

Fonction Exponentielle Népérienne

Site MathsTICE de Adama Traoré Lycée Technique Bamako

I – Définition:

La fonction exponentielle notée **exp** est la bijection réciproque de la fonction logarithme notée **ln**.

$$]0 ; +\infty[\xrightleftharpoons[\text{exp}]{\ln} \mathbb{R}$$

$$\text{exp} : \mathbb{R} \rightarrow]0 ; +\infty[$$

$$x \mapsto \text{exp}(x)$$

Pour tout réel x , $\text{exp}(x) > 0$.

a-/ Notation :

On note $\text{exp}(x) = e^x$ et se lit « exponentielle de x » ou « e puissance x ».

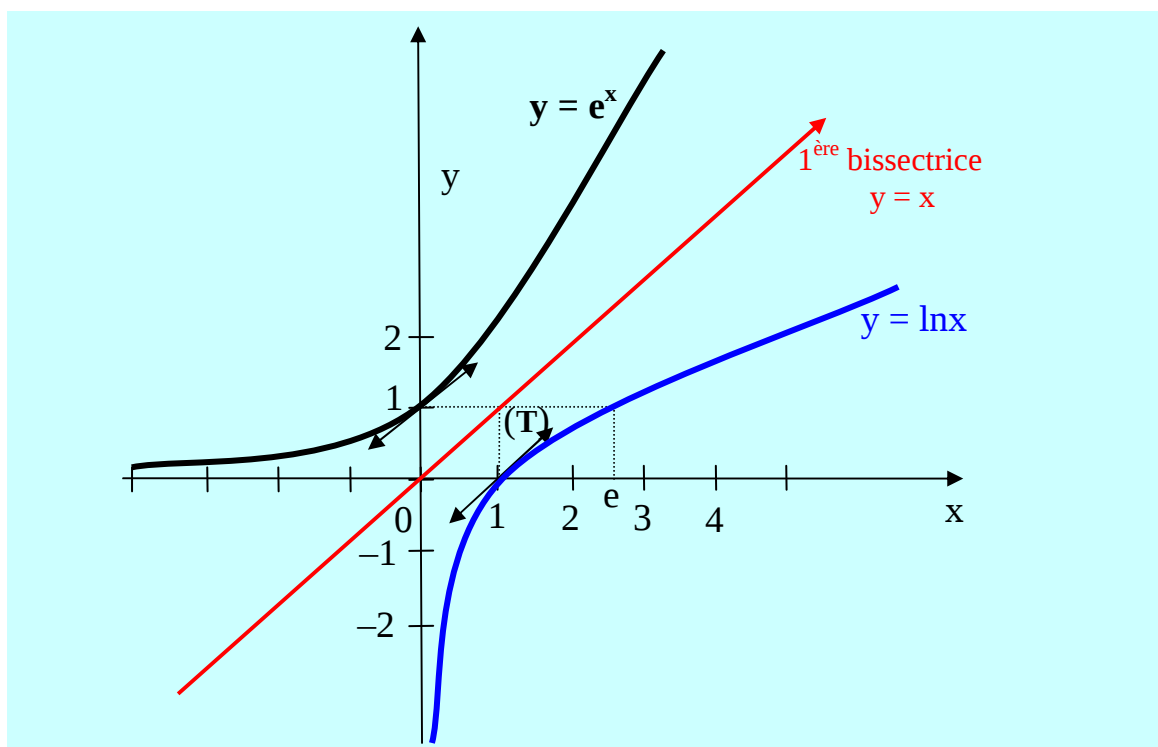
b-/ Conséquences immédiates :

c₁) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}_+^*$ on a : $y = e^x \Leftrightarrow \ln y = x$.

c₂) $\ln(e^x) = x$ et $e^{\ln x} = x$;

c₃) De $0 = \ln 1$ et de $1 = \ln e$ on déduit que : $e^0 = 1$ et $e^1 = e$.

c₄) Dans un repère orthonormé la courbe représentant la fonction exponentielle est le symétrique orthogonal de la courbe de la fonction logarithme par rapport à la première bissectrice d'équation $y = x$.



II – Propriétés algébriques de la fonction exponentielle:

P₁) Pour tout nombre réel x et y : $e^{x+y} = e^x \times e^y$.

Preuve

Posons $A = e^x$ et $B = e^y$ donc $x = \ln A$ et $y = \ln B$; $x+y = \ln A + \ln B \Leftrightarrow x+y = \ln(AB)$;

$$e^{(x+y)} = e^{\ln(AB)} \Leftrightarrow e^{(x+y)} = AB \Leftrightarrow e^{x+y} = e^x \times e^y . \text{ (C.Q.F.D)}$$

P₂) $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} = \frac{1}{e^x}$.

P₃) Pour tout réels x et y : $\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$.

P₄) Pour tout réels x et r : $(e^x)^r = e^{rx}$.

P₅) Pour tout réels a et b : $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$.

Exemple :

Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{2x} - e^x - 6 = 0$; $S = \{\ln 3\}$.

III – Etude de la fonction exponentielle:

1-/ Ensemble de définition :

$$\mathcal{D} = \mathbb{R}.$$

2-/ Limites aux bornes de $\mathcal{D}$:

On sait que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ on déduit que $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$.

De $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ on déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

3-/ Dérivée de $(\exp \circ u)$: (u est une fonction)

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I .

$$[e^u]' = u' \times e^u \text{ en particulier : } f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x .$$

4-/ Sens de variation :

Soit $y = e^x$ on a : $y' = e^x > 0$ donc la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

IV – Recherche de quelques limites:

1-/ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = (e^x)'(0) = 1$ d'où on a : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

2-/ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = -\infty \times 0$ F. ind

Posons $x = \ln t$, $t > 0$; si x tend vers $-\infty$ alors t tend vers 0^+ : $x = \ln t \Leftrightarrow e^x = t$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = \lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln t = 0^-$ d'où $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0^-$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^\alpha e^x = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

3-/ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = \frac{+\infty}{+\infty}$ Forme indéterminée.

Posons $x = \ln t$, $t > 0$; si x tend vers $+\infty$ alors t tend vers $+\infty$: $x = \ln t \Leftrightarrow e^x = t$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{\ln t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{\ln t}{t}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$. D'où on en déduit que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

V – Nouvelles Primitives:

Théorème : Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I .

, Une primitive de $u'e^u$ est e^u . $\forall x \in I \int u'(x) e^{u(x)} dx = e^{u(x)}$.

. Si $f(x) = e^{ax+b}$ alors $F(x) = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c$.

Exemple : $f(x) = (2x + 3) e^{-x^2+3x+1} \Rightarrow F(x) = -e^{-x^2+3x+1} + c$.

VI – Extension de l'exponentielle:(Application aux complexes)

Par convention, pour tout nombre complexe de module 1 et d'argument x on pose :

$Z = \cos x + i \sin x = e^{ix}$ et $\overline{Z} = \cos x - i \sin x = e^{-ix}$.

▪ Conséquence : (Formule d'Euler)

$Z + \overline{Z} = 2 \cos x = e^{ix} + e^{-ix} \Leftrightarrow \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$.

$Z - \overline{Z} = 2i \sin x = e^{ix} - e^{-ix} \Leftrightarrow \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$.

VII – Fonction exponentielle à base a : ($a > 0$ et $a \neq 1$)

1-/ **Définition** : Les fonctions exponentielle à base quelconque a notée : $\exp_a$ sont les réciproques des fonctions logarithmes de base a .

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\log_a} & y = \log_a(x) \\ x = \exp_a(y) & \xleftarrow{\exp_a} & y \end{array}$$

On note la fonction exponentielle à base a par : pour tout réel x :

$$\exp_a(x) = a^x = e^{x \ln a}.$$

2-/ **Remarque** : Si $a = e$ alors on a : $e^x = \exp_e(x)$.

VIII – Croissances comparées des fonctions de référence :

1-/ **Fonction puissance et fonction logarithme** :

- **Propriété** :(admise)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0.$$

Au voisinage de $+\infty$ la fonction puissance croît plus vite que **ln** (ou encore la puissance l'emporte sur **ln**).

2-/ **Fonction exponentielle et puissance** :

- **Propriété** :(admise)

Soit α un réel quelconque.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0.$$

Ces deux limites traduisent le fait que au voisinage de $+\infty$ la fonction exponentielle l'emporte sur toute fonction puissance en croissance.