APPLICATIONS AFFINES

Site MathsTICE de Adama Traoré Lycée Technique Bamako

I – Applications linéaires:

Activité : Soit $\mathcal{V}$ l'ensemble des vecteurs du plan $\mathcal{P}$ et

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathcal{V} & \rightarrow & \mathcal{V} \\ \vec{u} & \mapsto & \varphi(\vec{u}) = k\vec{u} \qquad (k \in IR^*) \end{array}$$

a) montrer que $\forall\ (\vec{u}\ ;\ \vec{v}\ ) \in \mathcal{V}^2$: $\varphi(\vec{u}+\vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$;

b) montrer que $\forall\lambda \in \mathbb{R}$; $\forall \vec{u} \in \mathcal{V}$: $\varphi(\lambda\vec{u}) = \lambda \times \varphi(\vec{u})$.

-- 0 --

a) Soit $(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\ ) \in \mathcal{V}^2$; $\varphi(\vec{u}+\vec{v}) = k(\vec{u}+\vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v} = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$;

b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$; et $\vec{u} \in \mathcal{V}$; $\varphi(\lambda\vec{u}) = k(\lambda\ \vec{u}\ ) = \lambda\,(k\,\vec{u}\,) = \lambda \times \varphi(\vec{u})$. Les conditions a) et b) étant vérifiées on dit que φ est une application linéaire.

1 – Définition :

Soit $\mathcal{V}$ l'ensemble des vecteurs du plan $\mathcal{P}$. On appelle application linéaire de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}$, toute application φ de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}$ telle que :

- $\forall\ \vec{u} \in \mathcal{V}$, $\forall\ \vec{v} \in \mathcal{V}$; $\varphi(\vec{u}+\vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$.
- $\forall\ \vec{u} \in \mathcal{V}$, $\forall\lambda \in \mathbb{R}$; $\varphi(\lambda\vec{u}) = \lambda \times \varphi(\vec{u})$.

Désignons par $\mathcal{U}$ l'ensemble des vecteurs de la droite ($\mathcal{D}$) et par $\mathcal{W}$ l'ensemble des vecteurs de l'espace affine ($\mathcal{E}$) . On définit de façon analogue une application linéaire de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{U}$; de $\mathcal{W}$ dans $\mathcal{W}$.

2 – Propriétés :

Soit φ une application linéaire respectivement de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}$, de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{U}$, de $\mathcal{W}$ dans $\mathcal{W}$.

P_1 : $\forall\ (\vec{u}\ ;\ \vec{v}\ ) \in \mathcal{V}^2$; $\forall\ (\alpha\ ;\ \beta) \in \mathbb{R}^2$; $\varphi(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha\ \varphi(\vec{u}) + \beta\,\varphi(\vec{v})$

P_2 : $\forall \vec{u} \in \mathcal{V}$; $\varphi(-\vec{u}\,) = -\varphi(\vec{u}\,)$;

P_3 : $\varphi(\vec{0}\,) = \vec{0}$.

II – Applications affines:

1) **Activité :** Soit O un point du plan $\mathcal{P}$ et f l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ définie par

$$\begin{array}{rcl} f : \mathcal{P} & \rightarrow & \mathcal{P} \\ M & \mapsto & M' \quad \text{tel que : } \overrightarrow{OM'} = 2\overrightarrow{OM}. \end{array}$$

Montrer que si G est le barycentre du système pondéré $\{(A_1;\alpha_1)$; $(A_2;\alpha_2)$;…… ; $(A_n;\alpha_n)\}$ alors G'= f(G) est le barycentre du système de points pondérés

$\{(f(A_1);\alpha_1)$; $(f(A_2);\alpha_2)$;…… ; $(f(A_n);\alpha_n)\}$.

Supposons G barycentre du système $(A_i;\alpha_i)_{i=1 \text{ à } n}$.

G barycentre du système $(A_i;\alpha_i)_{i=1 \text{ à } n}$ $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA_i}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OG}) = \vec{0} \text{ en multipliant par 2}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (2\overrightarrow{OA_i} - 2\overrightarrow{OG}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\overrightarrow{OA_i'} - \overrightarrow{OG'}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{G'A_i'} = \vec{0} \Leftrightarrow \text{G'} = f(\text{G}) \text{ est barycentre}$$

du système $(f(A_i);\alpha_i)_{i=1 \text{ à } n}$. On dit que f «conserve» le barycentre.
Ainsi l'application ponctuelle f qui conserve le barycentre est appelée une application affine de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$.

2) **Définition :** On appelle application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$, toute application qui donne pour image du barycentre de tout système de points pondérés de $\mathcal{E}$, le barycentre des points images de ce système.
3) **Théorème :** Une application ponctuelle est une application affine si et seulement si, f conserve le barycentre de tout système de deux points pondérés.

. (f est affine) $\Leftrightarrow$ (f conserve le barycentre de tout système de deux points pondérés) .

Remarque : Les images par une application affine de deux bipoints équipollents sont deux bipoints équipollents. On dit qu'une application affine « conserve » l'équipollence.

4) **Application linéaire associée :**
a) **Définition :** soit f une application affine. L'application linéaire **φ** qui à tout vecteur $\vec{u}$ de représentant (M ; N) associé le vecteur $\varphi(\vec{u}) = \overrightarrow{f(M)f(N)}$ est appelée application linéaire associée à l'application affine f **.**

f

M	M'
N	N'

φ

$\vec{u} = \overrightarrow{MN}$	$\overrightarrow{M'N'} = \varphi(\vec{u}) = \overrightarrow{f(M)f(N)}$

– f est alors appelée application ponctuelle associée à φ.

b) Remarque : soit f une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$. Soit (K ; K') un couple de points homologues c'est-à-dire (f (K) = K '). On appelle application vectorielle associée à f relativement au point K (relativement au couple de points homologues (K ; K')) l'application linéaire notée :

$$\varphi_k : \mathcal{W} \to \mathcal{W}.$$
$$\vec{u} = \overrightarrow{KM} \mapsto \vec{u}' = \overrightarrow{K'M'} = \varphi_k(\vec{u}).$$

5) Détermination d'une application affine :

a) Détermination analytique :

– **Activité :** Soit le plan P muni d'un repère (O ; I ; J).

A (3 ; 2) ; B (1 ; 1) ; C (0 ; 1) trois points non alignés de P d'images respectives

A'(6 ; 6) ; B'(3 ; 3) ; C'(2 ; 1) par une application affine f. Soit M (x ; y) un point de P d'image M' (x' ; y') par f. Exprimer x' et y' en fonction de x et y.

-- 0 --

Soit φ l'application linéaire associée à l'application affine f.

f	
A	A'
B	B'
C	C '
M	M '

φ	
$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{A'B'}$
$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{A'C'}$
$\overrightarrow{AM}$	$\overrightarrow{A'M'}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{A'B'}\begin{pmatrix}-3\\-3\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{A'C'}\begin{pmatrix}-4\\-5\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-3\\y-2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{A'M'}\begin{pmatrix}x'-6\\y'-6\end{pmatrix}$

$$\begin{cases}\varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'}\\ \varphi(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{A'C'}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2\varphi(\overrightarrow{OI}) - \varphi(\overrightarrow{OJ}) = -3\overrightarrow{OI} - 3\overrightarrow{OJ} \quad \times \; par \; (-2)\\ -3\varphi(\overrightarrow{OI}) - \varphi(\overrightarrow{OJ}) = -4\overrightarrow{OI} - 5\overrightarrow{OJ}\end{cases}$$

$\varphi(\overrightarrow{OI}) = \overrightarrow{OI} + 2\overrightarrow{OJ}$. On en déduit que $\varphi(\overrightarrow{OJ}) = \overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OJ}$.

$$\varphi(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{A'M'} \Leftrightarrow \varphi\left[(x-3)\overrightarrow{OI} + (y-2)\overrightarrow{OJ}\right] = (x'-6)\overrightarrow{OI} + (y'-6)\overrightarrow{OJ} \Leftrightarrow$$

$$(x-3)\varphi(\overrightarrow{OI}) + (y-2)\varphi(\overrightarrow{OJ}) = (x'-6)\overrightarrow{OI} + (y'-6)\overrightarrow{OJ} \Leftrightarrow$$

$$[(x-3)+(y-2)]\overrightarrow{OI} + [2(x-3)-(y-2)]\overrightarrow{OJ} = (x'-6)\overrightarrow{OI} + (y'-6)\overrightarrow{OJ} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x'-6 = x-3+y-2\\ y'-6 = 2x-6-y+2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x' = x+y+1\\ y' = 2x-y+2\end{cases}$$ <u>est l'expression analytique de</u> f

Remarque :

- Soit f : $\mathscr{D} \rightarrow \mathscr{D}$ une application

  M(x) $\mapsto$ M'(x')

. (f est affine) $\Leftrightarrow$ (x'= ax + b avec a , b réels) .

- Soit f : $\mathscr{P} \rightarrow \mathscr{P}$ une application

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

. (f est affine) $\Leftrightarrow$ $\left(\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases} \quad a, b, c, a', b', c' \text{ réels} \right)$.

La matrice de l'application linéaire φ associée est $M\varphi = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$

- Soit f : $\mathscr{E} \rightarrow \mathscr{E}$ une application

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

. (f est affine) $\Leftrightarrow$ $\left(\begin{cases} x' = ax + by + cz + d \\ y' = a'x + b'y + c'z + d' \\ z' = a''x + b''y + c''z + d'' \end{cases} \quad a, b, \ldots\ldots, d'' \text{ réels} \right)$.

La matrice de l'application linéaire φ associée est $M\varphi = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$.

- Une application affine est bijective si $\text{dét}\, M\varphi \neq 0$.

b) Détermination par une application linéaire associée et un couple de points :

Une application affine f est entièrement déterminée par la donnée de l'application linéaire associée **φ** et d'un couple de points.

Exemple : soit $\mathscr{P}$ rapporté au repère (O ; I ; J) et **φ**: $\mathscr{V} \rightarrow \mathscr{V}$

$$\vec{u} \mapsto \varphi(\vec{u}) = 2\vec{u}$$

Soit f l'application affine de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ d'application linéaire associée **φ** qui au point K(1 ;2) associe K'(3 ;–1). Donnez l'expression analytique de f .

-- 0 --

Soit M(x ; y) $\mapsto$ M'(x' ; y')

$$f(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{K'M'}=\varphi(\overrightarrow{KM})=2\overrightarrow{KM} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x'-3 \\ y'+1 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=2x+1 \\ y'=2y-5 \end{cases}$$

6) Image d'une droite, d'un plan par une application affine :

a)- Image d'une droite :

Théorème : L'image d'une droite (AB) par une application affine f est :

- la droite passant par f(A) et f(B) si et seulement si f(A) ≠ f(B) .
- l'ensemble $\{f(A)\}$ *si et seulement si* $f(A)=f(B)$.

b)- Image d'un plan :

Théorème : L'image d'un plan (ABC) par une application affine f est :

- le plan passant par f(A) , f(B) et f(C) si et seulement si les trois points f(A) , f(B) et f(C) sont non alignés .
- la droite passant par f(A) , f(B) et f(C) si et seulement si f(A) , f(B) et f(C) sont alignés non tous confondus.
- Le singleton $\{f(A)\}$ *si et seulement si* $f(A); f(B)$ *et* $f(C)$ *sont confondus*.

c)- Conservation du parallélisme :

Théorème : Si une application affine f (de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ ou de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$) transforme une droite ($\mathcal{D}$) en une droite ($\mathcal{D}$'), alors elle transforme toute droite parallèle à ($\mathcal{D}$) en une droite parallèle à ($\mathcal{D}$').
Si une application affine f de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ transforme un plan ($\mathcal{P}$) en un plan ($\mathcal{P}$'), alors elle transforme tout plan parallèle à ($\mathcal{P}$) en un plan parallèle à ($\mathcal{P}$').
On dit que les applications affines conservent le parallélisme.
Remarque : En général une application affine ne conserve pas l'orthogonalité, les distances, le rapport des distances.

7) Ensemble des points invariants par une application affine :

- On dit qu'un point M est invariant par une application affine f ssi $f(M)=M$.
- On dit qu'un ensemble E est globalement invariant par f ssi $f(E)=E$ c'est-à-dire pour tout M de E, $f(M)\in E$.
- E est dit invariant point par point si pour tout point M de E, $f(M)=M$.

III – Transformations Affines :

1) Définition :

On appelle transformation affine toute application affine bijective.

2) Etude de quelques transformations affines :

2-1 Translations :

a) Définition :

On appelle translation de vecteur $\vec{u}$ l'application notée : $t_{\vec{u}}$ de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ ($\mathcal{F}$ désignant $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{E}$) qui à tout point M de $\mathcal{F}$ associe M' de $\mathcal{F}$ tel que: $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

$$\begin{array}{rcl} t_{\vec{u}} : \mathcal{F} & \rightarrow & \mathcal{F} \\ M & \mapsto & M' = t_{\vec{u}}(M) \end{array}$$

. $\boldsymbol{t_{\vec{u}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}}$.

b) Points invariants par une translation:

- Si $\vec{u} = \vec{0}$ alors tout point est invariant ;
- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ alors pas de points invariants.

c) Propriété vectorielle d'une translation :

$$\begin{cases} t_{\vec{u}}(A) = A' \\ t_{\vec{u}}(B) = B' \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}.$$

Remarques :

- ✓ La bijection réciproque de $t_{\vec{u}}$ est $t_{\vec{u}}^{-1} = t_{-\vec{u}}$.
- ✓ $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{(\vec{u}+\vec{v})}$.

d) Expression analytique d'une translation :

Soit $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,)$ et un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Donner l'expression analytique de la translation de vecteur $\vec{u}$. En déduire l'expression analytique de l'application linéaire associée et sa matrice.

-- 0 --

Soit M(x ; y) et M' (x' ; y') son image par $t_{\vec{u}}$.

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases} \quad \text{est l'expression analytique de } t_{\vec{u}}.$$

L'application linéaire associée a pour expression analytique

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases} \quad \text{et sa matrice est } M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ matrice unité}.$$

2- 2 Les Homothéties :

a) Définition : Soit Ω un point de $\mathcal{F}$ et k ∊ $\mathbb{R}^*$ ($\mathcal{F}$ désignant $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{E}$).

On appelle homothétie de centre Ω et de rapport k l'application notée :
$h_{(\Omega;k)}$ de F dans F qui à tout point M associe le point M'.

$$h_{(\Omega;k)} : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$$
$$M \mapsto M'$$

. $\boxed{h_{(\Omega;k)}(M) = M' \iff \overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}}$.

Remarques : $h_{(\Omega,1)}$ est l'identité ; $h_{(\Omega,-1)}$ est la symétrie de centre Ω.

b) Points invariants par une homothétie:

- Si k = 1, alors tout point est invariant ;
- Si k ∊ $\mathbb{R}^*-\{1\}$, alors Ω est le seul point est invariant .

c) Propriété vectorielle:

$$\begin{cases} h(A) = A' \\ h(B) = B' \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{A'B'} = k\,\overrightarrow{AB}$$

Remarques : La réciproque de $h_{(\Omega;k)}$ est $h^{-1}_{(\Omega;k)} = h_{(\Omega;\frac{1}{k})}$.

d) Composée de deux homothéties :

- **Homothéties de même centre Ω :**

$$h_{1(\Omega,k)} \circ h_{2(\Omega,k')} = h_{(\Omega,kk')}$$

- **Homothéties de centres différents :**

Soit $h_{1(A_1,k_1)}$ *et* $h_{2(A_2,k_2)}$ deux homothéties de centres respectifs A_1 ; A_2.

h_1	
M	M_1
N	N_1

h_2	
M_1	M'
N_1	N'

$h_2 0 h_1$	
M	M'
N	N'

D'après la propriété vectorielle on a : $\begin{cases} \overrightarrow{M_1N_1} = k_1\,\overrightarrow{MN} \\ \overrightarrow{M'N'} = k_2\,\overrightarrow{M_1N_1} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{M'N'} = k_1\,k_2\,\overrightarrow{MN}$.

- Si $k_1k_2 = 1$, alors $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$, d'où $h_2 \circ h_1$ est une translation. Cherchons donc le vecteur de translation $\vec{u}$ de $h_2 \circ h_1$. Posons $h_2(A_1) = A'$.

  $h_2 \circ h_1(A_1) = h_2(A_1) = A'$.

  D'où $\overrightarrow{A_1A'} = \vec{u}$ est le vecteur de translation.
- Si $k_1k_2 \neq 1$, alors $\overrightarrow{M'N'} = k_2k_1\,\overrightarrow{MN}$, d'où $h_2 \circ h_1$ est une homothétie de rapport k_1k_2.

Cherchons le centre Ω de $h_2 \circ h_1$.

$$h_2(M_1) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{A_2M'} = k_2\,\overrightarrow{A_2M_1}\ ;$$

$$h_1(M) = M_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{A_1M_1} = k_1\,\overrightarrow{A_1M}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2M_1} = k_1\,\overrightarrow{A_1M}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{A_2M_1} = \overrightarrow{A_2A_1} + k_1\,\overrightarrow{A_1M}$$ d'où écrire que

$h_2 \circ h_1(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{A_2M'} = k_2\,(\overrightarrow{A_2A_1} + k_1\,\overrightarrow{A_1M})$ comme le centre Ω est invariant on a :

$$\overrightarrow{A_2\Omega} = k_2\,\overrightarrow{A_2A_1} + k_2k_1\,\overrightarrow{A_1\Omega} \Leftrightarrow \overrightarrow{A_2\Omega} = k_2\,\overrightarrow{A_2\Omega} + k_2\,\overrightarrow{\Omega A_1} + k_1k_2\,\overrightarrow{A_1\Omega} \Leftrightarrow$$

$$(1-k_2)\,\overrightarrow{A_2\Omega} = k_2\,(1-k_1)\,\overrightarrow{\Omega A_1} \Leftrightarrow (k_2-1)\,\overrightarrow{\Omega A_2} + k_2(k_1-1)\,\overrightarrow{\Omega A_1} = \vec{0}.$$

D'où le centre Ω est le barycentre des points pondérés

$$[A_2, (k_2-1)] \quad et \quad [A_1, k_2(k_1-1)] \quad .$$

e) Expression analytique d'une homothétie :

Soit $\mathscr{P}$ muni d'un repère $(O\,;\vec{i}\,;\,\vec{j}\,)$ Ω (x_0 ; y_0) un point de $\mathscr{P}$ et k un réel non nul. Donner l'expression analytique de $h_{(\Omega,k)}$. En déduire l'expression analytique de l'application linéaire associée puis sa matrice.

-- 0 --

Soit M(x ; y) et M' (x' ; y') son image par $h_{(\Omega,k)}$. $h_{(\Omega,k)}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$

$$\begin{cases} x'-x_0 = k(x-x_0) \\ y'-y_0 = k(y-y_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = kx + (1-k)x_0 \\ y' = ky + (1-k)y_0 \end{cases} \quad est\ l'expression\ analytique\ de\, h_{(\Omega,k)}\,.$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (1-k)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

L'application linéaire associée a pour expression analytique

$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases} \quad et\ \ sa\ \ matrice\ \ est\ \ M = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \quad .$$

2-3 Groupe des homothéties – Translations :

Soient $h_{(O,k)}$ l'homothétie de centre O et de rapport k ; $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$.

- Si $\vec{u} = \vec{0}$, alors $t \circ h = h \circ t = h$;
- Si k = 1, alors $t \circ h = h \circ t = t$;
- Si $\vec{u} \neq \vec{0}\ \ et\ \ k \neq 1$, alors $t \circ h$ est l'homothétie de centre Ω et de rapport k tel que : $\overrightarrow{O\Omega} = \dfrac{1}{1-k}\vec{u}$ $\quad car\ \ t_{\vec{u}}(O) = O' \Leftrightarrow \overrightarrow{OO'} = \vec{u}$.
- Si $\vec{u} \neq \vec{0}\ \ et\ \ k \neq 1$, alors $h \circ t$ est l'homothétie de centre Ω et de rapport k tel que : $\overrightarrow{O\Omega} = \dfrac{k}{1-k}\vec{u}$.

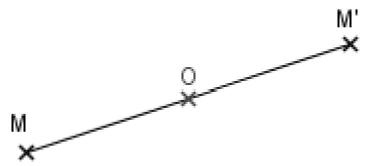
2-4 Symétrie centrale :

a) Définition :

Soit $O(x_o ; y_o)$ un point du plan. On appelle symétrie de centre O, l'application

$$S_O : \mathscr{P} \rightarrow \mathscr{P}$$

$$M(x ; y) \mapsto M'(x' ; y') \textit{ avec O milieu de } [MM']$$



. $S_O(M) = M' \Leftrightarrow$ O est milieu de [MM'] $\Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MO}$.

b) Expression analytique d'une symétrie centrale

$$S_O(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MO} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = 2(x_0 - x) \\ y' - y = 2(y_0 - y) \end{cases} \Leftrightarrow$$

. D'où $\begin{cases} x' = -x + 2x_0 \\ y' = -y + 2y_0 \end{cases}$ *Expression analytique de* S_0 .

c) Ensemble des points invariants

Le centre O de la symétrie centrale S_O est le seul point invariant.

d) Exemple

Soit f l'application affine définie par son expression analytique

$$\begin{cases} x' = -x + 2 \\ y' = -y + 4 \end{cases}$$

- Montrer que f est bijective
- Déterminer les éléments caractéristiques de f
- Quelle est la nature de f ?

Solution

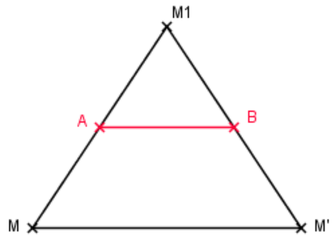
- f est bijective car $dét\, M\varphi = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$
- l'ensemble des points est le point A(1 ; 2)
- f est la symétrie centrale de centre le point A.

Remarques:

☞ Une symétrie centrale de centre O est une homothétie de centre O et de rapport –1. $S_0 = h_{(O,-1)}$;

☞ Une symétrie centrale de centre O est aussi une rotation de centre O et d'angle π (on l'appelle demi-tour).

☞

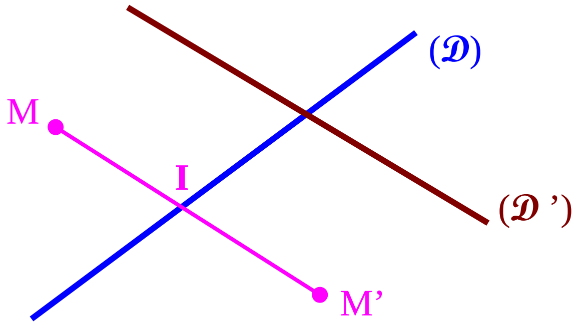


$S_B \circ S_A = t_{2\overrightarrow{AB}}$

2- 5 Symétries axiales :

a) Activité : Soit ($\mathcal{D}$) : x + 2y = 5 et ($\mathcal{D}$') : x – 3y = 1.
Donner l'expression analytique de la symétrie $\mathcal{S}$ par rapport à ($\mathcal{D}$) parallèlement à ($\mathcal{D}$'). Que peut-on dire de $\mathcal{S} \circ \mathcal{S}$?

-- 0 --



Soit M(x ; y) et M' (x' ; y') tel que $\mathcal{S}$(M) = M'. Soit I milieu de [MM'] et $\vec{u}'\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de (D'). $\mathcal{S}$(M) = M' ⇔ $\begin{cases} I \in (D) \\ \overrightarrow{MM'} \; colinéaire \; à \; \vec{u}' \end{cases}$ ⇔

$$\begin{cases} \dfrac{x+x'}{2} + 2\dfrac{(y+y')}{2} = 5 \\ \begin{vmatrix} x'-x & 3 \\ y'-y & 1 \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{1}{5}(-x-12y+30) \\ y' = \dfrac{1}{5}(-2x+y+10) \end{cases} \quad est \quad l'expression \quad analytique \quad de \quad S.$$

$\mathcal{S} \circ \mathcal{S}$ = id. On dit que $\mathcal{S}$ est involutive.

b) Définition :

Une application affine f telle que $f \circ f = Id$ est dite **involutive**.
Toute involution est une symétrie.

2- 6 Symétrie orthogonale :

a) Définition : Soit (D) une droite du plan, on appelle symétrie orthogonale d'axe (D) ou réflexion d'axe (D) l'application

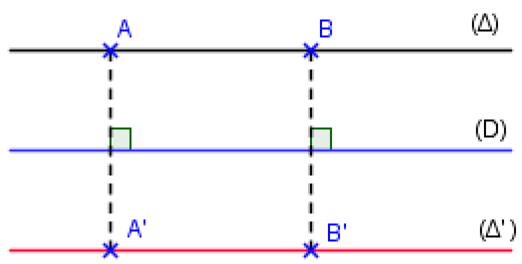
$S_D : \mathscr{P} \rightarrow \mathscr{P}$

M $\mapsto$ M' telle que (D) est la médiatrice du segment [MM'].

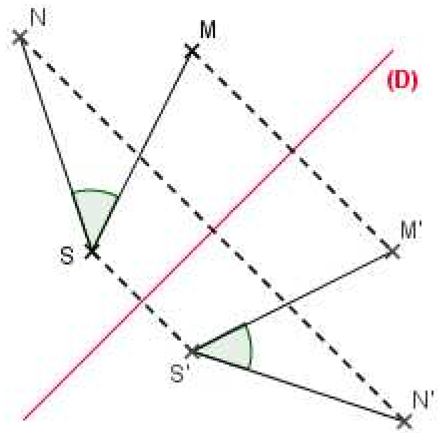
. $S_D(M)=M' \;\Leftrightarrow\; (D)$ est la médiatrice du segment [MM'] .

b) Exercice

Construire les images de la droite (Δ) et l'angle orienté (SM,SN) par la symétrie orthogonale d'axe (D).



$S_D(\Delta)=\Delta'$ et $\Delta // \Delta'$



L'angle $(S'M',S'N')=-(SM,SN)$

c) Expression analytique

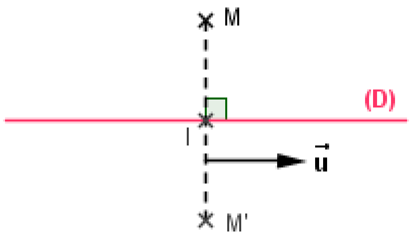
Soient une droite (D): ax+by +c = 0 et $\vec{u}\,(-b\,;\,a)$ un vecteur directeur de (D).
M'(x';y') le symétrique de M(x;y) par S_D la symétrie orthogonale d'axe (D).

$$S_D(M)=M' \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MM'}\bullet\vec{u}=0 \\ Le\ \ milieu\ \ I\ \ de\ [MM'] \in (D) \end{cases}$$

Exemple :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé déterminer l'expression analytique de la symétrie orthogonale S_D d'axe la droite (D) : 2x + 3y – 4 = 0.

Solution



1ère méthode : On sait que $\vec{u}\,(-3\ ;\ 2)$

$$\overrightarrow{MM'}\perp\vec{u} \iff \overrightarrow{MM'}\bullet\vec{u}=0 \iff \begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}=0 \iff -3x'+2y'=-3x+2y \quad (1)$$

Le milieu I de [MM'] appartient à (D) est équivalente à

$$2\left(\frac{x+x'}{2}\right)+3\left(\frac{y+y'}{2}\right)-4=0 \iff 2x'+3y'=8-2x-3y \quad (2)$$

En résolvant le système formé par (1) et (2) on a

$$\begin{cases} -3x'+2y'=-3x+2y \\ 2x'+3y'=8-2x-3y \end{cases}\begin{vmatrix} \times(2) \\ \times(3) \end{vmatrix} \iff \begin{cases} -6x'+4y'=-6x+4y \\ 6x'+9y'=24-6x-9y \end{cases} \iff \begin{cases} 13y'=24-12x-5y \\ 2x'=8-2x-3y+3y' \end{cases}$$

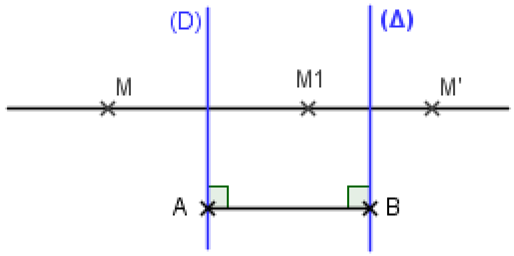
$$\iff \begin{cases} x'=\frac{1}{13}(16+5x-12y) \\ y'=\frac{1}{13}(24-12x-5y) \end{cases} \iff \iff \begin{cases} x'=\frac{1}{13}(15x-12y+16) \\ y'=\frac{1}{13}(-12x-5y+24) \end{cases} \text{ est l'expression analytique de } S_D$$

d) Ensemble des points invariants

L'ensemble des points invariant par une symétrie orthogonale S_D est l'axe (D).

e) Remarques :

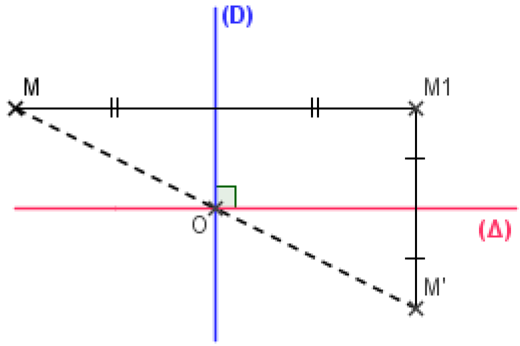
- **Composée de 2 symétries orthogonales d'axes parallèles**



. (D) et (Δ) sont parallèles .

. $S_{\Delta} \circ S_D = t_{2\overrightarrow{AB}}$.

- **Composée de 2 symétries orthogonales d'axes orthogonaux**

	. (D) et (Δ) sont perpendiculaires . . $S_{\Delta} \circ S_D = S_O$.

2- 7 Rotation :

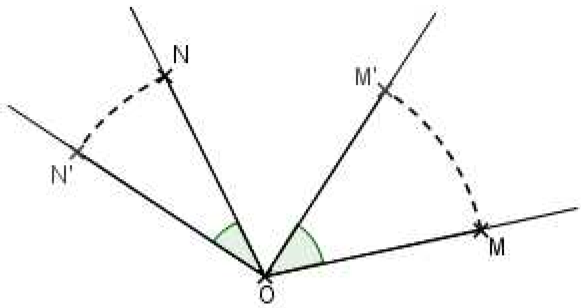
a) Définition

Étant donnés un point O du plan et un angle orienté $(\hat{\alpha})$. On appelle rotation de centre O et d'angle $(\hat{\alpha})$ l'application :

$$r : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$$

M ↦ M ' telle que

- Si M = O alors M' = O
- Si M ≠O alors OM' = OM et $(\widehat{OM, OM'}) = (\hat{\alpha})$

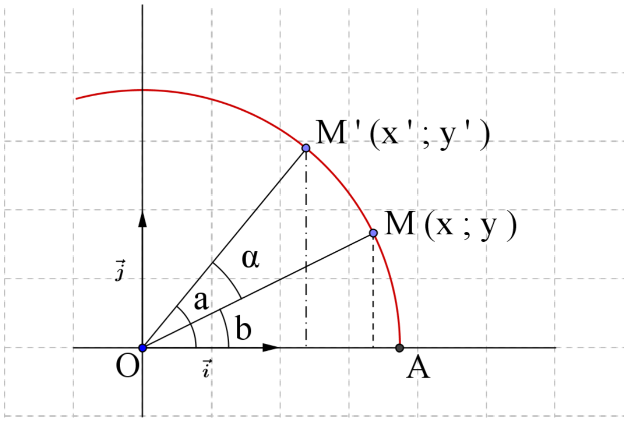


$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{r} \\ \hline M & M' \\ N & N' \\ O & O \end{array}$$

b) Remarques
- La rotation d'angle nul de centre O est l'identité.
- La rotation d'angle plat de centre O est la symétrie de centre O.

c) Ensemble des points invariants
Si l'angle est non nul, le seul point invariant est le centre.

d) Expression analytique
Considérons le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$
soit la rotation $r_{(O;\alpha)}$ de centre O et d'angle α, les points M(*x ; y*) et M'(*x' ; y'*) du plan, $\hat{a}$ et $\hat{b}$ des mesures des angles de vecteurs.



On a : α =(a–b)+2*k*π

$$\begin{cases} x = OM\cos b \\ y = OM\sin b \end{cases} ; \begin{cases} x' = OM\cos a \\ y' = OM\sin a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = OM\cos(\alpha + b) \\ y' = OM\sin(\alpha + b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = OM\,(\cos\alpha\cos b - \sin\alpha\sin b) \\ y' = OM\,(\sin\alpha\cos b + \sin b\cos\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = (OM\cos b)\cos\alpha - (OM\sin b)\sin\alpha \\ y' = (OM\cos b)\sin\alpha + (OM\sin b)\cos\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x' = (\cos\alpha)x - (\sin\alpha)y \\ y' = (\sin\alpha)x + (\cos\alpha)y \end{cases}$$

e***st l'expression analytique de la rotation*** $r_{(O;\alpha)}$ ***de centre O et d'angle*** α ***dans le repère orthonormé*** $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$

e) Formule du changement de repère

Soit M(x ; y) dans le repère $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ et M(x ; y) dans le repère $\left(O\,;\vec{i}\,'\,;\vec{j}\,'\right)$

On a : $\begin{cases} \vec{i}\,' = \cos\alpha\,\vec{i} - \sin\alpha\,\vec{j} \\ \vec{j}\,' = \sin\alpha\,\vec{i} + \cos\alpha\,\vec{j} \end{cases}$;

$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\overrightarrow{OM} = X(\cos\alpha\vec{i} - \sin\alpha\,\vec{j})\vec{i} + Y(-\sin\alpha\vec{i} + \cos\alpha\,\vec{j})$

D'où $x\vec{i} + y\vec{j} = X(\cos\alpha\vec{i} - \sin\alpha\,\vec{j})\vec{i} + Y(-\sin\alpha\vec{i} + \cos\alpha\,\vec{j}) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha \\ y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha \end{cases}$$

f) Composition de rotations : Soit $f = r'_{(O';\alpha')} \circ r_{(O;\alpha)}$

- Si O = O' alors f est une rotation de centre O et d'angle $\alpha + \alpha'$, $f = R(O;\alpha+\alpha')$
- Si O≠ O' et $\alpha + \alpha' = 2k\pi \quad (k \in Z)$ alors f est une translation de vecteur $\overrightarrow{MM'}$ ou $f(M) = M'$ *et* $f = t_{\overrightarrow{MM'}}$.
- Si O≠ O' et $\alpha + \alpha' \neq 2k\pi \quad (k \in Z)$ alors f est une rotation de centre le point invariant par f **et d'angle** $\alpha+\alpha'$. $f = R(I;\alpha+\alpha')$ où $I = f(I)$.

IV- Projections affines :

1) Activité :

Soit ($\mathscr{D}$) ; x + 2y = 5 et ($\mathscr{D}$') : x – 3y = 1.

a) Donner l'expression analytique de la projection p sur ($\mathscr{D}$) parallèlement à ($\mathscr{D}$').

b) Que peut-on dire de $p \circ p$?

-- 0 --

a) Soit M(x ; y) et M' (x' ; y') tel que p(M) = M' et $\vec{u}\,'\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de (D'). (Figure 1).

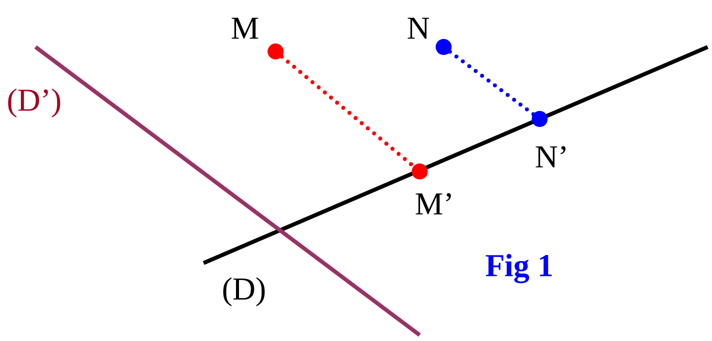


Fig 1

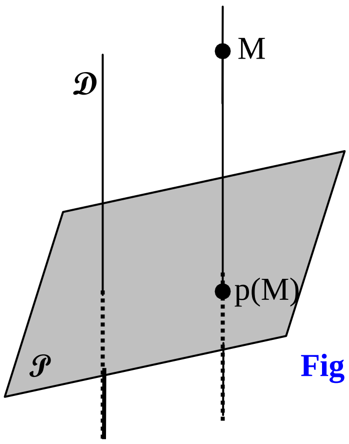


Fig 2

$$p(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} M' \in (D) \\ \overrightarrow{MM'} \text{ colinéaire à } \vec{u}' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'+2y' = 5 \\ x'-x-3y'+3y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{3}{5}(x-3y+\frac{15}{2}) \\ y' = \frac{1}{5}(-x+3y+5) \end{cases} \text{ qui est l'expression analytique de } p$$

b) $p \circ p = p$.

2) Définition :

Soit $\mathscr{P}$ un plan et ($\mathscr{D}$) une droite sécante à $\mathscr{P}$. (Figure 2).
On appelle projection sur le plan $\mathscr{P}$ parallèlement à la droite ($\mathscr{D}$) l'application p de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui, à tout point M de $\mathcal{E}$ associe le point M' intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite parallèle à ($\mathscr{D}$) passant par M.