Suites Numériques

Site MathsTICE de Adama Traoré Lycée Technique Bamako

I – Généralité sur les suites:

1- Principe du raisonnement par récurrence :

Soit la proposition P(n) dépendant de l'entier n.

Si $\begin{cases} (1) \ la \ proposition \ est \ vraie \ pour \ un \ entier \ n_0, et \\ (2) \ pour \ tout \ entier \ k \geq n_0, la \ proposition \ est \ vraie \\ au \ rang \ (k+1) \ dès \ qu'on \ la \ suppose \ vraie \ au \ rang \ k. \end{cases}$

Alors : la proposition P(n) est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$.

Exemples : a) Démontrer par récurrence l'égalité P(n) suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(n) : 1+2+3+4+........+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

b) Démontrer par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$, le nombre $f(n) = n(n+1)$ est multiple de 2.

Pour n = 0 $f(0) = 0 \Leftrightarrow 0 = 2 \times 0$ donc multiple de 2. La proposition est donc vraie au rang 0.

Soit $p \in \mathbb{N}$, supposons que la proposition est vraie au p : il existe un entier naturel k tel que $f(p) = 2k$. Alors $f(p+1) = (p+1)(p+2) = p(p+1) + 2(p+1) = f(p) + 2(p+1)$

$\Leftrightarrow f(p+1) = 2k + 2(p+1) = 2(k+p+1)$ or, $(k+p+1) \in IN$, donc $f(p+1)$ est multiple de 2.

Le principe de récurrence permet de conclure : $\forall n \in \mathbb{N}$, le nombre $f(n) = n(n+1)$ est multiple de 2.

2- Définition d'une suite :

Une suite numérique est une application de $\mathbb{N}$ (ou d'une partie de $\mathbb{N}$) dans $\mathbb{R}$.

On la note :**U** ou **(U_n)** ou $(U_n)_{n \in IN}$.

U : $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

0 $\mapsto$ u (0) = u_0 est le premier terme de la suite u.

1 $\mapsto$ u (1) = u_1 est le deuxième terme de la suite u.

. .

. .

n $\mapsto$ u (n) = u_n est le terme général de la suite u.

Exemples :

Soient les suites (U_n) ; (V_n) ; (W_n) définies par leur terme général :

(U_n) est telle que $U_n = 2n + 5$; (V_n) est telle que $V_n = 2^n$;

(W_n) est telle que $W_n = \frac{1}{n^2}$.

3 – Mode de définition d'une suite :

Une suite numérique peut se définir de différentes façons.

a) Suites définies par U_n = f (n) :

Ce sont des suites définies par la donnée explicite du terme général U_n en fonction de n.

Exemple : Soit la suite (U_n) définie par $U_n = 2^n$. Calculer les 4 premiers termes.

b) Suites récurrentes :

Ce sont des suites définies par la donnée de son 1er terme et d'une relation de récurrence $U_{n+1} = f(U_n)$ liant deux termes consécutifs de la suite : (où f est une fonction).

Exemple : Soit la suite (U_n) définie par $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 3 \end{cases}$.

Calculer U_1 ;U_2 ; U_3 ; U_4 et représenter graphiquement les termes de cette suite.

Réponse

$n = 0 \Rightarrow U_1 = \frac{1}{2}U_0 + 3 = 4$; $n = 1 \Rightarrow U_2 = \frac{1}{2}U_1 + 3 = 5$; $U_3 = \frac{11}{2}$; $U_4 = \frac{23}{4}$.

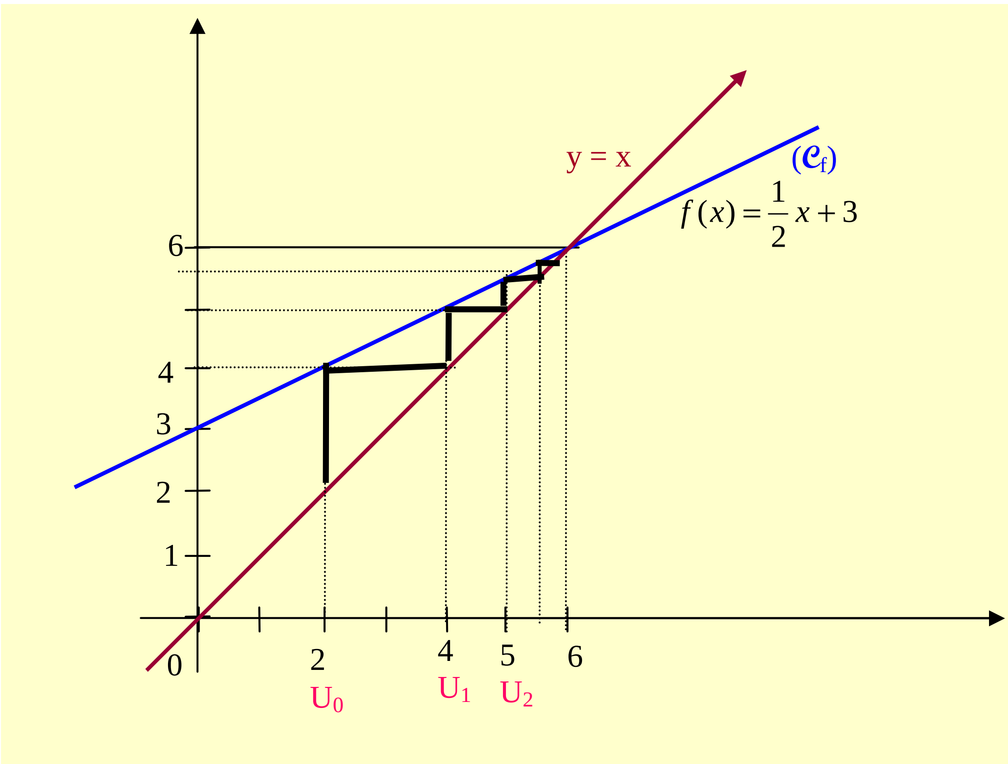
Représentons les termes de cette suite graphiquement.

Soit $f : x \mapsto f(x) = \frac{1}{2}x + 3$ la fonction associée à la suite (U_n).

$U_{n+1} = f(U_n) = \frac{1}{2}U_n + 3$ *et* $U_0 = 2$;

$U_1 = f(U_0) = 4$; $U_2 = f(U_1) = 5$; $U_3 = f(U_2) = \frac{11}{2}$; $U_4 = f(U_3) = \frac{23}{4}$.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé on trace la courbe (C_f) de f et la droite d'équation : y = x.



4 – Sens de variation d'une suite :

a) Définitions :

– On dit que la suite (U_n) est croissante sur ℕ, si pour tout entier naturel n on a :

$$U_{n+1} - U_n \geq 0 \quad \text{ou} \quad U_n \leq U_{n+1}$$

– On dit que la suite (U_n) est décroissante sur ℕ, si pour tout entier naturel n on a :

$$U_{n+1} - U_n \leq 0 \quad \text{ou} \quad U_{n+1} \leq U_n$$

– On dit que la suite (U_n) est constante sur ℕ, si pour tout entier naturel n on a :

$$U_{n+1} = U_n$$

– On dit que la suite (U_n) est stationnaire à partir du rang n_0 ,

si pour tout entier naturel n **dès que $n \geq n_0$ alors $U_n = U_{n_0}$** .

– On dit que la suite (U_n) est à termes positifs, si pour tout entier naturel n on a : $U_n \geq 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Remarques : si $U_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\left[(U_n) \quad est \quad croissante \right] \Leftrightarrow \left[\frac{U_{n+1}}{U_n} \geq 1 \right].$$

$$\left[(U_n) \ est \ \ décroissante \right] \Leftrightarrow \left[\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq 1 \right];$$

5 – Suites bornées :

– On dit qu'une suite numérique (U_n) est majorée s'il existe un réel **M** tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n \leq M$. **M** est un majorant de la suite (U_n).

– On dit qu'une suite numérique (U_n) est minorée s'il existe un réel **m** tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \ m \leq U_n$. **m** est un minorant de la suite (U_n).

– Une suite numérique (U_n) est dite bornée si elle est à la fois majorée et minorée C'est à dire : $\forall n \in \mathbb{N}, \ m \leq U_n \leq M$.

Exemple : Soit U la suite définie par sur ℕ par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2} U_n - 1 \end{cases}$.

Montrer que U est bornée par –2 et 1.

-- 0 --

$$U_0 = 1 \quad et \quad U_{n+1} = \frac{1}{2} U_n - 1 \ ;$$

(U est bornée par –2 et 1) $\Leftrightarrow$ $(\forall n \in IN, \ -2 \leq U_n \leq 1)$.

Démontrons ceci par récurrence.

n = 0 ; $U_0 = 1$ on a : $-2 \leq U_0 \leq 1$ vraie.

Soit p ∊ ℕ; supposons que : $-2 \leq U_p \leq 1$; montrons que $-2 \leq U_{p+1} \leq 1$ avec $U_{p+1} = \frac{1}{2} U_p - 1$; $-2 \leq U_p \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{1}{2} U_p \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow$ $-2 \leq \frac{1}{2} U_p - 1 \leq -\frac{1}{2} \leq 1$. vrai à l'ordre (p+1). D'après le principe du raisonnement par récurrence $(\forall n \in IN, \ -2 \leq U_n \leq 1)$ $\Leftrightarrow$ D'où la suite U est bornée par –2 et 1.

II– Suites Convergentes – Suites divergentes:

((U$_n$) converge) $\Leftrightarrow$ **(** $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = l \quad (l \in IR)$ **)**

(Si ℓ = +∞ ou – ∞ ou n'existe pas) **Alors (U$_n$) diverge.**

III – Propriétés des limites:

a) Théorème 1 : (admis)

Si (U_n) et (V_n) sont deux suites convergentes respectivement vers ℓ et ℓ'. Alors on a :

$$\lim_{n \to +\infty} (U_n + V_n) = \ell + \ell' \text{ avec } \ell' \neq 0$$

b) Théorème 2 : (des gendarmes)

Soient (U_n) ; (V_n) et (W_n) trois suites telles que (U_n) et (V_n) convergent vers ℓ et $U_n \leq W_n \leq V_n$, alors la suite (W_n) converge vers ℓ.

c) Théorème 3 : (admis)

- Toute suite croissante et majorée est convergente ;
- Toute suite décroissante et minorée est convergente.

IV – Suites Arithmétiques:

1- Définition : On appelle suite arithmétique toute suite (U_n) définie par son premier terme et une relation de récurrence de la forme : $\mathbf{U_{n+1} = U_n + r}$; où **r** est un réel appelé raison de la suite (U_n).

Exemples : a) Soit (U_n) définie par $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n + 2 \end{cases}$

Calculer les cinq premiers termes de la suite (U_n).

b) Déterminer la suite de raison r = –3 dont le terme d'indice 4 égale à 30.

Remarque : une suite arithmétique (U_n) est croissante si r est positive et décroissante si r est négative.

2- Expression du terme général U_n :

Soit une suite arithmétique (U_n) de 1^er^ terme U_1 et de raison r.

$$U_1$$
$$U_2 = U_1 + r$$
$$U_3 = U_2 + r = U_1 + 2r$$
$$U_4 = U_3 + r = U_1 + 3r$$
$$U_5 = U_4 + r = U_1 + 4r$$
$$\vdots$$

$\forall\ p \in \mathbb{N},\ p < n$ on a : $\mathbf{U_n = U_p + (n - p)\, r \iff U_n - U_p = (n - p)\, r}$.

- Si le 1er terme est U_0 alors $U_n = U_0 + nr$.
- Si le 1^er^ terme est U_1 alors $U_n = U_1 + (n - 1)\, r$.

Exemples : a) Trouver le 50^è^ terme de la suite arithmétique : 12 ; 16 ; 20 ; …

b) Trouver le n^ième^ terme de la suite : 1 ; 3 ; 5 ; 7 ; ……… ; n.

3 – Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique :

Nous avons démontré par récurrence que pour tout entier naturel n, on a :

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Soit (U_n) une suite arithmétique de 1^er^ terme U_0 et de raison r. Posons :

$$S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + U_n .$$

$$S_n = U_0 + (U_0+r) + (U_0+2r) + (U_0+3r) + \ldots\ldots\ldots\ldots + (U_0+nr) \iff$$

$$S_n = \underbrace{U_0 + U_0 + \ldots\ldots + U_0}_{U(n+1)\ fois} + (1 + 2 + 3 + \ldots + n)\, r \iff$$

$$S_n = (n+1)\, U_0 + \frac{n(n+1)}{2} \iff$$

$$\mathbf{S_n = \frac{(n+1)}{2}\,[\,2U_0 + nr\,]} \quad \textbf{ou} \quad \mathbf{S_n = \frac{(n+1)}{2}\,[\,U_0 + U_n\,]}$$

(Somme des n+1 premiers termes)

– Si le 1er terme est U_1 alors on a :

$$S_n = \frac{n}{2}\,[\,2U_1 + (n-1)\,r\,] \qquad \text{ou} \qquad S_n = \frac{n}{2}\,[\,U_1 + U_n\,]$$

(Somme des n premiers termes)

Exemple : Calculer la somme des dix premiers termes de la suite arithmétique :
4 ; 6 ; 8 ; 10 ; …………….

V – Suites géométriques:

1- Définition : On appelle suite géométrique toute suite (U_n) définie par son premier terme et une relation de récurrence de la forme : $\mathbf{U_{n+1} = q\,U_n}$ où **q** est un réel appelé raison de la suite.

2 – Expression du terme général U_n :

Soit (U_n) une suite géométrique de 1er terme U_1 et de raison q.

$$U_1\ ; \quad q$$
$$U_2 = q \times U_1$$
$$U_3 = q \times U_2 = q^2\,U_1$$
$$U_4 = q \times U_3 = q^3\,U_1$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$\forall\ p \in \mathbb{N},\ p < n$ on a : $\mathbf{U_n = U_p \times q^{n-p}}$.

- Si le 1er terme est U_0 alors $U_n = U_0 \times q^n$; (p=0) .
- Si le 1er terme est U_1 alors $U_n = U_1 \times q^{(n-1)}$; (p=1) .

Exemple :

Déterminer le sixième terme de la progression géométrique: $\frac{1}{2}$; 1 ; 2 ;…….

3 – Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique :

Soit (U_n) une suite géométrique de 1er terme U_0 et de raison q. Posons :

$$S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + U_n\,.$$
$$-$$
$$qS_n = qU_0 + qU_1 + qU_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + qU_n\,.$$

$$(1-q)\,S_n = U_0 - qU_0 + U_1 - qU_1 + \ldots\ldots\ldots + U_n - qU_n. \Leftrightarrow$$
$$(1-q)\,S_n = U_o - qU_n \quad \Leftrightarrow$$
$$(1-q)\,S_n = U_o - qU_0 \times q^n \quad \Leftrightarrow$$
$$(1-q)\,S_n = U_o\,(1-q^{n+1}) \quad \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{S_n = U_0} \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad \textbf{avec } \mathbf{q \neq 1}$$

– Si le 1er terme est U_1 alors :

$$\mathbf{S_n = U_1 \times \frac{1-q^n}{1-q} \text{ avec } q \neq 1}$$

D'une manière générale on a la formule $$\mathbf{S_n = U_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} \text{ avec } q \neq 1}$$

– Si q = 1 alors on a : $\mathbf{S_n = n\,U_1}$

4 – Limites d'une suite géométrique :

Soit une suite géométrique de raison q et de terme général U_n.

- Si $|q| < 1$ alors (U_n) converge et $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$;
- Si $|q| > 1$ alors (U_n) diverge.

5 – Limites de la somme des termes d'une suite géométrique :

- Si q = 1 alors $S_n = n\,u_1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} nU_1 = +\infty$;
- Si q > 1 alors $S_n = u_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$;
- Si q < 1 alors $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \frac{U_1}{1-q}$.

6 – Progressions Arithmétiques et Géométriques :

Soit la progression de trois termes x ; y ; z.

(x ; y ; z sont en progression arithmétique) $\Leftrightarrow$ ($x + z = 2y$).

(x ; y ; z sont en progression géométrique) $\Leftrightarrow$ ($x \times z = y^2$)

VI – Tableau de Formules des suites arithmétiques et géométriques:

Nature de la suite	Si le 1er terme est	Terme Général U_n	Somme des termes
(U_n) est une suite Arithmétique de raison r	U_p U_0 (p = 0)	$U_n = U_p + (n-p)r$ $U_n = U_0 + nr$	$S_n = \frac{(n+1)}{2}[2U_0 + nr]$ ou $S_n = \frac{(n+1)}{2}[U_0 + U_n]$
	U_1 (p = 1)	$U_n = U_1 + (n-1)r$	$S_n = \frac{n}{2}[2U_1 + (n-1)r]$ ou $S_n = \frac{n}{2}[U_1 + U_n]$
(U_n) est une suite Géométrique de raison q	U_p U_0 (p=0)	$U_n = U_p \times q^{n-p}$ $U_n = U_0 \times q^n$	$S_n = U_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$ $S_n = U_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ avec $q \neq 1$
	U_1 (p=1)	$U_n = U_1 \times q^{n-1}$	$S_n = U_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}$ avec $q \neq 1$
	U_1	Si q = 1 alors	$S_n = n\, U_1$