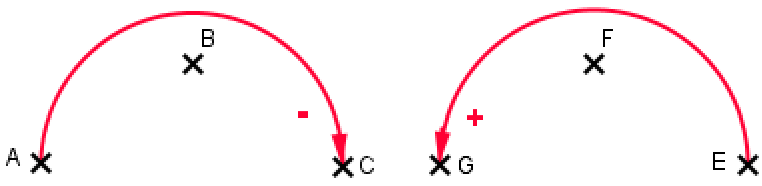
TRIGONOMÉTRIE

Site MathsTICE de Adama Traoré Lycée Technique Bamako

I) Angles orientés:

Considérons les points A, B, C, E, F, G.

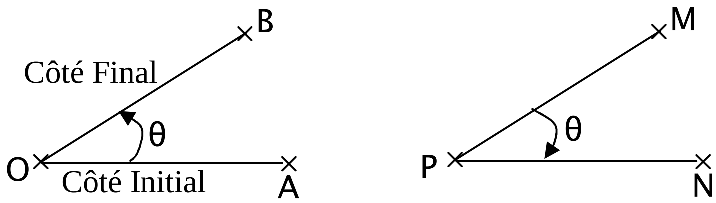


Les triplets (A,B,C) et (E,F,G) sont de sens contraires.

– Le sens du triplet (E,F,G) est appelé sens positif ou direct ;

– Le sens du triplet (A,B,C) est appelé sens négatif ou indirect ;

Considérons les angles $(\widehat{\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OB}})$ *et* $(\widehat{\overrightarrow{PM}\,;\,\overrightarrow{PN}})$



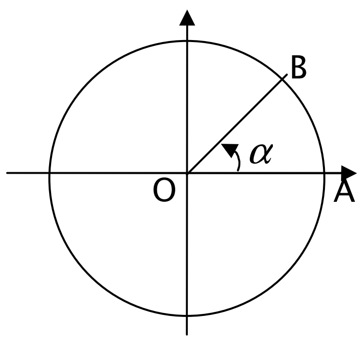
θ est un angle orienté positivement ; α est angle orienté négativement.

1- Détermination de la mesure principale d'un angle orienté :

Soit α une mesure en radians respectivement en degrés de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OB}})$

On écrit $(\widehat{\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OB}}) = \alpha$ rds ou $(\widehat{\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OB}}) = \alpha^{\circ}$

L'angle $(\widehat{\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OB}})$ comporte une infinité de mesures.



Parmi toutes ces mesures une et une seule notée θ appartient à]–π; π] que l'on appelle mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$. On note : Mes $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) = \theta$.

2– Théorème :

Si x une mesure en radians sa détermination ou mesure principale notée θ est telle que : $x = \theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = x - 2k\pi$ avec $\theta \in]-\pi; \pi]$.

3– Exemple1 :

Déterminer en radians la mesure principale d'un angle orienté dont une mesure est $x = \frac{13\pi}{3} rd$ $\theta = x - 2k\pi$ *et* $\theta \in]-\pi ;\pi] \Leftrightarrow -\pi < \theta \leq \pi$

$-\pi < x - k\pi \leq \pi \Leftrightarrow -\pi < \pi - 2k\pi \leq \pi \Leftrightarrow$

$-2{,}66 < k \leq -1{,}66 \Rightarrow k = -2$.

En remplaçant *x* et *k* par leurs valeurs on obtient : $\theta = \frac{\pi}{3} rd$.

– Exemple2 :

Déterminer en radians la mesure principale d'un angle orienté dont une mesure est $x = \frac{5\pi}{6} rd$.

On remarque que $\frac{5\pi}{6} \in]-\pi\ \pi]$; donc la détermination est $\theta = x = \frac{5\pi}{6} rd$

4– Comment déterminer en degrés la mesure principale d'un angle orienté :

Soit *x* une mesure en degré d'un angle orienté et soit θ sa mesure principale ($\theta \in]-180° ; 180°]$).

– Si $x \in]-180° ; 180°]$ *alors* $\theta = x$; S = ∅

– Si $x \notin]-180° ; 180°]$ *alors* $x = \theta + 360k$.

En général on procède de la façon suivante :

1er cas : si ***x*** **est positif**, on effectue la division euclidienne de ***x*** par 360° on obtient : $x = 360q + r, q \in \mathbb{N}$ *et* $0 \leq r < 360$;

Si r < 180° alors $\theta = r$

Si r ≥ 180° alors x = 360q + r + 360 – 360 ⇔ x = 360(q+1) + (r – 360) ;

Si (r–360) ∈]–180° ; 180°] alors $\theta = r - 360$.

Exemples : a) $x = 3715°$.

$x=360 \times 10+115°$; $115° \in]-180° ; 180°]$ donc $\theta = 115°$.

b) $x = 2796°$. $x=360 \times 7+276$ *comme* $r = 276 > 180°$ *alors*

$x=360 \times 7+276+360-360 \Leftrightarrow x=360 \times (7+1)+(276-360) \Leftrightarrow$

$x=360 \times (8)+(-84) \Leftrightarrow \theta = -84°$.

2ème cas : Si ***x*** est négatif et non multiple de 180°, alors on applique la méthode précédente à $(-x)$ en remarquant que $\boldsymbol{-x = 360k + \theta}$, *avec* $\theta \in]-180° ; 180°]$.

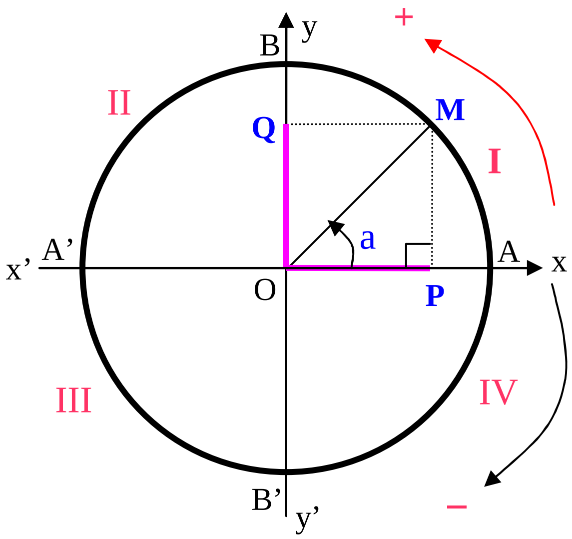
Exemple : soit $x = -789° \Leftrightarrow -x = 789° \Leftrightarrow -x = 360 \times 2 + 69$

en multipliant par (–1) $\quad x=360 \times (-2)+(-69) \Leftrightarrow \theta = -69°$.

II – Fonctions circulaires :

1°) Définitions des fonctions Sinus et Cosinus :

Considérons dans le plan un repère orthonormé (O ; A ; B) de sens direct. Soit ($\mathscr{C}$) le cercle trigonométrique c'est-à-dire le cercle de centre O et de rayon R=1.



A tout point M du cercle correspond un angle orienté $(\hat{a}) = \overbrace{(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OM})}$ dont la mesure principale en radians est : a.

Dans le repère (O ; A ; B) l'abscisse du point M est appelée cosinus de (â); l'ordonnée du point M est appelée sinus de (â).

On note : $\boxed{Cosa = \overline{OP} \;\; et \;\; Sina = \overline{OQ}}$.

– L’axe (x’ox) des abscisses est appelé axe des cosinus ;

– L’axe (y’oy) des ordonnées est appelé axe des sinus .

Conséquences :

C_1) $A(1 ; 0)$; $B(0 ; 1)$; $A'(-1 ;0)$; $B'(0 ;-1)$.
$\forall x \in IR$, $-1 \leq \cos x \leq 1$; $-1 \leq \sin x \leq 1$.

C_2) Si a augmente de $2k\pi$ le point M revient à sa position initiale.

On exprime ce fait en disant que les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π.

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$;
$\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$.

C_3)
– Le sinus d’un angle situé dans le cadrant (I)ou (II) est positif, et négatif dans le cadrant (III) ou (IV).
– Le cosinus d’un angle situé dans le cadrant (I) ou (IV) est positif, et négatif dans le cadrant (II) ou (III).

2°) Représentation graphique des fonctions sinus et cosinus :

Puisque les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π , on peut les étudier sur $[-\pi ; \pi]$.

Pour cela dressons la table des valeurs en examinant les positions de P et Q lorsque a décrit l’intervalle $[-\pi ; \pi]$, le point M décrivant le cercle trigonométrique dans le sens positif.

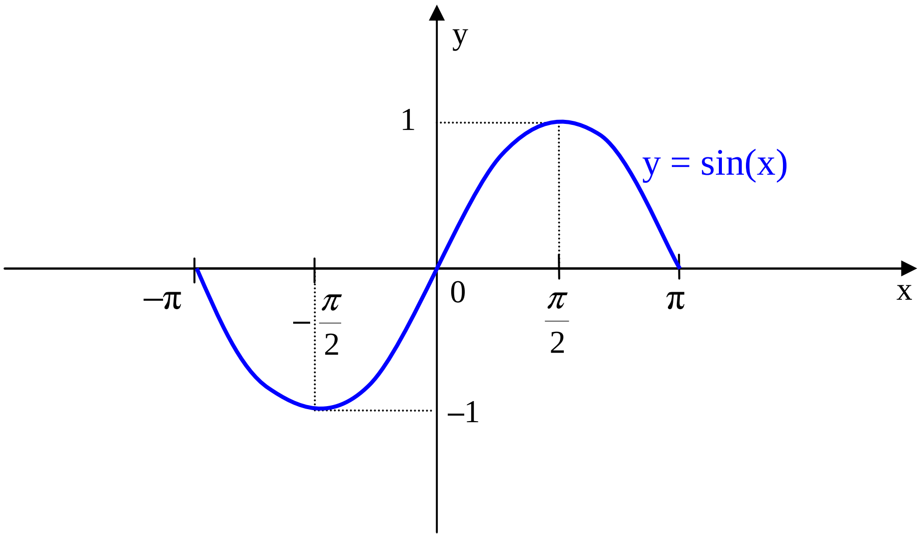
$\sin : [-\pi ; \pi] \to IR$ $\qquad$ $\cos : [-\pi ; \pi] \to IR$

$x \mapsto \sin x$ $\qquad$ $x \mapsto \cos x$

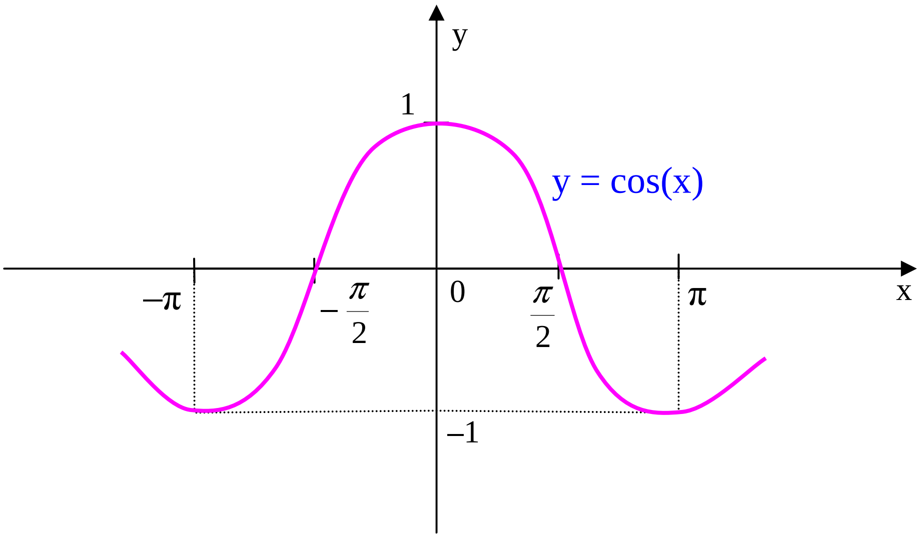
x	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π
Sin(x)	0	–1	0	1	0

x	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π
cos(x)	–1	0	1	0	–1

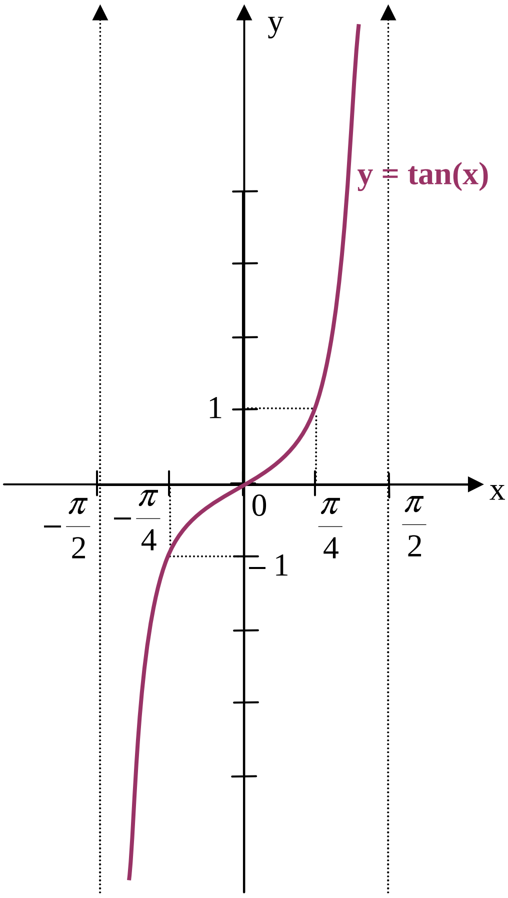
– Représentation de la fonction sinus



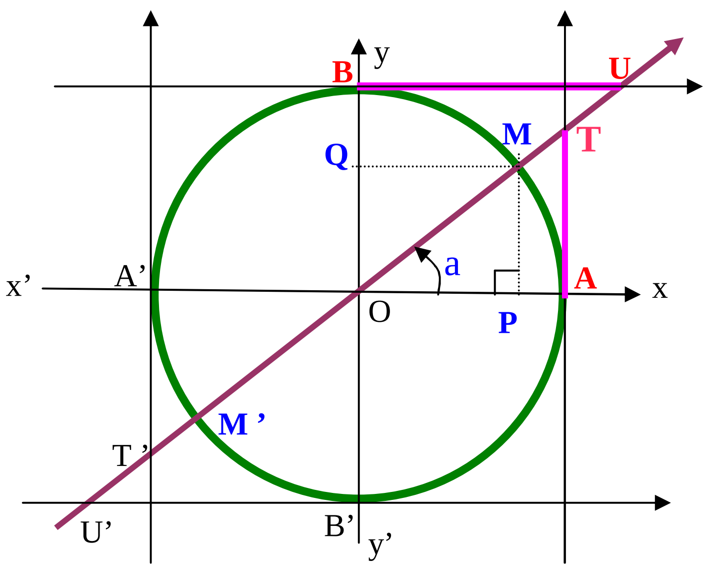
– Représentation graphique de la fonction cosinus



– Représentation graphique de la fonction tangente



3– Fonction tangente et Fonction cotangente :



Les axes (AT) et (BU) sont respectivement appelées axe des tangentes et des cotangentes. On appelle tangente de l'angle (â) la mesure algébrique de AT. On appelle cotangente de l'angle (â) la mesure algébrique de BU.
On note :

tan(â) = $\overline{AT}$; cotan(a) = $\overline{BU}$

Les fonctions tangente et cotangente sont périodiques de période π.

$$tg(a+\pi) = tga \ ; \ \cot g(a+\pi) = \cot ga$$
$$tg(a+k\pi) = tg(a) \ ; \ \cot g(a+k\pi) = \cot g(a)$$

III – Relations Fondamentales :

1°) Théorème :

Les fonctions circulaires d'un même angle (â) sont liées par les relations suivantes :

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \quad ; \quad tg(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \quad ; \quad \cot g(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{1}{tg(\theta)}$$

Démonstrations

– Considérons le triangle OPM rectangle en P.

$$OP^2 + PM^2 = OM^2 \quad \Leftrightarrow \quad \sin^2 a + \cos^2 a = 1.$$

– Considérons les triangles semblables OAT et OPM

$$\frac{OA}{OP} = \frac{AT}{PM} \Leftrightarrow \frac{1}{\cos a} = \frac{tga}{\sin a} \Leftrightarrow tga \times \cos a = \sin a \Leftrightarrow tga = \frac{\sin a}{\cos a}$$

– Considérons les triangles semblables OBU et OQM

$$\frac{OB}{OQ} = \frac{BU}{QM} \Leftrightarrow \frac{1}{\sin a} = \frac{\cot ga}{\cos a} \Leftrightarrow \cot ga \times \sin a = \cos a \Leftrightarrow \cot ga = \frac{\cos a}{\sin a}$$

2°) Autres Relations :

Nous savons que $\forall\ x \in \mathbb{R}\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Si $\cos x \neq 0$ en divisant par $\cos^2$x,

$$\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x.$$ D'où : $$1 + tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Si $\sin x \neq 0$ en divisant par $\sin^2$x,

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1 \Leftrightarrow \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} \Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot g^2 x$$

D'où : $$.\ 1 + \cot g^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

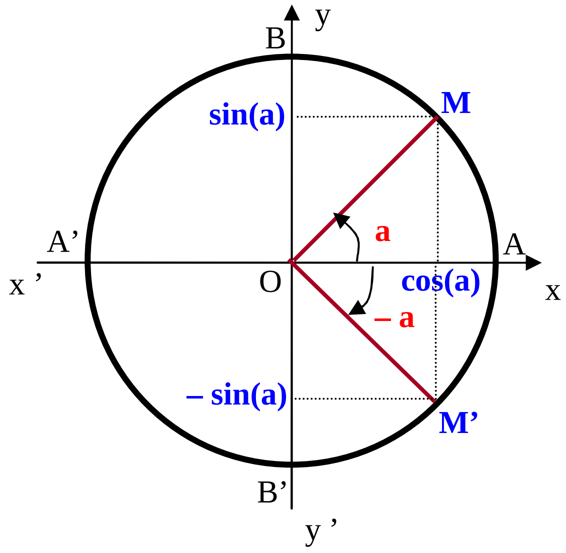
IV – Angles remarquables :

Angles	0° $0\ rd$	30° $\frac{\pi}{6}\ rd$	45° $\frac{\pi}{4}\ rd$	60° $\frac{\pi}{3}\ rd$	90° $\frac{\pi}{2}\ rd$	120° $\frac{2\pi}{3}\ rd$	135° $\frac{3\pi}{4}\ rd$	150° $\frac{5\pi}{6}\ rd$	180° $\pi\ rd$
Sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
cotg		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	

V – Les Angles associés:

1°) Angles opposés : (a) et (– a)

–Deux angles sont dits opposés si leur somme est égale à 0 radian ou 0°.



$\cos(-a) = \cos(a)$

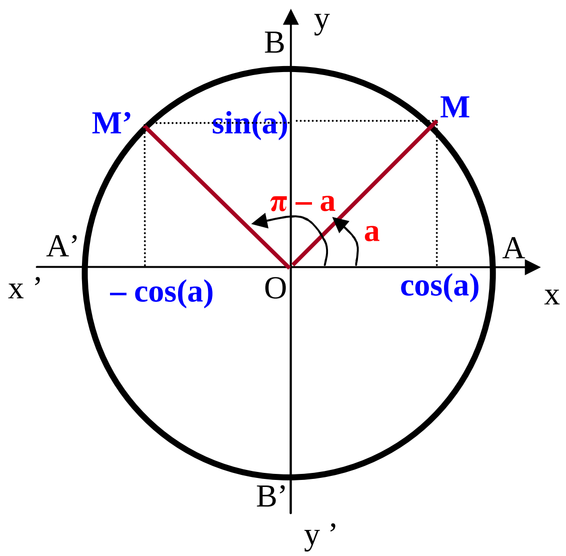
$\sin(-a) = -\sin(a)$

$\text{tg}(-a) = -\text{tg}(a)$

– Deux angles opposés ont même cosinus et de sinus opposés.

2°) Angles supplémentaires : (π – a) et (a)

– Deux angles sont dits supplémentaires si leur somme est égale à π radian ou 180°.



$\cos(\pi - a) = -\cos(a)$

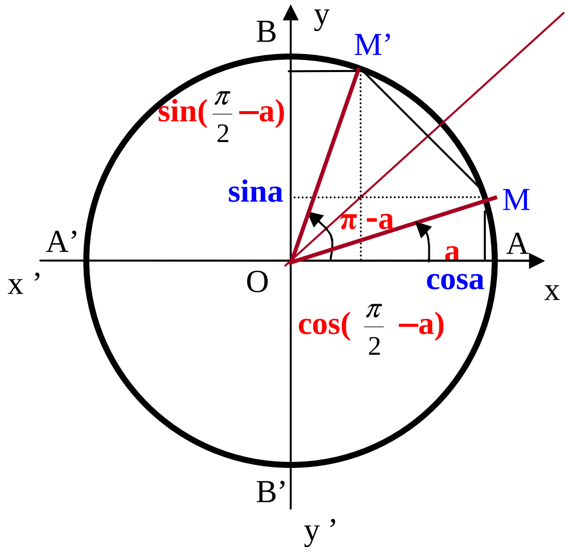
$\sin(\pi - a) = \sin(a)$

$\text{tg}(\pi - a) = -\text{tg}(a)$

– Deux angles supplémentaires ont même sinus et de cosinus opposés.

3°) Angles complémentaires : ($\pi/2$ – a) et (a)

– Deux angles sont dits complémentaires si leur somme est égale à $\frac{\pi}{2}$ radian ou 90°.



M et M' sont symétriques par rapport à la 1ère bissectrice.

$$\text{Sin}(\frac{\pi}{2} - a) = \cos(a)$$

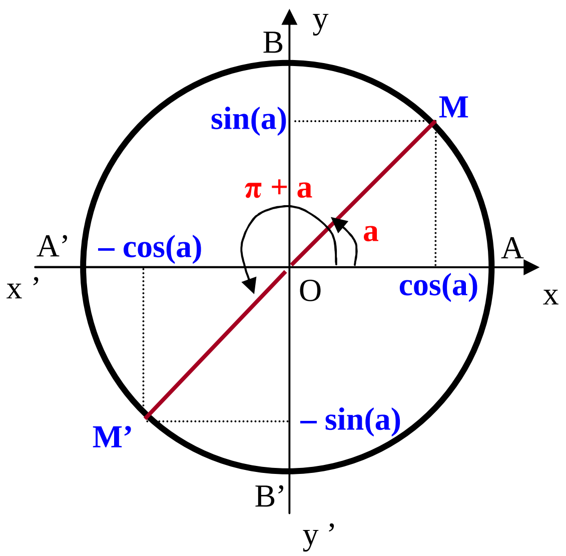
$$\text{Cos}(\frac{\pi}{2} - a) = \sin(a)$$

$$\text{Tg}(\frac{\pi}{2} - a) = \text{cotg}(a)$$

– Deux angles sont complémentaires si le sinus de l'un est égal au cosinus de l'autre.

4°) Angles dont la différence est π : (π + a) et (a)

M et M' sont symétriques par rapport à la 1ère bissectrice.



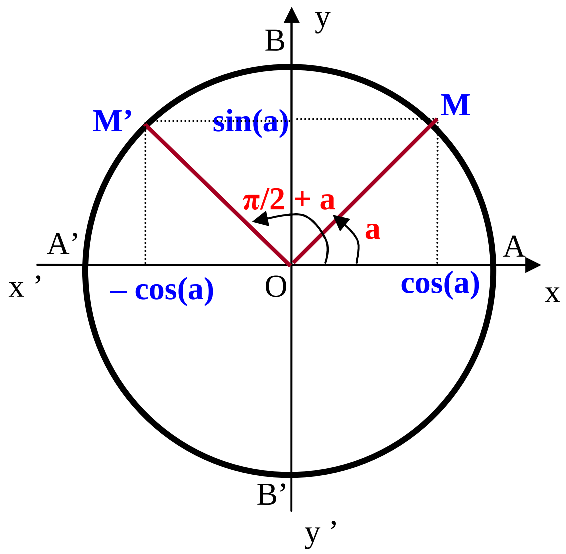
$$\cos(\pi + a) = -\cos(a)$$

$$\sin(\pi + a) = -\sin(a)$$

$$\text{tg}(\pi + a) = \text{tg}(a)$$

5°) Angles dont la différence est $\frac{\pi}{2}$: ($\frac{\pi}{2}$ + a) et (a)

M et M' sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.



$\cos(\frac{\pi}{2} + a) = -\cos(a)$

$\sin(\frac{\pi}{2} + a) = \sin(a)$

$tg(\frac{\pi}{2} + a) = -tg(a)$

VI – Équations fondamentales:

1°) Équation cosx = a (a ∈ℝ, x∈ℝ)

- Si a ∉ [-1 ; 1] alors l'ensemble solution est S = ∅.
- Si a ∈ [-1 ; 1] alors cos(x) = a ⇔ cos(x) = cos(α) avec a = cos(α).

Les solutions de l'équation sont : $\left|\begin{array}{l} x = \alpha + 2k\pi \\ x = -\alpha + 2k\pi \end{array}\right. \quad k \in Z$.

L'ensemble des solutions est $S = \{ \alpha + 2k\pi ; -\alpha + 2k\pi \ / \ k \in Z \}$.

Exemple 1 : Résoudre x réel, cos(x) = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos(x) = \cos\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. \quad k \in Z$$

L'ensemble des solutions est $S = \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ ; \ -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \ / \ k \in Z \right\}$.

Exemple 2 : Résoudre x réel, $2\cos(2x-\frac{\pi}{3}) = 1$

$$2\cos(2x-\frac{\pi}{3})=1 \Leftrightarrow \cos(2x-\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(2x-\frac{\pi}{3})=\cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x=\frac{\pi}{3}+k\pi \\ x=k\pi \end{array} \right. \quad k\in Z$$

L'ensemble des solutions est $S=\left\{\frac{\pi}{3}+k\pi ; k\pi \ / \ k\in Z\right\}$

2°) Équation sinx = a (a $\in\mathbb{R}$, x$\in\mathbb{R}$)

- Si a $\notin$ [-1 ; 1] alors l'ensemble solution est S = $\varnothing$.
- Si a $\in$ [-1 ; 1] alors sin(x) = a $\Leftrightarrow$ sin(x) = sin(α) avec a = sin(α).

Les solutions de l'équation sont : : $\left| \begin{array}{l} x=\alpha+2k\pi \\ x=\pi-\alpha+2k\pi \end{array} \right. \quad k\in Z$.

L'ensemble des solutions est $S=\{\ \alpha+2k\pi \ ; \ \pi-\alpha+2k\pi \ / \ k\in Z\ \}$

Exemple 1 : Résoudre x réel, $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\sin(x)=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin(x)=\sin\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+2k\pi \\ x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi \end{array} \right. \quad k\in Z$$

L'ensemble des solutions est $S=\left\{\frac{\pi}{4}+2k\pi ; \frac{3\pi}{4}+2k\pi / k\in Z\right\}$

Exemple 2 : Résoudre x réel, $\sin(4x) = \sin\frac{2\pi}{3}$.

$$\sin(4x)=\sin\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 4x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi \\ 4x=\pi-\frac{2\pi}{3}+2k\pi \end{array} \right. \quad k\in Z \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2} \\ x=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2} \end{array} \right. \quad k\in Z$$

L'ensemble des solutions est $\left\{\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2} ; \frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2} / k\in Z\right\}$

3°) Cas particuliers (sin(x) = 0 ; cos(x) = 0)

. $\boldsymbol{\sin(x)=0 \ \Leftrightarrow \ x=k\pi}$ **tel que** $\boldsymbol{k\in Z}$.

. $\boldsymbol{\cos(x)=0 \ \Leftrightarrow \ x=\frac{\pi}{2}+k\pi \ , \ k\in Z}$.

4°) Équation tan(x) = a (a $\in\mathbb{R}$, x$\in\mathbb{R}$)

• tan(x) = a ⇔ tan(x) = tan(α) avec a = tan(α).

Les solutions de l'équation sont : $x = \alpha + k\pi\ k \in Z$.

L'ensemble des solutions est $S = \{\ \alpha + k\pi\ /\ k \in Z\ \}$.

Exemple 1 : Résoudre x ∊]– π ; π] , tan(x) $= \frac{\sqrt{3}}{3}$

tan(x) $= \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \tan(x) = \tan\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in Z$

– si k = 0 alors $x = \frac{\pi}{6} \in$] π π] ;

– Si k = 1 alors $x = \frac{7\pi}{6} \notin$] π π]

– Si k = –1 alors $x = -\frac{5\pi}{6} \in$] π π]

– Si k = –2 alors $x = -\frac{11\pi}{6} \notin$] π π]. D'où $S_{]-\pi;\pi]} = \left\{\frac{\pi}{6}; -\frac{5\pi}{6}\right\}$

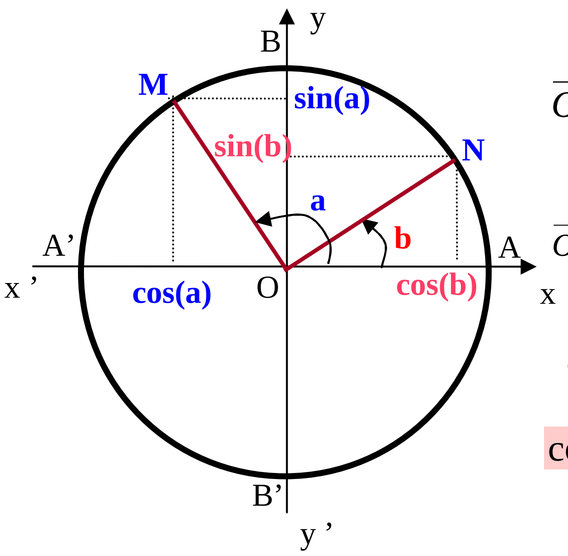
Exemple 2 : Résoudre x réel, tan(2x) = $\sqrt{3}$.

tan(2x) = $\sqrt{3}$ ⇔ tan(2x) = tan $\frac{\pi}{3}$ ⇔ 2x = $\frac{\pi}{3}$ + 2kπ ⇔ x = $\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$

L'ensemble des solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ est : S={ $\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$ / k $\in\mathbb{R}$}

VII– Formules d'addition :

1°) Calcul de cos (a – b) :



$\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}\cos a\\ \sin a\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ON}\begin{pmatrix}\cos b\\ \sin b\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OM} \bullet \overrightarrow{ON} = OM \times ON \cos\left(\overbrace{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON}}\right)$

cos(a – b) = $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}$. D'où

cos (a – b) = cosa cosb + sina sinb

En remplaçant b par – b on a:

cos (a + b) = cosa cosb – sina sinb

2°) Calcul de sin (a – b) :

Dans la formule de cos(a+b) remplaçons a par ($\frac{\pi}{2}-a$)

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-a+b\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\cos b-\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\sin b \Leftrightarrow$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-(a-b)\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\cos b-\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\sin b \Leftrightarrow \sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b \;;$$

d'où : $\sin(a-b)=\sin a\cos b-\sin b\cos a$.

En remplaçant b par (– b) on a : $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$.

3°) Calcul de tg (a – b) :

$$\tan(a-b)=\frac{\sin(a-b)}{\cos(a-b)}=\frac{\sin a\cos b-\cos a\sin b}{\cos a\cos b+\sin a\sin b}$$

en divisant le numérateur et le dénominateur par cosa cosb on obtient

$$\tan(a-b)=\frac{\frac{\sin a\cos b}{\cos a\cos b}-\frac{\cos a\sin b}{\cos a\cos b}}{\frac{\cos a\cos b}{\cos a\cos b}+\frac{\sin a\sin b}{\cos a\cos b}}=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b} \;;$$

D'où : $\tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}$. et $\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$.

VIII– Formules de multiplication :

1°) multiplication par deux :

Quel que soit le nombre réel x on a : $\cos(2x)=\cos^2 x-\sin^2 x$.

$\cos(2x)=(1-\sin^2 x)-\sin^2 x \Leftrightarrow$ $\cos(2x)=1-2\sin^2 x$.

$\cos(2x)=\cos^2 x-(1-\cos^2 x) \Leftrightarrow$ $\cos(2x)=2\cos^2 x-1$.

$$\cos(2x)=\cos^2 x-\sin^2 x \Leftrightarrow \cos 2x=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{1} \Leftrightarrow \cos 2x=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x+\sin^2 x}.$$

$$\cos 2x=\frac{\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} \Leftrightarrow \cos 2x=\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}\ ;\ \boxed{\cos 2x=\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}}.$$

$$.\ \boxed{\sin(2x)=2\sin x\cos x}.$$

2°) Expression de $\cos^2 x$; $\sin^2 x$; $tg^2 x$ en fonction de cos(2x) :

$$\cos 2x=2\cos^2 x-1 \Leftrightarrow 2\cos^2 x=1+\cos 2x \Leftrightarrow \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$.\ \boxed{\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}}.$$

$$\cos 2x=1-2\sin^2 x \Leftrightarrow 2\sin^2 x=1-\cos 2x \Leftrightarrow \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}.$$

$$.\ \boxed{\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}}.$$

$$\tan^2 x=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{\frac{1-\cos 2x}{2}}{\frac{1+\cos 2x}{2}}=\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}\ \boxed{\Leftrightarrow \tan^2 x=\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}}.$$

IX – Transformations trigonométrique :

1°) Rappel :

$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b\ (1)$$
$$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b\ (2)$$
$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a\ (3)$$
$$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\sin b\cos a\ (4)$$

$(1)+(2) \Rightarrow \cos(a+b)+\cos(a-b)=2\cos a\cos b$

$(1)-(2) \Rightarrow \cos(a+b)-\cos(a-b)=-2\sin a\sin b$

$(3)+(4) \Rightarrow \sin(a+b)+\sin(a-b)=2\sin a\cos b$

$(3)-(4) \Rightarrow \sin(a+b)-\sin(a-b)=2\cos a\sin b$

En posant a + b = p et a – b = q on obtient : $\begin{cases} a+b=p \\ a-b=q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{p+q}{2} \\ b=\dfrac{p-q}{2} \end{cases}$ d'où

. $\cos p + \cos q = 2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$.

. $\cos p - \cos q = -2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$.

. $\sin p + \sin q = 2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$.

. $\sin p - \sin q = 2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$.

. $\tan p + \tan q = \dfrac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q} \quad et \quad \tan(p-q) = \dfrac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}$.

Exemple : Résoudre x réel, cos(3x) + cos(x) = 0

Nous savons que : $\cos p + \cos q = 2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$ donc cos(3x) + cos(x) = 0

$$\Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{3x+x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x-x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 2\cos 2x \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \;\; ou \;\; \cos x = 0$$

$\left| \begin{array}{l} 2x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi \\ x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi \end{array} \right. k\in Z \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2} \\ x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi \end{array} \right.$ L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ est :

$$S_{IR} = \left\{ \frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2} \; ; \; \frac{\pi}{2}+k\pi \,/\, k\in Z \right\}$$

X – Équation de la forme : acosx + bsinx = c : (a≠ 0 ; b ≠ 0)

Pour résoudre une telle équation on calcul le réel strictement positif noté $r=\sqrt{a^2+b^2}$. $a\cos x+b\sin x=c \Leftrightarrow \frac{a}{r}\cos x+\frac{b}{r}\sin x=\frac{c}{r}$.

On cherche α un réel tel que : $\begin{cases}\cos\alpha=\frac{a}{r}\\ \sin\alpha=\frac{b}{r}\end{cases}$ l'équation est équivalente à

$\cos x\cos\alpha+\sin x\sin\alpha=\frac{c}{r} \Leftrightarrow \cos(x-\alpha)=\frac{c}{r}$ *, qui est un type d'équation que nous avons déjà étudié.*

Exemple : résoudre x réel, $\cos x+\sqrt{3}\sin x=\sqrt{2}$.

$a=1$; $b=\sqrt{3}$; $c=\sqrt{2}$; $r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$.

Déterminons l'angle α tels que : $\begin{cases}\cos\alpha=\frac{1}{2}\\ \sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases} \Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{3}$

L'équation est équivalente à :

$\cos(x-\alpha)=\frac{c}{r} \Leftrightarrow \cos(x-\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos(x-\frac{\pi}{3})=\cos\frac{\pi}{4}$.

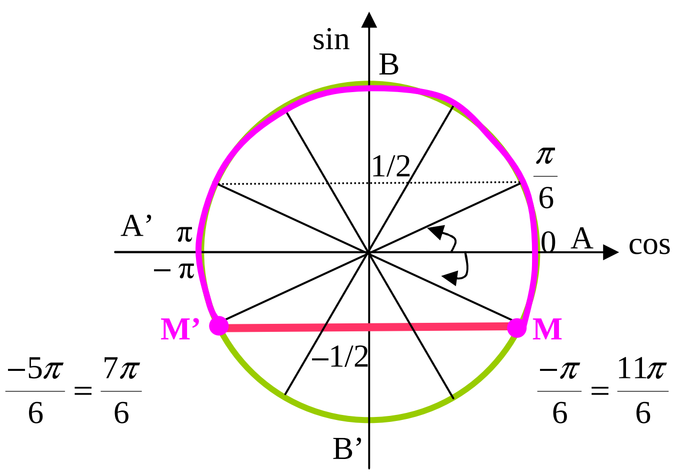
D'où l'ensemble des solutions est $S_{IR}=\left\{\frac{7\pi}{12}+2k\pi;\frac{\pi}{12}+2k\pi\ /\ k\in Z\right\}$.

XI – Inéquations trigonométriques :

1°) Exemple 1 : Résoudre x réel l'inéquation sinx ≥ $-\frac{1}{2}$

a) dans l'intervalle [0 ; 2π] ; b) dans l'intervalle [–π ; π]

Réponse :



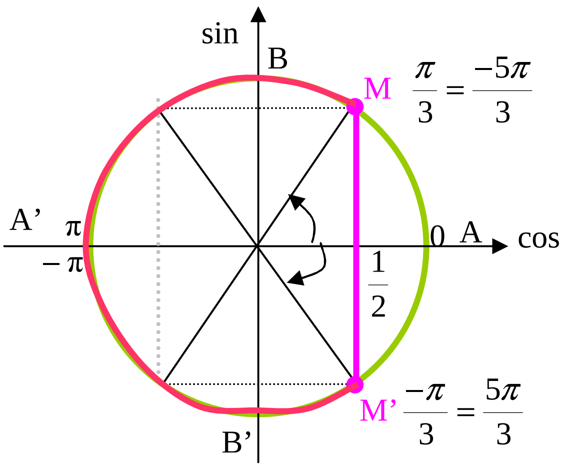
M est l'image de l'angle $(-\frac{\pi}{6})$ *ou* $(\frac{11\pi}{6})$ et M' est l'image de l'angle $(-\frac{5\pi}{6})$ *ou* $(\frac{7\pi}{6})$. Les solutions de l'inéquation sinx ≥ $-\frac{1}{2}$ sont les images des points situés sur l'arc de cercle MM' contenant A et B. (ou les points M du cercle dont les ordonnées y sont supérieures ou égales à la droite d'équation y = $-\frac{1}{2}$)

a) dans l'intervalle [0 ; 2π] $S = \left[0;\frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}\ ;\ 2\pi\right]$

b) dans l'intervalle [–π ; π] $S = \left[-\pi;-\frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{6}\ ;\ \pi\right]$

2°) Exemple 2 : Résoudre x réel l'inéquation : cosx **<** $\frac{1}{2}$

Réponse :



La solution dans [–π ; π] est : $S = \left[-\pi, -\frac{\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{\pi}{3}\ ,\ \pi\right]$

La solution dans ℝ est : $S = \left[-\pi+2k\pi, -\frac{\pi}{3}+2k\pi\right[\cup \left]\frac{\pi}{3}+2k\pi\ ,\ \pi+2k\pi\right]\ k \in Z$

3°) Exemple 3 : soit $f(x) = 2\cos^2 x - 3\cos x - 2$**.**

Etudier le signe de $f(x)$ pour x $\in [0\ ;\ 2\pi]$ et en déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geq 0$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0.$ Posons cosx = x,

L'équation résolvante est : $X^2 - 3X - 2 = 0$.

$\Delta = 9 + 16 = 25 > 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{2}$ et $x_2 = 2$ d'où

$f(x) = (2X + 1)(X - 2) \Leftrightarrow f(x) = (2\cos x + 1)(\cos x - 2) = 0$.

$$\cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{array} \right. \quad ou \qquad \cos x = 2 \ impossible$$

– Pour $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ on a $\begin{cases} k=0 \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} \in [0 ; 2\pi] \\ k=1 \Rightarrow x = \frac{8\pi}{3} \notin [0 ; 2\pi] \\ k=-1 \Rightarrow x = -\frac{4\pi}{3} \notin [0 ; 2\pi] \end{cases}$

– Pour $x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ on a $\begin{cases} k=0 \Rightarrow x = -\frac{2\pi}{3} \notin [0 ; 2\pi] \\ k=1 \Rightarrow x = \frac{4\pi}{3} \in [0 ; 2\pi] \\ k=-1 \Rightarrow x = \frac{10\pi}{3} \notin [0 ; 2\pi] \end{cases}$

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{4\pi}{3}$		2π
cosx – 2		–		–		–	
2 cosx + 1		+	0	–	0	+	
$f(x)$		–	0	+	0	–	

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $S = \left[\frac{2\pi}{3} ; \frac{4\pi}{3} \right]$