}_f$ , et  $B$  une partie de  $F$ . On appelle image réciproque de  $B$  par  $f$ , la partie de  $\mathcal{D}_f$  notée :  $f^{-1}(B)$  constitué des antécédents par  $f$  de tous les éléments de  $B$ .

**b) Remarque :** Comment chercher l'image réciproque ?

Pour trouver l'image réciproque d'un intervalle  $B$  de  $\mathbb{R}$  par une fonction  $f$  d'ensemble de définition  $\mathcal{D}_f$ , on résout l'un des systèmes d'inconnue  $x$  suivants :

– Si  $B = [a, b]$  on résout  $x \in \mathcal{D}_f$  ;  $a \leq f(x) \leq b$ .

– Si  $B = ]a, b[$  on résout  $x \in \mathcal{D}_f$  ;  $a < f(x) < b$ .

– Si  $B = [a, b[$  on résout  $x \in \mathcal{D}_f$  ;  $a \leq f(x) < b$ .

– Si  $B = \{b\}$  on résout  $x \in \mathcal{D}_f$  ;  $f(x) = b$

– Si  $B = ]-\infty, a]$  on résout  $x \in \mathcal{D}_f$  ;  $f(x) \leq a$ .

– Si  $B = ]a, +\infty[$  on résout  $x \in \mathcal{D}_f$  ;  $a < f(x)$ .

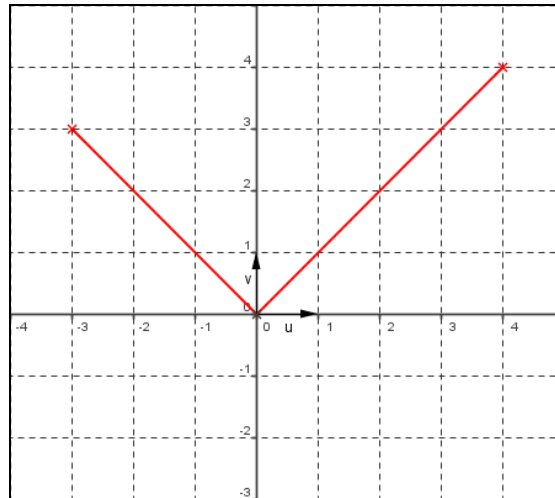
c) *Exemples* : soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ;  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto 2x - 1$$

$$x \mapsto x^2 - x - 2$$

- Trouver l'image réciproque par  $f$  de  $B = [1 ; 3]$
- Trouver l'image réciproque par  $g$  de  $B = \{ 0 \}$

Soit la fonction  $h$  définie par sa représentation graphique ci-dessous.



Trouver l'image réciproque de chacun des intervalles suivants

$C = [1 ; 3]$  ;  $D = [-1 ; 0]$  ;  $E = \{ 2 \}$  ;  $F = [-2 ; -1]$  .