République du Mali

Un Peuple – Un But – Une Foi

Recueils de Sujets et Corrigés de Mathématiques du Baccalauréat Malien Session d'Octobre 2020

Sixième Édition

Toute l'équipe de MaliMath vous serait très reconnaissant de bien vouloir communiquer sur le contenu de ce recueil, sa présentation ainsi que toutes autres suggestions

.

Exercice 1: -- (**6 points**)

On se propose de résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation

$$(E): z^3 - \left(2 + i\sqrt{2}\right)z^2 + 2\left(1 + i\sqrt{2}\right)z - 2i\sqrt{2} = 0.$$

1. Détermine le réel y tel iy soit une solution de (E).

2. Détermine les réels a et b tels que, pour tout nombre complexe z, on ait:

$$z^3 - \left(2 + i\sqrt{2}\right)z^2 + 2\left(1 + i\sqrt{2}\right)z - 2i\sqrt{2} = (z - iy)\left(z^2 + az + b\right).$$

3. Achève la résolution de (E) puis écris chacune des solutions sous forme trigonométrique.

Exercice 2: -- (**6 points**)

On considèdre la suite numérique $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $U_n = \mathrm{e}^{2n-1}$.

1. **a.** Calcule U_0, U_1, U_2, U_3 et U_{n-1}.

b. Démontre que (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

c. Exprime en fonction de n la somme $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$.

d. Calcule $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

e. Trouve la valeur minimale de n telle que $S_n \geq 10$.

2. Soit la suite (V_n) définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}, V_n = \ln(U_n)$. On pose $T_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$.

Exprime le produit $P_n = U_0 \times U_1 \times \cdots \times U_n$ en fonction de T_n.

Problème: -- (**10 points**)

On considère la fonction numérique f définie sur $]-\infty; +\infty[$ par

$$f : x \longmapsto f(x) = 2x + 1 - xe^{x-1}$$

et on note (C_f) la courbe courbe représentative de f dans le plan orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ d'unité graphique 2cm.

1. Calcule les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. Démontre que la droite (Δ) d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote à (C_f) au voisinage de

$-\infty$ puis précise la position relative de (C_f) et (Δ).

3. **a.** Étudie les variations de la fonction dérivée f' de f.

b. Calcule $f'(1)$ puis en déduis le signe de $f'(x)$ sur $]-\infty; +\infty[$.

c. Dresse le tableau de variations de f.

4. Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β telles que $1{,}9 < \alpha < 2$ et $-0{,}6 < \beta < -0{,}5$.

5. Calcule la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ en $+\infty$ puis en donne une interprétation géométrique.

6. Trace (C_f) et (Δ).

Exercice 1:

$(E): z^3-\left(2+i\sqrt{2}\right)z^2+2\left(1+i\sqrt{2}\right)z-2i\sqrt{2}=0$

1. Déterminons le réel y tel que iy soit une solution de (E).

$$(iy)^3-\left(2+i\sqrt{2}\right)(iy)^2+2\left(1+i\sqrt{2}\right)(iy)-2i\sqrt{2}=0$$

$$\Leftrightarrow -iy^3+2y^2+i\sqrt{2}y^2+2iy-2\sqrt{2}y-2i\sqrt{2}=0$$

$$\Leftrightarrow 2y^2-2\sqrt{2}y+i\left(-y^3+\sqrt{2}y^2+2y-2\sqrt{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2-2\sqrt{2}y=0 & (1) \\ -y^3+\sqrt{2}y^2+2y-2\sqrt{2}=0 & (2) \end{cases}$$

$(1) \Longrightarrow 2y\left(y-\sqrt{2}\right)=0 \Longrightarrow y=0 \ ou \ y=\sqrt{2}$

$y=0$ ne vérifie pas l'équation (2)

$-\left(\sqrt{2}\right)^3+\sqrt{2}\left(\sqrt{2}\right)^2+2\left(\sqrt{2}\right)-2\sqrt{2}=0 \Longrightarrow 0=0$; $y=\sqrt{2}$ vérifie l'équation (2)

donc $y=\sqrt{2}$

2. Déterminons les réels a et b tels que pour tout nombre complexe z :

$$z^3-\left(2+i\sqrt{2}\right)z^2+2\left(1+i\sqrt{2}\right)z-2i\sqrt{2}=\left(z-i\sqrt{2}\right)\left(z^2+az+b\right)$$

Methode 1 : Utilisation de l'algorithme de Hörner

	1	$-2-i\sqrt{2}$	$2+2i\sqrt{2}$	$-2i\sqrt{2}$
$i\sqrt{2}$		$i\sqrt{2}$	$-2i\sqrt{2}$	$2i\sqrt{2}$
	1	-2	2	0

Donc $a=-2$ et $b=2$

$$z^3-(2+i\sqrt{2})z^2+2(1+i\sqrt{2})z-2i\sqrt{2}=(z-i\sqrt{2})(z^2-2z+2)$$

Methode 2 : Utilisation des coefficients indeterminés

$$z^3-\left(2+i\sqrt{2}\right)z^2+2\left(1+i\sqrt{2}\right)z-2i\sqrt{2}=\left(z-i\sqrt{2}\right)\left(z^2+az+b\right)$$

$$= z^3 + az^2 + bz - i\sqrt{2}\,z^2 - i\sqrt{2}\,az - i\sqrt{2}\,b$$

$$z^3 - \left(2 + i\sqrt{2}\right)z^2 + 2\left(1 + i\sqrt{2}\right)z - 2i\sqrt{2} = z^3 + \left(a - i\sqrt{2}\right)z^2 + \left(b - i\sqrt{2}\,a\right)z - i\sqrt{2}\,b$$

Par identification :

$$\begin{cases} a - i\sqrt{2} = -2 - i\sqrt{2} \\ b - i\sqrt{2}\,a = 2 + 2i\sqrt{2} \\ -i\sqrt{2}\,b = -2i\sqrt{2} \end{cases}$$

donc $a = -2$ *et* $b = 2$

$$z^3 - (2 + i\sqrt{2})z^2 + 2(1 + i\sqrt{2})z - 2i\sqrt{2} = (z - i\sqrt{2})(z^2 - 2z + 2)$$

Methode 3 : Division euclidienne

$$\begin{array}{l|l} z^3 - \left(2 + i\sqrt{2}\right)z^2 + 2\left(1 + i\sqrt{2}\right)z - 2i\sqrt{2} & z - i\sqrt{2} \\ \cline{2-2} \underline{-z^3 \quad + \quad i\sqrt{3}\,z^2} & z^2 - 2z + 2 \\ 0 \quad - \quad 2z^2 + 2\left(1 + \sqrt{2}\right)z & \\ \qquad \underline{2z^2 \quad - \quad 2i\sqrt{2}\,z} & \\ \qquad\qquad 2z - 2i\sqrt{2} & \\ \qquad\qquad \underline{-2z + 2i\sqrt{2}} & \\ \qquad\qquad 0 \quad + \quad 0 & \end{array}$$

$a = -2$ et $b = 2$

3. Achèvons la resolution de (E)

$$\left(z - i\sqrt{2}\right)\left(z^2 - 2z + 2\right) = 0 \Rightarrow z - i\sqrt{2} = 0 \text{ ou } z^2 - 2z + 2 = 0$$

$$z - i\sqrt{2} = 0 \Rightarrow z = i\sqrt{2}$$

$z^2 - 2z + 2 = 0$ on calcule $\Delta = 4 - 8 = -4 = 4i^2$ *et* on trouve

$$z_1 = \frac{2 - 2i}{2} = 1 - i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{2 + 2i}{2} = 1 + i$$

l'ensemble des solutions est $S = \left\{ i\sqrt{2} \ ; \ 1 - i \ ; 1 + i \right\}$

Ecrivons chacune des solutions sous forme trigonometrique :

$z_0 = i\sqrt{2} \Longrightarrow z_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

$\left|z_1\right| = \left|1 - i\right| = \sqrt{2}$ et soit $\theta_1$un arg de z_1, on a : $\begin{cases} \cos\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Longrightarrow \theta_1 = -\frac{\pi}{4}$

donc $z_1 = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$\left|z_2\right| = \left|1 + i\right| = \sqrt{2}$ et soit θ_2 un arg de z_2, on a : $\begin{cases} \cos\theta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Longrightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{4}$ donc

$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

Exercice 2:

(U_n) est la suite définie par : $U_n = e^{2n-1}$

1. **a.** Calculons U_0 ; U_1 ; U_2 ; U_3 et U_{n+1}

$U_0 = e^{2(0)-1} = e^{-1} \Longrightarrow U_0 = e^{-1}$

$U_1 = e^{2(1)-1} = e^{1} \Longrightarrow U_1 = e$

$U_2 = e^{2(2)-1} = e^{3} \Longrightarrow U_2 = e^{3}$

$U_3 = e^{2(3)-1} = e^{5} \Longrightarrow U_0 = e^{5}$

$U_{n+1} = e^{2(n+1)-1} = e^{2n+1} \Longrightarrow U_{n+1} = e^{2n+1}$

b. Démontrons que (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{e^{2n+1}}{e^{2n-1}} = e^{2n+1} \times e^{-2n+1} = e^2$ donc (U_n) est une suite géometrique de raison $q = e^2$.

c. Exprimons en fonction de n la somme $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$

$$S_n = U_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = e^{-1} \times \frac{1-e^{2n+2}}{1-e^2} \Longrightarrow S_n = \frac{1-e^{2n+2}}{e-e^3}$$

d. Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-e^{2n+2}}{e-e^3} = +\infty \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$$

e. Trouvons la valeur minimum de n telle que $S_n \geq 10$

$$S_n \geq 10 \Longrightarrow \frac{1-e^{2n+2}}{e-e^3} \geq 10 \Longrightarrow 1-e^{2n+2} \leq 10\,e - 10\,e^3$$

$$\Longrightarrow -e^{2n+2} \leq 10\,e - 10\,e^3 - 1$$

$$\Longrightarrow e^{2n+2} \geq -10\,e + 10\,e^3 + 1$$

$$\Longrightarrow 2n+2 \geq \ln(-10e + 10\,e^3 + 1)$$

$$\Longrightarrow n \geq \frac{\ln(-10e+10e^3+1)-2}{2}$$

$$\Longrightarrow n \geq 1{,}58 \quad \text{donc } n = 2$$

2. Soit la suite (V_n) définie $\forall\, n \in \mathbb{N}$; $V_n = \ln(U_n)$ et on pose : $T_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$.

Exprimons $P_n = U_0 \times U_1 \times \cdots \times U_n$ en fonction de T_n

$$P_n = U_0 \times U_1 \times \cdots \times U_n = e^{V_0} \times e^{V_1} \times \cdots \times e^{V_n} = e^{V_0 + V_1 + \cdots + V_n} \text{ donc } P_n = e^{T}$$

Problème :

$f(x) = 2x + 1 - xe^{x-1}$

1. Calculons les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (2x+1-xe^{x-}) = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} (2x+1) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (-xe^{x-1}) = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(2 + \frac{1}{x} - e^{x-1}\right) = -\infty$

2. Démontrons que la droite (Δ) d'équation $y = 2x+1$ est asymptote à (C_f) au voisinage de $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} [\,f(x) - y\,] = \lim\limits_{x\to-\infty} (-xe^{x-1}) = 0$ donc la droite (Δ) d'équation $y = 2x+1$ est asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $-\infty$.

Précisons la position de (C_f) par rapport à (Δ).

$f(x) - y = -xe^{x-1}$

On a : $\forall \ x \in \mathbb{R}$, $e^{x-1} > 0$ donc $f(x) - y$ a même signe que $-x$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x) - y$		$-$	0	$+$	

Sur $]-\infty \ ; 0[$ (C_f) est au dessus de (Δ)

Sur $]0 \ ; +\infty[$ (C_f) est en dessous de (Δ)

Pour $x = 0$ (C_f) et (Δ) sont sécantes.

3. **a.** Etudions les variations de la fonction dérivée $f\,'$ de f.

$f\,'$ est dérivable sur $\mathbb{R}$; $f\,'(x) = 2 - \left(e^{x-1} + xe^{x-1}\right) = 2 - (1 + x)e^{x-1}$

$f\,''$ est dérivable sur $\mathbb{R}$; $f\,''(x) = -e^{x-1} + e^{x-1}(-1 - x) = (-x - 2)e^{x-1}$

$\forall \ x \in \mathbb{R}$, $e^{x-1} > 0$ donc f'' a même signe que $-x - 2$. On a :

$f\,''(x) = 0 \Rightarrow -x - 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f'(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 2 - (1 + x)e^{x-1} = \lim\limits_{x \to -\infty} (2 - e^{x-1} - xe^{x-1}) = 2$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 2 - (1 + x)e^{x-1} = -\infty$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f\,''(x)$		$+$	0		$-$		
$f\,'(x)$	2	$\nearrow$	$2 + e^3$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

b. Calculons $f\,'(1)$ et déduisons le signe de $f\,'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

$f\,'(1) = 2 - (1 +)e^{1-1} = 2 - 2 = 0$ donc $f\,'(1)) = 0$

D'après le tableau de variation de f' on a :

$\forall x \in]-\infty \ ; 1]$; $f\,'(x) \geq 0$

$\forall x \in [1 \ ; +\infty[$; $f\,'(x) \leq 0$

c. Dressons le tableau de variation de f

x	$-\infty$	β	1	α	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	0 $\nearrow$	2	$\searrow$ 0	$\searrow$ $-\infty$

4. Démontrons que l'équation $f(x)=0$ admet deux solutions α et β telles que $1{,}9<\alpha<2$ et $-0{,}6<\beta<-0{,}5$.

D'une part f est continue et strictement décroissante sur $]1;+\infty[$ donc elle réalise une bijection de $]1;\ +\infty[$ sur $]-\infty;2[$. De plus $0\in]-\infty;2[$ donc l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique $\alpha\in]1;\ +\infty[$

$f(1{,}9)\approx 0{,}13$ et $f(2)\approx -0{,}44$ on a : $f(1{,}9)\times f(2)<0$ donc $1{,}9<\alpha<2$.

D'autre part f est continue et strictement croissante sur $]-\infty\,;1[$ donc elle réalise une bijection de $]-\infty\,;1[$ sur $]-\infty;2[$. De plus $0\in]-\infty;2[$ donc l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique $\beta\in]-\infty\,;1[$

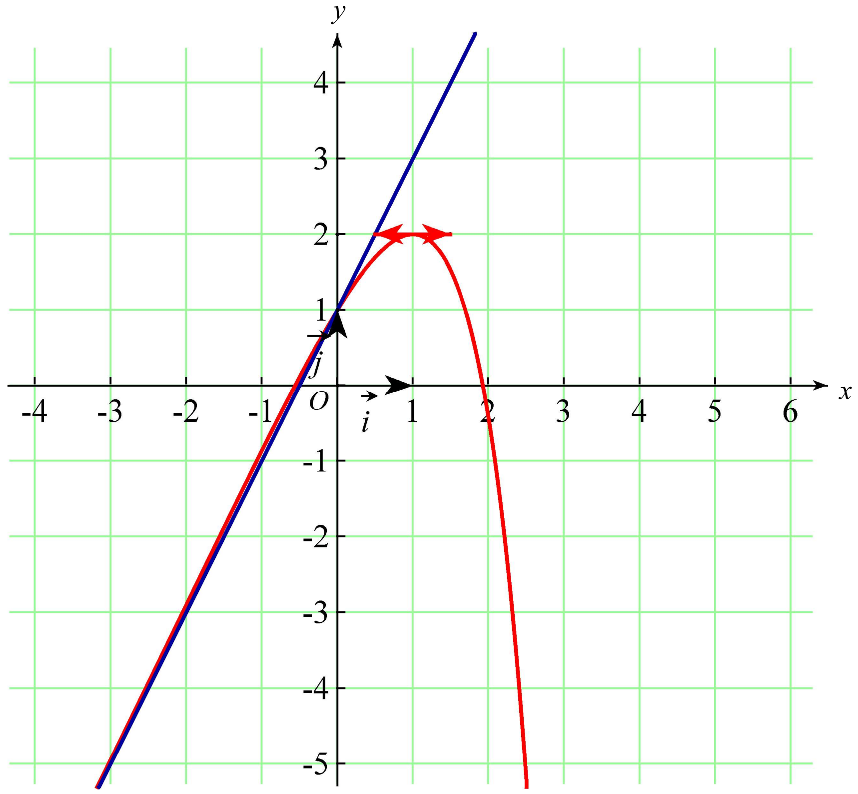
$f(-0{,}6)\approx -0{,}08$ et $f(-0{,}5)\approx 0{,}11$ on a :$f(-0{,}6)\times f(-0{,}5)<0$ donc $-0{,}6<\beta<-0{,}5$

On conclut que l'équation $f(x)=0$ admet deux solutions α et β telles que $1{,}9<\alpha<2$ et $-0{,}6<\beta<-0{,}5$

5. Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ puis en donnons une interprétation géometrique.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\dfrac{1}{x}+e^{x-1}\right)=+\infty$ donc (C_f) admet une branche parabolique direction (Oy) en $+\infty$.

6. Traçons (C_f) et (Δ).


y
x
O
i
j
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
6

« MaliMath » ou « M^2 » est une association née à partir d' un groupe de travail. Elle a été initiée par le département de mathématiques de l' ENSup de Bamako en collaboration avec l' IGEN et Thomas CASTANET.

« MaliMath » réuni des enseignants de mathématiques du fondamental à l' université, des formateurs, des conseillers pédagogiques, des inspecteurs. Depuis 2014, nous produisons des ressources numériques pour l' enseignement des mathématiques du primaire à l' université. Nous organisons aussi des formations à l' adresse des enseignants (ou tout autre acteur de l' éducation) autour de la maitrise et l' usage pédagogique de l' ordinateur et des logiciels pour l' enseignement des mathématiques.

Pour rejoindre le groupe et contribuer aux activités de « MaliMath », contacter