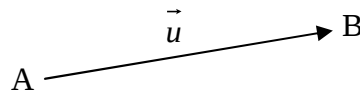


Produit Scalaire

Site MathsTICE de Adama Traoré Lycée Technique Bamako

I- Norme d'un vecteur

1°) Définition : $\vec{u}$ étant un vecteur de représentant le bipoint (A;B), on appelle norme de $\vec{u}$ le nombre réel positif noté : $\|\vec{u}\| = d(A;B)$.



$$\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = d(A;B) = AB$$

2°) Propriétés : Soit $\mathcal{V}$ l'ensemble des vecteurs du plan

P₁) : $\forall \vec{u} \in \mathcal{V}, \|\vec{u}\| > 0$.

P₂) : $\forall \vec{u} \in \mathcal{V}, \|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$.

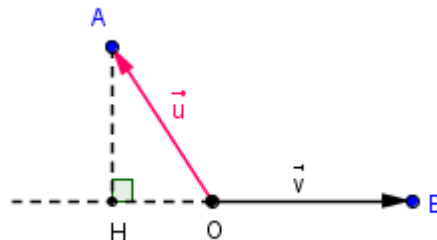
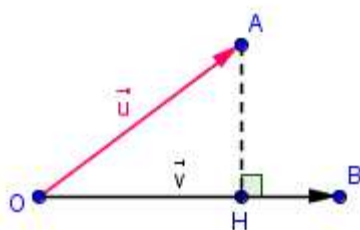
P₃) : $\forall \vec{u} \in \mathcal{V}, \forall \vec{v} \in \mathcal{V}$ et $\forall k \in \mathbb{R}$, si $\vec{u} = k \times \vec{v}$ alors $\|\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{v}\|$.

3°) Egalité de deux vecteurs non nuls

Deux vecteurs non nuls sont dits égaux s'ils ont même norme, même direction et même sens.

II- Produit scalaire

1°) Définition : soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.



On appelle **produit scalaire** du vecteur $\vec{u}$ par le vecteur $\vec{v}$ le réel noté : $\vec{u} \bullet \vec{v}$ tel que : $\vec{u} \bullet \vec{v} = \overline{OH} \times \overline{OB} \Leftrightarrow \overline{OA} \bullet \overline{OB}$ où H est le projeté orthogonal de A sur la droite (OB). $\vec{u} \bullet \vec{v} = \overline{OH} \times \overline{OB}$. (**Expression algébrique du produit scalaire**)

Remarque :

Si l'angle ($\overline{OA}$; $\overline{OB}$) est **aigu** alors le produit scalaire $\overline{OA} \bullet \overline{OB}$ est **positif** ;

Si l'angle ($\overline{OA}$; $\overline{OB}$) est **obtus** alors le produit scalaire $\overline{OA} \bullet \overline{OB}$ est **négatif**.

2°) Propriétés du produit scalaire

On démontre et on admettra les propriétés suivantes

$$P_1) \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

$$P_2) \quad (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$$

$$P_3) \quad \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{v}) + (\vec{u} \cdot \vec{w}) \quad \text{et} \quad (\vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{u} = (\vec{v} \cdot \vec{u}) + (\vec{w} \cdot \vec{u})$$

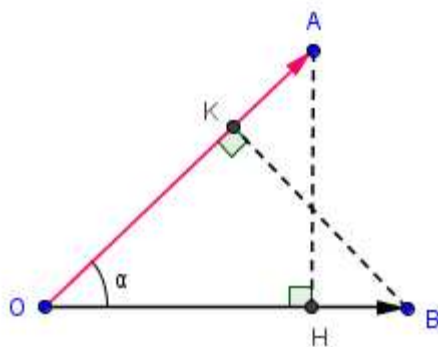
$$P_4) \quad \vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0 \quad \text{et si} \quad \vec{u} \neq \vec{0} \quad \text{alors} \quad \vec{u} \cdot \vec{u} > 0.$$

$$P_5) \quad \vec{u} \cdot \vec{0} = 0.$$

Remarque : $\vec{u} \cdot \vec{u}$ se note $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$ et « on lit carré scalaire de $\vec{u}$ ».

3°) Expression trigonométrique du produit scalaire

Soit $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ deux vecteurs du plan



$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= \overline{OH} \times \overline{OB} = OH \times OB \\ &= \overline{OK} \times \overline{OA} = OK \times OA \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OH \times OB \quad \text{Calculons } OH ; \cos(\widehat{BOA}) = \frac{OH}{OA} \quad OH = OA \times \cos(\widehat{BOA})$$

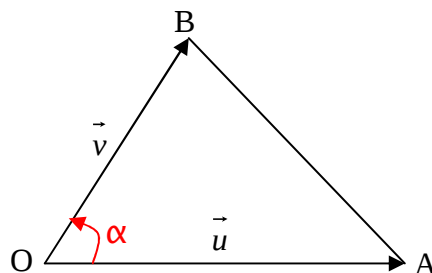
D'où $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos \alpha$ où α est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OB})$

$$\cdot \quad \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos \alpha \quad . \quad (\text{Expression trigonométrique du produit scalaire}).$$

Remarque : Si $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ alors $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos \frac{\pi}{2} = 0$

4°) Produit scalaire et triangle

Soit O, A, B trois points non alignés du plan tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.



Calculons le carré scalaire : $(\vec{u} - \vec{v})^2$

$$(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{v}^2 \Leftrightarrow -2\vec{u} \bullet \vec{v} = (\vec{u} - \vec{v})^2 - \vec{u}^2 - \vec{v}^2 \Leftrightarrow 2\vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - (\vec{u} - \vec{v})^2$$

$$\Leftrightarrow \vec{u} \bullet \vec{v} = \frac{\vec{u}^2 + \vec{v}^2 - (\vec{u} - \vec{v})^2}{2} \text{ or } \vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BA}.$$

$$\text{D'où : } \overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OB} = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2}.$$

5°) Calcul du sinus d'un angle orienté

Soient $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ deux vecteurs dans la base $\mathcal{B}(\vec{i}; \vec{j})$ et α une mesure de l'angle $(\vec{u}; \vec{v})$. Nous avons les formules suivantes :

$$\sin \alpha = \frac{\det(\vec{u}; \vec{v})}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} \quad \text{et} \quad \cos \alpha = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}.$$

III- Étude analytique du produit scalaire

1°) Expression du produit scalaire dans une base orthonormale

Soit $(\vec{i}; \vec{j})$ une base orthonormée de $\mathcal{V}$ et soient $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ deux vecteurs de $\mathcal{V}$. Calculons $\vec{u} \bullet \vec{v}$ en fonction des coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j}) \bullet (x'\vec{i} + y'\vec{j}) = (xx')\vec{i}^2 + (xy')(\vec{i} \bullet \vec{j}) + (yx')(\vec{j} \bullet \vec{i}) + (yy')\vec{j}^2$$

$(\vec{i}; \vec{j})$ étant une base orthonormée on a : $\|\vec{i}\| = 1$; $\|\vec{j}\| = 1$ et $\vec{i} \bullet \vec{j} = 0$

$$\text{D'où : } \vec{u} \bullet \vec{v} = xx' + yy'.$$

2°) Expression de la norme d'un vecteur dans une base orthonormée

Soit $\vec{u}(x; y)$ dans la base orthonormée $(\vec{i}; \vec{j})$. $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

$$\begin{aligned} \|\vec{u}\|^2 &= \vec{u}^2 \\ &= (x\vec{i} + y\vec{j}) \bullet (x\vec{i} + y\vec{j}) \\ &= x^2\vec{i}^2 + (2xy)(\vec{i} \bullet \vec{j}) + y^2\vec{j}^2 \\ &= x^2 + y^2 \quad ; \quad \text{donc} \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

3°) droites perpendiculaires

Soient les droites (D) de vecteur directeur $\vec{u}(a; b)$ et (D') de vecteur directeur $\vec{v}(a'; b')$ dans une base orthonormée.

$$(D) \perp (D') \Leftrightarrow \vec{u} \bullet \vec{v} = 0 \Leftrightarrow aa' + bb' = 0.$$

Exemple :

Soient (D) : $3x + 2y - 1 = 0$ et (D') : $2x - 3y + 5 = 0$.

Montrer que (D) et (D') sont perpendiculaires.

4°) Équation d'un cercle

Soit $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère orthonormé du plan P. soit $I(a; b)$ un point du plan et r un réel strictement positif.

Le cercle de centre I et de rayon r est l'ensemble des points $M(x; y)$ de P tels que la distance de I à M est égale à r .

Soit $\mathcal{C} = \{M \in P / d(I; M) = r\}$; $d(I; M) = r \Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r \Leftrightarrow$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Remarque

Un point M appartient au cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB] \Leftrightarrow (\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{BM} = 0)$.

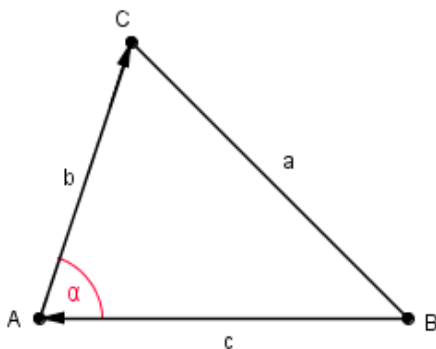
Exemple

Déterminer une équation du cercle de diamètre $[AB]$, où $A(2; 3)$ et $B(-1; 0)$.

IV- Applications du produit scalaire

1°) Généralisation du théorème de Pythagore (ou loi du cosinus)

a) Soit ABC un triangle quelconque tels que $AB = c$; $AC = b$; $BC = a$.



$$\begin{aligned} \text{Comme } \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} ; \text{ on peut écrire} \\ \overrightarrow{BC}^2 &= (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = \overrightarrow{BA}^2 + 2\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2 \\ \overrightarrow{BC}^2 &= \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{BC}^2 &= \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\alpha) \end{aligned}$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\alpha).$$

- Si l'angle $\hat{A}$ est droit alors on a : $BC^2 = AB^2 + AC^2$, car $\cos(\alpha) = 0$.

On retrouve ainsi le théorème de Pythagore.

b) Conclusion :

Dans un triangle ABC si on désigne par $AB = c$; $AC = b$; $BC = a$;
 $\text{mes}(\widehat{BAC}) = \hat{A}$; $\text{mes}(\widehat{ACB}) = \hat{C}$; $\text{mes}(\widehat{CBA}) = \hat{B}$, alors on a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \times b \times c \times \cos(\hat{A})$$

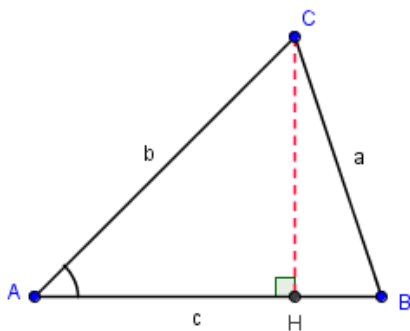
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \times a \times c \times \cos(\hat{B})$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \times a \times b \times \cos(\hat{C})$$

Relation **d'AL-KASHI**

2°) Aire d'un triangle

L'aire $\mathcal{A}$ du triangle ABC est donnée par la formule



$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times b \times c \times \sin(\hat{A})$$

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times a \times b \times \sin(\hat{C})$$

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times a \times c \times \sin(\hat{B})$$

3°) Formule des trois sinus

On utilise les formules précédentes

- De $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times b \times c \times \sin(\hat{A}) = \frac{1}{2} \times a \times b \times \sin(\hat{C})$ on déduit $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$
- De $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times b \times c \times \sin(\hat{A}) = \frac{1}{2} \times a \times c \times \sin(\hat{B})$ on déduit $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$
- D'où : $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2 \times R$. (**R** étant le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC).

4°) Ensemble (E) des points M du plan tels que : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$ ($k \in \mathbb{R}$)

Considérons un segment [AB] de milieu I. soit M un point du plan.

	$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) \\ &= \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} \\ &= \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + IA \times IB \times \cos(\pi) \\ &= \overrightarrow{MI}^2 - (IA \times IB) \\ &= \overrightarrow{MI}^2 - \left(\frac{AB}{2} \times \frac{AB}{2} \right) \\ &= \overrightarrow{MI}^2 - \frac{AB^2}{4} \end{aligned}$
--	--

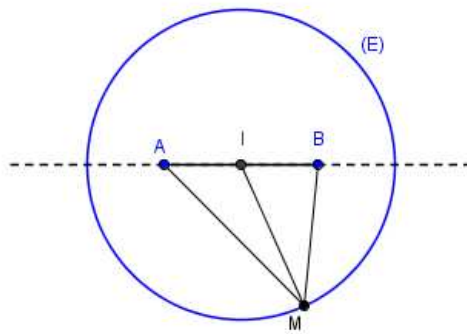
$$\text{D'où : } \overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB} = k \Leftrightarrow MI^2 - \frac{AB^2}{4} = k \Leftrightarrow IM^2 = k + \frac{AB^2}{4} .$$

$$\cdot \quad \overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB} = k \Leftrightarrow IM^2 = k + \frac{AB^2}{4} .$$

- Si $k + \frac{AB^2}{4} < 0$ alors $(E) = \emptyset$
- Si $k + \frac{AB^2}{4} = 0$ alors $(E) = \{ I \}$
- Si $k + \frac{AB^2}{4} > 0$ alors $IM = \sqrt{k + \frac{AB^2}{4}}$; d'où (E) est le cercle de centre I et de rayon $r = IM$.

Exemple

Soient A et B deux points du plan tels que $AB = 2$. Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que : $\overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB} = 8$.



Soit I le milieu de $[AB]$; $\overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB} = k \Leftrightarrow IM^2 = k + \frac{AB^2}{4}$

$\overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB} = 8 \Leftrightarrow IM^2 = 9 \Leftrightarrow IM = 3$. D'où l'ensemble (E) des points M cherchés est le cercle de centre I et rayon $r = 3$.

5°) Distance d'un point à une droite

On démontre et admettra que : si $(\mathcal{D})$ est la droite d'équation : $ax + by + c = 0$

$(a ; b) \neq (0 ; 0)$ et si $A(x_A; y_A)$ est un point du plan, alors la distance de A à $(\mathcal{D})$ est :

$$\cdot \quad d(A ; \mathcal{D}) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} .$$

