

I – Fonction vectorielle de Leibniz:

Dans ce chapitre désignons par X une droite, un plan, ou un espace, et $\overrightarrow{X}$ l'ensemble des vecteurs. Appelons **point pondéré** le couple $(A; \alpha)$ formé par un point A de X et α un réel appelé coefficient ou masse de A .

Considérons une famille finie :

$[(A_1; \alpha_1); (A_2; \alpha_2); (A_3; \alpha_3); \dots; (A_i; \alpha_i); \dots; (A_n; \alpha_n)]$ de n points pondérés. Nous noterons cette famille finie $[(A_i; \alpha_i)_{i=1 \text{ à } n}]$; c'est une famille de couples.

1– Définition:

On appelle fonction vectorielle de Leibniz associée à la famille $(A_i; \alpha_i)_{i=1 \text{ à } n}$

l'application $\vec{f} : X \rightarrow \overrightarrow{X}$

$$M \mapsto \vec{f}(M) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i}.$$

$$\vec{f}(M) = \alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n}.$$

2– Remarques:

- Si $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$ alors $\vec{f}$ est **constante**.

- Si $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$ alors $\vec{f}$ est **bijective**.

II – Barycentre de n points pondérés:

1– Définition: On appelle barycentre de la famille des points pondérés $(A_i; \alpha_i)_{i=1 \text{ à } n}$ le point **G unique** en lequel la fonction vectorielle de Leibniz

s'annule. $\vec{f}(G) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$.

O étant un point quelconque de X on a : $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{OA_i} \right)$.

- Si $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_n$; alors G est l'isobarycentre ou l'équibarycentre des points $[(A_1; \alpha_1); (A_2; \alpha_2); (A_3; \alpha_3); \dots; (A_i; \alpha_i); \dots; (A_n; \alpha_n)]$.

2– Propriétés du barycentre:

P₁) Le barycentre ne change ne pas si on change l'ordre des couples

$(A_i; \alpha_i)_{i=1 \text{ à } n}$;

P₂) $\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n (k\alpha_i) \overrightarrow{GA_i} = \vec{0} ; (k \in \mathbb{R}^*) ;$

P₃) La recherche du barycentre plusieurs points peut se ramener de proche en proche à la recherche du barycentre de deux points.

3 – Coordonnées du barycentre:

Plaçons-nous dans le cas où X est l'espace E . Soit $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ un repère cartésien de E et les points $A_i (x_i; y_i; z_i)$; $G_i (x_G; y_G; z_G)$ est barycentre des $(A_i; \alpha_i)$ a pour coordonnées :

$$\therefore \quad X_G = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i}{\sum \alpha_i} \quad ; \quad Y_G = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i}{\sum \alpha_i} \quad ; \quad Z_G = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i z_i}{\sum \alpha_i} .$$

III – Fonction numérique (ou scalaire) de Leibniz:

1– Définition et Formule de Leibniz:

On appelle fonction scalaire de Leibniz associée à la famille $(A_i; \alpha_i)_{i=1 \text{ à } n}$

l'application $f : X \rightarrow \mathbb{R}$

$$M \mapsto f(M) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i}^2 .$$

$$\therefore f(M) = \alpha_1 MA_1^2 + \alpha_2 MA_2^2 + \dots + \alpha_n MA_n^2 .$$

Quels que soient M et O de X on a : $f(M) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i}^2 \Leftrightarrow f(M) = \sum_{i=1}^n \alpha_i (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_i})^2 \Leftrightarrow$

$$f(M) = \sum_{i=1}^n \alpha_i (\overrightarrow{MO}^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OA_i} + \overrightarrow{OA_i}^2) \Leftrightarrow f(M) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MO}^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{OA_i} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{OA_i}^2 .$$

$$\text{D'où : } \therefore f(M) = f(O) + 2\overrightarrow{MO} \cdot \vec{f}(O) + \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right) MO^2 .$$

- 1^{er} cas : Si $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$ alors $\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{OA_i} = \vec{f}(O) = \vec{v}$ est un vecteur constant.

$$\therefore f(M) = f(O) + 2\overrightarrow{MO} \cdot \vec{v} \quad \textbf{(1)} .$$

Remarque :

Si $\vec{v} = \vec{0}$ alors la fonction scalaire est une fonction constante.

- 2^{ème} cas : Si $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$ alors il existe un point unique G barycentre des points

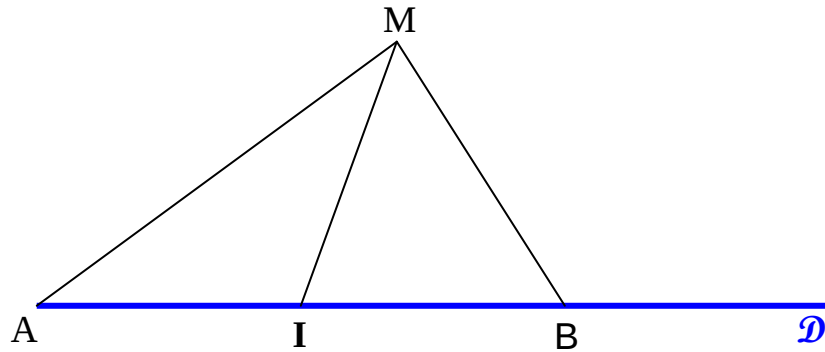
pondérés $(A_i; \alpha_i)_{i=1 \text{ à } n}$ tel que $\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$. On a : $f(M) = f(G) + \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right) MG^2 \quad \textbf{(2)}$

Les formules **(1)** et **(2)** sont connues sous le nom de « **formules de Leibniz** ».

2 – Cas Particuliers :

Soit A et B deux points d'une droite $(\mathcal{D})$, I le milieu du segment $[AB]$.

Soit M un point quelconque de X , H le projeté orthogonal de M sur $(\mathcal{D})$.



- En appliquant ce qui précède aux points pondérés (A,1) ; (B,1) on obtient le théorème de la médiane : $MA^2 + MB^2 = 2 MI^2 + \frac{AB^2}{2}$.
- En utilisant les deux points pondérés (A,1) ; (B,-1) on obtient : $MA^2 - MB^2 = IA^2 - IB^2 + 2 \vec{MI} \cdot \vec{v}$ avec $\vec{v} = \vec{MA} - \vec{MB} = \vec{BA}$.
 $\vec{MA}^2 - \vec{MB}^2 = 2 \vec{IM} \cdot \vec{AB} = 2 \vec{IH} \times \vec{AB}$.

3 – Ensemble des points M tels que $f(M) = k$ ($k \in \mathbb{R}$) :

Etant donnés n points pondérés $(A_i ; \alpha_i)_{i=1 \text{ à } n}$ et k une constante réelle.

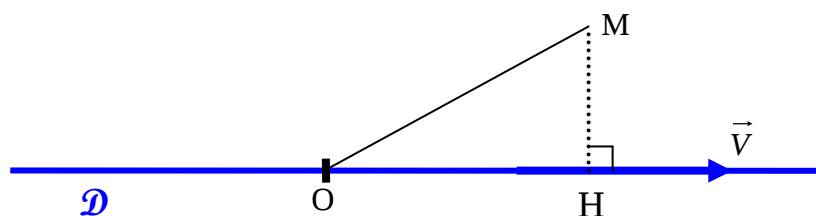
Etudions l'ensemble ($\mathcal{E}$) des points M de X tels que $f(M)=k$.

$$f(M) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{MA_i}^2 = k \Leftrightarrow f(M) = f(O) + 2 \vec{MO} \cdot \vec{v} + \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right) MO^2 = k.$$

- **1^{er} cas** : Si $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$ on sait que $\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{OA_i} = \vec{f}(O) = \vec{v}$ est un vecteur constant on a :

$$f(O) + 2 \vec{MO} \cdot \vec{v} = k \Leftrightarrow 2 \vec{MO} \cdot \vec{v} = k - f(O) \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{OM} = \frac{f(O) - k}{2}.$$

- Si $\vec{v} = \vec{0}$ et $f(O) \neq k$ alors l'ensemble ($\mathcal{E}$) = $\emptyset$.
- Si $\vec{v} = \vec{0}$ et $f(O) = k$ alors l'ensemble ($\mathcal{E}$) est l'espace X.
- Si $\vec{v} \neq \vec{0}$, Soit $\mathcal{D}(O, \vec{v})$ la droite passant O et de vecteur directeur $\vec{v}$. Soit H le projeté orthogonal d'un point M de X sur $\mathcal{D}$.



$$M \in (E) \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{OM} = \frac{f(O) - k}{2} \Leftrightarrow \|\vec{v}\| \times \overline{OH} = \frac{f(O) - k}{2} \Leftrightarrow \overline{OH} = \frac{f(O) - k}{2 \times \|\vec{v}\|}.$$

L'ensemble ($\mathcal{E}$) est les points M de X qui se projettent perpendiculairement sur $\mathcal{D}$ au point H.

Remarque :

- Sur une droite, l'ensemble ($\mathcal{E}$) des points M cherchés est $\{H\}$.
- Dans le plan, l'ensemble ($\mathcal{E}$) des points M cherchés est la droite (Δ) perpendiculaire à $\mathcal{D}(O, \vec{v})$ au point H.
- Dans l'espace, l'ensemble ($\mathcal{E}$) des points M cherchés est le plan ($\mathcal{P}$) perpendiculaire à $\mathcal{D}(O, \vec{v})$ au point H.

- **2^{ème} cas :** Si $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$ alors il existe un point unique **G** barycentre des points

pondérés $(A_i ; \alpha_i)_{i=1 \text{ à } n}$. On a $f(M) = k \Leftrightarrow f(G) + 2\overrightarrow{MG} \cdot \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i} + \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right) MG^2 = k$

$\Leftrightarrow$

$$f(G) + \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right) MG^2 = k \Leftrightarrow \cdot \quad MG^2 = \frac{k - f(G)}{\sum \alpha_i} \cdot$$

- Si $\frac{k - f(G)}{\sum \alpha_i} < 0$, alors l'ensemble (E) des points M cherchés est le vide.
- Si $\frac{k - f(G)}{\sum \alpha_i} = 0$, alors l'ensemble ($\mathcal{E}$) des points M cherchés est $\{G\}$.
- Si $\frac{k - f(G)}{\sum \alpha_i} > 0$, alors $MG = \sqrt{\frac{k - f(G)}{\sum \alpha_i}}$, d'où l'ensemble ($\mathcal{E}$) des points M cherchés est le cercle (respectivement la sphère) de centre G et de rayon $r = MG$.

4 – Calcul de $f(G)$ (G barycentre) :

Faisons le calcul pour $n = 3$. Soient $(A_1 ; \alpha_1) ; (B ; \alpha_2) ; (C ; \alpha_3)$ trois points pondérés de barycentre le point G. La formule de Leibniz ($\forall M \in X$),
 $f(M) = f(G) + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)MG^2$.

$$\begin{cases} f(A) = f(G) + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)AG^2 \\ f(B) = f(G) + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)BG^2 \\ f(C) = f(G) + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)CG^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 f(A) = \alpha_1 f(G) + \alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)AG^2 \\ \alpha_2 f(B) = \alpha_2 f(G) + \alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)BG^2 \\ \alpha_3 f(C) = \alpha_3 f(G) + \alpha_3(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)CG^2 \end{cases}$$

En faisant la somme membre à membre on déduit que :

$$\cdot \quad f(G) = \frac{\alpha_1 \alpha_2 AB^2 + \alpha_1 \alpha_3 AC^2 + \alpha_2 \alpha_3 BC^2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \cdot$$

5 – Ensemble des points M du plan tels que $\frac{MA}{MB} = k$:

Soit A et B deux points distincts du plan, k un réel strictement positif.

$$\frac{MA}{MB} = k \Leftrightarrow MA^2 = k^2 MB^2 \Leftrightarrow \cdot \quad MA^2 - K^2 MB^2 = 0 \cdot$$

- **1^{er} cas** : Si $k = 1$ alors $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$, alors l'ensemble $(\mathcal{E})$ des points M cherchés est la droite (Δ) médiatrice du segment $[AB]$.

- **2^{ème} cas** : Si $k \neq 1$ alors $\sum \alpha_i \neq 0$, il existe un point unique G barycentre des points pondérés : $(A, 1)$; $(B, -k^2)$.

$$\overrightarrow{MA}^2 - k^2 \overrightarrow{MB}^2 = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} + k \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} - k \overrightarrow{MB}) = 0$$

Soit G_1 barycentre de $(A, 1)$ et (B, k) $\Leftrightarrow \overrightarrow{G_1A} + k \overrightarrow{G_1B} = \vec{0}$.

Soit G_2 barycentre de $(A, 1)$ et $(B, -k)$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{G_2A} - k \overrightarrow{G_2B} = \vec{0}$.

$$\begin{aligned} & (\overrightarrow{MA} + k \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} - k \overrightarrow{MB}) = 0 \Leftrightarrow \\ & (\overrightarrow{MG_1} + \overrightarrow{G_1A} + k \overrightarrow{MG_1} + k \overrightarrow{G_1B}) \cdot (\overrightarrow{MG_2} + \overrightarrow{G_2A} - k \overrightarrow{MG_2} - k \overrightarrow{G_2B}) = 0 \Leftrightarrow \\ & [(\overrightarrow{MG_1} + k \overrightarrow{MG_1}) + (\overrightarrow{G_1A} + k \overrightarrow{G_1B})] \cdot [(\overrightarrow{MG_2} - k \overrightarrow{MG_2}) + (\overrightarrow{G_2A} - k \overrightarrow{G_2B})] = 0 \Leftrightarrow \\ & [(1+k)\overrightarrow{MG_1}] \cdot [(1-k)\overrightarrow{MG_2}] = 0 \Leftrightarrow \\ & \overrightarrow{MG_1} \cdot \overrightarrow{MG_2} = 0. \end{aligned}$$

D'où l'ensemble des M cherchés est le cercle de diamètre $[G_1 G_2]$.

Exemple d'application :

Soit a un nombre réel strictement positif, OAB un triangle rectangle en O tels que : $OA = 2a$; $OB = a$. Déterminer et construire l'ensemble $(\mathcal{E})$ des points M du plan tel que : $\frac{MA}{MB} = 2$. Montrer que O appartient à $(\mathcal{E})$.

--- 0 ---

$$\frac{MA}{MB} = 2 \Leftrightarrow MA^2 - 4 MB^2 = 0 \quad (\overrightarrow{MA} + 2 \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} - 2 \overrightarrow{MB}) = 0.$$

Soit G_1 barycentre de $(A, 1)$ et $(B, 2)$ on a : $\overrightarrow{G_1A} + 2 \overrightarrow{G_1B} = \vec{0}$ fixons A on obtient

$\overrightarrow{AG_1} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB}$. Soit G_2 barycentre de $(A, 1)$ et $(B, -2)$ on a : $\overrightarrow{G_2A} - 2 \overrightarrow{G_2B} = \vec{0}$ fixons A

on obtient $\overrightarrow{AG_2} = 2 \overrightarrow{AB}$. Donc $(\overrightarrow{MA} + 2 \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} - 2 \overrightarrow{MB}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MG_1} \cdot \overrightarrow{MG_2} = 0$.

D'où l'ensemble $(\mathcal{E})$ des points M est le cercle de diamètre $[G_1 G_2]$.

- Montrons que O appartient à $(\mathcal{E})$. Si $M = O$ on a : $\frac{MA}{MB} = 2 \Leftrightarrow \frac{OA}{OB} = 2 \Leftrightarrow \frac{2a}{a} = 2 \Leftrightarrow 2 = 2$.

D'où O appartient à $(\mathcal{E})$.

