

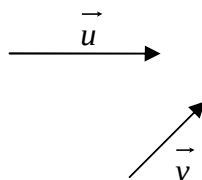
I- Combinaison linéaire de vecteurs

Dans toute la suite $\mathcal{V}$ désigne l'ensemble de tous les vecteurs du plan.

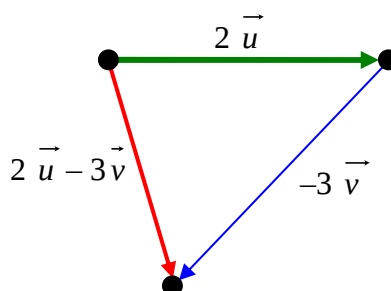
1- Définition :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant deux vecteurs non nuls, on appelle combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ un vecteur $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$; α et β des réels.

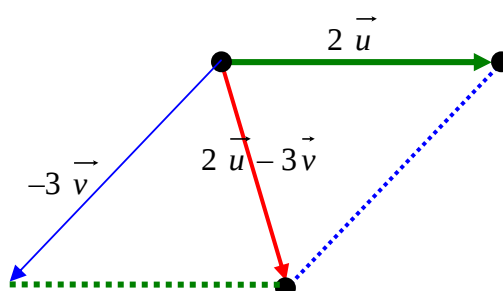
- a) Exemples : $\vec{w} = \vec{i} - 5\vec{j}$; $\vec{k} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ sont des combinaison linéaires de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
- b) Construction d'un représentant d'une combinaison linéaire de vecteurs
Construire le vecteur $2\vec{u} - 3\vec{v}$.



- Règle de la relation de Chasles



- Règle du parallélogramme



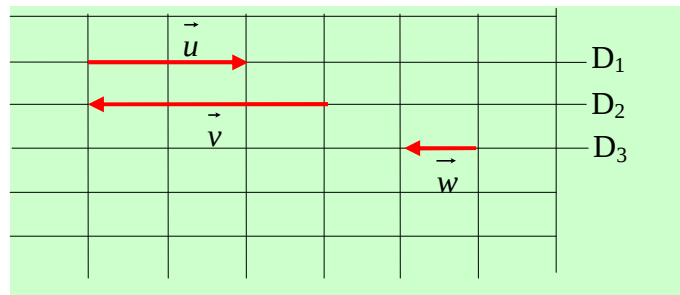
2- Vecteurs colinéaires

a) Vecteurs de même direction

$(\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ ont même direction}) \Leftrightarrow (\text{il existe un réel non nul } k \text{ tel que } \vec{u} = k\vec{v})$.

b) Exemple :

Soient trois droites (D_1) (D_2) (D_3) de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$; $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

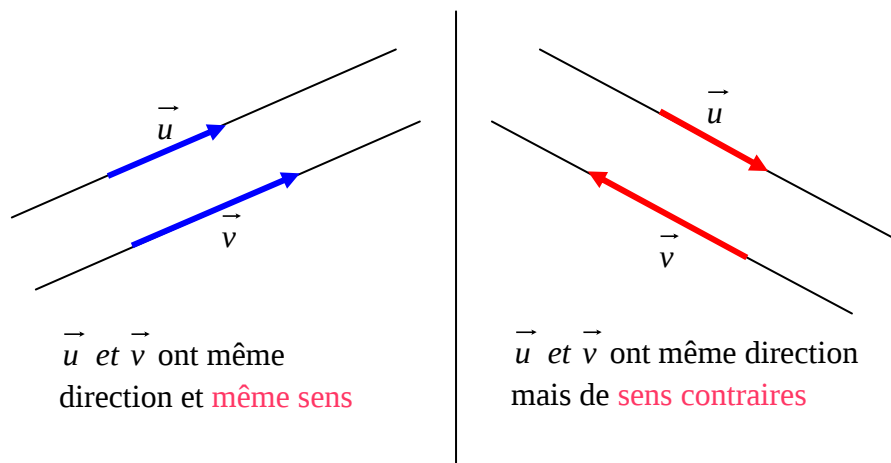


$\vec{v} = 3\vec{w}$; $\vec{u} = -2\vec{w}$; $\vec{u} = -\frac{2}{3}\vec{v}$. Les vecteurs $\vec{u}$; $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ont même direction.

c) Vecteurs de même sens

Soient k un réel non nul, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls tels que $\vec{u} = k \times \vec{v}$.

- Si $k < 0$ alors on dit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de **sens contraires**
- Si $k > 0$ alors on dit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de **même sens**.



d) Vecteurs colinéaires

- Définition : soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{V}$.

$$(\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires}) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \bullet \text{ L'un des deux vecteurs est nul} \\ \bullet \text{ Ou ces deux vecteurs ont même direction} \end{array} \right)$$

- Remarque 1

$(\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ ne sont pas colinéaires}) \Leftrightarrow (\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont non nuls et de directions différentes})$

- Remarque 2

$(\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires}) \Leftrightarrow (\text{il existe un réel } k \text{ non nul tel que } \vec{u} = k \times \vec{v})$

Exemple : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\frac{9}{2}\vec{u} + 5\vec{v} = 2\vec{v} + 3\vec{u}$. Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Préciser s'ils sont de même sens ou de sens contraires.

Solution

$$\frac{9}{2}\vec{u} + 5\vec{v} = 2\vec{v} + 3\vec{u} \Leftrightarrow 9\vec{u} + 10\vec{v} = 4\vec{v} + 6\vec{u} \Leftrightarrow 3\vec{u} = -6\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} = -2\vec{v}.$$

$k = -2$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraires.

II – Base dans $\mathcal{V}$ – Coordonnées d'un vecteur

1- Définition d'une base de $\mathcal{V}$

On appelle **base** de $\mathcal{V}$ tout couple $(\vec{i}; \vec{j})$ de vecteurs non colinéaires.

2- Théorème :

Dans une base $(\vec{i}; \vec{j})$ de $\mathcal{V}$, tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathcal{V}$ s'écrit d'une manière unique comme combinaison linéaire de $\vec{i}$ et $\vec{j}$; c'est-à-dire que : $\vec{u} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j}$; α et β des réels.

3- Définition :

Étant donnée une base $(\vec{i}; \vec{j})$ de $\mathcal{V}$, $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ et $\vec{u} \in \mathcal{V}$.

$(x; y)$ est le couple de coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}; \vec{j})$ signifie que : $\vec{u} = x \vec{i} + y \vec{j}$.

On note : $\vec{u}(x; y)$ ou $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

4- Coordonnées d'une combinaison linéaire de vecteur dans une base

$\mathcal{V}$ est muni d'une base $(\vec{i}; \vec{j})$; on donne les vecteurs $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$.

Considérons le vecteur $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$. Déterminer les coordonnées de $\vec{w}$ dans la base $(\vec{i}; \vec{j})$.

Solution

Dans la base $(\vec{i}; \vec{j})$ on a : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$.

Écrire que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v} \Leftrightarrow \vec{w} = a(x\vec{i} + y\vec{j}) + b(x'\vec{i} + y'\vec{j})$

$$\vec{w} = (ax + bx')\vec{i} + (ay + by')\vec{j} \Leftrightarrow \vec{w}(ax + bx'; ay + by').$$

III – Traduction analytique de la colinéarité

1- Déterminant de deux vecteurs dans une base

$\mathcal{V}$ est muni d'une base $(\vec{i}; \vec{j})$; on donne les vecteurs $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$.

On appelle déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le réel noté : $\det(\vec{u}; \vec{v})$ tel que :

$$\det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y.$$

2- Théorème

Étant donnée une base $(\vec{i}; \vec{j})$ de $\mathcal{V}$, quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathcal{V}$.

$$(\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires}) \Leftrightarrow (\det(\vec{u}; \vec{v}) = 0).$$

$$((\vec{u}; \vec{v}) \text{ est une base de } V) \Leftrightarrow (\det(\vec{u}; \vec{v}) \neq 0).$$