ÉQUATIONS – INÉQUATIONS – SYSTÈMES

Site MathsTICE de Adama Traoré Lycée Technique Bamako

Exercice 1 :

Résolvez les équations suivantes

1) $x^2+4x-5=0$; 2) $x^2+x+\frac{1}{4}=0$; 3) $x^2-2\sqrt{2}\,x+3=0$;

4) $\sqrt{3}x^2-\left(1+\sqrt{3}\right)x+1=0$; 5) $13x^2-7x-20=0$; 6) $\left(x^2-5x+4\right)\left(x^2-4x+3\right)=0$;

7) $\frac{x^2-x-1}{x+2}=2x+3$; 8) $(2x+3)(4x-1)=20x+9$; 9) $x+1=\frac{1}{x}$;

10) $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}=\frac{6}{5}$; 11) $\frac{4x-1}{x+3}=\frac{8-5x}{5x-1}$; 12) $\frac{x^2+x+1}{x^2+1}=\frac{x+5}{x+3}$;

13) $x^4-8x^2-9=0$; 14) $x^4-13x^2+36=0$; 15) $3x^4-8x^2-3=0$;

16) $\left(x^2-9\right)^2-4\left(x^2-9\right)+3=0$; 17) $(x+5)^4-6(x+5)^2-7=0$;

18) $\left(\frac{3-4x}{5}\right)^2-2(3-4x)+25=0$; 19) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-\frac{7}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)=2$;

20) $x^2+2+\frac{8}{x^2+2}=6$; 21) $3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-7\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=0$;

22) $\frac{1}{x^2-3x+3}+\frac{2}{x^2-3x+4}=\frac{6}{x^2-3x+5}$; 23) $\frac{3x-4}{x-2}-\frac{6(x-2)}{3x+4}=1$;

24) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=120$; 25) $(x^2-5x+6)^2-(2x^2-5x+1)^2=0$;

26) $\frac{3x^2-9x}{2}-\frac{12}{x^2-3x}=3$; 27) $\frac{4}{x^2}+\frac{x^2}{9}+4\left(\frac{x}{3}-\frac{2}{x}\right)+\frac{8}{3}=0$

Exercice 2 :

Trouver la somme et le produit des racines de chacune des équations suivantes sans les résoudre.

1) $10x^2-11x-12=0$; 2) $(x-2)(3x-4)=13$;

3) $(4x+3)^2-(3x+1)^2=0$; 4) $7+x=(2x-1)(3x-2)$;

5) $x^2=\sqrt{2}\left(3x-\sqrt{2}\right)$; 6) $(5k+2)x^2+7k\,x-8k=0$

Exercice 3 :
Former l'équation du second degré ayant pour racines x_1 et x_2 dans les cas suivants :

1) $x_1 = -3$ et $x_2 = 4$; 2) $x_1 = 1$ et $x_2 = 5$; 3) $x_1 = -2$ et $x_2 = -4$
4) $x_1 = 5$ et $x_2 = -7$; 5) $x_1 = \frac{1}{4}$ et $x_2 = -\frac{3}{4}$; 6) $x_1 = \sqrt{2}$ et $x_2 = \sqrt{3}$
7) $x_1 = \frac{1}{2}$ et $x_2 = 6$; 8) $x_1 = \sqrt{3}$ et $x_2 = 2\sqrt{3}$; 9) $x_1 = \frac{3}{2}$ et $x_2 = -\frac{5}{2}$

Exercice 4 :
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations du second degré dont la somme des racines est S et le produit des racines est P dans les cas suivants :
1) $S = 4$ et $P = 3$; 2) $S = -2$ et $P = -35$; 3) $S = -\frac{1}{2}$ et $P = -\frac{3}{16}$
4) $S = 3\sqrt{2}$ et $P = 4$; 5) $S = 13$ et $P = 36$; 6) $S = 4$ et $P = \frac{15}{4}$

Exercice 5 :

L'aire d'un terrain rectangulaire est de $1971 m^2$. Le périmètre de ce terrain est de 200m. Calculer la longueur L et la largeur ℓ de ce terrain.

Exercice 6 :

Ali a un jardin de forme rectangulaire dont la longueur est le double de la largeur et un champ de forme rectangulaire dont l'aire est le double de l'aire du jardin. Le périmètre du champ est égal à celui du jardin augmenté de 44 mètres. L'aire du champ étant égale à $64 m^2$, calculer les dimensions du jardin puis celles du champ.

Exercice 7 :

Un groupe d'élèves réserve un voyage pour un montant total de 21600F. pour 30 participants de plus il aurait obtenu une réduction de 20F par billet et aurait payé un total de 24000F. Quel est le prix d'un billet et le nombre d'élèves participant à ce voyage ?

Exercice 8 :

1) Développer : $(x-y)(x^2+xy+y^2)$
2) Trouver deux nombres x et y sachant que leur différence est égale à 65 et la différence de leurs cubes est égale à 647855.
3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
a) $(x^2+x)^2 + 2(x^2+x)^2 - 8 = 0$; b) $\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^2 - 5\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^2 + 6 = 0$;

Exercice 9 :

Soit l'équation $x^2 - 2x - 4 = 0$ dont les solutions sont x_1 et x_2. On désigne par S la somme $(x_1 + x_2)$ et par P le produit $(x_1 \times x_2)$.
On pose $A = 3(x_1)^2 + (x_1)^3 + 3(x_2)^2 + (x_2)^3$ et $B = (x_1 - 1)(x_2 - 1)$.
1°) Exprimer A et B en fonction de S et P.
2°) Calculer A et B sans calculer x_1 et x_2.

Exercice 10:

Résolvez les inéquations suivantes

a) $-5x^2 + 3x - 2 \succ 0$; b) $x^2 - 2\sqrt{2}x + 3 \geq 0$; c) $-x^2 + 4x + 5 \succ 0$; d) $\dfrac{x^2 - x - 4}{2x^2 - x - 3} \succ 2$

e) $\dfrac{2x-8}{x^2+5x-6} \leq \dfrac{1}{x+2}$; f) $\dfrac{2x-3}{x^2-3x-10} \leq 0$; g) $\dfrac{x+1}{x} - \dfrac{2}{x+1} \geq \dfrac{8}{x^2+x}$

h) $\left(x^2 + 3x + 5\right)^2 \succ 16$; i) $(3x+2)^2 \leq \left(x^2 + 6x + 2\right)^2$; j) $x^2 - 8x + 16 \succ 0$

k) $(x-5)\left(x^2 - 12x + 24\right) \geq 0$; l) $3x + \dfrac{1}{2x} \leq \dfrac{5}{2}$; m) $\dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x+2} \geq \dfrac{6}{5}$.

Exercice 11:

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations irrationnelles

1) $\sqrt{3x+1} = 3 - x$; 2) $x - \sqrt{2x+1} = 1$; 3) $1 + \sqrt{3x^2 - 2x - 1} = x$; 4) $\sqrt{4x+16} = x + 1$

5) $\sqrt{7x-3} + 3 = 2x$; 6) $\sqrt{x+2} = x - 4$; 7) $\sqrt{-x^2 + 4x + 5} = x - 6$;

8) $\sqrt{x^2+1} - 2x + 1 = 0$; 9) $\sqrt{x^4 - 12x^2 + 36} = x$; 10) $\sqrt{x-3} + \sqrt{x-8} = 5$;

11) $3 - \sqrt{x+1} = \sqrt{x-2}$; 12) $\sqrt{2x + \sqrt{6x^2+1}} = x + 1$; 13) $\sqrt{\sqrt{x+16} - \sqrt{x}} = 2$;

14) $x^2 - 6x - \sqrt{x^2 - 6x - 3} = 5$; 15) $\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-8} = 1$

16) $\sqrt{3x-4} \leq x + 2$; 17) $\sqrt{x^2+11} < 2x - 4$; 18) $x - 5 \leq \sqrt{x-2}$; 19) $\sqrt{x+5} \leq 2x$

20) $\sqrt{-x^2 + 7x} \geq \sqrt{x^2 - 3x + 2}$; 21) $\sqrt{(x+1)^2 + 3} - 3x \succ 2$

Exercice 12 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1) $|x-2| \prec 3$; $|4x-1| \geq 5$; $|6x^2+4x-9| = 1$; $|-3x^2+x-7| \leq 9-2x$

2) $|x^2-2x-15| = 33$; $|2-x|+x=4$; $|3-x|-2|x+1| \leq 7x-3$; $|5-3x|+2|3x+7| \geq 20$

3) $|2x-5|-3|x-8|+|4-x| = 15$; $|2x-5|-3|x-8|+|4-x| \geq 3x+5$

4) Soit $k(x) = 2|-x+3|-|2x-1|+2x+1$

a) Calculer $k(0)$; $k(3)$

b) Écrire $k(x)$ sans le symbole valeur absolue

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $k(x) = x+1$.

Exercice 13 :

On considère l'équation (E_m) : $x^2+2(m-1)x+(m-1)=0$

a°) Déterminer m pour que 1 soit une racine de l'équation (E_m).

En déduire alors l'autre solution.

b°) Déterminer m pour que l'équation admet deux solutions distinctes.

c°) Déterminer m pour que l'équation n'admet pas de solution

d°) Déterminer m pour que l'équation admet une solution double.

e°) Déterminer m pour que l'équation admet deux solutions de signe contraire.

Exercice 14 :

Résoudre et discuter suivant les valeurs de m les équations paramétriques suivantes

1) $(m-3)x^2+(7-4m)x+20=0$

2) $(m-1)x^2-2(m+3)x+m=0$

3) $mx^2-2(m-2)x-10=0$

4) $(m^2-4)x^2-2(m^2+2)x+m^2-1=0$.

Exercice 15 :

Etudier l'existence et le signe des racines des équations paramétriques

1) $(m+1)x^2-2mx+m^2+2m=0$

2) $x^2-(2m+3)x+m^2+5=0$

3) $3x^2-2(5m-1)x+3=0$

4) $(m-5)x^2-(2m+3)x+m+6=0$

5) $(m-4)x^2-(m+3)x+m-4=0$

6) factoriser $f(x) = (m^2-3m)x^2-(2m^2-6m+9)x+m^2-3m$ pour $\left(m \neq 0\ ;\ m \neq 3\ ;\ m \neq \frac{3}{2}\right)$. Trouver une relation entre les racines.

Exercice 16 :

Soit l'équation paramétrique : $x^2-(3k+1)x+8=0$ tels que ses racines x_1 *et* x_2 vérifient la relation $x_1^2+x_2^2=20$. Trouver le paramètre réel k.

Exercice 17 :

Soit l'équation paramétrique : $x^2-(2m+1)x+m-2=0$.
1°) Démontrer que pour tout réel m, cette équation admet deux racines distinctes x_1 *et* x_2.
2°) Démontrer qu'il existe un unique réel m_0 tel que $x_1+x_2=x_1\times x_2$.
3°) Démontrer qu'il existe un unique réel m_1 tel que $x_1-x_2=3$.

Exercice 18:

Soit l'équation paramétrique : $x^2+(m+1)x+m+2=0$ tels que ses racines x_1 *et* x_2 vérifient la relation : $2x_1+3x_2=-13$. Trouver le paramètre réel m.

Exercice 19:
Soit l'équation paramétrique : $(m+2n)x^2-(m+2n)x+m-n=0$
Trouver une relation entre m et n pour que l'équation admette 2 racines égales.

Exercice 20:

Soit l'équation paramétrique : $k\,x^2+(k-1)x+k-2=0$ tels que ses racines x_1 *et* x_2 vérifient la relation : $\frac{2}{x_1+3}+\frac{2}{x_2+3}=\frac{3}{2}$. Trouver le paramètre réel k.

Exercice 21 :

Les racines de l'équation $x^2-5x+p=0$ sont aussi solution de l'équation $x^3+qx+30=0$. Trouver $p+q$.

Exercice 22 :
1) Calculer $x_1^2+\frac{1}{x_1^2}$, si x_1 est une racine de l'équation $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-6\left(x+\frac{1}{x}\right)+9=0$
2) x_1 *et* x_2 sont les racines d'une l'équation $(k+1)x^2-k\,x+k-4=0$ qui vérifient $\frac{6}{x_1}+\frac{6}{x_2}=30$. Trouver le paramètre k.

Exercice 23 :

Soit l'équation paramétrique : $x^2+(k-2)x+k-6=0$. Si que cette équation admet deux racines négatives trouver alors les valeurs possibles de k.

Exercice 24 :

1- Soient p *et* q les racines de l'équation : $2x^2-5x+p^2+q^2=0$.

Calculer le discriminant Δ.

2- a) Résoudre et discuter suivant les valeurs du paramètre réel *m* l'équation paramétrique : $mx^2-(2m-1)x+m+3=0$.

b) Trouver entre les racines x_1 et x_2 de l'équation une relation indépendante de *m*.

Exercice 25 :

I°) Soit l'équation paramétrique (E) : $(m-1)x^2-2(m+1)x+m+2=0$.

1) Etudier suivant les valeurs de m l'existence et le signe des racines x' et x''.
2) Pour quelles valeurs de m, l'équation admet 2 racines de signes contraires
3) Pour quelles valeurs de m, l'équation admet 2 racines positives
4) Etablir entre les racines une relation indépendante du paramètre m.
5) Déterminer m pour que 2 soit une solution de l'équation (E).
6) Trouver l'autre racine.

II°) mêmes question pour (E_1) : $x^2-2(2m+1)x+4m+3=0$.

Exercice 26 :

On considère l'équation paramétrique : $(m+1)x^2-(m+3)x+3-m=0$.

1) Etudier suivant les valeurs de m l'existence et le signe des racines x' et x''.
2) Etablir entre les racines une relation indépendante du paramètre m. En déduire la valeur de x'' quand x' = – 2. vérifier en calculant m, puis x' et x''.
3) Déterminer m de façon que l'on ait : 5x' = – 3x''.

Exercice 27 :

On considère l'équation paramétrique (E_m) : $x^2-2(m+1)x+3m+1=0$.

1) Discuter suivant les valeurs de m, l'existence des racines de (E_m)
2) Etudier le signe des racines x_1 et x_2 de (E_m)
3) Cette équation peut-elle se transformer en une équation du 1er degré à une inconnue *x* ? Pourquoi ?
4) a) Déterminer m de façon que les racines x_1 et x_2 vérifient la relation :

$$(x_1)^2+(x_2)^2=(x_1+2)(x_2+2)-2(x_1+x_2)$$

b) Former l'équation (E)du second degré d'inconnue X admettant pour racines

$$T_1=2x_1-3x_2 \quad et \quad T_2=2x_2-3x_1.$$

c) Pour quelles valeurs de m cette équation (E) admet une racine unique ?

d) Calculer alors la racine unique pour chaque valeur de m trouvée.

Exercice 28 :

1) Former l'équation du second degré dont les racines x_1 et x_2 vérifient le système

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_1x_2 = 3m - 5 \\ x_1x_2 - x_1 - x_2 = -1 \end{cases}$$

2) Etudier suivant les valeurs de m l'existence et le signe des racines de l'équation (E') : $x^2 - (7-3m)x + 6 - 3m = 0$.

3) Déterminer m pour que les racines x_1 *et* x_2 de (E') vérifient la relation :

$$x_1 - 2x_2 = 1.$$

Exercice 29 :

Soit le trinôme $f_m(x) = (m-2)x^2 - 2(m-5)x + m - 15$.

On considère l'équation (E) : $f_m(x) = 0$.

1°) Résoudre (E) pour m = 2.

Dans la suite on supposera m ≠ 2 ; x' et x'' désignent les solutions éventuelles de (E).

2°) Discuter suivant les valeurs de m, l'existence et le signe des racines de (E).

Existe-t-il des valeurs de m telles que (E) admette deux solutions x' et x'' vérifiant :

a) x' et x'' sont distinctes et positives ?
b) x' et x'' sont opposées ?

3°) Etablir une relation indépendante de m entre x' et x''.

Utiliser cette relation pour déterminer x'' et x' = 0.

4°) Déterminer les valeurs de m pour lesquelles on a : 2 < x' < 3 < x''.

5°) Peut-on déterminer m de telle sorte que l'on ait :

a) Pour tout réel x ; $f_m(x) \prec 0$?
b) Pour tout réel x ; $f_m(x) \succ 0$?

6°) Former l'équation du second degré d'inconnue X ayant pour solutions :

$$X' = (x')^2 + (x'')^2 \text{ et } X'' = 2x'x''.$$

En déduire les valeurs m telles que : $(x')^2 + (x'')^2 = 1$.

Exercice 30 :

Comparer 3 aux racines de l'équation paramétrique suivante :

$$(m-1)x^2 - 2(m+1)x + m + 2 = 0.$$

Exercice 31:

Soit l'équation paramétrique (E) : $(12m+1)x^2 - 2(6m-4)x + 3m = 0$.

1) Trouver l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles (E) admet deux solutions distinctes x' et x''.
2) Calculer la somme S = x' + x''.
3) En supposant que x' et x'' vérifient la relation : 4x' + x'' = 1 ; calculer alors x' ; x'' et *m* s'ils existent ?

Exercice 32:

Soit l'équation (E) : $x^4-4x^3+5x^2-4x+1=0$.

1) Vérifier que si x' est une solution de (E) (x'$\neq$ 0), alors son inverse $\frac{1}{x'}$ est aussi solution de (E) .

2) Vérifiez que si x' est une solution de (E) (x'$\neq$ 0), alors le nombre $X'=x'+\frac{1}{x'}$ est une solution de (P) : $X^2-4X+3=0$.

3) En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 33 :

1) Résoudre les systèmes suivants

a) $\begin{cases} x+2y-z=8 \\ 2x+y+2z=-2 \\ x+y+3z=-6 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x-y+z=10 \\ x+3y-4z=0 \\ x+y+z=15 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x+2y+z=8 \\ x-y-z=-4 \\ x+4y-5z=-6 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x^2+y^2=20 \\ \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{5}{2} \end{cases}$

e) $\begin{cases} \frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=0 \\ xy=-1 \end{cases}$; f) $\begin{cases} x+y=5 \\ 2x^2+3xy-y-7x=13 \end{cases}$; g) $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ xy=-6 \end{cases}$; h) $\begin{cases} \frac{x}{5}=\frac{y}{7}=\frac{z}{13} \\ x+2y+3z=174 \end{cases}$

2) Utiliser une transformation d'écriture ou un changement de variable pour résoudre les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} x^3+y^3=152 \\ x^2y-xy+y^2=19 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x^3+y^3=9 \\ \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{5}{2} \end{cases}$; c) $\begin{cases} x^4+y^4=17 \\ xy=2 \end{cases}$; d) $-1\leq\frac{2x-5}{x+1}\leq 1$

e) $\begin{cases} x+y=\frac{9}{2} \\ xy=5 \end{cases}$; f) $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=5 \\ xy=\frac{1}{6} \end{cases}$; g) $\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{5}{2y}=\frac{15}{4} \\ \frac{9}{5x}-\frac{4}{y}=-5 \end{cases}$; h) $\begin{cases} \frac{14}{x-1}-\frac{1}{y-5}=2 \\ \frac{1}{x-1}+\frac{1}{y-5}=2 \end{cases}$

Exercice 34 :

Résoudre et discuter selon les valeurs de m les systèmes

1) $\begin{cases} (1-\sqrt{2})x+my=1-\sqrt{2} \\ -mx+(1+\sqrt{2})y=1+\sqrt{2} \end{cases}$; 2) $\begin{cases} mx-y=2-m \\ 3x+y=-5 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} mx-3y=5 \\ 3x+my=-1 \end{cases}$;

4) $\begin{cases} mx+4y=3m-2 \\ x+my=m-2 \end{cases}$; 5) $\begin{cases} (m-1)x+(3m-2)y=2 \\ (2m-1)x-2y=m+2 \end{cases}$; 8) $\begin{cases} (2m+3)x-y=m+2 \\ x-(2m+3)y=2m+4 \end{cases}$

6) $\begin{cases} (2-m)x-3y=1-m \\ (m+4)x+(m-6)y=2 \end{cases}$; 7) $\begin{cases} (m-1)x+(m+1)y=m-5 \\ 2(m-3)x+(m+3)y=2m-9 \end{cases}$.

Exercice 35 :

On donne le système $\begin{cases} 3x+(m-1)y=6 \\ 2x-3y+4=0 \end{cases}$

1°) Trouver la valeur de m pour laquelle (1 ; 2) est solution du système.

2°) Résoudre le système pour m = 3 puis pour m = $\frac{1}{3}$ dans $\mathbb{R}^2$.