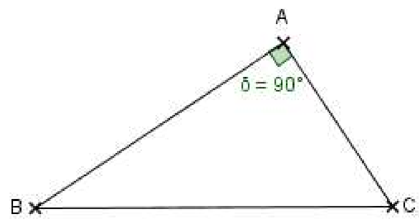
I – Construction d'angles : (manipulations du matériel de géométrie)

1°) Activité :

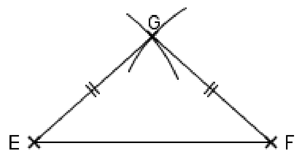
a) Construisez un triangle ABC rectangle en A à l'aide de la règle et l'équerre
b) Construisez un triangle EFG isocèle à l'aide de la règle et le compas
c) Construisez un triangle EFG isocèle à l'aide de la règle et le rapporteur
d) Construisez un triangle IJK équilatéral à l'aide de la règle et le compas
e) Construisez un triangle IJK équilatéral à l'aide de la règle et le rapporteur

Réponses :

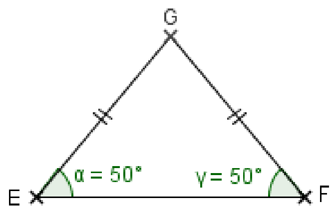
a) Règle et Équerre



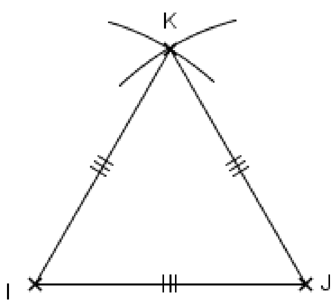
b) Règle et Compas



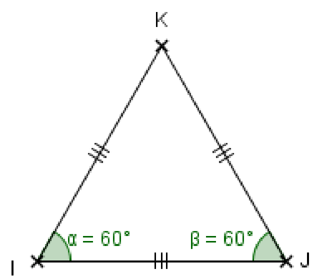
c) Règle et rapporteur



d) Règle et compas



e) Règle et rapporteur



2°) Remarque : Dans un triangle la somme des angles intérieurs est égale à 180°

II – Les Rapports Trigonométriques :

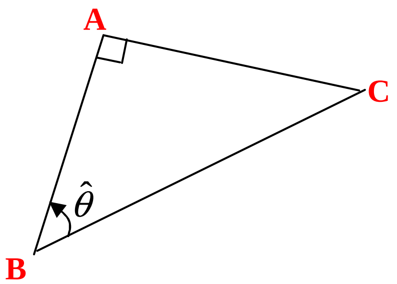
Activité :

a) Construisez un triangle ABC rectangle en A tel que : l'angle $C\hat{B}A = \theta$

b) Déterminer les rapports trigonométriques $\sin\theta$; $\cos\theta$; $tg\theta$; $\cot g\theta$

__Réponses :__

$$\sin\theta = \frac{côté\ opposé\ à\ \theta}{hypoténuse} = \frac{AC}{BC}$$



$$\cos\theta = \frac{côté\ adjacent\ à\ \theta}{hypoténuse} = \frac{AB}{BC}$$

$$tg\theta = \frac{côté\ opposé\ à\ \theta}{côté\ adjacent\ à\ \theta} = \frac{AC}{AB}$$

$$\cot g\theta = \frac{côté\ adjacent\ à\ \theta}{côté\ opposé\ à\ \theta} = \frac{AB}{AC}$$

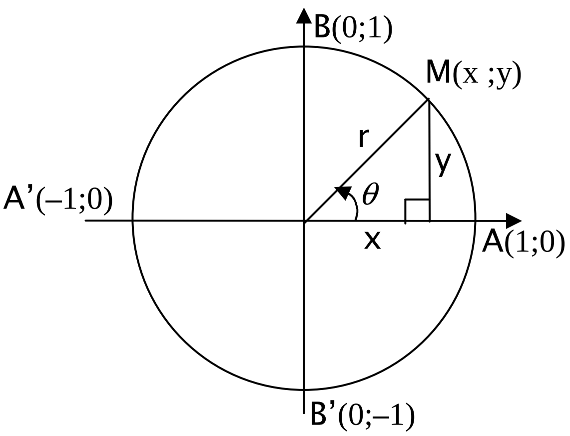
__Remarques :__

$$tg\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad et \quad \cot g\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{tg\theta}$$

III– Cercle trigonométrique et Unités de mesures d'angles :

1°) Définition du cercle trigonométrique :

Soit le repère orthonormé (O, A, B) du plan. On appelle **cercle trigonométrique**, le cercle de centre O et de rayon R = 1.



Soit M(x ;y) un point du cercle trigonométrique. $\sin\theta = \frac{y}{r} \quad et \quad \cos\theta = \frac{x}{r} \Leftrightarrow$

$y = r \times \sin\theta \quad et \quad x = r \times \cos\theta \quad Puisque\ \ r = 1 \ \ alors \quad y = \sin\theta \quad et \quad x = \cos\theta \quad donc$

$M(\cos\theta\ ;\ \sin\theta) = (x\ ;\ y)$

2°) Unités de mesures d'un angle :

La grandeur d'un angle est mesurée en degrés ; radians ; et grades. 1° = 60' et 1' = 60'' .

. 360° = 2π rd = 400 grs ; 180° = π rd = 200 grs ; 90° = $\frac{\pi}{2}$ rd = 100 grs .

Exemple: Convertissez 120° en radians puis en grades.

Table des valeurs de quelques Angles remarquables :

Angles	0° $0\ rd$	30° $\frac{\pi}{6}\ rd$	45° $\frac{\pi}{4}\ rd$	60° $\frac{\pi}{3}\ rd$	90° $\frac{\pi}{2}\ rd$	120° $\frac{2\pi}{3}\ rd$	135° $\frac{3\pi}{4}\ rd$	150° $\frac{5\pi}{6}\ rd$	180° $\pi\ rd$
Sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
cotg		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	

Remarque : $\forall x \in IR, \quad -1 \leq \cos x \leq 1 \;;\; -1 \leq \sin x \leq 1$.

IV- Identités Trigonométriques :

1°) Relation Fondamentale de la trigonométrie:

Activité :

a) Construisez un triangle ABC rectangle en A tel que $C\hat{B}A = \alpha$

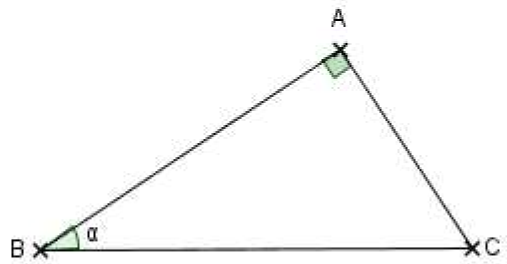
b) Appliquer le théorème de Pythagore au triangle rectangle ABC

c) Déterminez les rapports sinα et cosα

d) Exprimez la relation du théorème de Pythagore en fonction de sinα et cosα.

Réponses :

a)



b) D'après le théorème de Pythagore $AB^2 + AC^2 = BC^2$

c) $\sin\alpha = \dfrac{AC}{BC}$; $\cos\alpha = \dfrac{AB}{BC}$

d) On sait que $AB^2 + AC^2 = BC^2$ en divisant chaque terme par BC^2 on a :

$$\frac{AB^2}{BC^2} + \frac{AC^2}{BC^2} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 + \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ (***Relation fondamentale de la trigonométrie***)

2°) Autres Relations :

Nous savons que $\forall\ x \in \mathbb{R}\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$

- Si $\cos x \neq 0$ en divisant par $\cos^2 x$,

$$\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x.$$ D'où : $$1 + tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$.

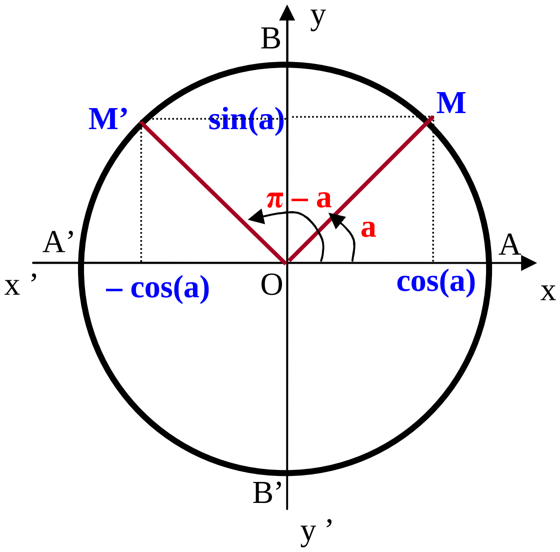
- Si $\sin x \neq 0$ en divisant par $\sin^2 x$,

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1 \Leftrightarrow \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} \Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot g^2 x$$

D'où : . $$1 + \cot g^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$.

3°) Angles supplémentaires : (π – a) et (a)

– Deux angles sont dits supplémentaires si leur somme est égale à π radian ou 180°.
Activité : Citez en degrés puis en radians trois exemples d'angles supplémentaires.



$\cos(\pi - a) = -\cos(a)$

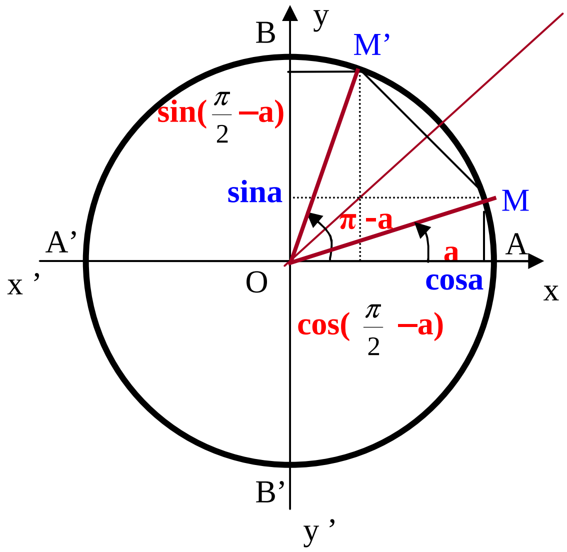
$\sin(\pi - a) = \sin(a)$

$\mathrm{tg}(\pi - a) = -\mathrm{tg}(a)$

– Deux angles s supplémentaires ont même sinus et de cosinus opposés.

4°) Angles complémentaires : ($\pi/2$ – a) et (a)

– Deux angles sont dits complémentaires si leur somme est égale à $\frac{\pi}{2}$ radian ou 90°.
Activité : Citez en degrés puis en radians trois exemples d'angles complémentaires.



M et M' sont symétriques par rapport à la 1ère bissectrice.

$\mathrm{Sin}(\frac{\pi}{2} - a) = \cos(a)$

$\mathrm{Cos}(\frac{\pi}{2} - a) = \sin(a)$

$\mathrm{Tg}(\frac{\pi}{2} - a) = \mathrm{cotg}(a)$

– Deux angles sont complémentaires si le sinus de l'un est égal au cosinus de l'autre.

Remarque : $\forall a \in IR, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos a \ ; \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\sin a$

V- Détermination de rapports trigonométriques :

1°) Si le rapport est un nombre entier de degrés :

Une simple lecture de la table trigonométrique ou l'utilisation de la calculatrice nous permet de déterminer sa valeur.

Activité 1 : A l'aide de la table trigonométrique et la calculatrice déterminez :

sin28° ; cos 43° ; cos 87° ; sin 73° ; tg66°

Réponses: sin 28° = 0,4695 ; cos 43° = 0,7314 ; cos 87° = 0,0523 ; sin 73° = 0,9563 tg66° = 2,2460.

2°) Si le rapport n'est pas un nombre entier de degrés :

On procède à une interpolation linéaire.

Activité 2 : A l'aide de la table trigonométrique ou la calculatrice Déterminez Sin26°35'

Réponses: On remarque que le rapport ne figure pas sur la table trigonométrique.

$$\begin{cases} \sin 26° = 0{,}4384 \\ \sin 27° = 0{,}4540 \end{cases} \qquad \sin 26° \leq \sin 26°35' \leq \sin 27° \ .$$

La différence 0,4540 – 0,4384 = 0,0156 est appelée la différence Tabulaire (D.T) ; Une augmentation de l'angle de 1° = 60' correspond à une augmentation du sinus de la différence tabulaire.

$$\left.\begin{array}{r} 1° = 60' \to 0{,}0156 \\ 35' \to x = ? \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{35 \times 0{,}0156}{60} = 0{,}0091$$

. $\boxed{\text{Donc } \sin 26°35' = 0{,}4384 + 0{,}0091 = 0{,}4475}$

Activité 3 : Calculez cos72°14'

$$\begin{cases} \cos 72° = 0{,}3090 \\ \cos 73° = 0{,}2924 \end{cases} \qquad DT = 0{,}3090 - 0{,}2924 = 0{,}0166 .$$

Une augmentation de l'angle de 1° correspond à une diminution du cosinus de la différence tabulaire D.T = 0,0166.

$$\left.\begin{array}{r} 1° = 60' \to 0{,}0166 \\ 14' \to x = ? \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{14 \times 0{,}0166}{60} = 0{,}0038 .$$

$\boxed{\text{D'où } \cos 72°14' = 0{,}3090 - 0{,}0038 = 0{,}3052}$.

3°) Détermination d'un angle en degrés, minutes et secondes connaissant son Rapport trigonométrique :

Activité 4 : Déterminez l'angle θ en degrés, minutes et secondes sachant que $\sin\theta = 0{,}4150$.

$\begin{cases} \sin 24° = 0{,}4067 \\ \sin 25° = 0{,}4226 \end{cases}$ $\quad DT = 0{,}4226 - 0{,}4067 = 0{,}0159$.

$$\begin{array}{ccc} 24° & \theta & 25° \\ \downarrow \sin & \downarrow \sin & \downarrow \sin \\ 0{,}4067 & 0{,}4150 & 0{,}4226 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{lll} 25° - 24° = 1° & \rightarrow & 0{,}4226 - 0{,}4067 = 0{,}0159 \\ \theta - 24° & \rightarrow & 0{,}4150 - 0{,}4067 = 0{,}0083 \end{array}\right\| \Rightarrow \theta - 24° = \frac{0{,}0083 \times 1°}{0{,}0159} = 0{,}5220°$$

D'où $\theta = 24° + 0{,}5220° = \underline{24},5220°$

$0{,}5220 \times 60' = \underline{31},32'$

$0{,}32 \times 60'' = \underline{19},20$. $\boxed{\text{D'où } \theta = 24°31'19''.}$.

Activité 5 :
Déterminez l'angle α en degrés, minutes et secondes sachant que $\cos\alpha = 0{,}3645$.

$\begin{cases} \cos 68° = 0{,}3746 \\ \cos 69° = 0{,}3584 \end{cases}$ $\quad DT = 0{,}3746 - 0{,}3584 = 0{,}0162$

$$\begin{array}{ccc} 68° & \alpha & 69° \\ \downarrow \cos & \downarrow \cos & \downarrow \cos \\ 0{,}3746 & 0{,}3645 & 0{,}3589 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{lll} 69° - 68° = 1° & \rightarrow & DT = 0{,}0162 \\ \alpha - 68° & \rightarrow & 0{,}3746 - 0{,}3645 = 0{,}0101 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha - 68° = \frac{(0{,}0101) \times 1°}{0{,}0162} = 0{,}6234°.$$

D'où $\alpha = 68° + 0{,}6234° = \underline{68},6234°$

$0{,}6234 \times 60' = \underline{37},404'$

$0{,}404 \times 60'' = \underline{24},24''$; . $\boxed{\text{D'où } \alpha = 68°37'24''}$.