

Devoir 01

Exercice 1

Soit Φ un angle tel que : $0 \leq \Phi < \pi$.

- 1- Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation (E) en z suivant :
 $z^2 - 4(1 + \cos \Phi)z + 8(1 + \cos \Phi) = 0$. On désigne par z_1 et z_2 les solutions de (E)
- 2- Déterminer en fonction de $\frac{\Phi}{2}$, le module et l'argument de chacune des solutions z_1 et z_2
- 3- Trouver Φ pour que le produit $z_1 \times z_2$ soit égal à 8.

Exercice 2

En 1990, l'effectif de la population d'une région donnée est P_0 et, avec un accroissement annuel de 1,2 % devient P_n , n années après.

- 1- Montrer que (P_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison. En déduire l'expression de P_n en fonction de n et de P_0 .
 - 2- En quelle année cette région aura-t-elle une population double de ce qu'elle était en 1990 ?
 En 1990, le nombre d'agriculteurs de cette région, que l'on désigne par A_0 , représente 78% de la population totale. Chaque année ce pourcentage diminue de 0,5% En désignant par A_n le nombre d'agriculteurs au bout de n années après 1990, exprimer alors A_n en fonction de P_n .
 - 3- Trouver l'année à partir de laquelle le nombre d'agriculteurs représente moins de la moitié de la population totale de la région.
- NB : $\ln 2 = 0,6931$; $\ln 1,012 = 0,0119$ où $\ln$ est le logarithme népérien.

PROBLEME

A- On considère les deux équations différentielles (E) et (H) suivantes dans lesquelles y est une fonction numérique de la variable réelle x , e désignant la base du logarithme népérien :

(E) : $y'' - 9y = 6e^{-3x}$

(H) : $y'' - 9y = 0$

- 1- vérifier que la fonction numérique u définie par : $u(x) = -xe^{-3x}$ est une solution particulière de (E).
- 2- Déterminer la solution générale de l'équation (H).
- 3- soit f une fonction numérique deux fois dérivable.

a) Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $(f-u)$ est solution de (H).

b) en déduire toutes les solutions de (E) et donner la solution particulière de (E) vérifiant :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \text{ et } f'(0) = 0.$$

B- On considère la fonction numérique g de la variable réelle x définie par : $g(x) = -\left(x + \frac{1}{3}\right)e^{-3x}$

Soit C la courbe représentative de g dans le plan rapporté au repère orthonormé (O, i, j) d'unité 3cm.

- 1- Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation
- 2- Donner l'équation de la droite (T_1) tangente à C au point d'abscisse $x = -\frac{1}{3}$.
- 3- Donner l'équation de la droite (T_2) tangente à la courbe C au point d'abscisse $x = \frac{1}{3}$.
- 4- Tracer (T_1) ; (T_2) et C .
- 5- Soit t un réel positif. Calculer l'intégrale $I(t) = \int_{-\frac{1}{3}}^t g(x) dx$.
- 6- Déterminer la limite de $I(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$

Devoir 02

Exercice 1

Soit les complexes $z_1 = x - 3i$ et $z_2 = 2 + iy$ où x et y sont des réels.

- 1- Trouver une relation entre x et y pour que $z_1 \times z_2$ soit réel.
- 2- Trouver une relation entre x et y pour que $\frac{z_1}{z_2}$ soit imaginaire pur.
- 3- Déterminer x et y pour que : $2\overline{z_1} + 3z_2 - z_1z_2 = 12i$

Exercice 2

Soit la suite numérique (U_n) définie par :

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{n+1}{2n} \cdot u_n ; n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

- 1- Montrer que la suite numérique $v_n = \frac{u_n}{n}, n \geq 0$ est une suite géométrique dont on donnera l'expression du terme général.
- 2- Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$. la suite (v_n) est-elle convergente ?

PROBLEME

A- Soit la fonction f numérique à variable réelle définie par : $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x(x-1)}$

- 1- Ecrire $f(x)$ sous la forme ci-dessous $f(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x-1}$.
- 2- En déduire l'expression d'une primitive de la fonction f .

B - Soit la fonction $F(x) = x + \ln \left| \frac{x-1}{x} \right|$.

- 1- Déterminer le domaine de définition de F , calculer les limites aux bornes de ce domaine, puis préciser les asymptotes.
- 2- Montrer que la droite $y = x$ est une asymptote oblique.
- 3- Montrer que la courbe de F admet un point d'inflexion que l'on déterminera.
- 4- Faire le tableau de variation de F .
- 5 Tracer la courbe C représentative de la fonction F dans un repère orthonormé (o, i, j) .

On prendra $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$.

Devoir 03

Exercice 1

1- Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le système suivant où (x, y) est le couple inconnu :

$$\begin{cases} \ln x - \ln(y + 6) = -3 \ln 2 \\ e^{5x} \cdot e^{-y} = e^{-6} \end{cases}$$

2- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante

$$|\ln|x|| < 1.$$

Exercice 2

On considère la suite (U_n) définie par :

$$U_0 = \frac{3}{2} ; U_{n+1} = \frac{1}{2} U_n + \frac{n}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

1- Calculer U_1 et U_2 .

2- On pose $V_n = U_n \cdot \sqrt{2} - n$. Montrer que (V_n) est une suite géométrique.

En déduire U_n en fonction de n .

3- Calculer $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$ en fonction de n .

PROBLEME

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 10x^2 e^{-x}$.

1- Donner à 10^{-2} près les valeurs prises par $f(x)$ lorsque x prend les valeurs $-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

2- Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.

3- Calculer les limites de f à $+\infty$ et à $-\infty$.

4- Dresser le tableau de variation de f .

5- Tracer la courbe C de f dans un repère orthonormé (o, i, j) où l'unité de longueur est 2cm. Préciser le maximum relatif de f la tangente au point $x = 0$ et la tangente au point $x = 1$.

6- Donner à 10^{-2} près l'abscisse du point d'intersection autre que 0 de la courbe C avec la parabole d'équation $y = x^2$

Devoir 04

Exercice 1

Soit la suite (U_n) définie par $U_n = \int_{n-1}^n e^{\frac{-1}{2}x} dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

- 2- Calculer U_n en fonction de n .
- 3- Montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.
- 4- On appelle S_n la somme des n premiers termes de la suite (U_n) . Montrer que $S_n = \int_0^n e^{\frac{-1}{2}x} dx$
- 5- Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

Exercice 2

1- Résoudre dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes

- a) $e^{2x} e^{x(x^2-4)} \geq e^{x^2-2}$
- b) $e^{\frac{1}{x+1}} > 1$
- c) $e^{3x-3} - e^{2x-2} + 3e^{x-1} < 0$.

2- a) Linéariser $\sin^3 x$

b) Calculer l'intégrale $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x (1 + \sin x)^2 dx$.

PROBLEME

A – Soit f la fonction définie sur $[0 + \infty[$ par $f(x) = \ln(e^{2x} + 2e^{-x})$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm

1°/ Montrer que pour tout réel x positif $f(x) = 2x + \ln(1 + 2e^{-3x})$.

2°/ a) Etudier la limite de f en $+\infty$.

b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x$ est asymptote à (C) quand x tend vers $+\infty$.

c) Etudier la position de (C) et de (D).

3°/ Etudier les variations de f . Tracer (C) et (D).

B- Soit g la fonction définie sur $] -1 ; +\infty[$ par $g(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x+1}$

1-Déterminer les réels a , b et c tels que $\forall x \in] -1 ; +\infty[$ $g(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$

2-Etudier la fonction g puis construire sa courbe représentative (Γ) dans un repère orthonormé (o, i, j) d'unité 1cm.

3-Calculer, en cm^2 , l'aire du domaine (Δ) limité par la courbe (Γ) de g , son asymptote oblique et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$.

Devoir 05

Exercice1

Soit l'équation (E) : $z \in IC$; $iz^3 + (4-3i)z^2 - (8+3i)z + 5i = 0$.

- 1) Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure z_0 à déterminer.

- 2) Déterminer les nombres complexes a , b et c tels que $1z^3 + (4-3i)z^2 - (8+3i)z + 5i = (z-i)(az^2 + bz + c)$.

- 3) Résoudre l'équation (E).

- 4) Le plan complexe est muni d'un repère (o, u, v) .
Soit les points A, B, C d'affixes respectives i ; $1+2i$ et $2+i$.

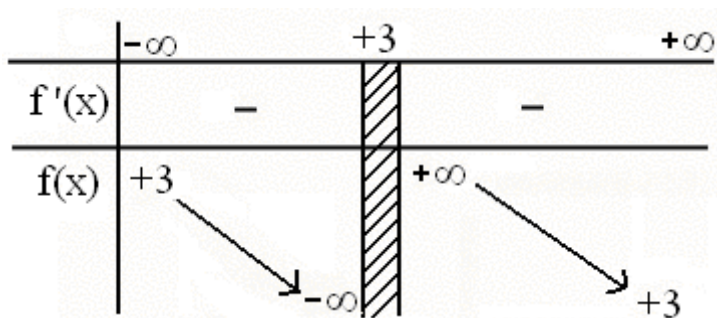
- a) Placer les points A, B, C.

- b) Calculer $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$, $\text{MES}(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$. En déduire la nature du triangle ABC.

- c) Déterminer z l'affixe du point D tel que ABCD soit un parallélogramme. Placer le point D.

Exercise 2

Soit la fonction rationnelle f de courbe (C) définie par $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ où a, b, c et d sont des réels et dont le tableau de variation est le suivant



- a. Donner l'ensemble de définition de f

- b.** A l'aide du tableau ci-dessus justifier les égalités suivantes $\frac{a}{c} = 3$ et $-\frac{d}{c} = 3$

- c. Exprimer $f(x)$ de c b et x puis sachant que $f(0) = 1$, en déduire que $f(x) = \frac{3x-3}{x-3}$.

- d.** Dans toute la suite de l'exercice, on donne $a = 3$, $b = d = -3$ et $c = 1$.

- e. Montrer que $H(3; 3)$ est un centre de symétrie pour (C_f) .

- f.** Construire (Cf) dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . (unité graphique le cm).

PROBLEME

On donne la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto (2x+5)e^{\frac{x+3}{x+1}}$ de courbe (C) dans le plan muni d'un repère (O, I, J) (1cm sur l'axe (OI) 3cm sur l'axe (OJ)).

1) Donner l'ensemble de définition de f puis calculer les limites de f aux bornes de cet ensemble.

2) a-/ Montrer que $f'(x) = \frac{2(x^2-4)}{(x+1)^2} e^{\frac{x+3}{x+1}}$ pour $x \in D_f$.

b-/ Dresser le tableau de variation de f . Construire (Cf.) sur $[-2,5; -1[$.

3) Soit g la restriction de f sur $]-\infty; -2[$.

a) Montrer que l'équation $g(x) = \frac{-1}{2}$; $x \in]-\infty; -2[$ admet une solution unique α .

Vérifier que $-3 \leq \alpha \leq -2,5$.

b) Calculer $f(\frac{-5}{2})$. En déduire les signes de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

4) Soit $\phi :]-\infty; -2[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto (x + \frac{5}{2})e^{\frac{x+3}{x+1}} + \frac{1}{3}x^3 - 4x.$$

a) Calculer $\phi'(x)$ pour $x \in]-\infty; -2[$. En déduire le sens de variation de ϕ .

b) Calculer $\int_{-3}^{-2,5} (x^2 - 4) [\frac{e^{\frac{x+3}{x+1}}}{(x+1)} + 1] dx$ utiliser $\phi'(x)$.

Devoir 06

Exercice 1

On définit les nombres complexes z_n de la manière suivante : $z_0 = 1$ et pour tout n supérieure ou égal à 1, $z_{n+1} = \frac{1}{3}z_n + \frac{2}{3}i$ (i étant le complexe tel que $i^2 = -1$)

- 1) Pour tout entier n , on pose $u_n = z_n - i$
 - a) Calculer u_{n+1} en fonction de u_n . Que pouvez vous en conclure ?
 - b) Exprimer u_n en fonction de n .
- 2)
 - a) Exprimer en fonction de n la partie réelle x_n et la partie imaginaire y_n de u_n
 - c) Calculer les limites des suites (x_n) et (y_n) .

Exercice 2

A- Soit P le polynôme de la variable réelle x défini par

$$P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2$$

- 1- Calculer $P(1)$; en déduire une factorisation de $P(x)$, puis résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x , $P(x) = 0$
- 2- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x :
 - a) $2(\ln x)^3 - 7(\ln x)^2 + 7\ln x - 2 = 0$
 - b) $2e^{3x} - 1e^{2x} + 7e^x - 2 = 0$

B- Déterminer les nombres réels x appartenant à l'intervalle $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ tels que :

$$\ln(\sin x) + \ln(\cos x) = \ln \frac{1}{4}.$$

PROBLEME

I – On considère la fonction numérique f de la variable x définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x + 9e^{-x} - 10.$$

On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O ; I ; J)$ d'unité 1cm.

- 1- Etudier les variations de f .
- 2- Déterminer les intersections de C avec l'axe des abscisses.
- 3- Montrer que la droite d'équation $x = \ln 3$ est un axe de symétrie pour C . Tracer C .

II – Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = 1 + 2 \frac{\ln x}{x}.$$

Soit Γ la courbe représentative de g le plan muni d'un repère orthonormal $(O ; I ; J)$ (unité 1 cm)

- 1 – Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. En déduire les asymptotes à Γ .
- 2- Déterminer le sens de variation de g .
- 3- Montrer que la courbe Γ et la droite d'équation $y = 1$ ont un point commun A dont on déterminera l'abscisse.
- 4- Tracer la courbe Γ .

NB les parties I et II sont indépendantes.

Devoir 07

Exercice 1

Soit f la fonction numérique définie sur $] -3; 5[$ par : $f(x) = \ln\left(\frac{5-x}{3+x}\right)$

- 1- Etudier les variations de f
- 2- On appelle C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O ; I, J)$.
Trouver les coordonnées du point A d'intersection de C avec l'axe des abscisses.
Etablir l'équation de la tangente T à C en A .
- 3- Démontrer que le point A est un centre de symétrie
- 4- de C .
- 5- Construire C et T .

Exercice 2

- 1- Résoudre le système d'inconnues u et v :

$$\begin{cases} 2iu - v = 1 + 2i \\ u + (1+i)v = 2 - 3i \end{cases}$$

On donnera u et v sous forme algébrique.

- 2- Soit $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = \sqrt{3} - i$.

- a) Calculer les modules et arguments de z_1 et z_2
- b) Donner la forme algébrique et la forme trigonométrique du produit $z_1 z_2$.

En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

PROBLEME

On considère la fonction f définie pour tout réel x par : $f(x) = e^x(e^x - 2)$.

On désigne par (C) la courbe de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; i ; j)$.

- 1- Déterminer les limites de f quand $x \rightarrow +\infty$ puis quand $x \rightarrow -\infty$.
- 2- Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
- 3- Ecrire une équation de la tangente D à (C) au point d'abscisse $x = \ln 2$.
- 4- Etudier la limite de $\frac{f(x)}{x}$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Quelle conséquence graphique en déduit-on ? Tracer D et (C) .

- 5- a) Déterminer graphiquement en fonction du réel m le nombre de solutions de l'équation :

$$e^{2x} - 2e^x - m = 0$$

- b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $e^{2x} - e^x - 3 = 0$.

Devoir 08

Exercice 1

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct (O, u, v) .

- g. a) Résoudre l'équation $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$
- b) On considère les nombres complexes $z_1 = \sqrt{3} + i$ et $z_2 = \sqrt{3} - i$ et on désigne par M et N les points d'affixes respectives z_1 et z_2 . Déterminer le module et l'argument de z_1 et z_2 ; placer M et N sur la figure.
- c) Déterminer les affixes des points Q et P images respectives de M et N par la translation de vecteur $\vec{w} = -2\vec{u}$. Placer P et Q sur la figure. Montrer que MNPQ est un carré.
- 2- Soit R le symétrique de P par rapport à O, E l'image de P par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, S l'image de E par l'homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{3}$.

Placer ces points sur la figure.

Calculer les affixes de R et S. Montrer que S appartient au segment $[MN]$.

- 3- On pose $\alpha = 2 - \sqrt{3}$.
- a) Montrer que $1 + \alpha^2 = 4\alpha$ et que $1 - \alpha^2 = 2\alpha\sqrt{3}$.
- b) Exprimer les affixes Z de $\overrightarrow{PR}$ et Z' de $\overrightarrow{PS}$.
- c) Montrer que $|Z| = |Z'|$ et $\frac{Z}{Z'} = e^{\frac{i\pi}{3}}$
- d) Dédurre des questions précédentes la nature du triangle PRS

Exercice 2

1- Soit un entier naturel n .

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x : $\ln(7^n x) = 2n$

2- On considère la suite (V_n) définie sur $i\mathbb{N}$ par : $\ln(7^n V_n) = 2n$.

- a) Calculer V_0 et V_1 .
- b) Démontrer que la suite V_n est géométrique et déterminer sa raison.

3- La suite (V_n) admet-elle une limite ?

4- Déterminer un entier n_0 tel que, pour tout $n > n_0$ $V_n > 100$.

PROBLEME

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - e^{2x-2}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal (O, I, J) (unité 5cm).

1- a) Déterminer la limite de f à $-\infty$

b) Vérifier que, pour tout réel x non nul :

$$f(x) = x \left[1 - 2e^{-2} \left(\frac{e^{2x}}{2x} \right) \right].$$

Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2- Déterminer f' . Étudier le signe de $f'(x)$ et calculer la valeur exacte du maximum de f .

3- Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe (C).

Étudier la position relative de (C) et (D).

4- On note A le point de la courbe (C) d'abscisse 1. Déterminer une équation de la tangente (T) en A à la courbe (C).

5- a) On note I l'intervalle $[0; 0,5]$.

Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans I une unique solution qu'on notera a .

b) Déterminer une valeur approchée de a à 10^{-1} près.

6- Construire la courbe (C), l'asymptote (D) et la tangente (T).

B- On définit dans $\mathbb{R}$ la suite (U_n) par :
$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = e^{2U_n - 2} \end{cases}$$

1- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{2x-2}$

Démontrer que l'équation $f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = x$. En déduire $g(a)$.

a. Démontrer que, pour tout réel $x \in I$, on a : $|g'(x)| \leq \frac{2}{e}$.

b. Démontrer que, pour tout réel x de I, $g(x)$ appartient à I.

c. Utiliser l'inégalité des accroissements finis pour démontrer, pour tout entier naturel n :

$$|U_{n+1} - a| \leq \frac{2}{e} |U_n - a|.$$

5- Démontrer, par récurrence, que $|U_n - a| \leq \left(\frac{2}{e}\right)^n$.

6- En déduire que la suite (U_n) converge et donner sa limite.

7- Déterminer un entier naturel p tel que : $|U_p - a| \leq 10^{-5}$.

Devoir 09

Exercice1

1- Soit la fonction numérique de la variable réelle définie par $f(x) = \ln(e^x - 1)$.

Déterminer la dérivée $f'(x)$ puis calculer l'intégrale $I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x}{e^x - 1} dx$.

2- On pose $K = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{1}{e^x - 1} dx$

Calculer $I - K$. En déduire la valeur de K

Exercice 2

Les suites numériques (U_n) et (V_n) définies par :

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ V_0 = 4 \\ U_{n+1} = \frac{1}{4}(U_n + 3V_n); n \in \mathbb{N} \\ V_{n+1} = \frac{1}{4}(3U_n + V_n) \end{cases}$$

1- Soit la suite $W_n = U_n + V_n$

Montrer que W_n est une suite constante. Donner sa valeur numérique.

3- Soit la suite $X_n = U_n - V_n$.

a) Montrer que la suite X_n est une suite géométrique. Exprimer X_n en fonction de n .

b) Etudier la convergence de X_n .

c) Exprimer U_n et V_n en fonction de n .

PROBLEME

Soit les nombres complexes suivants :

$$z_1 = \sqrt{3} - i; z_2 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i \text{ et } z_3 = -1 + \sqrt{3}i.$$

1- Déterminer le module et l'argument des complexes z_1 ; z_2 et z_3 . En déduire que les points M_1 ; M_2 et M_3 d'affixes respectifs z_1 ; z_2 et z_3 appartiennent à un même cercle que l'on déterminera. Faire la représentation graphique.

2- On pose $z_4 = -2z_1 \left(\frac{z_2}{z_3}\right)^2$

Mettre z_4 sous la forme algébrique. Déterminer les racines carrées de z_4 .

3- On pose $z_5 = -4z_1z_3$.

Déterminer les racines quatrièmes de z_5 . Faire la représentation graphique dans le plan.

4- Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 - 2z + 2 = 0$.

Devoir 10

Exercice 1

Soit : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow 5 + 4e^x - e^{2x}$$

Etudier les variations de f .

En déduire le signe de $f(x)$ sur $[0; \ln 2]$

Calculer $\int_0^{\ln 2} f(x) dx$.

On précisera sa valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près.

Exercice 2

On donne la suite (U_n) définie par : $U_n = 5^n + 3 - n$.

1- Calculer les 5 premiers termes de cette suite.

2- Démontrer qu'elle n'est ni arithmétique ni géométrique.

On pose $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$.

3- a) Soit V_n la suite définie par $V_n = 5^n$.

On pose $S'_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$.

Calculer S'_n en fonction de n .

b) soit $W_n = 3 - n$. On pose $S''_n = W_0 + W_1 + \dots + W_n$.

Calculer S''_n en fonction de n .

c) En déduire S_n en fonction de n .

PROBLEME

On considère la fonction f définie par : $f :]-\infty; 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad x \rightarrow \frac{3}{2}e^{2x} - e^x - 2x - 4$.

On appelle (C) sa courbe dans un repère (O, i, j) orthogonal tel que $\|\vec{i}\| = 4$ et $\|\vec{j}\| = 2$

1- Soit $g(x) = e^x \left(\frac{3}{2}e^x - 1 \right)$. Résoudre l'équation $g(x) = 0$. En déduire le signe de $g(x)$ sur $]-\infty; 1]$.

2- Montrer que (C) admet une asymptote oblique (D). Préciser la position de (C) par rapport à (D).

3- Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = (3e^x + 2)(e^x - 1)$.

Dresser le tableau de variation de f .

4- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution $x_0 \in [-3; 0]$. Donner une valeur approchée de x_0 à l'aide d'une calculatrice.

5- Montrer qu'il existe un seul point A de (C) où la tangente a pour coefficient directeur 2 et que l'abscisse de A est $\ln \frac{4}{3}$.

6- Tracer (C), (D) et la tangente en A.

Devoir 11

Exercice 1

Soit la suite (U_n) définie par $U_1 = \frac{3}{2}$ et pour tout $n \geq 1$ $U_{n+1} = \frac{3+U_n}{2}$.

- 1- Calculer U_2 et U_3 . (U_n) est-elle arithmétique ? est-elle géométrique ?
- 2- Pour tout $n \geq 1$, on pose $V_n = 3 - U_n$; Montrer que (V_n) est une suite géométrique.
Exprimer V_n en fonction de n . En déduire U_n en fonction de n . Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n$.

Exercice 2

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct (O, u, v) .

On désigne par A et B les points d'affixes respectives $-i$ et $2i$.

On note P^* l'ensemble des points de P distincts de A.

Soit $f : P^* \rightarrow P$ qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe Z tel que

$$Z = i \frac{z - 2i}{z + i}.$$

- 1- Soit M_1 le point d'affixe i et M_2 le point d'affixe $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$.

Déterminer $f(M_1)$ et $f(M_2)$.

2- Déterminer le point M tel que $f(M) = O$

Déterminer le point M de P^* tel $f(M) = N$ où N a pour affixe $2-i$.

3- Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que $f(M)$:

- a) a pour affixe un imaginaire pur.
- b) a pour affixe un réel.

PROBLEME

Soit $f :]-\infty; 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = \frac{3}{e} e^{2x} - e^x - 2x - 4$$

On appelle par (C) la courbe de f dans le plan muni d'un repère orthogonal. (Unité 4cm et 2cm).

- 1- Calculer $l = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- 2- Soit $g(x) = e^x (\frac{3}{2} e^x - 1)$. Résoudre l'équation $g(x) = 0$ En déduire le signe de $g(x)$ dans $]-\infty; 1]$.
- 3- Montrer que la droite (D) d'équation $y = -2x - 4$ est une asymptote à (C).
Etudier la position relative de (C) par rapport à (D).
- 4- Calculer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f
- 5- a) justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution $\alpha \in [-3; 0]$
b) Résoudre l'équation $3e^{2x} - e^x - 2 = 2$.
En déduire qu'il existe un point A de (C) où la tangente a pour coefficient directeur 2 et que l'abscisse de A est égale à $\ln \frac{4}{3}$.
- 6- Tracer (C) ; (D) et la tangente en A

Devoir 12

Exercice 1

1-a) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation : $x^2 + 6x + 13 = 0$

b) Déterminer les complexes $z = x + iy$ vérifiant :

$$\begin{cases} z + \bar{z} = -6 \\ z\bar{z} = 13 \end{cases}$$

2-Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ on pose $Z = \frac{5 + 3i\sqrt{3}}{1 - 2i\sqrt{3}}$

a) Exprimer Z sous la forme $a + ib$ où a et b sont des nombres réels.

b) Calculer Z^2 et Z^3 puis Z^{15} . En déduire que Z^{3n} ($n \in \mathbb{N}$) est un réel.

c) Calculer $|Z|$ et $\arg(Z)$.

En déduire la forme trigonométrique de Z

Exercice 2

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + x}{1 - x}$

a) Déterminer a, b, c, d réels tels que l'on ait pour tout $x \neq 1$, $f(x) = ax^2 + bx + c + \frac{d}{1 - x}$

b) Calculer $I = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx$

PROBLEME

a) f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2e^x - x$

On désigne par (C) sa courbe dans un repère orthonormé (O, i, j) .

1- Etudier les variations de f .

2- Montrer que la droite D d'équation $y = -x$ est asymptote à (C) quand x tend vers $-\infty$.

On précisera la position de (C) par rapport à D

3- K est le point d'intersection de (C) avec l'axe des ordonnées. Donner une équation de la droite

Δ tangente à (C) au point K .

4- Construire D , Δ et (C).

5- Calculer l'aire $A(\lambda)$ du domaine ensemble des points M dont les coordonnées (x, y) vérifient :

$$\begin{cases} \lambda \leq x \leq 0 \\ -x \leq y \leq f(x) \end{cases} \quad (\lambda \text{ est un réel négatif donné}).$$

Calculer la limite l de $A(\lambda)$ en $-\infty$

B) g est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x - \ln x$

1- Etudier g et tracer sa courbe représentative dans le repère (O, i, j) .

2- Calculer $\int_{\mu}^1 (g(x) - x) dx$ où μ est un nombre réel donné vérifiant $0 \leq \mu \leq 1$.

Calculer la limite l' de $I(\mu)$ en zéro.

Donner une interprétation géométrique de $I(\mu)$.

Devoir 13

Exercice 1

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$x \rightarrow f(x) = ax^2 + bx + c$ Où a, b et c sont des nombres réels.

Soit (C) sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé (O, i, j).

1- Déterminer les réels a, b, c pour que :

- au point $x_0 = \frac{1}{2}$ f admette un minimum égal à $-\frac{9}{4}$
- au point $x_0 = 1$ la courbe (C) de f admette une tangente de coefficient directeur égale à 1
- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$

2- Dresser le tableau de variation de f.

3- a) Calculer $\int_{-2}^2 |x^2 - x - 2| dx$ et b) $\int_1^2 (\frac{1}{x} + \ln x) dx$.

Exercice 2

1- Déterminer le module et l'argument de

$$Z = \left(\frac{2 + 2i\sqrt{3}}{\sqrt{2} + i\sqrt{2}} \right)^{2005}$$

2- Résoudre dans $\mathbb{R}$ $y'' + -4y' + 4y = 0$ avec les conditions initiales :

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$$

3- Le plan est identifié à $\mathbb{C}$ des complexes muni d'un repère orthonormé (O, i, j).

- a) Démontrer que l'application S de P dans P définie par $Z' = (1 + i)\bar{z} - i$ est une similitude indirecte.
- b) Déterminer le rapport et le point invariant.
- c) Déterminer la première droite invariante (D).
- d) En déduire que S est la composée d'une homothétie dont on déterminera le centre et le rapport et d'une symétrie orthogonale par rapport à (D).

PROBLEME

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x} - 1}$, (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, i, j).

1- a) Déterminer le domaine de définition de f.

b) Etudier les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

c) Etudier le sens de variation de f.

2- Montrer que le point de coordonnées (0 ; 1) est centre de symétrie pour la courbe (C) de f.

3- Calculer le coefficient directeur de la tangente (T) à (C) au point A d'ordonnée 4. En déduire son équation.

4- a) Montrer que la restriction g de f à l'intervalle $]0; +\infty[$ possède une application réciproque notée g^{-1} que l'on déterminera.

b) Etudier le sens de variation de g^{-1} .

c) On désigne par Γ la courbe représentative de g^{-1} dans le repère (O, i, j). Calculer le coefficient directeur de la tangente (T') à Γ au point B d'abscisse 4. Donner l'équation de (T')

5- Représenter (C) et Γ dans le même repère (Γ en pointillé).

6- Calculer l'aire du domaine limité par (Ox) les droites $x = -2$; $x = 1$ et la courbe (C).

Devoir 14

Exercice 1

Soit l'application f définie de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par : $f(z) = z^4 - 2z^3 + 9z^2 - 8z + 20$

- 1- trouver les réels a et b tel que pour tout nombre complexe z on ait :

$$f(z) = (z^2 + 4)(z^2 + az + b).$$

- 2- En déduire une résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $f(z) = 0$.

- 3- Placer dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ les images A, B, C et D des solutions de l'équation précédente. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

- 4- Déterminer le centre et le rayon du cercle circonscrit à ce quadrilatère.

Exercice 2

I - 1- Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes

$$\text{a) } \begin{cases} x + y^2 = 12 \\ \log_3 x + 2 \log_3 y = 3 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 7^x = y^7 \\ 7^{x+2} = y^8 \end{cases}.$$

2- Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

a) $y' - y \ln 2 = 0$.

b) $4y'' - 16y = 0$.

Pour cette dernière équation, donner la solution particulière f qui prend la valeur 1 pour $x = 0$ et telle que $f'(0) = 4$.

II- 1) Vérifier que $E = \frac{e^{2x+1}}{e^{2x-1}} = e^2$

2) Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique définie par : $(\forall n \in \mathbb{N})(U_n = e^{2n-1})$.

a) Calculer U_0, U_1, U_2, U_3 et U_{n+1} .

b) Démontrer que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison

c) Exprimer en fonction de n la somme $S_n = \sum_{i=0}^n u_i = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

3) On considère la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $(\forall n \in \mathbb{N})(V_n = \ln(U_n))$

a) Montrer que (V_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Exprimer la somme $S'_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$ en fonction de n . En déduire $S'_{20} = \sum_{i=0}^{20} V_i$.

PROBLEME

A- Soit la fonction numérique de la variable réelle définie par $f(x) = x - 1 + \ln x$.

1- Etudier les variations de f sur son ensemble de définition D_f .

2- a) Montrer que f est strictement croissante sur D_f et en déduire que pour tout $x > 1$; $f(x) > 0$ (on pourra vérifier que $f(1) = 0$).

b) Montrer que f est une bijection de $]0; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$. en déduire $f^{-1}(0)$.

B- Soit la fonction g numérique à variable réelle définie par $g(x) = \frac{x-1}{x} \ln x$.

1-Calculer $g'(x)$ et en déduire que $g'(x) = \frac{f(x)}{x^2}$.

2-Déduire de ce résultat les variations de g .

3-Etudier le signe de $g(x) - \ln x$ et calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - \ln x)$.

En déduire la position relative de la courbe (C_g) de g par rapport à la courbe (C') de la fonction $\ln$.

C-

1- Calculer $g(1)$; $g(2)$; $g(3)$; $g(e)$; $g(5)$; $\ln 1$; $\ln 2$; $\ln 3$; $\ln e$; $\ln 5$.

2- Tracer dans le même repère orthonormé (O, i, j) les courbes représentatives de g et de la fonction. (unité graphique 2cm).

3- Calculer l'aire A du domaine plan limité par les courbes (C_g) et (C') ; les droites d'équation : $x=1$ et $x=e$.

Devoir 15

Exercice 1

- 1- On considère l'équation dans $\mathbb{C}$; $Z^4 - 6Z^3 + 23Z^2 - 34Z + 26 = 0$
- 2-
 - a) Montrer que, si Z_0 est une solution de cette équation alors son conjugué $\overline{Z_0}$ est solution.
 - b) Résoudre l'équation après avoir vérifié $1+i$ est solution de l'équation.
- 3- Résoudre dans $\mathbb{C}$; les équations suivantes :
 - a) $\left(\frac{Z-2}{Z-4i}\right)^2 - 6\left(\frac{Z-2}{Z-4i}\right) + 13 = 0$
 - b) $Z^2 - (3\cos\phi + \sin\phi) + 2 = 0; \phi \in \mathbb{R}$

Exercice 2

- 1- Calculer les limites suivantes :
 - a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$
 - b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan x}{1 - \cot ax}$
- 2- Soit la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = \frac{2x+10}{\sqrt{5-4x}-5}$
 - a) Déterminer l'ensemble de définition de f .
 - b) f est-elle continue au point $x_0 = -5$?
 - c) Trouver s'il existe un prolongement par continuité de f au point $x_0 = -5$.

PROBLEME

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow \frac{x^3 + 2x^2 + 3x - 2}{x^2 + 3}$$

- 1- a) Calculer $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de f .
b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$; $f'(x) = \frac{(x+1)^2(x^2 - 2x + 9)}{(x^2 + 3)^2}$
- c) Dédire les variations de f et son tableau de variation.
- 2- Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$; $f(x) = x + 2 - \frac{8}{x^2 + 3}$
- 3- Montrer que la droite D d'équation $y = x + 2$ est une asymptote à la courbe représentative C de f dans un repère orthonormé (O, i, j) en $+\infty$ et $-\infty$.
- 4- Etudier la position de C par rapport à D .
- 5- Déterminer une équation de la tangente (T) à C au point $x_0 = 0$
- 6- Résolvez l'équation $f'(x) = 1$. Montrer que (T) est la seule tangente à C parallèle à D .
Déterminer la position de (T) par rapport à C .
- 7- Dans le repère tracer D , (T) et C .

Devoir 16

Exercice 1

A 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : (E) : $y'' + 9y = 0$

2) Déterminer la solution de (E) vérifiant : $y(\frac{\pi}{2}) = 1$ et $y'(\frac{\pi}{2}) = 3$.

3) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos 3x - \sin 3x = 1$ puis placer les points images des solutions trouvées sur le cercle trigonométrique.

B Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{1}{x^3 - 2x^2 + x}$

a) Trouver les nombres réels a , b , et c tels que : $\forall x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}, f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$

b) Calculer l'intégral $\int_2^3 \left(\frac{1}{x^3 - 2x^2 + x} \right) dx$.

Exercice 2

1) $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$. a) Calculer $\sum_{k=1}^n k$ et montrer que :

b) Calculer la somme $S = 11^3 + 12^3 + 13^3 + \dots + 20^3$.

PROBLEME

On considère la fonction numérique de la variable réelle x définie par $f(x) = (x+2)^2 e^{-x}$.

On note C la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$ qui est orthonormé (unité 1cm).

1) a) Quel est l'ensemble de définition D_f de f ?

b) Montrer que pour tout x élément de D_f ,

$$f(x) = \frac{x^2}{e^x} + \frac{4x}{e^x} + \frac{4}{e^x}$$

c) Calculer les limites à $-\infty$ et $+\infty$ de f . Préciser l'asymptote de la courbe C .

d) Etudier les variations de f ; dresser son tableau de variation.

e) Construire avec soin la courbe C .

f) Déterminer l'aire $A(\alpha)$ du domaine limité par la courbe C , la droite (OI) et les droites d'équations $x=2$ et $x=\alpha$ ($\alpha > 2$); en déduire la valeur de $A(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$.

2) On pose $g(x) = f(x) - (x^2 + 4x)e^{-x}$

a) Déterminer l'ensemble de définition de g .

b) Etudier les variations de g .

c) Construire la courbe Γ de g puis en déduire les courbes représentatives Γ_1 et Γ_2

des fonctions respectives $x \rightarrow e^{-x}$ et $x \rightarrow -e^{-x}$ dans un même repère autre que C .

Devoir 17

Exercice 1

Soit l'application f qui, à tout nombre complexe z , associe le nombre complexe

$$f(z) = (-1 + i\sqrt{3})z + 2(\sqrt{3} - 1) + (4 + \sqrt{3})i.$$

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $f(z) = z$.

. Cette équation a une racine unique z_0 que l'on mettra sous la forme $x+iy$ où x et y sont des nombres réels.

2) Calculer $Z_0 = z_0^2$; $\overline{Z_0}$; $\frac{1}{z_0}$; donner leurs formes algébriques.

3) Représenter dans le plan complexe les points d'affixes z_0 ; $\overline{Z_0}$; $\frac{1}{z_0}$.

Exercice 2

Soit la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = 2(1 + \sin^2 x) \cos^2 x$.

1) Linéariser $f(x)$;

2) Calculer à l'aide d'une intégration par parties.

$$A(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-1) f(x) dx.$$

PROBLEME

On considère la fonction f de $\mathbb{R} - \left\{ \frac{3}{2} \right\}$ sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \ln|2x-3| - \frac{2}{3}x + 1$$

le symbole $\ln$ désignant le logarithme népérien ; de base e .

Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, i, j) ; on prendra pour unité 2cm en abscisse, 3cm en ordonnée.

A) 1) a) Montrer que $f(x) = (2x-3) \left[\frac{\ln|2x-3|}{2x-3} - \frac{1}{3} \right]$.

b) Etudier la fonction f : variations limites éventuelles.

2) Soit D la droite d'équation $y = -\frac{2}{3}x + 2$ dans le repère (O, i, j) ; déterminer les coordonnées des points d'intersection A et B de la courbe C et de la droite D.

3) Construire la droite D et la courbe C dans le repère (O, i, j) .

4) Montrer que $f(x)$ s'annule pour une valeur de x comprise entre $\frac{3-e}{2}$ et $\frac{3}{2}$.

B- 1) On pose $g(x) = \left(\frac{-2}{3}x + 2\right) - f(x)$ et $h(x) = \ln|2x - 3|$.

a) Exprimer $g(x)$ en fonction de $h(x)$.

b) on pose $k(x) = x + \frac{3}{2}\ln|2x - 3|$. Déterminer le nombre réel $k'(x)$ sous forme d'une fraction rationnelle.

c) En intégrant par parties, déterminer une fonction primitive de h .

d) En déduire une fonction primitive de g .

3) Soit $A(\lambda)$ l'aire de la partie du plan, ensemble des points de coordonnées (x, y) dans le repère

$$(O, i, j) \text{ définit par : } \begin{cases} \frac{3-e}{2} \leq x \leq \lambda \\ f(x) \leq y \leq \frac{-2}{3}x + 2 \end{cases} \text{ où } \lambda \in \left[\frac{3-e}{2}; \frac{3}{2} \right[.$$

a) Calculer $A(\lambda)$ en fonction de λ .

b) Prouver que $A(\lambda)$ admet une limite quand $\lambda \rightarrow \frac{3}{2}$ par valeurs inférieures et calculer cette limite.

NB : on pourra prendre pour l'ensemble du problème, $\ln 3 = 1,10$; $\ln 5 = 1,61$; $\ln 7 = 1,95$; $e = 2,72$

Devoir 18

Exercice 1

Soit z un nombre complexe distinct de 1, soit Z tel que $Z = \frac{2 + \bar{z}}{1 - z}$

- 1) Déterminer les parties réelles et imaginaires de Z en fonction de celle de z .
- 2) Montrer que l'ensemble des points $M(Z)$ du plan, tels que Z soit réel est une droite privée d'un point.
- 3) Montrer que l'ensemble des points $M(Z)$ du plan tels que Z soit un imaginaire pur ou zéro, est un cercle privé d'un point dont vous donnerez une équation.

Exercice 2

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $U_0 = 4$ et $U_{n+1} = \frac{-1}{3}U_n + 4$ (Pour $n \in \mathbb{N}$)

on pose $n \in \mathbb{N}$; $V_n = U_n - 3$.

- a) Montrer que $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme V_0 .
- b) Calculer V_n et U_n ; les suites V_n et U_n sont-elles convergentes? dans l'affirmative, quelles sont leurs limites?
- c) Calculer S avec $S = V_0 + V_1 + \dots + V_n$.
En déduire Σ avec $\Sigma = U_0 + U_1 + \dots + U_n$.
- d) On pose, $\forall n \in \mathbb{N}, W_n = \ln |V_n|$ Montrer que la suite (W_n) est une suite arithmétique.

PROBLEME

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(x) = (2x-1)e^{\frac{1}{x}}, \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

- 1) a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .
b) En 0, f est-elle continue ? Continue à droite ? Continue à gauche ?
c) En 0, f est-elle dérivable à droite ? dérivable à gauche ?
d) Dresser le tableau de variation de f .
- 2) Soit C la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal (O, i, j) (Unité graphique 2cm)
a) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{\frac{1}{x}} - 1) = 1$. (On pourra poser $u = \frac{1}{x}$)
b) En déduire que la droite d'équation $y = 2x + 1$ est une asymptote à C
c) Déterminer une équation de la tangente à C au point d'abscisse $\frac{1}{2}$. Tracer cette droite.
d) Tracer la courbe C .

- 3) On définit la fonction numérique g de la variable réelle x par :
$$\begin{cases} g(x) = e^{\frac{1}{x} + \ln|2x-1|} \text{ si } x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

a) Exprimer $g(x)$ en fonction de $f(x)$.

b) En déduire le tracé de la courbe représentative de la fonction g

- 4) a) Déterminer le réel a tel que la fonction F définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $F(x) = ax^2 e^{\frac{1}{x}}$ soit une primitive de f .

b) Calculer, en cm^2 , l'aire du domaine plan limité par C et les droites d'équations $y = 0$, $x = \frac{1}{2}$ et $x = 2$. En donner une valeur approchée à 10^{-2} près. (On donne $e = 2,7182818$; $\sqrt{e} = 1,6487213$)

Devoir 19

Exercice 1

- 1) Déterminer sous forme algébrique, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E) : $Z^2 + Z + 1 = 0$.
- 2) On note j la solution de (E) dont la partie imaginaire est positive. vérifier que $j^2 = -j - 1$.
- 3) Vérifier que $j^2 = \bar{j} = \frac{1}{j}$ et que $j^3 = 1$.
- 4) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^3 = (\sqrt{3} - 2i)^3$ (E').

Exercice 2

U et V sont les suites définies par :

$$\left\{ \begin{array}{l} U_1 = 12 \\ U_{n-1} = \frac{U_n + 2V_n}{3} \\ V_1 = 1 \\ V_{n-1} = \frac{U_n + 3V_n}{4} \end{array} \right. \quad n \in \mathbb{N}^*$$

- 1) On pose $W_n = V_n - U_n$ $n \in \mathbb{N}^*$.

Démontrer que la suite W de terme général W_n est géométrique et exprimer W_n en fonction de n.

- 2) Démontrer que la suite U est croissante et que la suite V est décroissante.

- 3) On pose $T_n = 3U_n + 8V_n$ ($n \geq 1$).

Démontrer que la suite T de terme général T_n est constante.

PROBLEME

Les parties A et B sont indépendantes.

A – On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \text{pour } x \in]-\infty, 0], f(x) = xe^x \\ \text{pour } x \in]0; +\infty[; f(x) = x \ln x \end{cases}$$

- 1) Etudier le sens de variation de f .
- 2) Montrer que :
 - a) la courbe de f admet deux tangentes parallèles à l'axe $(X'OX)$.
 - b) Montrer qu'elle admet deux demi tangentes en un de ses points dont on donnera les coordonnées, ainsi que les équations des tangentes.

B - On considère la fonction f de $\mathbb{R} - \{\ln 2\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = x + \frac{e^x}{2(e^x - 2)}.$$

On désigne par C la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, i, j) .

- 1) Démontrer que la droite d'équation $x = \ln 2$ est une asymptote verticale à la courbe C .
- 2) a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.
b) Justifier que la droite D_1 d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe en $-\infty$.
- 3) a) Démontrer que pour tout x distinct de $\ln 2$ $f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{1}{e^x - 2}$
b) En déduire la limite de f en $+\infty$ et justifier que la droite D_2 d'équation $y = x + \frac{1}{2}$ est une asymptote à la courbe C en $+\infty$.
c) Démontrer que pour tout x distinct de $\ln 2$
$$f'(x) = \frac{(e^x - 1)(e^x - 4)}{(e^x - 2)^2}.$$
- 4) En déduire les variations de f .
- 5) a) Représenter graphiquement la courbe C .
- b) Etudier graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m , l'intersection de C avec la droite d'équation $y = x + m$.
c) Retrouver algébriquement ces résultats.

Devoir 20

Exercice 1

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct (O, i, j) d'unité graphique 2cm.

Soient A, B et C les points d'affixes respectives $Z_A = \sqrt{3} + i$; $Z_B = -1 - i\sqrt{3}$; $Z_C = -2$

1- a) Mettre Z_A et Z_B sous forme trigonométrique.

b Placer le point C et construire les points A et B .

a) Déterminer la nature du triangle ABC

2- On pose $a = \frac{Z_A}{Z_B}$

a) Ecrire a sous forme trigonométrique

b) On considère l'application f du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe Z

associe le point M' d'affixe Z' tel que $Z' = Z e^{\frac{5i\pi}{6}}$.

Caractériser géométriquement l'application f.

3- a) Déterminer les images des points A et B par f.

b) En déduire l'image de (AB) par f.

Exercice 2

On considère la fonction numérique à variable réelle f définie par :

$$f(x) = 2 \sin x + \cos 2x$$

Soit C sa représentation graphique dans un repère orthonormal (O, i, j)

1) a) Exprimer en fonction de x $f(x + 2\pi)$; $f(x + \pi)$; $f(\pi - x)$ et $f(-\pi - x)$

b) Quelles sont alors les conséquences graphiques ?

2) Calculer $f'(x)$ étudier son signe sur $[-\pi; \pi]$; En déduire les variations de f sur $[-\pi; \pi]$.

3) a) justifier que f s'annule deux fois sur $[-\pi; \pi]$.

b) Résoudre alors $f(x) = 0$ sur $[-\pi; \pi]$

c) Résoudre l'équation $f(x) = 1$

4) Représenter la partie de C correspondant à $[-\pi; \pi]$.

Indiquer comment on peut compléter le graphe pour obtenir C

PROBLEME

Le repère (O, I, J) est orthonormé soit la fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = x - 1 + \frac{1}{x}, \text{ si } x \leq 1 \\ f(x) = 1 - (\ln x)^2, \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

1)-a) Démontrer que f est continue et dérivable en 1.

b) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et préciser les branches infinies de la courbe C représentative de f.

c) Etudier les variations de f. Démontrer que le point d'abscisse e est un point d'inflexion de C.

d) Tracer C.

2)- Soit h la restriction de f à l'intervalle $]1; +\infty[$.

a) Démontrer que h réalise une bijection de $]1; +\infty[$ vers un intervalle que l'on précisera.

b) En déduire que h admet une fonction réciproque h^{-1} dont on précisera le sens de variation.

c) Tracer la courbe représentative de h^{-1} .

Devoir 21

Exercice 1

1) Résoudre dans IR

a) $10^{6x} - 10^{3x} - 2 = 0$; b) $-e^{2x} + e^x + 6 = 0$; c) $4^{3+x} \geq 3^{5x}$; d) $(\frac{1}{2})^{2x-1} \leq (\frac{1}{2})^x$

2) a et b sont deux réels strictement positifs

Comparer $\frac{\ln(a) + \ln(b)}{2}$ et $\frac{\ln(a+b)}{2}$

Exercice 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité 1cm.

1) a) a et b sont deux nombres complexes factoriser $a^4 - b^4$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z \in \mathbb{C} \quad (z-2)^4 = (z+1-i)^4$

2) On considère les points A (+2), B (-1+i), C (-i) et D (1+2i).

a) Placer ces points dans le repère (O, I, J).

b) Montrer que ADBC est un carré.

3) A tout point M du plan d'affixe $z = x + iy$ distinct de C on associe le complexe Z défini par

$$Z = \frac{z-1-2i}{z+i}$$

a) Exprimer $\text{Re}(Z)$ et $\text{Im}(Z)$ en fonction de x et y

b) Caractériser et représenter dans le plan :

* l'ensemble (E_1) des points M tels que Z soit un réel

* l'ensemble (E_2) des points M tels que $|Z| = 1$.

PROBLEME

On considère la fonction f définie par : pour tout x appartenant à l'intervalle $]0, +\infty[$

$$f(x) = x^2 + 2 - 2 \ln x$$

a) Etudier les variations de f.

b) En déduire pour tout x de $]0, +\infty[$ $f(x) > 0$.

On considère maintenant la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x + \frac{2 \ln x}{x}$.

On appelle C la courbe représentative de g dans le plan rapporté au repère orthonormé (O, I, J). (on prendra pour unité 3cm).

1) Calculer les limites aux bornes de son ensemble de définition D_g .

2)- a) Calculer $g'(x)$ pour tout x élément de D_g .

b) Montrer que pour tout x de D_g ; $g'(x) = \frac{f(x)}{x^2}$

3)-Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation

4)a) Montrer que la droite D d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à la courbe C.

b) Etudier la position de C par rapport à D.

5) a) Déterminer une équation de la tangente T à C au point A d'abscisse 1.

b) On admet que la courbe C est entièrement au dessous de T.

Déterminer les coordonnées du point d'intersection M de T avec l'axe (OI).

c) Déduire de la question 5)b) et sans calcul, le signe de $g(\frac{2}{3})$.

d) Montrer qu'il existe un réel α unique, appartenant à l'intervalle $[\frac{2}{3}; 1]$ tel que $g(\alpha) = 0$.

Devoir 22

Exercice1

Dans cet exercice les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

Une urne contient 15 boules indiscernables au toucher dont une rouge, cinq blanches, neuf rouges.

On tire simultanément au hasard trois boules de l'urne.

1) Calculer la probabilité des évènements suivants.

E « Parmi les 3 boules du tirage figurent la noire et au moins une rouge »

F « le tirage est tricolore ».

2) Calculer la probabilité pour que le tirage soit tricolore ou monocolore.

Exercice 2

1)- a) Résoudre l'équation différentielle : $y'' - 3y' + 2y = 0$ (E)

b) Déterminer la solution de (E) dont la courbe passe par A ($\ln 2$; 0) et admet en ce point une tangente de coefficient directeur -4 .

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $z^4 + 4z^2 + 3 = 0$.

PROBLEME

I) Soit f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = (e^x - 1)^2$ et C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé ,unité 2cm .

1) Etudier les variations de f .

2) a) Calculer le point d'intersection de C et de son asymptote.

b) Calculer les coordonnées du point I de C dont l'abscisse x_0 vérifie $f''(x_0) = 0$.

c) Donner l'équation de la tangente T à C en I. Étudier la position de C par rapport à T .

On pourra considérer l'application φ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $\varphi(x) = 2f(x) + x + \frac{2\ln 2 - 1}{2}$.

Calculer $\varphi(x_0)$ et montrer que pour $x \neq x_0$ $\varphi'(x)$ est de signe constant.

3) Construire C et ses tangentes en A et I.

4) Calculer en cm^2 , l'aire A du domaine limité par C , l'asymptote horizontale et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \ln 2$.

II) Montrer que l'application g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x)$ admet une fonction réciproque g^{-1} . Préciser l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de g^{-1} et montrer que :

$\forall x \in \mathcal{D} : g^{-1}(x) = \ln(1 - \sqrt{x})$.

Devoir 23

Exercice 1

- 1) f est la fonction définie sur $I = \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ par :

$$f(x) = \tan^2 x - \sin^2 x$$

Démontrer que pour tout x de I , $f(x) = \tan^2 x \sin^2 x$

- 2) F est la fonction définie sur I par : $F(x) = \frac{1}{4}(4 \tan x + \sin 2x - 6x)$.

Démontrer que F est une primitive de f sur I .

- 3) Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \sin^2 x dx$.

Exercice 2

- 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z , $4z^2 + 8z + 29 = 0$.
- 2) Représenter dans le plan complexe les images A et B des solutions de l'équation précédente, ainsi que le point C d'affixe $2 - \frac{3}{2}i$.
- 3) Démontrer que le triangle ABC est isocèle.

PROBLEME

A- On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x, & \text{si } x > 0 \\ x - 1 + e^x, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

On désigne par C la courbe représentative de f dans un plan affine rapporté à un repère orthonormé (O, i, j) . On prendra 2cm comme unité de longueur.

- 1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .
- 2) La fonction est-elle continue au point $x = 0$?
- 3) Etudier la dérivabilité de f en 0.
- 4) En déduire que la courbe C admet au point 0 une demi-tangente à gauche dont on donnera l'équation.
- 5) Calculer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition et étudier les variations de f .
- 6) Montrer que la droite d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe C .
- 7) Tracer la courbe C , la droite D et la demi tangente à gauche à C .
- 8) Déterminer les abscisses des points d'intersection de C avec l'axe des abscisses. Soit A le point d'intersection dont l'abscisse est strictement positive. Ecrire l'équation de la tangente (Δ) à la courbe C au point A . Déterminer les coordonnées du point B , intersection de (Δ) avec l'axe des ordonnées.

B- Soit λ un réel strictement positif, calculer en intégrant par parties $I(\lambda) = \int_{\lambda}^e x \ln x dx$.

Exprimer en cm^2 l'aire de la portion du plan limitée par C , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$ (on donnera une valeur approchée du résultat à 10^{-3} près).

C- Soit g la restriction de f à $J = [1; +\infty[$. Montrer que g est une bijection de J sur un intervalle K que l'on déterminera. On note g^{-1} la bijection réciproque de g .

Tracer dans le repère précédent la courbe Γ représentative de g^{-1} .

NB on ne demande pas d'explicitier g^{-1}

Devoir 24

Exercice 1

a) A l'aide d'une intégration par parties calculer : $I_1 = \int_1^2 \ln x \, dx$

b) Calculer de même $I_2 = \int_1^2 (\ln x)^2 \, dx$

c) Soit n un entier naturel non nul. on pose : $I_n = \int_1^2 (\ln x)^n \, dx$

Trouver une relation indépendante entre I_n et I_{n-1} ; En déduire I_3 et I_4 .

Exercice 2

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe distinct de -1. Soit $Z = \frac{2iz - i}{z + 1}$ (x et y sont des réels).

- 1) Calculer $\bar{Z}$; $\operatorname{Re}(Z)$; $\operatorname{Im}(Z)$; $|Z|$, en fonction de x et y .
- 2) Déterminer l'ensemble E_1 des points M d'affixes Z tels que $|Z|=1$.
- 3) Déterminer l'ensemble E_2 des points M d'affixe Z tel que Z soit imaginaire pur.
- 4) Déterminer les points d'intersection de E_1 et E_2 .

PROBLEME

Soit f l'application de $\mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ dans $\mathbb{R}$ définie de la façon suivante :

Si $x \in]-\infty; 0[$ $f(x) = \ln(1-x)$

Si $x \in]0; +\infty[$ $f(x) = x + b + \frac{2}{2x-1}, b \in \mathbb{R}$

- 1) Déterminer le réel b de sorte que f soit continue au point $x = 0$.
- 2) Dans toute la suite du problème on prend $b = 2$.
Etudier les limites de f lorsque x tend vers $+\infty$ et vers $-\infty$.
- 3) Déterminer la fonction f' dérivée de f sur chacun des intervalles $]-\infty; 0[$; $]0; \frac{1}{2}[$; $]\frac{1}{2}; +\infty[$.

En utilisant la définition du nombre dérivé d'une fonction en un point x_0 , étudier la dérivabilité de f au point $x = 0$.

- 4) On désigne par C la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, i, j) (unité 2cm), montrer que la droite Δ d'équation $y = x + 2$ est asymptote à la courbe C . construire C .
- 5) Calculer l'aire $A(\lambda)$ de la portion du plan limité par la courbe C la droite Δ et les droites d'équations

$$x = \lambda \text{ et } x = \frac{e+1}{2}, \left(\lambda > \frac{e+1}{2} \right).$$

Déterminer λ de façon que $A(\lambda) = 4 \text{ cm}^2$.

- 6) Soit g la restriction de f à l'intervalle $]-\infty, 0[$.
 - a) Montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}_-$ sur $\mathbb{R}_+$.
 - b) Déterminer la bijection réciproque g^{-1} .
 - c) Construire la courbe Γ de g^{-1} dans le repère (O, i, j) .

Devoir 25

Exercice 1

On considère quatre équations où x est l'inconnue réelle :

(E1) : $(x-1)(x-4) = 0$

(E2) : $(e^x - 1)(e^x - 4) = 0$

(E3) : $\ln[(x-1)(x-4)] = \ln(-3x+7)$

(E4) : $\ln(x-1) + \ln(x-4) = \ln(-3x+7)$

- 1) Résoudre l'équation (E1).
- 2) En déduire les solutions de chacune des équations (E2) ; (E3) ; (E4).

Exercice 2

On définit deux suites de nombres réels u_n et v_n , par les conditions suivantes :

$u_0 = 9$ et, pour tout n entier, $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$; $v_n = \ln(u_n)$

- 1- a) donner les valeurs de $u_1; u_2; u_3$
- b) Exprimer $v_0; v_1; v_2, v_3$ en fonction de $\ln 3$.
- 2) a) Montrer que la suite v est géométrique dont on déterminera la raison.
- b) Calculer v_n en fonction de n . Quelle est la limite de v_n ?
- 3) a) Exprimer u_n en fonction de n .
- b) Donner la limite de u lorsque n tend vers l'infini.

On pose $p_n = u_0 \cdot u_1 \cdot \dots \cdot u_n$ Quel est le comportement de p_n à l'infini ?

PROBLEME

I- Résoudre dans l'équation : $\ln x < \frac{1}{3}$

II – Soit f la fonction définie et dérivable sur $\left[\frac{1}{e}; +\infty\right[$

Telle que $f(x) = -x^3 \ln x$. On appelle C sa courbe représentative.

- 1- Calculer la dérivée de f sur $\left[\frac{1}{e}; +\infty\right[$.
- 2- a) Calculer la limite de f en $+\infty$ et la valeur exacte de $f\left(\frac{1}{e}\right)$.
- b) Etudier le signe de la dérivée. Dresser le tableau de variation de f . On donnera la valeur de l'extremum.
- 3) Donner l'équation de la tangente D à la courbe au point A d'abscisse 1.

4) Etudier le signe de $f(x)$ sur $\left[\frac{1}{e}; +\infty\right[$.

5 Représenter graphiquement sur $\left[\frac{1}{e}; 1\right]$ la fonction f , le point A et la droite D .

unité graphique 10cm pour les abscisses et 50cm pour les ordonnées.

II On définit l'intégrale I par $I(x) = \int_x^1 f(t)dt$; pour $x \in \left[\frac{1}{e}; 1\right]$ et la fonction g : $g(x) = x^4 \ln x - \frac{x^4}{4}$

1 -Que vaut $I(1)$?

2-Calculer la dérivée de g . En déduire la valeur exacte de $I\left(\frac{1}{2}\right)$.

Devoir 26

Exercice 1

- 1- Déterminer les réels a et b pour que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{ax+b}{x^2+x+1}$ soit une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x^2+2x}{(x^2+x+1)^2}$.
- 2- En déduire $\int_0^2 \frac{x^2+2x}{(x^2+x+1)^2} dx$.

Exercice 2

On donne l'équation (E) : $x^3 - 3x + 2 = 0$.

- 1- Vérifier que 1 est une solution de (E).
- 2- Trouver les réels a et b tels que $x^3 - 3x + 2 = (x-1)(x^2 + ax + b)$.
- 3- Résoudre dans $\mathbb{R}$:
 - a) l'équation (E).
 - b) l'équation $(\ln x)^3 - 3(\ln x) + 2 = 0$
 - c) l'inéquation $(\ln x)^3 - 3(\ln x) + 2 < 0$.

PROBLEME

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x^2 + 2 - 2 \ln x$$

- 1- a) Etudier les variations de f
- b) En déduire le signe de $f(x)$ sur $]0; +\infty[$
- 2 On donne la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x + \frac{2 \ln x}{x}$$

et C sa courbe représentative

- a) Calculer $g'(x)$ sur $]0; +\infty[$
- b) Montrer que $g'(x) = \frac{f(x)}{x^2}$ sur $]0; +\infty[$.
- 3) Etudier et représenter g .
- 4) Calculer l'aire du domaine limité par C ; l'asymptote oblique et les droites d'équations $x = 0$; $x = e$.

Devoir 27

Exercice1 :

1) Soit le polynôme h de la variable réelle x défini par : $h(x) = 3x^3 - 8x^2 - x + 10$.

a) Calculer $h(2)$. En déduire la résolution de l'équation $x \in \mathbb{R} : h(x) = 0$.

b) Déduire de la question a) les solutions dans $\mathbb{R}$ des équations suivantes :

$$* x \in \mathbb{R}^* : 3(\ln x)^2 - 8(\ln x) = \frac{\ln x - 10}{\ln x} ; \quad * x \in \mathbb{R} : 3 - 8e^{-x} - e^{-2x} + 10e^{-3x} = 0.$$

3) Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ \ln x + \ln y = \ln 3 \end{cases} ; \quad \begin{cases} \ln x + \ln y = 1 \\ x + y = e \end{cases} ; \quad \begin{cases} \ln x - 2 \ln y = \ln 2 \\ \frac{e^x}{e^5} = \left(\frac{1}{e^y}\right)^3 \end{cases}.$$

Exercice2 :

1) Soit $p(z) = z^3 - 2 - 11i$.

a) Déterminer les racines cubiques de l'unité.

b) Calculer le complexe $u = (2 + i)^3$.

c) En déduire les solutions de l'équation $z \in \mathbb{C} ; p(z) = 0$ puis placer les points images des solutions dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé.

2) $(U_n) (n \in \mathbb{N}^*)$ est la suite définie par $U_5 = \frac{16}{3}$ et $U_7 = \frac{19}{3}$.

a) Calculer U_0 et q puis exprimer U_n en fonction de n .

b) V_n est une suite géométrique vérifiant la raison $q = \frac{1}{4}$ et $V_3 = \frac{1}{8}$.

Calculer V_0 , exprimer V_n en fonction de n puis en déduire $V_{20} + V_{21} + V_{22} + V_{23} + V_{24}$.

3) Soit $f(x) = \frac{x^4 - 6x^2 + 1}{x^3 - x}$.

a) vérifier que $f(x) = x + \frac{1}{x} - \frac{3}{x-1} - \frac{3}{x+1}$.

c) En déduire une primitive de f qui s'annule en 2.

PROBLEME

On considère la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{x^2 - 1}{2x}$.

C désigne la courbe représentative de f dans un repère orthonormal d'unité graphique 2cm.

A) On introduit la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = x^2 + 3 - 2 \ln x$.

- 1) Etudier les variations de g et montrer que g admet un minimum dont on précisera la valeur.
- 2) En déduire le signe de g(x) pour tout $x > 0$.

B) Etude de f .

- 1) Montrer que, pour tout x de $]0;+\infty[$ $f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$. Calculer les limites de f en 0 puis en $+\infty$.

Interpréter graphiquement les résultats.

- 2) Soit la droite' D d'équation $y = \frac{1}{2}x$. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \frac{1}{2}x \right]$.

Quelle est la conséquence graphique ?.

- 3) Etudier la position relative de C et D.
- 4) Déterminer le point d'intersection A de C avec D.
- 5) Tracer C et D.
- 6) Calculer f (1) puis en déduire le signe de f(x) sur $]0;+\infty[$.
- 7) Des questions précédentes en déduire que pour tout $x > 1$ $\frac{\ln x}{x} > \frac{1-x^2}{2x}$.

Devoir 28

Exercice 1

1 – Soit un entier naturel n

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x :

$$\ln(7^n x) = 2n$$

2- On considère la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\ln(7^n V_n) = 2n$.

a) Calculer V_0 et V_1 .

b) Démontrer que la suite (V_n) est géométrique et déterminer sa raison.

3 La suite (V_n) admet-elle une limite ?

4 Déterminer un entier n_0 tel que, pour tout $n > n_0$, $V_n > 100$.

Exercice 2

a) Développer $(1 + \sqrt{3})^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 + (1 + \sqrt{3})z + 2 + \sqrt{3} = 0$$

c) On note A et B les images dans le plan complexe (O, e_1 , e_2) des solutions de l'équation.

Déterminer la nature du triangle OAB.

PROBLEME

On considère la fonction g $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = 1 - e^{2x} - 2e^{2x}$$

1) Démontrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1$. Calculer $g(0)$

2) Etudier le sens de variation de g et le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

3) a) Calculer $\int_0^x 2e^{2t} dt$ à l'aide d'une intégration par parties.

b) En déduire la primitive de la fonction g qui prend la valeur 3 en 0.

4) On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = x + 3 - xe^{2x}.$$

C est sa courbe représentative dans un repère orthonormal (O, i , j). $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2$.

a) Etudier les variations de f .

b) Démontrer que C admet pour asymptote à $-\infty$ la droite D d'équation $y = x + 3$. Etudier la position de C par rapport à D.

c) Démontrer que C coupe l'axe des abscisses en deux points A et B.

5) Tracer C et D.

6) α est un réel négatif, exprimer en cm^2 en fonction de α , l'aire $A(\alpha)$ de la partie limitée par C et D l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \alpha$.

7) Calculer $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} A(\alpha)$.

Exercice 1

- a) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système :
$$\begin{cases} \ln y = \ln x + 2 \\ xy = 9e^2 \end{cases}$$
- b) $e^x - 2e^{-x} = 3$
- c) Calculer $\int_0^x \frac{t}{(3t^2 + 1)^3} dt$; $\int_0^x t\sqrt{t^2 + 1} dt$

Exercice 2

A- Soit $P(x) = 4x^3 - 4x^2 - x + 1$

a) Factoriser $P(x)$ et résoudre $P(x) = 0$

b) En déduire les solutions dans $]-\pi; \pi]$ de l'équation : $4\sin^3 x - 4\sin^2 x - \sin x + 1 = 0$

c) Linéariser $4\sin^3 x - 4\sin^2 x - \sin x + 1$.

En déduire en utilisant les questions précédentes, que :

$$-\sin \frac{5\pi}{2} + 2 \cos \frac{5\pi}{3} + 2 \sin \frac{5\pi}{6} - 1 = 0$$

B- Le code d'ouverture d'un coffre est composé de cinq chiffres à taper dans un certain ordre sur un clavier à neuf numéros (de 1 à 9).

a) On suppose qu'un numéro peut être répété plusieurs fois.

Dénombrer les codes comportant :

- 1) au moins un numéro impair ;
- 2) exactement deux numéros 7.

b) on suppose que les cinq chiffres sont tous distincts. Dénombrer :

- 1) tous les codes possibles
- 2) les codes dont le premier chiffre est impair.

PROBLEME :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x - x - 4.$$

On note C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal (O, i, j) .

- 1) Déterminer la limite de f en $-\infty$
- 2) Etudier le comportement de f en $-\infty$ (On pourra factoriser $f(x)$ par e^x)
- 3) a) justifier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de $f'(x)$.
b) Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$.
- 4) Dresser le tableau complet de variation de f .
- 5) a) Montrer que la droite D d'équation $y = -x - 4$ est asymptote à la courbe C en $-\infty$.
b) Etudier la position de C par rapport à D
- 6) Tracer la droite D , puis la courbe C .

Devoir 30

Exercice 1

Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 9}{(-x + 2)^2}$$

- 1) Trouver D_f l'ensemble de définition de f
- 2) Montrer que pour tout $x \in D_f$, il existe trois réels a, b, c tels que , $f(x) = a + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{(x-2)^2}$
- 3) En déduire une primitive de f sur D_f puis sur $]2; +\infty[$.

Exercice 2

- 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation :
 $\ln(4x+3) + \ln(x-1) - \ln(3x^2-1) = 0$
- 2) Vérifier que le réel e est solution de l'équation :
 $x \in \mathbb{R}; x^3 - (e-1)x^2 + (e-2)x + 2e = 0$

Achever la résolution de cette équation dans $\mathbb{R}$.

- 3) Déduire de la question précédente la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation :
 $(\log x)^3 - (e+1)(\log x)^2 + (e-2)\log x + 2e = 0$.

PROBLEME

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = 2(x-1-\ln x) \text{ Où } \ln \text{ désigne la fonction logarithme népérien.}$$

- 1) Etudier les variations de f (en précisant les limites aux bornes de l'ensemble de définition).
- 2) Tracer la courbe de f dans un repère orthonormé (O, i, j) . (unité 2cm).
On précisera sur le dessin en marquant les points de C dont les abscisses respectives sont $\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}; 2; e; 3$. On donne $\ln 2 = 0,693; \ln(3) = 1,098; e = 2,72$
- 3) Soit la fonction $g :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que $g(x) = x^2 - 2x \ln x$
 - a) calculer $g'(x)$.
 - b) Calculer en cm^2 l'aire S_1 de l'ensemble des points M du plan limité par la courbe C de f , l'axe $x'Ox$ des abscisses et les droites d'équations $x = \frac{1}{4}$ et $x = 1$
- 4) a) résoudre dans $]0; +\infty[$ l'équation $f(x) = 2x$
 - c) Calculer en cm^2 l'aire S_2 de l'ensemble des points limités par la courbe C , la droite d'équation $y = 2x$, et les droites d'équations $x = \frac{1}{e}$ et $x = e$.

Donner la valeur exacte, puis, une valeur approchée de sachant que $e = 2,72$.

Devoir 31

Exercice 1

Oumar place dans une boîte vide de craies, six boules bleues trois boules rouges et deux boules vertes, indiscernables au toucher

Pour jouer avec son ami, il tire simultanément et au hasard trois boules de la boîte .

1) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A « les boules tirées sont toutes de couleurs différentes »

B « les boules tirées sont toutes de la même couleur »

2) On appelle X la variable aléatoire qui, à tout tirage de trois boules, associe le nombre de boules bleues tirées.

Etablir la loi de probabilité de X. Calculer l'espérance mathématique et l'écart type de X.

Exercice 2

Le plan affine est rapporté à un repère orthonormé (O ,i, j)

Soit le point A_1 d'affixe $z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1) Montrer que A_1 est sur le cercle © de centre O et de rayon 1.

(On prendra 2cm pour unité) Marquer A_1 le cercle

2) On considère A_0 d'affixe 1 et, pour n entier naturel non nul A_n est le point d'affixe $z_n = z_1^n$. Calculer z_2 et marquer les points A_0, A_2 . Montrer que les points A_n sont sur le cercle ' C) .

3) Montrer que $z_{n+1} - z_n = (z_1)^n \left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$. En déduire la distance $A_n A_{n+1}$.

4) Déduire des questions précédentes que les triangles $OA_n A_{n+1}$ sont équilatéraux ; Montrer que $A_6 = A_0$ et représenter les points A_n dans le plan .

PROBLEME

1) On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = 2e^{-x} + \frac{1}{2}(x+1)$

Calculer $f'(x) + f(x)$ et en déduire une équation différentielle de la forme $y' + y = ax + b$

Dont f est solution.

2) On se propose de trouver toutes les solutions de l'équation différentielle (E) : $y' + y = \frac{1}{2}x + 1$.

a) Prouver que la fonction affine $\phi : x \rightarrow \frac{1}{2}(x+1)$ est une solution de (E).

b) Prouver qu'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) si et seulement si la fonction $f-\phi$ est solution de l'équation (E') : $y' + y = 0$

c) Résoudre l'équation (E') et en déduire toutes les solutions de l'équation (E).

d) Parmi les solutions de (E), combien en existe-t-il telles que $f(-1) = 2e$?

B – Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^*, g(x) = e^{-x} \ln x$.

1) Déterminer la fonction dérivée de g et vérifier que $g'(x)$ a même signe que $h(x) = -\ln x + \frac{1}{x}$.

2) Etudier les variations de h et en déduire que l'égalité $h(x) = 0$ admet une solution unique x_0 telle que $\frac{3}{2} < x_0 < 2$. Quel est le signe de $h(x)$ sur l'intervalle $]0; x_0[$? sur l'intervalle $]x_0; +\infty[$?

3) Vérifier que $g(x_0) = \frac{e^{-x_0}}{x_0}$ et déduire de l'inégalité $\frac{3}{2} < x_0 < 2$ un encadrement de $g(x_0)$.

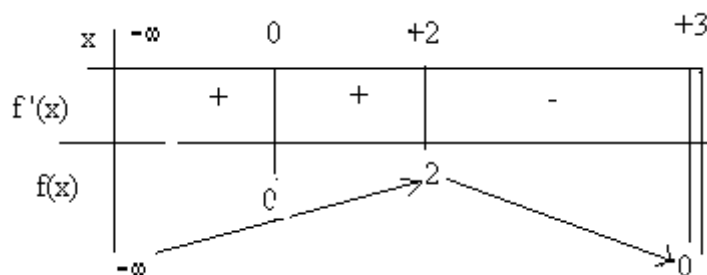
4) Acheter l'étude de la fonction g et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

Devoir 32

Exercice 1

On donne le tableau des variations de la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = (x+b)\sqrt{3+ax} \text{ où } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$



- 2) Déterminer les réels a et b .
- 3) Tracer la courbe (C) de f dans repère orthonormé.
- 4) Trouver la fonction dérivée de la fonction g telle que :

$$g(x) = \frac{-2}{3}x(3-x)\sqrt{3-x} - \frac{4}{5}(3-x)^2\sqrt{3-x}. \text{ En déduire } A = \int_0^3 f(x)dx.$$

Exercice 2

- a) Pour tout entier n ; on pose $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx$.
- 1) Calculer I_0
 - 2) Par une intégration par parties, calculer I_1 .
 - 3) Montrer que pour tout entier n , non nul on a : $(3+2n)I_n = 2nI_{n-1}$.
- b) Soit (U_n) la suite définie dans $\mathbb{N}^*$ par
$$\begin{cases} U_1 = \frac{-1}{4} \\ 5U_n - U_{n-1} = 3; \forall n \geq 2 \end{cases}$$

Calculer $U_2; U_3; U_4$

Soit (V_n) définie par $V_n = U_n - \frac{3}{4}$

Montrer que (V_n) est une suite géométrique

Calculer V_n puis U_n en fonction de n . calculer $A = \sum_{i=1}^n V_i$ et $B = \sum_{i=1}^n U_i$

PROBLEME

Soit la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = \frac{x+1}{2x+1} - \ln x$ où $\ln$ désigne le logarithme népérien .

- 1) Etudier le sens de variation de g .
- 2) a) Calculer $g(1)$ et $g(2)$ Montrer que l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique α dans l'intervalle $]0;+\infty[$.
- 3) déduire le signe de $g(x)$ dans l'intervalle $]0;+\infty[$.
- 4) Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{2 \ln x}{x^2 + x}$.
 - a) Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
 - b) Montrer que , pour tout $x \in]0;+\infty[$ $f'(x) = \frac{2(2x+1)}{(x^2 + x)^2} g(x)$.
 - c) Montrer que $f(\alpha) = \frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$ et donner le tableau de variation de f .
- 5) Construire la courbe de f .
- 6) Déterminer pour $x \geq 1$ les signes de $f(x) - \frac{\ln x}{x^2}$ et $\frac{\ln x}{x} - f(x)$.

En déduire que $\frac{\ln x}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{\ln x}{x}$.

7) Calculer $I = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\ln x}{x^2} dx$ (par partie) et $J = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\ln x}{x} dx$.

Devoir 33

Exercice1

1)) Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x-5}-1}{x-2}$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x^2 + 4x}$.

2) Déterminer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \left(\frac{1-3x}{x+2}\right)^4$; b) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-9}}{1-4x^2}$

3) Calculer les intégrales suivantes :

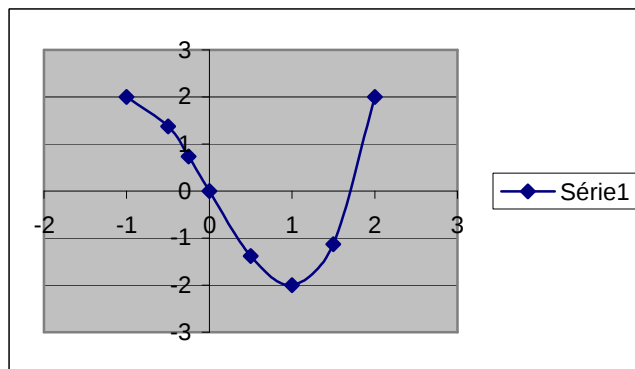
a) $\int_{-2}^{-1} \frac{e^x}{2e^x - 1} dx$; b) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2x+1}} dx$ (utiliser une intégration par partie)

4) a) Donner la valeur exacte de chacun des nombres suivants : $e^{\ln 5}$; $\ln \sqrt{e}$.

b) Résoudre dans IR l'équation $e^{2x+\ln 2} + e^{x+\ln 5} - 3 = 0$

Exercice 2

I On désigne par f la fonction définie et dérivable sur $[-1;2]$ dont la représentation graphique (C) est donnée ci-dessous :



1) Utiliser le graphique pour déterminer $f(0)$; $f(1)$; $f'(1)$ où f' est la dérivée de f

2) Résoudre graphiquement l'équation $x \in [-1;2]$; $f(x) = 0$.

3) Dresser le tableau des variations de f sur $[-1;2]$

4) On suppose $f(x) = ax^3 + bx + c$

A l'aide des valeurs mises en évidence sur le graphique, calculer les trois nombres réels a ; b ; c .

En déduire l'aire du domaine plan limité par (C), l'axe des abscisses et les droites

d'équations : $x = -1$ et $x = 1$.

II – Soit l'équation différentielle (E) : $y'' + 9y = 0$.

- 1) Résoudre (E).
- 2) Déterminer la solution f de (E) tel que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 3\sqrt{3}$.
- 3) Mettre f sous la forme $f(x) = r \cos(3x - \alpha)$; r un nombre réel positif et $\alpha \in]-\pi; \pi]$.
- 4) Résoudre l'équation $f(x) = 1$.

PROBLEME

Le plan est rapporté au repère orthonormé (O, i, j) d'unité 2cm.

I - Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x}$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition D_g de g .
- 2) Résoudre l'inéquation $x \in \mathbb{R}, g(x) \geq 0$
- 3) Déterminer trois nombres réels a, b et c pour que pour tout $x \in D_g$:

$$g(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+1}$$

II- Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + 2 + \ln \left| \frac{x}{x+1} \right|.$$

Soit (C) la représentation graphique de f dans le repère (O, i, j) .

- 1) Etudier les variations de f
- 2) a) Montrer que la droite D d'équation $y = x + 2$ est asymptote à (C) .
- b) Préciser la position de (C) par rapport à D .
- c) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de (C) et D .
Ecrire une équation de la tangente en ce point.

3) Etudier le comportement de f aux bornes de l'ensemble de définition de f .

- 4) a) Tracer (C) .
- b) Préciser les points d'intersection de (C) et de la droite D' d'équation $y = x$.

5) Montrer que le point $A(\frac{-1}{2}, \frac{3}{2})$ est centre de symétrie de (C) .

Devoir 34

Exercice1

1) Dans chacun des cas suivants, étudier la dérivabilité à gauche et la dérivabilité à droite en x_0 .

a) $f(x) = |x^2 - 1|$; $x_0 = 1$

b) $f(x) = \frac{x-2}{2-|x|}$; $x_0 = 0$

c) $\begin{cases} f(x) = 5x^2 - 3, \text{ si } x \in [0;1] \\ f(x) = 3x - 1, \text{ si } x \in [1;3] \end{cases}$

2) Déterminer m pour que la fonction f soit dérivable sur $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x-1}{x+2}, \text{ si } x \in]-\infty, 1] \\ f(x) = m(x^2 - 1), \text{ si } x \in]1; +\infty[\end{cases}$$

Exercice2

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + 1} ; a \text{ et } b \text{ étant des réels ;}$$

- 1) Déterminer a et b pour que la tangente T à la représentation graphique C de la fonction f , au point d'abscisse 0 ait pour équation : $y = 3x + 2$.
- 2) Préciser la position de T par rapport à C .
- 3) Etudier les variations de f .

PROBLEME : On pose $a = \frac{1}{2}(1+i)$

1) Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes a et $a-1$.

2) On pose $z_0 = 1$

3) Pour tout entier naturel non nul on pose $z_n = a^n$

Soit M_n le point le point d'affixe z_n .

Placer dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, les points $M_0, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7$ (unité graphique 4cm)

4) Pour tout nombre entier naturel n non nul on pose $U_n = |z_n - z_{n-1}|$

a) vérifier que $U_n = |a^{n-1}| \cdot |a-1|$

b) Montrer que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison q et le premier terme U_1

4) a) On pose $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$

Calculer S_n .

b) Calculer, si elle existe, la limite de S_n .

Devoir 35

Exercice 1

1) On définit la suite numérique (U_n) par :

$$\begin{cases} U_1 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{n+1}{2n} U_n \end{cases}$$

a) Montrer que la suite numérique (V_n) définie par $V_n = \frac{U_n}{n}$ est une suite géométrique.

b) Exprimer V_n et U_n en fonction de n puis étudier la convergence de ces suites.

2) Une épreuve consiste à lancer deux dés, l'un noire et l'autre vert et à noter les chiffres apparus sur les faces supérieures.

Les chiffres sont notés n pour le dé noir et v pour le dé vert.

a) Soit A l'évènement « $n \leq 3$ » et B l'évènement « $v \leq 2$ ».

Déterminer la probabilité de l'évènement A , B et $A \cup B$.

b) Soit C l'évènement « $n + v < 4$ ». Déterminer la probabilité de C .

Exercice 2

1) Soient les complexes $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

a) Déterminer le module et l'argument de z_1 et z_2 .

b) On pose $z = z_1 \cdot z_2$. En déduire le module et un argument de z .

c) Trouver les valeurs exactes de $\cos \frac{5\pi}{12}$ et de $\sin \frac{5\pi}{12}$.

2) Soit l'équation différentielle : $(E) : 2y'' - 3y' - 2y = 0$

Trouver la solution particulière de (E) qui vérifie $f(0) = 2$ et $f'(0) = 3$.

PROBLEME

Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right|$.

On considère (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé (O, i, j) .

1) Montrer que la fonction f est impaire.

2) Etudier les variations de f sur $[0; +\infty[$.

3) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right|$. Interpréter ce résultat graphiquement.

4) Construire (C)

5) Montrer que la fonction F définie par $F(x) = (x-2) \ln |x-2| - (x+2) \ln |x+2|$ est une primitive de $\ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right|$. En déduire l'aire du domaine A défini par $0 \leq x \leq \frac{3}{2}$ et $0 \leq y \leq f(x)$.

Devoir 36

Exercice 1

1) Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 8x} dx$.

2) On considère les nombres complexes suivants :

$$z_1 = -(\sqrt{3} + i); z_2 = 1 + i; z_0 = \frac{z_1}{z_2}$$

a) Déterminer le module et un argument de z_0

b) Ecrire z_0 sous la forme $a + ib$. En utilisant les résultats précédents, calculer $\cos 165^\circ$ et $\sin 165^\circ$

Exercice 2

1) on considère la suite (U_n) définie par
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{U_n}{1 + U_n} \end{cases}$$

a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a, $U_n > 0$.

b) Calculer U_1, U_2, U_3, U_4 .

2) Pour tout entier naturel n , on pose

$$T_n = \frac{1}{U_n}. \text{ Calculer } T_0; T_1; T_2; T_3; T_4.$$

b) Montrer que la suite (T_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.

c) En déduire une expression de U_n en fonction de n . Calculer U_{2003} .

PROBLEME

A) Soit la fonction $g :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto 2x\sqrt{x} - 3\ln x + 6$$

1) Etudier les variations de g sur $]0; +\infty[$.

2) Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$.

3) En utilisant les résultats précédents, déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

B) On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{3\ln x}{\sqrt{x}} + x - 1$.

1) Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

2) Calculer la dérivée de f .

3) En utilisant les résultats de A) étudier le sens de variation de f . Faites son tableau de variation.

4) Soit (C) la courbe représentative de f et (Δ) la droite d'équation $y = x + 1$.

Montrer que (Δ) est une asymptote oblique à (C) .

5) Etudier la position de (C) par rapport à (Δ) .

6) Construire dans un repère orthonormé (O, i, j) les courbes (C) de f et (C') de g .

Ecrire l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $x = 1$.

Devoir 37

Exercice 1

I - Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $\begin{cases} 3(\log_x y + \log_y x) = 10 \\ xy = 625 \end{cases}$.

II – Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{(e^x + 1)^2}$.

a) Déterminer des réels a , b , et c tels que pour tout réel x ,

$$\text{on ait } f(x) = a + \frac{be^x}{e^x + 1} + \frac{ce^x}{(e^x + 1)^2}$$

Calculer $I = \int_0^1 \frac{dx}{(e^x + 1)^2}$.

b) Calculer à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale $J = \int_0^1 \frac{xe^x}{(e^x + 1)^2} dx$.

Exercice 2

I – Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la suite (P_n) définie par :

$$P_n = \int_0^1 x^n 2^x dx$$

a) Calculer P_0

b) A l'aide d'une intégration par parties, établir une relation de récurrence entre P_n et P_{n-1} . En déduire la valeur de P_2 .

II – a) résoudre l'équation différentielle : $(E) : y'' + 4y = 0$

b) Déterminer la solution h de (E) dont la courbe passe par le point $A(\pi; 1)$ et admet en ce point une tangente perpendiculaire à la droite $\Delta : y = \frac{-1}{2}x + 3$.

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $h(x) = \sqrt{2}$.

PROBLEME

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x-1}{x+1} - e^{-x}$ et l'on désigne par

(C) sa courbe représentative dans repère orthonormé (O, i, j) d'unité 3cm.

1) Calculer la limite de f quand x tend vers $+\infty$. Que peut-on dire pour la courbe ?

2) Calculer $f'(x)$, en déduire les variations de f pour $x \in [0, +\infty[$.

3) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) en son point d'abscisse 0.

4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution m , montrer que m appartient à $[1, 2]$ et déterminer un encadrement de m à 10^{-1} près.

5) Tracer (T) et (C) sur la même figure.

6) A) Déterminer les réels a et b tels que, pour tout $x \neq -1$; $\frac{x-1}{x+1} = a + \frac{b}{x+1}$

c) En déduire l'aire en cm^2 du domaine plan limité par (T) , (C) et la droite d'équation $y = 1$.

Devoir 38

Exercice 1

- a) Résoudre dans $\mathbb{R}^4$ le système
$$\begin{cases} 2x + 7y - 3z - t = 14 \\ -x + 5y - 4z - 2t = 5 \\ 5x - y + 3z + t = 6 \\ 3x + 3y + z - 4t = -7 \end{cases}$$
- b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) $x^3 + 3x^2 - 7x - 12 = 0$

Exercice 2

Un paquet de 6 cartes comprend un as trois rois et deux dames. Le tirage d'un as rapporte 5 points, celui d'un roi rapporte 2 points et celui d'une dame coûte 1 point ; ON SUPPOSE QU'IL Y A ÉQUIPROBABILITÉ . Du paquet on extrait deux cartes et on appelle X le total des points marqués .

- 1) Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ?
- 2) Représenter graphiquement la fonction de répartition de la variable X.

PROBLEME

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + e^{2x}$.

- 1) Calculer pour tout nombre réel x, $f'(x)$ et $f''(x)$
- 2) a) montrer que pour tout nombre réel x, on a : $f''(x) > 0$
- b) En déduire que l'équation $f'(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une solution et une seule qu'on note α .
- c) Vérifier la double inégalité $-0,5 < \alpha < -0,4$.
- 3) a) Préciser suivant les valeurs du nombre réel x le signe de $f'(x)$
- b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- c) Dresser le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$.
- d) Tracer, en se limitant à l'intervalle $\left[-2; \frac{1}{2}\right]$, la courbe représentative C de f dans un repère (O, i, j) orthonormé.
- 4) On note Γ la courbe représentative dans le repère (O, i, j) de la fonction g définie par : $g(x) = e^x$
Soit A le point de Γ d'abscisse α de la question 2).
 - a) Ecrire une équation de la tangente T à Γ en A.
 - b) On note β l'abscisse du point d'intersection de la droite T avec l'axe (O i) . Calculer en fonction de α et en cm^2 l'aire **A** limité par la courbe Γ , la tangente T et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = \beta$

Devoir 39

Exercice 1

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé (O, u, v) (unité graphique 2cm).

1)- a) Développer $(1 + \sqrt{3})^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + (1 + \sqrt{3})z + 2 + \sqrt{3} = 0$.

2) on pose $z_1 = \frac{-(1 + \sqrt{3})}{2}(1 - i)$ et $z_2 = \frac{-(1 + \sqrt{3})}{2}(1 + i)$.

A et B sont les points d'affixes respectives z_1 et z_2 .

a) Ecrivez z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

b) Quelle est la nature du triangle OAB ?

3) On désigne par C le point d'affixe 1.

a) Ecrivez le complexe $\frac{1 - z_1}{z_2 - z_1}$ sous forme trigonométrique.

b) En déduire la nature du triangle ABC et placer les points A, B et C.

Exercice 2

On se propose de résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) :

$$\cos^2(\ln x) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\ln(x^2)) - \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

1) Trouver l'ensemble de validité de cette équation.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation : $\frac{1}{2} \cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

3) Poser $u = \ln x$ puis montrer que l'équation (E) est équivalente à :

$$\frac{1}{2} \cos 2u + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2u = \frac{1}{\sqrt{2}}. \text{ En déduire l'ensemble des solutions de (E).}$$

PROBLEME

A) On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = \frac{x+1}{2x+1} - \ln x$.

1) Etudier le sens de variation de g .

2) Calculer $g(1)$ et $g(2)$. En déduire que l'équation $g(x) = 0$ a une solution α dans l'intervalle $]0;+\infty[$. Donner un encadrement de α d'amplitude 0,1.

3) En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.

B) On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{2 \ln x}{x^2 + x}$.

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthogonal ($\|\vec{i}\| = 2cm; \|\vec{j}\| = 4cm$).

1) Etudier les limites de f en 0 et en $+\infty$.

2) Montrer que pour tout $x > 0$ $f'(x) = \frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2} g(x)$. En déduire le signe de $g(x)$.

3) Dresser le tableau des variations de f , et montrer que $f(\alpha) = \frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$.

4) Tracer la courbe C dans le repère orthogonal (O, i, j) ; préciser la tangente au point d'abscisse 1.

C) 1) a) Déterminer une primitive de la fonction $x \rightarrow \frac{\ln x}{x}$ sur $]0;+\infty[$.

b) Montrer que pour tout $x \geq 1$ on a $f(x) \leq \frac{2 \ln x}{x}$.

3) Soit F la primitive de f sur $]0;+\infty[$ qui s'annule pour $x = 1$. Sans chercher à calculer f , montrer que, pour tout $x \geq 1$ on a $F(x) \leq \frac{1}{2}(\ln x)^2$.

Devoir 40

Exercice1

Dans le plan muni d'un repère orthonormal (O, u, v) , on associe au point m d'affixe z le point M d'affixe Z tel que $Z = \frac{8}{z}$ (où $\bar{z}$ désigne le conjugué de z).

- 1) En posant $z = re^{i\theta}$, calculer le module et un argument de Z en fonction de r et θ . Que peut-on conclure pour les points m , M et O ?
- 2) On pose $z = x + iy, Z = X + iY$, i désignant le complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

Calculer X et Y en fonction de x et y . En déduire les coordonnées des points M_1, M_2, M_3, M_4 associés respectivement aux points $m_1(2; 0), m_2(2; 1), m_3(2; 2), m_4(2; 3)$.

- 3) Vérifier par calcul que M_1, M_2, M_3, M_4 sont sur un cercle de centre $A(2; 0)$. Représenter graphiquement les différents points.

Exercice 2

On considère la suite (U_n) définie pour tout nombre entier naturel n par $U_n = \frac{n}{e} + e^{-n}$.

- 1) Montrer que la suite (V_n) définie pour tout nombre entier naturel n par $V_n = \frac{n}{e}$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.
- 2) Montrer que la suite (W_n) définie pour tout nombre entier naturel n par $W_n = e^{-n}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
- 3) Calculer en fonction de n : $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$ et $S'_n = W_0 + W_1 + \dots + W_n$.

En déduire $\sum_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$.

Etudier lorsqu'elles existent, les limites respectives de $S_n, S'_n, \sum_n$ lorsque n tend vers l'infini.

PROBLEME

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, i, j) (unité 2cm). Soient f et g les applications de l'intervalle $] -1; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définies par : $f(x) = x + \frac{2 \ln(x+1)}{x+1}$ et

$$g(x) = (x+1)^2 + 2 - 2 \ln(x+1). \text{ Ln désigne la fonction logarithme népérien.}$$

- 1) Calculer $g'(x)$. En déduire que g admet un minimum. Quel est le signe de $g(x)$?
- 2) Etudier les variations de f . Calculer $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- 3) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe C représentative de f dans le repère (O, i, j) . Etudier la position de C par rapport à (D) .
- 4) Déterminer la tangente (T) à (C) à l'origine.
- 5) Montrer qu'il existe un point unique A de (C) où (C) admet une tangente (T') parallèle à (D) . Déterminer les coordonnées de A .
- 6) Tracer (C) ; (D) ; (T) et (T') .

Devoir 41

Exercice 1

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

a) $\ln(2x + 4) - \ln(6 - x) = \ln(3x - 2) - \ln x$

b) $2e^{2x} - 3e^x - 2 + 3e^{-x} = 0$

c) $\ln(x - 3) + \ln(2x + 6) \leq 0$

d) $(\ln x)^3 - 25 \ln x \geq 0$

2) Résoudre, dans $\mathbb{R}^2$, chacun des systèmes suivants :

a)
$$\begin{cases} \ln(xy) = 3 \\ (\ln x)(\ln y) = 2 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} e^{x+\ln 2} + e^{y+\ln 5} = 16 \\ e^{x+\ln 3} + e^{y+\ln 3} = 15 \end{cases}$$

Exercice 2

1) Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_1^2 \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{x^2} dx ; \quad J = \int_{-2}^0 \left(|x+1| + \frac{4}{x-1} \right) dx \quad K = \int_0^2 (x-2)e^{2x+1} dx ; \quad L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$$

2) Soient $M = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$ et $N = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$.

a) Justifier l'existence de ces intégrales.

b) Calculer $M + N$ et en déduire les valeurs de M et N .

PROBLEME

Soit f la fonction numérique définie par, $f(x) = \frac{x^2(x-2)}{x-1}, x \in \mathbb{R}$ et © sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, i, j) .

A) 1) Etudier les variations de cette fonction.

2) Démontrer qu'il existe des réels a, b, c et d tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}; f(x) = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x-1}. \text{ Déterminer ces réels.}$$

3) On considère dans le repère (O, i, j) la courbe (P) d'équation $y = x^2 - x - 1$.

On désigne par M un point de (P) d'abscisse x et par N le point de C de même abscisse. étudier $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} MN$ puis construire (P) et C dans le repère (O, i, j) .

B) On désigne par g la fonction numérique de la variable réelle définie par $g(x) = \sqrt{f(x)}$.

1) Quel est son ensemble de définition ? sur quel intervalle est-elle dérivable ? étudier la fonction g .

2) Montrer que la courbe représentative Γ de g dans un repère orthonormé admet en un point que l'on déterminera deux demi tangentes T_1 et T_2 distinctes dont on donnera les équations. Étudier la position de Γ par rapport à T_1 et T_2 .

3) Vérifier que les droites D_1 et D_2 d'équations respectives $y = x - \frac{1}{2}$ et $y = -x + \frac{1}{2}$ sont des asymptotes à Γ .

4) Construire T_1, T_2, D_1, D_2 et Γ .

Devoir 42

Exercice 1

Dans un sac sont placés dix jetons : 6 jetons portent le numéro 1 et les quatre autres portent le numéro 3. On tire simultanément 6 jetons du sac, les tirages étant supposés équiprobables.

On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, fait correspondre la somme des numéros marqués sur les trois jetons.

- 1) Quelles sont les valeurs possibles de X ?
- 2) Déterminer la loi de probabilité de X .
- 3) On appelle A l'évènement « la somme des numéros est strictement inférieure à 7 ». Calculer la probabilité de A .
- 4) On recommence quatre fois de suite le tirage précédent en remettant à chaque fois dans le sac les jetons tirés. Quelle est la probabilité pour que l'évènement A se réalise exactement trois fois ? au moins trois fois ?

Exercice 2

Soit le polynôme $f(z) = z^3 - (7 + 9i)z^2 + (39i - 14)z + 50$.

- 1) Montrer que $f(z) = 0$ admet une racine imaginaire pure z_0 .
- 2) Mettre $(z - z_0)$ en facteur dans $f(z)$, puis résoudre l'équation $f(z) = 0$.

Placer dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé, les images des solutions de l'équation $f(z) = 0$.

PROBLEME

A) Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln(1 + e^x)$.

- 1) Etudier les variations de f .
- 2) En remarquant que $1 + e^x = e^x(1 + e^{-x})$, déterminer la limite de $f(x) - x$ lorsque x tend vers $+\infty$.

En déduire que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe (C) de f .

- 3) Calculer $f(0)$.
- 4) Tracer (C) et (Δ) dans un repère orthonormé.

B) Soit g l'application de l'ensemble $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = \ln|e^x - 1|$.

- 1) Etudier les variations de g .
- 2) Trouver l'intersection de la courbe Γ de g avec l'axe des abscisses.
- 3) Montrer que la droite (Δ) est asymptote à Γ .
- 4) Tracer Γ sur le même graphique que (C) et (Δ) .

Devoir 43

Exercice 1 :

Soit dans $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes l'équation

$$(E) : z^3 - (3 + 2i)z^2 + (1 + 5i)z + 2(1 - i) = 0$$

- 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ cette équation sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure z_0 .
- 2) Montrer que les trois racines forment une progression géométrique de premier terme z_0 dont on déterminera la raison q .
- 3) Calculer le 15^{ième} terme de cette suite.

Exercice 2

I-1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $y'' + 16y = 0$

2) Déterminer la solution f qui vérifie : $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2$ et $f'(\pi) = 8$

3) Résoudre dans $[0; \pi]$ l'équation $f(x) = \sqrt{2}$.

II- Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

$$1) \begin{cases} 2^x \cdot 2^{2y} = 64 \\ \ln x + 2 \ln y = \ln 4 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 8^x \cdot (\sqrt{2})^y = 2^{2x+1} \\ 3^x \cdot 27^y = 9^{y+1} \end{cases}$$

PROBLEME

I- On considère la fonction u de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $u(x) = \frac{x-1+x \ln x}{x}$

- 1) Etudier le sens de variation de u et construire sa représentation graphique C dans le plan muni d'un repère orthonormé (unité 2cm). On déterminera l'équation de la tangente à C au point d'abscisse 1.
- 2) Dédurre de l'étude de u le signe de $u(x)$ en fonction des valeurs de x .

II- On considère la fonction f définie par :
$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty ; 1[& f(x) = e^{x-1} - 1 \\ \forall x \in [1 ; +\infty[& f(x) = (x-1) \ln x \end{cases}$$

- 1) Quel est l'ensemble de définition de f ?
- 2) Etudier la continuité de f au point 1.
- 3) Etudier la dérivabilité de f au point 1.
- 4) Etudier le sens de variation de f .

Tracer la courbe représentative Γ de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, i, j) (unité 2cm).

- III- 1) En effectuant une intégration par parties, déterminer sur l'intervalle $[1; +\infty[$ l'ensemble des primitives de la fonction h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $h(x) = (x-1) \ln x$;
- 2) Déterminer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (Γ) l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$.