NOTION DE DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Site MathsTICE de Adama Traoré Lycée Technique Bamako

I– Introduction :

Soit f une fonction dérivable au point $x_0 = 0$. Il existe donc un intervalle ouvert de centre 0 et de rayon r, noté I (0 ; r), inclus dans l'ensemble de définition de f, et une fonction numérique Ɛ tels que :

$$\begin{cases} \forall x \in I(0;r),\ f(x) = f(0) + x\,f'(0) + x\mathcal{E}(x) \\ \lim\limits_{x \to 0} \mathcal{E}(x) = 0 \end{cases}$$

Cette écriture de *f(x)* constitue le développement limité d'ordre 1 de *f* au voisinage de 0

Remarque : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \Leftrightarrow f(x) = f(0) + x\,f'(0) + x\mathcal{E}(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$. D'où l'existence du développement limité d'ordre 1 de f en 0 est équivalente à la dérivabilité de f en 0 et donc de $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$.

II– Définitions :

a) Définition 1 : Dire qu'une fonction f admet un développement limité d'ordre n (n $\in \mathbb{N}$) au voisinage de 0 signifie qu'il existe un intervalle I (0 ; r) $\subset \mathcal{D}_f$ et une fonction Ɛ tels que $\forall$x $\in$ I (0 ; r) :

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + x^n \mathcal{E}(x)$$

avec $\lim\limits_{x \to 0} \mathcal{E}(x) = 0$. (Formule de Mac Laurin)

En posant $P_n(x) = f(0) + \dfrac{x}{1!} f'(0) + \dfrac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots\ldots + \dfrac{x^n}{n!} f^{(n)}(0)$

et $R_n(x) = x^n\, Ɛ(x)$ on a $\forall$x $\in$ I (0 ; r) :

$$\begin{cases} f(x) = P_n(x) + R_n(x) \\ \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{R_n(x)}{x^n} = 0 \end{cases}$$

L'écriture de *f(x)* sous la forme $P_n(x) + R_n(x)$, s'appelle développement limité d'ordre n en 0 de f. P_n s'appelle la partie régulière du développement limité, et la fonction $x \mapsto x^n\, Ɛ(x) = R_n(x)$ s'appelle le reste du développement limité. $P_n(x)$ s'appelle l'approximation polynomiale de degré n de la fonction f.

b) Exemple de développement limité d'ordre n en 0 :

Trouver le développement limité d'ordre 6 de la fonction cosinus.
En déduire les approximations polynomiales de degré 4 et 3 de cosinus.

Réponse : $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + x^6\varepsilon_1(x)$.

$P_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}$ est l'approximation polynomiale de degré 4 de cos en 0.

$P_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + 0x^3$ est l'approximation polynomiale de degré 3 de cos en 0.

III– Développements limités d'ordre 3 en 0 des fonctions usuelles:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon_1(x) \qquad avec \qquad \lim_{x\to 0}\varepsilon_1 = 0$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon_2(x) \qquad avec \qquad \lim_{x\to 0}\varepsilon_2(x) = 0$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon_3(x) \qquad avec \qquad \lim_{x\to 0}\varepsilon_3(x) = 0$$

$$tgx = x + \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon_4(x) \qquad avec \qquad \lim_{x\to 0}\varepsilon_4(x) = 0$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon_5(x) \qquad avec \qquad \lim_{x\to 0}\varepsilon_5(x) = 0$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + x^3\varepsilon_6(x) \qquad avec \qquad \lim_{x\to 0}\varepsilon_6(x) = 0$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^3\varepsilon_7(x) \qquad avec \qquad \lim_{x\to 0}\varepsilon_7(x) = 0$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^3\varepsilon_8(x) \qquad avec \qquad \lim_{x\to 0}\varepsilon_8(x) = 0$$

IV– Propriétés:

P_1) Une fonction f admet un développement limité en 0 d'ordre 0 si, et seulement si, elle est continue en 0.
P_2) si une fonction admet un développement limité en 0, alors celui-ci est unique.

V– Applications des développements limités en zéro:

1) Déterminer $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$ $\quad x\in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[-\{\,0\,\}$;

Pour $x\in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[-\{\,0\,\}$ *On a* $\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}=\frac{x-\sin x}{x\sin x}$.

Ecrivons le développement limité d'ordre 3 de la fonction sinus en 0.

$$\sin x = x-\frac{x^3}{6}+x^3\varepsilon(x) \qquad avec \qquad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$$

$$\forall x\in I(0;\frac{\pi}{2})-\{\,0\,\},\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-x+\frac{x^3}{6}}{x^2-\frac{x^4}{6}}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{6-x^2}\right)=0$$

b) Déterminer $\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x\sin x-x}{x^2}\right)$.

Cherchons les développements limités d'ordre 3 en 0.

$$e^x\times\sin x=\left[1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+x^3\varepsilon_1(x)\right]\left[x-\frac{x^3}{6}+x^3\varepsilon_2(x)\right] \quad avec \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon_1(x)=0 \quad et \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon_2(x)=0$$

$$e^x\times\sin x=\left[x+x^2+\frac{x^3}{3}+x^3\varepsilon(x)\right] \quad avec \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x\sin x-x}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+x^2+\frac{x^3}{3}-x}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^3+3x^2}{3x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+3}{3}\right)=1.$$

VI– Développement limité en un point x_0 = a :

Si f admet une dérivée troisième en x_0 ; elle admet un développement limité d'ordre n en x_0=a qui s'écrit : $\forall x \in I(0\,;\,r)$

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\frac{(x-a)^3}{3!}f'''(a)+..+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+(x-a)^n\varepsilon(x)$$

avec $\lim_{x\to a}\mathcal{E}(x)=0$ (Formule de Taylor – Lagrange).

Exemples :

Déterminer les développements limités d'ordre 3 en x_0 des fonctions suivantes :

a) f(x) = lnx et x_0=1 : b) f(x) = e^x et x_0 = 1 ; c) f(x) = sinx et $x_0 = \frac{\pi}{4}$.