Exercice 1: Calculer les limites suivantes :

1°) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^3+2x^2+5\right)$; 2°) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^5-3x^3+7\right)$; 3°) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-5x^3-3x+4\right)$

4° $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-3x^4+2x+1\right)$; 5°) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-4x^3+7x^2+2\right)$; 6°) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^4-3x^2+7\right)$

7°) $\lim\limits_{x\to2}\left(-3x^2+2x+1\right)$; 8°) $\lim\limits_{x\to-1}\left(3x^2-4x+1\right)$; 9°) $\lim\limits_{x\to0}\left(-x^2-2x+4\right)$

10°) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x+2}{x-5}$; 11°) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-5x+2}{2x-5}$; 12°) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+7}{x^2-5}$; 13°) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+7}{x^4+5}$

14°) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-5x^2+2x-4}{x^2+x+1}$; 15°) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2+2x-4}{x^3-3x+1}$; 16°) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^3+2x-4}{x^2-5x+1}$

17°) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+2x-3}$; 18°) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3+2x^2-5x-6}{2x^2-3x-2}$; 19°) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-x^2-5x-3}{x^3+4x^2+5x+2}$

20°) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+5x-8}{7x^3+2x+1}$; 21°) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-x+1}{2x^2-5}$; 22°) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\left|x^2-9\right|}{x-3}$; 23°) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\left|x^2-3x+2\right|}{x+1}$

24°) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{\sqrt{x^2+7}-4}{x+3}$; 25°) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-7x+5}{x-1}$; 26°) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{3x^2+5x-12}{(x-2)(x+3)}$;

27°) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$; 28°) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$; 29°) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}-1}$; 30°) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x\sqrt{x}-8}{4-x}$;

31°) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-2}{x-2}$; 32°) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)$; 33°) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$

32°) Calculer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$ dans chacun des cas suivants

a) $f(x)=\dfrac{\sqrt{3x^2+1}}{3x-1}$; b) $f(x)=x+2+\sqrt{x^2-3x+1}$; c) $f(x)=\dfrac{\sqrt{3x^2+1}+5x}{3x-1}$

d) $f(x)=\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}$; e) $f(x)=\dfrac{\sqrt{3x^2+1}}{\sqrt{4x^2+3}}$; f) $f(x)=\dfrac{\left(x-\sqrt{x^2-3x+1}\right)}{2x+\sqrt{4x^2+x}}$

33°) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}\right)$; 34°) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$; 35°) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-x}{\sqrt{x}}$

36°) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3+7x-9}{-3x^2+3x+4}$; 37°) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\left(\dfrac{\sin x-\frac{1}{2}}{x-\frac{\pi}{6}}\right)$; 38°) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\dfrac{tgx-1}{x-\frac{\pi}{4}}\right)$

39°) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\dfrac{\frac{1}{\cos^2 x}-2tgx}{\cos(2x)}\right)$; 40°) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{x\cos x}$; 41°) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{(\pi-2x)^2}$

Exercice 2:

Pour chacune des fonctions suivantes donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ puis calculer les limites aux bornes de $\mathcal{D}_f$.

1°) $f(x)=\frac{5x+1}{x-3}$; 2°) $f(x)=\frac{2x+1}{x}$; 3°) $f(x)=\frac{-x+4}{x+2}$; 4°) $f(x)=\frac{3x-2}{-x^2+1}$

5°) $f(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$; 6°) $f(x)=\frac{2x^2+3x-2}{x^2+1}$; 7°) $f(x)=\frac{4-5x}{x^2+2x-3}$

8°) $f(x)=\frac{1}{(x-3)^2}$; 9°) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$; 10°) $f(x)=\frac{2x^2+3x-2}{-x+2}$

11°) $f(x)=\frac{6x-2}{-2x+8}$; 12°) $f(x)=\frac{2x^2+3x-2}{-x^2-x+2}$; 13°) $f(x)=-3x^3+5x^2-7x$

Exercice 3:

Soit la fonction numérique f définie par

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{2x^3+3x^2-3x-2}{3x^2+3x-6}\ ; si \quad x\neq -2 \ \ et \ \ x\neq 1 \\ f(-2)=-1\ ; \quad f(1)=0 \end{cases}$$

La fonction f est-elle continue en x = –2 ; en x = 1 ?

Exercice 4:

Soit la fonction numérique f définie par

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{(2+x)^2-4}{x} \\ f(0)=5 \end{cases}$$; étudier la continuité de f en x = 0.

Exercice 5:

Soit la fonction numérique f définie par

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3+3x^2+3x-7}{x-1} \\ f(1)=12 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} g(x)=\sin x+\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin x} \\ g(0)=\sqrt{2} \end{cases}$$

Etudier la continuité de f en x = 1 ; la continuité de g en x = 0.

Exercice 6:

Soit la fonction numérique f définie par $\begin{cases} f(x) = \dfrac{3-\sqrt{2x+5}}{x-2}, \; si \;\; x \neq 2 \\ f(2) = m \end{cases}$;

Quelle valeur faut-il donner à m pour que f soit continue au point $x = 2$?

Exercice 7:

Soit les deux fonctions numériques $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+13}-4}$

$$g : \begin{cases} x \mapsto g(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+13}-4}, \; si \;\; x \neq 3 \\ g(3) = m \end{cases}$$

Quelle valeur faut-il attribuer à m pour que g soit un prolongement de f par continuité au point $x = 3$?.

Exercice 8:

Soit la fonction numérique f définie par $f(x) = |x-1| + \dfrac{2}{x+1}$

1°) Etudier la continuité de f au point d'abscisse x = 1

2°) Etudier la dérivabilité de f au point d'abscisse x = 1.

Exercice 9:

1°) Soient les fonctions f et g définies respectivement par

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \quad et \quad g(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x+1}}.$$

Vérifier que g est le prolongement de f, par continuité au point x = 0.

2°) Dans chacun des cas suivants, préciser l'ensemble de définition de la fonction f et déterminer s'il existe le prolongement par continuité de cette fonction en x_0.

a) $f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{3x^2-7x+2}$ et $x_0 = 2$; b) $f(x) = \dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ et $x_0 = 0$

c) $f(x) = \dfrac{\tan x}{x}$ et $x_0 = 0$; d) $f(x) = \dfrac{3}{x^2}$ et $x_0 = 0$.

3°) On considère la fonction f définie sur [2 ; + ∞[par $f(x) = \dfrac{2x+\sin x}{x-1}$.

a) Encadrer f par deux fonctions rationnelles ;

b) En déduire la limite de f en – ∞ et en + ∞.