Exercice 1

Dans la base $(\vec{i}\,;\vec{j})$ on considère les vecteurs $\vec{u}=2\vec{i}-\vec{j}$; $\vec{v}=\vec{i}+3\vec{j}$.

1°) Ecrire les vecteurs $\vec{w}=-2\vec{u}+\vec{v}$; $\vec{T}=\vec{u}+2\vec{v}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

2°) Quelles les coordonnées de $\vec{w}$ et $\vec{T}$ dans la base $(\vec{i}\,;\vec{j})$.

3°) Soient $\vec{S}=-4\vec{i}+2\vec{j}$; $\vec{R}=2\vec{i}+6\vec{j}$.

Calculer : dét $(\vec{u}\,;\vec{v})$; dét $(\vec{u}\,;\vec{S})$; dét $(\vec{w}\,;\vec{T})$; dét $(\vec{v}\,;\vec{R})$

4°) Déterminer les réels α et k tels que : $\vec{S}=\alpha\times\vec{u}$ *et* $\vec{R}=k\times\vec{v}$.

5°) $\vec{u}$ et $\vec{S}$ sont-ils colinéaires de même sens ?

6°) $\vec{R}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires de même sens ?

7°) Écrire les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

8°) Écrire les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{T}$.

9°) $(\vec{u}\,;\vec{v})$ est-elle une base de $\mathcal{V}$? Justifiez votre réponse.

10°) $(\vec{v}\,;\vec{R})$ est-elle une base de $\mathcal{V}$? Justifiez votre réponse.

Exercice 2

$\mathcal{V}$ étant muni de la base $(\vec{i}\,;\vec{j})$, on donne les vecteurs $\vec{u}(3\,;-2)$ *et* $\vec{v}\left(-5\,;\frac{1}{3}\right)$.

Construire les représentants de même origine O des vecteurs $\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{u}$; $\vec{v}$; $\vec{u}+\vec{v}$; $-2\vec{u}$; $3\vec{u}-\vec{v}$.

Exercice 3

1°) Dans la base $(\vec{i}\,;\vec{j})$, on donne les vecteurs $\vec{u}\left(-\frac{3}{2}\,;\frac{1}{3}\right)$et $\vec{v}\,(5\,;\alpha)$.

Trouver α pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires. Préciser alors si ces vecteurs sont de même sens ou de sens contraires.

2°) Même questions pour les vecteurs $\vec{u}\left(-\frac{3}{2}\,;\frac{1}{3}\right)$ et $\vec{v}\,(-\alpha;\,2)$.

Exercice 4

Dans chacun des cas suivants, exprimer $\vec{i}$ et $\vec{j}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

1°) $\vec{u}=3\vec{i}-2\vec{j}$ et $\vec{v}=\vec{i}+\vec{j}$

2°) $\vec{u}=-\vec{i}+4\vec{j}$ et $\vec{v}=5\vec{i}+\vec{j}$

3°) $\vec{u}=-2\vec{i}$ et $\vec{v}=5\vec{i}-3\vec{j}$

Exercice 5

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ trois vecteurs du plan tels que $\vec{u} = 2\vec{v}$ *et* $\vec{w} = -5\,\vec{u}$.

1°) Trouver un nombre réel a tel que : $\vec{w} = a\vec{u} + 3\,\vec{v}$.

2°) Trouver un nombre réel b tel que : $\vec{w} = -7\vec{u} + b\,\vec{v}$.

3°) Donner une égalité vectorielle exprimant que $\vec{u}$ est combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Exercice 6

Dans le plan vectoriel $\mathcal{V}$ muni de la base orthonormé $\mathcal{B}$ = ($\vec{i}$; $\vec{j}$) on donne le vecteur $\vec{u} = \sqrt{3}\vec{i} - \vec{j}$.

a) Trouver un vecteur $\vec{e_1}$ normé colinéaire à $\vec{u}$ et un vecteur normé $\vec{e_2}$ et orthogonal à $\vec{u}$.

b) Montrer que $\mathcal{B}$ ' = ($\vec{e_1}$; $\vec{e_2}$) est une base orthonormé de $\mathcal{V}$. Trouver les coordonnées du vecteur $\vec{v} = 3\,\vec{i} - 4\vec{j}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 7

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ; I ; J) on donne les points A(1 ;2) B(3 ; –1) et C(7 ; α) où α est un réel.

a) Calculer les coordonnées des vecteurs suivants : $\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{BC}$ *et* $\overrightarrow{CA}$

b) Trouver le réel α pour que le triangle ABC soit rectangle en A.

Exercice 8

Soit ABCD un rectangle tel que AB = 5 cm ; BC = 3 cm.

1°) Construire les points I ; J ; K et L tels que :

$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{5}\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{DL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$.

2°) a) Exprimer $\overrightarrow{IB}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ puis $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.

Exprimer $\overrightarrow{KD}$ en fonction de $\overrightarrow{CD}$ puis $4\vec{k}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.

c) Quelle est la nature du quadrilatère IJKL ? justifier votre réponse.

3°) a) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ forment-ils une base ?

b) On pose $\vec{i} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{AD}$; on donne : $\vec{V_1} = \vec{i} + \vec{j}$; $\vec{V_2} = \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{3}{2}\vec{j}$; $\vec{V_3} = -\frac{3}{2}\vec{j}$.

Construire les vecteurs $\vec{V_1}$; $\vec{V_2}$; $\vec{V_3}$; $\vec{V_1} + \vec{V_2}$;

c) Exprimer le vecteur $\vec{i}$ en fonction de $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ puis $\vec{j}$ en fonction de $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$.

d) Montrer que $\left(\vec{V_1}\ ;\vec{V_2}\right)$ est une base de $\mathcal{V}$. Quelles sont les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{LK}$ *et* $\overrightarrow{KD}$. Quelles sont les coordonnées de $\overrightarrow{LK}$ *et* $\overrightarrow{KD}$ dans cette nouvelle base ?