ÉTUDES DE FONCTIONS NUMÉRIQUES

Site MathsTICE de Adama Traoré Lycée Technique Bamako

I – Plan d'étude d'une fonction numérique :

Pour étudier une fonction numérique nous adopterons le plan suivant :

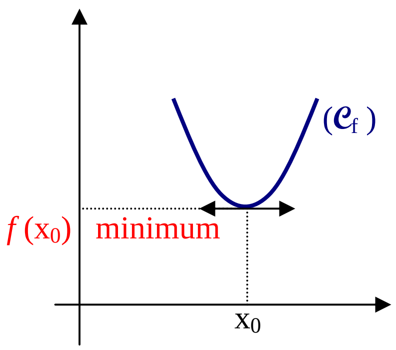
- Déterminer l'ensemble de définition (étudier la continuité)
- Etudier éventuellement la parité. Recherche de la période, des symétries afin de réduire l'intervalle d'étude.
- Etudier les limites aux bornes de l'ensemble de définition ;
- Calculer la fonction dérivée et étudier son signe ; indiquer le sens de variation.
- Consigner dans un tableau de variation les résultats précédents.
- Déterminer les points remarquables à l'étude de la fonction
- Points d'intersection de la courbe avec les axes de coordonnées
- Points d'inflexion etc.

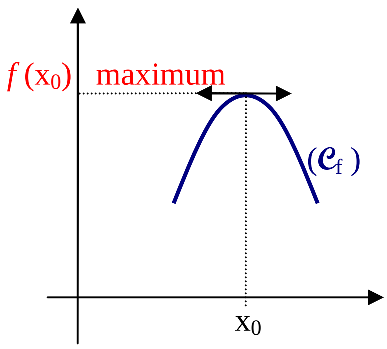
II – Exemple d'étude de fonctions polynômes :

1- Théorème 1: Si f admet un extremum relatif d'abscisse x_0, alors $f'(x_0) = 0$ ou f n'est pas dérivable en x_0.

2- Théorème 2: Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert]a ; b[.

Si $f'(x)$ s'annule en x_0 de]a ;b[en changeant de signe, alors f admet un extremum en x_0.

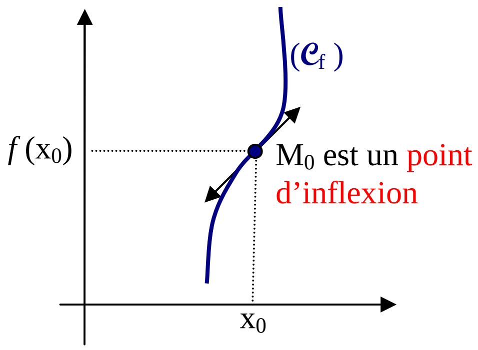




3- Définition :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. On dit que le point d'abscisse x_0 de I est un point d'inflexion pour la fonction f si et seulement si $f''(x)$ s'annule en x_0 en changeant de signe.

(En ce point la courbe traverse sa tangente).



4- Exemple : Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

a) Etudier les variations de f ;
b) Montrer que f admet un point d'inflexion que l'on précisera. On déterminera les intersections de la courbe ($\mathcal{C}_f$) de f avec les axes de coordonnées.
c) Tracer la courbe ($\mathcal{C}_f$) de f dans un repère orthonormé. Quels sont les extremums relatifs de f ?. En quels points sont-ils atteints ?.

III – Etude de fonctions homographiques :

1°) Définition :

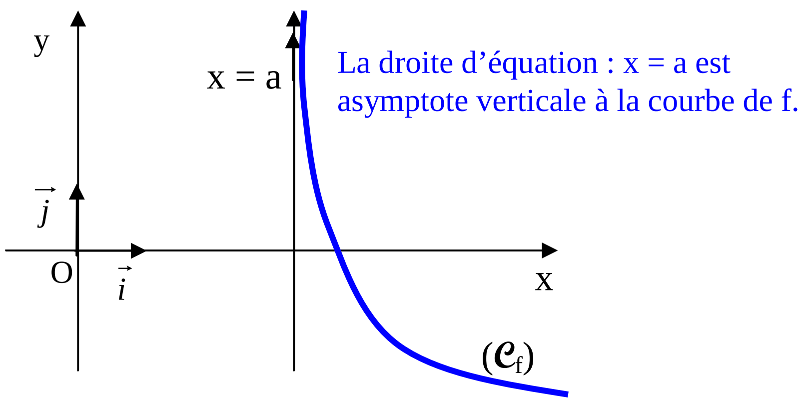
On appelle fonction homographique, toute fonction numérique f définie par :

$f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c \neq 0)$. La courbe représentative d'une fonction homographique est appelée une hyperbole.

2°) Recherche d'asymptotes parallèles aux axes de coordonnées :

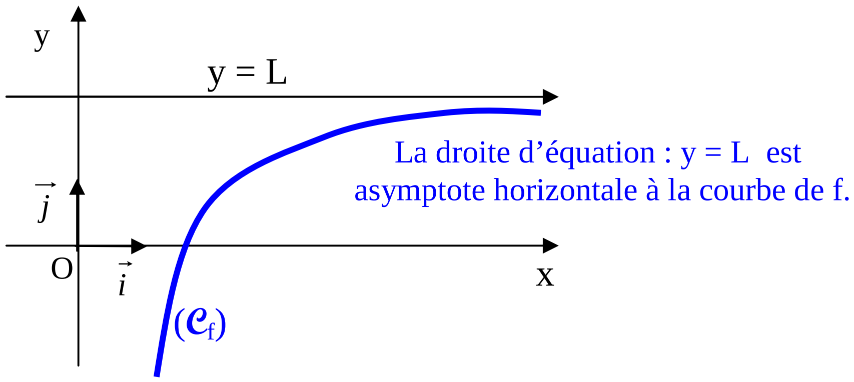
a) Asymptote Verticale :

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty \ ou - \infty$ alors la droite d'équation x = a est asymptote verticale à la courbe ($\mathcal{C}_f$) de f.



b) Asymptote horizontale :

Si $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = L$ *(réel)*,alors la droite d'équation y = L est asymptote horizontale à la courbe (C_f) de f .



3- Exemple : Étudier et représenter la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2x+2}{x-1}$.

IV – *Quelques propriétés géométriques*

1. Fonctions paires :

Une fonction numérique f d'ensemble de définition D_f est dite paire si, et seulement si **$\forall x \in D_f$, $(-x) \in D_f$; $f(-x) = f(x)$.**

La courbe (C_f) de f admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

2. Fonction impaire :

Une fonction numérique f d'ensemble de définition D_f est dite impaire si, et seulement si $\forall x \in D_f$, $(-x) \in D_f$; $f(-x) = -f(x)$.

L'origine du repère est centre de symétrie pour la courbe (C_f) de f dans un repère cartésien.

3. Axe de symétrie d'une représentation graphique :

Dans un repère orthogonal la droite (D) d'équation x = a , (a $\in \mathbb{R}$) est axe de symétrie pour la courbe (C_f) de f , si et seulement si $f(2a - x) = f(x)$.

4. Centre de symétrie d'une représentation graphique :

Le repère étant quelconque, le point I (a ; b) est un centre de symétrie pour la courbe (C_f) de f si et seulement si, $f(2a - x) + f(x) = 2b$.

5. Fonctions périodiques :

Une fonction numérique f est périodique si, seulement si il existe un réel strictement positif t tel que $\forall x \in D_f \; f(x+t) = f(x)$.

On dit alors que t est une période de f .

- Si f(x) = cos(ax +b) alors la période $T = \frac{2\pi}{|a|}$;
- Si f(x) = sin(ax +b) alors la période $T = \frac{2\pi}{|a|}$;
- Si f(x) = tan(ax +b) alors la période $T = \frac{\pi}{|a|}$.

IV –Etude de fonctions rationnelles :

1- Asymptote oblique :

- Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, alors il y a possibilité d'asymptote oblique en $\pm\infty$.
- Si $f(x) = ax + b + C(x) \quad avec \quad \lim\limits_{x \to \pm\infty} C(x) = 0$; alors la droite d'équation

y = ax+b est asymptote oblique à la courbe au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$.

- La droite (D) d'équation : y = ax + b est dite asymptote oblique à la

courbe au voisinage de de $+\infty$ ou $-\infty$; si et seulement, si

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - (ax + b) \right] = 0.$$

2- Position de la courbe par rapport à son asymptote oblique :

Pour étudier la position de la courbe ($\mathcal{C}_f$) de f par rapport à son asymptote oblique (D) d'équation : y = ax + b ; on étudie le signe de $f(x) - (ax + b)$ dans $\mathcal{D}_f$.

1er cas : Si [$f(x)-(ax+b)$] **< 0 ;** alors la courbe (C_f) est en dessous de (D).

2ème cas : Si [$f(x)-(ax+b)$] > 0 **;** alors la courbe (C_f) est au dessus de (D).

3ème cas : Si [$f(x)-(ax+b)$] = 0 ; alors la courbe (C_f) coupe (D) en un point x_0.

3- Exemples d'études et de représentations:

Exemple 1 : Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{x^2-5x+15}{x-2}$.

a) Déterminer les réels a, b et c tels que $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-2}$;

b) Montrer que la courbe ($\mathcal{C}_f$) de f admet une asymptote oblique (D) à préciser ;

c) Etudier la fonction f ;

d) Montrer que le point I (2 ; –1) est centre de symétrie pour la courbe ($\mathcal{C}_f$) de f

e) Etudier la position relative de ($\mathcal{C}_f$) par rapport à (D) ;

f) Construire (D) et ($\mathcal{C}_f$) dans un repère orthonormé.

Exemple 2 :

Etudier et représenter la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x^2-2x+6}{2x^2-4x+4}$.

Exemple 3 : Soit la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de f. Etudier la parité de f.

b) Etudier les variations de f puis tracer sa courbe

4- Recherche de l'asymptote oblique :

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. S'il existe deux réels a et b tels que :

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a \quad et \quad \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\,f(x)-ax\,\right]=b$ alors la courbe ($\mathcal{C}_f$) de f admet

pour asymptote la droite (D) : y = ax + b au voisinage de +∞ ou de –∞.