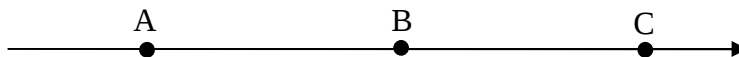


I – Équation d'une droite

1- Condition d'alignement de trois points

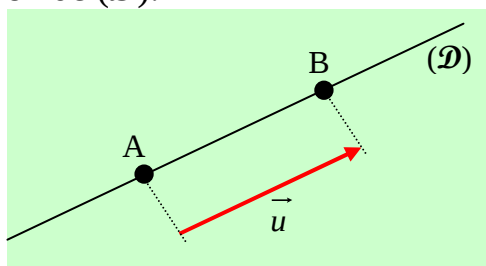


Trois points A ; B ; C du plan sont alignés s'il existe un réel k tel que :

$$\overrightarrow{AC} = k \overrightarrow{AB}.$$

2- Vecteur directeur d'une droite

Une droite $(\mathcal{D})$ du plan est déterminée par un point A de $(\mathcal{D})$ et un vecteur $\vec{u}$ non nul qui indique la direction de $(\mathcal{D})$.



Un tel vecteur non nul $\vec{u}$ est appelé un **vecteur directeur** de $(\mathcal{D})$.

Soient A et B deux points distincts de $(\mathcal{D})$, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est aussi un vecteur directeur de $(\mathcal{D})$.

- **Notation :** La droite $(\mathcal{D})$ passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est notée : $\mathcal{D}(A ; \vec{u})$.

3- Équation cartésienne d'une droite : $ax + by + c = 0$

Dans le plan muni d'un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$. Une équation cartésienne de la droite $(\mathcal{D})$ passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ s'obtient en considérant un point M(x ; y) et en annulant le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$.

$$[M(x ; y) \in \mathcal{D}(A ; \vec{u})] \Leftrightarrow [\det (\overrightarrow{AM} ; \vec{u}) = 0] .$$

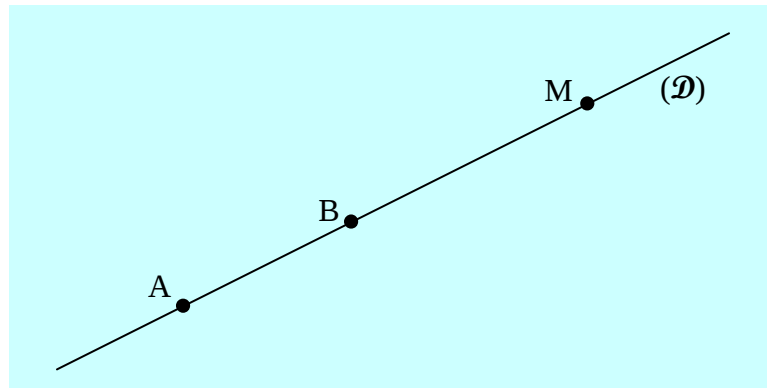
- Exemple :

Écrire une équation de la droite $\mathcal{D}(A ; \vec{u})$ sachant que $A(\frac{3}{2} ; 2)$ $\vec{u}(1 ; 2)$

Solution

$$\det (\overrightarrow{AM} ; \vec{u}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - \frac{3}{2} & 1 \\ y - 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x - y - 1 = 0 \Leftrightarrow (\mathcal{D}) : 2x - y - 1 = 0.$$

- On peut également déterminer l'équation d'une droite connaissant deux points A et B distincts de cette droite.



$$[M(x ; y) \in \mathcal{D}(A;B)] \Leftrightarrow [\det (\overrightarrow{AM} ; \overrightarrow{AB}) = 0] .$$

Exemple :

Soit $(\mathcal{D})$ une droite passant par $A(-1 ; 3)$ et $B(2 ; 5)$. Soit $M(x ; y)$ un point du plan. Une équation de la droite $(\mathcal{D})$ s'obtient en annulant le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$.

$$\det (\overrightarrow{AM} ; \overrightarrow{AB}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+1 & 3 \\ y-3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x - 3y + 11 = 0 \Leftrightarrow (\mathcal{D}) : 2x - 3y + 11 = 0.$$

– Le plan étant muni d'un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$, l'ensemble des points M du plan $\mathcal{P}$ dont les coordonnées x et y sont telles que : $ax + by + c = 0$ ($a \neq 0 ; b \neq 0$) est une droite de **vecteur directeur** $\vec{u}(-b ; a)$; et de **vecteur normal** $\vec{v}(a ; b)$.

Exemple :

Trouver un vecteur directeur et un point A de la droite $(\mathcal{D}) : 5x + 2y - 8 = 0$.

Solution

Un vecteur directeur de $(\mathcal{D})$ est $\vec{u}(-2 ; 5)$. $A(0 ; 4)$ est un point de $(\mathcal{D})$.

II – Droite parallèles–Droites orthogonales

1- Droites parallèles

Soient D et D' deux droites d'équation respectives $(D): 3x + 2y - 6 = 0$;

$(D'): x + \frac{2}{3}y - 6 = 0$. Un vecteur directeur de (D) est $\vec{u}(-2 ; 3)$; Un vecteur

directeur de (D') est $\vec{v}(-\frac{2}{3} ; 1)$. $\det(\vec{u} ; \vec{v}) = \begin{vmatrix} -2 & -\frac{2}{3} \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 2 = 0$.

De façon générale :

$$D(A; \vec{u}) // D'(B; \vec{v}) \Leftrightarrow \det(\vec{u}; \vec{v}) = 0.$$

2- Droites orthogonales

Deux droites (D) et (D') d'équations respectives :

$$(D): px + qy + r = 0;$$

$$(D'): p'x + q'y + r' = 0 \text{ sont orthogonales si et seulement si, } pp' + qq' = 0.$$

De façon générale :

$$D(A; \vec{u}) \perp D'(B; \vec{v}) \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

III- Coefficient directeur (ou pente) d'une droite

Le plan est muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Soit (D) la droite dont une équation cartésienne est $ax + by + c = 0$. Lorsque $b \neq 0$ c'est-à-dire la droite n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées on peut écrire l'équation sous la forme :

$$by = -ax - c \Leftrightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}; \text{ en posant } m = -\frac{a}{b} \text{ et } p = -\frac{c}{b} \text{ on aura}$$

$$y = mx + p.$$

- Le réel m est appelé le coefficient directeur de (D)
- Le réel p est appelé l'ordonnée à l'origine de (D);
- On remarque que $\vec{u}(1; m)$ est un vecteur directeur de (D).

Exemple : Soit (D) la droite dont une équation cartésienne est $4x + 2y - 5 = 0$. Déterminer son coefficient directeur et son ordonnée à l'origine.

Solution

$$4x + 2y - 5 = 0 \Leftrightarrow 2y = -4x + 5 \Leftrightarrow y = -2x + \frac{5}{2}.$$

Le coefficient directeur est $m = -2$ et l'ordonnée à l'origine est $p = \frac{5}{2}$.

$\vec{u}(1; -2)$ est un vecteur directeur de (D).

IV- Représentation paramétrique analytique d'une droite

a) Exemple :

Soit (D) la droite passant par $A(x_0; y_0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(\alpha; \beta)$.

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in D(A; \vec{u}) \Leftrightarrow (\exists! t \in \mathbb{R} / \overrightarrow{AM} = t \vec{u})$$

$$\overrightarrow{AM} = t \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}; \vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x - x_0 = \alpha t \\ y - y_0 = \beta t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases} t \in \mathbb{R}$$

est l'expression paramétrique analytique de (D)

- On dit que l'application

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & (x_0 + \alpha t ; y_0 + \beta t) \end{array}$$

est appelée **la représentation paramétrique** de (D).

Exemple :

Soit A(-4 ; 3) et B(2 ; 5) deux points du plan rapporté à un repère orthonormé (O; $\vec{i}$; $\vec{j}$). Déterminer la représentation paramétrique analytique de la droite passant par A et B.

Solution

$$M(x ; y) \in D(A ; \overrightarrow{AB}) \Leftrightarrow \exists ! t \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overrightarrow{AM} = t \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AM} = t \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4 = 6t \\ y - 3 = 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 + 6t \\ y = 3 + 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

b) Savoir utiliser une représentation paramétrique

Dans le repère (O; $\vec{i}$; $\vec{j}$) la droite (D) ayant pour représentation paramétrique

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (4t - 1 ; -3t + 3) \end{array}$$

Quelle est l'abscisse du point P d'ordonnée 1 de la droite (D) ?

Solution

La droite (D) passe par A(-1 ; 3) et a pour vecteur directeur $\vec{u}(4 ; -3)$.

$$\text{Soit } P(x ; 1) \in D(A ; \vec{u}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4t - 1 \\ 1 = -3t + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4t - 1 \\ t = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{5}{2} ; \text{ donc } P\left(\frac{5}{2} ; 1\right).$$

V- Passage d'une représentation paramétrique d'une droite à une représentation cartésienne et vice-versa

1- Exemple 1 :

Soit (D) la droite dont une représentation analytique est:

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (x ; y) \text{ telle que } \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = -7 - 2t \end{cases} \end{array}$$

Déterminer une équation cartésienne de (D).

Solution

$$\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = -7 - 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{x-5}{2} \\ t = \frac{-y-7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x-5}{2} = \frac{-y-7}{2} \Leftrightarrow x-5 = -y-7 \Leftrightarrow x+y+2=0.$$

(D) : $x + y + 2 = 0$ est l'équation cartésienne de (D).

2- Exemple 2 :

Soit la droite (D) d'équation cartésienne $3x + 2y - 4 = 0$.
Déterminer une représentation paramétrique analytique de (D).

Solution

Soit $A(2 ; -1)$ un point de (D) et $\vec{u}(-2 ; 3)$ un vecteur directeur de (D).

$$M(x ; y) \in D(A ; \vec{u}) \Leftrightarrow \exists ! t \in \mathbb{R} / \overrightarrow{AM} = t\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = -2t \\ y + 1 = 3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -1 + 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \text{ (représentation paramétrique analytique de (D))}$$

VI – Intersection de deux droites

Soit le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i} ; \vec{j})$

Exemple : On donne deux droites (D) : $2x + y - 1 = 0$ (D') : $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -3 + 3t \end{cases}$

(D) et (D') sont-elles sécantes ? si oui, déterminer les coordonnées du point d'intersection I de (D) et (D').

Solution

Soit $\vec{u}(-1 ; 2)$ un vecteur directeur de (D) et $\vec{v}(-1 ; 3)$ un vecteur directeur de (D').

$$\text{Dé}(\vec{u} ; \vec{v}) = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 2 = -1 \neq 0.$$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ n'ont pas la même direction d'où on déduit que (D) et (D') sont

$$\text{sécantes au point I (x ; y) tels que } \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -3 + 3t \\ 2x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

En remplaçant x et y par leurs valeurs dans la troisième équation on a :

$$2(2 - t) + (-3 + 3t) - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 0.$$

$$t = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ et } y = -3 \Leftrightarrow I(2 ; -3).$$