Exercice 1 : .... *6 points*

1. Déterminons les trois parts

Soit A, B, C les trois parts

$$(A\ ;B\ ;C)DP(18\ ;12\ ;9)DP\left(\frac{1}{21\ 600}\ ;\frac{1}{14\ 400}\ ;\frac{1}{9\ 600}\right)\text{ alors}$$

$$(A\ ;B\ ;C)DP\left(\frac{18}{21\ 6\cancel{00}}\ ;\frac{12}{14\ 4\cancel{00}}\ ;\frac{9}{9\ 6\cancel{00}}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(A;\ B;\ C)DP\left(\frac{18\times144\times96}{216\times144\times96}\ ;\frac{12\times216\times96}{216\times144\times96}\ ;\frac{9\times216\times144}{216\times144\times96}\right)$$

$$\Rightarrow(A;\ B;\ C)DP(248\ 832\ ;248\ 832\ ;279\ 936)$$

$$\Rightarrow\frac{A}{248\ 832}=\frac{B}{248\ 832}=\frac{C}{279\ 936}=\frac{A+B+C}{248\ 832+248\ 832+279\ 936}=\frac{14\ 400}{777\ 600}$$

$$\Rightarrow A=\frac{248\ 832\times14\ 400}{777\ 600}\ ;B=\frac{248\ 832\times14\ 400}{777\ 600}\ ;C=\frac{279\ 936\times14\ 400}{777\ 600}$$

$$\Rightarrow A=\ 4\ 608\ ;B=4\ 608\ ;C=5\ 184$$

2. Calculons le pourcentage de dames qui portent un chapeau chacune

Méthode 1

$t=(20\%)(60\%)=\dfrac{20\times60}{100}\%=12\%$.

Le pourcentage des dames qui portent un chapeau chacune est 12% des passagers.

Autre méthode 2

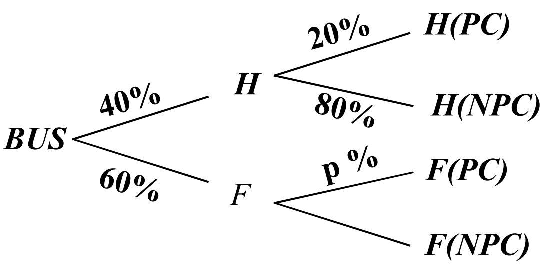
Soient x le nombre de passagers, y le nombre d'hommes qui portent un chapeau et z le nombre de dames qui portent un chapeau chacune.

$y=(\mathbf{40\%x})(\mathbf{20\%})=8\%x$

$8\%x+z=20\%x\Rightarrow z=20\%x-8\%x=12\%x$

Le pourcentage des dames qui portent un chapeau chacune est 12% des passagers.

Autre méthode 3



$$(40\%)\ (20\%)\ +(60\%)(p\%)=20\%\Rightarrow8\%+(60\%)(p\%)=20\%\Rightarrow\ (p\%)=\frac{12\%}{60\%}=0.2$$

$p=20\%$

Le pourcentage des dames qui portent un chapeau chacune est 20% des dames..

Exercice 2 : .... 5 points

1. **a.** Développons $a=\left(2+\sqrt{2}\right)^3$ et $b=\left(2-\sqrt{2}\right)^3$

$$a=\left(2+\sqrt{2}\right)^3=2^3+3(2)^2\left(\sqrt{2}\right)+3(2)\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^3=8+12\sqrt{2}+12+2\sqrt{2}$$

$$\boldsymbol{a=20+14\sqrt{2}}$$

$$b=\left(2-\sqrt{2}\right)^3=2^3-3(2)^2\left(\sqrt{2}\right)+3(2)\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^3=8-12\sqrt{2}+12-2\sqrt{2}$$

$$\boldsymbol{b=20-14\sqrt{2}}$$

b. Déduisons la valeur exacte de $c=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}-\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$

$$c=\sqrt[3]{\mathbf{20+14\sqrt{2}}}-\sqrt[3]{\mathbf{20-14\sqrt{2}}}=$$

$$=\sqrt[3]{\left(2+\sqrt{2}\right)^3}-\sqrt[3]{\left(2-\sqrt{2}\right)^3}=2+\sqrt{2}-\left(2-\sqrt{2}\right)$$

$$=2+\sqrt{2}-2+\sqrt{2}=2\sqrt{2}\quad ;\quad \boldsymbol{c=2\sqrt{2}}$$

2. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sqrt[3]{2x-9}=3$

$$\sqrt[3]{2x-9}=3\Rightarrow 2x-9=3^3\Rightarrow 2x-9=27\Rightarrow 2x=27+9\Rightarrow 2x=36\Rightarrow x=\frac{36}{2}=18$$

$S=\{18\}$

3. $a\in\mathbb{R}_+^*$, simplifions $d=\dfrac{\sqrt[3]{a^5}\times\left(\sqrt[4]{a^7}\right)^2}{\left(a^2\right)^2\times\sqrt[5]{a^5}\times\sqrt[5]{a^3}}$

$$d=\frac{\sqrt[3]{a^5}\cdot\left(\sqrt[4]{a^7}\right)^2}{\left(a^2\right)^2\cdot\sqrt[5]{a^5}\times\sqrt[5]{a^3}}=\frac{a^{\frac{5}{3}}\cdot\left(a^{\frac{7}{4}}\right)^2}{a^4\cdot a\cdot a^{\frac{3}{5}}}=\frac{a^{\left(\frac{5}{3}+\frac{14}{4}\right)}}{a^{\left(4+1+\frac{3}{5}\right)}}=\frac{a^{\frac{62}{12}}}{a^{\frac{28}{5}}}=a^{\frac{62}{12}-\frac{28}{5}}=a^{\frac{-26}{60}}=a^{-\frac{13}{30}}$$

4. Résolvons dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ les systèmes suivants :

$$\begin{cases}\left(2^6\right)^{-x}\times\dfrac{1}{(16)^y}=4\\[2mm] 13^{-x}\times\dfrac{1}{(169)^y}=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2^{-6x}\times 2^{-4y}=2^2\\ 13^{-x}\times 13^{-2y}=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-6x-4y=2\\ 13^{-x-2y}=4\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-3x-2y=1\\ -x-2y=\dfrac{\ln 4}{\ln 13}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3x-2y=1\\ x+2y=-\dfrac{\ln 4}{\ln 13}\end{cases}$$

$$\Rightarrow -2x = 1 - \frac{\ln 4}{\ln 13} \Rightarrow x = \frac{-\ln 13 + \ln 4}{2\ln 13} \notin \mathbb{N}$$

$S = \emptyset$

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{125}\right)^{-x} = \frac{1}{\left(5^{-7}\right)^{y}} \times 25^{-5} \\ \frac{1}{\left(6^{-2}\right)^{x}} \times 6^{y} = 6^{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5^{3x} = 5^{7y} \times 5^{-10} \\ 6^{2x} \times 6^{y} = 6^{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5^{3x} = 5^{7y-10} \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x - 7y = -10 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x - 7y = -10 \\ 14x + 7y = 35 \end{cases}$$

$$17x = 25 \Rightarrow x = \frac{25}{17} \notin \mathbb{N}$$

$S = \emptyset$

Problème : .... 9 points

$f : [1\,;6] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = -x^2 + 10x - 9 - 8\ln x$

$f(x)$ le bénéfice mensuel, exprimé en dizaine de milliers de francs, obtenu pour la vente de x centaines de pièces.

1. **a.** Calculons $f'(x)$

$$f(x) = -x^2 + 10x - 9 - 8\ln x \Rightarrow f'(x) = -2x + 10 - \frac{8}{x} = \frac{-2x^2 + 10x - 8}{x}$$

b. Etudions le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[1\,;6]$

$f'(x) = \frac{-2x^2 + 10x - 8}{x}$; $\forall x \in [1\,;6]$, $x > 0$, $f'(x)$ a même signe que

$\left(-2x^2 + 10x - 8\right)$

$-2x^2 + 10x - 8 = 0$; $a = -2$; $b = 10$; $c = -8$

$\Delta = b^2 - 4ac = 10^2 - 4(-2)(-8) = 36$

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-10 - \sqrt{36}}{2(-2)} = 4$; $\quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-10 + \sqrt{36}}{2(-2)} = 1$

Tableau de signe :

x	1	4	6
$f'(x)$	+	0	−

$\forall x \in [1\ ;4],\ f'(x) \geq 0$

$\forall x \in [4\ ;6],\ f'(x) \leq 0$

c. Dressons le Tableau de Variation :

x	1		4		6
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$15-8\ln 4$	$\searrow$	$15-8\ln 6$

$f(1) = -(1)^2 + 10(1) - 9 - 8\ln(1) = 0$

$f(4) = -(4)^2 + 10(4) - 9 - 8\ln(4) = 15\text{-}8\ln 4 \approx 3{,}9096$

$f(6) = -(6)^2 + 10(6) - 9 - 8\ln(6) = 15\text{-}8\ln 6 \approx 0{,}6659$

d. La quantité de pièces à produire pour obtenir un bénéfice mensuel maximal est 400 pièces $(x = 4)$
Ce bénéfice au franc près est 39 096 F $(f(4) = 3{,}9096)$.

2. $g :]0\ ;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto g(x) = -x + x\ln x$

a. Prouvons que $x \longmapsto g(x)$ est une primitive de $x \longmapsto \ln x$ sur $]0\ ;+\infty[$.

$g(x) = -x + x.\ln x \Longrightarrow g'(x) = -1 + 1.\ln x + \left(\frac{1}{x}\right).x = -1 + \ln x + 1 = \ln x$; d'où

$x \longmapsto g(x)$ est une primitive de $x \longmapsto \ln x$ sur $]0\ ;+\infty[$

b. Déduisons une primitive F de la fonction f

$$f(x) = -x^2 + 10x - 9 - 8\ln x \Longrightarrow F(x) = -\frac{x^3}{3} + 5x^2 - 9x - 8(-x + x.\ln x)$$

$$F(x) = -\frac{x^3}{3} + 5x^2 - 9x + 8x - 8x.\ln x \Longrightarrow F(x) = -\frac{x^3}{3} + 5x^2 - x - 8x.\ln x$$

c. Calculons la valeur moyenne de la fonction f sur $[1\ ;6]$

$$m=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx=\frac{1}{6-1}\int_1^6 f(x)\,dx=\frac{1}{5}[F(x)]_1^6=\frac{1}{5}[F(6)-F(1)]$$

$$=\frac{1}{5}\left[\left(-\frac{6^3}{3}+5(6)^2-6-8(6).\ln 6\right)-\left(-\frac{1^3}{3}+5(1)^2-1-8(1).\ln 1\right)\right]$$

$$=\frac{1}{5}\left(102-48\ln 6+\frac{1}{3}-4\right)=\frac{1}{5}\left(\frac{295}{3}-48\ln 6\right)\approx 2{,}4658\approx 2.5.$$