ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Site MathsTICE de Adama Traoré Lycée Technique Bamako

I– Généralités :

1) – Définitions 1 : On appelle équation différentielle d'ordre n , (n ϵ ℕ) toute équation de la forme **F(x ; y(x) ;y'(x) ; y''(x) ; …….. ; y^n(x)) = 0** où **F** est une fonction de (n+1) variables, où y est la fonction inconnue supposée n fois dérivable de dérivées successives y' ; y'' ; y''' ;…… ; y^n de la variable x.

Exemples : y' + y – x = 0 est une équation différentielle du 1^er^ ordre.

y''+ 2y' + 4y + 2x– 5 = 0 est une équation différentielle du 2^ème^ ordre.

2) – Solutions d'une équation différentielle :

- **Définition 2 :** Etant donnée une équation différentielle d'ordre n, on appelle solution de cette équation différentielle toute fonction f définie sur un intervalle **I** de ℝ; n fois dérivable sur **I** et vérifiant l'équation différentielle donnée pour tout x de **I**.

- **Remarque :** Si **U** est une fonction définie sur **I** et continue alors l'équation différentielle **y' = U(x)** admet comme solution toute fonction primitive de **U** sur **I**.

- **Exemple 1 :** Soit l'équation différentielle y' = 6x + 2.

Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions f définies par :

$f(x) = \int (6x+2)dx \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = 3x^2 + 2x + c$.

- **Exemple 2 :** Soit $y' = \dfrac{-\sin x}{\cos x}$.

Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions f définies par :

$f(x) = \int -\dfrac{\sin x}{\cos x}\,dx \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = \ln\left|\cos x\right| + c$.

- **Définition 3 :** Résoudre ou intégrer une équation différentielle c'est trouver toutes les fonctions f définies sur **I** et vérifiant l'équation différentielle. Toute fonction f solution de l'équation différentielle est appelée est encore appelée intégrale de l'équation différentielle.

II– Équations différentielles linéaire du 1^er^ ordre à coefficients constants sans second membre :

1 - Définition 4 : C'est toute équation qui peut s'écrire sous la forme

(E) : ay ' + by = 0 . b est un réel et a un réel non nul.

2 - Solutions de (E) : ay' + by = 0 :

a-/ Notion d'équation caractéristiques de (E) :

Recherchons une condition nécessaire et suffisante sur le nombre réel **r** pour que la fonction y : ↦ e^{rx} soit solution de (E). $y = e^{rx} \Rightarrow y' = r\,e^{rx}$; y est solution de (E) si et seulement si elle vérifie (E). $ar\,e^{rx} + b\,e^{rx} = 0 \Leftrightarrow e^{rx}(ar + b) = 0 \Leftrightarrow ar+b = 0$. **ar + b = 0 (est appelée équation caractéristique de (E)).**

ar +b = 0 ⇔ **r =** $\dfrac{-b}{a}$.

Les solutions de (E) sont les fonctions f définies par : **f (x) = K×e^{rx} ; K ϵ ℝ** .

- Exemple : Résoudre l'équation différentielle (E) : 2y' – y = 0

L'équation caractéristique est : 2r – 1 = 0 ⇔ r = $\frac{1}{2}$. Les solutions de (E) sont les fonctions f définies par : $f(x) = K\,e^{\frac{1}{2}x}$, $K \in IR$.

III– Équations différentielles linéaire du second ordre à coefficients constants sans 2$^{\text{ème}}$ membre :

1- Définition 5 : C'est toute équation qui peut s'écrire sous la forme

(E) : ay '' + by' +cy = 0 .

Où b et c sont des réels et a un réel non nul.

2- Résolution de l'équation différentielle ay''+ by' + cy = 0 :

a-/ Recherche d'une solution particulière :

Notons (E) : ay''+ by' + cy = 0. Soit r ϵ ℝ, et une fonction U : x ↦ e^{rx}.
Cherchons le réel r tel que U soit solution de (E) . U est solution de (E) si et seulement si : aU'' + bU' + cU = 0 ; or U(x) = e^{rx} ⇒ U'(x) = r e^{rx} ⇒ U''(x) = r^2 e^{rx}

.D'où on a: e^{rx} (ar^2 + br + c) = 0⇒**ar^2+br+c=0 (équation caractéristique de (E).)** .

b-/ Définition 6 :

On appelle équation caractéristique de l'équation différentielle **(E):**
ay''+ by'+cy = 0, l'équation d'inconnue r réel ou complexe : **ar^2 + br + c = 0.**

c-/ Théorème (admis) :

Si l'équation caractéristique : **ar^2 + br + c = 0** admet	Alors les solutions sont les fonctions f définies sur ℝ par
2 racines réelles : r_1 et r_2	$f(x) = Ae^{r_1 x} + B\,e^{r_2 x}$; A ϵ ℝ; B ϵ ℝ.
1 racine double réelle : r_0	$f(x) = (A x + B)\, e^{r_0 x}$; A ϵ ℝ; B ϵ ℝ.
2 racines complexes conjuguées : $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$	$f(x) = (A \cos \beta x + B \sin \beta x)\, e^{\alpha x}$; A ϵ ℝ ; B ϵ ℝ

Exemples:

Déterminer pour les équations différentielles suivantes la fonction f vérifiant :

1/ (E_1) : y'' + y' – 6y = 0 sachant que f(0) = 1 et f'(0) = – 8.

2/ (E_2) : y'' + 6y' + 9y = 0 sachant que f(0) = 4 et f'(0) = 1.

3/ (E_3) : y'' – 6y' + 13y = 0 sachant que f(0) = 3 et f'(0) = 5.