Calculs dans ℝ

Site MathsTICE de Adama Traoré Lycée Technique Bamako

I – Valeur absolue

1- Exemples : $|+5| = 5$; $|-2| = 2$; $|-7| = -(-7) = 7$

D'une manière générale $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| = \begin{cases} x\ , & si\ x \succ 0 \\ -x\ , & si\ x \prec 0 \end{cases}$

2- Propriétés

a) Soient a = –5 et b = +2 ; calculer $|a\times b|$ et $|a|\times|b|$ puis comparer.

$|a\times b| = |(-5)\times(+2)| = |(-10)| = 10$; $|a|\times|b| = |(-5)|\times|(+2)| = |(-10)| = 10$.

D'où : $\boxed{|a\times b| = |a|\times|b|}$.

b) Comparer $|a+b|$ et $|a| + |b|$

$|a+b| = |(-5)+(+2)| = |(-3)| = 3$; $|a| + |b| = |(-5)| + |(+2)| = 5 + 2 = 7$.

D'où : $\boxed{|a+b| \leq |a| + |b|}$.

c) Comparer $\left|\dfrac{a}{b}\right|$ et $\dfrac{|a|}{|b|}$

$\left|\dfrac{a}{b}\right| = \left|\dfrac{(-5)}{(+2)}\right| = \left|-\dfrac{5}{2}\right| = \dfrac{5}{2}$; $\dfrac{|a|}{|b|} = \dfrac{|(-5)|}{|(+2)|} = \dfrac{5}{2}$. D'où : $\boxed{\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}}$.

d) Identification des valeurs absolues

$$\boxed{|a| = |b| \Rightarrow \begin{cases} a = b \\ ou \\ a = -b \end{cases}}$$

e) Comparaison de $|a - b|$ et $|b - a|$

$|a - b| = |(-5) - (+2)| = |-7| = 7$; $|b - a| = |(+2) - (-5)| = |+7| = 7$.

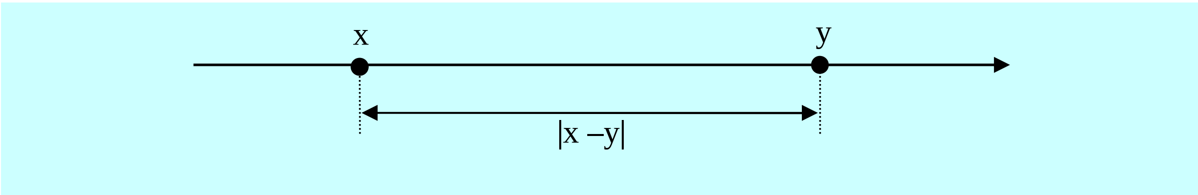
D'où : $\boxed{|a - b| = |b - a|}$.

II – Distance sur ℝ :

1- Définition :

x et y étant deux réels quelconques. On appelle distance de x à y que l'on note : $d(x ; y)$ le réel positif ou nul $| x - y|$.

$$\boxed{d(x ; y) = | x - y|}$$



2- Exemples :

Calculer les distances de : 4,7 à 2,3 ; –9 à 3 ; –2 à 6.

$d(4{,}7 ; 2{,}3) =| 4{,}7 - 2{,}3| = |+2{,}4 | = 2{,}4.$

$d(-9 ; 3) =| (-9) - (+3)| = |-12 | = 12.$

$d(-2 ; 6) =| (-2) - (+6)| = |-8 | = 8.$

3- Application distance

$$\begin{array}{rcl} d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ (x ; y) & \longmapsto & | x - y | \end{array}$$

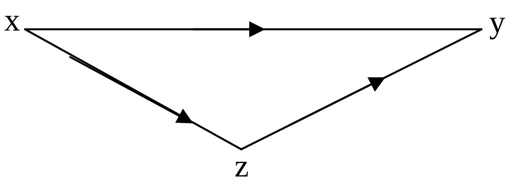
4- Propriétés de la distance

P_1) $d(x ; y) \geq 0$;

P_2) $d(x ; y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

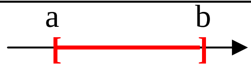
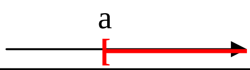
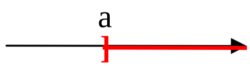
P_3) $d(x ; y) = d(y ; x)$;

P_4) $d(x ; y) \leq d(x ; z) + d(z ; y)$;



III – Intervalles de ℝ

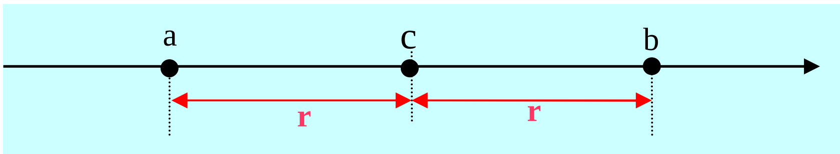
Soient a et b deux réels tel que a ≤ b.

Notations	Représentations sur la droite réelle	Ensemble des réels x tels que	Appellation
[a ; b]		a < x < b	Intervalle fermé borné
[a ; b[		a ≤ x < b	Intervalle borné semi fermé à gauche semi-ouvert à droite
]a ; b]		a < x ≤ b	Intervalle borné semi ouvert en a Semi-fermé en b
]a ; b[		a < x < b	Intervalle ouvert borné
]–∞ ; b]		x ≤ b	Intervalle non borné fermé à droite
]–∞ ; b[		x < b	Intervalle non borné ouvert à droite
[a ; +∞[		a ≤ x	Intervalle non borné fermé à gauche
]a ; +∞]		a < x	Intervalle non borné ouvert à gauche

1- Centre et Rayon d'un intervalle fermé ou ouvert

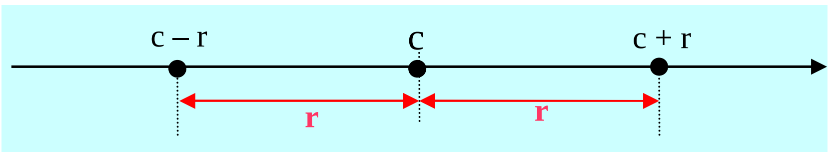
Soient A = [a ; b] un intervalle fermé et B =]a ; b[un intervalle ouvert.

a) Définitions :



- On appelle centre C de l'intervalle fermé [a ; b] ou de l'intervalle ouvert]a ; b[le réel, $C = \frac{a+b}{2}$.
- On appelle rayon r de l'intervalle fermé [a ; b] ou de l'intervalle ouvert]a ; b[le réel positif, $r = \frac{b-a}{2}$.
- On appelle amplitude **A** de l'intervalle fermé [a ; b] ou de l'intervalle ouvert]a ; b[le réel positif, **A** = | b – a | .

b) Notations



- $\overline{I}(C\ ;\ r)$ est appelé intervalle fermé de centre C et de rayon r.
- $I_0(C\ ;\ r)$ est appelé intervalle ouvert de centre C et de rayon r.

c) Applications

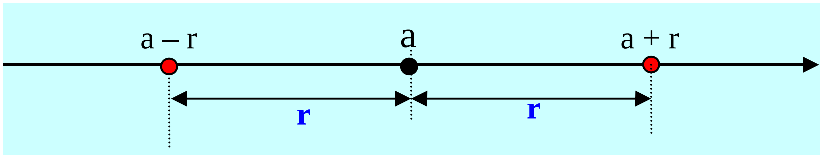
- ✓ Déterminer le centre et le rayon des intervalles]–1 ; 3[; [7 ; $\frac{15}{2}$]
- ✓ Déterminer l'origine et l'extrémité de : $\overline{I}\left(2\ ;\ \frac{1}{4}\right)$; $I_0\left(\frac{5}{4}\ ;\ \frac{1}{4}\right)$

2- Résolution graphique d'équations et d'inéquations

Soient x un nombre réel et r un réel strictement positif.

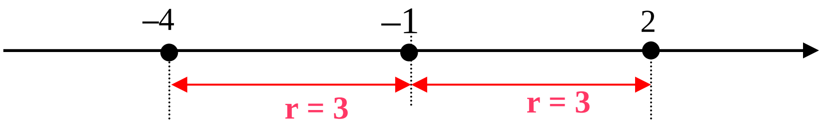
a) **Résolution graphique d'équations : | x – a | = r**

. **| x – a | = r ⇔ d(x ; a) = r** .



Le problème revient à trouver les réels x situés à la distance r de a.
Les solutions sont x = a – r et x = a+r . D'où l'ensemble des solutions de l'équation est : $S = \{a - r\ ;\ a + r\}$.|

Exemple : résoudre graphiquement |x +1| = 3 .

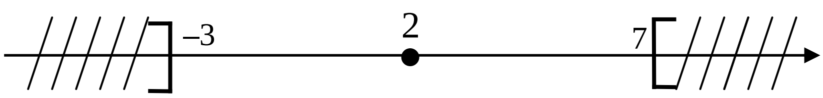


a – r = –1– 3 = – 4 et a + r = –1 +3 = 2. D'où $S = \{-4\ ;\ 2\}$.

b) **Résolution graphique d'inéquations : | x – a | < r**

- Exemple1 : Résoudre dans ℝ l'inéquation |x – 2 | < 5.

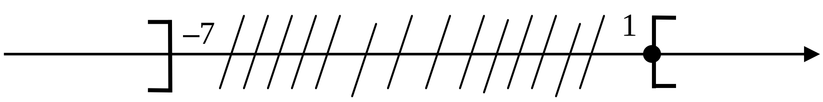
|x – 2 | < 5 ⇔ d(x ; 2) < 5 . Je calcule (a–r) et (a+r) .
a–r = 2 – 5 = –3 et a + r = 2 + 5 = 7.



S =] –3 ; 7[

- Exemple 2 : Résoudre dans ℝ l'inéquation |x + 3 | ≥ 4.

|x + 3 | ≥ 4⇔ d(x ; –3) ≥ 5 . Je calcule (a–r) et (a + r) .
a – r = – 3 – 4 = –7 ; a + r = – 3 + 4 = 1.



S =] –∞ ; –7[∪] 1 ; +∞[

c) **Résolution graphique de : | ax + b | = r   et | ax + b | ≤ r** ; (a $\in \mathbb{R}^*$, b$\in \mathbb{R}$)

$| ax + b | = r \Leftrightarrow |a(x + \frac{b}{a})| = r \Leftrightarrow | a | \times |(x + \frac{b}{a})| = r$

$\Leftrightarrow |(x + \frac{b}{a})| = \frac{r}{|a|} \Leftrightarrow d\left(x\ ;-\frac{b}{a}\right) = \frac{r}{|a|}$.

D'où : $\boxed{| ax + b | = r \Leftrightarrow d\left(x\ ;-\frac{b}{a}\right) = \frac{r}{|a|}}$.

De même : $\boxed{| ax + b | \leq r \Leftrightarrow d\left(x\ ;-\frac{b}{a}\right) \leq \frac{r}{|a|}}$.

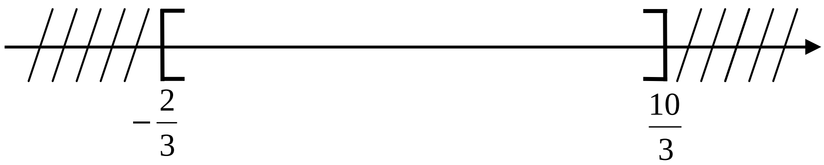
Exemples : résoudre dans $\mathbb{R}$; $|2x+6| = 5$; $|-3x+4| \leq 6$; $|-x+3| \geq 4$.

- $|2x+6| = 5 \Leftrightarrow |2(x+3)| = 5 \Leftrightarrow |2| \times |(x+3)| = 5 \Leftrightarrow |x+3| = \frac{5}{2} \Leftrightarrow$

  $d(x\ ;-3) = \frac{5}{2} \Rightarrow a - r = -3 - \frac{5}{2} = -\frac{11}{2}$; $a + r = -3 + \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}$.

  D'où l'ensemble des solutions est : $S = \left\{-\frac{11}{2}\ ;-\frac{1}{2}\right\}$

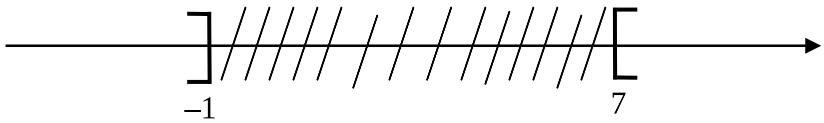
- $|3x+4| \leq 6 \Leftrightarrow | x + \frac{4}{3} | \leq 2 \Leftrightarrow d(x\ ;-\frac{4}{3}) \leq 2 \Rightarrow a - r = -\frac{2}{3}$; $a + r = \frac{10}{3}$



L'ensemble des solutions est $S = \left[-\frac{2}{3}\ ;\ \frac{10}{3}\right]$

- $|-x+3| \geq 4 \Leftrightarrow |-1|\,|x-3| \geq 4 \Leftrightarrow |x-3| \geq 4 \Leftrightarrow d(x\ ;3) \geq 4$;

  $a - r = 3 - 4 = -1$; $a + r = 3 + 4 = 7$



L'ensemble des solutions est $S =]-\infty\ ;-1] \cup [\ 7\ ;+\infty[$

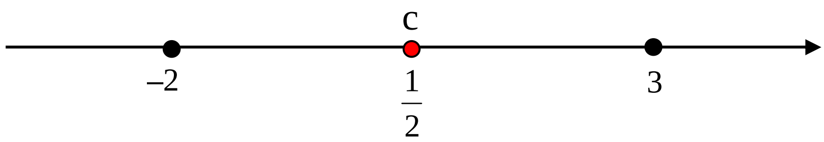
d) Équations de la forme | x – a | = | x – b |

Exemple

Résoudre graphiquement dans ℝ l'équation : | x + 2 | = | x – 3 |.

| x + 2 | = | x – 3 | ⇔ d(x ; –2) = d(x ; 3) . Le centre de l'intervalle [–2 ; 3] est

$$C = \frac{a+b}{2} = \frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2}$$



L'ensemble des solutions est $S = \left\{+\frac{1}{2}\right\}$

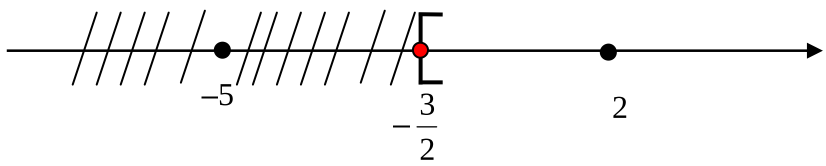
e) Inéquations de la forme | x – a | ≤ | x – b |

Exemples :

Résoudre x∈ℝ ; | x – 2 | ≤ | x + 5 | et | x + 1 | > | x – 7 |.

- | x – 2 | ≤ | x + 5 | ⇔ d(x ; 2) ≤ d(x ; –5)

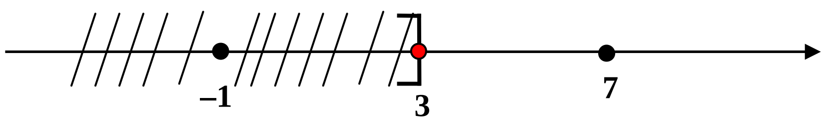
$C = \frac{a+b}{2} = \frac{2-5}{2} = -\frac{3}{2}$ est le centre de l'intervalle [–5 ; 2]



L'ensemble des solutions est S = $\left[-\frac{3}{2} \,;\, +\infty\right[$

- | x + 1 | > | x – 7 | ⇔ d(x ; –1) > d(x ; 7)

$C = \frac{a+b}{2} = \frac{-1+7}{2} = 3$ est le centre de l'intervalle [–1 ; 7]



L'ensemble des solutions est S = $]\,3 \,;\, +\infty\,[$